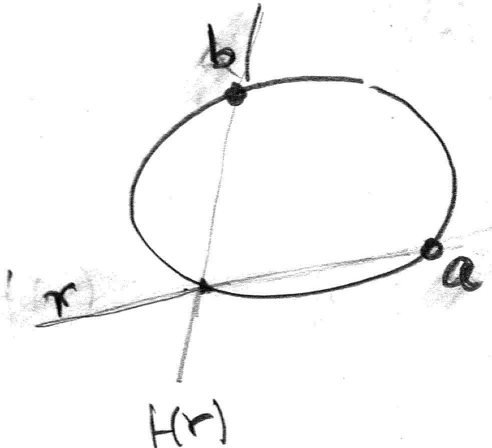
TEOREMA DE CHASLES

Sea $\mathcal{C}$ una cónica con puntos no degenerada de $\mathbb{P}_2$, $a, b \in \mathcal{C}$ $a \neq b$

definimos entonces



$$\Omega(a) \xrightarrow{f} \Omega(b)$$
$$r \longrightarrow V(b, r \cap_a \mathcal{C})$$

donde $r \cap_a \mathcal{C}$ indica el pto de intersección de r y $\mathcal{C}$ que es distinto de a.

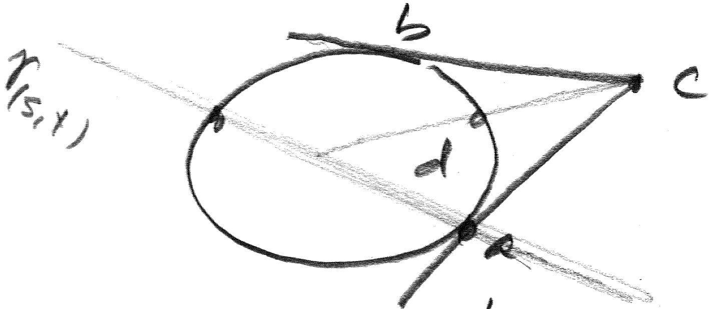
Entonces f "se extiende" a una homografía $\Omega(a) \xrightarrow{F} \Omega(b)$ con

$$F(a^\perp) = V(a,b)$$

Corolario: si p_0, p_1, p_2, p_3 son cuatro puntos de la cónica $\mathcal{C}$ se define $[p_0, p_1, p_2, p_3] = [V(a,p_0), V(a,p_1), V(a,p_2), V(a,p_3)]$ y es independiente del pto $a \in \mathcal{C}$ elegido. $a \neq p_i$

CM2

Demostración. Tal y como se probó en el oculto 89 tomando el SRP $(a, b, c; d)$ la ecuación de $\mathcal{C}: -x_0x_1 + x_2^2 = 0$



$a = (1:0:0)$ $b = (0:1:0)$

Además
$$\left\{\begin{array}{l} \mathbb{P}_1 \ni (s,t) \xrightarrow{h} (sx_1 + tx_2 = 0) \in \Omega(a) \\ \mathbb{P}_1 \ni (\lambda,\mu) \xrightarrow{k} (\lambda x_0 + \mu x_2 = 0) \in \Omega(b) \end{array}\right.$$

$x_1 = -\frac{t}{s} x_2$

$$(s,t) \to h(s,t) : (sx_1 + tx_2 = 0) \to h(s,t) \cap_a \mathcal{C} : (+t x_0 x_2 + s x_2^2 = 0) =$$
$$= (x_2(+t x_0 + s x_2) = 0) \Rightarrow h(s,t) \cap_a \mathcal{C} = \{(s : +\tfrac{t^2}{s} : -t)\} = \{(s^2 : t^2 : -st)\}_{s \neq 0}$$

$x_0 = s \neq 0$
$x_2 = -t$

recta
$$\begin{vmatrix} 0 & s^2 & x_0 \\ 1 & +t^2 & x_1 \\ 0 & -st & x_2 \end{vmatrix} = (-st)x_0 + s^2 x_2 = 0 \simeq -t x_0 + s x_2 = 0$$

