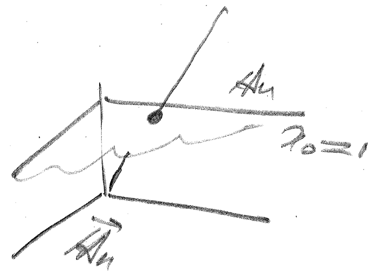
GEOMETRÍA AFÍN DESDE EL PROYECTIVO: (7-1

① Extensión proyectiva de transformaciones afines

Sea.

$\mathbb{P}_n = \mathbb{A}_n \cup \infty_{\mathbb{A}_n}$ donde




$$\mathbb{A}_n = \{(x_0:x_1:\dots:x_n) / x_0 \neq 0\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix} \mid (X_1, \dots X_n) \in \mathbb{R}^n \right\}$$

hemos identificado $(x_0:x_1:\dots:x_n) \underset{x_0\neq 0}{=} (1: \frac{x_1}{x_0}: \dots : \frac{x_n}{x_0}) =$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix} \text{ donde } X_1 = \frac{x_1}{x_0}, \dots, X_n = \frac{x_n}{x_0}$$

que es un espacio afín sobre

$$\vec{\mathbb{A}}_n = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} : (x_1 - x_n) \in \mathbb{R}^n \right\}$$

si $a = \begin{pmatrix} 1 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 1 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ tenemos $\vec{ab} = \begin{pmatrix} 0 \\ b_1 - a_1 \\ \vdots \\ b_n - a_n \end{pmatrix} \in \vec{\mathbb{A}}_n$

y $a + \begin{pmatrix} 0 \\ v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ a_1 + v_1 \\ \vdots \\ a_n + v_n \end{pmatrix} \in \mathbb{A}_n$.

notación $a = \begin{pmatrix} 1 \\ \vec{a} \end{pmatrix}$ $\quad v = \begin{pmatrix} 0 \\ \vec{v} \end{pmatrix}$

entonces $\infty_{\mathbb{A}_n} = \mathbb{P}(\vec{\mathbb{A}}_n) = \{(0:x_1, \dots x_n) / (x_1 - x_n) \in \mathbb{R}^n - \{0\}\}$

---

una homografía $\mathbb{P}_n \xrightarrow{f} \mathbb{P}_n$ viene dado por

$$\begin{pmatrix} x'_0 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \text{ donde } A = \begin{pmatrix} a_{00} & \cdots & a_{0n} \\ \vdots & & \\ a_{n0} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

es una matriz no singular

de forma que $\begin{bmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \xrightarrow{f} \begin{bmatrix} x'_0 \\ \vdots \\ x'_n \end{bmatrix} = \left[ A \begin{pmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \right]$

Nos preguntamos, cuales son las homografías de $\mathbb{P}_n$ que envían $\infty_{A_n} \xrightarrow{f} \infty_{A_n}$.

¿quien es $f^{-1}(\infty_{A_n}) = \left\{ \begin{bmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \middle/ A\begin{pmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \right\}$

$f^{-1}(\infty_{A_n})$: $a_{00}x_0 + \cdots + a_{0n}x_n = 0$

entonces $f^{-1}(\infty_{A_n}) = \infty_{A_n} \Longleftrightarrow a_{00} \neq 0 \quad a_{01} = \cdots = a_{0n} = 0$

dividiendo $A$ por $a_{00}$ podemos suponer

$$A = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{10} & a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \\ a_{n0} & a_{n1} & & a_{nn} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \cdots 0 \\ \hline \vec{a}_0 & \vec{A} \end{array}\right)$$ y entonces

la homografía tiene de ecuaciones $f|_{A_n} : A_n \to A_n$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{10} & a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & & \\ a_{n0} & a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ x_1' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix}$$ pero

esto es una transformación afín pues se escribe de la forma:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ X' \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline \vec{a} & \vec{A} \end{array}\right) \begin{pmatrix} 1 \\ X \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ \vec{a} + \vec{A} X \end{pmatrix} \qquad \begin{cases} X_1' = a_{10} + a_{11}X_1 + \cdots + a_{1n}X_n \\ \vdots \\ X_n' = a_{n0} + a_{n1}X_1 + \cdots + a_{nn}X_n \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} X_1' \\ \vdots \\ X_n' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{10} \\ \vdots \\ a_{n0} \end{pmatrix} + \vec{A} \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix}$$

que es una transformación afín.

