Cálculo en Variedades Euclideas con aplicaciones a la Teoría Global de Superficies.

Javier Lafuente López

1 de febrero de 2005

Índice

[1]Este sección no es necesaria para aquellos lectores que tengan reciente un curso clásico de Geometría diferencial de curvas y superficies.

1. Variedades Euclideas

1.1. Preliminar

1.1.1. Coordenadas

En adelante mantendremos una doble notación para las coordenadas. Así, si tomamos coordenadas (x, y, z) en $\mathbb{R}^3$, implícitamente las estaremos identificando con (x_1, x_2, x_3) según la sencilla regla $x \equiv x_1$, $y \equiv x_2$, $z \equiv x_3$. Coordenadas (u, v) en $\mathbb{R}^2$ se identificarán con (u_1, u_2) según $u \equiv u_1$, $v \equiv u_2$.

En general si consideramos en $\mathbb{R}^n$ coordenadas $(x_1, \ldots, x_n)$ se identifica x_i con la proyección i-ésima

$$x_i : \mathbb{R}^n \ni (\xi_1, \ldots \xi_n) \to \xi_i \in \mathbb{R}$$

Sea $\mathbb{U}$ un abierto de $\mathbb{R}^n$. Una función $F : \mathbb{U} \to \mathbb{R}^m$ se determina por sus *componentes* $F_j \equiv y_j \circ F : \mathbb{U} \to \mathbb{R}$, donde se ha denotado también por y_j : $\mathbb{R}^m \ni (\eta_1, \ldots, \eta_m) \to \eta_j \in \mathbb{R}$ la proyección j-ésima. Decimos entonces que

$$\{y_j = F_j(x_1, ..., x_n)\}_{j=1,...,m}$$

son las *ecuaciones de* F.

1.1.2. Funciones diferenciables. Matriz Jacobiana

Sea $\mathbb{U}$ un abierto de $\mathbb{R}^n$. Una función $f : \mathbb{U} \to \mathbb{R}$ se dirá *diferenciable* si posee derivadas parciales continuas de todos los órdenes.

Una función $F : \mathbb{U} \to \mathbb{R}^m$ se dirá *diferenciable* si todas sus componentes $F_j : \mathbb{U} \to \mathbb{R}$ $(j = 1, ..., m)$ son diferenciables.

Sea $F : \mathbb{U} \to \mathbb{R}^m$ una función diferenciable. La *matriz Jacobiana de* F *en* $p \in \mathbb{U}$ se define por:

$$DF(p) := \left(\frac{\partial(F_1, \ldots, F_m)}{\partial(x_1, \ldots x_n)} \right)_{x=p} \equiv \begin{pmatrix} \partial F_1/\partial x_1 & \cdots & \partial F_1/\partial x_n \\ \vdots & & \vdots \\ \partial F_m/\partial x_1 & \cdots & \partial F_m/\partial x_n \end{pmatrix}_{x=p} .$$

que se identifica con la aplicación lineal $DF(p) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, y se denomina *diferencial (clásica)* de F en p.

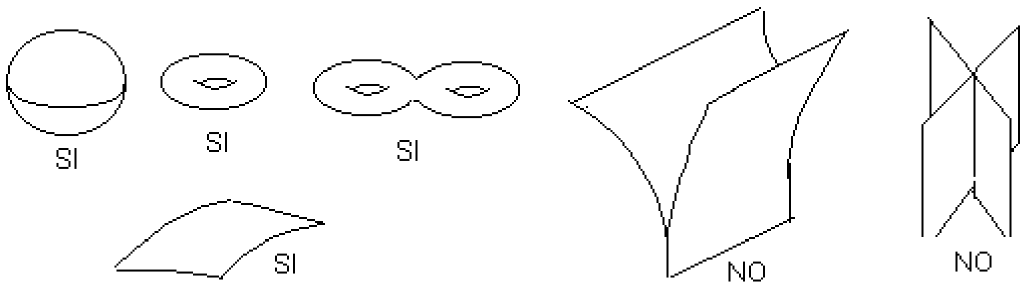
1.1.3. Función diferenciable entre subconjuntos.

Sea S subconjunto de $\mathbb{R}^n$, y $\bar{S}$ subconjunto de $\mathbb{R}^m$. Una función $\phi : S \to \bar{S}$ se dice diferenciable, si por cada punto $p \in S$, hay un abierto $\mathbb{U}$ de $\mathbb{R}^n$, con $p \in \mathbb{U}$, y existe una función $F : \mathbb{U} \to \mathbb{R}^m$ diferenciable, con $\phi \mid \mathbb{U} \cap S = F \mid \mathbb{U} \cap S$. La función ϕ se dice *difeomorfismo* , si es diferenciable, biyectiva, y su inversa es también diferenciable.

Es claro, que la composición de funciones diferenciables, es diferenciable, y si son difeomorfismos, la composición también lo es.

1.2. Variedades Euclideas. Superficies

Intuitivamente hablando, una superficie es un subconjunto de $\mathbb{R}^3$ liso, que tiene *dimensión dos* (¿una sábana flotando?). Otra aproximación intuitiva está ligada al hecho de admitir que cada punto de la superficie, tenga un plano tangente bien definido. Piense el lector en cada uno de los ejemplos gráficos que se dan a continuación. ¿Son superficies?, ¿porqué si? ¿porqué no?



Nosotros estamos principalmente interesados en la teoría de superficies, sin embargo no cuesta ningún trabajo generalizar este concepto y considerar conjuntos M que son algo así como *superficies m-dimensionales sumergidas en* $\mathbb{R}^n$. Son las denominadas variedades euclideas. Una ventaja desde nuestro punto de vista, de esta generalización, es que permite englobar bajo un mismo concepto a las superficies y a los abiertos de $\mathbb{R}^n$. Establecemos aquí una definición formal de variedad euclidea.

1.2.1. Parametrizaciones locales

Sea M un subconjunto de $\mathbb{R}^n$. Una *m-parametrización (local) de M* es un homeomorfismo $\varphi:\mathbb{U} \to \mathcal{U}$, donde $\mathbb{U}$ es un abierto de $\mathbb{R}^m$ y $\mathcal{U}$ es un abierto de M (en la topología relativa). Además se exige la siguiente propiedad de regularidad: $\varphi:\mathbb{U} \to \mathbb{R}^n$ es una aplicación diferenciable y $rg(D\varphi(u)) = m$, para todo $u \in \mathbb{U}$.

Con las notaciones que venimos utilizando correspondería escribir

$$\varphi(u) = ((x_1 \circ \varphi)(u), \ldots, (x_n \circ \varphi)(u)) \ ,$$

para $(u, v) \in \mathbb{U}$ *. No obstante, y presuponiendo que se ha fijado de antemano la parametrización* φ *, las funciones* $(x_1, \ldots, x_n)$ *se considerarán indistintamente funciones definidas sobre* $\mathcal{U} = \varphi(\mathbb{U})$ *o sobre el propio* $\mathbb{U}$*, por lo que valdrán las identificaciones* $x_i \circ \varphi \equiv x_i$ *escribiremos*

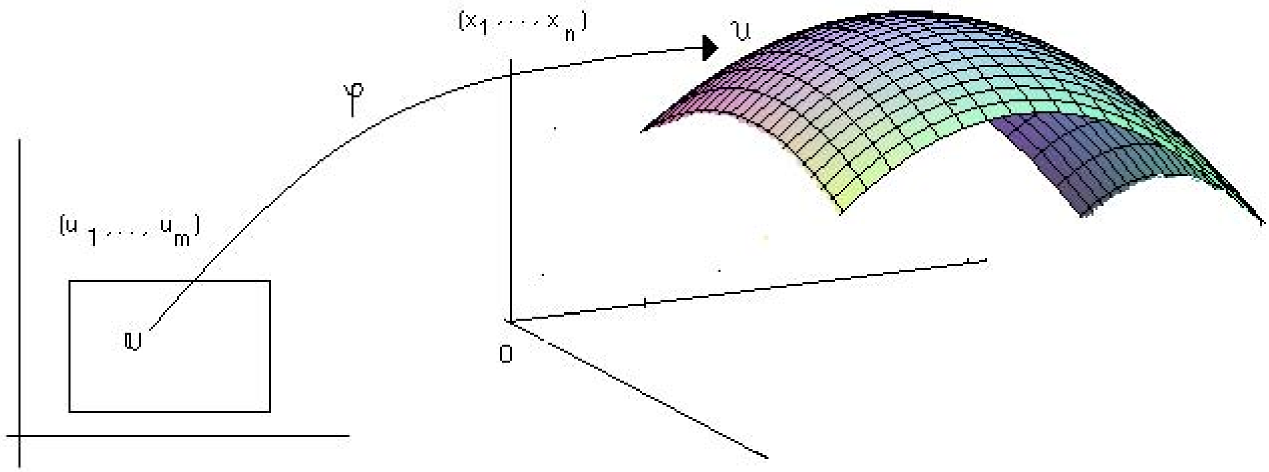


Figura 1:

$$\varphi(u) = (x_1(u), \ldots, x_n(u))$$

y diremos que $x_i = x_i(u)$ son las ecuaciones de φ.

Más aún: la restricción a $\mathcal{U}$ de cualquier función diferenciable $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ se considerará indistintamente definida sobre $\mathcal{U} = \varphi(\mathbb{U})$ o sobre el propio $\mathbb{U}$, por lo que valdrá la identificación $f \circ \varphi \equiv f$.

1.2.2. Concepto de variedad euclidea

Un subconjunto M de $\mathbb{R}^n$ se llama *variedad euclidea de dimensión m* si, para cada punto $p \in M$, existe una m-parametrización (local) $\varphi : \mathbb{U} \to \mathcal{U}$ con $p \in \mathcal{U}$.

Una observación elemental, aunque importante, es que un abierto A de una variedad M es también una variedad euclidea.

Las variedades euclideas de $\mathbb{R}^n$ con dimensión $n-1$, se llaman hipersuperficies. Las hipersuperficies de $\mathbb{R}^3$ son (exactamente) las superficies de siempre.

1.2.3. Ejemplos

Gráfica de una función Sea Ω abierto de $\mathbb{R}^m$ con coordenadas $x = (x_1, \ldots, x_m)$ y $\zeta : \Omega \to \mathbb{R}^r$ una aplicación diferenciable. Si llamamos $z =$

$(z_1,\ldots,z_r)$ a las coordenadas de $\mathbb{R}^r$, se llama grafo de f al conjunto

$$M=\{(x,z)\in\mathbb{R}^{m+r}: x\in\Omega,\ z=\zeta(x)\}$$

Observese que el grafo M es una variedad, ya que la aplicación $\varphi:\Omega\to M$ con $\varphi(u_1,\ldots,u_m)=(u_1,\ldots,u_m,\zeta(u_1,\ldots,u_m))$ es una parametrización global. Nótese que $\varphi^{-1}=\pi: M\ni(x,z)\to x\in\Omega$.

Las esferas El conjunto $\mathbb{S}^m=\{(x_1,\ldots,x_{m+1}):\sum_{i=1}^{m+1}x_i^2=1\}$ constituye una variedad $m-$dimensional de $\mathbb{R}^{m+1}$ denominado *esfera*. Podemos definir la parametrización φ:$\mathbb{U}\to\mathcal{U}$, con $\mathbb{U}=\{(u_1,,\ldots,u_m):\sum_{i=1}^m u_i^2<1\}$, $\mathcal{U}=\{(x_0,\ldots,x_m)\in\mathbb{S}^m: x_0>0\}$, y φ tiene por ecuaciones:

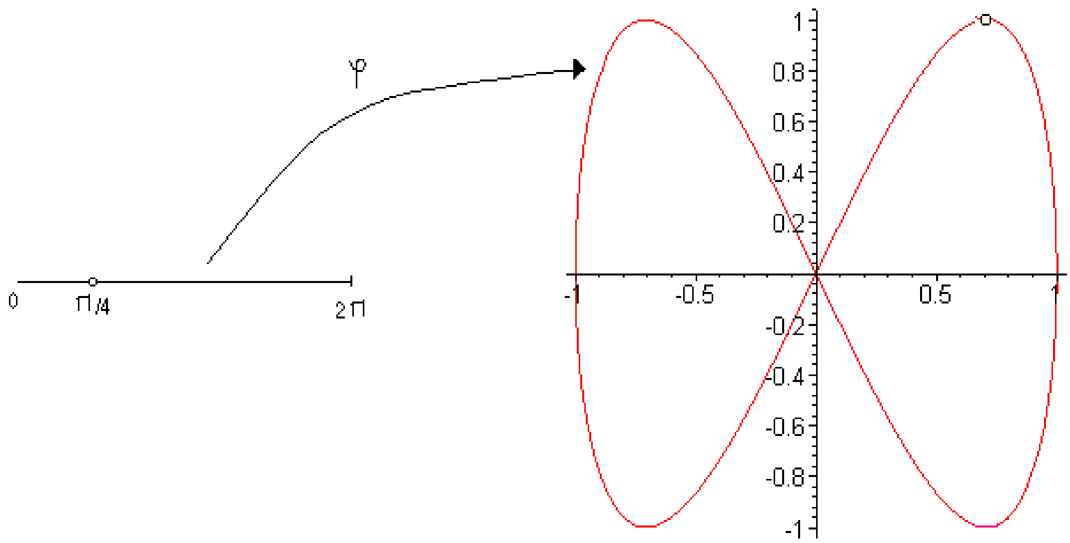
$$\begin{cases} x_1=u_1\\ \vdots\\ x_m=u_m\\ x_{m+1}=\sqrt{1-\sum_{i=1}^m u_i^2}\end{cases}$$

es fácil comprobar que $rg(D\varphi(u))=m$ en todo punto. La razón por la que φ es homeomorfismo, es que φ^{-1}, es la restricción a $\mathcal{U}$ de la proyección

$$\pi:\mathbb{R}^{m+1}\ni(x_1,\ldots,x_{m+1})\to(x_1,\ldots,x_m)\in\mathbb{R}^m$$

Evidentemente todo $\mathbb{S}^m$ puede recubrirse de parametrizaciones de este tipo.

La figura del ocho La aplicación diferenciable $\varphi:(0,2\pi)\ni u\to(\sin u,\sin 2u)\in\mathbb{R}^2$ no define una parametrización sobre su imagen $M=im\varphi$ (véase figura), pues aunque $d\varphi/du\neq 0$ en todo punto y, $\varphi:(0,2\pi)\to M$ es biyectiva, φ no es homeomorfismo, ya que $\varphi((0,2\pi)-\{\pi/2\})$ es unconjunto conexo, y $(0,2\pi)-\{\pi/2\}$ no lo es.



1.2.4. Variedades en implícitas

Sea $F : \mathbb{D} \to \mathbb{R}$ una función diferenciable definida sobre un abierto $\mathbb{D}$ de $\mathbb{R}^3$. Tomemos en $\mathbb{R}^3$ coordenadas (x, y, z). Supongamos que existe un punto $p = (a, b, c) \in \mathbb{D}$ en el que $F(p) = 0$ y $(\partial F/\partial z)\,(p) \neq 0$. Denotemos la proyección por

$$\pi : \mathbb{R}^3 \ni (x, y, z) \to (x, y) \in \mathbb{R}^2 .$$

Entonces existen: un abierto Ω de $\mathbb{R}^2$ con $(a, b) \in \Omega$, un intervalo abierto J con $c \in J$ y una función diferenciable $\zeta : \Omega \to J$ verificando las siguientes condiciones:

$$\begin{cases} \Omega \times J \subset \mathbb{D} \qquad \text{y además} \\ \{(x, y, z) \in \Omega \times J \mid F(x, y, z) = 0\} = \{(x, y, \zeta(x, y) \mid (x, y) \in \Omega\} \end{cases}$$

Naturalmente el teorema de la función implícita) admite un enunciado análogo si se supone por ejemplo que $(\partial F/\partial x)\,(p) \neq 0$.

En particular, si $M = F^{-1}(0)$ es el conjunto constituído por los ceros de una función diferenciable $F : \mathbb{D} \to \mathbb{R}$, tal que $DF(p)$ es de rango 1 , para todo $p \in M$, entonces M se ve localmente como la gráfica de una función y es una superficie. Se dice entonces que $F(x, y, z) = 0$ es una ecuación de M.

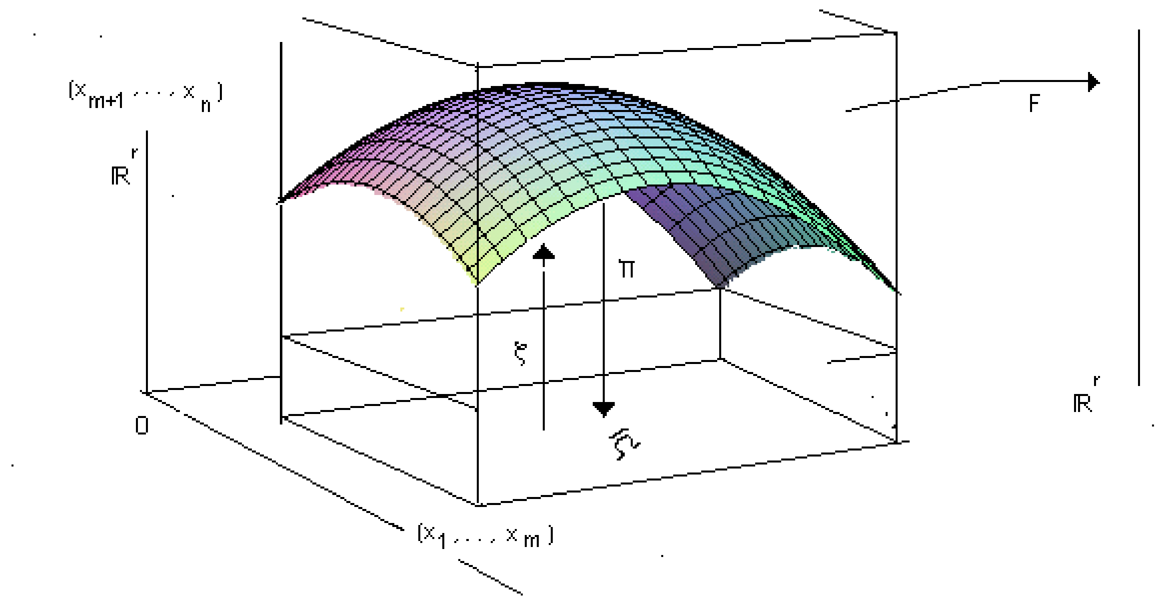
Mas general:

Supongamos ahora que tenemos una función diferenciable, $F : \mathbb{D} \to \mathbb{R}^r$ definida sobre un abierto $\mathbb{D}$ de $\mathbb{R}^n$. Tomemos en $\mathbb{R}^n$ coordenadas $(x_1, \ldots, x_n)$, y un punto $p = (\tilde{p}, \hat{p}) \in \mathbb{D}$ en donde $F(p) = 0$, y

$$\det\left(\frac{\partial(F_1, \ldots, F_r)}{\partial(x_{m+1}, \ldots, x_n)}\right)(p) \neq 0$$

Por el teorema de la función implícita se concluye entonces que existen abiertos $\tilde{\Omega}$ de $\mathbb{R}^m$ y $\hat{\Omega}$ de $\mathbb{R}^{\,r}$, de forma que $p \in \Omega = \tilde{\Omega} \times \hat{\Omega} \subseteq \mathbb{D}$, y existe una función diferenciable $\zeta : \tilde{\Omega} \to \hat{\Omega}$ verificando la condición

$$F^{-1}(0) \cap \Omega = \{x = (\tilde{x}, \zeta(\tilde{x})) : \tilde{x} \ \in \tilde{\Omega}\}$$



Observación 1.2.4.1 *1. Tomando en $\tilde{\Omega}$ coordenadas $u = (u_1, \dots, u_m)$, la aplicación $\varphi : \tilde{\Omega} \ni u \to (u, \zeta(u)) \in F^{-1}(0) \cap \Omega \subset \mathbb{R}^n$tiene por ecuaciones*

$$x_1 = u_1, \dots x_m = u_m, \; x_{m+1} = \zeta_1(u_1, \dots, u_m), \dots, \; x_n = \zeta_r(u_1, \dots, u_m)$$

y define evidentemente una biyección continua cuya aplicación inversa, es exactamente la restricción de la proyección $\pi : \mathbb{R}^n \ni x \to \tilde{x} \in \mathbb{R}^m$ a $F^{-1}(0) \cap \Omega$. Por tanto $\varphi : \tilde{\Omega} \to F^{-1}(0) \cap \Omega$ es homeomorfismo.

2. El teorema de la función implícita, responde a una idea intuitiva que puede parafrasearse así: De la ecuación $F(x_1, \dots, x_n) = 0$, pueden despejarse localmente las variables $x_{m+1}, \dots, x_n$ en función de las $x_1 = u_1, \dots x_m = u_m$, allí donde .

$$\det\left(\frac{\partial(F_1, \dots, F_r)}{\partial((x_{m+1}, \dots, x_n)}\right) \neq 0$$

3. En el supuesto de que

$$rango\left(\frac{\partial(F_1, \dots, F_r)}{\partial((x_1, \dots, x_n)}\right)(p) = r$$

y el menor de orden r distinto de cero corresponda a otras variables $(x_{k_1}, \dots, x_{k_r})$ naturalmente, puede enunciarse un resultado análogo.

4. Por tanto $M = F^{-1}(0)$ es una variedad diferenciable cuando

$$rang\left(\frac{\partial(F_1,\ldots,F_r)}{\partial(x_1,\ldots,x_n)}\right) = r \text{ en todo } p \in M$$

se dice entonces que

$$\left\{\begin{array}{c} F_1\left(x_1,\ldots,x_n\right)=0 \\ \vdots \\ F_r\left(x_1,\ldots,x_n\right)=0 \end{array}\right. \quad \text{son ecuaciones de } M$$

1.2.5. Análisis local de una parametrización.

Consideremos una parametrización local de una superficie M:

$$\varphi : \mathbb{U} \to \mathbb{R}^n,\ \varphi : \left\{\begin{array}{l} x_1 = \varphi_1(u_1,\ldots,u_m) \\ \cdots \\ x_n = \varphi_n(u_1,\ldots,u_m) \end{array}\right.$$

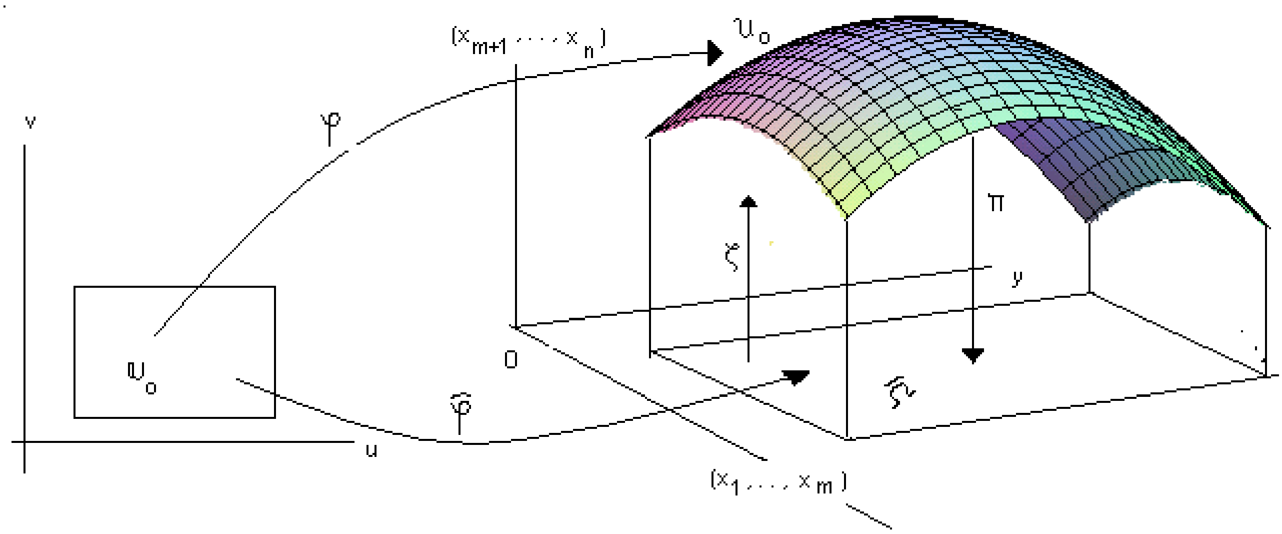
y supongase que en cierto punto $w_0 \in \mathbb{U}$, y sea $p = \varphi(w_0)$. Se verifica

$$\det\left(\left.\frac{\partial\left(\varphi_1,\ldots,\varphi_m\right)}{\partial\left(u_1,\ldots,u_m\right)}\right|_{w_0}\right) \neq 0$$

y sea $\pi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ la proyección $\pi(\widetilde{x},\widehat{x}) = \widetilde{x}$, donde $x = (\widetilde{x},\widehat{x})$ con $\widetilde{x} = (x_1,\ldots,x_m)$ y $\widehat{x} = (x_{m+1},\ldots,x_n)$

$$\tilde{\varphi} = \pi \circ \varphi : \left\{\begin{array}{l} x_1 = \varphi_1(u_1,\ldots,u_m) \\ \cdots \\ x_m = \varphi_m(u_1,\ldots,u_m) \end{array}\right.$$

define por el teorema de la función inversa, un difeomorfismo $\tilde{\varphi} : \mathbb{U}_0 \to \widetilde{\Omega}$ de un entorno $\mathbb{U}_0$ de w_0 en un abierto Ω de $\mathbb{R}^m$ que contiene a $\tilde{p} = \pi(p)$.



Así $\mathcal{U}_0 = \varphi(\mathbb{U}_0)$ es un abierto de M que podemos suponer de la forma:

$$\mathcal{U}_0 = \left(\widetilde{\Omega} \times \widehat{\Omega}\right) \cap M$$

siendo $\widehat{\Omega}$ un abierto de $\mathbb{R}^r$ que contiene a las $r = n - m$ componentes finales $\widehat{p}$ de p. Tenemos así el diagrama:

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{U}_0 \arrow[r, "\varphi"] \arrow[dr, "\tilde{\varphi}"'] & \mathcal{U}_0 \arrow[d, "\pi"] \\
& \Omega
\end{tikzcd}$$

La aplicación $\zeta = \varphi \circ \tilde{\varphi}^{-1} : \widetilde{\Omega} \to \mathcal{U}_0$ verifica $\pi \circ \zeta = \pi \circ \left(\varphi \circ \tilde{\varphi}^{-1}\right) = \tilde{\varphi} \circ \tilde{\varphi}^{-1} = id_{\Omega}$ es decir:

$$\zeta(\widetilde{x}) = \left(\widetilde{x}, \widehat{\zeta}(\widetilde{x})\right) \ \forall \widetilde{x} \in \widetilde{\Omega}$$

y se verifica

$$\mathcal{U}_0 = \varphi(\mathbb{U}_0) = \left(\varphi \circ \tilde{\varphi}^{-1}\right)\left(\widetilde{\Omega}\right) = \zeta\left(\widetilde{\Omega}\right) = \left\{\left(\widetilde{x}, \widehat{\zeta}(\widetilde{x})\right);\ \widetilde{x} \in \widetilde{\Omega}\right\}$$

por tanto:

Conclusión 1: *En un entorno del punto p, la superficie se ve como la gráfica de una función*

Conclusión 2: *Por otra parte, la aplicación* $\phi : \Omega = \widetilde{\Omega} \times \widehat{\Omega} \to \mathbb{U}_0$ *tal que* $\phi(x) = \tilde{\varphi}^{-1}(\widetilde{x})$ *verifica la propiedad:*

$$\phi(x) = \varphi^{-1}(\widetilde{x}, \widehat{x}) \ \forall x \in \mathcal{U}_0 = (\Omega \times \mathbb{V}) \cap M$$

En efecto, ya que $\forall u \in \mathbb{U}_0$ es $\phi(\varphi(u)) = \tilde{\varphi}^{-1}(\pi \circ \varphi(u)) = u = \varphi^{-1}(\varphi(u))$. En consecuencia φ^{-1} es también una aplicación diferenciable, y $\varphi : \mathbb{U} \to \mathcal{U}$ es un difeomorfismo.

1.2.6. Cartas

Si $\varphi : \mathbb{U} \to \mathcal{U}$ es una m-parametrización (local) de una variedad M y denotamos por $\varphi^{-1} = \mathbf{c} = (u_1, \ldots, u_m) : \mathcal{U} \to \mathbb{U}$ la aplicación inversa, (que es diferenciable!) . Se denomina *carta de* M al par $(\mathcal{U}, \mathbf{c})$

Con las notaciones que venimos utilizando correspondería escribir

$$\mathbf{c}(p) = ((u_1 \circ \mathbf{c})(p), \ldots, (u_m \circ \mathbf{c})(p))$$

para $p \in \mathcal{U}$ *. No obstante, y presuponiendo que se ha fijado de antemano la carta* $\mathbf{c}$*, las funciones* $(u_1, \ldots, u_m)$ *se considerarán indistintamente funciones definidas sobre* $\mathbb{U} = \mathbf{c}(\mathcal{U})$ *o sobre el propio* $\mathcal{U}$ *; por lo que valdrán las identificaciones* $u_i \circ \mathbf{c} \equiv u_i$*, escribiremos*

$$\mathbf{c}(p) = (u_1(p), , \ldots, u_m(p))$$

Diremos que $u_1(p), , \ldots, u_m(p)$ *son las coordenadas de* p *con respecto a la carta* $(\mathcal{U}, \mathbf{c})$*.*

Consideremos la restricción a $\mathcal{U}$ *de cualquier función diferenciable* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *. De la identificación (1.2.1)* $f \circ \varphi \equiv f$ *se sigue* $f(p) \equiv f\ (u_1(p), , \ldots, u_m(p))$ *y escribiremos* $f = f(u_1, \ldots u_m)$ *.*

Análogamente se obtiene: $\frac{\partial f}{\partial u_i}(p) \equiv \frac{\partial f}{\partial u_i}(u_1(p), , \ldots, u_m(p))$ *y escribiremos:*

$$\frac{\partial f}{\partial u_i} = \frac{\partial f}{\partial u_i}(u_1, \ldots u_m)\ .$$

1.2.7. Compatibilidad de cartas

Si $(\mathcal{U}, \mathbf{c} = \varphi^{-1})$, $(\overline{\mathcal{U}}, \bar{\mathbf{c}} = \bar{\varphi}^{-1})$ son dos cartas de una variedad M, con $\mathcal{U} \cap \overline{\mathcal{U}}$ no vacío, es fácil probar (usando la conclusión 2 del epígrafe 1.2.5) que la aplicación *cambio de carta*

$$\bar{\mathbf{c}} \circ \varphi : \mathbf{c}(\mathcal{U} \cap \overline{\mathcal{U}}) \to \bar{\mathbf{c}}(\mathcal{U} \cap \overline{\mathcal{U}})$$

es un difeomorfismo. Nótese que por ser $\mathbf{c}$, y $\bar{\mathbf{c}}$ hoemomorfismos y $\mathcal{U} \cap \overline{\mathcal{U}}$ abierto, la aplicación cambio de carta está definida sobre abiertos de $\mathbb{R}^m$.

Las correspondientes ecuaciones: $\bar{u}_1 = (\bar{u}_1 \circ \bar{\varphi}^{-1} \circ \varphi)\ (u_1, \ldots u_m)$, $\overline{u}_m = (\overline{u}_m \circ \bar{\varphi}^{-1} \circ \varphi)\ (u_1, \ldots u_m)$, abreviadamente $\bar{u}_1 = \bar{u}_1(u_1, \ldots u_m)$, $\overline{u}_m = \overline{u}_m(u_1, \ldots u_m)$, se llaman *ecuaciones del cambio de carta.*

1.3. El anillo de funciones

Si M es una variedad, denotamos por

$$\mathcal{F}(M) = \{f : M \to \mathbb{R} : \ f \text{ es diferenciable}\}$$

El conjunto $\mathcal{F}(M)$ tiene estructura natural de anillo respecto a la suma y producto habitual de funciones reales. Se denomina a $\mathcal{F}(M)$, anillo de funciones de M.

1.3.1. Funciones meseta

Si $f \in \mathcal{F}(M)$ se denomina soporte de f a

$$sop(f) = \overline{\{x \in M : f(x) \neq 0\}}$$

El siguiente resultado será una buena herramienta en el futuro

Proposición 1.3.1.1 *Sea $\mathcal{U}$ abierto de M, y $p \in \mathcal{U}$. Existe entonces una función $\mu \in \mathcal{F}(M)$, $\mu \geq 0$, con soporte compacto contenido en $\mathcal{U}$ que verifica la siguiente propiedad: $\mathcal{U}_1 = \{x \in M : \mu(x) = 1\}$ es un entorno de p. Se denomina a μ* función meseta *en torno a p*

Observación 1.3.1.1 *De esta forma si $f \in \mathcal{F}(\mathcal{U})$ puede construirse una función $\mu f \in \mathcal{F}(M)$ definida así:*

$$(\mu f)(x) = \begin{cases} \mu(x)f(x) \ \textit{si } x \in \mathcal{U} \\ 0 \ \textit{si } x \in M - sop(f) \end{cases}$$

y que coincide con f en el entorno $\mathcal{U}_1$ de p.

Demostración: Se considera la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (diferenciable pero no analítica):

$$f(t) = \begin{cases} 0 \text{ si } t \leq 0 \\ e^{-1/t^2} \text{ si } t > 0 \end{cases}$$

y a continuación se construye $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ diferenciable:

$$g(s) = f(2 + s)f(-1 - s)$$

se vé que $g(s) \geq 0$, y $g(s) > 0 \iff -2 < s < -1$, así tomando

$$h(t) = \frac{1}{A}\int_{-\infty}^{t} g(s)ds \text{ siendo } A = \int_{-2}^{-1} g(s)ds$$

resulta ser $h(t) = 1$ si $t > -1$, y $h(t) = 0$ si $t < -2$. Finalmente se construye $\lambda : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ diferenciable, con

$$\lambda(t) = \begin{cases} h(t) \text{ si } t \leq 0 \\ h(-t) \text{ si } t > 0 \end{cases}$$

así $\lambda(t) = 0$ si $\mid t \mid > 2$, y $\lambda(t) = 1$ si $\mid t \mid < 1$.

