AFINIDADES

Sea $P = P_n$ un espacio proyectivo.

Una transformación proyectiva $f : P \to P$ se llama afinidad, si existe H hiperplano de P invariante por f, es decir $f(H) = H$.

En este caso, tomando un sistema de coordenadas homogéneas $h : P \to \mathbb{P}_n$ tal que $h(H) = \infty_{\mathbb{A}_n}$ tenemos que las ecuaciones

$$\begin{array}{ccc} P & \xrightarrow{f} & P \\ h \downarrow & & \downarrow h \\ \mathbb{P}_n & \xrightarrow[{[A]}]{F} & \mathbb{P}_n \end{array}$$

sean $F = [A]$

$$\left[\begin{pmatrix} x'_0 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}\right] = \left[A \begin{pmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}\right]$$

$$\begin{array}{ccc} P-H & \xrightarrow{f_a} & P-H \\ \downarrow h_a & & \downarrow h_a \\ \mathbb{A}_n & \xrightarrow{F_a} & \mathbb{A}_n \end{array}$$

pero, se verifica

(f_a, F_a, h_a son las correspondientes restricciones)

$$F(\infty_{\mathbb{A}_n}) = F(h(H)) = h(f(H)) = h(H) = \infty_{\mathbb{A}_n}$$

por tanto podemos elegir A como

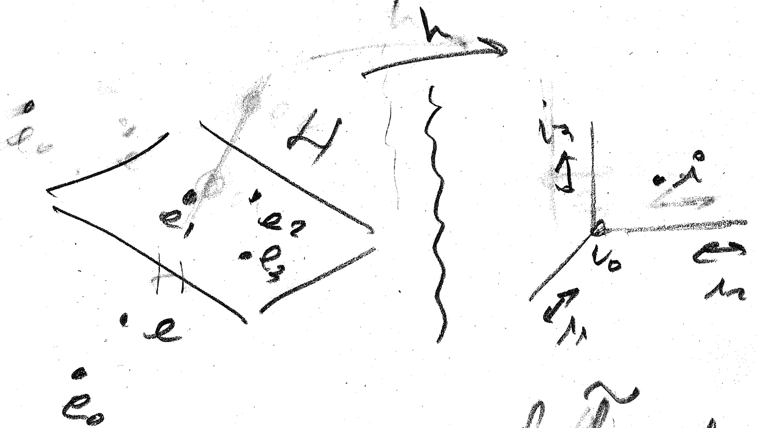
$$A = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \dots & 0 \\ \hline a_{10} & a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & & \\ a_{n0} & a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{array}\right) :: \begin{cases} x'_0 = x_0 \\ x'_1 = a_{10}x_0 + \dots + a_{1n}x_n \\ \vdots \\ x'_n = a_{n0}x_0 + \dots + a_{nn}x_n \end{cases}$$

que $F_a = F|_{\mathbb{A}_n} : \mathbb{A}_n \to \mathbb{A}_n$ es una

transformación afín de ecuaciones

$$\begin{cases} X'_1 = a_{10} + a_{11}X_1 + \dots + a_{1n}X_n \\ \vdots \\ X'_n = a_{n0} + a_{n1}X_1 + \dots + a_{nn}X_n \end{cases}$$

Estas ecuaciones, establecidas en las coordenadas cartesianas inducidas por el sistema de referencia afín dado por el sistema de referencia proyectivo $\mathcal{E}=(e_0, e_1, \dots, e_n, e) =$ tal que $h(\mathcal{E}) = (u_0, u_1, \dots u_n; i)$ que es el canónico de $\mathbb{P}_n$. (9-2)



Entonces decimos que $f = \tilde{f}_a$ es la extensión proyectiva de la transformación afín $f_a = f|_{P-H} : P-H \to P-H$.