Recíprocamente, toda transformación afín $\mathbb{A}_n \xrightarrow{F} \mathbb{A}_n$ se escribe.

$$F: \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & - & 0 \\ \hline a_{10} & a_{11} & - & a_{1n} \\ | & | & & \\ a_{n0} & a_{n1} & & a_{nn} \end{array}\right)\begin{pmatrix} 1 \\ x_1 \\ | \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ x_1' \\ | \\ x_n' \end{pmatrix}$$

admite una única extensión proyectiva

$$\tilde{F}: \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & - & 0 \\ \hline a_{10} & a_{11} & - & a_{1n} \\ | & | & & \\ a_{n0} & a_{n1} & - & a_{nn} \end{array}\right)\begin{pmatrix} x_0 \\ | \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0' \\ | \\ x_n' \end{pmatrix} \quad : \tilde{F} = [\hat{F}]$$

tal que $\tilde{F}|_{\mathbb{A}_n} = F : \mathbb{A}_n \to \mathbb{A}_n$.

Además $\tilde{F} : \infty_{\mathbb{A}_n} \longrightarrow \infty_{\mathbb{A}_n}$ es una transformación proyectiva de ecuación.

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix} = \vec{A}\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \qquad (*)$$

respecto al sistema de coordenadas homogéneas que asigna al punto $\begin{bmatrix} 0 \\ x_1 \\ | \\ x_n \end{bmatrix} \in \infty_{\mathbb{A}_n} \to \begin{bmatrix} x_1 \\ | \\ x_n \end{bmatrix} \in \mathbb{P}_{n-1}$

Las ecuaciones representan también las de la transformación lineal $\vec{F} : \vec{\mathbb{A}}_n \to \vec{\mathbb{A}}_n$ en la base canónica $(\vec{u}_1, \ldots \vec{u}_n)$ donde

$$\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots \vec{u}_n = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

tenemos entonces $\tilde{F}\Big|_{\infty_{\mathbb{A}_n}} = [\vec{F}] : \infty_{\mathbb{A}_n} \to \infty_{\mathbb{A}_n}$

$$\hat{F} : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^{n+1} \text{ lineal} \qquad \begin{cases} \tilde{F} = [\hat{F}] : \mathbb{P}_n \to \mathbb{P}_n \\ F = \tilde{F}|_{\mathbb{A}_n} : \mathbb{A}_n \to \mathbb{A}_n \\ \vec{F} = \hat{F}|_{\vec{\mathbb{A}}_n} : \vec{\mathbb{A}}_n \to \vec{\mathbb{A}}_n \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ | \\ x_n \end{pmatrix} \to \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline a_0 & \vec{A} \end{array}\right)\begin{pmatrix} x_0 \\ | \\ x_n \end{pmatrix}$$

(2) SISTEMAS DE REFERENCIA CARTESIANOS 

Un sistema de referencia cartesiano (SRC) en $A_n$ viene dado por un pto $p_0 \in A_n$ y una base $\{(\vec{p}_1 \cdots \vec{p}_n)\}$ de $\vec{A}_n$ y se escribe

$$(p_0, \vec{p}_1, \cdots \vec{p}_n) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ p_{00} & p_{11} & & p_{1n} \\ | & | & & \\ p_{n0} & p_{n1} & & p_{nn} \end{pmatrix} \doteq P = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline p_0 & \overline{P} \end{array}\right)$$

Si $y \in A_n$, entonces $\vec{p_0 y} \in \vec{A}_n$ y podemos escribir $\vec{p_0 y} = y_1 \vec{p}_1 + \cdots + y_n \vec{p}_n$ decimos entonces que $(y_1 - y_n)$ son las coordenadas cartesianas de $y$ en el SRC $(p_0, \vec{p}_1 - \vec{p}_n)$.