Construyamos para terminar la función meseta $\mu \in \mathcal{F}(M)$. Podemos suponer (¿?) que $\mathcal{U}$ es dominio de una carta $(\mathcal{U}, \mathbf{c})$, con $\mathbf{c}(p)$=0, $\mathbf{c}(\mathcal{U}) \supseteq \mathbb{B}^*(0,2)$ (bola cerrada de centro el origen y radio 2) y definir:

$$\mu(x) = \begin{cases} \lambda\left(\sqrt{\sum u_i(x)^2}\right) \text{ si } x \in \mathcal{U} \\ 0 \text{ si } x \in M - \mathbf{c}^{-1}(\mathbb{B}^*(0,2)) \end{cases}$$

Corolario 1.3.1.1 *Si K es un compacto de la variedad M, y $\mathcal{U}$ es un abierto de M, con $\mathcal{U} \supset K$, existe entonces $\lambda \in \mathcal{F}(M)$, $\lambda \geq 0$, con $\lambda \mid K > 0$, y sop(λ) compacto contenido en $\mathcal{U}$.*

1.4. Vectores tangentes

1.4.1. Espacio vectorial tangente $T_p\mathbb{R}^n$ en un punto $p \in \mathbb{R}^n$

Si $p \in \mathbb{R}^n$, $\vec{\xi} \in \mathbb{R}^n$, denotamos por $\xi = \vec{\xi}_p = (p, \vec{\xi}\ )$. Geométricamente, ξ se representa por el vector $\vec{\xi}$ enganchado en el punto p. El espacio $T_p\mathbb{R}^n$, se denomina *espacio tangente en p a $\mathbb{R}^n$*. $T_p\mathbb{R}^n$ tiene estructura natural de espacio vectorial euclídeo, si se establece que la biyección natural $\mathbb{R}^n \ni \vec{\xi} \rightleftharpoons \xi = \vec{\xi}_p \in T_p\mathbb{R}^n$ sea una isometría lineal, es decir:

$$\lambda\vec{\xi}_p + \mu\vec{\eta}_p = (\lambda\vec{\xi} + \mu\vec{\eta})_p\,, \forall\lambda, \mu \in \mathbb{R}\,, \forall\vec{\xi}_p, \vec{\eta}_p \in T_p\mathbb{R}^n$$

además si $n = 3$,

$$\vec{\xi}_p \times \vec{\eta}_p = (\vec{\xi} \times \vec{\eta})_p$$

1.4.2. Cono tangente a un subconjunto por un punto.

Sea $\alpha : I \to \mathbb{R}^n$ es una curva diferenciable, $\alpha(t) = (\alpha_1(t), \ldots, \alpha_n(t))$ se llama vector velocidad de α en t al vector:

$$\left.\frac{d\alpha}{dt}\right|_t = \alpha'(t) = (\alpha_1'(t), \ldots, \alpha_n'(t))_{\alpha(t)} \in T_{\alpha(t)}\mathbb{R}^n$$

Si $0 \in I$, y $\alpha(0) = p$, se dice que α es *una curva por p*.

Si S es un subconjunto de $\mathbb{R}^n$, $p \in S$, una curva por p en S es una curva por p cuya imagen está contenida en S. Denotamos por $C(p; S)$ a la familia de dichas curvas.

Nótese que $T_p\mathbb{R}^n = \{\alpha'(0) : \alpha \in C(p, \mathbb{R}^n)\}$ ya que se tiene la identidad

$$\vec{\xi}_p = \left.\frac{d\left(p + t\vec{\xi}\right)}{dt}\right|_{t=0}$$

Se denomina cono tangente por p a S al conjunto

$$T_pS = \{\alpha'(0) : \alpha \in C(p, S)\}$$

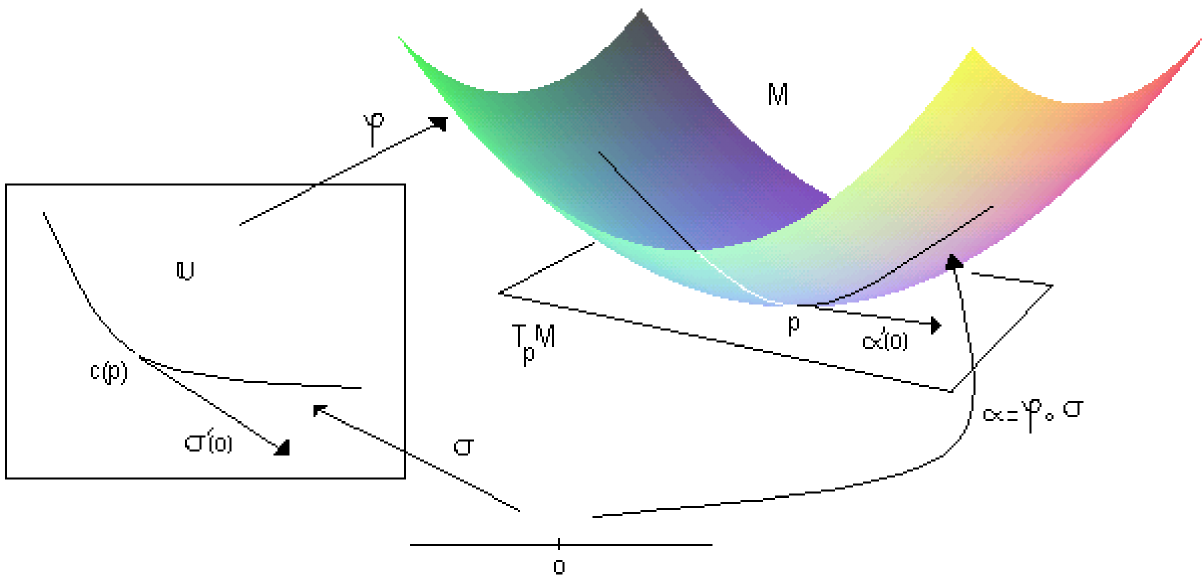
Observese que T_pS coincide con $T_p\mathcal{U}$, cuando $\mathcal{U}$ es abierto de S en la topología relativa de S, y $p \in \mathcal{U}$.

Nótese también que $T_p\mathbb{R}^n = T_p\mathbb{U}$, si $\mathbb{U}$ es abierto de $\mathbb{R}^n$, y $p \in \mathbb{U}$. Naturalmente, T_pS no tiene porqué ser subespacio vectorial de $T_p\mathbb{R}^n$.

1.4.3. Espacio tangente en una variedad euclidea.

Probaremos que el cono tangente T_pM de una variedad M (de dimensión m sumergida en en $\mathbb{R}^n$) en un punto $p \in M$, es de hecho un subespacio vectorial de $T_p\mathbb{R}^n$ con dimensión m.

Sea $\varphi : \mathbb{U} \to \mathcal{U}$ $(u_1, \ldots, u_m) \to \varphi(u_1, \ldots, u_m)$, una parametrización de una variedad M con $p \in \mathcal{U}$. Dada cualquier curva diferenciable $\alpha : I \to \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$, se concluye (por ser $\mathbf{c}$ diferenciable) que $\sigma = (\mathbf{c} \circ \alpha) : I \to \mathbb{U}$ es también una curva (esto es, diferenciable), que podemos escribir como $\sigma(t) = (u_1(t), \ldots, u_m(t))$ que es la representación analítica local de α.



Se tiene $\alpha(t) = \varphi\,(u_1(t), \ldots, u_m(t))$y entonces, usando la regla de la cadena se tiene:

$$\frac{d\alpha}{dt} = \frac{\partial\varphi}{\partial u_1}\frac{du_1}{dt} + \cdots + \frac{\partial\varphi}{\partial u_m}\frac{du_m}{dt}$$

si $p \in \mathcal{U}$, y $\alpha \in C(p,\mathcal{U})$ entonces $\sigma \in C(\mathbf{c}(p),\mathbb{U})$ por lo que particularizando la igualdad anterior en $t=0$, se concluye que

$$T_pM = Span\left(\left(\left.\frac{\partial\varphi}{\partial u_1}\right|_{\mathbf{c}(p)}\right)_p,\cdots,\left(\left.\frac{\partial\varphi}{\partial u_m}\right|_{\mathbf{c}(p)}\right)_p\right)$$

ahora bien, como el rango de la matriz

$$D\varphi = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial u_1},\cdots,\frac{\partial\varphi}{\partial u_m}\right)$$

es siempre igual a m, se concluye que dim $T_pM = m$. Cualquier vector $\xi = (\xi_1,\cdots,\xi_n)_p \in T_pM$ puede escribirse en la forma

$$\xi = \begin{pmatrix}\xi_1\\ \vdots\\ \xi_n\end{pmatrix} = \left(\left.\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right|_{\mathbf{c}(p)},\cdots,\left.\frac{\partial\varphi}{\partial u_m}\right|_{\mathbf{c}(p)}\right)\begin{pmatrix}\xi_1^{\varphi}\\ \vdots\\ \xi_m^{\varphi}\end{pmatrix}$$

las componentes $(\xi_1^{\varphi},\cdots,\xi_m^{\varphi})$ de se denominan coordenadas locales (o intrínsecas) de ξ respecto a φ, mientras que $(\xi_1,\cdots,\xi_n)$ se denominan componentes extrínsecas de ξ.

1.4.4. Derivadas direccionales en $\mathbb{R}^n$

Sea $\mathbb{D}$ un abierto de $\mathbb{R}^n$ con coordenadas $(x_1,\ldots x_n)$, $F:\mathbb{D}\to\mathbb{R}$ una función diferenciable, y $p\in\mathbb{D}$. Un vector tangente $\xi = \vec{\xi}_p \in T_p\mathbb{D}$ actua sobre la función F como la *derivada direccional* de F en p según el vector $\vec{\xi}$, y puede definirse de la forma

$$\xi\,(F) = (F\circ\alpha)'\,(0)$$

siendo $\alpha \in C\,(p,\mathbb{D})$ cualquier curva tal que $\alpha'(0)=\xi$. De hecho, si $\alpha(t) = (x_1(t),\ldots,x_n(t))$, usando la regla de la cadena queda:

$$(F\circ\alpha)'\,(0) = \sum\left.\frac{\partial F}{\partial x_i}\right|_p\left.\frac{dx_i}{dt}\right|_0 = \sum\left.\frac{\partial F}{\partial x_i}\right|_p\xi_i$$

Vistas las cosas así, parece natural denotar

$$(1,0,\ldots,0)_p = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)_p,\ldots,(0,0,\ldots,1)_p = \left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)_p$$

pues así se tiene la identidad:

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p(F) = \left.\frac{\partial F}{\partial x_i}\right|_p$$

Con esta notación, si $(\mathcal{U}, \mathbf{c} = (u_1, \ldots, u_m))$ es una carta de M, podemos escribir:

$$\left(\left. \frac{\partial \varphi}{\partial u_j} \right|_{\mathbf{c}(p)} \right)_p = \sum_{i=1}^{m} \left. \frac{\partial \varphi_i}{\partial u_j} \right|_{\mathbf{c}(p)} \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right)_p \tag{1}$$

1.4.5. Derivadas direccionales en variedades

Si M es una variedad, $p \in M$, y $f \in \mathcal{F}(M)$, sea $F : \mathbb{D} \to \mathbb{R}$ una función diferenciable, con $p \in \mathbb{D}$ abierto de $\mathbb{R}^n$, tal que $F(x) = f(x)$ para todo $x \in \mathcal{U} = \mathbb{D} \cap M$. Fijado $\xi \in T_pM$, y $\alpha \in C(p, M)$ tal que $\alpha'(0) = \xi$, podemos definir

$$\xi(f) = (f \circ \alpha)'(0) = (F \circ \alpha)'(0) = \xi(F)$$

y esto es idependiente de:

a) La función F elegida que extiende a f en torno al punto p.

b) La curva $\alpha \in C(p, M)$ tal que $\alpha'(0) = \xi$

En particular si $(\mathcal{U}, \mathbf{c} = (u_1, \ldots, u_m))$ es una carta de M se tiene

$$\begin{aligned} \left(\left. \frac{\partial \varphi}{\partial u_j} \right|_{\mathbf{c}(p)} \right)_p (F) &= \sum_{i=1}^{n} \left. \frac{\partial \varphi_i}{\partial u_j} \right|_{\mathbf{c}(p)} \left. \frac{\partial F}{\partial x_i} \right|_p = \\ \left. \frac{\partial (F \circ \varphi)}{\partial u_j} \right|_{\mathbf{c}(p)} &= \left. \frac{\partial (f \circ \varphi)}{\partial u_j} \right|_{\mathbf{c}(p)} \end{aligned}$$

por esto es natural denotar

$$\left(\frac{\partial}{\partial u_j} \right)_p = \left(\left. \frac{\partial \varphi}{\partial u_j} \right|_{\mathbf{c}(p)} \right)_p$$

pues así se tiene la identidad:

$$\left(\frac{\partial}{\partial u_j} \right)_p (f) = \left. \frac{\partial (f \circ \varphi)}{\partial u_j} \right|_{\mathbf{c}(p)}$$

1.4.6. Propiedades de las derivadas direccionales.

Así pues un vector $\xi \in T_pM$, define la derivada direccional $\xi{:}\mathcal{F}(M) \to \mathbb{R}$ de forma que a una función $f \in \mathcal{F}(M)$ le asocia el número $\xi(f)$ mediante la fórmula:

$$\xi(f) = (f \circ \alpha)'(0) \tag{2}$$

para $\alpha \in C(p, M)$ con $\alpha'(0) = \xi$ .Es fácil comprobar que se verifican las siguientes propiedades, para todo $f, g \in \mathcal{F}(M)$, todo $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$,

0) Si $f \circ \alpha = g \circ \alpha$ para un $\alpha \in C(p, M)$ con $\alpha'(0) = \xi$, entonces $\xi(f)$ $=\xi(g)$. En particular $\xi(f)$ $=\xi(g)$, cuando f, y g coinciden en un entorno $\mathcal{U}$ de p.

1) $\xi(\lambda f + \mu g) = \lambda\xi(f) + \mu\xi(g)$

2) $\xi(fg) = \xi(f)g(p) + f(p)\xi(g)$.

3) Si $(\mathcal{U}, \mathbf{c})$ una carta de M, $\mathbf{c} = (u_1, \cdots, u_m)$, φ=$\mathbf{c}^{-1}$ la parametrización local asociada, entonces , para $p \in \mathcal{U}$

$$\left(\frac{\partial}{\partial u_i}\right)_p (f) = \left(\frac{\partial(f \circ \varphi)}{\partial u_i}\right)_{\mathbf{c}(p)} \tag{3}$$

y además se verifica para cada $\xi \in T_pM$ la identidad

$$\xi = \sum \xi(u_i) \left(\frac{\partial}{\partial u_i}\right)_p \tag{4}$$

1.4.7. Derivaciones por un punto

Fijado un punto p de la variedad M, una derivación por p es un operador D:$\mathcal{F}(M)$$\to$$\mathbb{R}$ que verifica para todo $f, g \in \mathcal{F}(M)$, todo $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ las propiedades 1) y 2) del epígrafe 1.4.6, es decir:

1) $D(\lambda f + \mu g) = \lambda D(f) + \mu D(g)$

2) $D(fg) = D(f)g(p) + f(p)D(g)$.

Hay varias afirmaciones elementales que hacer, cuya demostración es inmediata

(a) El conjunto $\mathcal{D}_p(M)$ de derivaciones por $p \in M$, tiene estructura natural de $\mathbb{R}$-espacio vectorial.

(b) Usando la técnica de las funciones meseta es fácil demostrar que una derivación $D \in \mathcal{D}_p(M)$ es un operador localizable, es decir: $D(f) = D(g)$ si $f = g$ en $\mathcal{U}$ entorno de p, además $D(f)$ está bién determinado para $f \in \mathcal{F}(\mathcal{U})$, es decir, cuando se conoce f solo en un entorno de p.

(c) Si $D \in \mathcal{D}_p(M)$, y se piensa en un $k \in \mathbb{R}$ como una función constante, entonces $D(k) = 0$.

1.4.8. Vectores tangentes y derivaciones

A cada $\xi \in T_pM$ podemos asociarle una derivación $D_\xi \in \mathcal{D}_p(M)$, de forma que

$$D_\xi f = \xi(f) = (f \circ \alpha)'(0) \ , \ \alpha \in C(p, M) \text{ con } \alpha'(0) = \xi$$

Teorema

La aplicación $T_pM \to \mathcal{D}_p(M)$ $\xi \to D_\xi$, es un isomorfismo $\mathbb{R}$-lineal.

Demostración:

Es fácil ver que se trata de una aplicación $\mathbb{R}$-lineal. Probemos que es inyectiva:

En efecto, si $D_\xi = 0$ para cierto $\xi \in T_pM$, entonces necesariamente $\xi = 0$, ya que si $(\mathcal{U}, \mathbf{c})$ una carta de M, $\mathbf{c} = (u_1, \ldots, u_m)$ entonces fijada $\mu \in \mathcal{F}(M)$ función $(p \in \mathcal{U})$-meseta es (ver observación 1.3.1.1) $\mu u_i \in \mathcal{F}(M)$, $D_\xi(\mu u_i) = 0$, y se verifica por (4)

$$\xi = \sum_1^m \xi(u_i) \left(\frac{\partial}{\partial u_i}\right)_p = \sum_1^m D_\xi(\mu u_i) \left(\frac{\partial}{\partial u_i}\right)_p = \sum_1^m 0 \left(\frac{\partial}{\partial u_i}\right)_p = 0$$

Veamos que es sobreyectiva:

Dado $D \in \mathcal{D}_p(M)$, el único *candidato* posible $\xi \in T_pM$ tal que $D_\xi = D$ debe escribirse de la forma

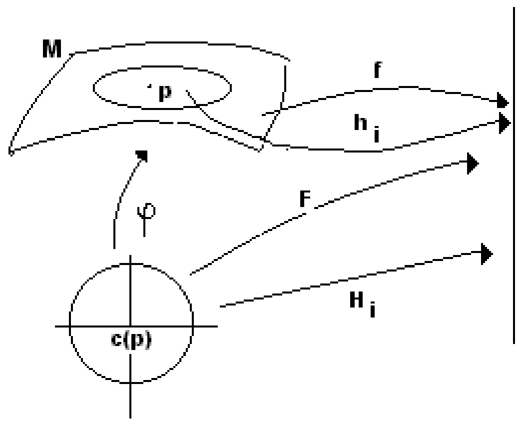
$$\xi = \sum_1^m \xi(u_i) \left(\frac{\partial}{\partial u_i}\right)_p = \sum_1^m D(u_i) \left(\frac{\partial}{\partial u_i}\right)_p$$

donde $D(u_i) \in \mathbb{R}$ tiene sentido por la observación (b) anterior.

Así pues, hay que probar que para todo $f \in \mathcal{F}(M)$ es

$$D(f) = \left\{\sum_1^m D(u_i) \left(\frac{\partial}{\partial u_i}\right)_p\right\}(f) = \sum_1^m D(u_i) \left.\frac{\partial(f \circ \varphi)}{\partial u_i}\right|_{\mathbf{c}(p)} \qquad (5)$$

Tomemos entonces la carta $\mathbf{c} = (u_1, \ldots, u_m)$ de forma que $\mathbb{U} = \mathbb{B}_1$ y $\mathbf{c}(p) = (u_1(p), \cdots, u_m(p)) = (0, \cdots, 0)$.



Fijada $f \in \mathcal{F}(M)$ y usando el **Lema** del final para la función $F = f \circ \varphi$ se concluye que existen funciones $h_i = H_i \circ \mathbf{c} \in \mathcal{F}(\mathcal{U})$ tales que:

$$h_i(p) = \left.\frac{\partial(f \circ \varphi)}{\partial u_i}\right|_{\mathbf{c}(p)}, \text{ y } f = f(p) + \sum_{i=1}^m u_i h_i \qquad (6)$$

Se tiene entonces (ya que $D(f(p)) = 0$):

$$D(f) = D\left(\sum_{i=1}^2 u_i h_i\right) = \sum_{i=1}^2 \{D(u_i) h_i(p) + u_i(p) D(h_i)\}$$

Teniendo en cuenta que $u_i(p) = 0$ y (6) se obtiene (5)

Lema

Sea $F : \mathbb{B}_1 \to \mathbb{R}$ una función diferenciable definida en la bola unitaria $\mathbb{B}_1 = \{(u_1, \ldots, u_m) : \sum u_i^2 < 1\}$. Existen entonces funciones $H_i : \mathbb{B}_1 \to \mathbb{R}$ diferenciables, tal que

$$H_i(0) = \left.\frac{\partial F}{\partial u_i}\right|_0, \; F = F\,(0) + \sum_{i=1}^{m} u_i H_i$$

Demostración

Fijado u=$(u_1, \ldots, u_m) \in \mathbb{B}_1$, se tiene la identidad

$$\begin{aligned} F(u) - F(0) &= \int_0^1 \frac{d}{ds}\,(F)\,ds \\ &= \int_0^1 \left(\sum_{i=1}^{2} \left.\frac{\partial F}{\partial u_i}\right|_{su} u_i \right) ds \\ &= \sum_{i=1}^{m} u_i H_i \end{aligned}$$

donde

$$H_i(u) = \int_0^1 \left(\left.\frac{\partial F}{\partial u_i}\right|_{su} \right) ds$$

además

$$H_i(0) = \int_0^1 \left(\left.\frac{\partial F}{\partial u_i}\right|_{s0} \right) ds = \left.\frac{\partial F}{\partial u_i}\right|_0$$

1.5. La Diferencial de una función

1.5.1. La diferencial para funciones de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^m$

Sea $F : \mathbb{U} \to \mathbb{R}^m$, una función diferenciable definida sobre un abierto $\mathbb{U}$ de $\mathbb{R}^n$. Se llama *diferencial (geométrica)* de F en $p \in \mathbb{U}$, a la aplicación lineal

$$dF(p) : T_p\mathbb{R}^n \ni \vec{\xi}_p \to (DF(p)(\vec{\xi}))_{F(p)} \in T_{F(p)}\mathbb{R}^m$$

que hace conmutativo el diagrama:

$$\begin{tikzcd} T_p\mathbb{R}^n \arrow[r, "dF(p)"] \arrow[d] & T_{F(p)}\mathbb{R}^m \arrow[d] \\ \mathbb{R}^n \arrow[r, "DF(p)"'] & \mathbb{R}^m \end{tikzcd}$$

es decir, se trata de la aplicación lineal que tiene por matriz la matriz jacobiana de $DF(p)$ respecto a las bases canónicas en $T_p\mathbb{R}^n$ y $T_{F(p)}\mathbb{R}^m$. Se tiene así la siguiente identidad:

$$dF(p)\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p = \sum_j \left(\frac{\partial F_j}{\partial x_i}\right)_p \left(\frac{\partial}{\partial y_j}\right)_{F(p)} = \left(\left.\frac{\partial F}{\partial x_i}\right|_p\right)_{F(p)}$$

El vector $dF(p)(\xi)$ para $p \in \mathbb{U}$, y $\xi \in T_p\ \mathbb{R}^n$ se escribe:

$$dF(p)(\xi) = \sum_j \xi_j \left(\left.\frac{\partial F}{\partial x_j}\right|_p\right)_{F(p)}$$

y puede determinarse geométricamente usando la siguiente receta:

Tómese una curva diferenciable $\alpha : I \to \mathbb{U}$ por ξ (es decir $\alpha(0) = p, .\alpha'(0) = \xi$). Se tiene (por la regla de la cadena del análisis)

$$\left.\frac{d(F\circ\alpha)}{dt}\right|_\tau = \sum_j \left(\frac{d\alpha_j}{dt}\right)_\tau \left(\frac{\partial F}{\partial x_j}\right)_{\alpha(\tau)}$$

Entonces $dF(p)(\xi)$ es exactamente el vector definido por $F\circ\alpha$ en $t = 0$:

$$dF(p)(\xi) = (F\circ\alpha)'(0)$$

Observación 1.5.1.1 *Supongamos que estamos en la situación habitual de ser $M = F^{-1}(0)$ siendo $F = (F_1, ..., F_r) : \mathbb{D} \to \mathbb{R}^r$ diferenciable y rang $\left(DF|_p\right) = r\ \forall p \in M$. Entonces se tiene*

$$T_pM = \ker dF(p)$$

En efecto,como $DF|_p$ es la matriz de $dF(p) : T_p\mathbb{R}^n \to T_{F(p)}\mathbb{R}^r$ se concluye que T_pM y $\ker dF(p)$ tienen la misma dimensión. Además $T_pM \subset \ker dF(p)$ pues $(F\circ\alpha) = 0 \in \mathbb{R}^r$ si $\alpha \in C(p, M)$, y así para $\alpha'(0) = \xi \in T_pM$, es $dF(p)\,(\xi) = (F\circ\alpha)'(0) = 0$.

1.5.2. La diferencial en un punto

Sea M variedad de $\mathbb{R}^n$, y $\bar{M}$ subconjunto de $\mathbb{R}^m$y sea $\phi : M \to \bar{M}$ una función diferenciable, dado $p \in M$, hay un abierto $\mathbb{D}$ de $\mathbb{R}^n$, con $p \in \mathbb{U}$, y existe una función $\Phi : \mathbb{D} \to \mathbb{R}^m$ diferenciable, con $\Phi \mid \mathbb{D}\cap M = \phi \mid \mathbb{D}\cap M$.

En estas condiciones, si $\xi \in T_pM$ y $\alpha \in C(p, M)$, con $\alpha'(0) = \xi$, entonces $\phi\circ\alpha = \Phi\circ\alpha \in C(\phi(p), \bar{M})$, y queda definida sin ambigüedad, una aplicación:

$$d\phi(p) : T_pM \ni \xi = \alpha'(0) \to (\phi\circ\alpha)'(0) \in T_{\phi(p)}\bar{M}$$

Naturalmente $d\phi(p) = d\Phi(p) \mid T_pM$, por lo que si T_pM es subespacio vectorial, entonces $d\phi(p)$ es aplicación lineal , y se denomina diferencial de ϕ en p.

1.5.3. La notación sub y super estrella

Sea $\phi : M \to \bar{M}$ una aplicación diferenciable entre variedades. En general, cuando un objeto geométrico Θ de M es llevado de forma natural a un objeto análogo $\overline{\Theta}$ en $\bar{M}$, escribiremos

$$\overline{\Theta} = \phi_* \Theta \qquad (7)$$

Por ejemplo llevar vectores de M a vectores de $\bar{M}$ por medio de la diferencial. Con esta notación escribiriamos $\phi_* = d\phi(p) : T_pM \to T_{\phi(p)}\bar{M}$, $\xi \to \phi_*\xi$.

A veces sucede que ϕ transforma de manera natural un objeto geométrico $\overline{\Theta}$ en $\bar{M}$ a un objeto geométrico análogo Θ en M. En este caso usaremos la notación

$$\Theta = \phi^* \overline{\Theta}$$

y diremos que Θ se obtiene de $\overline{\Theta}$ por Pull-back.(véase por ejemplo el epígrafe de más adelante)

Esta forma de escribir tiene la ventaja de aligerar considerablemente la notación, y la desventaja de ser algo más imprecisa.

1.5.4. Regla de la cadena.

Si $\phi : M \to \bar{M}$,$\psi : \bar{M} \to \tilde{M}$ son funciones diferenciables entre subconjuntos también lo es la función $\psi \circ \phi$:$M \to \tilde{M}$, y se verifica para cada $p \in M$:

$$d(\psi \circ \phi)(p) = d\psi(\phi(p)) \circ d\phi(p)$$

Usando la notación (7) se tiene la regla sencilla

$$(\psi \circ \phi)_* = \psi_* \circ \phi_*$$

Demostración:

Sea $\xi \in T_pM$, y $\alpha \in C\,(p, M)$ con $\alpha'(0) = \xi$. Entonces:

$$\psi_*\,(\phi_*\xi) = \psi_*\left((\phi \circ \alpha)'\,(0)\right) = (\psi \circ \phi \circ \alpha)'\,(0) = (\psi \circ \phi)_*\xi$$

1.5.5. Expresión analitica local de funciones entre variedades.

Sean, M y $\bar{M}$ variedades de dimensiones m y $\bar{m}$, y sea $\phi : M \to \bar{M}$ una aplicación continua. Entonces, para cada $p \in M$, y cada carta $(\overline{\mathcal{U}}, \overline{\mathbf{c}} = (\bar{u}_1, \ldots, \bar{u}_{\bar{m}}))$, con $\phi(p) \in \overline{\mathcal{U}}$, existe otra $(\mathcal{U}, \mathbf{c}{=}(u_1, \ldots u_m))$ con $p \in \mathcal{U}$ de manera que $\phi(\mathcal{U}) \subset \overline{\mathcal{U}}$, y la aplicación $\phi^{\mathbf{c}\overline{\mathbf{c}}} =: \mathbf{c}(\mathcal{U}) \to \overline{\mathbf{c}}(\overline{\mathcal{U}})$, que hace conmutativo el diagrama:

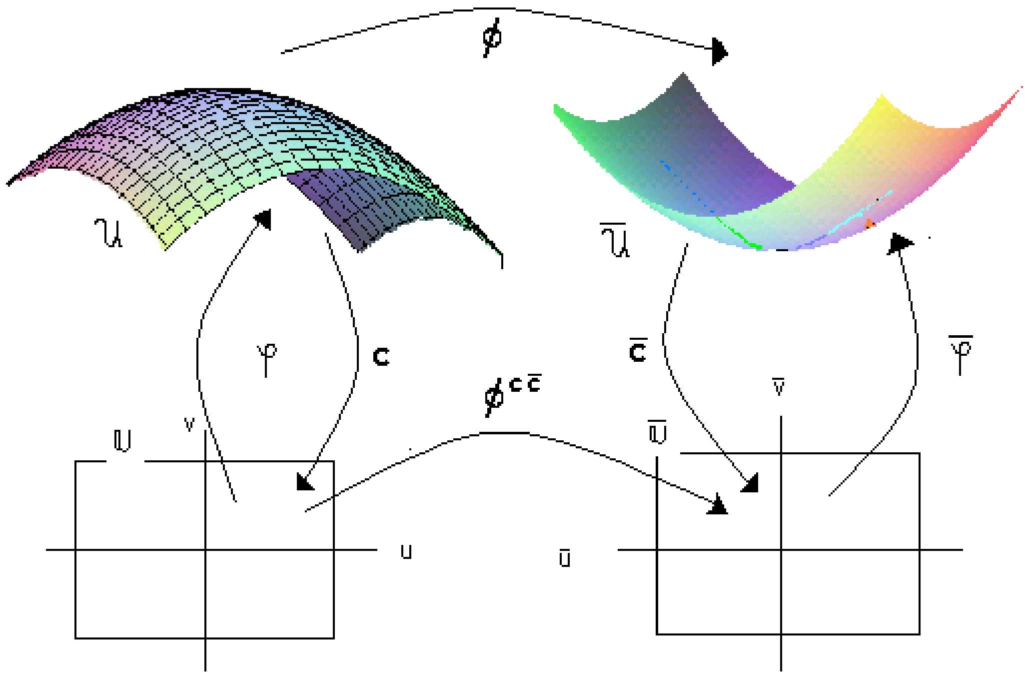
$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{U} \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "\mathbf{c}"'] & \overline{\mathcal{U}} \arrow[d, "\overline{\mathbf{c}}"] \\
\mathbf{c}(\mathcal{U}) \arrow[r, "\phi^{\mathbf{c}\overline{\mathbf{c}}}"'] & \overline{\mathbf{c}}(\overline{\mathcal{U}})
\end{tikzcd}
$$

resulta ser una aplicación continua entre abiertos de $\mathbb{R}^m$ y de $\mathbb{R}^{\bar{m}}$. Se denomina a $\phi^{\mathbf{c}\overline{\mathbf{c}}}$ expresión analítica local de ϕ, y a las

$$
\phi^{\mathbf{c}\overline{\mathbf{c}}} : \begin{cases} \bar{u}_1 = \phi_1(u_1, \dots, u_m) \\ \quad \cdots\cdots\cdots \\ \bar{u}_{\bar{m}} = \phi_{\bar{m}}(u_1, \dots, u_m) \end{cases} \tag{8}
$$

se denominan ecuaciones locales de ϕ, en torno a p. Las funciones ϕ_i se consideran indistintamente funciones de $\mathbf{c}(\mathcal{U})$ o de $\mathcal{U}$. y por tanto vale la igualdad $\phi_i \circ \mathbf{c} = \phi_i$.

Naturalmente si ϕ es una aplicación diferenciable, cualquier representación analítica local $\phi^{\mathbf{c}\overline{\mathbf{c}}} = \overline{\mathbf{c}} \circ \phi \circ \mathbf{c}^{-1}$ de ϕ lo es, por ser composición de funciones diferenciables (ver epígrafe 1.2.5). Recíprocamante, si una función continua $\phi : M \to \bar{M}$ admite una representación analítica local diferenciable en torno a cada punto de M, entonces es diferenciable.