En el caso de las transformaciones proyectivas del plano, todas ellas son afinidades pero esto no es así en dimensión 3 pues la homografía de $\mathbb{P}_3 \to \mathbb{P}_3$ dada por

$$\begin{pmatrix} x_0' \\ x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & -\beta_1 & 0 & 0 \\ \beta_1 & \alpha_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_2 & -\beta_2 \\ 0 & 0 & \beta_2 & \alpha_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} \beta_1 \neq 0 \\ \beta_2 \neq 0 \end{matrix}$$

No tiene hiperplanos invariantes ni puntos fijos.

PROPOSICIÓN: toda homografía de $\mathbb{P}_n \to \mathbb{P}_n$ es afinidad cuando n es par.

Recordemos que si tenemos una homografía $f: P_2 \longrightarrow P_2$ en un plano proyectivo P_2, existe un sistema de referencia proyectivo $(e_0, e_1, e_2; e)$ que da lugar a un sistema de coordenadas homogéneas $h: P_2 \longrightarrow \mathbb{P}_2$ de tal manera que en estas coordenadas las ecuaciones de f son sencillas de la forma

$$\begin{pmatrix} x_0' \\ x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = J \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$ con J una matriz del tipo

$$J = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{array}\right), \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{array}\right), \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \alpha & -\beta \\ 0 & \beta & \alpha \end{array}\right)$$

todas ellas dejan invariante el hiperplano $H = V(e_1, e_2)$ y en las coordenadas cartesianas inducidas por el SRC correspondiente al S.R.P $(e_0, e_1, e_2; e)$ sus ecuaciones son

$$(1)^c \begin{cases} X_1' = \lambda X_1 \\ X_2' = \mu X_2 \end{cases} ; (2)^c \begin{cases} X_1' = 1 + X_1 \\ X_2' = \lambda X_2 \end{cases} (3)^c \begin{cases} X_1' = 1 + X_1 \\ X_2' = X_1 + X_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} X_1' = \alpha X_1 - \beta X_2 \\ X_2' = \beta X_1 + \alpha X_2 \end{cases}$$

y en las coordenadas homogéneas

$$(1)^h \begin{cases} x_0' = x_0 \\ x_1' = \lambda x_1 \\ x_2' = \mu x_2 \end{cases} \quad (2)^h \begin{cases} x_0' = x_0 \\ x_1' = x_0 + x_1 \\ x_2' = \lambda x_2 \end{cases} \quad (3)^h \begin{cases} x_0' = x_0 \\ x_1' = x_0 + x_1 \\ x_2' = x_1 + x_2 \end{cases}$$

las que dejan fijos los polos de $H : (x_0 = 0)$

HOMOLOGÍAS.

Una homología en un espacio proyectivo $P=P(E)$ $P=\mathbb{P}_n$ es una transformación proyectiva $f: P \to P$ $\neq Id$, que deja fijos los puntos de un hiperplano H.

Sea $\hat{f}: E \to E$ la transformación lineal asociada a f y $\hat{H}$ tal que $P(\hat{H})=H$.

Entonces $\forall\ \hat{x} \in \hat{H}$ se tiene que

$f([\hat{x}])=[\hat{f}(\hat{x})]=[\hat{x}]$ y por tanto

todos los vectores de $\hat{H}-\{0\}$ son autovectores.

Esto significa que $\exists\ \lambda \neq 0$ tal que

$\hat{f}(\hat{x})=\lambda\hat{x} \quad \forall\ \hat{x} \in \hat{H}$

tomando un SRP $(e_0, e_1, \dots e_n, e)$ con $e_1, \dots e_n \in H$, sea $(\hat{e}_0, \hat{e}_1, \dots \hat{e}_n)$ su base asociada. Entonces $(\hat{e}_1, \dots \hat{e}_n)$ es base de $\hat{H}$ y la matriz de $\hat{f}$ en esta base es