así tenemos $(s:t) \longrightarrow (-t:s)$

que es una transformación proyectiva

TEOREMA DE PASCAL

$[a, c', e, b''] = c[$

$\parallel$

$[a, d, b', c'']$

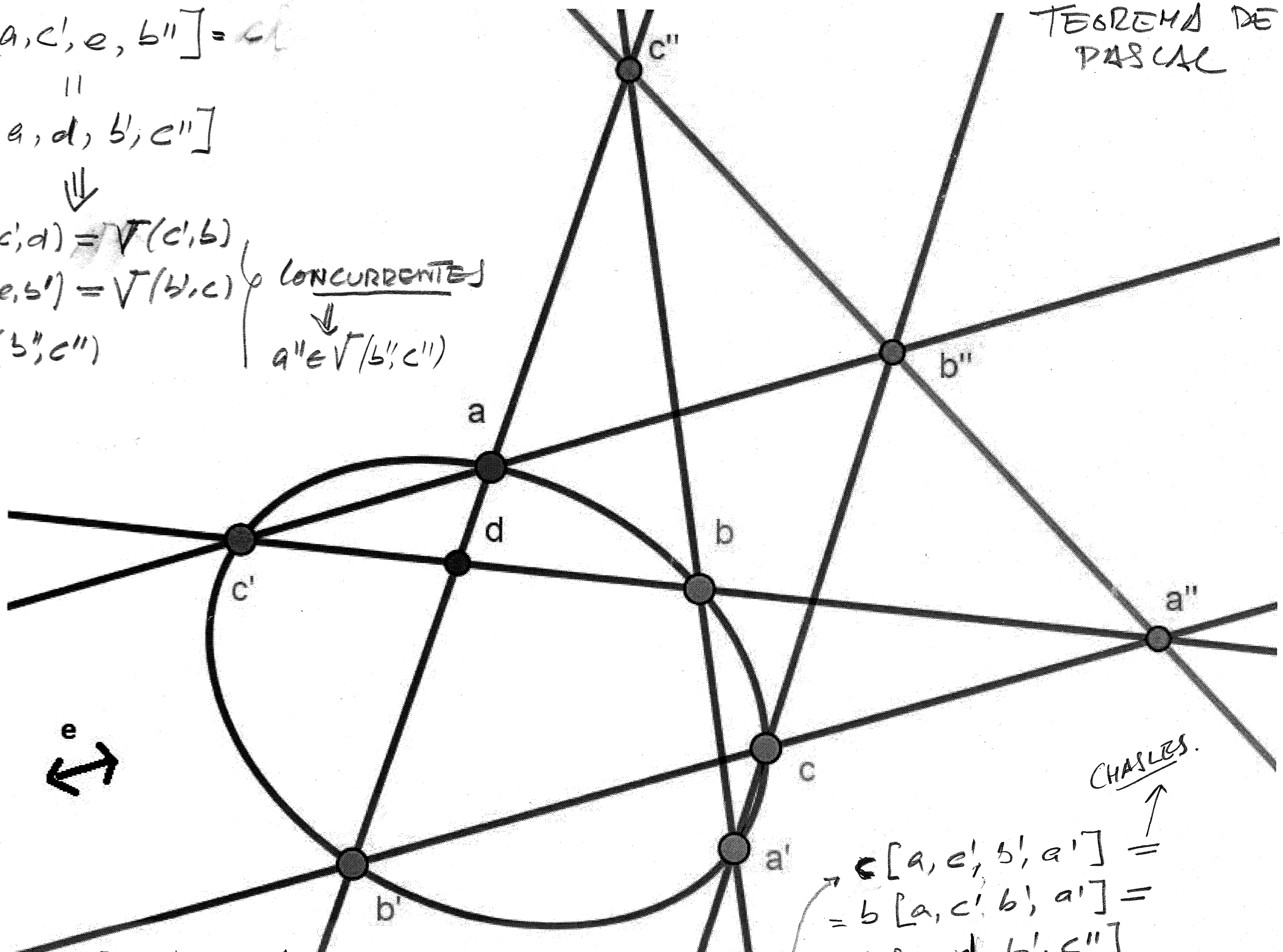
$\Downarrow$

$\vee(c', d) = \vee(c', b)$

$\vee(e, b') = \vee(b', c)$

$\vee(b'', c'')$

$\left.\begin{array}{l} \vee(c', d) = \vee(c', b) \\ \vee(e, b') = \vee(b', c) \\ \vee(b'', c'') \end{array}\right\}$ CONCURRENTES $\Downarrow$ $a'' \in \vee(b'', c'')$



CHASLES.

$c[a, c', b', a'] =$
$= b[a, c', b', a'] =$
$= b[a, d, b', c'']$

$[a, c', e, b''] = c[a, c', e, b''] =$

PREVIO.

$$[a,b,c,d] = [a',b',c',d'] \Rightarrow V(b,b') \cap V(c,c') \cap V(d,d') = \{p\}$$