1.5.6. Estudio local de la diferencial en variedades.

Sea $\phi : M \to \bar{M}$ una función diferenciable entre variedades y $\phi^{\mathbf{c}\bar{\mathbf{c}}} = \bar{\mathbf{c}} \circ \phi \circ \mathbf{c}^{-1} : \mathbf{c}(\mathcal{U}) \to \bar{\mathbf{c}}(\overline{\mathcal{U}})$, es la expresión analítica de ϕ, entonces se verifica:

$$d\phi(p)\left(\frac{\partial}{\partial u_i}\right)_p = \sum \left(\frac{\partial \phi_j}{\partial u_i}\right)_{\mathbf{c}(p)} \left(\frac{\partial}{\partial \bar{u}_j}\right)_{\phi(p)}$$

y se tiene el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd} T_pM \arrow[r, "d\phi(p)"] \arrow[d] & T_p\bar{M} \arrow[d] \\ \mathbb{R}^m \arrow[r, "D\phi^{\mathbf{c}\bar{\mathbf{c}}}(p)"'] & \mathbb{R}^{\bar{m}} \end{tikzcd}$$

Es decir, la matriz de $d\phi(p)$ respecto a las bases inducidas por las cartas es $D\phi^{\mathbf{c}\bar{\mathbf{c}}}\big|_{\mathbf{c}(p)}$

Observación 1.5.6.1 *1. Si $(\mathcal{U}, \mathbf{c}{=}(u_1, \ldots u_m))$ es una carta de M, y $p \in M$, entonces $\mathbf{c}{:}\mathcal{U} \to \mathbf{c}(\mathcal{U})$ puede considerarse un difeomorfismo, y se tiene la identidad:*

$$d\mathbf{c}(p)\left(\frac{\partial}{\partial u_i}\right)_p = \left(\frac{\partial}{\partial u_i}\right)_{\mathbf{c}(p)}$$

2. Si $f \in \mathcal{F}(M)$, entonces $df(p) : T_pM \to \{f(p)\} \times \mathbb{R} \approx \mathbb{R}$ y se tiene la identidad:

$$\xi(f) = df(p)(\xi) \text{ para todo } \xi \in T_pM$$

1.5.7. Teorema de la función inversa.

Sea $\phi : M \to \bar{M}$ una función diferenciable entre variedades, $p \in M$. .Supóngase que $d\phi(p)$ es un isomorfismo lineal. Existe entonces un abierto $\mathcal{U}$, con $p \in \mathcal{U}$, de forma que $\phi(\mathcal{U}) = \overline{\mathcal{U}}$ es abierto de $\bar{M}$, y $\phi : \mathcal{U} \to \overline{\mathcal{U}}$ es difeomorfismo.

1.6. Campos de vectores

Un campo de vectores en una variedad M, es una *aplicación* que asigna de forma diferenciable a cada punto, un vector tangente apoyado en él, y puede interpretarse como un operador de derivación de funciones diferenciables con valores reales, deducido de la idea clásica de derivada direccional. Es la denominada derivada de Lie de una función respecto a un campo.

1.6.1. Definiciones

Un campo de vectores en una variedad M de $\mathbb{R}^n$, viene definido por una aplicación diferenciable $\vec{X} = (X_1 \ldots X_n) : M \to \mathbb{R}^n$, y hace corresponder a cada punto $p \in M$, el vector $X(p) = \vec{X}(p)_p \in T_p\mathbb{R}^n$. De esta forma tomando $(x_1, ..., x_n)$ coordenadas en $\mathbb{R}^n$ podemos escribir para todo $p \in M$:

$$X(p) = \sum X_i(p) \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p$$

En particular $(\partial/\partial x_i)$ se interpreta como el campo que hace corresponder a cada punto p el vector $(\partial/\partial x_i)_p$.

El campo X se dice tangente a M, si $X(p) \in T_pM$ para todo $p \in M$. En lo sucesivo, y mientras no se advierta lo contrario, los campos de vectores en M, se supondrán tangentes a M

El conjunto $\mathfrak{X}(M)$ de los campos de vectores (tangentes) definidos sobre una variedad M de $\mathbb{R}^n$, tiene estructura natural de $\mathbb{R}$-espacio vectorial. Además es un $\mathcal{F}(M)$-modulo.. El campo anterior, $X \in \mathfrak{X}(M)$, se puede escribir entonces como

$$X = \sum_i X_i \frac{\partial}{\partial x_i}$$

Las componentes X_i de X se denominan componentes extrísecas.

1.6.2. Expresión intrínseca local de un campo tangente en una superfice.

Si $(\mathcal{U}, \mathbf{c})$ es una carta de la variedad M, entonces la asignación $\partial/\partial u_i$ que hace corresponder a cada $p \in \mathcal{U}$, el vector $(\partial/\partial u_i)_p$ define un campo tangente en $\mathcal{U}$, que denominamos campo coordenado. De hecho los campos:

$$\left(\frac{\partial}{\partial u_1}, \cdots, \frac{\partial}{\partial u_m}\right)$$

constituyen una base del $\mathcal{F}(\mathcal{U})$ -módulo $\mathfrak{X}(\mathcal{U})$, es decir: si $V \in \mathfrak{X}(\mathcal{U})$, existen $V_i^{\mathbf{c}} \in \mathcal{F}(\mathcal{U})$ de forma que

$$V = \sum_{i=1}^{m} V_i^{\mathbf{c}} \frac{\partial}{\partial u_i} \tag{9}$$

se denomina expresión analítica intrínseca de V, y las $V_i^{\mathbf{c}}$ son las componentes intrínsecas de V respecto a la carta $\mathbf{c}$.

Las componentes $V_i^{\mathbf{c}}$ se llaman intrínsecas de V. Existe la siguiente relación entre las componentes $V_i^{\mathbf{c}}$, y las extrísecas V_j:

$$V_j = \sum_{i=1}^{2} V_i^{\mathbf{c}} \frac{\partial x_j}{\partial u_i}$$

1.6.3. Los campos como derivaciones

Una derivación sobre la variedad M es un operador $D : \mathcal{F}(M) \to \mathcal{F}(M)$que verifica las siguientes propiedades, para todo $f, g \in \mathcal{F}(M)$, y todo $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$:

1) $D(\lambda f + \mu g) = \lambda D(f) + \mu D(g)$ ($\mathbb{R}$-linealidad)

2) $D(fg) = (D(f))g + f(D(g))$ (Regla de Leibnitz)

La familia $\mathcal{D}(M)$ de las derivaciones de M, tiene estructura obvia de $\mathcal{F}(M)$ módulo.

Si $V \in \mathfrak{X}(M)$, se define para $f \in \mathcal{F}(M)$ $L_V f : M \to \mathbb{R}$ por la fórmula

$$(L_V f)(p) = V(p)(f), \forall p \in M \tag{10}$$

Es fácil probar, usando la representación analítica local (9) de V que $L_V f$ es en efecto diferenciable. Además $L_V \in \mathcal{D}(M)$ y la aplicación $L : \mathfrak{X}(M) \to \mathcal{D}(M)$ $V \to L_V$ es un homomorfismo $\mathcal{F}(M)$-módulos. Se trata de ver que es isomorfismo.

Por una parte, se ve que una derivación $D \in \mathcal{D}(M)$ determina en cada punto $p \in M$ un vector $D_p \in T_p M$ que como derivación por el punto p se define según el criterio:

$$D_p(f) = D(f)(p) \text{ para todo } f \in \mathcal{F}(M) \tag{11}$$

Comparando (10)y (11) se concluye

$$(L_V)_p = V(p), \forall p \in M \tag{12}$$

Esto permite demostrar directamente que $L : \mathfrak{X}(M) \to \mathcal{D}(M)$ es inyectiva, ya que si $L_V = 0$ entonces para todo $p \in M$ es $(L_V)_p = V(p) = 0$ y $V = 0$.

Además habremos probado que $L : \mathfrak{X}(M) \to \mathcal{D}(M)$ es suprayectiva, si demostramos fijado $D \in \mathcal{D}(M)$, que la asignación $p \to V(p) = D_p$ define un campo diferenciable $V \in \mathfrak{X}(M)$.

En efecto, en torno a cada punto $p \in M$, basta tomar una carta $(\mathcal{U}, \mathbf{c} = (u_1, \ldots, u_m))$ y fijar una función meseta μ con soporte contenido en $\mathcal{U}$ y $\mathcal{U}_1 = \{x \in M : \mu(x) = 1\}$ entorno de p. Se ve entonces que

$$V(x) = \sum_{i=1}^{m} D(\mu u_i)(x) \left(\frac{\partial}{\partial u_i} \right)_x \ \forall x \in \mathcal{U}_1$$

como las funciones $\mu u_i \in \mathcal{F}(M)$ (ver observación 1.3.1.1) las $D(\mu u_i)$ son diferenciables, y se concluye que V es diferenciable en un entorno de cada punto, y es por tanto un campo diferenciable que verifica $L_V = D$.

En adelante no se hará distinción explícita entre el campo V y la derivación asociada L_V.

De paso hemos probado para cada $V \in \mathfrak{X}(\mathcal{U})$ la identidad:

$$V = \sum_{i=1}^{m} V(u_i)\frac{\partial}{\partial u_i}$$

Naturalmente, un campo $V \in \mathfrak{X}(M)$ se restringe de forma natural a un campo $V \in \mathfrak{X}(\mathcal{U})$ para cada abierto $\mathcal{U}$ de M . Así las componentes intrínsecas $V_i^{\mathbf{c}}$ que aparecen en (9) son $V_i^{\mathbf{c}} = V(u_i)$.

1.6.4. Corchete de Lie de dos campos tangentes

Si $V, W \in \mathfrak{X}(M)$, entonces el operador $[V, W]$ definido por:

$$[V, W] : \mathcal{F}(M) \ni f \to [V, W](f) = V(W(f)) - W(V(f)) \in \mathcal{F}(M)$$

verifica las propiedades de la definición 1.6.3, y define por tanto un campo tangente en M, que se denomina corchete de Lie de V y W.

Si $(\mathcal{U}, \mathbf{c})$ es una carta de M, y $V_j^{\mathbf{c}}$, $W_i^{\mathbf{c}}$ son las componentes de V W respectivamente, se tiene:

$$[V, W] = \sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{m}\left(V_j^{\mathbf{c}}\frac{\partial W_i^{\mathbf{c}}}{\partial u_j} - W_j^{\mathbf{c}}\frac{\partial V_i^{\mathbf{c}}}{\partial u_j}\right)\right)\frac{\partial}{\partial u_i}$$

1.6.5. El álgebra de Lie de los campos tangentes

La aplicación *corchete de Lie* $\mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \ni (V, W) \to [V, W] \in \mathfrak{X}(M)$ verifica las siguientes propiedades $\forall U, V, W \in \mathfrak{X}(M)$, $\forall f \in \mathcal{F}(M)$

1) Es $\mathbb{R}$-bilineal, y $[U, V] = -[V, U]$

2) $[U, [V, W]] + [V, [W, U]] + [W, [U, V]] = 0 \ \forall U, V, W \in \mathfrak{X}(M)$

3) $[fV, W] = f[V, W] - W(f)V$

4) $[V, fW] = V(f)W + f[V, W]$

Un $\mathbb{R}$-espacio vectorial $\mathfrak{X}$, dotado de un operador *corchete* $\mathfrak{X} \times \mathfrak{X} \ni (V, W) \to [V, W] \in \mathfrak{X}$ que verifique las propiedades 1) y 2), se denomina *Álgebra de Lie.*

La propiedad 2) es conocida con el nombre de *identidad de Jacobi.*

1.6.6. Derivada de Lie

Un campo $V \in \mathfrak{X}(M)$ induce un operador L_V denominado derivada de Lie que actua de la siguiente forma:

a) Sobre los campos: $L_V : \mathfrak{X}(M) \ni W \to [V, W] \in \mathfrak{X}(M)$.

b) Sobre las funciones: $L_V : \mathcal{F}(M) \ni f \to V(f) \in \mathcal{F}(M)$

y se verifican para todo $f \in \mathcal{F}(M)$ y todo $V, W \in \mathfrak{X}(M)$ las propiedades:

1) L_V es $\mathbb{R}$-lineal y $L_V(fW) = L_V(f)W + fL_V(W)$.

2) $[L_V, L_W] = L_{[V,W]}$ (donde $[L_V, L_W] = L_V \circ L_W - L_W \circ L_V$)

1.6.7. Campos en $\mathbb{R}^n$ tangentes a M

Sea $M \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{R}^n$, M variedad, $\mathbb{D}$ abierto de $\mathbb{R}^n$. Un campo $X \in \mathfrak{X}(\mathbb{D})$ se dice tangente a M, si $X(p) \in T_pM$, $\forall p \in M$. Se denota entonces $X|_M \in \mathfrak{X}(M)$ su correspondiente restricción. En estas condiciones se tiene

$$(X|_M)(F|_M) = X(F)|_M \, , \forall F \in \mathcal{F}(\mathbb{D}) \tag{13}$$

En efecto: llamando $V = X|_M$, $f = F|_M$ fijado $p \in M$, si $\alpha \in C(p, M)$ $\alpha'(0) = X(p) = V(p)$, es $(F \circ \alpha) = (f \circ \alpha)$ y en particular

$$V(f)(p) = X(p)(f) = \alpha'(0)(f) = (f \circ \alpha)'(0) = (F \circ \alpha)'(0) = X(f)(p)$$

Corchete de lie y restricción Si $X, Y \in \mathfrak{X}(\mathbb{D})$ son tangentes a M entonces $[X, Y]$ es tangente a M y se tiene

$$[X, Y]|_M = [X|_M \, , Y|_M]$$

En efecto, llamando $V = X|_M$, $W = Y|_M$ y para cualquier $F \in \mathcal{F}(\mathbb{D})$ tomando $f = F|_M$ se verifica en cada $p \in M$

$$\begin{aligned} [V, W](p)(F) &= [V, W](f)(p) = (V(W(f)) - W(V(f)))(p) = \\ &= V(p)(W(f)) - W(p)(V(f)) \\ &= X(p)(Y(F)) - Y(p)(X(F)) = [X, Y](p)(F) \end{aligned}$$

en donde se ha usado repetidamente (13) y el hecho ya probado de que $\xi(F) = \xi(f)$ si $\xi \in T_pM$.

Criterio de tangencialidad Supongamos que estamos en la situación habitual de ser $M = F^{-1}(0)$ siendo $F = (F_1, ..., F_r) : M \to \mathbb{R}^r$ diferenciable y $rang\left(DF|_p\right) = r$ $\forall p \in M$. Entonces $X \in \mathfrak{X}(\mathbb{D})$ es tangente a M si y solo si

$$X(F_i)|_M = 0 \ , \ i = 1, ..., r$$

Demostración:

X es tangente a M si $dF(p)(X(p)) = 0$ para todo $p \in M$ (ver observación 1.5.1.1), esta condición se expresa usando $DF|_p$ y las componentes vectoriales de $X = \sum X_i \partial/\partial x_i$, en la forma

$$DF|_p \begin{pmatrix} X_1(p) \\ \vdots \\ X_n(p) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X(F_1)(p) \\ \vdots \\ X(F_r)(p) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

1.6.8. Paralelizaciones

Una *paralelización* de un abierto $\mathcal{U}$ una variedad M, es un sistema de campos $(E_1, \dots, E_m) \subset \mathfrak{X}(\mathcal{U})$, con la propiedad de que para cada $p \in \mathcal{U}$, $(E_1(p), \dots, E_m(p))$ sea base de T_pM. Si $\mathcal{U}$ admite una paralelización, se dice que es paralelizable.

Observaciones

- Si $(\mathcal{U}, \mathbf{c} = (u_1, \dots u_m))$ es una carta de M entonces $(\partial/\partial u_1, \dots, \partial/\partial u_m)$ es una paralelización en $\mathcal{U}$, así pues una variedad es localmente paralelizable.
- Si $\mathcal{U}$ es un abierto paralelizable de la variedad M, entonces $\mathcal{U}$ no tiene porqué ser dominio de una carta. De hecho, $\mathbb{S}^1$ es paralelizable, y sin embargo por ser un espacio compacto, no admite una carta global.
- Curiosamente, el hecho de que una variedad sea o no paralelizable, depende más de su topología, que de la estructura diferenciable. Hay condiciones topológicas (no orientabilidad, característica de Euler no nula ...) que garantizan que una variedad M no es paralelizable, y otras (conexión simple, contractibilidad ...) que garantizan todo lo contrario.

Paralelizaciones y bases de $\mathfrak{X}(M)$ Probaremos que son equivalentes la afirmación de que una variedad M sea paralelizable, y la de que $\mathfrak{X}(M)$ sea $\mathcal{F}(M)$-módulo libre. La razón de esto, es que es lo mismo una paralelización de M que una base para el $\mathcal{F}(M)$-módulo $\mathfrak{X}(M)$. En efecto, si $(E_1, \dots, E_m) \subset \mathfrak{X}(M)$ es una paralelización de M entonces dado $V \in \mathfrak{X}(M)$, para cada $p \in M$ existen unos números únicos, digamos $f_i(p)$ tales que $V(p) = \sum f_i(p)E_i(p)$, ya que $(E_1(p), \dots, E_m(p))$ es base de T_pM. Tenemos que demostrar que las funciones $f_i : M \to \mathbb{R}$ son diferenciables. Para ello probaremos que lo son en el dominio de cualquier carta$(\mathcal{U}, \mathbf{c} = (u_1, \dots u_m))$. En efecto, tenemos,$E_j = \sum \phi_{ij}\partial/\partial u_i$, donde $\left(\phi_{ij}\right)$ es una matriz cuadrada con entradas diferenciables y con det $\left(\phi_{ij}\right) \neq 0$ en cada punto. Por tanto admite función inversa $\left(\phi_{ij}\right)^{-1} = \left(\psi_{ij}\right)$ que también tiene entradas diferenciables y se verificca $\partial/\partial u_j = \sum \psi_{ij}E_i$, como $V = \sum V_j^{\mathbf{c}}\partial/\partial u_j$, con $V_j^{\mathbf{c}}$ diferenciables, se concluye que $V = \sum_i \left(\sum_j V_j^{\mathbf{c}}\psi_{ij}\right) E_i$, y por la unicidad de las funciones f_i se concluye que $f_i = \sum_j V_j^{\mathbf{c}}\psi_{ij}$ que son por tanto diferenciables en $\mathcal{U}$.

Recíprocamente, supongase que $(E_1, \dots, E_r)$ es base de $\mathfrak{X}(M)$ siendo M variedad de dimensión m. Fijado $p \in M$, es claro que $(E_1(p), \dots, E_r(p))$ constituyen un sistema generador, ya que fijado $\xi \in T_pM$, podemos tomar $V \in \mathfrak{X}(M)$ con $V(p) = \xi$, y así $\xi = V(p) = \sum f_i(p)E_i(p)$ si $V = \sum f_iE_i$. de esta forma, necesariamente es $r \geq m$. Si $r = m$, hemos terminado (pues $(E_1(p), \dots, E_r(p))$ sería base de T_pM), si $r > m$, podemos extraer de $(E_1(p), \ldots, E_r(p))$ m vectores linealmente independientes, pongamos por ejemplo $(E_1(p), \ldots, E_m(p))$. Es facil ver (tomando una carta) que por razones de continuidad $(E_1, \ldots, E_m)$ constituyen una paralelización de un cierto abierto $\mathcal{U}$ de M que contiene a p, de forma que podemos escribir $E_{m+1} = \sum_1^m f_i E_i$, $f_i \in \mathcal{F}(\mathcal{U})$. Tomando finalmente una función meseta μ en torno a p con soporte contenido en $\mathcal{U}$, entonces $\mu u_i \in \mathcal{F}(M)$ (ver observación 1.3.1.1) y $\mu E_{m+1} - \sum_1^m (\mu f_i) E_i = 0$ como μ no es identicamente nulo, se contradice la $\mathcal{F}(M)$-independencia lineal de $(E_1, \ldots, E_r)$.

1.7. SISTEMAS DINÁMICOS

[2] El objetivo es formalizar la reconversión de la teoría de integración de un sistema de ecuaciones diferenciales autónomas de primer orden, al ámbito de las variedades abstractas:

Dado un campo, las curvas cuya velocidad define en cada punto el vector del campo son sus curvas integrales. La teoría de existencia y unicidad de curvas integrales maximales, y de flujos, se corresponde en su versión local con la teoría de integración y dependencia diferenciable de las soluciones con las condiciones iniciales. Mirado así, un campo se denomina también Sistema Dinámico.

1.7.1. Curva integral de un campo tangente.

Una curva integral de un campo $V \in \mathfrak{X}(M)$, es una curva $\alpha : I \to M$ diferenciable que verifica la condición:

$$\alpha'(t) = V(\alpha(t)) \text{ para todo } t \in I$$

si $0 \in I$, y $\alpha(0) = p$, se dice que α es una curva integral de V por el punto $p \in M$.

Observación 1.7.1.1

- *Supuesto que $\alpha : I \to M$ es una curva integral de $V \in \mathfrak{X}(M)$, y si $\mathbf{t} : J \ni s \to \mathbf{t}(s) \in I$ es un cambio de parámetro, la curva $\bar{\alpha} : J \ni s \to \alpha(\mathbf{t}(s)) \in M$, no es en general curva integral de V a no ser que $d\mathbf{t}/ds \equiv 1$, (y esto sucede solo cuando $\mathbf{t}(s) = s_0 + s$). En efecto, se tiene*

$$\left.\frac{d\bar{\alpha}}{ds}\right|_s = \left.\frac{d\alpha}{dt}\right|_{\mathbf{t}(s)} \left.\frac{d\mathbf{t}}{ds}\right|_s = \alpha'(\mathbf{t}(s)),1 = V(\alpha(\mathbf{t}(s)) = V(\bar{\alpha}(s))$$

- *El conjunto de las curvas integrales de campos de vectores se denomina* Sistema dinámico

[2] Este epígrafe no es necesario en una primera lectura.

Observación 1.7.1.2 *Si*

$$V = \sum_{i=1}^{m} V_i^{\mathbf{c}} \frac{\partial}{\partial u_i}$$

es la expresión analítica de un campo $V \in \mathfrak{X}(M)$ *respecto a una carta* $(\mathcal{U}, \mathbf{c} = (u_1, \ldots, u_m))$ *, con* $\mathbf{c}(\mathcal{U}) = \mathbb{U}$ *, entonces, puede interpretarse que* $\sum_{i=1}^{m} V_i^{\mathbf{c}} \frac{\partial}{\partial u_i} \in \mathfrak{X}(\mathbb{U})$ *y sus curvas integrales determinan las expresiones analíticas de las curvas de* V*.*

1.7.2. Teoremas de existencia en $\mathbb{R}^m$

La observación anterior, prueba que el problema de existencia y unicidad (local) de curvas integrales por un punto de un campo definido en una variedad diferenciable, puede plantearse directamente en un abierto de $\mathbb{R}^m$.

Sea $X \in \mathfrak{X}(\mathbb{U})$ un campo de vectores definido sobre un abierto $\mathbb{U}$ de $\mathbb{R}^m$.

Tomando en $\mathbb{R}^m$ coordenadas $(u_1, ..., u_m)$, si $\alpha(t) = (u_1(t), ..., u_m(t))$, y $\vec{X} = (X_1, ..., X_m)$ la condición necesaria y suficiente para que α sea curva integral de X es que las funciones $u_i(t)$ verifiquen el sistema de ecuaciones diferenciales

$$\left.\frac{du_i}{dt} = X_i(u_1(t), ..., u_m(t)) \right\}_{i=1,\ldots,m}$$

la teoría general de ecuaciones diferenciales asegura que para cada $t_0 \in \mathbb{R}$ y cada $u^0 = (u_1^0, ..., u_m^0) \in \mathbb{U}$:

1. existe una curva integral de X, $\alpha : I \to \mathbb{U}$ con $t_0 \in I$, y $\alpha(t_0) = u^0$. Por otra parte si $\beta : J \to \mathbb{U}$ verifica la misma condición, entonces $\alpha = \beta$ en $I \cap J$

2. existe I intervalo con $t_0 \in I$, $\mathbb{V}$, abierto, con $u^0 \in \mathbb{V}$ y una función diferenciable

   $$\psi : I \times I \times \mathbb{V} \ni (t, \bar{t}, u) \to \psi(t, \bar{t}, u) \in \mathbb{U}$$

   de forma que $\forall u \in \mathbb{U}$ la curva $I \ni t \to \psi(t, \bar{t}, u) \in \mathbb{U}$ es curva integral de X con $\psi(\bar{t}, \bar{t}, u) = u$.

1.7.3. Existencia y unicidad de curvas integrales.

Sea $V \in \mathfrak{X}(M)$, y $p \in M$. Existe entonces una curva integral $\alpha : I \to M$, por p. Por otra parte, si $\beta : J \to M$, es otra curva integral de V por p, entonces $\alpha(t) = \beta(t)$ $\forall t \in I \cap J$.

Demostración. Tomando $(\mathcal{U}, \mathbf{c})$ carta de M con $p \in \mathcal{U}$ y usando la observación 1.7.1.2 y el anterior epígrafe se deduce la existencia. La segunda parte se demuestra probando que el conjunto

$$K = \{t \in I \cap J : \alpha(t) = \beta(t)\}$$

es abierto y cerrado. La condición de ser abierto es también consecuencia de la observación 1.7.1.2 y el anterior epígrafe. La condición de ser cerrado usa la propiedad T_2 de M, ya que:

El conjunto de puntos en donde coinciden dos aplicaciones continuas sobre un espacio de Haussdorf, es cerrado.

Observación 1.7.3.1 *De la misma forma se prueba que si* $\alpha : I \to M$, $\beta : J \to M$ *son curvas integrales de* V *y* $\alpha(t_0) = \beta(t_0)$ *para algún* $t_0 \in I \cap J$, *entonces* $\alpha(t) = \beta(t)$ $\forall t \in I \cap J$.

La curva integral $\alpha : I \to M$ de V por p se dice *no* maximal, si existe $\beta : J \to M$ curva integral de V por p tal que $I \subsetneq J$. Es fácil ya obtener el siguiente resultado:

Teorema 1.7.3.1 *Sea* $V \in \mathfrak{X}(M)$, *y* $p \in M$. *Existe entonces una única curva integral maximal* $\alpha_p : I_p \to M$, *de* V *por* p.

Demostración. Sea $\mathcal{I}(p) = \{I$ intervalo de $\mathbb{R}$: Existe $\alpha_I : I \to M$ curva integral de V por $p\}$, y sea I la unión de los intervalos de la familia. Se define entonces la curva $\alpha_p : I_p \to M$ por la condición

$$\forall t \in I_p \text{ es } \alpha_p(t) = \alpha_I(t) \text{ si } t \in I \in \mathcal{I}(p)$$

la definición carece de ambigüedad y define la curva integral maximal de V por p. ■

1.7.4. Flujos locales

Proposición 1.7.4.1 *Sea* $V \in \mathfrak{X}(M)$, *y* $p \in M$. *existe entonces un entorno abierto* $\mathcal{U}$ *de* p, *un intervalo abierto , con* $0 \in J$, *y una función diferenciable* $\Phi : J\times \mathcal{U} \to M$ *de forma que para cada* $x \in \mathcal{U}$, *la curva*

$$\alpha_x : J \ni t \to \Phi(t, x) \in M \tag{14}$$

es una curva integral de V *por* x. *Se llama a* $\Phi : J\times \mathcal{U} \to M$ *flujo local de* V *por* p.

Demostración. El resultado, cuando se toma $M = \mathbb{U}$ abierto de $\mathbb{R}^m$ es una caso particular de 1.7.2, para $t_0 = 0$ tomando $\Phi : I \times \mathbb{V} \ni (t, u) \to \psi(t, 0, u) \in \mathbb{U}$.

En el caso general basta tomar $(\mathcal{U}, \mathbf{c})$ carta de M con $p \in \mathcal{U}$ y aplicar el siguiente Lema ■

Lema 1.7.4.1 *Sea $V \in \mathfrak{X}(M)$, $\bar{V} \in \mathfrak{X}(\bar{M})$ campos ϕ-relacionados, siendo $\phi : M \to \bar{M}$ un difeomorfismo. Entonces, si $\Phi : J\times \mathcal{U} \to M$ es un flujo local de V por $p \in M$, entonces*

$$\bar{\Phi} : J \times \phi(\mathcal{U}) \ni (t, \bar{x}) \to \phi\left(\Phi(t, \phi^{-1}(\bar{x}))\right) \in \bar{M}$$

es un flujo local de $\bar{V}$ por $\bar{p} = \phi(p)$

Teniendo en cuenta que $\Phi(0, p) = p$, por razones de continuidad, podemos encontrar $\varepsilon > 0, \mathcal{U}_0$ entorno de p, de forma que $\Phi(I_\varepsilon\times \mathcal{U}_0) \subset \mathcal{U}$, y denotando $\Phi_t(x) = \Phi(t, x)$ se tiene:$\{\Phi_t\}_{t\in I_\varepsilon}$

Corolario 1.7.4.1 *Sea $V \in \mathfrak{X}(M)$, y $p \in M$. existe $(\mathcal{U}_0,\mathcal{U}, \varepsilon, \Phi)$ donde*

$\mathcal{U}_0$, y $\mathcal{U}$ son abiertos $p \in \mathcal{U}_0 \subset \mathcal{U}$, y $\varepsilon > 0$

$\Phi : I_\varepsilon \times \mathcal{U} \to M$ es un flujo local de V por p. y $\Phi(I_\varepsilon \times \mathcal{U}_0) \subset \mathcal{U}$

Se denomina a $(\mathcal{U}_0,\mathcal{U}, \varepsilon, \Phi)$ caja de flujo de V por p, y a $\{\Phi_t\}_{t\in I_\varepsilon}$ grupo uniparamétrico local de V en torno a p.

Observación 1.7.4.1 *En las condiciones anteriores, denotando $\Phi_t(x) = \Phi(t, x)$ se obtiene una familia $\{\Phi_t\}_{t\in I_\varepsilon}$ que se denomina* grupo uniparamétrico local *de V en torno a p. Nótese que para $s, t \in I_\varepsilon$, tales que $s + t \in I_\varepsilon$, y $x \in \mathcal{U}_0$, por la observación 1.7.1.1, es $t \to \alpha_x(t + s) = \Phi_{t+s}(x)$ curva integral de V , por $\Phi_s(x)$ igual que $t \to \beta(t) = \Phi_t \circ \Phi_s(x)$, por tanto*

$$\Phi_t \circ \Phi_s(x) = \Phi_{t+s}(x)\ \forall x \in \mathcal{U}_0$$

Llamando $\Phi_t(\mathcal{U}_0) = \mathcal{U}_t$ se tiene el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{U}_0 \arrow[rr, "\Phi_t"] \arrow[dr, "\Phi_{s+t}"'] & & \mathcal{U}_t \arrow[dl, "\Phi_s"] \\
& \mathcal{U}_{t+s} &
\end{tikzcd}$$

si $s = -t$ se concluye que $\Phi_t \circ \Phi_{-t}(x) = x\ \forall x \in \mathcal{U}_0$, y por tanto $\Phi_t : \mathcal{U}_0 \to \mathcal{U}_t$ es un difeomorfismo para cada $t \in I_\varepsilon$

1.7.5. Campos completos.

Un campo $V \in \mathfrak{X}(M)$ se dice completo si para cada $p \in M$, la curva integral maximal de V por p está definida en todo $\mathbb{R}$ es decir: $\alpha_p : I_p = \mathbb{R} \to M$.

Proposición 1.7.5.1 *Si $V \in \mathfrak{X}(M)$ y M es una variedad compacta, entonces V es necesariamente completo.*

Demostración. Sea $\alpha : I = (a,b) \to M$ curva integral de V. Probaremos por ejemplo que si $b < +\infty$, entonces existe una curva integral de V, $\bar{\alpha} : (a,\bar{b}) \to M$ con $b < \bar{b}$ y $\bar{\alpha} \mid (a,b) = \alpha$.

En efecto, por ser M compacta, es posible encontrar una sucesión $(t_n) \subset I$ con $\lim t_n = b$, y $p_n = \alpha(t_n) \to p \in M$. Si $\Phi : I_\varepsilon \times \mathcal{U}_0 \to \mathcal{U}$ es una caja de flujo con $p \in \mathcal{U}_0$, tomemos N de forma que

$$b - t_N < \varepsilon,\ \alpha(t_N) = \ p_N \in \mathcal{U}_0$$

la curva $\sigma : I_\varepsilon(t_N) \ni t \to \sigma(t) = \alpha_{p_N}(t - t_N) = \Phi(t - t_N, p_N) \in M$ es curva integral de V que para valor $t = t_N$ del parámetro verifica $\sigma(t_N) = \alpha_{p_N}(0) = p_N = \alpha(t_N)$, así α y σ coinciden en la intersección de sus dominios, y la curva

$$\bar{\alpha}(t) = \begin{cases} \alpha(t) \text{ si } t \in (a, t_N) \\ \sigma(t) \text{ si } t \in I_\varepsilon(t_N) \end{cases}$$

es curva integral de V definida en $(a, t_N + \varepsilon) \supsetneq (a,b)$ que extiende a α ■

Teorema 1.7.5.1 *Si $V \in \mathfrak{X}(M)$ es un campo completo, entonces la aplicación:*

$$\Phi : \mathbb{R} \times M \ni (t,x) \to \alpha_x(t) \in M$$

es diferenciable

Observación 1.7.5.1 *Tenemos así para un campo completo V una enorme caja de flujo $(\mathcal{U}_0, \mathcal{U}, \varepsilon, \Phi) = (M, M, \infty, \Phi)$. que se denomina* flujo global *de V. Este flujo global, da lugar a un grupo uniparamétrico global $\{\Phi_t\}_{t\in\mathbb{R}}$.*

La demostración del teorema depende del siguiente

Lema 1.7.5.1 *Si $V \in \mathfrak{X}(M)$, $p \in M$ y $\alpha : I \to M$ es una curva integral por $\bar{p}$, entonces para cada $\bar{t} \in I$, existe $\Phi : J \times \mathcal{U} \to M$ flujo local de V con $\bar{p} \in \mathcal{U}$, y $\bar{t} \in J$*

Demostración. Sea $K = \{\bar{t} \in I : \exists \bar{\Phi} : J \times \overline{\mathcal{U}} \to M$ flujo local de V con $\bar{p} \in \overline{\mathcal{U}}$, y $\bar{t} \in J\}$, y demostremos que $K = I$. En efecto, K es evidentemente abierto, y no vacío. es más, si $\bar{t} \in K$ ($\bar{t} > 0$), entonces $[0, \bar{t}] \subset K$. Probemos que K es también cerrado (en I). Si $b \in I$, está en la adherencia de K, supongamos por ejemplo $b > 0$, y demostremos que $b \in I$:

Sea $(t_n) \subset K$ una sucesión creciente $\lim t_n = b$. Si $c(b) = p$, entonces por continuidad $c(t_n) = p_n \to p$. Tomemos una caja de flujo $(\mathcal{U}, \mathcal{U}_0, \varepsilon, \Phi)$ por p, y sea $N > 0$ tal que $b - t_N < \varepsilon$, y $p_N \in \mathcal{U}_0$. Como $t_N \in K$, podemos encontrar un flujo local $\bar{\Phi} : J \times \overline{\mathcal{U}} \to M$ con $\bar{p} \in \overline{\mathcal{U}}$ y $t_N \in J = (a, a')$. como $\alpha : I \to M$, y $\bar{\alpha}_{\bar{p}} : J \ni t \to \bar{\Phi}(\bar{p}, t) \in M$, son curvas integrales de X por $\bar{p}$, coinciden en $I \cap J$. En particular es $\bar{\Phi}(\bar{p}, t_N) = \bar{\alpha}_{\bar{p}}(t_N) = p_N \in \mathcal{U}_0$. Por continuidad, existe entorno de $\bar{p}$, de forma que $\bar{\Phi}_{t_N}(\widetilde{\mathcal{U}}) \subset \mathcal{U}_0$. Para cada $x \in \widetilde{\mathcal{U}}$, sea $\sigma_x : I_\varepsilon(t_N) \ni t \to \alpha_{\bar{\Phi}(x,t_N)}(t - t_N) = \Phi(t - t_N, \bar{\Phi}(x, t_N)) \in M$. Como $\sigma_x(t_N) = \bar{\Phi}(x, t_N) = \bar{\alpha}_x(t_N)$ se concluye que $\sigma_x(t) = \bar{\alpha}_x(t)$ $\forall t \in I_\varepsilon(t_N) \cap J$ y esto permite definir sin ambigüedad para $(t, x) \in (a, t_N + \varepsilon)$

$$\tilde{\Phi}(t,x) = \begin{cases} \bar{\Phi}(t,x) = \bar{\alpha}_x(t) \text{ si } t \in (a, t_N) \\ \Phi(t - t_N, \bar{\Phi}(x, t_N)) = \sigma_x(t) \text{ si } t \in I_\varepsilon(t_N) \end{cases}$$

así $\tilde{\Phi} : \tilde{J} \times \widetilde{\mathcal{U}} \to M$ es flujo local con $\bar{p} \in \widetilde{\mathcal{U}}$, y $b \in \tilde{J} = (a, t_N + \varepsilon)$. Así $b \in K$. ■

Demostración. (del Teorema)

Nótese que fijado $(\bar{t}, \bar{p}) \in \mathbb{R} \times M$, si $\Psi : J \times \mathcal{U} \to M$ es el flujo local de V por $\bar{p}$, con $\bar{t} \in J$, entonces usando el teorema 1.7.3.1 se concluye que $\Phi \mid J \times \mathcal{U} = \Psi$. ■

1.7.6. Interpretación dinámica de la derivada de Lie

Sean $V, W \in \mathfrak{X}(M)$, y sea $\Phi : I_\varepsilon \times \mathcal{U}_0 \to \mathcal{U}$ caja de flujo local para V, entonces en $\mathcal{U}_0$ se verifica la fórmula

$$L_V(W) = [V, W] = \lim_{t \to 0} \frac{\Phi_t^*(W) - W}{t}$$

donde hemos denotado para cada $t \in I_\varepsilon$, por Φ_t al difeomeorfismo $\Phi_t : \mathcal{U}_0 \ni x \to \Phi(t, x) \in \mathcal{U}_t$,.y se entiende que $\Phi_t^*(W)$ significa exactamente $\Phi_t^*(W) := \Phi_t^*(W \mid \mathcal{U}_t) \in \mathfrak{X}(\mathcal{U}_0)$.