$(\hat{f}\hat{e}_0, \dots \hat{f}\hat{e}_n)=(\hat{e}_0, \dots \hat{e}_n)A$ donde

$$A=\left(\begin{array}{c|cccc} a_{00} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{10} & \lambda & 0 & & 0 \\ \vdots & 0 & \lambda & \dots & 0 \\ a_{n0} & 0 & 0 & \dots & \lambda \end{array}\right)$$

tomando $\frac{1}{a_{00}}\hat{f}$ como representante de f podemos suponer:

$$A=\left(\begin{array}{c|cccc} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ v_1 & k & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & 0 & k & \dots & 0 \\ v_n & 0 & 0 & \dots & k \end{array}\right)$$

Consideremos el sistema de coordenadas homogeneas $h \sim (x_0 : \cdots : x_n)$ inducido por el sistema de referencia proyectivo anterior.
Entonces $h(H) = \mathcal{H}_{\mathbb{A}_n}$ y se tiene

$$
\begin{array}{ccc}
P \xrightarrow{f} P & & P-H \xrightarrow{f_a} P-H \\
h \downarrow \quad \downarrow h & \rightsquigarrow & h_a \downarrow \qquad\quad \downarrow h_a \\
\mathbb{P}_n \xrightarrow{F} \mathbb{P}_n & & \mathbb{A}_n \xrightarrow{F_a} \mathbb{A}_n
\end{array}
$$

donde f_a y h_a denotan las correspondientes restricciones de f y h.
De esta manera, las ecuaciones de f quedan respecto a h:

$$\begin{pmatrix} x'_0 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline v_1 & k & & \\ \vdots & & \ddots & \\ v_n & & & k \end{array}\right) \begin{pmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

y en las coordenadas cartesianas
$h_a \simeq (1, X_1 \ldots X_n)$ con $X_i = \dfrac{x_i}{x_0}$
de $\mathbb{P}_n - H$ las ecuaciones de f_a son

$$\begin{pmatrix} 1 \\ X'_1 \\ \vdots \\ X'_n \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline v_1 & k & & \\ \vdots & & \ddots & \\ v_n & & & k \end{array}\right) \begin{pmatrix} 1 \\ X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix}$$

Hay dos posibilidades:

Si $k=1$, la transformación f_a es una traslación (se llama a f elación o homotecia especial)

$$\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}x_1'\\ \vdots\\ x_n'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}v_1\\ \vdots\\ v_n\end{pmatrix}$$

y la transformación f tiene a H como conjunto de puntos fijos ($f\neq id$!)

Si $k\neq 1$, entonces existe $G\in\hat{E}-\hat{H}$ autovector de $\hat{f}$ asociado al autovalor 1, y podríamos convenir en tomar $\hat{e}_0=\hat{v}$ de manera que $\hat{f}(\hat{e}_0)=\hat{e}_0$

así tendríamos

$$f(\hat{e}_0,\hat{e}_1,\dots\hat{e}_n)=(\hat{e}_0,\hat{e}_1,\dots\hat{e}_n)\left(\begin{array}{c|cccc}1 & 0 & 0 & \cdots & 0\\ \hline 0 & k & 0 & & 0\\ 0 & 0 & k & & 0\\ \vdots & \vdots & & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & k\end{array}\right)$$

