PRELIMINAR (ENVIAR UN HIPERPLANO AL INFINITO) (8-1)

Si A es un espacio afín, $a, b \in A$ son dos puntos distintos, entonces

$r : \{ x = a + \mu \vec{ab} \ / \ \mu \in \mathbb{R} \}$ es la recta afín definida por los pts a y b

Si $x = a + \mu \vec{ab}$ entonces $\vec{ax} = \mu \vec{ab}$

y $\mu = \dfrac{\vec{ax}}{\vec{ab}} = (abx)$ razón simple.

pongamos entonces $a = \begin{pmatrix} 1 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 1 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \in \mathbb{A}_n$.

entonces

$$r : \begin{cases} x_1 = a_1 + \mu(b_1 - a_1) \\ \vdots \\ x_n = a_n + \mu(a_n - b_n) \end{cases}$$ y su extensión

proyectiva es:

$$\tilde{r} : \begin{cases} x_0 = \lambda \\ x_1 = a_1 \lambda + \mu(b_1 - a_1) \\ \vdots \\ x_n = a_n \lambda + \mu(b_n - a_n) \end{cases} \qquad \Bigg\| \qquad \text{Si } \lambda \neq 0 \Downarrow \ (abx) = \frac{\mu}{\lambda}$$

y $\infty_r = \tilde{r} \cap \infty_{\mathbb{A}_n} = (b_1 - a_1 : \cdots : b_n - a_n)$

entonces $\mu : \tilde{r} \longrightarrow \mathbb{P}_1$ es un sistema de coordenadas

$x \longmapsto (\lambda : \mu)$

$(abx) = \mu / \lambda$

homogéneas.

Obtenemos cuánto vale para $x = \binom{1}{x} \in$ (8-2

$[a, \infty_r, b, x] =$

$= [h(a), h(\infty_r), h(b), h(x)] = \quad (*)$

$h(a) = (1:0)$

$h(\infty_r) = (0:1)$

$h(b) = (1:1)$

$h(x) = (\lambda:\mu) \quad (\lambda \neq 0)$

$$(*) = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & \mu \end{vmatrix} \Big/ \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 0 & \lambda \\ 1 & \mu \end{vmatrix} \Big/ \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}} =$$

$$= \frac{\mu}{\lambda} = (abc) = [a, \tilde{r} \cap \infty_{A_n}, b, x]$$

~~TEOREMA~~.

Si r es una recta afín en A_n y $\tilde{r}$ su extensión proyectiva, entonces $\forall a, b, x \in r$ con $a \neq b$ entonces

$(abx) = [a, \infty_r, b, x]$

ENVIAR UN HIPERPLANO AL INFINITO

Sea $P = P_n$ un espacio proyectivo y H un hiperplano de P.

Se trata de dar estructura afín canónica de dimensión n al conjunto $A = P - H$ de forma que las rectas r de A sean la intersección de rectas $\tilde{r}$ de P intersección A. Es decir

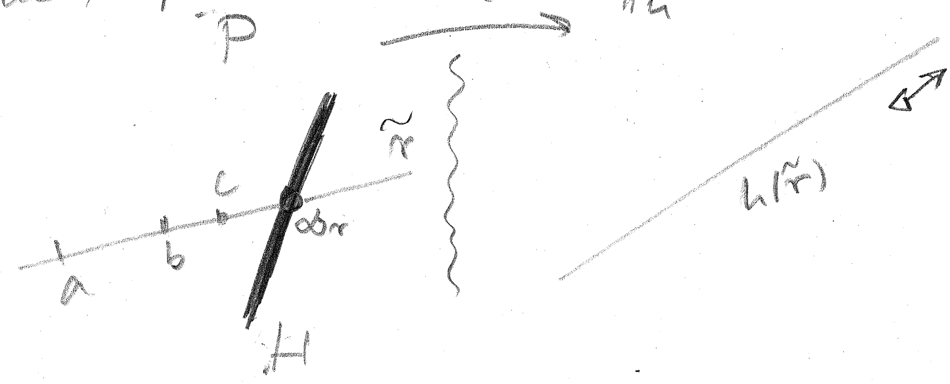
"r recta afín de $A \Leftrightarrow \exists\, \tilde{r}$ recta proyectiva de P de forma que $r = \tilde{r} \cap A$."