Observación 1.7.6.1 *Si denotamos, $W_t := \Phi_t^*(W \mid \mathcal{U}_t) \in \mathfrak{X}(\mathcal{U}_0)$, de forma que para cada $p \in \mathcal{U}_0$, resulta que $I_\varepsilon \ni t \to W_t(p) = d\Phi_{-t}(W(\Phi_t(p))) \in T_pM$, es una curva en el espacio vectorial T_pM, con $W_0(p)$=$W(p)$, y así el teorema significa que:*

$$[V, W](p) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} W_t(p), \forall p \in \mathcal{U}_0$$

Demostración. Fijado $p \in \mathcal{U}_0$, y denotando $p_t = \Phi_t(p)$ se tiene para $f \in \mathfrak{F}(M)$:

$$\left[\frac{d\Phi_{-t}(W(p_t)) - W(p)}{t}\right](f) = \frac{d(f \circ \Phi_{-t})(W(p_t)) - W(f)(p))}{t} = A(t) + B(t)$$

en donde henos denotado:

$$\begin{aligned} A(t) &= W(p_t)\left(\frac{f \circ \Phi_{-t} - f}{t}\right) \\ B(t) &= \frac{W(f)(p_t) - W(f)(p)}{t} \end{aligned}$$

Claramente es $\lim_{t\to 0} B(t) = \frac{d}{dt}\big|_{t=0} W(f)(p_t) = \{V(W(f)\}(p)$. Probaremos que $\lim_{t\to 0} A(t) = -\{W(V(f)\}(p)$. En efecto, la función $\Psi : I_\varepsilon \times \mathcal{U}_0 \ni (t,x) \to \Psi_t(x) = f \circ \Phi_t(x) - f(x) \in \mathbb{R}$ es diferenciable, y tomando ahora,

$$g : I_\varepsilon \times \mathcal{U}_0 \ni (t,x) \to g_t(x) = \int_0^1 \frac{\partial \Psi}{\partial t}(st,x)ds \in \mathbb{R}$$

también es diferenciable y verifica:

$$g_0(x) = \frac{\partial \Psi}{\partial t}(0,x) = V(f)(x), \;\; \Psi(t,x) = tg_t(x)$$

así se tiene

$$\frac{f \circ \Phi_{-t} - f}{t} = \frac{\Psi_{-t}}{t} = \frac{-tg_{-t}}{t} = -g_{-t}$$

y por tanto, $A(t) = -W(p_t)(g_{-t})$, y $\lim_{t\to 0} A(t) = -W(p)(g_0) = -W(p)(V(f)$

■

Observación 1.7.6.2 *Si denotamos para $f \in \mathfrak{F}(M)$ $\Phi_t^*(f) = f \circ \Phi_t$ también se tiene la fórmula:*

$$L_V(f) = V(f) = \lim_{t\to 0} \frac{\Phi_t^*(f) - f}{t}$$

2. CALCULO TENSORIAL

En esta sección se introduce el cálculo tensorial en variedades (solo para formas), incluyendo la derivación tensorial de Lie y el pullback. Nos centramos especialmente en las formas lineales y las bilineales.

Las formas bilineales simétricas dan pie para fijarse brevemente en las variedades dotadas de estructura Riemanniana, y en la estructura riemanniana canónica de las variedades sumergidas en $\mathbb{R}^n$.

Las formas bilineales antisimétricas ó alternadas, nos permiten reconsiderar las nociones de elemento de area y orientación en superficies. Esto motiva el desarrollo análogo posterior para variedades de dimensión arbitraria.

Todo este desarrollo está esencialmente dedicado a fabricar los cimientos, que nos permitan establecer de forma consistente una teoría de integración de funciones en variedades que generalize la de Riemann o Riemann-Stieljes o incluso la de Lebesgue en $\mathbb{R}^n$.

2.1. FORMAS MULTILINEALES

En lo que sigue $\mathfrak{X}$ es un módulo sobre un anillo $\mathcal{F}$,y M será una variedad diferenciable La teoría de tensores que vamos a establecer aquí se aplicará fundamentalmente a tres ejemplos de $\mathcal{F}$- módulos

a) $\mathfrak{X} = \mathfrak{X}(M)$, $\mathcal{F} = \mathcal{F}(M)$

b) $\mathfrak{X} = \mathfrak{X}(\mathcal{U})$, $\mathcal{F} = \mathcal{F}(\mathcal{U})$ donde $\mathcal{U}$ es un abierto paralelizable de M (por ejemplo, dominio de una carta)

c) $\mathfrak{X} = T_pM$ espacio tangente a M en un punto $p \in M$, y $\mathcal{F} = \mathbb{R}$.

Escribimos $\mathfrak{X}^r$ para denotar el producto cartesiano $\mathfrak{X}^r = \mathfrak{X} \times \ldots \times \mathfrak{X}$ (r veces)

2.1.1. Definiciones

Una *forma multilineal* o *tensor* (covariante) de órden r es una aplicación $\mathbf{A} : \mathfrak{X}^r \to \mathcal{F}$ que es $\mathcal{F}$-lineal respecto a cada componente, es decir, para cada $i = 1, \ldots, r$, cada $(V_1, \ldots, V_r) \in \mathfrak{X}^r$ cada $W_i \in \mathfrak{X}$, y cada $f, g \in \mathcal{F}$ se tiene:

$$\mathbf{A}(\ldots, fV_i + gW_i, \ldots) = f\mathbf{A}(\ldots, V_i, \ldots) + g\mathbf{A}(\ldots, W_i, \ldots)$$

El conjunto $L^r(\mathfrak{X})$ de todos los tensores de órden r constituyen un $\mathcal{F}$-módulo si se define para $\mathbf{B} \in L^r(\mathfrak{X})$, $(f\mathbf{A}+g\mathbf{B})\,(V_1, \ldots, V_r) = f\mathbf{A}(V_1, \ldots, V_r) + g\mathbf{B}(V_1, \ldots, V_r)$

Convenimos en escribir $L^0(\mathfrak{X}) = \mathcal{F}$ y

$$\mathfrak{L}^r(M) = L^r(\mathfrak{X}(M)), \text{para } r \geq 0$$

Usando la técnica de las funciones meseta, probaremos el siguiente resultado:

2.1.2. Teoremas de localización.

Si $\mathbf{A} \in \mathfrak{L}^r(M)$, $(V_1, \ldots, V_r) \in \mathfrak{X}(M)^r$, $(r \geq 1)$ $p \in M$, y para cierto $i = 1, \ldots, r$ es $V_i(p) = 0$, entonces

$$\mathbf{A}(V_1, \ldots, V_r)(p) = 0$$

En particular el valor de $\mathbf{A}(V_1, \ldots, V_r)(p)$ solo depende de los valores $V_i(p)$ de los campos V_i en el punto p.

Demostración: Sea $(\mathcal{U}, \mathbf{c} = (u_1, \ldots, u_m))$ una carta de M, con $p \in \mathcal{U}$, en donde V_i se escribe:

$$V_i = \sum_{j=1}^{m} \Lambda_j \frac{\partial}{\partial u_j} \text{ con } \Lambda_j \in \mathcal{F}(\mathcal{U})$$

tomemos $\mu \in \mathcal{F}(M)$ una función meseta con $\mu(p) = 1$, y $sop(\mu) \subset \mathcal{U}$. Las funciones $\mu\Lambda_j$ pertenecen a $\mathcal{F}(M)$, y los campos $U_j = \mu\partial/\partial u_j$ están en $\mathfrak{X}(M)$

$$\mu^2 V_i = \sum_{j=1}^{m} (\mu\Lambda_j) U_j \in \mathfrak{X}(M)$$

y se tiene: $\mu^2 \mathbf{A}(\ldots, V_i, \ldots) = \mathbf{A}(\ldots, \mu^2 V_i, \ldots) =$

$$= \mathbf{A}\left(\ldots, \sum_{j=1}^{m} (\mu\Lambda_j) U_j, \ldots\right) = \left(\sum_{j=1}^{m} \mu\Lambda_j\right) \mathbf{A}\left(\ldots, U_j, \ldots\right)$$

particularizando esto en el punto p, como $\Lambda_j(p) = 0$ (ya que $V(p) = 0$), y $\mu(p) = 1$ queda $\mathbf{A}(\ldots, V_i, \ldots) = 0$.

Para ver que el valor de $\mathbf{A}(V_1, \ldots, V_r)(p)$ solo depende de los valores $V_i(p)$ de los campos V_i en el punto p, sean $\bar{V}_i \in \mathfrak{X}(M)$ tales que $\bar{V}_i(p) = V_i(p)$ para $i = 1, \ldots, r$. Pongamos para simplificar $r = 3$. Se tiene:

$$\mathbf{A}(\bar{V}_1, \bar{V}_2, \bar{V}_3) - \mathbf{A}(V_1, V_2, V_3) =$$

$$= \mathbf{A}(\bar{V}_1 - V_1, \bar{V}_2, \bar{V}_3) + A(V_1, \bar{V}_2 - V_2, \bar{V}_3) + A(V_1, V_2, \bar{V}_3 - V_3)$$

El segundo miembro evaluado en p es naturalmente nulo. ∎

El teorema anterior tiene dos importantes consecuencias ya inmediatas:

Corolario 2.1.2.1 *Cada tensor* $\mathbf{A} \in \mathfrak{L}^r(M)$ *asigna a cada* $p \in M$ *un tensor* $\mathbf{A}(p) \in L^r(T_pM)$ *por la condición:*

$$\mathbf{A}(p)(\xi_1, \ldots, \xi_r) = \mathbf{A}(V_1, \ldots, V_r)(p) \text{ con } V_i(p) = \xi_i$$

y la asignación $\mathfrak{L}^r(M) \ni \mathbf{A} \to \mathbf{A}(p) \in L^r(T_pM)$ *es* $\mathbb{R}-$*lineal.*

Corolario 2.1.2.2 *Dada* $\mathbf{A} \in \mathfrak{L}^r(M)$ *y* $\mathcal{U}$ *abierto de* M*, existe un único tensor* $\mathbf{A}_\mathcal{U} \in \mathfrak{L}^r(M)$ *verificando la propiedad para todo* $V_1, \ldots, V_r \in \mathfrak{X}(M)$

$$\mathbf{A}_\mathcal{U}(V_1 \mid \mathcal{U}, \ldots, V_r \mid \mathcal{U}) = \mathbf{A}(V_1, \ldots, V_r) \mid \mathcal{U}$$

denotaremos usualmente por el mismo nombre a las tensores $\mathbf{A}$ *y* $\mathbf{A}_\mathcal{U}$*.*

Observación 2.1.2.1 *Un tensor* $\mathbf{A} \in \mathfrak{L}^r(M)$ *puede definirse también, como un operador que asigna a cada* $p \in M$ *un tensor* $\mathbf{A}(p) \in L^r(T_pM)$ *verificando la siguiente condición de diferenciabilidad:*
Para cada $\mathcal{U}$ *abierto de* M*, y campos* $(V_1, \ldots, V_r) \in \mathfrak{X}(\mathcal{U})$*, la función:*

$$\mathbf{A}(V_1, \ldots, V_r) : M \ni p \to \mathbf{A}(p)(V_1(p), \ldots, V_r(p)) \in \mathbb{R}$$

es diferenciable. Naturalmente, es suficiente comprobar la condición solo para abiertos $\mathcal{U}$ *de* M *que son dominios de cartas.*

2.2. FORMAS LINEALES

Al $\mathcal{F}$-módulo $L^1(\mathfrak{X})$ se denomina módulo dual de $\mathfrak{X}$, y se denota por $\mathfrak{X}^*$. Los elementos de $\mathfrak{X}^*$ son $1 - formas$ y se denominan formas lineales.Escribimos $\mathfrak{X}^*(M)$ en lugar de $\mathfrak{X}(M)^* = \mathfrak{L}^1(M)$

2.2.1. Diferencial de una función real.

Si $f \in \mathcal{F}(M)$, se define $df \in \mathfrak{X}^*$ por la condición

$$df(V) = V(f) \text{ para todo } V \in \mathfrak{X}(M)$$

Nótese que para $p \in M$ se verifica $(df)(p) = df(p) : T_pM \to \mathbb{R}$

2.2.2. Base dual

Supongamos que $\mathfrak{X}$ admite una base $(E_1, \ldots, E_m)$. Una forma lineal $\boldsymbol{\alpha} \in \mathfrak{X}^*$ queda unívocamente determinada por sus valores $\alpha_i = \boldsymbol{\alpha}(E_i)$. En particular denotando por $\varepsilon_i \in \mathfrak{X}^*$ la $1 - forma$ tal que

$$\varepsilon_i(E_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ si } i = j \\ 0, \text{ si } i \neq j \end{cases}$$

se concluye que $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_m)$ es una base de $\mathfrak{X}^*$ y se denomina dual de $(E_1, \ldots, E_m)$. Para cada $\boldsymbol{\alpha} \in \mathfrak{X}^*$, y $X \in \mathfrak{X}$ se tienen las identidades:

$$X = \sum \varepsilon_i(X)E_i, \ \boldsymbol{\alpha} = \sum \boldsymbol{\alpha}(E_i)\varepsilon_i$$

Si $(\mathcal{U}, \mathbf{c} = (u_1, \ldots, u_m))$ es una carta de M, podemos tomar $E_i = \partial/\partial u_i$ .como base de $\mathfrak{X}\ (\mathcal{U})$ y

$$du_j \left(\frac{\partial}{\partial u_i} \right) = \frac{\partial u_j}{\partial u_i} = \delta_{ij}$$

por tanto

$$(du_1, \ldots, du_m) \text{ es base dual de } \left(\frac{\partial}{\partial u_1}, \cdots, \frac{\partial}{\partial u_m} \right)$$

Nótese que si $f \in \mathcal{F}(M)$ se tiene la identidad:

$$df = \sum \frac{\partial f}{\partial u_i} du_i$$

2.2.3. Pullback

Sea $\phi : M \to \bar{M}$ aplicación diferenciable entre variedades, y sea $\bar{\boldsymbol{\alpha}} \in \mathfrak{X}^*(\bar{M})$. Definimos el pullback de $\bar{\boldsymbol{\alpha}}$, como el operador $\phi^*\bar{\boldsymbol{\alpha}}$ que hace corresponder: a cada $p \in M$, la $1 - forma$ $(\phi^*\bar{\boldsymbol{\alpha}})_p$ en T_pM definida por:

$$(\phi^*\bar{\boldsymbol{\alpha}})_p\,(\xi) = \bar{\boldsymbol{\alpha}}\,(d\phi(p)(\xi))\ \ \forall \xi \in T_pM$$

Para todo $\bar{\boldsymbol{\alpha}}$, $\bar{\boldsymbol{\beta}} \in \mathfrak{X}^*(\bar{M})$ y todo $\bar{f}$, $\bar{g} \in \mathcal{F}(\bar{M})$ se verifica (punto a punto) la identidad:

$$\phi^*(\bar{f}\bar{\boldsymbol{\alpha}} + \bar{g}\bar{\boldsymbol{\beta}}) = (\phi^*\bar{f})\,(\phi^*\bar{\boldsymbol{\alpha}}) + (\phi^*\bar{g})\,\left(\phi^*\bar{\boldsymbol{\beta}}\right)$$

en donde se ha denotado $\phi^*\bar{f} = \bar{f} \circ \phi$ que es el *pullback* de la función f

Para comprobar que $\phi^*\bar{\boldsymbol{\alpha}}$ define una $1 - forma$ en M, es suficiente demostrarlo para el caso $\bar{\boldsymbol{\alpha}} = d\bar{f}$ con $\bar{f} \in \mathcal{F}(\bar{M})$, ya que localmente en las coordenadas $\bar{\mathbf{c}} = (\bar{u}_1, \ldots, \bar{u}_{\bar{m}})$ de una carta $(\overline{\mathcal{U}}, \bar{\mathbf{c}})$, se escribe:

$$\bar{\boldsymbol{\alpha}} = \sum \bar{\alpha}_i d\bar{u}_i \text{ y } \phi^*\bar{\boldsymbol{\alpha}} = \sum (\phi^*\bar{\alpha}_i)(\phi^* d\bar{u}_i) \tag{15}$$

y por tanto $\phi^*\bar{\boldsymbol{\alpha}}$ definiría una $1 - forma$ (diferenciable) en el dominio $\overline{\mathcal{U}}$. Se tiene en estas condiciones el siguiente:

Lema 2.2.3.1 *Si $\phi : M \to \bar{M}$ aplicación diferenciable entre variedades, y $\bar{f} \in \mathcal{F}(\bar{M})$ entonces:*

$$\phi^*(d\bar{f}) = d(\phi^*\bar{f})$$

en particular $\phi^*(d\bar{f}) \in \mathfrak{X}^*(M)$.

Observación 2.2.3.1 *Continuando entonces con la expresión local de* $\phi^*\bar{\boldsymbol{\alpha}}$ *iniciada en (40) si suponemos ahora que* $(\mathcal{U}, \mathbf{c} = (u_1, \ldots, u_m))$ *es una carta en* M *con* $\phi(\mathcal{U}) \subset \overline{\mathcal{U}}$ *y* $\bar{u}_i = \phi_i(u_1, \ldots, u_m)$ *son las ecuaciones de* ϕ*, siendo* $\phi_i = \phi^*\bar{u}_i$ *se concluye que para*

$$\bar{\boldsymbol{\alpha}} = \sum \bar{\alpha}_i(\bar{u}_1, \ldots, \bar{u}_{\bar{m}}) d\bar{u}_i$$

la expresión analítica de su pullback se obtiene haciendo en la expresión de $\bar{\boldsymbol{\alpha}}$ *sustitución formal de* $\bar{u}_i$ *por* $\phi_i(u_1, \ldots, u_m)$*, es decir*

$$\phi^*\bar{\boldsymbol{\alpha}} = \sum \bar{\alpha}_i(\phi_1(u_1, \ldots, u_m), \ldots, \phi_{\bar{m}}(u_1, \ldots, u_m)) d\phi_i$$

Observación 2.2.3.2 *Naturalmente, si* $\phi : M \to \bar{M}$*, y* $\psi : \bar{M} \to N$ *son funciones diferenciables entre variedades, entonces:*

$$(\psi \circ \phi)^* = \phi^* \circ \psi^* : \mathfrak{X}^*(N) \to \mathfrak{X}^*(M)$$

Observación 2.2.3.3 *Si* $(\mathcal{U}, \mathbf{c} = (u_1, \ldots, u_m))$ *es una carta en* M *y* $\boldsymbol{\alpha} \in \mathfrak{X}^*(M)$ *no hay ninguna diferencia* formal *entre la expresión de* $\boldsymbol{\alpha}$ *en las coordenadas* $\mathbf{c}$*,*

$$\boldsymbol{\alpha} = \sum \alpha_i du_i \qquad (16)$$

y la expresión de $\varphi^*\boldsymbol{\alpha} \in \mathfrak{X}^*(\mathbb{U})$, $\varphi : \mathbf{c}^{-1} : \mathbb{U} \to \mathcal{U}$

$$\varphi^*\boldsymbol{\alpha} = \sum \alpha_i du_i \qquad (17)$$

se interpreta en (16) que $\alpha_i = \alpha_i(u_1, \ldots, u_m)$ *es una función* $\mathcal{U} \to \mathbb{R}$*, y en (17) que lo es de* $\mathbb{U} \to \mathbb{R}$*.*

2.2.4. Integral de una forma a lo largo de una curva

Sea $\gamma : [a, b] \to M$ una curva sobre la variedad diferenciable M. Podemos suponer que γ está definida y es diferenciable en un intervalo abierto más grande I, $\gamma : I \supset [a, b] \to M$. Si $\boldsymbol{\alpha} \in \mathfrak{X}^*(M)$ entonces $\gamma^*\boldsymbol{\alpha} \in \mathfrak{X}^*(I)$ y se escribe de la forma $\gamma^*\boldsymbol{\alpha} = g(t)dt$, para cierta función diferenciable $g(t)$ en I. De hecho

$$g(t) = (\gamma^*\boldsymbol{\alpha})|_t \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)_t = \boldsymbol{\alpha}|_{\gamma(t)} \left(\gamma_* \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)_t\right) = \boldsymbol{\alpha}(\gamma'(t))$$

y se define la integral de $\boldsymbol{\alpha}$ a lo largo de γ como

$$\int_\gamma \boldsymbol{\alpha} = \int_a^b \gamma^*\boldsymbol{\alpha} = \int_a^b \boldsymbol{\alpha}(\gamma'(t))\, dt \qquad (18)$$

Es muy fácil demostrar usando el teorema elemental del cambio de variable para integrales, que esta integral permanece invariante por cambios de parámetro $t = \mathbf{t}(s)$ que preserven la orientación ($d\mathbf{t}/ds > 0$). Además si $f \in \mathcal{F}(M)$ se tiene

$$\int_\gamma df = \int_a^b \gamma^* df = \int_a^b d\gamma^* f = \int_a^b (f \circ \gamma)'(t)dt = f \circ \gamma(b) - f \circ \gamma(a)$$

y la integral solo depende del valor de f en los extremos del camino.

2.2.5. Derivada de Lie

Si $V \in \mathfrak{X}(M)$, y $\boldsymbol{\alpha} \in \mathfrak{X}^*(M)$ se define la derivada de Lie de $\boldsymbol{\alpha}$ respecto a V, como la 1-forma:

$$L_V\boldsymbol{\alpha} : \mathfrak{X}(M) \ni X \to V(\boldsymbol{\alpha}(X)) - \boldsymbol{\alpha}(L_V X) \in \mathcal{F}(M)$$

es fácil probar que $L_V\boldsymbol{\alpha}$ es una 1-forma y que $L_V : \mathfrak{X}^*(M) \to \mathfrak{X}^*(M)$ es una aplicación $\mathbb{R}$-lineal que verifica

$$L_V(f\boldsymbol{\alpha}) = V(f)\boldsymbol{\alpha} + fL_V\boldsymbol{\alpha} \; \forall f \in \mathcal{F}(M)$$

Por otra parte, se verifica:

$$L_V(df) = dL_V(f) \text{ para todo } f \in \mathcal{F}(M)$$

2.3. FORMAS BILINEALES

El $\mathcal{F}$-módulo $L^2(\mathfrak{X})$ es el módulo de las *formas bilineales* de $\mathfrak{X}$,. que se denota por $\mathfrak{L}^2(M)$, cuando $\mathfrak{X} = \mathfrak{X}(M)$.

2.3.1. Producto tensorial de formas lineales

Si $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta} \in \mathfrak{X}^*$, se llama producto tensorial de $\boldsymbol{\alpha}$, y $\boldsymbol{\beta}$ a la forma bilineal

$$\boldsymbol{\alpha} \otimes \boldsymbol{\beta} : \mathfrak{X} \times \mathfrak{X} \ni (V, W) \to \boldsymbol{\alpha}(V)\boldsymbol{\beta}(W) \in \mathcal{F}$$

Es obvio que la aplicación $\mathfrak{X}^* \times \mathfrak{X}^* \ni (\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) \to \boldsymbol{\alpha} \otimes \boldsymbol{\beta} \in \mathfrak{L}(\mathfrak{X})$ es $\mathcal{F}$-bilineal.

2.3.2. Expresión analítica de una forma bilineal

Si $(E_1, \ldots, E_m)$ es base de $\mathfrak{X}$, y $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_m)$ es su base dual entonces

$$\{\varepsilon_i \otimes \varepsilon_j : i, j = 1, \ldots m\}$$

constituye una base de $L^2(\mathfrak{X})$. De hecho, si $\mathbf{B} \in L^2(\mathfrak{X})$ se tiene la identidad:

$$\mathbf{B} = \sum \mathbf{B}(E_i, E_j)(\varepsilon_i \otimes \varepsilon_j)$$

a los elementos $b_{ij} = \mathbf{B}(E_i, E_j)$ se denominan componentes de la forma bilineal $\mathbf{B}$ respecto a la base $(E_1, \ldots, E_m)$.

Supóngase $(\bar{E}_1, \ldots, \bar{E}_m)$. se tiene que

$$(\bar{E}_1, \ldots, \bar{E}_m) = (E_1, \ldots, E_m) \begin{pmatrix} p_{11} & \cdots & p_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ p_{m1} & \cdots & p_{mm} \end{pmatrix}$$

con $p_{ij} = \varepsilon_i(\bar{E}_j)$ entonces, si $(\bar{\varepsilon}_1, \ldots, \bar{\varepsilon}_m)$ es la base dual se tiene

$$\varepsilon_i = \sum \varepsilon_i(\bar{E}_k)\bar{\varepsilon}_j = \sum p_{ik}\bar{\varepsilon}_k$$

en particular, si $\bar{b}_{ij} = \mathbf{B}(\bar{E}_i, \bar{E}_j)$ se tiene:

$$\mathbf{B} = \sum b_{ij}\varepsilon_i \otimes \varepsilon_j = \sum p_{ik} b_{ij} p_{jh} \bar{\varepsilon}_k \otimes \bar{\varepsilon}_h = \sum \bar{b}_{kh} \bar{\varepsilon}_k \otimes \bar{\varepsilon}_h$$

de donde se tiene la igualdad:

$$(\bar{b}_{ij}) = (p_{ij})^t (b_{ij})(p_{ij})$$

Si $(\mathcal{U}, \mathbf{c} = (u_1, \ldots, u_m))$ es una carta de M, podemos tomar $E_i = \partial/\partial u_i$ .como base de $\mathfrak{X}\ (\mathcal{U})$ y $\varepsilon_i = du_i$ de forma que podemos escribir:

$$\mathbf{B} = \sum b_{ij}(du_i \otimes du_j)$$

donde las componentes $b_{ij} = \mathbf{B}(\partial/\partial u_i, \partial/\partial u_j)$ son funciones diferenciables en $\mathcal{U}$, así si $(\mathcal{U}, \bar{\mathbf{c}} = (\bar{u}_1, \ldots, \bar{u}_m))$ es otra carta se verifica la identidad:

$$\bar{b}_{kh} = \sum b_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial \bar{u}_k} \frac{\partial u_j}{\partial \bar{u}_h}$$

2.3.3. Pullback

Sea $\phi : M \to \bar{M}$ aplicación diferenciable entre variedades, y sea $\bar{\mathbf{B}} \in \mathfrak{L}^2(\bar{M})$. Definimos el pullback de $\bar{\mathbf{B}}$, como el operador $\phi^*\bar{\mathbf{B}}$ que hace corresponder: a cada $p \in M$, la $2-forma$ $\left(\phi^*\bar{\mathbf{B}}\right)_p$ en T_pM definida por:

$$\left(\phi^*\bar{\mathbf{B}}\right)_p (\xi, \eta) = \bar{\mathbf{B}}_{\phi(p)}(d\phi(p)(\xi), d\phi(p)(\eta)) \ \forall \xi, \eta \in T_pM$$

Para todo $\bar{\mathbf{A}}$, $\bar{\mathbf{B}} \in \mathfrak{L}^2(\bar{M})$ y todo $\bar{f}$, $\bar{g} \in \mathcal{F}(\bar{M})$ se verifica (punto a punto) la identidad:

$$\phi^*(\bar{f}\bar{\mathbf{A}} + \bar{g}\bar{\mathbf{B}}) = (\phi^*\bar{f})\left(\phi^*\bar{\mathbf{A}}\right) + (\phi^*\bar{g})\left(\phi^*\bar{\mathbf{B}}\right)$$

Por otra parte, si $\bar{\boldsymbol{\alpha}}$, $\bar{\boldsymbol{\beta}} \in \mathfrak{X}^*(\bar{M})$ se verifica:

$$\phi^*(\bar{\boldsymbol{\alpha}} \otimes \bar{\boldsymbol{\beta}}) = (\phi^*\bar{\boldsymbol{\alpha}}) \otimes (\phi^*\bar{\boldsymbol{\beta}})$$

Fijados $(\mathcal{U}, \mathbf{c} = (u_1, \ldots, u_m))$ es una carta de M y carta $(\overline{\mathcal{U}}, \bar{\mathbf{c}} = (\bar{u}_1, \ldots, \bar{u}_{\bar{m}}))$ de $\bar{M}$, con $\phi(\mathcal{U}) \subset \overline{\mathcal{U}}$, si

$$\bar{\mathbf{B}} = \sum \bar{b}_{ij}(d\bar{u}_i \otimes d\bar{u}_j)$$

entonces

$$\phi^*\bar{\mathbf{B}} = \sum \phi^*\bar{b}_{ij}(\phi^* d\bar{u}_i \otimes \phi^* d\bar{u}_j) = \sum (\bar{b}_{ij} \circ \phi) d\phi_i \otimes d\phi_j$$

siendo $\phi_i = \phi^*\bar{u}_i = \bar{u}_i \circ \phi$ las componentes de la expresión analítica de ϕ. En consecuencia $\phi^*\bar{\mathbf{B}} \in \mathfrak{L}^2(M)$ si $\bar{\mathbf{B}} \in \mathfrak{L}^2(\bar{M})$.

2.3.4. Derivada de Lie

Se define la derivada de Lie $L_V\mathbf{B}$ de una forma bilineal $\mathbf{B} \in \mathfrak{L}^2(M)$ respecto a un campo $V \in \mathfrak{X}(M)$ por:

$$(L_V\mathbf{B})(X, Y) = V(\mathbf{B}(X, Y)) - \mathbf{B}(L_V X, Y) - \mathbf{B}(X, L_V Y)$$

Se prueba sin dificultad que $L_V\mathbf{B} \in \mathfrak{L}^2(M)$. Por otra parte, $L_V : \mathfrak{L}^2(M) \to \mathfrak{L}^2(M)$ es $\mathbb{R}$-lineal y se verifica:

$$L_V(f\mathbf{B}) = V(f)\mathbf{B} + fL_V\mathbf{B} \ \forall f \in \mathcal{F}(M)$$

$$L_V(\boldsymbol{\alpha} \otimes \boldsymbol{\beta}) = L_V(\boldsymbol{\alpha}) \otimes \boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\alpha} \otimes L_V(\boldsymbol{\beta}),\ \forall \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \in \mathfrak{X}^*(M)$$

2.3.5. Formas bilineales simétricas

Una forma bilineal $\mathbf{B} \in L^2(\mathfrak{X})$ se dice simétrica, si $\mathbf{B}(V, W) = \mathbf{B}(W, V)$ para todo $V, W \in \mathfrak{X}$. Esto equivale a decir que respecto a una base $(E_1, \ldots, E_m)$ de $\mathfrak{X}$, las componentes $b_{ij} = \mathbf{B}(E_i, E_j)$ constituyen una matriz simétrica $(b_{ij} = b_{ji})$.