y las ecuaciones de f en las coordenadas se serían

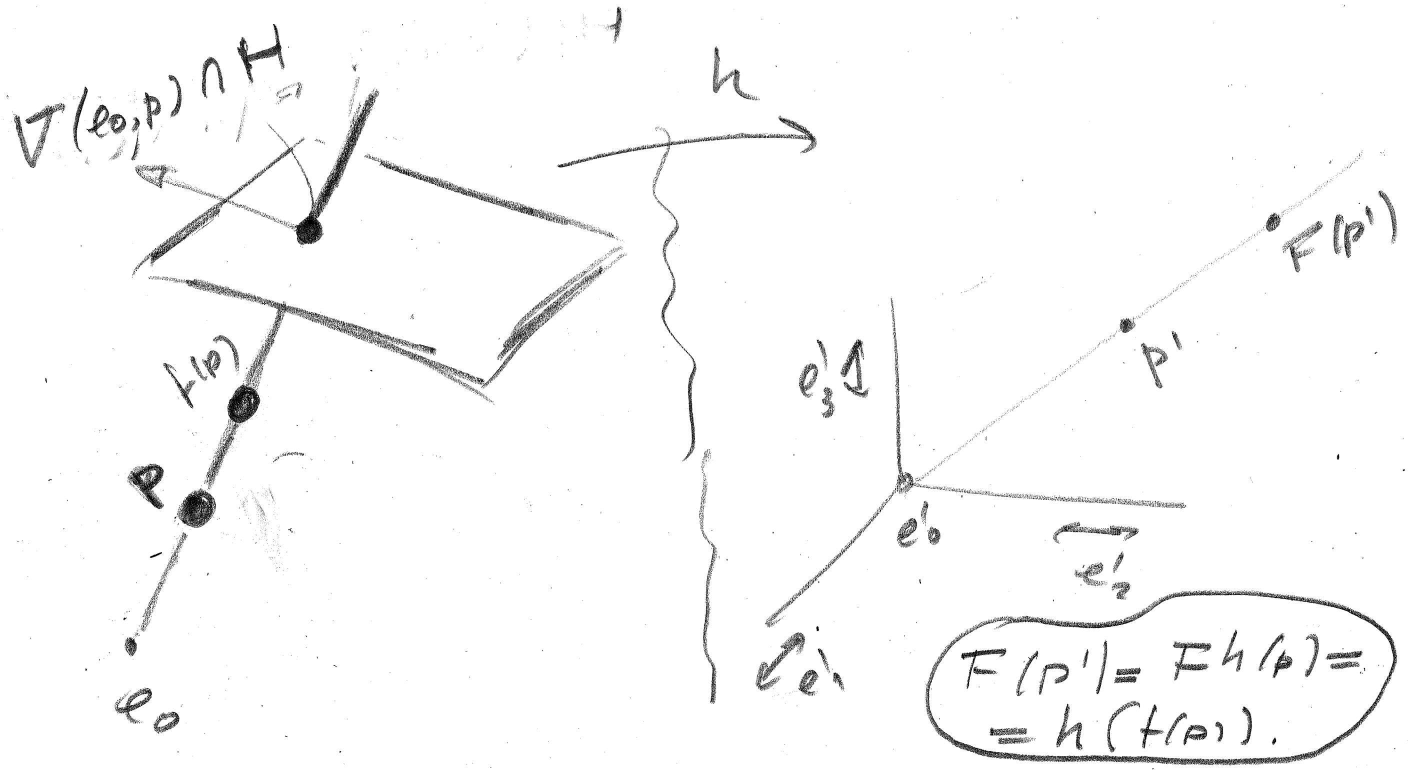
$$f:\begin{cases}x_0'=x_0\\ x_1'=kx_1\\ \vdots\\ x_n'=kx_n\end{cases}\quad \text{y las de } f_a:\begin{cases}x_1'=kx_1\\ \vdots\\ x_n'=kx_n\end{cases}$$

es decir tendremos

$$\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}x_1'\\ \vdots\\ x_n'\end{pmatrix}=k\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$$

que es una homotecia de razón k.