Además, vamos a exigir que si a, b, c son tres puntos de r con $a \neq b$, la razón simple

$$(a; b, c) = \frac{\overline{ac}}{\overline{ab}} = [a, \tilde{r} \cap H, b, c].$$

Demostración:

Basta tomar un S.C.H $h: P \to \mathbb{P}_n$ tal que $h(H) = \infty_{\mathbb{A}_n}$ y así $h|_A : A \to \mathbb{A}_n$ es una biyección.



"Copiamos" la estructura afín a A declarando que

$h_c = h|_A : A \to \mathbb{A}_n$ es un isomorfismo afín

supongamos que $\tilde{r}$ es una recta proyectiva de P que corta a H en $\tilde{r} \cap H = \infty_r$ y sea

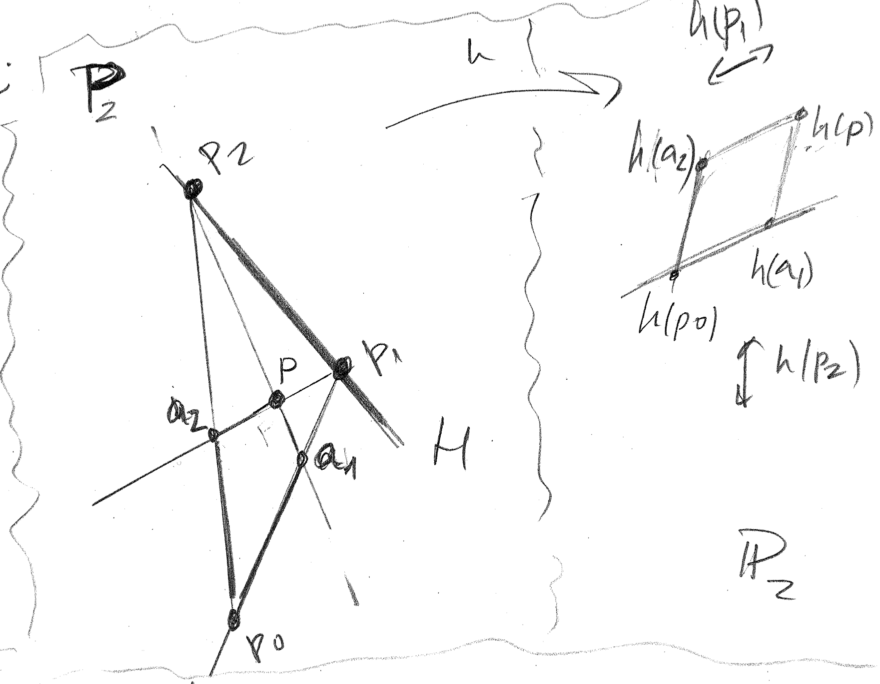
$r = \tilde{r} \cap A = \tilde{r} - \{\infty_r\}$ entonces r es "por definición" una recta afín de A ya que [illegible] en $\mathbb{A}_n$

$h(\tilde{r})$ es una recta proyectiva de $\mathbb{P}_n$ y
$h(\tilde{r}) \cap A_n = h(r)$ es una recta afín. de A_n.
Por otra parte, si $a, b, c \in r$ entonces

$$(a; b, c) = (h(a); h(b), h(c)) =$$
$$= [h(a), \infty_{h(r)}, h(b), h(c)] =$$
$$= [h(a), h(\infty_r), h(b), h(c)] =$$
$$= [a, \infty_r, b, c]$$

y la última igualdad es consecuencia de que h es homografía, y por tanto preserva la razón doble.