2.3.6. Métricas riemannianas.

Una *métrica (ó estructura) Riemanniana* sobre una variedad diferenciable M, es una forma bilineal $\mathbf{g} \in \mathfrak{L}^2(M)$ que verifica la siguiente propiedad:

Para cada $p \in M$, la forma bilineal $\mathbf{g}_p \in L^2(T_pM)$ define en T_pM un producto escalar euclídeo

Es decir: $\mathbf{g}(V, W) = \mathbf{g}(W, V)$ y $\mathbf{g}(V, V) \geq 0$ para todo $V, W \in \mathfrak{X}(M)$, además,

$$\mathbf{g}(V, V)(p) = 0 \Longrightarrow V(p) = 0$$

Se dice entonces que $(M, \mathbf{g})$ es una variedad Riemanniana. Cuando en una variedad M se supone prefijada una estructura Riemanniana $\mathbf{g}$, diremos que M *es riemanniana* y se denota genericamente por $\langle V, W\rangle = \mathbf{g}(V, W)$ al *producto escalar* de los campos $V, W \in \mathfrak{X}(M)$. Análogamente si $\xi, \eta \in T_p(M)$ escribimos $\langle \xi, \eta \rangle$ en lugar de $\mathbf{g}_p(\xi, \eta)$. Observese que con esta notación se tiene la identidad:

$$\langle V, W \rangle (p) = \langle V(p), W(p) \rangle$$

Por ejemplo $\mathbb{R}^n$ tiene una estructura canónica de variedad Riemanniana, si se define para $\xi, \eta \in T_p\mathbb{R}^n$ el producto escalar canónico:

$$\langle \xi, \eta \rangle =< \vec{\xi}, \vec{\eta} >= \sum_{k=1}^{n} \xi_k \eta_k \text{ con } \vec{\xi} = (\xi_1, \ldots, \xi_n),\ \vec{\eta} = (\eta_1, \ldots \eta_n) \in \mathbb{R}^n$$

tomando en $\mathbb{R}^n$ la carta identidad $(x_1, \ldots x_n)$ esta métrica Riemanniana canónica se escribe:

$$dx_1 \otimes dx_1 + \cdots + dx_n \otimes dx_n$$

2.3.7. Estructura riemanniana canónica.

Una variedad euclídea M hereda una métrica Riemanniana canónica $\mathbf{g}_M$ del espacio $\mathbb{R}^n$ en el que está sumergida. En efecto, para cada $p \in M$, y vectores $\xi, \eta \in T_p(M)$ se define

$$\mathbf{g}_M(\xi, \eta) = \langle \xi, \eta \rangle$$

siendo $\langle \xi, \eta \rangle$ el producto escalar canónico de los vectores $\xi, \eta \in T_p\mathbb{R}^n$. Esto equivale a decir que $\mathbf{g}_M = i_M^* \bar{\mathbf{g}}$, siendo $\bar{\mathbf{g}}$ la métrica Riemanniana canónica de $\mathbb{R}^n$, y $i_M : M \hookrightarrow \mathbb{R}^n$ la inclusión canónica.

Si $\boldsymbol{\varphi} : \mathbb{U} \to \mathcal{U}$ es una parametrización de M, y $(\mathcal{U}, \mathbf{c} = \boldsymbol{\varphi}^{-1} = (u_1, \ldots u_m))$ es la correspondiente carta se tiene:

$$\frac{\partial}{\partial u_i} = \sum_k \frac{\partial x_k}{\partial u_i} \frac{\partial}{\partial x_k}$$

siendo $x_j = x_j \circ \boldsymbol{\varphi}$ de manera que

$$g_{ij}^{\boldsymbol{\varphi}} = \mathbf{g}\left(\frac{\partial}{\partial u_i}, \frac{\partial}{\partial u_j} \right) = \sum_k \frac{\partial x_k}{\partial u_i} \frac{\partial x_k}{\partial u_j}$$

Observación 2.3.7.1 *La variedad M de $\mathbb{R}^n$ hereda la estructura riemanniana canónica $\mathbf{g}_M = i_M^* \mathbf{g}_{\mathbb{R}^n}$, con $i_M : M \hookrightarrow \mathbb{R}^n$ inclusión.*

2.3.8. Longitud y Distancia

Si M es variedad riemanniana y $\xi \in T_p(M)$ entonces

$$|\xi| = +\sqrt{\langle \xi, \xi \rangle}$$

se denomina módulo del vector tangente ξ.

Si $\alpha : [a, b] \to M$ es una curva diferenciable se define la *longitud* de α como

$$L(\alpha) = \int_a^b \left| \frac{d\alpha}{dt}(t) \right| dt$$

se comprueba fácilmente que $L(\alpha)$ no depende de la parametrización, es decir, si $\beta(s) = \alpha(\mathbf{t}(s))$, $s \in [c, d]$ siendo $\mathbf{t} : [c, d] \ni s \to \mathbf{t}(s) \in [a, b]$ un difeomorfismo, entonces se tiene por el teorema del cambio de variable del cálculo integral, supuesto por ejemplo $d\mathbf{t}/ds > 0$

$$\int_a^b \left| \frac{d\alpha}{dt}(t) \right| dt = \int_{\mathbf{t}(a)}^{\mathbf{t}(b)} \left| \frac{d\alpha}{dt}(\mathbf{t}(s)) \right| \frac{d\mathbf{t}}{ds} ds = \int_c^d \left| \frac{d\beta}{ds}(s) \right| =$$

Naturalmente si $\alpha : [a, b] \to M$ es diferenciable a trozos respecto a la partición $a = t_0 < \cdots < t_r = b$ se define sin ambigüedad la longitud de α como:

$$L(\alpha) = \sum_{i=1}^{r} \int_{t_{i-1}}^{t_i} \left| \frac{d\alpha}{dt}(t) \right| dt$$

Se dice entonces que α es una camino que une $\alpha(a)$ con $\alpha(b)$. Supóngase M conexa. Si $p, q \in M$, el conjunto de caminos $\Omega(p, q)$ que unen p a q es no vacio, y se define la *distancia* de p a q como

$$d(p, q) = \inf\{L(\alpha) : \alpha \in \Omega(p, q)\} \tag{19}$$

Proposición 2.3.8.1 *La aplicación* distancia $d : M \times M \to \mathbb{R}$ *definida en (19) define una pseudo-distancia sobre la variedad riemanniana M, cuya topología inducida, coincide con la topología de M como subespacio de $\mathbb{R}^n$. En particular, d es una distancia.*

Demostración

La función $d : M \times M \ni (p, q) \to d(p, q) \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ verifica , para todo $p, q, r \in M$, las propiedades:

1. $d(p, q) \geq 0$, $d(p, q) = 0 \iff p = q$
2. $d(p, q) = d(q, p)$
3. $d(p, r) \leq d(p, q) + d(q, r)$

Estas propiedades son fáciles de probar, y dan carácter d de distancia en M. Probaremos que se trata de una distancia, cuya topología coincide con la topología de M como variedad diferenciable.

En efecto, fijado un punto $p \in M$, construimos una carta $(\mathcal{U}, \mathbf{c} = (u_1, \ldots, u_m))$ con $\mathbf{c}(p) = (0, \ldots, 0)$, y tal que $\mathbb{B} = \{(u_1, \ldots, u_m) : u_1^2 + \ldots + u_m^2 \leq$

$1\} \subset \mathbb{U} = \mathbf{c}(\mathcal{U})$. Sea $\mathbb{S} = \{\vec{\xi} = (\xi_1, \ldots, \xi_m) : \xi_1^2 + \ldots + \xi_m^2 = 1\}$, y $g_{ij} = g_{ij}(u_1, \ldots, u_m)$ las componentes de la métrica. La función $h : \mathbb{B} \times \mathbb{S} \to \mathbb{R}$ con

$$h(u_1, \ldots, u_m, \vec{\xi}) = (\xi_1, \ldots \xi_m) \begin{pmatrix} g_{11} & \cdots & g_{1m} \\ \vdots & & \\ g_{m1} & \cdots & g_{mm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_m \end{pmatrix} = g(u)(\vec{\xi}, \vec{\xi})$$

es diferenciable sobre un compacto, y alcanza un mínimo $a = \min h > 0$, y un máximo $b = \max h > 0$, por tanto se tiene $a \leq g(u)(\vec{\xi}, \vec{\xi}) \leq b \ \forall u \in \mathbb{B}$ y todo $\vec{\xi} \in \mathbb{S}$ o también:

$$\sqrt{a} \left|\vec{\xi}\right|_e \leq \left|\vec{\xi}\right|_{g(u)} \leq \sqrt{b} \left|\vec{\xi}\right|_e \quad \forall u \in \mathbb{B}, \forall \vec{\xi} \in \mathbb{R}^2 - \{0\}$$

en donde $\left|\vec{\xi}\right|_e = \sqrt{\xi_1^2 + \cdots + \xi_m^2}$ es la *norma euclidea* y $\left|\vec{\xi}\right|_{g(u)} = \sqrt{h(u, \vec{\xi})}$ es la *norma métrica*. Esto sirve para demostrar que para toda curva $\gamma : I \to \mathbb{B}$ diferenciable se verifican las desigualdades:

$$\sqrt{a} L_e(\gamma) \leq L_g(\gamma) \leq \sqrt{b} L_e(\gamma) \tag{20}$$

donde L_e y L_g denotan las longitudes *euclideas* y *métricas* respectivamente. Así, si $B = \{q \in \mathcal{U} : \mathbf{c}(q) \in \mathbb{B}\}$ se concluye para todo $q \in B$:

$$\begin{aligned} d(p,q) &= \inf\{L(\alpha) \mid \alpha \in \Omega_{p,q}(M)\} \leq \inf\{L(\alpha) \mid \alpha \in \Omega_{p,q}(B)\} \\ &= \inf\{L_g(\mathbf{c} \circ \alpha) \mid \alpha \in \Omega_{p,q}(M)\} = \inf\{L_g(\gamma) \mid \gamma \in \Omega_{0,\mathbf{c}(q)}(\mathbb{B})\} \\ &\leq \sqrt{b} \inf\{L_g(\gamma) \mid \gamma \in \Omega_{0,\mathbf{c}(q)}(\mathbb{B})\} = \sqrt{b} \left|\mathbf{c}(q)\right|_e \end{aligned}$$

esto prueba, que para todo $\varepsilon < \sqrt{b}$ se tiene

$$B_e(p, \varepsilon/\sqrt{b}) \subset B_\varepsilon(p)$$

donde hemos denotado $B_e(p, \varepsilon) = \{q \in \mathcal{U} : \left|\mathbf{c}(q)\right|_e < \varepsilon\}$ y $B_\varepsilon(p) \equiv \{q \in M \mid d(p,q) < \varepsilon\}$.

Recíprocamente, se puede probar, que para todo $\varepsilon < 1$, se tiene:

$$B_\delta(p) \subset B_e(p, \varepsilon) \text{ con } \delta = \sqrt{a}\varepsilon \tag{21}$$

En efecto, cualquier curva $\alpha : [0, d] \to M$ con $\alpha(0) = p$, que *salga* de B tiene longitud *mayor o igual* que $\sqrt{a}$, ya que

$$L(\alpha) \geq L(\alpha|_B) = L_g(\mathbf{c} \circ \alpha|_B) \geq \sqrt{a} L_e(\mathbf{c} \circ \alpha|_B) \geq \sqrt{a}$$

así si $d(p,q) \leq \sqrt{a}$ entonces $d(p,q) = \inf\{L(\alpha) \mid \alpha \in \Omega_{p,q}(M)\} = \inf\{L(\alpha) \mid \alpha \in \Omega_{p,q}(B)\}$...etc. y por (20) se concluye que $\sqrt{a} \left|\mathbf{c}(q)\right|_e \leq d(p,q)$, lo que prueba (21). Como $\{B_e(p, \varepsilon) : 0 < \varepsilon < 1\}$ es base de entornos de p en la topología relativa de M, queda concluida la demostración.

2.3.9. Isometrías

Si $M = (M, \mathbf{g})$ y $\bar{M} = (\bar{M}, \bar{\mathbf{g}})$ son variedades riemanianas, una aplicación $\phi : M \to \bar{M}$, se llama *isometría* (local) si ϕ es un difeomorfismo (local) que verifica:

$$\phi^* \bar{\mathbf{g}} = \mathbf{g}$$

esta condición equivale a decir que $d\phi(p) : T_pM \to T_{\phi(p)}\bar{M}$ es una isometría lineal para cada $p \in M$. Cuando existe una isometría entre dos variedades riemannianas, se dice que son isométricas. Como la composición de isometrías es isometría y la identidad lo es, se concluye que ésta es una relación de equivalencia.

Observación 2.3.9.1 *Podríamos llamar isometría topológica entre las variedades riemannianas $M = (M, \mathbf{g})$ y $\bar{M} = (\bar{M}, \bar{\mathbf{g}})$ a una biyección $\phi : M \to \bar{M}$ que preserva las distancias. Es decir:*

$$\bar{d}(\phi(p), \phi(q) = d(p, q) \ \forall p, q \in M$$

en particular ϕ es homeomorfismo. Aún más se prueba que necesariamente ϕ es una isometría en el sentido diferenciable.

2.3.10. Formas bilineales alternadas

Una forma bilineal $\boldsymbol{\omega} \in L^2(\mathfrak{X})$ se dice alternada, si $\boldsymbol{\omega}(V, W) = -\boldsymbol{\omega}(W, V)$ para todo $V, W \in \mathfrak{X}$. Esto equivale a decir que respecto a una base $(E_1, \ldots, E_m)$ de $\mathfrak{X}$, las componentes $\omega_{ij} = \boldsymbol{\omega}(E_i, E_j)$ constituyen una matriz antisimétrica $(\omega_{ij} = \omega_{ji})$. Nótese que podemos escribir

$$\boldsymbol{\omega} = \sum_{i,j} \omega_{ij} \varepsilon_i \otimes \varepsilon_j = \sum_{i<j} \omega_{ij} \left(\varepsilon_i \otimes \varepsilon_j - \varepsilon_j \otimes \varepsilon_i \right) \tag{22}$$

Denotamos por $\Lambda^2(\mathfrak{X})$ a la familia de formas bilineales alternadas, que tiene estructura de $\mathcal{F}$- submódulo de $L^2(\mathfrak{X})$.

2.3.11. Producto exterior de dos formas lineales

Se define el producto exterior de $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \in \mathfrak{X}^*$ como

$$\boldsymbol{\alpha} \wedge \boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\alpha} \otimes \boldsymbol{\beta} - \boldsymbol{\beta} \otimes \boldsymbol{\alpha}$$

nótese que se verifica la igualdad

$$(\boldsymbol{\alpha} \wedge \boldsymbol{\beta})(V, W) = \det \begin{pmatrix} \boldsymbol{\alpha}(V) & \boldsymbol{\alpha}(W) \\ \boldsymbol{\beta}(V) & \boldsymbol{\beta}(W) \end{pmatrix}$$

de donde se deduce fácilmente que $\boldsymbol{\alpha} \wedge \boldsymbol{\beta} \in \Lambda^2(\mathfrak{X})$ y la aplicación $\mathfrak{X}^* \times \mathfrak{X}^* \to \Lambda^2(\mathfrak{X})$, $(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) \to \boldsymbol{\alpha} \wedge \boldsymbol{\beta}$ es $\mathcal{F}$-bilineal alternada (i.e. $\boldsymbol{\beta} \otimes \boldsymbol{\alpha} = -\boldsymbol{\alpha} \wedge \boldsymbol{\beta}$). Además de la fórmula (22) se concluye que si $(E_1, \ldots, E_m)$ es base de $\mathfrak{X}$, entonces $\{\varepsilon_i \wedge \varepsilon_j : 1 \leq i < j \leq m\}$ constituye una base de $\Lambda^2(\mathfrak{X})$ ya que cada $\boldsymbol{\omega} \in \Lambda^2(\mathfrak{X})$ puede escribirse como

$$\boldsymbol{\omega} = \sum_{i<j} \omega_{ij} \varepsilon_i \wedge \varepsilon_j \text{ con } \omega_{ij} = \boldsymbol{\omega}(E_i, E_j)$$

Nótese por otra parte, que se verifica la identidad (para $V, W \in \Lambda^2(\mathfrak{X})$, $a, b, c, d \in \mathcal{F}$):

$$\boldsymbol{\omega}\left((V,W)\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = \boldsymbol{\omega}(V,W) \det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \tag{23}$$

2.3.12. Elementos de area en una superficie.

Si M es una variedad, denotamos por $\Omega^2(M)$ a $\Lambda^2(\mathfrak{X}(M))$ y a las formas $\boldsymbol{\omega} \in \Omega^2(M)$ se les llama 2-formas exteriores. En una carta $(\mathcal{U}, \mathbf{c} = (u_1, \ldots, u_m))$, podemos tomar $E_i = \partial/\partial u_i$ .como base de $\mathfrak{X}(\mathcal{U})$ y $\varepsilon_i = du_i$ de forma que podemos escribir:

$$\boldsymbol{\omega} = \sum_{i<j} \omega_{ij} du_i \wedge du_j \text{ con } \omega_{ij} = \boldsymbol{\omega}\left(\frac{\partial}{\partial u_i}, \frac{\partial}{\partial u_j}\right)$$

En particular, si M es una superficie $\mathbf{c} = (u, v)$ la fórmula anterior queda reducida a

$$\boldsymbol{\omega} = \omega_{12} du \wedge dv \text{ con } \omega_{12} = \boldsymbol{\omega}\left(\frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial v}\right)$$

Cuando $\boldsymbol{\omega}(p) \neq 0$ para todo $p \in M$, se denomina a $\boldsymbol{\omega}$ elemento de area. Un elemento de area $\boldsymbol{\omega}$ es exactamente una base $\{\boldsymbol{\omega}\}$ de $\Omega^2(M)$ (ver epígrafe siguiente).

2.3.13. Orientación en superficies

Supongamos que M es una superficie sumergida en $\mathbb{R}^3$ y ν es un campo normal unitario a M, es decir, ν viene definida por una aplicación diferenciable $\vec{\nu} = (\nu_1, \nu_2, \nu_3) : M \to \mathbb{R}^3$y es diferenciable, y hace corresponder a cada $p \in M$ un vector $\nu(p) = \vec{\nu}(p)_p \in T_pM$ tal que $|\nu| = 1$ y

$$T_pM = \left\{\xi \in \mathbb{R}^3 : \langle \nu(p), \xi \rangle = 0\right\}$$

Definimos el elemento canónico de area Ω_M como

$$\Omega_M(\xi, \eta) = \det(\nu(p), \xi, \eta) = \det \begin{pmatrix} \nu_1 & \xi_1 & \eta_1 \\ \nu_2 & \xi_2 & \eta_2 \\ \nu_3 & \xi_3 & \eta_3 \end{pmatrix}, \ \xi, \eta \in T_pM$$

Claramente Ω_M induce una forma alternada en cada T_pM, veamos que es diferenciable, estudiando su componente $\Omega_M(\partial/\partial u, \partial/\partial v)$ en una carta $\mathbf{c} = (u, v)$. Pongamos

$$\vec{\nu} = \frac{1}{\left|\frac{\partial\varphi}{\partial u} \times \frac{\partial\varphi}{\partial v}\right|}\frac{\partial\varphi}{\partial u} \times \frac{\partial\varphi}{\partial v} \tag{24}$$

Teniendo en cuenta que $\det(a, b, c) = \langle a, b \times c\rangle$ y que $|b \times c|^2 = |b|^2 |c|^2 - \langle b, c\rangle^2$ queda

$$\begin{aligned}
\Omega_M\left(\frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial v}\right) &= \frac{1}{\left|\frac{\partial\varphi}{\partial u} \times \frac{\partial\varphi}{\partial v}\right|}\det\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u} \times \frac{\partial\varphi}{\partial v}, \frac{\partial\varphi}{\partial u}, \frac{\partial\varphi}{\partial v}\right) \\
&= \frac{1}{\left|\frac{\partial\varphi}{\partial u} \times \frac{\partial\varphi}{\partial v}\right|}\left\langle\frac{\partial\varphi}{\partial u} \times \frac{\partial\varphi}{\partial v}, \frac{\partial\varphi}{\partial u} \times \frac{\partial\varphi}{\partial v}\right\rangle \\
&= \left|\frac{\partial\varphi}{\partial u} \times \frac{\partial\varphi}{\partial v}\right| = \sqrt{g_{11}^{\varphi} g_{22}^{\varphi} - (g_{12}^{\varphi})^2}
\end{aligned}$$

donde $\left(g_{ij}^{\varphi}\right)$ es la matriz de la métrica $\mathbf{g}_M$ en las coordenadas $\mathbf{c} = (u, v)$. Así que

$$\Omega_M = \sqrt{\det\left(g_{ij}^{\varphi}\right)}\,du \wedge dv$$

y es diferenciable.

Observación 2.3.13.1 *Podría suceder que la fórmula (24) nos diera el valor de $-\vec{\nu}$. En este caso, habría que intercambiar las variables u y v.*

Observación 2.3.13.2 *La condición de que una superfice M en $\mathbb{R}^3$, admita un campo normal unitario, equivale a que admita un elemento de area. Basta para probar esto observar, que un elemento de area $\boldsymbol{\omega}$ define sin ambiguedad en cada punto un vector normal $\nu(p)$ siguiendo el criterio:*

$$\nu(p) = \frac{\xi \times \eta}{|\xi \times \eta|} \text{ cuando } \boldsymbol{\omega}(\xi, \eta) > 0$$

Para analizar la consistencia de la definición aplíquese la propiedad (23)

2.4. FORMAS EXTERIORES

2.4.1. Grupo de permutaciones

En lo sucesivo, para $m \in \mathbb{N}^*$ denotaremos por $\mathfrak{S}^m$ al *grupo de permutaciones* de m elementos, es decir:

$$\mathfrak{S}^m = \{\sigma : \{1, \dots m\} \mapsto \{1, \dots m\}\ \sigma \,\text{es biyectiva}\}$$

que tiene $m!$ elementos. El homomorfismo *signatura* es

$$\mathfrak{S}^m \ni \sigma :\mapsto (-1)^{\sigma} \in \{-1, 1\}$$

Una permutación $\sigma \in \mathfrak{S}^r$ puede interpretarse como una aplicación

$$\sigma : \mathfrak{X}^r \ni (X_1, \dots, X_r) \mapsto (X_{\sigma(1)}, \dots, X_{\sigma(r)}) \in \mathfrak{X}^r$$

y de esta forma se tiene una actuación natural por la derecha del grupo $\mathfrak{S}^r$ sobre el $\mathcal{F}$-módulo $L^r(\mathfrak{X})$ de las formas r-lineales

$$L^r(\mathfrak{X}) \times \mathfrak{S}^r \ni (\mathbf{A}, \sigma) \mapsto \mathbf{A} \circ \sigma = \mathbf{A}.\sigma \in L^r(\mathfrak{X})$$

Es fácil probar que se verifican las siguientes propiedades, para todo $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in L^r(\mathfrak{X})$, todo $\sigma, \tau \in \mathfrak{S}^r$ y todo $f \in \mathcal{F}$:
1) $(\mathbf{A}.\sigma).\tau = \mathbf{A}.(\sigma\tau)$
2) $(\mathbf{A} + \mathbf{B}).\sigma = \mathbf{A}.\sigma + \mathbf{B}.\sigma$
3) $(f\mathbf{A}).\sigma = f(\mathbf{A}.\sigma)$.

2.4.2. Formas Exteriores

Se dice que $\mathbf{A} \in L^r(\mathfrak{X})$ es una *forma exterior* de grado r si:

$$\mathbf{A}.\sigma = (-1)^\sigma \mathbf{A} \ \forall \sigma \in \mathfrak{S}^r$$

Evidentemente, el conjunto $\Lambda^r(\mathfrak{X})$ de todas las formas diferenciables de grado r, es un $\mathcal{F}$-submódulo de $L^r(\mathfrak{X})$. Se denota por $\Omega^r(M)$ al $\mathcal{F}$-módulo $\Lambda^r(\mathfrak{X}(M))$. En particular $\Omega^0(M) = \mathcal{F}$.

2.4.3. Producto exterior de 1-formas

Si $\alpha_i \in \Lambda^1(\mathfrak{X})$ para $i = 1, \cdots, r$ se define su producto exterior:

$$(\alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_r)(X_1, \cdots, X_r) = \det(\alpha_i(X_j))$$

de las propiedades del determinante se deduce fácilmente que $\alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_r \in \Lambda^r(\mathfrak{X})$ y si $\tau \in \mathfrak{S}^r$ entonces:

$$(-1)^\tau \alpha_{\tau(1)} \wedge \ldots \wedge \alpha_{\tau(r)} = \alpha_1 \wedge \ldots \wedge \alpha_r$$

2.4.4. Una base del espacio de las r–formas exteriores

Si $(E_1, \dots, E_m)$ es una base de $\mathfrak{X}$, y $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m)$ su base dual, entonces

$$\{\varepsilon_{i_1} \wedge \ldots \wedge \varepsilon_{i_r} : 1 \le i_1 < \cdots < i_r \le m\}$$

constituye una base de $\Lambda^r(\mathfrak{X})$. Concretamente, si $\omega \in \Lambda^r(\mathfrak{X})$ podemos escribir

$$\omega = \sum_{1 \le i_1 < \cdots < i_r \le m} \omega_{i_1 \ldots i_1} \varepsilon_{i_1} \wedge \ldots \wedge \varepsilon_{i_r}$$

donde $\omega_{i_1\ldots i_r} = \omega(E_{i_1}, \ldots E_{i_r})$.

En efecto, para que dos formas $\omega, \bar{\omega} \in \Lambda^r(\mathfrak{X})$ coincidan, es suficiente que $\omega(E_{i_1}, \ldots E_{i_r}) = \bar{\omega}(E_{i_1}, \ldots E_{i_r})$ para todo $i_1, \ldots, i_r$ en $\{1, \ldots, m\}$ pero basta para ello con que sea cierta para $1 \leq i_1 < \cdots < i_r \leq m$, por ser ambas alternadas. Así, se verifica la identidad

$$\omega = \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_r \leq m} \omega(E_{i_1}, \ldots E_{i_r}) \varepsilon_{i_1} \wedge \ldots \wedge \varepsilon_{i_r}$$

ya que $(\varepsilon_{i_1} \wedge \ldots \wedge \varepsilon_{i_r})(E_{i_1}, \ldots E_{i_r}) = \det(\varepsilon_{i_k}(E_{i_h})) = 1$.

Observación 2.4.4.1 *En particular* $\Lambda^r(\mathfrak{X}) = \{0\}$ *si* $r > m$, *y* $\varepsilon_1 \wedge \ldots \wedge \varepsilon_m$ *constituye una base de* $\Lambda^m(\mathfrak{X})$
Por otra parte, si M *es variedad diferenciable de dimensión* m, *entonces* $\Omega^r(M) = 0$ *si* $r > m$.

2.4.5. Pullback.

Una aplicación diferenciable $\phi : M \to \bar{M}$ entre variedades induce un *pullback* $\phi^* : \Omega^r(\bar{M}) \to \Omega^r(M)$, definido para $\bar{\omega} \in \Omega^r(\bar{M})$ por:

$$(\phi^*\bar{\omega})(x)(\xi_1, \ldots, \xi_r) = \bar{\omega}(\phi(x))(d\phi(x)(\xi_1), \ldots, d\phi(x)(\xi_1))$$

para todo $x \in M$, $\xi_1, .., \xi_r \in T_xM$.

En efecto, es fácil comprobar que $(\phi^*\bar{\omega})(x) \in \Lambda^r(T_xM)$ y la aplicación así definida $\Omega^r(\bar{M}) \to T_xM$ es $\mathbb{R}$-lineal para todo $x \in M$. Además si $\bar{\alpha}_i \in \Omega^1(\bar{M})$

$$\phi^*(\bar{\alpha}_1 \wedge \ldots \wedge \bar{\alpha}_r) = \phi^*(\bar{\alpha}_1) \wedge \ldots \wedge \phi^*(\bar{\alpha}_r)$$

Así que fijados $(\mathcal{U}, \mathbf{c} = (u_1, \ldots, u_m))$ es una carta de M y carta $(\overline{\mathcal{U}}, \bar{\mathbf{c}} = (\bar{u}_1, \ldots, \bar{u}_{\bar{m}}))$ de $\bar{M}$, con $\phi(\mathcal{U}) \subset \overline{\mathcal{U}}$, si

$$\bar{\omega} = \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_r \leq \bar{m}} \bar{\omega}_{i_1\ldots i_1} d\bar{u}_{i_1} \wedge \ldots \wedge d\bar{u}_{i_r}$$

entonces, teniendo en cuenta que $\phi^* d\bar{f} = d\phi^*\bar{f}$ para todo $\bar{f} \in \mathcal{F}(\bar{M})$ se tiene

$$\begin{aligned} \phi^*\bar{\omega} &= \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_r \leq \bar{m}} (\phi^*\bar{\omega}_{i_1\ldots i_1})(\phi^* d\bar{u}_{i_1} \wedge \ldots \wedge \phi^* d\bar{u}_{i_r}) = \\ &= \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_r \leq \bar{m}} (\phi^*\bar{\omega}_{i_1\ldots i_1}) d\phi_{i_1} \wedge \ldots \wedge d\phi_{i_r} \end{aligned}$$

siendo $\phi_i = \phi^*\bar{u}_i = \bar{u}_i \circ \phi$ las componentes de la expresión analítica de ϕ. En consecuencia $\phi^*\bar{\omega}$ es diferenciable y pertenece a $\Omega^r(M)$.

Naturalmente, si $\phi : M \to \bar{M}$, y $\psi : \bar{M} \to N$ son funciones diferenciables entre variedades, entonces:

$$(\psi \circ \phi)^* = \phi^* \circ \psi^* : \Omega^r(N) \to \Omega^r(M)$$

Observación 2.4.5.1 *Si $(\mathcal{U}, \mathbf{c} = (u_1, \ldots, u_m))$ es una carta en M y $\omega \in \Omega^r(M)$ no hay ninguna diferencia* formal *entre la expresión de en las coordenadas* $\mathbf{c}$,

$$\omega = \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_r \quad \leq m} \omega_{i_1 \ldots i_1} du_{i_1} \wedge \ldots \wedge du_{i_r} \tag{25}$$

y la expresión de $\varphi^* \omega \in \Omega^r(\mathbb{U})$, $\varphi : \mathbf{c}^{-1} : \mathbb{U} \to \mathcal{U}$

$$\varphi^* \omega = \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_r \quad \leq m} \omega_{i_1 \ldots i_1} du_{i_1} \wedge \ldots \wedge du_{i_r} \tag{26}$$

se interpreta en (25) que $\omega_{i_1 \ldots i_1} = \omega_{i_1 \ldots i_1}(u_1, \ldots, u_m)$ es una función $\mathcal{U} \to \mathbb{R}$, y en (26) que lo es de $\mathbb{U} \to \mathbb{R}$. Por esto se dice a veces que $\varphi^* \omega$ es la representación analítica local de ω en las coordenadas $\mathbf{c}$.

2.5. ORIENTACIÓN Y FORMAS DE VOLUMEN.

Solo es posible establecer una teoría de integración de funciones, cuando se cuenta sobre la variedad con un ingrediente más, denominado elemento (infinitesimal) de volumen. Este ingrediente viene canónicamente definido cuando disponemos de una estructura riemanniana, y en particular, si la variedad está sumergida en $\mathbb{R}^n$. La posibilidad de poder establecer teoremas de tipo Stokes requiere además de una orientación en la variedad. Comencemos estableciendo un concepto de orientación en espacios vectoriales:

2.5.1. Orientación en espacios vectoriales

Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ de dimensión finita m. El espacio $\Lambda^m(V)$ de las formas exteriores de grado m constituye un espacio vectorial de dimensión la unidad. Una *forma de volumen* en V es un elemento no nulo $\omega \in \Lambda^m(V)$.

Diremos que dos formas de volumen $\omega, \omega' \in \Lambda^m(V) - \{0\}$ definen la misma orientación, y escribimos $\omega \simeq \omega'$ cuando existe $\lambda > 0$ con $\omega' = \lambda\omega$.

Esta es una relación de equivalencia sobre el conjunto $\Lambda^m(V) - \{0\}$ de las formas de volumen con exactamente dos clases: $(\Lambda^m(V) - \{0\}/ \simeq) = \{\mathcal{O}^1, \mathcal{O}^2\}$.Sea $\mathcal{O}^+ : \Lambda^m(V) - \{0\} \to (\Lambda^m(V) - \{0\}/ \simeq)$ la proyección canónica

Definición *Una orientación para V es un elemento $\mathcal{O}^+ \in (\Lambda^m(V) - \{0\}) / \simeq$*

Podemos hacer otro planteamiento equivalente: Si $E = (E_1, \ldots, E_m)$ es base de V,y $\varepsilon = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_m)$ es su base dual, entonces $\omega_E = \varepsilon_1 \wedge \ldots \wedge \varepsilon_m$ constituye la única forma de volumen tal que $\omega_\varepsilon(E_1, \ldots, E_m) = 1$. Si $E' = (E'_1, \ldots, E'_m)$ es otra base con $E' = E\ P$, y $P = (p^i_j)$ se verifica $\omega_{E'} = (\det\ P)\omega_E$ es decir, $\det\ P = \omega_E(E')$.

Las bases E y E' se dice que *definen la misma orientación*, y escribimos $E \simeq E'$, si $\omega_E(E') > 0$. Esta es una relación de equivalencia sobre el conjunto

$\mathcal{E}$ de las bases de V, e induce sobre $\mathcal{E}$, conjunto de bases de V una partición con exactamente dos clases: $(\mathcal{E}/\simeq) = \{\mathcal{E}^1, \mathcal{E}^2\}$. Sea $\mathcal{E}^+ : \mathcal{E} \to (\mathcal{E}/\simeq)$ la proyección canónica

Bases positivas *Una orientación para V puede entenderse también como un elemento $\mathcal{E}^+ \in (\mathcal{E}/\simeq)$. Los elementos de $\mathcal{E}^+$ serán entonces las bases positivas.*

Por otra parte, una forma de volumen ω induce sobre el conjunto $\mathcal{E}$ de las bases de V una partición $\mathcal{E} = \mathcal{E}^+(\omega) \cup \mathcal{E}^-(\omega)$ con: $\mathcal{E}^+(\omega) = \{E \in \mathcal{E} : \omega(E) > 0\}$, $\mathcal{E}^-(\omega) = \{E \in \mathcal{E} : \omega(E) < 0\}$.

Observese que:

(1) Si $E \in \mathcal{E}$, entonces $\mathcal{E}^+(\omega_E) = \mathcal{E}^+(E)$.