OBSERVESE Que denotando $h(x) = x'$: 9-7



$$\boxed{F(p') = Fh(p) = = h(f(p)).}$$

$$R = (e'_0, p', F(p')) = [e'_0, \infty_{V(e'_0,p')}, p', F(p')] =$$

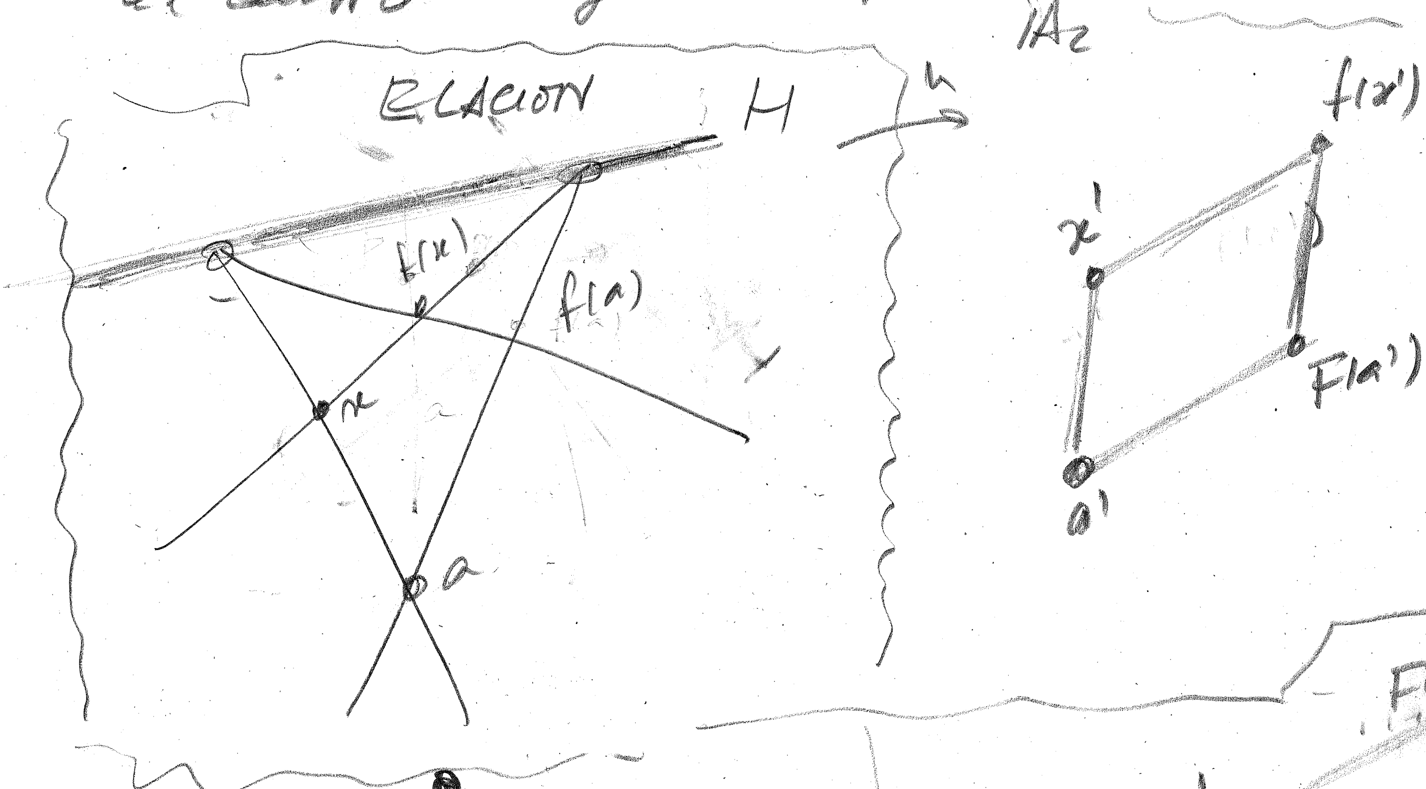
$$= [h(e_0), h(V(e_0,p)\cap H), h(p), h(f(p))] =$$