$$h(H) = \infty_{A_2}$$



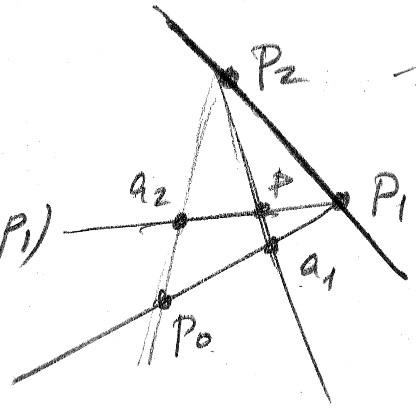
En el espacio afín $A = \mathbb{P}_2 - H$ se ve que $(p_0; \overrightarrow{p_0a_1}, \overrightarrow{p_0a_2})$ es un sistema de referencia cartesiano con sistema de referencia proyectivo asociado
(p_0, p_1, p_2, p)
obsérvese que p_0, a_1, p, a_2 son los vértices de un paralelogramo es decir
$\overrightarrow{p_0a_1} = \overrightarrow{a_2p}$, $\overrightarrow{p_0a_2} = \overrightarrow{a_1p}$

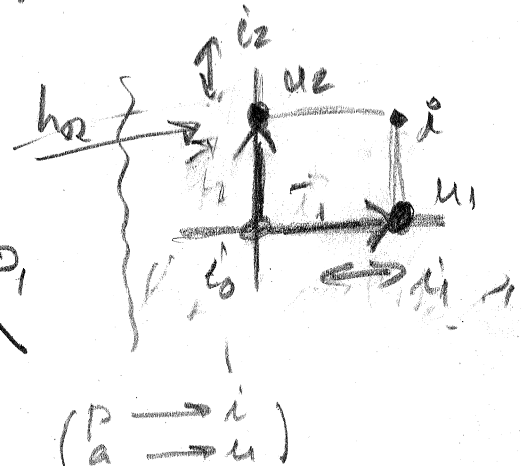
TEOREMA

Sea P un plano proyectivo, H una recta de P y p_0, a_1, a_2 tres puntos independientes del espacio afín $A = P - H$

Sea

$$\begin{cases} p_1 = V(p_0,a_1) \cap H \\ p_2 = V(p_0,a_2) \cap H \\ p = V(a_1,p_2) \cap V(a_2,p_1) \end{cases}$$





Entonces el sistema de referencia proyectivo $R = (p_0, p_1, p_2; p)$ induce un sistema de coordenadas homogeneas $(y_0 : y_1 : y_2)_R$

de forma que $\begin{cases} Y_1 = \dfrac{y_1}{y_0} \\ Y_2 = \dfrac{y_2}{y_0} \end{cases}$

son las coordenadas cartesianas en $A = P - H$, en el sistema de referencia cartesiano $C = (p_0, \overrightarrow{p_0 a_1}, \overrightarrow{p_0 a_2})$

Es decir:

si $y = (y_0 : y_1 : y_2)_R$ $y_0 \neq 0$ entonces $y \in P - H$ y $y = (y_1/y_0, y_2/y_0)_C$

(8-6)

Demostración.

El SCH $(y_0 : y_1 : y_2)_{\mathcal{R}}$ viene definido por

$$p_0 = (1:0:0)_{\mathcal{R}}$$
$$p_1 = (0:1:0)_{\mathcal{R}} \in \infty_{\mathbb{A}_2}$$
$$p_2 = (0:0:1)_{\mathcal{R}} \in \infty_{\mathbb{A}_2}$$
$$p = (1:1:1)_{\mathcal{R}}$$

$$H = V(p_1, p_2) : (y_0 = 0)_{\mathcal{R}}$$

Sabemos que el espacio afín $A = P - H$ se "maneja" usando coordenadas cartesianas $(Y_1, Y_2)_{\mathcal{R}_c}$

$$Y_1 = \frac{y_1}{y_0} \qquad Y_2 = \frac{y_2}{y_0} \qquad \text{es decir}$$

$$A \ni y = (y_0 : y_1 : y_2)_{\mathcal{R}} \Longrightarrow y = \left(\frac{y_1}{y_0}, \frac{y_2}{y_0}\right)_{\mathcal{R}_c} \in \mathbb{A}_2.$$
$$y_0 \neq 0$$

pero como $\begin{cases} a_1 = V(p_2, p) \cap V(p_0, p_1) \\ a_2 = V(p_1, p) \cap V(p_0, p_2) \end{cases}$