(2) $E \in \mathcal{E}^+(\omega) \Longleftrightarrow \omega \simeq \omega_E$, ya que $\omega = \omega(E)\omega_E$

(3) $\mathcal{E}^+(\omega) = \mathcal{E}^+(\omega')$ si y solo si $\omega \simeq \omega'$.

En consecuencia si $E \in \mathcal{E}^+(\omega)$, entonces $\mathcal{E}^+(\omega) = \mathcal{E}^+(E)$ es un elemento de $\mathcal{E}/\simeq$.

Esto permite establecer sin más comentarios la equivalencia entre ambas definiciones de orientación.

Nótese que existe una biyección canónica:

$$(\mathcal{E}/\simeq) \leftrightarrows (\Lambda^m(V) - \{0\}) / \simeq$$

en consecuencia, elegir un elemento de $\mathcal{E}/\simeq$ equivale a elegirlo en $\Lambda^m(V) - \{0\}/\simeq$

2.5.2. Orientación en variedades.

Sea ahora M una variedad de dimensión finita m .

Definición *a) Una forma de volumen en M, es un elemento $\omega \in \Omega^m(M)$ tal que $\omega(x) \neq 0$ para todo $x \in M$.*

b) *Una orientación en M es una asignación $\mathcal{O}^+$ que hace corresponder a cada punto $p \in M$, una orientación $\mathcal{O}^+_p$ en el espacio vectorial T_pM, verificando la siguiente condición de diferenciabilidad:*

Para cada $p \in M$, existe un entorno $\mathcal{U}$ de p,y una base $(E_1, ..., E_m)$ de campos para $\mathfrak{X}(\mathcal{U})$ de forma que $(E_1(x), ..., E_m(x))$ es base positiva de T_xM para todo $x \in \mathcal{U}$.

c) *Una variedad se dice orientable, si admite una orientación.*

Evidentemente una forma de volumen ω en M induce una orientación $\mathcal{O}^+(\omega)$ en M de forma que $\mathcal{O}^+(\omega)_p = \mathcal{O}^+(\omega(p))$ para todo $p \in M$. Además si ω' es otra forma de volumen, se verifica $\mathcal{O}^+(\omega) = \mathcal{O}^+(\omega')$ si y solo si existe $f : M \to \mathbb{R}^+$ diferenciable y $\omega' = f\omega$

Recíprocamente, si $\mathcal{O}^+$ es una orientación para M, es posible encontrar una partición diferenciable de la unidad $\{(\mathcal{U}_i, \mu_i) : i \in I\}$,y formas de volumen

ω_i en $\mathcal{U}_i$ que induzcan la misma orientación que $\mathcal{O}^+$. Entonces $\omega = \Sigma\mu_i\omega_i$ es una forma de volumen que induce la orientación $\mathcal{O}^+$. Salvo cuestiones de detalle puede considerarse demostrado el siguiente teorema:

La condición de orientabilidad *Son equivalentes las siguientes afirmaciones:*

i) *M es orientable.*

ii) *Existe en M una forma de volumen ω.*

iii) Existe un atlas $\mathcal{A} = \{(\mathcal{U}_i, \mathbf{c}_i) : i \in I\}$ de M formado por cartas que "definen la misma orientación"

NOTA: Dos cartas $\mathbf{c} = (u_1, \ldots, u_m), \bar{\mathbf{c}} = (\bar{u}_1, \ldots, \bar{u}_m)$ *definen la misma orientación* cuando en la intersección de sus dominios se tiene

$$\det\left(\frac{\partial(u_1, \ldots, u_m)}{\partial(\bar{u}^1, \ldots, \bar{u}_m)}\right) > 0$$

Fijada una orientación $\mathcal{O}$ en M, la carta $\mathbf{c}$ se dice *positiva* si $\omega_{\mathbf{c}} = du_1 \wedge \ldots \wedge du_m$ define en el dominio de $\mathbf{c}$ la orientación $\mathcal{O}^+$.

2.5.3. La forma de volumen riemanniana.

Sea $\mathbb{E} = (V, <, >)$ un espacio vectorial euclideo orientado, y sean $E = (E_1, \ldots, E_m)$, y $E' = (E'_1 \ldots, E'_m) = E\ P$ (con $P = (p^i_j)$) dos bases ortonormales positivas de $\mathbb{E}$. La matriz P es una matriz ortogonal (es decir $P^tP = I$) por lo que det $P = 1$. Así, $\omega_E = (\det P)\,\omega_{E'} = \omega_{E'}$. A la forma de volumen $\omega = \omega_E$ se le denomina volumen canónico de $\mathbb{E}$.

Si $\bar{E} = (\bar{E}_1, \ldots, \bar{E}_m) = EA$ es una base cualquiera positiva de $\mathbb{E}$, denotando por G a la matriz $(g_{ij} =< \bar{E}_i, \bar{E}_j >)$, se verifica $G = A^tA$, y $\sqrt{\det G} = \det A$. Así:

$$\omega = \omega(\bar{E})\omega_{\bar{E}} = (\det\ A)\omega_{\bar{E}} = \sqrt{\det G}\bar{\varepsilon}_1 \wedge \ldots \wedge \bar{\varepsilon}_m$$

Así para variedades Riemannianas se tiene el siguiente resultado:

Proposición 2.5.3.1 *Sea M una variedad Riemanniana orientada. Existe entonces una única forma de volumen ω compatible con la orientación, tal que en cada punto $p \in M$, $\omega(p)(e_1, ..., e_m) = 1$ para toda base ortonormal positiva de T_pM. Por otra parte, si $\mathbf{c} = (u_1, ..., u^m)$ es una carta positiva de M,y $G = (g_{ij})$ es la matriz de la métrica, entonces:*

$$\omega = \sqrt{\det G}du_1 \wedge \ldots \wedge du_m$$

Observación 2.5.3.1 *Cuando se considera a M variedad orientada sumergida en $\mathbb{R}^n$ se denomina Ω_M a su forma de volumen canónica con, que viene inducida por su estructura riemanniana canónica g_M y su orientación.*

3. TEORÍA DE INTEGRACIÓN EN VARIEDADES

3.1. Preliminares

3.1.1. Paracompacidad

Recordaremos algunas definiciones y resultados básicos de Topología general (ver [5])

Sea M un espacio topológico, y sean $\mathcal{R} = \{\mathcal{U}_a : a \in A\}$ y $\mathcal{S} = \{\mathcal{V}_b : b \in B\}$ recubrimientos por abiertos de M

- Se dice que $\mathcal{R}$ es *localmente finito*, si para todo $x \in M$, existe $\mathcal{U}^x$ entorno de x, de forma que el conjunto $\{a \in A : \mathcal{U}_a \cap \mathcal{U}^x \neq \emptyset\}$ es finito.
- Se dice que $\mathcal{R}$ es *puntualmente finito*, si para todo $x \in M$ el conjunto $\{a \in A : x \in \mathcal{U}_a\}$ es finito.
- Se dice que $\mathcal{R}$ es un *refinamiento* de (o *está subordinado a*) $\mathcal{S}$, si para todo $a \in A$, existe $b \in B$, con $\mathcal{U}_a \subseteq \mathcal{V}_b$.
- Se dice que M es un espacio *paracompacto*, si es T_2 y verifica la propiedad de que *para todo recubrimiento por abiertos, existe un refinamiento localmente finito.*

Recordemos ahora, algunos resultados básicos de Topología General ($\overline{S}$ denota en este epígrafe y el siguiente, a la adherencia topológica de S)

Teorema 3.1.1.1 *Si M un espacio topológico que verifica el $IIAN$, es T_2 y es localmente compacto, entonces M es paracompacto* ■

En particular, si M es variedad diferenciable T_2 verificando el $IIAN$,

Teorema 3.1.1.2 *Si M es un espacio topológico paracompacto, entonces es normal.* ■

Recuerdese que un espacio normal, es un espacio que separa cerrados, o de forma equivalente: $\forall \mathcal{U}$ abierto y $\forall C \subset \mathcal{U}$ cerrado, $\exists \mathcal{V}$ abierto con $C \subset \mathcal{V}$ y $\overline{\mathcal{V}} \subset \mathcal{U}$.

Teorema 3.1.1.3 *Si M es un espacio topológico normal, y $\mathcal{R} = \{\mathcal{U}_a : a \in A\}$ es un recubrimiento por abiertos de M puntualmente finito, existe entonces un recubrimiento por abiertos $\mathcal{S} = \{\mathcal{V}_a : a \in A\}$ de forma que $\overline{\mathcal{V}_a} \subset \mathcal{U}_a$ para todo $a \in A$* ■

3.1.2. Particiones diferenciables de la unidad

Observación 3.1.2.1 *Las variedades diferenciables por ser subespacios topológicos de $\mathbb{R}^n$ son T_2, y verifican el $IIAN$. Así, por el teorema 3.1.1.1, todas las variedades serán paracompactas. Este es el caso, por supuesto, de las variedades euclideas.*

Una partición diferenciable de la unidad de una variedad diferenciable M, es una familia $\mathcal{P} = \{(\mathcal{U}_a, \mu_a) : a \in A\}$ donde

1. $(\mathcal{U}_a)_{a\in A}$ es un recubrimiento por abiertos de M, que es localmente finito.
2. $\forall a \in A$, $\mu_a \in \mathfrak{F}(M)$, $\mu_a \geq 0$, y *sop* $\mu_a \subset \mathcal{U}_a$
3. $\sum_{a\in A} \mu_a = 1$ ([3])

Se dice que $\mathcal{P}$ está subordinada a (el recubrimiento por abiertos de M) $(\mathcal{V}_b)_{b\in B}$ Si $(\mathcal{U}_a)_{a\in A}$ está subordinado a $(\mathcal{V}_b)_{b\in B}$. El resultado fundamental es el siguiente:

Teorema 3.1.2.1 *bla bla*

Teorema 3.1.2.2 *Si M es variedad diferenciable, entonces para cada $(\mathcal{V}_b)_{b\in B}$ recubrimiento por abiertos de M, existe una partición diferenciable de la unidad $\mathcal{P} = \{(\mathcal{U}_a, \mu_a) : a \in A\}$, subordinada.*

Demostración: Para cada $p \in M$, existe $b \in B$ con $p \in \mathcal{V}_b$, y podemos tomar un abierto $\mathcal{W}_p$, con $p \in \mathcal{W}_p \subset \mathcal{V}_b$ siendo $\overline{\mathcal{W}_p}$ compacto. Así $(\mathcal{W}_p)_{p\in M}$ es un recubrimiento de M subordinado a $(\mathcal{V}_b)_{b\in B}$. Como M es paracompacta existe $(\mathcal{U}_a)_{a\in A}$ un recubrimiento por abiertos localmente finito de M, subordinado a $(\mathcal{W}_p)_{p\in M}$ y por tanto subordinado a $(\mathcal{V}_b)_{b\in B}$. Como cada $\mathcal{U}_a$ está contenido en algún $\mathcal{W}_p$ se concluye que $\overline{\mathcal{U}_a} \subset \overline{\mathcal{W}_p}$, y así $\overline{\mathcal{U}_a}$ (cerrado contenido en compacto) es compacto.

La demostración del teorema, se obtiene ahora de forma inmediata a partir de la siguiente proposición, que tiene interés por si misma:

Proposición 3.1.2.1 *Sea M es variedad diferenciable, y $(\mathcal{U}_a)_{a\in A}$ un recubrimiento por abiertos localmente finito de M, de forma que para cada $a \in A$, es $\overline{\mathcal{U}_a}$ compacto. Existe entonces una partición diferenciable de la unidad $\mathcal{P} = \{(\mathcal{U}_a, \mu_a) : a \in A\}$*

[3]Nótese que en un entorno $\mathcal{U}^x$ de cada punto x la suma puede considerarse finita, ya que en él, solo un número finito de sumandos es no nulo

Demostración: Como M es paracompacta, (ver observación 3.1.2.1), por el teorema 3.1.1.2 es un espacio normal. Usando ahora dos veces el teorema 3.1.1.3 se concluye que existen recubrimientos por abiertos de M, $(\mathcal{W}_a)_{a\in A}$, y $(\mathcal{V}_a)_{a\in A}$ de forma que $\overline{\mathcal{V}_a} \subset \mathcal{W}_a$, y $\overline{\mathcal{W}_a} \subset \mathcal{U}_a$. $\forall a \in A$. Como $\overline{\mathcal{V}_a}$ es un compacto contenido en el abierto $\mathcal{W}_a$, usando ahora el corolario 1.3.1.1, se concluye que existe $\lambda_a \in \mathfrak{F}(M)$, $\lambda_a \geq 0$, con $\lambda_a \mid \overline{\mathcal{V}_a} > 0$, y $sop(\lambda_a) \subset \mathcal{W}_a$. La función $\lambda = \sum_{a\in A} \lambda_a$, es simpre positiva, ya que $\left(\mathcal{V}_a\right)_{a\in A}$ recubre M. Se toma entonces $\mu_a = \lambda_a/\lambda$, y $\mathcal{P} = \{(\mathcal{U}_a, \mu_a) : a \in A\}$ es la partición diferenciable pedida. ■

3.1.3. Teoría de integración en $\mathbb{R}^m$

Supondremos ya conocida la teoría de integración de Riemann en $\mathbb{R}^m$ para funciones con soporte compacto. Se entiende que una función f definida en un abiero $\mathbb{U}$ de $\mathbb{R}^m$ con valores reales se dirá integrable si admite integral finita en cada compacto de $C \subset \mathbb{U}$. Es decir, si χ_C es la función característica de C, debe existir

$$\int_C f = \int f\chi_C \in \mathbb{R}$$

Denotamos por $\mathcal{F}_{int}(\mathbb{U})$ el anillo de las funciones integrables en $\mathbb{U}$, y

$$\mathcal{F}_c(\mathbb{U}) = \{f \in \mathcal{F}_{int}(\mathbb{U}) : sop\,(f) \text{ es compacto}\}$$

que es un subanillo de $\mathcal{F}_{int}(\mathbb{U})$. La aplicación integral

$$\mathcal{F}_c(\mathbb{U}) \to \mathbb{R},\ f \to \int_{\mathbb{U}} f$$

es $\mathbb{R}$- lineal.

Recordemos el siguiente:

3.1.4. Teorema del cambio de variable en $\mathbb{R}^m$

Sea $f : \mathbb{R}^m \supset \mathbb{V} \to \mathbb{R}$ una función integrable con soporte compacto contenido en el abierto $\mathbb{V}$, y sea $\phi : \mathbb{R}^m \underset{ab}{\supset} \mathbb{U} \to \mathbb{V}$ un difeomorfismo con ecuaciones $v_i = \phi_i(u_1, \ldots, u_m)$. Entonces

$$\int_{\phi(\mathbb{U})} f = \int_{\mathbb{U}} (f \circ \phi) \left| \det \left(\frac{\partial(\phi_1, \ldots, \phi_m)}{\partial(u_1, \ldots, u_m)} \right) \right|$$

Vamos a denotar a la integral $\int_{\phi(\mathbb{U})} f$ de la forma

$$\int_{\phi(\mathbb{U})} f = \int_{\phi(\mathbb{U})} f(v_1, \ldots, v_m) dv_1 \wedge \ldots \wedge dv_m$$

La razón de esto, es que si en la expresión $\vartheta = f(v_1, \ldots, v_m) dv_1 \wedge \ldots \wedge dv_m$ se hace sustitución formal de v_i por las ϕ_i, obtenemos el Pullback $\phi^* \vartheta$, y queda

$$\begin{aligned} \phi^* \vartheta &= f(\phi_1, \ldots, \phi_m) d\phi_1 \wedge \ldots \wedge d\phi_m \\ &= (f \circ \phi) \det \left(\frac{\partial(\phi_1, \ldots, \phi_m)}{\partial(u_1, \ldots, u_m)} \right) du_1 \wedge \ldots \wedge du_m \end{aligned}$$

con lo que formalmente, el teorema del cambio de variable se escribe:

$$\begin{array}{l} \int_{\phi(\mathbb{U})} \vartheta = \int_{\mathbb{U}} \phi^* \vartheta \text{ si } \det(\partial \phi_i / du_j) > 0 \\ \int_{\phi(\mathbb{U})} \vartheta = -\int_{\mathbb{U}} \phi^* \vartheta \text{ si } \det(\partial \phi_i / du_j) < 0 \end{array} \tag{27}$$

3.1.5. Integrales de $m-$formas en $\mathbb{R}^m$

El teorema del cambio de variable sugiere modificar algo el punto de vista, y nos invita a integrar $m-$formas, en lugar de funciones. Definimos para $\mathbb{U}$ abierto de $\mathbb{R}^m$ (con coordenadas $u_1, \ldots, u_m$)

$$\begin{aligned} \Omega^m_{int}(\mathbb{U}) &= \{\vartheta = f du_1 \wedge \ldots \wedge du_m : f \in \mathcal{F}_{int}(\mathbb{U})\} \\ \Omega^m_c(\mathbb{U}) &= \{\vartheta = f du_1 \wedge \ldots \wedge du_m : f \in \mathcal{F}_c(\mathbb{U})\} \end{aligned}$$

y definimos entonces para $\vartheta = f du_1 \wedge \ldots \wedge du_m \in \Omega^m_c(\mathbb{U})$ la integral

$$\int_{\mathbb{U}} \vartheta = \int_{\mathbb{U}} f$$

de esta manera $\int_{\mathbb{U}} : \Omega^m_c(\mathbb{U}) \to \mathbb{R}$ es $\mathbb{R}$-lineal, y verifica el teorema del cambio de variable (27)

3.2. Integración en variedades

En lo que sigue M es una variedad diferenciable orientada de dimensión m (sumergida en $\mathbb{R}^n$) y Ω_M es su forma de volumen canónica. Una función $f : M \to \mathbb{R}$ se dirá *integrable*, si para cada $p \in M$ es integrable la función $f \circ \mathbf{c}^{-1}$ para cada (alguna) carta $\mathbf{c}$ cuyo dominio contenga a p. Denotamos por $\mathcal{F}_{int}(M)$ al anillo de las funciones integrables en M, y $\mathcal{F}_c(M)$ es el anillo de funciones integrables en M con soporte compacto. Finalmente

$$\Omega^m_c(M) = \{\vartheta = f \Omega_M : f \in \mathcal{F}_c(M)\}$$

es la familia de m-formas *integrables* en M con soporte compacto.

Pretendemos establecer una teoría de integración en M, basada en el operador integral en M:

$$\Omega^m_c(M) \to \mathbb{R}, \vartheta \to \int_M \vartheta$$

al que le vamos a exigir:

(a) Que sea $\mathbb{R}$-lineal

(b) Que sea compatible con la teoría ya establecida de integración en $\mathbb{R}^m$

(c) Que sea válida una formulación general del teorema del cambio de variable en variedades.

3.2.1. Integral de una m -forma en una variedad

Sea ϑ una m -forma integrable con soporte compacto en la variedad orientable M. Se trata de definir $\int_M \vartheta$. Procedamos por pasos:

1) Supóngase que *sop* $\vartheta \subseteq \mathcal{U}$ siendo $\mathcal{U}$ dominio de una carta positiva $\mathbf{c}$. se define entonces: $\int_M \vartheta = \int_{\mathbf{c}(\mathcal{U})}(\mathbf{c}^{-1})^*\vartheta$. Si $\bar{\mathbf{c}}$ es otra carta positiva con dominio $\overline{\mathcal{U}} \supseteq$ *sop* ϑ, usando el teorema del cambio de variable en $\mathbb{R}^m$ se tiene:

$$\begin{aligned}\int_{\bar{\mathbf{c}}(\overline{\mathcal{U}})}(\bar{\mathbf{c}}^{-1})^*\vartheta &= \int_{\bar{\mathbf{c}}(\mathcal{U}\cap\overline{\mathcal{U}})}(\bar{\mathbf{c}}^{-1})^*\vartheta = \int_{\mathbf{c}(\mathcal{U}\cap\overline{\mathcal{U}})}(\bar{\mathbf{c}}\circ\mathbf{c}^{-1})^*(\bar{\mathbf{c}}^{-1})^*\vartheta \\ &= \int_{\mathbf{c}(\mathcal{U}\cap\overline{\mathcal{U}})}(\bar{\mathbf{c}}^{-1}\circ\bar{\mathbf{c}}\circ\mathbf{c}^{-1})^*\vartheta = \int_{\mathbf{c}(\mathcal{U})}(\mathbf{c}^{-1})^*\vartheta\end{aligned}$$

y así el valor de la integral no depende de la carta positiva elegida, y dentro de ella son válidas las propiedades de aditividad de la integral.

2) En el caso general puede probarse fácilmente, usando particiones diferenciables de la unidad, el siguiente:

3.2.2. Lema

Sea M variedad orientada y K compacto de M. Existe entonces una función diferenciable con soporte compacto $\mu : M \to \mathbb{R}$ tal que $\mu \geq 0$, y $\mu \equiv 1$ en K. Además podemos suponer que $\mu = \mu_1 + \ldots + \mu_r$ siendo cada μ_k función diferenciable, $\mu_k \geq 0$, cuyo soporte compacto está incluido en el dominio de una carta.

Demostración:

Sea $\mathcal{P} = \{(\mathcal{U}_a, \mu_a) : a \in A\}$ una partición diferenciable de la unidad, sobordinada a un atlas de la variedad M. Podemos suponer, por tanto que cada $\mathcal{U}_a$ es dominio de una carta.Para cada $p \in K$ sea $\mathcal{U}^p$ un entorno abierto de p, tal que el conjunto $A_p = \{a \in A : \mathcal{U}_a \cap \mathcal{U}^p \neq \emptyset\}$ es finito.Como K es compacto, podemos suponer $K \subset \mathcal{U}^{p_1} \cup \ldots \cup \mathcal{U}^{p_s}$. El conjunto $B = A_{p_1} \cup \ldots \cup A_{p_s}$ es finito, y verifica la propiedad de que

$$\alpha \notin B \Longrightarrow \mathcal{U}_a \cap (\mathcal{U}^{p_1} \cup \ldots \cup \mathcal{U}^{p_s}) = \emptyset \supseteq \mathcal{U}_a \cap K \Longrightarrow \mu_a | K = 0$$

así la función $\mu = \sum_{b\in B} \mu_b$, verifica para cada $x \in K$:

$$1 = \sum_{a\in A} \mu_a(x) = \sum_{b\in B} \mu_b(x) = \mu(x)$$

■

Como sop ϑ es compacto, aplicando el lema a $K = sop\vartheta$ se tiene la identidad $\vartheta = \mu\vartheta$, y por tanto la descomposición $\vartheta = \Sigma\mu_i\vartheta$, y cada $\vartheta_i = \mu_i\vartheta$ tiene soporte contenido en una carta orientada. Definamos pues:

$$\int_M \vartheta = \sum_{i=1}^{r} \int_M \vartheta_i$$

Es necesario ahora probar que si $\vartheta = \bar{\vartheta}_1 + \ldots + \bar{\vartheta}_s$ es otra descomposición de ϑ en suma de m -formas con soportes contenidos en cartas positivas, entonces:

$$\sum_{i=1}^{r} \int_M \vartheta_i = \sum_{j=1}^{s} \int_M \bar{\vartheta}_j$$

En efecto: Si K es el compacto unión de todos los soportes de ϑ_i, y de $\bar{\vartheta}_j$, sean $\mu = \mu_1 + \ldots + \mu_n$ las funciones resultantes de aplicar el lema a K. Las m -formas $\mu_k\vartheta_i$, $\mu_k\bar{\vartheta}_j$ tienen soporte compacto, contenido en una misma carta positiva, y son por tanto válidas las igualdades:

$$\sum_{i=r}^{r} \int_M \vartheta_i = \sum_{i=1}^{r} \left[\sum_{k=1}^{n} \int_M \mu_k \vartheta_i \right] = \sum_{k=1}^{n} \left[\sum_{i=1}^{r} \int_M \mu_k \vartheta_i \right] =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \int_M \mu_k \vartheta = \sum_{k=1}^{n} \left[\sum_{j=1}^{s} \int_M \mu_k \bar{\vartheta}_j \right] = \ldots = \sum_{j=1}^{s} \int_M \bar{\vartheta}_j$$

3.2.3. Integración de funciones en variedades.

Si $f : M \to \mathbb{R}$ es una función integrable con soporte compacto, se define la integral de f en M como la integral en M de la forma $f\Omega_M$, es decir: $\int_M f\Omega_M$.

Si A es un conjunto medible se llama volumen de A,a la integral $\int_M \chi_A \Omega_M$ y se denomina i*ntegral de f en A* a: :

$$\int_A f\Omega_M = \int_M f\chi_A\Omega_M$$

La integral de funciones en M verifica todas las propiedades usuales de aditividad, así como el siguiente teorema del cambio de variable:

3.2.4. Determinante de un difeomorfismo

Sean M, y $\bar{M}$ variedades con volumen Ω_M y $\Omega_{\bar{M}}$ respectivamente, y sea $\phi : M \to \bar{M}$ un difeomorfismo. Se llama $\det(\phi)$ la función de M en $\mathbb{R}$ definida por:

$$\phi^*(\Omega_{\bar{M}}) = \det(\phi)\Omega_M \tag{28}$$

.Fijemos ($\overline{\mathcal{U}}, \overline{\mathbf{c}} = (\bar{u}_1, \ldots, \bar{u}_m)$), y ($\mathcal{U}, \mathbf{c}$=$(u_1, \ldots u_m)$) cartas positivas de manera que $\phi(\mathcal{U}) \subset \overline{\mathcal{U}}$, y pongamos que la aplicación $\phi^{\mathbf{c}\overline{\mathbf{c}}} = \overline{\mathbf{c}} \circ \phi \circ \mathbf{c}^{-1} : \mathbf{c}(\mathcal{U}) \to \overline{\mathbf{c}}(\overline{\mathcal{U}})$, tiene por ecuaciones $\bar{u}_i = \phi_i(u_1, \ldots u_m)$, $i = 1, ..., m$. Entonces se tiene

$$\det(\phi) = \frac{\sqrt{\det(\bar{g}_{ij})}}{\sqrt{\det(g_{ij})}} \det\left(\frac{\partial(\phi_1, \ldots, \phi_m)}{\partial(u_1, \ldots, u_m)}\right)$$

donde $\bar{g}_{ij} = \langle \partial/\bar{u}_i, \partial/\bar{u}_j \rangle$, y $g_{ij} = \langle \partial/u_i, \partial/u_j \rangle$.

Nótese por tanto, que $\det(\phi) : M \to \mathbb{R} - \{0\}$ es una función diferenciable, que tiene signo constante si M es conexa.

Se dice que ϕ preserva la orientación, si $\det(\phi) > 0$. Esto significa que ϕ_* transforma cada base $\left(\xi^1, \ldots, \xi^m\right)$positiva de vectores en M en una base $\left(\phi_* \xi^1, \ldots, \phi_* \xi^m\right)$ positiva en $\bar{M}$.

Cuando $\det(\phi) < 0$ se dice que ϕ invierte la orientación

3.2.5. Teorema del cambio de variable en variedades

Sean M, y $\bar{M}$ *variedades con volumen* Ω_M y $\Omega_{\bar{M}}$ *respectivamente, y sea* $\phi : M \to \bar{M}$ *un difeomorfismo. Si* $\bar{f} : \bar{M} \to \mathbb{R}$ *es una función integrable con soporte compacto, entonces:*

(a) *Si* $\bar{\vartheta} = \bar{f}\Omega_{\bar{M}}$ se verifica

$$\begin{array}{l} \int_{\bar{M}} \bar{\vartheta} = \int_M \phi^* \bar{\vartheta} \text{ si } \det(\phi) > 0 \\ \int_{\bar{M}} \bar{\vartheta} = -\int_M \phi^* \bar{\vartheta} \text{ si } \det(\phi) < 0 \end{array}$$

(b) *Si* A *es un conjunto medible de* M *entonces* $\phi(A)$ *lo es de* $\bar{M}$ *y se verifica*

$$\int_{\phi(A)} \bar{f}\Omega_{\bar{M}} = \int_A (\bar{f} \circ \phi) \left|\det(\phi)\right| \Omega_M$$

siendo $\det(\phi)$ *la función de* M *en* $\mathbb{R}$ *definida por:* $\phi^*(\Omega_{\bar{M}}) = \det(\phi)\Omega_M$.

Demostración

Supongamos en primer lugar que *sop*$\bar{\vartheta}$ está contenido en el dominio conexo $\overline{\mathcal{U}}$ de una carta $\overline{\mathbf{c}} = (\bar{u}_1, \ldots, \bar{u}_m)$, entonces $\mathcal{U} = \phi^{-1}\left(\overline{\mathcal{U}}\right)$ es dominio de una carta $\mathbf{c} = (u_1, \ldots u_m)$ (por ejemplo $\mathbf{c} = \overline{\mathbf{c}} \circ \phi$). Si $\varepsilon = \pm 1$, es el signo de $\det\left(\partial\phi_i / du_j\right)$ se tiene:

$$\begin{aligned} \varepsilon \int_{\bar{M}} \bar{\vartheta} &= \varepsilon \int_{\mathbb{R}^m} \bar{\varphi}^* \bar{\vartheta} =^{(*)} \int_{\mathbb{R}^m} (\overline{\mathbf{c}} \circ \phi \circ \varphi)^* \left(\bar{\varphi}^* \bar{\vartheta}\right) = \\ &= \int_{\mathbb{R}^m} \varphi^* \left(\phi^* \left(\overline{\mathbf{c}} \circ \bar{\varphi}\right)^* \bar{\vartheta}\right) = \int_{\mathbb{R}^m} \varphi^* \left(\phi^* \bar{\vartheta}\right) = \\ &= \int_M \phi^* \bar{\vartheta} \end{aligned}$$

donde la igualdad marcada con $(*)$ es consecuencia del teorema del cambio de variable (27).

En el caso general, basta con descomponer $\bar{\vartheta} = \bar{\vartheta}_1 + \cdots + \bar{\vartheta}_s$ en sumandos cuyos soportes estén metidos en una cartas, y aplicar lo anterior a cada sumando. Por ejemplo, si ϕ preserva orientación:

$$\int_{\bar{M}} \bar{\vartheta} = \sum \int_{\bar{M}} \bar{\vartheta}_i = \sum \int_M \phi^* \bar{\vartheta}_i = \int_M \phi^* \bar{\vartheta}$$

La segunda afirmación es consecuencia inmediata de la primera.

3.2.6. Integrales de linea

Sea ahora Γ una variedad diferenciable de dimensión 1 sumergida en $\mathbb{R}^n$. Es un buen ejercicio (mental) intentar aplicar para este caso particular los conceptos y resultados de la teoría de integración establecida recientemente para variedades cualesquiera. Antes de nada conviene enunciar el que podría denominarse teorema de clasificación de variedades unidimensionales:

Teorema: *Si Γ es una variedad unidimensional conexa entonces:*

(a) Si Γ es no compacta, existe $\gamma : \mathbb{R} \to \Gamma \subset \mathbb{R}^n$ difeomorfismo (i.e. Γ es difeomorfa a $\mathbb{R}$)

(b) Si Γ es compacta existe $\tilde{\gamma} : \mathbb{S}^1 \to \Gamma \subset \mathbb{R}^n$ difeomorfismo (i.e. Γ es difeomorfa a $\mathbb{S}^1$)

En el primer caso Γ admite una parametrización global, y en el segundo, podemos conseguir una parametrización $\gamma(t) = \tilde{\gamma}(\cos t, \sin t)$ $0 < t < \pi$ que es *casi global* (deja un punto fuera tan solo un punto)

En particular las variedades unidimensionales conexas Γ son paralelizables, y por tanto orientables. Pero ¿que significa una orientación en Γ?

Un elemento de longitud es una 1-forma $\sigma \in \Omega^1(\Gamma)$ con la propiedad de que $\sigma(p) \neq 0$ para todo $p \in \Gamma$. Nótese que $T_p\Gamma$ es una recta vectorial y $\sigma(p)$ elige la semirecta *positiva* de los vectores $\xi \in T_p\Gamma$ con $\sigma(\xi) > 0$. Así pues, elegir una orientación es elegir un sentido de recorrido para Γ: Una parametrización $\gamma : I \to \Gamma \subset \mathbb{R}^n$ se dirá positiva si $\gamma'(t)$ es un vector positivo para cada $t \in I$.