Así $(i_0, \vec{i}_1, \cdots \vec{i}_n) = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & 1 & & 0 \\ | & & \ddots & \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{array}\right)$

es el sistema de referencia canónico.

en donde las coordenadas de $x = \begin{pmatrix} 1 \\ x_1 \\ | \\ x_n \end{pmatrix}$ son $(x_1, \cdots x_n)$.

tenemos entonces la identidad

$$\begin{pmatrix} 1 \\ x_1 \\ x_n \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline p_0 & \overline{P} \end{array}\right) \begin{pmatrix} 1 \\ y_1 \\ | \\ y_n \end{pmatrix}$$ que son

las ecuaciones del cambio de coordenadas

o bien

$$\begin{pmatrix} 1 \\ y_1 \\ y_n \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline p_0 & \overline{P} \end{array}\right)^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

• SISTEMA DE REFERENCIA PROYECTIVO ASOCIADO (7-5)

El sistema de referencia cartesiano $(p_0, \vec{p}_1, \dots, \vec{p}_n)$ determina una base de $\mathbb{R}^{n+1}$ y por tanto un sistema de referencia proyectivo en $\mathbb{P}_n$

$$\left(p_0 = [p_0],\ p_1 = [\vec{p}_1], \dots, p_n = [\vec{p}_n];\ p = [p_0 + \vec{p}_1 + \dots + \vec{p}_n]\right)$$

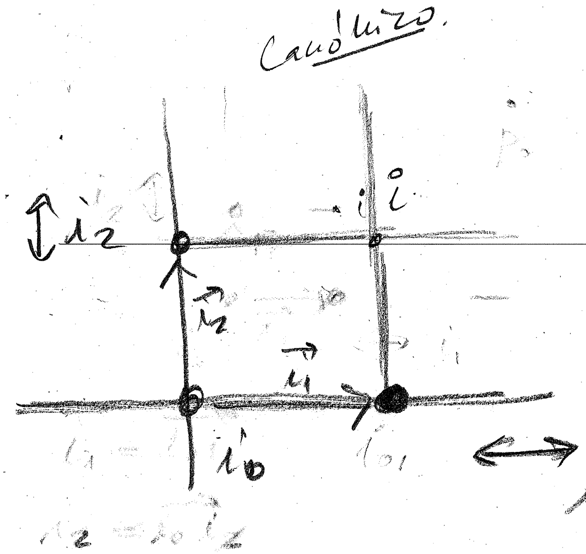
en donde $p_0 \in A_n$, $p \in A_n$ y $p_1, \dots, p_n \in \partial A_n$

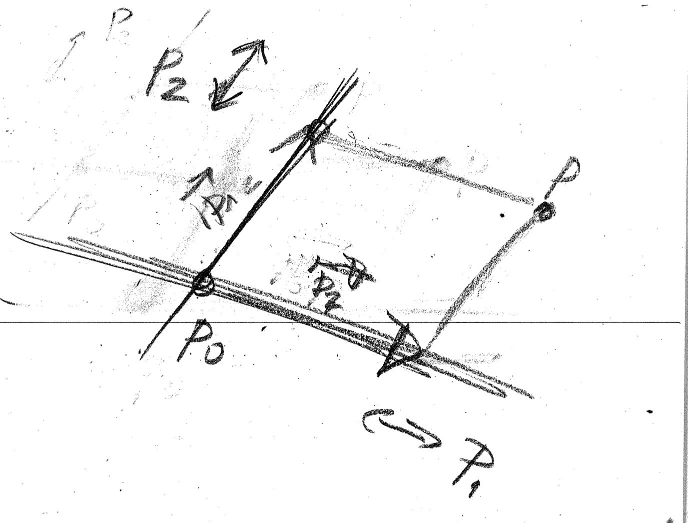
que se denomina sistema de referencia proyectivo asociado a $(p_0, \vec{p}_1, \dots, \vec{p}_n)$. En donde el punto

$$(p_0, \vec{p}_1, \dots, \vec{p}_n)\begin{pmatrix}1\\ y_1\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix}$$

de coordenadas cartesianas $(y_1, \dots, y_n)$ tiene coordenadas homogéneas $[1, y_1, \dots, y_n]$