"haciendo cuentas" en coordenadas $(y_0 : y_1 : y_2)$ llegamos a que

$$a_1 = (1:1:0)_{\mathcal{R}} \Longrightarrow a_1 = (1,0)_{\mathcal{R}_c} = (1,0)_e$$
$$a_2 = (1:0:1)_{\mathcal{R}} \Longrightarrow a_2 = (0,1)_{\mathcal{R}_c} = (0,1)_e$$
$$p_0 = (0:0:1)_{\mathcal{R}} \Longrightarrow p_0 = (0,0)_{\mathcal{R}_c} = (0,0)_e$$

por tanto como las coordenadas cartesianas e y $\mathcal{R}_c$ toman los mismos valores en tres ptos independientes, se concluye que son iguales: $(Y_1, Y_2)_{\mathcal{R}_c} = (Y_1, Y_2)_e$

Ejemplo.

Nos proponemos enviar al infinito el hiperplano H de $\mathbb{P}_2$ de ecuación $3x_0+2x_1+x_2=0$

Podemos aplicar el siguiente "truco"

$$\begin{array}{ccc} (x_0:x_1:x_2) & & (y_0:y_1:y_2) \\ \mathbb{P}_2 & \xrightarrow{h} & \mathbb{P}_2 \end{array}$$

Construimos $h:\mathbb{P}_2 \longrightarrow \mathbb{P}_2$ que envía

$$\begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \xrightarrow{h} \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \text{ tal que } \left\{ \begin{array}{l} y_0 = 3x_0+2x_1+x_2 \\ y_1 = x_1 \\ y_2 = x_2 \end{array} \right.$$

entonces si $(x_0:x_1:x_2)\in H$ entonces $3x_0+2x_1+x_2=0$ y su transformado por h $(y_0:y_1:y_2)$ verifica $y_0=0$ así resulta ahora que

$$\mathbb{P}_2-H \ni \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 3x_0+2x_1+x_2 \\ x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \dfrac{x_1}{3x_0+2x_1+x_2} \\ \dfrac{x_2}{3x_0+2x_1+x_2} \end{pmatrix}$$

y resulta que $\left\{ \begin{array}{l} y_1 = \dfrac{x_1}{3x_0+2x_1+x_2} \\ y_2 = \dfrac{x_2}{3x_0+2x_1+x_2} \end{array} \right.$

son las coordenadas cartesianas de

$$\begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{P}_2-H$$

pregunta: (8-8)

¿cual es el sistema de referencia proyectivo $\mathcal{R}(p_0, p_1, p_2 ; p)$ en $\mathbb{P}_2$ que da lugar al sistema de referencia cartesiano $(p_0, \overrightarrow{p_0q_1}, \overrightarrow{p_0q_2})$ en $P-H$ que induce las coordenadas cartesianas y_1 y_2 anteriores?

Respuesta:

$$\begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \xrightarrow{h} \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \left[\overbrace{\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}^{A} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \right]$$

tomando la inversa de la matriz A tenemos que las ecuaciones de h^{-1} son.

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/3 & -2/3 & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

y las ecuaciones de h^{-1} son.

$$\left[\begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \right] = \left[\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \right]$$

así

$$\left\{ \begin{array}{l} p_0 = (1:0:0) \xrightarrow{h} (1:0:0) \\ p_1 = (-2:3:0) \xrightarrow{h} (0:1:0) \\ p_2 = (1:0:3) \xrightarrow{h} (0:0:1) \\ p = (0:3:3) \xrightarrow{h} (1:1:1) \end{array} \right.$$

y el sistema de referencia proyectivo es

$p_0 = (1:0:0)$, $p_1 = (-2:3:0)$, $p_2 = (1:0:3)$

$p = (0:1:1)$ ... podemos calcular

$q_1 = V(p_0, p_1) \cap V(p, p_2)$ $\quad q_2 = V(p_0, p_2) \cap V(p, p_1)$