Nos preguntamos ahora, fijada una orientación en Γ cual es su elemento canónico de longitud Ω_Γ. *Literalmente* Ω_Γ es el elemento de longitud que toma el valor unidad sobre las bases ortonormales positivas. Es decir, $\Omega_\Gamma(\xi) = 1$ si ξ es un vector positivo con $|\xi| = 1$. Es fácil obtener la expresión analítica $\gamma^*\Omega_\Gamma$ de Ω_Γ respecto a una parametrización positiva $\gamma : I \to \Gamma \subset \mathbb{R}^n$:

$$\begin{aligned}
\gamma^*\Omega_\Gamma &= (\gamma^*\Omega_\Gamma)\left(\frac{\partial}{\partial t}\right) dt = \Omega_\Gamma\left(\gamma^* \frac{\partial}{\partial t}\right) dt = \Omega_\Gamma(\gamma'(t))\, dt = \\
&= |\gamma'(t)|\, \Omega_\Gamma\left(\frac{1}{|\gamma'(t)|}\gamma'(t)\right) dt = |\gamma'(t)|\, dt
\end{aligned}$$

y así resulta que la medida de $\Gamma_1 = \{\gamma(t) : a \leq t \leq b\}$ es su longitud

$$\int_{\Gamma_1} \Omega_\Gamma = \int_a^b \gamma^* \Omega_\Gamma = \int_a^b |\gamma'(t)| \, dt$$

por esto es natural denominar a Ω_Γ elemento de arco y denotar

$$\Omega_\Gamma = ds = |\gamma'(t)| \, dt$$

Imaginemos que Γ está incluida en una variedad M, y $\alpha \in \Omega^1(M)$. La integral (de linea) $\int_{\Gamma_1} \alpha$,de α en Γ_1 es por definición la integral en Γ_1 de la 1-forma $\vartheta = j^*\alpha \in \Omega^1(\Gamma)$ pullback de α por la inclusión $j : \Gamma \to M$, así

$$\int_{\Gamma_1} \alpha = \int_{\Gamma_1} j^*\alpha = \int_a^b \gamma^* (j^*\alpha) = \int_a^b (j \circ \gamma)^* \alpha = \int_a^b \gamma^* \alpha$$

Nótese que

$$\gamma^* \alpha = f(t) dt \text{ con } f(t) = (\gamma^* \alpha) \left(\frac{\partial}{\partial t} \right) = \alpha \left(\gamma'(t) \right)$$

y por tanto

$$\int_{\Gamma_1} \alpha = \int_a^b \alpha \left(\gamma'(t) \right) dt \tag{29}$$

que es la integral de la forma α a lo largo de γ (ver epígrafe 2.2.4)

4. TEOREMA DE STOKES

4.1. Antecesores del Teorema

4.1.1. Regla de Barrow

Sea $F : I \to \mathbb{R}$ una aplicación diferenciable definida sobre un intervalo abierto I de $\mathbb{R}$, en el que tomamos como variable, t, de forma que $dt \in \Omega^1(I)$ es su forma de volumen canónica. Pongamos $a, b \in I$ con $a < b$. Observese que lo que sigue, es una interpretación (algo forzada) de la regla de Barrow:

$$\int_{[a,b]} dF = \int_a^b F'(t) dt = F(b) - F(a) = \int_{\{a,b\}} F = \int_{\partial [a,b]} F$$

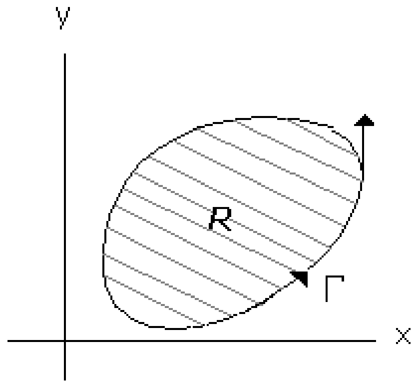
en donde se supone que $\partial [a, b] = \{a, b\}$ es el *borde orientado* de $[a, b]$, y la integral $\int_{\{a,b\}} F = F(b) - F(a)$ es la integral de la 0-forma $F \in \Omega^0(\{a, b\})$ en la variedad 0-dimensional $\{a, b\}$ en donde b tiene orientación positiva y a negativa (¿?). Si nos fijamos en el principio y el final de la cadena de igualdades anterior, nos queda

$$\int_{[a,b]} dF = \int_{\partial [a,b]} F$$

que ya tiene el aspecto típico de una fórmula de Stokes.

4.1.2. Teorema de Green

Otro resultado precursor del teorema de Stokes es el teorema de Green para el plano:



Sea $\mathcal{R}$ una región compacta de $\mathbb{R}^2$ limitada por una curva

$$\Gamma = \{\gamma(t) = (x(t), y(t))a \leq t \leq b\}$$

cerrada y recorrida positivamente respecto a $\mathcal{R}$ (Esto significa que cuando avanzamos a lo largo de Γ vamos dejando la región $\mathcal{R}$ a la izquierda). Si $P = P(x, y)$, y $Q = Q(x, y)$ son funciones diferenciables con valores reales, se tiene:

$$\int_{\mathcal{R}} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy = \int_a^b \left(P\left(\gamma(t)\right) x'(t) + Q\left(\gamma(t)\right) y'(t) \right) dt \tag{30}$$

Obsérvese que el segundo miembro puede escribirse ($\Gamma = \partial\mathcal{R}$, $\vartheta = Pdx + Qdy$) en la forma

$$\begin{aligned} & \int_a^b \left(P\left(\gamma(t)\right) x'(t) + Q\left(\gamma(t)\right) y'(t) \right) dt \qquad (31) \\ = & \int_a^b \vartheta\left(\gamma'(t)\right) dt = \int_a^b \gamma^* \vartheta = \int_\Gamma \vartheta = \int_{\partial\mathcal{R}} \vartheta \end{aligned}$$

4.2. Diferencial exterior

4.2.1. Diferencial exterior de 1-formas en el espacio euclideo

Si $\vartheta = Pdx + Qdy$ en una $1-$forma en un abierto $\mathbb{U}$ de $\mathbb{R}^2$, entonces $P = P(x, y)$, y $Q = Q(x, y)$ son funciones diferenciables con valores reales, y podemos definir

$$d\vartheta = dP \wedge dx + dQ \wedge dy$$

que tambien podemos escribir como

$$d\vartheta = \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx \wedge dy$$

De esta forma la fórmula (30) del teorema de Green puede escribirse ahora teniendo en cuenta (31)

$$\int_{\mathcal{R}} d\vartheta = \int_{\partial\mathcal{R}} \vartheta$$

que tiene ya todo el aspecto del teorema de Stokes.

Mas general, si $\vartheta = P_1 dx_1 + \cdots + P_m dx_m$ en una $1-$forma en un abierto $\mathbb{U}$ de $\mathbb{R}^m$, entonces las $P_i = P_i(x_1, \ldots, x_m)$, son funciones diferenciables con valores reales, y podemos definir

$$d\vartheta = dP_1 \wedge dx_1 + \cdots + dP_m \wedge dx_m \tag{32}$$

que tambien podemos escribir como

$$d\vartheta = \sum_{1 \leq i < j \leq m} \left(\frac{\partial P_j}{\partial x_i} - \frac{\partial P_i}{\partial x_j}\right) dx_i \wedge dx_j \tag{33}$$

La diferencial exterior como aplicación $d : \Omega^1(\mathbb{U}) \to \Omega^2(\mathbb{U})$ verifica las siguientes propiedades

(1) d es $\mathbb{R}-$lineal

(2) $d(df) = 0$ si $f \in \mathcal{F}(\mathbb{U})$

(3) $d(f\vartheta) = df \wedge \vartheta + f d\vartheta$ si $f \in \mathcal{F}(\mathbb{U})$, $\vartheta \in \Omega^1(\mathbb{U})$.

Por otra parte, se comprueba si $\phi = (\phi_1, \ldots, \phi_m) : \mathbb{U} \to \overline{\mathbb{U}}$ es una aplicación diferenciable entre abiertos de $\mathbb{R}^m$ con $\bar{x}_i = \phi_i(x_1, \ldots, x_m)$ entonces

$$d\left(\phi^* \bar{\vartheta}\right) = \phi^*\left(d\bar{\vartheta}\right) \text{ si } \bar{\vartheta} \in \Omega^1\left(\overline{\mathbb{U}}\right) \tag{34}$$

En efecto, tomando $\bar{\vartheta} = \overline{P}_1 d\overline{x}_1 + \cdots + \overline{P}_m d\bar{x}_m$ se tiene $\phi^*\left(\bar{\vartheta}\right) = \left(\phi^* \bar{P}_1\right) d\phi_1 + \cdots + \left(\phi^* P_m\right) d\phi_m$

$$\begin{aligned}
\phi^*\left(d\bar{\vartheta}\right) &= \phi^*\left(d\bar{P}_1 \wedge d\bar{x}_1 + \cdots + d\overline{P}_m \wedge d\bar{x}_m\right) = \\
&= \phi^*\left(d\bar{P}_1\right) \wedge \phi^*\left(d\bar{x}_1\right) + \cdots + \phi^*\left(d\bar{P}_m\right) \wedge \phi^*\left(d\bar{x}_m\right) = \\
&= d\left(\phi^* \bar{P}_1\right) \wedge d\phi_1 + \cdots + d\left(\phi^* \bar{P}_m\right) \wedge d\phi_m = \\
&= d\left(\phi^* \bar{P}_1\right) \wedge d\phi_1 + \cdots + d\left(\phi^* \bar{P}\right) \wedge d\phi_1 = \\
&= d\left(\phi^* \bar{\vartheta}\right)
\end{aligned}$$

4.2.2. Diferencial exterior de 1-formas en variedades

Si M es una m-variedad, fijado $\vartheta \in \Omega^1(M)$, y una carta $(\mathcal{U}, \varphi^{-1} = \mathbf{c} = (u_1, \dots u_m))$ podemos escribir

$$\vartheta = P_1 du_1 + \cdots + P_m du_m$$

y definir en $\mathcal{U}$ la diferencial exterior de ϑ como

$$\begin{aligned} d\vartheta &= dP_1 \wedge du_1 + \cdots + dP_m \wedge du_m = \\ &= \sum_{1 \le i < j \le m} \left(\frac{\partial P_j}{\partial x_i} - \frac{\partial P_i}{\partial x_j} \right) dx_i \wedge dx_j \end{aligned}$$

Sin embargo, no podemos garantizar a priori que esta definición no dependa de la carta tomada, por lo que deberíamos escribir $d_{\mathbf{c}}\vartheta$ en lugar de $d\vartheta$ para hacer constar esta eventual dependencia. Nótese que la representación analítica local en coordenadas $(u_1, \dots u_m)$ de $d_{\mathbf{c}}\vartheta$ es

$$\varphi^* (d_{\mathbf{c}}\vartheta) = d(\varphi^* \vartheta) \tag{35}$$

No obstante, el operador $d_{\mathbf{c}} : \Omega^1(\mathcal{U}) \to \Omega^2(\mathcal{U})$, viene caracterizado por verificar las propiedades 1) 2) y 3) del epígrafe anterior, es decir, cualquier otro operador $d_{\mathcal{U}} : \Omega^1(\mathcal{U}) \to \Omega^2(\mathcal{U})$ verificando 1) 2) y 3) coincide con $d_{\mathbf{c}}$. Además claramente si $\mathcal{V} \subset \mathcal{U}$ es un abierto entonces

$$d_{\mathcal{V}} (\vartheta|_{\mathcal{V}}) = (d_{\mathcal{U}}\vartheta)|_{\mathcal{V}} \text{ para } \vartheta \in \Omega^1(\mathcal{U})$$

Esto significa que para $\vartheta \in \Omega^1(M)$ podemos definir sin ambigüedad $d\vartheta \in \Omega^2(M)$ por la condición

$$(d\vartheta)|_{\mathcal{U}} = d_{\mathcal{U}} (\vartheta|_{\mathcal{U}})$$

para todo $\mathcal{U}$ dominio de carta.

Hemos probado por tanto el siguiente

Teorema Dada M superficie, existe un unico operador $d : \Omega^1(M) \to \Omega^2(M)$ verificando

1. d es $\mathbb{R}$-lineal
2. $d(df) = 0$ para todo $f \in \mathcal{F}(M)$
3. $d(f\vartheta) = df \wedge \vartheta + f d\vartheta$ para todo $f \in \mathcal{F}(M)$ y $\vartheta \in \Omega^1(M)$

Por otra parte, se verifica para $\vartheta \in \Omega^1(M)$, $X, Y \in \mathfrak{X}(\mathfrak{M})$

$$(d\vartheta)(X, Y) = X(\vartheta(Y)) - Y(\vartheta(X)) - \vartheta([X, Y]) \tag{36}$$

Se denomina a d diferencial exterior.

Una posibilidad para demostrar la existencia es utilizar la fórmula (36) y probar que verifica las propiedades 1), 2), y 3).

4.3. Diferencial exterior de $(m-1)$-formas

La generalización de la diferencial exterior $d:\Omega^{m-1}(M)\to\Omega^m(M)$ a variedades euclideas generales M con dimensión m es algo menos previsible, pero bastante natural.

4.3.1. Producto exterior de 1-formas por $(m-1)$-formas

Se trata de definir la m-forma producto exterior $\alpha\wedge\theta$ de una 1-forma α y una $(m-1)$-forma θ. Si a este producto se le exige la propiedad natural: $\alpha_1\wedge(\alpha_2\wedge\ldots\wedge\alpha_m)=\alpha_1\wedge\alpha_2\wedge\ldots\wedge\alpha_m$, (cuando las α_i son 1-formas) se concluye que la única alternativa es tomar $(\alpha\wedge\theta)(X_1,\ldots,X_m)=$

$$
\begin{aligned}
&=\alpha(X_1)\,\theta(X_2,X_3\ldots,X_m)-\alpha(X_2)\,\theta(X_1,X_3\ldots,X_m)\\
&+(-1)^{m-1}\alpha(X_m)\,\theta(X_1,X_2,\ldots,X_{m-1})\\
&=\sum_{i=1}^{m}(-1)^{i-1}\alpha(X_i)\,\theta\left(\ldots,\widehat{X_i},\ldots,\right)
\end{aligned}
$$

donde $\left(\ldots,\widehat{X_i},\ldots,\right)$ representa a $(X_1,X_2,\ldots,X_m)$ en donde se ha suprimido el elemento X_i que ocupa el lugar i-ésimo.

Claramente $\alpha\wedge\theta\in\Omega^m(M)$, y la aplicación $\Omega^1(M)\times\Omega^{m-1}(M)\overset{\wedge}{\to}\Omega^m(M)$ es $\mathcal{F}(M)$-lineal

4.3.2. Diferencial exterior de $(m-1)$-formas en el espacio euclideo.

una $(m-1)$-forma en un abierto $\mathbb{U}$ de $\mathbb{R}^m$se escribe

$$
\begin{aligned}
\vartheta&=P_1dx_2\wedge dx_3\wedge\cdots\wedge dx_m-P_2dx_1\wedge dx_3\cdots\wedge dx_m+\cdots\\
&+(-1)^{m-1}P_mdx_1\wedge\cdots\wedge dx_{m-1}\\
&=\sum_{i=1}^{m}(-1)^{i-1}P_i\cdots\wedge\widehat{dx_i}\wedge\cdots
\end{aligned}
$$

donde $\cdots\wedge\widehat{dx_i}\wedge\cdots$, representa la $(m-1)$-forma $dx_1\wedge dx_2\cdots\wedge dx_m$ en donde se ha suprimido el factor dx_i. Las $P_i=P_i(x_1,\ldots,x_m)$, son funciones diferenciables con valores reales, y podemos definir

$$
d\vartheta=\sum_{i=1}^{m}(-1)^{i-1}dP_i\wedge\left(\cdots\wedge\widehat{dx_i}\wedge\cdots\right)\tag{37}
$$

que tambien podemos escribir como

$$
d\vartheta=\left(\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial P_i}{\partial x_i}\right)dx_1\wedge dx_2\cdots\wedge dx_m\tag{38}
$$

La diferencial exterior como aplicación $d : \Omega^1(\mathbb{U}) \to \Omega^2(\mathbb{U})$ verifica las siguientes propiedades

(1) d es $\mathbb{R}-$lineal

(2) $d(df_1 \wedge \cdots \wedge df_{m-1}) = 0$ si $f_i \in \mathcal{F}(\mathbb{U})$

(3) $d(f\vartheta) = df \wedge \vartheta + fd\vartheta$ si $f \in \mathcal{F}(\mathbb{U})$, $\vartheta \in \Omega^{m-1}(\mathbb{U})$.

Por otra parte, se comprueba si $\phi = (\phi_1, \ldots, \phi_m) : \mathbb{U} \to \overline{\mathbb{U}}$ es un difeomorfismo entre abiertos de $\mathbb{R}^m$ con $\bar{x}_i = \phi_i(x_1, \ldots, x_m)$ entonces

$$d\left(\phi^*\bar{\vartheta}\right) = \phi^*\left(d\bar{\vartheta}\right) \text{ si } \bar{\vartheta} \in \Omega^1\left(\overline{\mathbb{U}}\right) \tag{39}$$

En efecto, tomando $\bar{\vartheta} = \sum_{i=1}^m (-1)^{i-1} \overline{P}_i \cdots \wedge \widehat{d\overline{x}_i} \wedge \cdots$ se tiene $\phi^*\left(\bar{\vartheta}\right) = \sum_{i=1}^m (-1)^{i-1} \left(\phi^*\overline{P}_i\right) \cdots \wedge \widehat{d\phi_i} \wedge \cdots$ y

$$\begin{aligned}
\phi^*\left(d\bar{\vartheta}\right) &= \phi^*\left(\sum_{i=1}^m (-1)^{i-1} d\overline{P}_i \wedge \left(\cdots \wedge \widehat{d\overline{x}_i} \wedge \cdots\right)\right) \\
&= \sum_{i=1}^m (-1)^{i-1} d\left(\phi^*\overline{P}_i\right) \wedge \cdots \wedge \widehat{d\phi_i} \wedge \cdots \\
&= d\left(\phi^*\bar{\vartheta}\right)
\end{aligned}$$

4.3.3. Diferencial exterior de $(m-1)$-formas en m-variedades

Si M es una m-variedad, fijado $\vartheta \in \Omega^{m-1}(M)$, y una carta $(\mathcal{U}, \varphi^{-1} = \mathbf{c} = (u_1, \ldots u_m))$ podemos escribir

$$\vartheta = \sum_{i=1}^m (-1)^{i-1} P_i \cdots \wedge \widehat{du_i} \wedge \cdots$$

y definir en $\mathcal{U}$ la diferencial exterior de ϑ como

$$\begin{aligned}
d\vartheta = d\vartheta &= \sum_{i=1}^m (-1)^{i-1} dP_i \wedge \left(\cdots \wedge \widehat{du_i} \wedge \cdots\right) = \\
&= d\vartheta = \left(\sum_{i=1}^m \frac{\partial P_i}{\partial u_i}\right) du_1 \wedge du_2 \cdots \wedge du_m
\end{aligned}$$

Sin embargo, no podemos garantizar a priori que esta definición no dependa de la carta tomada, por lo que deberíamos escribir $d_{\mathbf{c}}\vartheta$ en lugar de $d\vartheta$ para hacer constar esta eventual dependencia. Nótese que la representación analítica local en coordenadas $(u_1, \ldots u_m)$ de $d_{\mathbf{c}}\vartheta$ es

$$\varphi^*(d_{\mathbf{c}}\vartheta) = d(\varphi^*\vartheta) \tag{40}$$

No obstante, el operador $d_{\mathbf{c}} : \Omega^{m-1}(\mathcal{U}) \to \Omega^m(\mathcal{U})$, viene caracterizado por verificar las propiedades 1) 2) y 3) del epígrafe anterior, es decir, cualquier otro operador $d_{\mathcal{U}} : \Omega^1(\mathcal{U}) \to \Omega^2(\mathcal{U})$ verificando 1) 2) y 3) coincide con $d_{\mathbf{c}}$. Además claramente si $\mathcal{V} \subset \mathcal{U}$ es un abierto entonces

$$d_{\mathcal{V}}\left(\vartheta|_{\mathcal{V}}\right) = \left(d_{\mathcal{U}}\vartheta\right)|_{\mathcal{V}} \text{ para } \vartheta \in \Omega^{m-1}(\mathcal{U})$$

Esto significa que para $\vartheta \in \Omega^{m-1}(M)$ podemos definir sin ambigüedad $d\vartheta \in \Omega^2(M)$ por la condición

$$(d\vartheta)|_{\mathcal{U}} = d_{\mathcal{U}}\left(\vartheta|_{\mathcal{U}}\right)$$

para todo $\mathcal{U}$ dominio de carta.

Hemos probado por tanto el siguiente

Teorema Dada M superficie, existe un unico operador $d : \Omega^{m-1}(M) \to \Omega^m(M)$ verificando

1. d es $\mathbb{R}$-lineal
2. $d\left(df_1 \wedge \cdots \wedge df_{m-1}\right) = 0$ si $f_i \in \mathcal{F}(M)$
3. $d(f\vartheta) = df \wedge \vartheta + f d\vartheta$ para todo $f \in \mathcal{F}(M)$ y $\vartheta \in \Omega^1(M)$

Por otra parte, se verifica para $\vartheta \in \Omega^{m-1}(M)$, $X_1, \ldots X_m \in \mathfrak{X}(M)$

$$(d\vartheta)(X_1, \ldots, X_m) = \sum_{i=1}^{m} (-1)^{i-1} X_i\left(\vartheta(..., X_i, ...)\right) \tag{41}$$

$$+ \sum_{i<j} (-1)^{i+j} \vartheta\left([X_i, X_j], ..., \widehat{X_i}, ..., \widehat{X_j}, ...\right) \tag{42}$$

Se denomina a d diferencial exterior.

Una posibilidad para demostrar la existencia es utilizar la fórmula (41) y probar que verifica las propiedades 1), 2), y 3).

4.4. Pullback y diferencial exterior

Sea $\phi : M \to \bar{M}$ una aplicación diferenciable entre variedades, y $\overline{\vartheta}$ una forma exterior en $\bar{M}$. Contemplaremos dos posibles casos:

a) $\overline{\vartheta} \in \Omega^1\left(\bar{M}\right)$,

b) M y $\bar{M}$ de la misma dimensión m, y $\overline{\vartheta} \in \Omega^{m-1}\left(\bar{M}\right)$

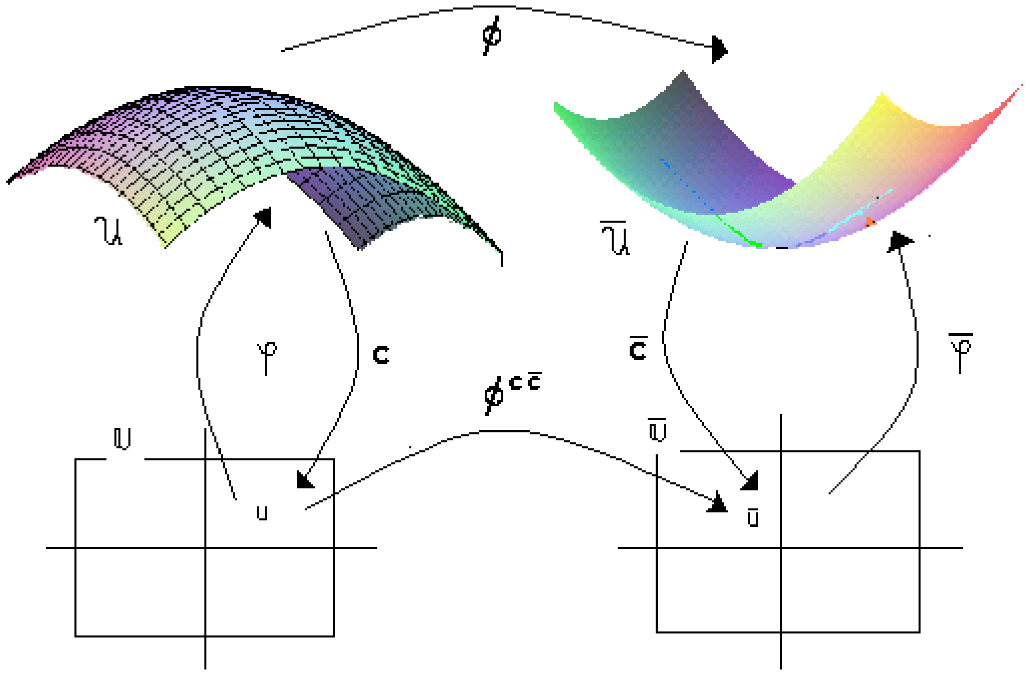
entonces se tiene

$$\phi^*\left(d\overline{\vartheta}\right) = d\left(\phi^*\overline{\vartheta}\right)$$

En efecto, dadas cartas $(\overline{\mathcal{U}}, \overline{\mathbf{c}} = (\overline{u}_1, \ldots, \overline{u}_{\overline{m}}))$, y $(\mathcal{U}, \mathbf{c}{=}(u_1, \ldots, u_m))$ con $p \in \mathcal{U}$ de manera que $\phi(\mathcal{U}) \subset \overline{\mathcal{U}}$, y la aplicación $\phi^{\mathbf{c}\overline{\mathbf{c}}} =: \mathbf{c}(\mathcal{U}) \to \overline{\mathbf{c}}(\overline{\mathcal{U}})$, que hace conmutativo el diagrama:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{U} \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "\mathbf{c}"'] & \overline{\mathcal{U}} \arrow[d, "\overline{\mathbf{c}}"] \\
\mathbf{c}(\mathcal{U}) \arrow[r, "\phi^{\mathbf{c}\overline{\mathbf{c}}}"'] & \overline{\mathbf{c}}(\overline{\mathcal{U}})
\end{tikzcd}$$

se tiene entonces



Probaremos que la representación analítica local de $\phi^*\left(d\overline{\vartheta}\right)$ coincide con la de $d\left(\phi^*\overline{\vartheta}\right)$:

$$\begin{aligned}
\varphi^*\left(\phi^*\left(d\overline{\vartheta}\right)\right) &= \left(\phi^{\mathbf{c}\overline{\mathbf{c}}}\right)^*\left(\overline{\varphi}^* d\overline{\vartheta}\right) \\
&= \left(\phi^{\mathbf{c}\overline{\mathbf{c}}}\right)^*\left(d\left(\overline{\varphi}^*\overline{\vartheta}\right)\right) \\
&= d\left(\left(\phi^{\mathbf{c}\overline{\mathbf{c}}}\right)^*\overline{\varphi}^*\overline{\vartheta}\right) \\
&= d\left(\varphi^*\left(\phi^*\overline{\vartheta}\right)\right) \\
&= \varphi^*\left(d\left(\phi^*\overline{\vartheta}\right)\right)
\end{aligned}$$

En donde se ha utilizado las igualdades (34) , (35) (40).y (39)

4.5. Cohomología de DeRham

Sea M una variedad. Consideremos para cada entero r el espacio $\Omega^r(M)$ de formas diferenciales exteriores de grado r, entendiendo que hemos convenido denominar $\Omega^0(M)$ al anillo de funciones $\mathcal{F}(M)$, y $\Omega^r(M) = \{0\}$

cuando $r > m$, o $r < 0$. Hemos definido el operador diferencial exterior $d : \Omega^1(M) \to \Omega^2(M)$. y $d : \Omega^{m-1}(M) \to \Omega^m(M)$. Convendremos en denominar también diferencial exterior, al operador de diferenciación de funciones $d : \mathcal{F}(M) = \Omega^0(M) \to \Omega^1(M)$ introducido en el epígrafe 2.2.1. Naturalmente $d : \Omega^r(M) \longrightarrow \Omega^{r+1}(M)$ se entiende que es la aplicación constante 0 en todos los demás casos. Las propiedades de la diferencial exterior, nos aseguran que d es en todo caso una aplicación $\mathbb{R}$-lineal, y $d^2 = d$.

En general se puede definir también una diferencial exterior $d : \Omega^r(M) \longrightarrow \Omega^{r+1}(M)$, $\mathbb{R}$-lineal, y con $d^2 = d$.

$$\Omega^{r-1}(M) \xrightarrow{d} \Omega^r(M) \xrightarrow{d} \Omega^{r+1}(M)$$

4.5.1. Formas cerradas y exactas

Se dirá que $\alpha \in \Omega^r(M)$ es cerrada si $d\alpha$=0, **y** *que $\beta \in \Omega^r(M)$ es exacta, si existe $\lambda \in \Omega^{r-1}(M)$ con $d\lambda = \beta$.*

Se denotará por $Z^r(M)$ al conjunto de formas cerradas de $\Omega^r(M)$, y por $B^r(M)$ al de las formas exactas.

Como d es $\mathbb{R}$-lineal y $d^2 = 0$ resulta que $B^r(M)$ y $Z^r(M)$ son subespacios vectoriales de $\Omega^r(M)$, y $B^r(M) \subseteq Z^r(M)$.

4.5.2. Cohomología de DeRham

El espacio vectorial cociente $H^r(M) = Z^r(M)/B^r(M)$ para $0 \leq r \leq 2$ se denomina r-ésimo grupo de De Rham de M. A la dimensión (real) b_r de $H^r(M)$ se denomina r-ésimo número de Betti.

4.5.3. Grupo cero de cohomología

En una variedad M el número de Betti b_0 de órden cero, es el número de componentes conexas de M.

Para probar que dos variedades difeomorfas tienen grupos de De Rham isomorfos necesitamos usar el resultado de (4.4)

4.5.4. La cohomología como invariante diferencial

Dada la aplicación diferenciable $\phi : M \to \bar{M}$, el pullback $\phi^* : \Omega^r(\bar{M}) \to \Omega^r(M)$ induce por paso al cociente una aplicación $\mathbb{R}$-lineal $\phi^* : H^r(\bar{M}) \to H^r(M)$, de forma que, si ψ:$\bar{M} \to \tilde{M}$ es otra aplicación diferenciable, se tiene: $(\psi \circ \phi)^* = \phi^* \circ \psi^*$, además, $id_M^* = id : H^r(M) \to H^r(M)$.

En particular, dos variedades difeomorfas tienen grupos de Cohomología de deRham isomorfos.

4.5.5. Primer grupo de cohomología

El primer grupo de cohomología de una superficie tiene especial importancia. De hecho contiene toda la información topológica y diferencial de una superfice compacta y conexa. Esto es así, pues se prueba que dos de tales superficies son difeomorfas, si sus correspondientes primeros grupos de cohomología son isomorfos.

Probaremos que $M = \mathbb{R}^2$ tiene primer grupo de cohomología trivial, es decir $Z^1(\mathbb{R}^2) \subset B^1(\mathbb{R}^2)$

Sea $\vartheta = Pdx + Qdy$ en una $1-$forma de $\mathbb{R}^2$, donde $P = P(x,y)$, y $Q = Q(x,y)$ son funciones diferenciables con valores reales. Supongamos que ϑ es cerrada. Esto significa que

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} \tag{43}$$

Probemos que existe una función $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ diferenciable tal que $dF = \vartheta$. La idea es la siguiente: Si tal F existiera, entonces para cada curva diferenciable $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^2$, con $\gamma(a) = 0 = (0,0)$, $\gamma(b) = p$ se tendría (ver (18))

$$\begin{aligned} \int_\gamma \vartheta &= \int_\gamma dF = \int_a^b \gamma^*(dF) = \int_a^b d(\gamma^* F) \\ &= \int_a^b (F \circ \gamma)'(t)dt = F(0) - F(p) \end{aligned}$$

y por tanto se tendría

$$F(p) = F(0) + \int_\gamma \vartheta$$

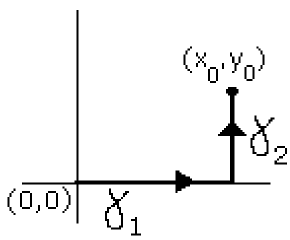
independientemente de la curva (diferenciable a trozos) γ en $\mathbb{R}^2$ que una el origen 0 con el punto $p \in \mathbb{R}^2$. Así que podemos proceder de esta manera:

Definimos $F(0,0) = 0$, y fijado $p = (x_0, y_0)$ debemos tomar

$$F(x_0, y_0) = \int_\gamma \vartheta = \int_{\gamma_1} \vartheta + \int_{\gamma_2} \vartheta$$

donde $\gamma = \gamma_1 \vee \gamma_2$ es la curva diferenciable a trozos que une $(0,0)$ con (x_0, y_0), siendo

$$\gamma_1 : \begin{cases} x = u \\ y = 0 \end{cases} \quad 0 \le u \le x_0, \; \gamma_2 : \begin{cases} x = x_0 \\ y = v \end{cases} \quad 0 \le v \le y_0$$



y queda entonces

$$\begin{aligned} F(x_0,y_0) &= \int_0^{x_0} \gamma_1^*\vartheta + \int_0^{y_0} \gamma_2^*\vartheta \\ &= \int_0^{x_0} P(u,0)du + \int_0^{y_0} Q(x_0,v)dv \end{aligned}$$

o sea

$$F(x,y) = \int_0^{x} P(u,0)du + \int_0^{y} Q(x,v)dv$$

por tanto

$$\left.\frac{\partial F}{\partial x}\right|_{(x,y)} = \frac{d}{dx}\int_0^{x} P(u,0)du + \int_0^{y} \left.\frac{\partial Q}{\partial x}\right|_{(x,v)} dv$$

y usando (43) y la regla de barrow, queda

$$\begin{aligned} \left.\frac{\partial F}{\partial x}\right|_{(x,y)} &= P(x,0) - \int_0^{y} \left.\frac{\partial P}{\partial y}\right|_{(x,v)} dv \\ &= P(x,0) - \left[P\left(x,v\right)\right]_{v=0}^{v=y} \\ &= P(x,y) \end{aligned}$$

análogamente se prueba que

$$\frac{\partial F}{\partial y} = Q$$

En virtud del resultado de 4.5.4, toda $1-$forma cerrada es exacta en cualquier espacio difeomorfo a $\mathbb{R}^2$. Teniendo en cuenta que cada punto de una superficie admite un entorno difeomorfo a $\mathbb{R}^2$ se tiene el siguiente resultado

4.5.6. Lema de Poincaré

Toda 1-forma cerrada de una superficie M es localmente exacta.

(Una $1-$forma $\vartheta \in \Omega^1(M)$ se dice localmente exacta, si en un entorno $\mathcal{U}$ de cada punto de M existe una $f \in \mathcal{F}(\mathcal{U})$ con $df = \vartheta$ en $\mathcal{U}$.)

4.6. Teorema de Stokes

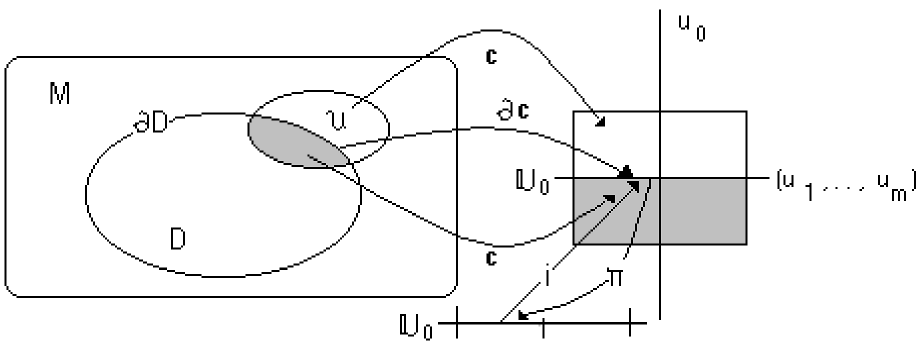
En lo sucesivo M será una variedad diferenciable con dimensión finita m $+1$, conexa y orientada por una forma de volumen ω. Como trabajamos con variedades orientadas sumergidas en $\mathbb{R}^n$ tenemos (por defecto) una forma de volumen canónica $\omega = \Omega_M$, que recordemos es la única que toma el valor 1 sobre las bases ortonormales positivas tangentes a M. Nuestro propósito es probar un resultado del tipo

$$\int_D d\vartheta = \int_{\partial D} \vartheta$$

donde ϑ es una m-forma en M, y D es un dominio *regular* y ∂D es su borde.Nos falta establecer una definición que precise cual es la condición de *regularidad* para el dominio D

4.6.1. Dominios Regulares

Un dominio regular es un subconjunto D de M que cerrado con interior $\overset{\circ}{D} \neq \emptyset$, cuya frontera ∂D verifica la siguiente propiedad: para todo punto $p \in \partial D$ existe una carta $(\mathcal{U}, \mathbf{c})$ positiva de M, con $\mathbf{c} = (u_0, \ldots, u_m), p \in \mathcal{U}, \mathbf{c}(\mathcal{U}) = (-a, a) \times \mathbb{U}_0$ y tal que $\mathbf{c}(\mathcal{U} \cap D) = (-a, 0] \times \mathbb{U}_0$. . Se dice entonces que $(\mathcal{U}, \mathbf{c})$ es *una carta de M adaptada a D*. La aplicación $\partial\mathbf{c} = (u_1, \ldots, u_m) : \mathcal{U} \cap \partial D \to \mathbb{U}_0$ define una carta sobre ∂D, y el conjunto de dichas cartas proporciona un atlas que da estructura a ∂D de hipersuperficie de M.