En el plano afín $A_2$ tenemos




Si $(q_0; \vec{q}_1, \dots, \vec{q}_n)$ es otro sistema de referencia cartesiano escribimos

$$(q_0, \vec{q}_1, \dots, \vec{q}_n) = (p_0, \vec{p}_1, \dots, \vec{p}_n)\, C$$

con $C = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \dots & 0 \\ c_{00} & c_{10} & & c_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \\ c_{n0} & c_{n1} & \dots & c_{nn} \end{array}\right)$ que es la matriz del cambio, entonces, si el punto $x$ tiene coordenadas $(z_1, \dots z_n)$ respecto al sistema $(q_0, \vec{q}_1, \dots \vec{q}_n)$ ¿cuales son sus coordenadas $(y_1, \dots y_n)$ respecto a $(p_0, \vec{p}_1, \dots \vec{p}_n)$?

Tenemos

$$x = (q_0, \vec{q}_1, \dots \vec{q}_n) \begin{pmatrix} 1 \\ z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} = (p_0, \vec{p}_1, \dots \vec{p}_n) C \begin{pmatrix} 1 \\ z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}$$

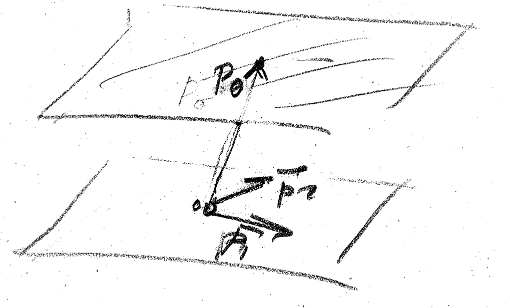
así tenemos $\begin{pmatrix} 1 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} 1 \\ z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}$.

o también $\begin{pmatrix} 1 \\ z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} = C^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$

la matriz $C$ también representa la matriz del cambio de coordenadas $(z_0 \dots z_n)$ del sistema de referencia proyectivo asociado $(q_0, q_1 \dots q_n; q)$ a las coordenadas $(y_0 \dots y_n)$ respecto al sistema de referencia proyectivo $(p_0, p_1, \dots p_n; p)$ asociado a $(p_0; \vec{p}_1, \dots \vec{p}_n)$

es decir $\begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} z_0 \\ z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}$

$A_2$



**NOTA.** 

Decíamos que al sistema de referencia cartesiano (SRC) $\mathcal{R}=(p_0,\vec{p}_1,\dots\vec{p}_n)$ le asociamos el sistema de referencia proyectivo, $\tilde{\mathcal{R}}=(p_0, p_1=[\vec{p}_1],\dots, p_n=[\vec{p}_n]; p=[p_0+\vec{p}_1+\dots\vec{p}_n])$ en donde $p_0, p\in A_n$ y $p_1,\dots p_n\in \infty_{A_n}$

Recíprocamente:

$\mathcal{P}=(p_0, p_1,\dots p_n; p)$ es un sistema de referencia proyectivo, tal que $p_0,p\in A_n$ y $p_1,\dots p_n\in\infty_{A_n}$, entonces existen $(\vec{p}_1,\dots\vec{p}_n)$ base de $\vec{A}_n$ de forma $\mathcal{R}=(p_0;\vec{p}_1,\dots\vec{p}_n)$ es el SRC que da lugar a $\mathcal{P}$, es decir $\tilde{\mathcal{R}}=\mathcal{P}$.

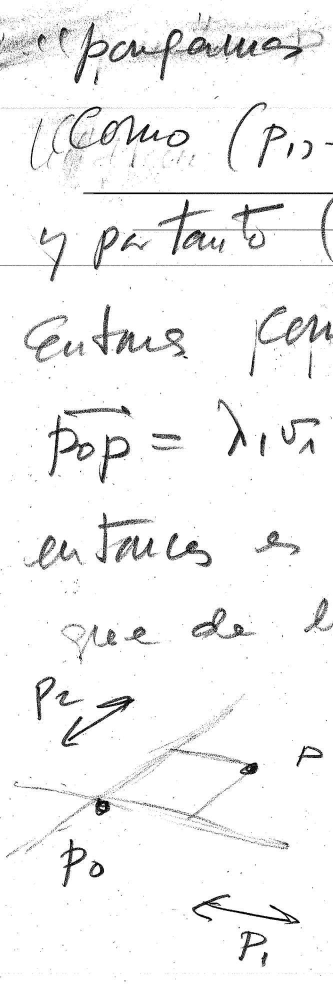
Demostración:

Supongamos $p_i=[v_i]$ con $v_i\in\vec{A}_n$ $i=1\dots n$ y como $(p_1,\dots,p_n)$ son p.i $\Rightarrow (v_1,\dots,v_n)$ son l.i y por tanto $(v_1,\dots,v_n)$ son base de $\vec{A}_n$.