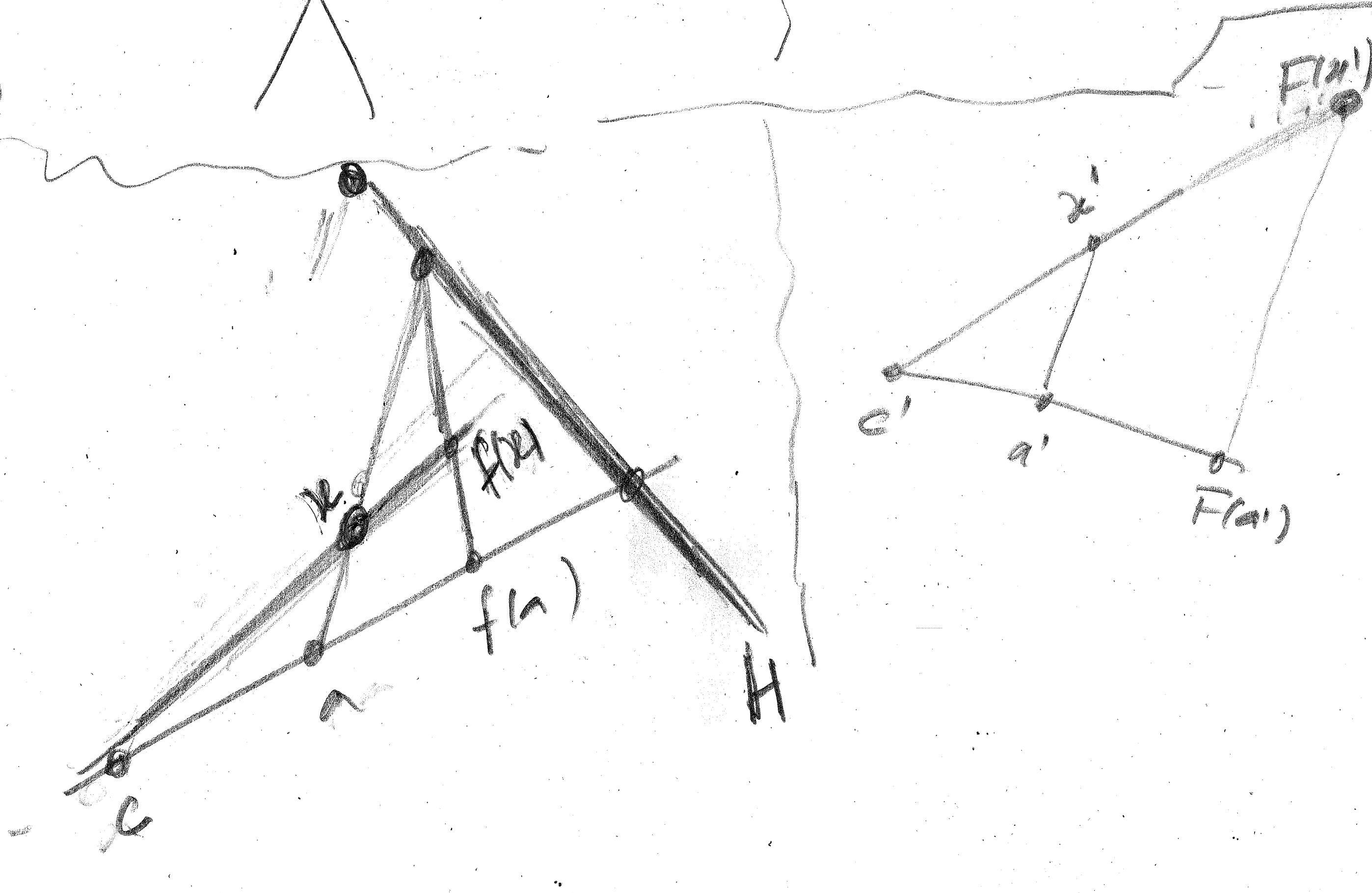
$$= [e_0, V(e_0,p)\cap H, p, f(p)]$$

TEOREMA

¡¡¡ Enúncialo tú mismo !!!

En dimensión 2, tenemos los siguientes dibujos ilustrativos de cómo actúa "geométricamente" una homología especial, conocido un pto. $a \in \mathbb{P}_2$ y su imagen $f(a)$ y una homología general, conocido el centro y la imagen $f(a)$ de $a \neq c$





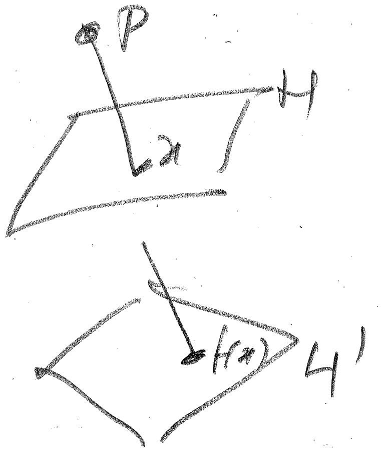
PERSPECTIVIDAD

Sea $P = P(E)$ espacio proyectivo.