Entonces como $\overrightarrow{p_0p}\in\vec{A}_n$ podemos escribir:

$\overrightarrow{p_0p}=\lambda_1v_1+\dots+\lambda_nv_n$. sea $\vec{p}_i=\lambda_iv_i$

entonces es $\mathcal{R}=(p_0;\vec{p}_1,\dots\vec{p}_n)$ un SRC que da lugar a el SRP $\mathcal{P}$.



Dado S.R.C. $(p_0, \vec{p}_1, \dots \vec{p}_n) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ p_{10} & p_{11} & \cdots & p_{1n} \\ \vdots & & & \\ p_{n0} & p_{n1} & \cdots & p_{nn} \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline p & \vec{P} \end{array}\right)$

y otro $(q_0, \vec{q}_1, \dots \vec{q}_n) = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline q & \vec{Q} \end{array}\right)$, existe una única transformación afín $\left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline a & \vec{A} \end{array}\right) : \mathbb{A}_n \to \mathbb{A}_n$ que lleva uno a otro.

En efecto, tenemos

$$\left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline a & \vec{A} \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline p & \vec{P} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline q & \vec{Q} \end{array}\right) \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline a & \vec{A} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline q & \vec{Q} \end{array}\right) \cdot \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline p & \vec{P} \end{array}\right)^{-1}$$

## SISTEMA DE REFERENCIA AFÍN

Un conjunto $(p_0, \dots p_r) \subset \mathbb{A}_n$ se dice afínmente independiente, si son proyectivamente independientes. Esto equivale a decir que los vectores $(p_0, \dots p_r) \subset \mathbb{R}^{n+1}$ son linealmente independientes.

Un sistema de referencia afín (SRA) es una familia $\mathcal{P} = (p_0, p_1, \dots p_n) \subset \mathbb{A}_n$ que son afínmente independientes. Es decir $(p_0, p_1, \dots p_n)$ constituyen una base de $\mathbb{R}^{n+1}$.

si $\mathcal{P}=(p_0,p_1,\dots p_n)\subset \mathbb{A}_n$ es un SRA, entonces $\mathcal{R}_{\mathcal{P}}=(p_0,\overrightarrow{p_0p_1},\dots,\overrightarrow{p_0p_n})$ es un SRC. y

tenemos el siguiente

COROLARIO

si $\mathcal{P}=(p_0,\dots p_n)$, $\mathcal{Q}=(q_0,\dots q_n)$ son dos SRA en $\mathbb{A}_n$, entonces existe una única transformación afín $f:\mathbb{A}_n\to\mathbb{A}_n$ con $f(\mathcal{P})=\mathcal{Q}$.

Demostración

Se trata de la transformación afín única que lleva el SRC $\mathcal{R}_{\mathcal{P}}$ al SRC $\mathcal{R}_{\mathcal{Q}}$.

COORDENADAS BARICENTRICAS.

Fijado $\mathcal{P}=(p_0,\dots p_n)$ SRA de $\mathbb{A}_n$, cada punto $x\in\mathbb{A}_n$ se puede escribir de forma única como

$$x=\begin{pmatrix}1\\x_1\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}=\lambda_0p_0+\dots+\lambda_np_n=\left(\begin{array}{c|ccc}1&0&\cdots&0\\\hline p_{10}&p_{11}&\cdots&p_{1n}\\\vdots&\vdots&&\\p_{n0}&p_{n1}&\cdots&p_{nn}\end{array}\right)\begin{pmatrix}\lambda_0\\\vdots\\\lambda_n\end{pmatrix}$$

así $\lambda_0+\dots+\lambda_n=1$, y se denominan a $(\lambda_0,\dots\lambda_n)$ coordenadas afines (o baricéntricas) de $x$ respecto al SRA $\mathcal{P}$.