Y sean H y H' dos hiperplanos de P;

sea $p \notin H \cup H'$.

Considerese la siguiente aplicación



$$f: H \longrightarrow H'$$

$$f(x) = V(p,x) \cap H'$$

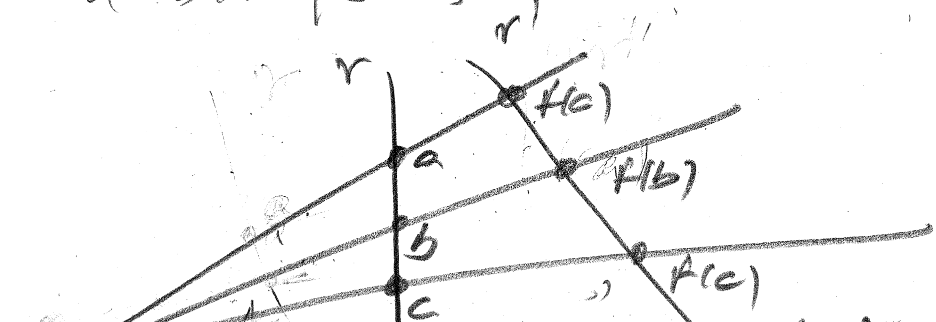
Nótese que

$V(p,x) \cap H'$ es un punto

Vamos a probar que $f: H \longrightarrow H'$ define una homografía, que se denomina proyectividad.

+ Para el caso de dimensión 2 $(P = P_2)$

el dibujo es



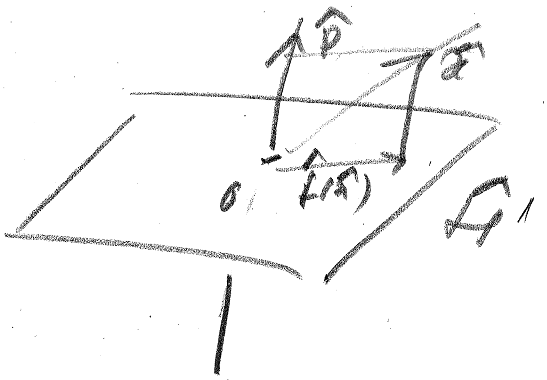
$\forall a,b,c,d \in r$ se tiene

$$[a,b,c,d] = [f(a), f(b), f(c), f(d)] =$$

$$[V(p,a), V(p,b), V(p,c), V(p,d)]$$ (en el dual)

Veamos que $f: H \to H'$ es homografía.

Si $H = P(\hat{A})$ como $p \notin H$ tenemos



$$\hat{x} = \lambda \hat{p} + \pi(\hat{x})$$

consideremos la aplicación proyección.

$$\hat{f}: \hat{E} \longrightarrow \hat{A}' \subset E$$
$$\hat{x} \longrightarrow \pi(\hat{x})$$

Entonces $\ker \hat{f} = L(\hat{p})$

Entonces consideremos

$$\hat{f} = \pi|_{\hat{A}} : \hat{A} \longrightarrow \hat{A}'$$

Entonces $\ker \hat{f} = (\ker \pi) \cap \hat{A} = \{0\}$

por tanto es isomorfismo lineal

y si $\hat{x} \in \hat{A}$ tenemos

$$[\hat{f}(\hat{x})] = \pi(\hat{x}) \in \hat{A}' \cap L(\hat{p}, \hat{x})$$

por tanto

$$[\hat{f}(\hat{x})] \in H' \cap V(p, x).$$