Obsérvese que se tiene el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} (\partial D) \cap \mathcal{U} & \xrightarrow{j} & \mathcal{U} \\ \partial\mathbf{c} \downarrow & & \downarrow \mathbf{c} \\ \mathbb{U}_0 & \xrightarrow[j]{} & (-a, a) \times \mathbb{U}_0 \end{array}$$

donde j denota las inclusiones canónicas. Esto prueba, que la aplicación $j : \partial D \to M$, es diferenciable, y $dj(p) : T_p\partial D \hookrightarrow T_pM$ es aplicación lineal inyectiva (canónica), que permite considerar a $T_p\partial D$ como hiperplano vectorial de T_pM.

También se llaman *cartas de M adaptadas* a D, aquellas cuyo dominio (conexo) está contenido en $\overset{\circ}{D}$ (*interiores* a D) o en el complementario de D (*exteriores a* D).Por razones de tipo técnico (para la demostración del teorema de Stokes), cuando M tiene una orientación, usaremos solo cartas adaptadas positivas $(\mathcal{U}, \mathbf{c} = (u_0, \ldots, u_m))$, donde $\mathbf{c}(\mathcal{U}) \subset [-1, 1]^{m+1}$ y si:

- Si $\mathcal{U}$ es interior a D se supondrá $\mathbf{c}(\mathcal{U}) \subset [-1,0] \times [-1,1]^m$
- Si $\mathcal{U}$ es exterior a D se supondrá $\mathbf{c}(\mathcal{U}) \subset [0,1] \times [-1,1]^m$

Nótese que con la definición que hemos adoptado, se verifica que para cada $p \in M$, existe $(\mathcal{U}, \mathbf{c})$ carta adaptada a D con $p \in \mathcal{U}$, y con estos dominios $\mathcal{U}$ puede construirse una base de entornos de p. Es fácil probar entonces el siguiente resultado:

Proposición 4.6.1.1 *Si D es un dominio regular de la variedad diferenciable M, existe entonces una partición diferenciable de la unidad $\{(\mathcal{U}_a, \mu_a) : a \in A\}$ formada por dominios $\mathcal{U}_a$ de cartas adaptadas.*

4.6.2. Vectores entrantes y salientes.

Si $p \in \partial D$, entonces $T_pM - T_p\partial D$, tiene dos componentes conexas. El vector $(\partial/\partial u_0)_p$ de la carta adaptada por p a D, define una componente que se denomina de vectores *salientes*. Los vectores de la otra componente, se denominan *entrantes*. El concepto de vector entrante o saliente, no depende de la carta adaptada a D ,y puede establecerse mediante el siguiente criterio geométrico:

Un vector $\xi \in T_pM - T_p\partial D$ es saliente si para toda curva diferenciable $\gamma : I \to M$ por p tal que $\gamma'(0) = \xi$ se verifica que existe $\varepsilon > 0$, tal que $\gamma(t) \in M - D$ para $0 < t < \varepsilon$.

Demostración:

Si $\xi = \sum_{i=0}^m \xi_i \left(\partial/\partial u_i\right)_p$ es saliente, entonces $\xi_0 > 0$, de forma que para $\gamma : I \to \mathcal{U}$ con $\gamma'(0) = \xi$, se verifica que $(u_0 \circ \gamma)'(0) = \xi_0 > 0$. Así por análisis elemental, podemos suponer que para cierto $\varepsilon > 0$, la función $u_0 \circ \gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R}$ es estrictamente creciente, y $u_0 \circ \gamma(t) > u_0 \circ \gamma(0) = 0$ (y en particular $\gamma(t) \notin D$) para $0 < t < \varepsilon$. Recíprocamente, si $\xi_0 < 0$, entonces para cualquier curva $\gamma : I \to \mathcal{U}$ con $\gamma'(0) = \xi$ no existe tal ε, (ya que la curva $u_0 \circ \gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R}$ es estrictamente decreciente a partir de cierto $\varepsilon > 0$) y si $\xi_0 = 0$, la curva $\gamma : I \to \mathcal{U}$ con $\gamma'(0) = \xi$ y $(u_0 \circ \gamma)(t) = 0\ \forall t$, está contenida en $\partial D \subset D$.. ■

Hay un resultado análogo para vectores entrantes.

La orientación establecida para ∂D responde entonces al siguiente criterio: Si $e_0 \in T_pM - T_p\partial D$ es un vector saliente, una base $(e_1, \ldots, e_m)$ de $T_p\partial D$ es positiva, si $(e_0, e_1, \ldots, e_m)$ es base positiva de M. De esta forma un vector v será saliente si y solo si $\omega(v, e_1, \ldots, e_m) > 0$.

De hecho, usando particiones diferenciables de la unidad, puede probarse que existe un campo $\nu \in \mathfrak{X}(M)$ tal que $\nu(p)$ es vector saliente en cada $p \in \partial D$.

4.6.3. Ejemplos

(1) *Considerese una función* $F : \mathbb{R}^{m+1} \to \mathbb{R}$*, diferenciable con* $N = F^{-1}(0) \neq \emptyset$*, y para cada* $p \in N$*,* $dF(p) \neq 0$*. Entonces* $D = \{x \in \mathbb{R}^{m+1} : F(x) \leq 0\}$ *es un dominio regular con frontera* $\partial D = N$*.*

En efecto, $\partial D \supseteq N$ ya que si $p \in N$, como $F(p) = 0$, y $dF(p) \neq 0$, se concluye que p no es extremo local de F, por tanto cada entorno $\mathbb{U}$ de p tiene puntos x con $F(x) > 0$, y otros con $F(x) < 0$. Así $\mathbb{U} \cap D \neq \emptyset$ y $\mathbb{U} \cap (\mathbb{R}^{m+1} - D) \neq \emptyset$, con lo que $p \in \partial D$. Recíprocamente, si $F(p) \neq 0$, por razones de continuidad, es $F(x) \neq 0$ para todo x de un entorno $\mathbb{U}$ de p. Así o bien $\mathbb{U} \subset D$ o bien $\mathbb{U} \subset \mathbb{R}^{m+1} - D$ por lo que $p \notin \partial D$.

Supóngase $p \in \partial D$, y $(\partial F/\partial x_0)(p) \neq 0$, por el teorema de la función implícita (ver **??**, y la figura) se concluye que:

a) Existe $\varepsilon > 0$, $\widetilde{\Omega}$ abierto conexo de $\mathbb{R}^m$ tal que $p \in \Omega = (p_0 - \varepsilon, p_0 + \varepsilon) \times \widetilde{\Omega}$

b) Existe una función $\zeta : \widetilde{\Omega} \to (p_0 - \varepsilon, p_0 + \varepsilon) \subset \mathbb{R}$ diferenciable tal que

$$(\partial D) \cap \Omega = \{(\zeta(x_1, \ldots x_m), x_1, \ldots x_m) : (x_1, \ldots x_m) \in \Omega\}$$

y $\Omega - ((\partial D) \cap \Omega)$ tiene exactamente dos componentes conexas:

$$\Omega^- = \{(x_0, \ldots x_m) \in \mathbb{V} : x_0 - \zeta(x_1, \ldots x_m) < 0\}$$

$$\Omega^+ = \{(x_0, \ldots x_m) \in \mathbb{V} : x_0 - \zeta(x_1, \ldots x_m) > 0\}$$

como $F(x) \neq 0$ para todo $x \in \Omega^- \cup \Omega^+$. Si por ejemplo es $F(x) < 0$ para $x \in \Omega^-$, restringiendo Ω si fuera necesario podemos suponer que las ecuaciones :

$$\mathbf{c} : \begin{cases} u_0 = x_0 - \zeta(x_1, \ldots x_m) \\ u_1 = x_1 \\ \vdots \\ u_m = x_m \end{cases}$$

y definen una carta $\mathbf{c} = (u_0, \ldots u_m) : \Omega \to \mathbb{U} = (-a, a) \times \mathbb{U}_0$ que por construcción está adaptada a D.

(2) El ejemplo anterior, puede generalizarse sustituyendo $\mathbb{R}^{m+1}$ por una variedad M de dimensión $m + 1$:

Si $F : M \to \mathbb{R}$*, diferenciable con* $N = F^{-1}(0) \neq \emptyset$*, y para cada* $p \in N$*,* $dF(p) \neq 0$*. Entonces* $D = \{x \in \mathbb{R}^{m+1} : F(x) \leq 0\}$ *es un dominio regular con frontera* $\partial D = N$*.*

En efecto, si $p \in \partial D$ basta con empezar tomando una carta en torno a p con imagen $\mathbb{R}^{m+1}$.

4.6.4. Teorema de Stokes

Sea D *un dominio regular de* M,y $\vartheta \in \Omega^{m-1}(M)$*. Si* D *es compacto o* ϑ *tiene soporte compacto. Entonces:*

$$\int_D d\vartheta = \int_{\partial D} j^* \vartheta \tag{44}$$

, donde se entiende que $\int_{\partial D} \vartheta$ significa exactamente la integral de la restricción de ϑ a ∂D, es decir $\int_{\partial D} j^*\vartheta$ donde $j : \partial D \to M$ *es la inclusión. En particular, si* ∂D o $sop(\vartheta) \cap \partial D$ *es el vacio se tiene:* $\int_D d\vartheta = 0$.

Observación 4.6.4.1 *Si D es compacto, por el lema 3.2.2,podemos construir un abierto $\mathcal{U} \supset D$, $\mu \in \mathfrak{F}(M)$ $\mu \geq 0$, $\mu \mid \mathcal{U} = 1$, y sop μ compacto, y es equivalente trabajar con $\mu\vartheta$, cuyo soporte es compacto contenido en sop μ. Por otra parte, nótese que $sop(d\vartheta) \subset sop(\vartheta)$, ya que si $x \notin sop(\vartheta)$, existe un entorno $\mathcal{U}^x$ de x, en donde ϑ es identicamente nula, por tanto $d\vartheta = 0$ en $\mathcal{U}^x$, y $x \notin sop(d\vartheta)$.*

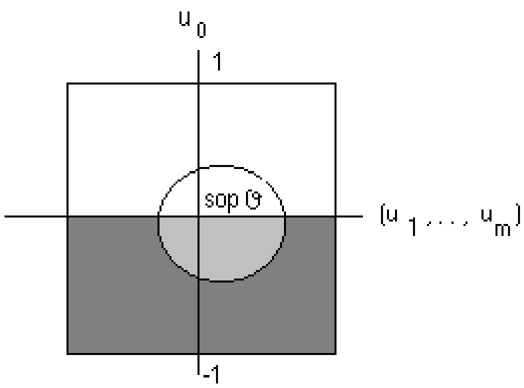
Observación 4.6.4.2 *Una manera más estética (y limpia) de escribir la fórmula (44) es sencillamente*

$$\int_D d\vartheta = \int_{\partial D} \vartheta \tag{45}$$

en donde se sobrentiende que en la segunda integral la $(m-1)$-forma ϑ está restringida a ∂D.

Probaremos pues el teorema suponiendo que *sop* ϑ compacto. Primero analizaremos algunos particulares

Caso 1 $M = \mathbb{R}^{m+1}$, $D = \mathbb{H}^{m+1} = \{(u_0, \ldots, u_m) : u_0 \leq 0\}$, $sop\vartheta \subset [-1,1]^{m+1}$.



Supóngase para simplificar $m = 2$, y sea $\vartheta = \vartheta_0 du_1 \wedge du_2 - \vartheta_1 du_0 \wedge du_2 + \vartheta_2 du_0 \wedge du_1$, entonces

$$d\vartheta = \left(\frac{\partial \vartheta_0}{\partial u_0} + \frac{\partial \vartheta_1}{\partial u_1} + \frac{\partial \vartheta_2}{\partial u_2} \right) du_0 \wedge du_1 \wedge du_2$$

si el soporte de ϑ está contenido en $Q = [-1,1]^3$, entonces $sop(d\vartheta) \subset sop(\vartheta) \subset Q$ y se tiene en particular que para $i = 0, 1, 2$:

$$\int_{-1}^{1} \frac{\partial \vartheta_i}{\partial ui} du^i = [\vartheta_i(u_0, u_1, u_2]_{-1}^{1} = 0$$

por tanto:

$$\begin{aligned}
\int_D d\vartheta &= \int_{-1}^{0} \left[\int_{-1}^{1} \left(\int_{-1}^{1} \frac{\partial \vartheta_2}{\partial u_2} du_2 + \int_{-1}^{1} \left(\frac{\partial \vartheta_0}{\partial u_0} + \frac{\partial \vartheta_1}{\partial u_1} \right) du_2 \right) du_1 \right] du_0 = \\
&= \int_{-1}^{0} \left[\int_{-1}^{1} \left(\int_{-1}^{1} \frac{\partial \vartheta_1}{\partial u_1} du_1 + \int_{-1}^{1} \frac{\partial \vartheta_0}{\partial u_0} du_1 \right) du_2 \right] du_0 = \\
&= \int_{-1}^{1} \left[\int_{-1}^{1} \left(\int_{-1}^{0} \frac{\partial \vartheta_0}{\partial u_0} du_0 \right) du_1 \right] du_2 \\
&= \int_{-1}^{1} \left[\int_{-1}^{1} \left(\vartheta_0(0, u_1, u_2) - \vartheta_0(-1, u_1, u_2) \right) du_1 \right] du_2 \\
&= \int_{-1}^{1} \left[\int_{-1}^{1} \vartheta_0(0, u_1, u_2) du_1 \right] du_2 = \int_{\partial D} i^* \vartheta
\end{aligned}$$

ya que $j^* \vartheta = \vartheta_0(0, u_1, u_2) du_1$. Nótese por último que si $Sop(\vartheta) \cap \partial Q = \emptyset$, entonces:

$$\vartheta_0(0, u_1, u_2) = \vartheta_0(-1, u_1, u_2) = 0 \text{ y } \int_D d\vartheta = 0 = \int_{\partial D} i^* \vartheta$$

Caso 2: sop (ϑ) contenido en una carta adaptada $(\mathcal{U}, \mathbf{c} = (u_0, \ldots, u_m))$.

Sabemos que *sop* $((\mathbf{c}^{-1})^*(\vartheta)) \subset \mathbf{c}(\mathcal{U}) \subset [-1,1]^{m+1}$.

Supongamos que $\mathcal{U} \cap \partial D \neq \emptyset$. Como $\mathbf{c}(D \cap \mathcal{U}) = (-a, 0] \times \mathbb{U}_0 \subset \mathbb{H}^{m+1}$, podemos aplicar el caso 1 la la forma $(\mathbf{c}^{-1})^*(\vartheta)$, quedando:

$$\begin{aligned}
\int_D d\vartheta = \int_{D \cap \mathcal{U}} d\vartheta &= \int_{H^{m+1} \cap \mathbf{c}(\mathcal{U})} \left(\mathbf{c}^{-1} \right)^* (d\vartheta) = \\
&= \int_{H^{m+1}} \left(\mathbf{c}^{-1} \right)^* (d\vartheta) = \int_{\partial H^{m+1}} j^* \left(\mathbf{c}^{-1} \right)^* \vartheta = \\
&= \int_{\partial H^{m+1}} \left(\mathbf{c}^{-1} \circ j \right)^* \vartheta = \int_{\mathbb{U}_0} \left(\partial \mathbf{c}^{-1} \right)^* j^* \vartheta = \\
&= \int_{\mathcal{U} \cap \partial D} j^* \vartheta = \int_{\partial D} j^* \vartheta
\end{aligned}$$

ya que $\mathbf{c} \circ j = j \circ \partial \mathbf{c}$.

Si $\mathcal{U} \cap \partial D = \emptyset$ entonces si $\mathcal{U} \cap D = \emptyset$ es evidente que $\int_D d\vartheta = 0 = \int_{\partial D} j^* \vartheta$. En el caso $\mathcal{U} \subset \overset{\circ}{D}$, podemos remitirnos al caso 1, (al final) cuando $sop(\mathbf{c}^{-1})^*(\vartheta) \cap (\partial Q) = \emptyset$ para concluir que ambas integrales son nulas.

Caso 3: (Caso general) Tomemos $(\mathcal{U}_i, \mu_i)_{i\in I}$ una partición diferenciable de la unidad, tal que cada $\mathcal{U}_i$ es dominio de una carta de M adaptada a D. Como $sop(\vartheta)$ es compacto, existe un conjunto finito $F = \{1, 2, \ldots, m\} \subseteq I$ tal que $sop(\vartheta)$ está contenido en la unión de los $(\mathcal{U}_i)_{i\in F}$. Si $\vartheta_i = \mu_i\vartheta$ entonces según el epígrafe 3.2.1 teniendo en cuenta que $sop(\vartheta_i) \subseteq \mathcal{U}_i$, $i = 1, \ldots, m$ se tiene: $\vartheta = \sum_{i=1}^m \vartheta_i$, $d\vartheta = \sum_{i=1}^m d\vartheta_i$, y

$$\int_D d\vartheta = \sum_{i=1}^m \int_D d\vartheta_i = \sum_{i=1}^m \int_{\partial D} j^*\vartheta_i =$$
$$= \int_{\partial D} \sum_{i=1}^m j^* \vartheta_i = \int_{\partial D} j^*\vartheta$$

4.7. Teoremas Clásicos tipo Stokes.

4.7.1. Teorema de la Divergencia de Gauss.

Producto interior Sea X un campo de la variedad diferenciable M con dimensión m, y $\omega \in \Omega^m(M)$ una forma de grado máximo Se denomina *producto interior* de X por ω a la $(m-1)$-forma $i_X\omega$ definida por

$$(i_X\omega)(X_2, \ldots X_m) = \omega(X, X_2, \ldots X_m) \tag{46}$$

Es facil probar que $i_X : \Omega^m(M) \to \Omega^{m-1}(M)$ es $\mathcal{F}(M)$-lineal. Además, si $f_i \in \mathcal{F}(M)$ se tiene

$$i_X(df_1 \wedge \ldots \wedge df_m) = \sum_{j=1}^m (-1)^{i-1} X(f_i) \left(\ldots \wedge \widehat{df_i} \wedge \ldots\right) \tag{47}$$

Operador Divergencia. Sea X un campo de una variedad M dotada de una forma de volumen ω. La diferencial del producto interior $d(i_X\omega)$, es una m-forma, y por tanto múltiplo de la forma de volumen ω. A la única función $div\ X$, que verifica la identidad:

$$d(i_X\omega) = (div\ X)\omega \tag{48}$$

se denomina a *divergencia* de X (respecto a ω).

Observese que tomando $M = \mathbb{R}^m$, $\omega = dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_m$, $X = \sum X_i\partial/\partial x_i$ se tiene usando (47) y (38), la fórmula clásica:

$$div\ X = \sum_{i=1}^m \frac{\partial X_i}{\partial x_i} \tag{49}$$

Flujo de un campo a traves de una superficie Sea S una hipersuperficie orientada compacta de la variedad riemanniana orientada M, con vector normal unitario ν. Si Ω_M es la forma de volumen canónica en M inducida por la métrica, entonces la forma de volumen canónica Ω_S en S, está relacionada con Ω_M por la igualdad:

$$j_S^* (i_\nu \Omega_M) = \Omega_S$$

siendo $j_S : S \to M$ la inclusión canónica.

Se denomina flujo de un campo X sobre S, a la integral:

$$\int_S < X, \nu > \Omega_S$$

Teorema de Gauss.

Supuesto que S es el borde de un dominio regular D compacto de M, y X es un campo de vectores en M. Se verifica entonces:

$$\int_D (divX)\Omega_M = \int_S < X, \nu > \Omega_S$$

Demostración:

Probaremos primero que si ν es el campo normal unitario (saliente) de S y $j_S : S \hookrightarrow M$ entonces

$$j_S^*(i_X \Omega_M) = \langle X, \nu \rangle \, \Omega_S \tag{50}$$

En efecto, para cada $x \in S$ se tiene $X(x) =< X(x), \nu(x) > \nu(x) + Y(x)$, donde Y es un campo tangente a S. Fijados $X_1, .., X_m \in T_x S$, como $(Y(x), X_1, .., X_m)$ es linealmente dependiente $\Omega_M (Y(x), X_1, .., X_m) = 0$ por tanto:

$$\begin{aligned} \Omega_M(X(x), X_1, .., X_m) &= \Omega_M(\nu(x), X_1, .., X_m) \\ &= \langle X(x), \nu(x) \rangle \, (i_\nu \Omega_M)(X_1, .., X_m) \\ &=< X(x), \nu(x) > \Omega_S((X_1, .., X_m) \end{aligned}$$

Por otra parte, $(div\ X)\Omega_M = d(i_x \Omega_M)$ con lo que por el teorema de Stokes y el lema anterior se tiene:

$$\int_D (divX)\Omega_M = \int_D d(i_X \Omega_M) = \int_S j_S^*(i_X \Omega_M) = \int_S < X, \nu > \Omega_S$$

4.7.2. Integrales de linea

Sea L una subvariedad unidimensional de la variedad riemanniana orientada M. L es necesariamente difeomorfa a $\mathbb{R}$ o a $\mathbb{S}^1$, por lo que es orientable, y es posible elegir un campo τ tangente a L con $|\tau| = 1$, τ define entonces una orientación en L, respecto a la cual $\tau(u)$ es base ortonormal positiva para todo $u \in L$, y la forma dl de L definida por la condición $dl(\tau) = 1$, define la forma de volumen canónica asociada a la variedad riemanniana L orientada por el vector τ.

Supongamos $\gamma : (a, b) \to \mathcal{U}_L = \mathcal{U} \cap L \subset M$ un difeomorfismo que preserva la orientación. Esto significa que:

$$\gamma'(t) \neq 0 \text{ ,y } \gamma'(t) = \tau(\gamma(t)) \, |\gamma'(t)| \ \ , t \in (a, b).$$

y se tiene la identidad

$$j_L \circ \gamma = \gamma$$

Vamos a suponer que γ se "extiende" a $\gamma : [a, b] \to L \subset M$ de forma difenciable y que $L = \gamma(a, b)$ o bién $L = \gamma[a, b]$. Si α es una 1-forma de M entonces $j_L^* \alpha$ es 1-forma de L, y tiene sentido la integral $\int j_L^* \alpha$. Como el soporte de $j_L^* \alpha$ está contenido en una carta orientada $\mathcal{U}_L$ se tiene:

$$\int_L j_L^* \alpha = \int_L \gamma^*(j_L^* \alpha) = \int_a^b (j_L \gamma)^* \alpha = \int_a^b \gamma^* \alpha \tag{51}$$

Por otra parte se tiene:

$$\gamma^*(dl) = |\gamma'(t)| \, dt \tag{52}$$

ya que:

$$\gamma^*(dl) = \left((\gamma^*(dl)) \left(\frac{\partial}{\partial t} \right) \right) dt = dl \left(d\gamma(t)) \left(\frac{\partial}{\partial t} \right) \right) dt =$$
$$= dl(\gamma'(t))dt = dl(|\gamma'(t|)\tau)dt = |\gamma'(t)| \, dt$$

Por tanto:

$$\int_L dl = \int_L \gamma^*(dl) = \int_a^b |\gamma'(t)| \, dt$$

Sea X es un campo de M, se define la *circulación* de X a lo largo de L como $\int_L < X, \tau > dl$. Se tiene entonces:

$$\int_L < X, \tau > dl = \int_a^b < X, \gamma'(t) > dt$$

ya que usando (52)

$$\int_L < X, \tau > dl = \int_a^b < X, \tau > \circ \gamma(t) \gamma^*(dl) =$$
$$= \int_a^b < X, \tau > \circ \gamma(t) \, |\gamma'(t)| \, dt = \int_a^b < X, \gamma'(t) > dt$$

4.7.3. Operador Rotacional

Sea M variedad Riemanniana tridimensional orientada, y sea $\Omega_M = \omega^3$ su forma de volumen canónica.

Cada campo $X \in \mathfrak{X}(M)$ tiene canónicamente asociada una 2-forma $\omega_X^2 = i_X(dv)$, y una 1-forma ω_X^1, que es la métricamente equivalente a X (i.e. $\omega_X^1(Y) = < X, Y >$ para todo $Y \in \mathfrak{X}(M)$).

Las aplicaciones $\mathfrak{X}(M) \ni X \to \in \omega_X^2 \in \Omega^2(M)$, $\mathfrak{X}(M) \ni X \to \omega_X^1 \in \Omega^1(M)$, son isomorfismos $\mathfrak{F}(M)$- lineales, y permiten escribir de forma compacta la acción de los operadores diferenciales clásicos. Así, si $f \in \mathfrak{F}(M)$, $X \in \mathfrak{X}(M)$ se tiene:

$$\omega_{gradf}^1 = df, \; d\omega_X^1 = \omega_{rot(X)}^2, \; d\omega_X^2 = div(X)\omega^3$$

4.7.4. Cálculo de la circulación

Sea L una subvariedad unidimensional de la variedad riemanniana orientada M como en el epígrafe 4.7.2 y parametrizada como allí por γ. Si X es un campo en M, se tiene la identidad:

$$\int_L j_L^*(\omega_X^1) = \int_L < X, \tau > dl$$

Demostración:

$$\int_L j_L^*(\omega_X^1) = \int_L [j_L^*(\omega_X^1)](\tau) dl = \int_L \omega_X^1(\tau) dl = \int_L < X, \tau > dl$$

4.7.5. Teorema clásico de Stokes.

Sea Σ una superficie orientada de una variedad riemanniana tridimensional M, y *S un dominio regular de Σ con borde $\partial S = L$,* y *$S \cup L$ compacto. Denotamos respectivamente por ω^3, ds , dl, las formas de volumen canónicas asociadas* a *M, S,* y *L. ν es el vector normal unitario* a *S,*y *τ el tangente unitario a L. ambos compatibles con las orientaciones establecidas. Finalmente sea $\gamma : [a, b] \to L$ con $\gamma(a) = \gamma(b)$,*y *$\gamma : (a, b) \to M$ parametrización positiva de L. Si X es un campo en M, entonces se verifica:*

$$\int_S < rotX, \nu > ds = \int_L < X, \tau > dl = \int_a^b < X, \gamma' > dt$$

Demostración:

Sean j_S, j_L, las correspondientes inclusiones de S y L en M,y $j : L \hookrightarrow S$.

Usando la definición de rotacional, y la identidad (50), se tiene:

$$dj_S^*(\omega_X^1) = j_S^*(d(\omega_X^1)) = j_S^*(\omega_{rotX}) = j_S^*[i_{rotX}(\omega^3)] =< rotX, \nu > ds$$

Por tanto:

$$\int_S < rotX, \nu > ds = \int_S dj_S^*(\omega_X^1) = \int_L j^*(j_S^*(\omega_X^1)) = \int (i_S \circ j)^*(\omega_X^1) = \int_L j_L^*(\omega_X^1)$$

Por una parte se tiene usando el resultado de 4.7.4:

$$\int < rotX, \nu > ds = \int_L j_L^*(\omega_X^1) = \int < X, \tau > dl = \int_a^b < X, \gamma' > dt$$

El teorema clasico de Stokes, puede parafrasearse así :

El flujo del rotacional de un campo sobre una dominio superficial compacto, coincide con la circulación del campo a lo largo de su borde

4.8. APLICACIONES INMENDIATAS DEL TEOREMA STOKES.

El Teorema de Stokes constituye una herramienta fundamental para la obtención de algunos de los teoremas más profundos de la Geometría. He aquí una breve lista:

A) El Teorema de los residuos de variable compleja.

B) El teorema de Gauss-Bonnet.

C) El teorema de deRham.

D) El Teorema de dualidad de Poincaré.

E) El teorema del punto fijo de Brauwer . . . etc.

Todos estos resultados requieren de cierta elaboración previa que está fuera del alcance de nuestros objetivos. Nuestra pretensión, es establecer algunos resultados geometricamente interesantes, que utilizando el teorema de Stokes no requieran gran elaboración. Por ejemplo:

4.8.1. $H^m(M) \neq 0$ si M es compacta

Si M es una variedad compacta y orientable, entonces $H^m(M) \neq 0$.

Demostración:

En efecto, si ω es forma de volumen en M, entonces ω no puede ser exacta, ya que si $\omega = d\vartheta$ se tendra

$$\int_M \omega = \int_M d\vartheta = \int_{\partial M} j^*\vartheta = 0$$

ya que $\partial M{=}\emptyset$. Pero el volumen de un abierto es siempre mayor que cero.

4.8.2. Sobre las funciones armónicas

Si M es una variedad y f es una función diferenciable, se llama *Laplaciano* de f a la función.

$$\Delta f = div(grad(f))$$

La función f se dice *armónica,* si su Laplaciano es cero es nulo.

Teorema

Sea D un dominio regular con frontera $S = \partial D$ de una variedad orientada M, y *sea $\mathcal{U}$ abierto que contiene* a $D \cup S$,y $f \in \mathfrak{F}(\mathcal{U})$ *una función armónica con soporte compacto. Entonces, si $S = \emptyset$, f es necesariamente constante en D. Si $S \neq \emptyset$,* y $f \mid S = 0$, *se concluye que* $f \mid D = 0$.

Demostración: Como

$$div(fgrad(f)) = fdiv(grad(f)) + (gradf)(f) = f\Delta f + < gradf, gradf >$$

y $\Delta f = 0$ se tiene:

$$div(fgrad(f)) = |gradf|^2$$

Usando el teorema de la divergencia, queda

$$\int_D |gradf|^2 \, \Omega_M = \int_D div(fgrad(f))\Omega_M = \int_S f < gradf, \nu > \Omega_S$$

donde ν es el campo exterior normal unitario en S. Si $S = \emptyset$ o $f = 0$ en S, se concluye que

$$\int_D |gradf|^2 \, \Omega_M = 0$$

en consecuencia, $df = 0$,y f es constante en cada componente conexa de D.

En el caso $S \neq \emptyset$, se deduce por continuidad, $f = 0$

4.8.3. Teorema del punto fijo de Brauwer

Sea $\mathbb{V}$ abierto de $\mathbb{R}^{m+1}$ que contiene a la bola

$$\mathbb{B}^* = \{(u_0, \ldots, u_m) : \Sigma u_i^2 \leq 1\}$$

y sea $\phi : \mathbb{V} \to \mathbb{R}^{m+1}$ diferenciable, con $\phi(\mathbb{B}^*) = \mathbb{B}^*$. Entonces ϕ tiene necesariamente un punto fijo en $\mathbb{B}^*$.

Demostración:

Si ϕ no tuviera un punto fijo en $\mathbb{B}^*$, entonces existe un abierto $\mathcal{U}$ de $\mathbb{R}^{m+1}$ que contiene a $\mathbb{B}^*$, una función diferenciable $f : \mathcal{U} \to \mathbb{S} \subset \mathbb{R}^{m+1}$, en donde $\mathbb{S} = \partial \mathbb{B}^* = \{(u_0, \ldots, u_m) : \Sigma u_i^2 = 1\}$ tal que $f \mid \mathbb{S} = id$.

La función f se construye de la siguiente forma:

$$f(x) = \{\lambda x + (1 - \lambda) g(x) : \lambda > 0\} \cap \mathbb{S}$$

y esto es contradictorio, por la siguiente:

Sean $(f_0, \ldots, f_m)$ las componentes de f. Como $f \mid \mathbb{S} = id$ se tiene $j_{\mathbb{S}}^* x_i = f_i$ por lo que se verifica la igualdad:

$$\int j_{\mathbb{S}}^*(x_0 dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_m) = \int j_{\mathbb{S}}^*(f_0 df_1 \wedge \ldots \wedge df_m)$$

aplicando a cada miembro el teorema de Stokes, se concluye:

$$0 < \int_D dx_0 \wedge dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_m) = \int_D df_0 \wedge df_1 \wedge \ldots \wedge df_m$$

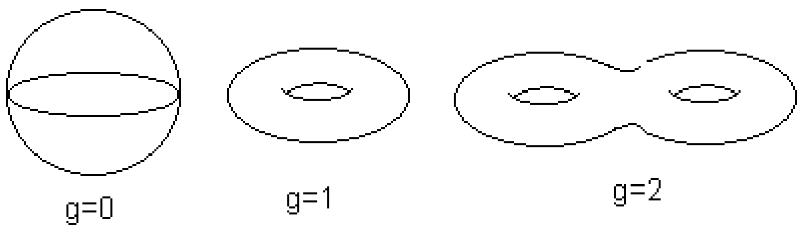
Pero esto es contradictorio, ya que $df_0 \wedge df_1 \wedge \ldots \wedge df_m = 0$, pues como $im(f) \subseteq \mathbb{S}$, se tiene $df(x) : T_x\mathbb{R}^{m+1} \to T_{f(x)}\mathbb{S}$ tiene rango m y $(df_0, df_1, \ldots, df_m)$ son linealmente dependientes

5. Teorema de Gauss-Bonnet (Vers. Poincaré-Hopf)

Estamos ahora en condiciones de comprender el enunciado de algunos bellos teoremas con nombre propio, que muestran la fuerte relación que existe entre la curvatura y la topología de la superficie.

Conocemos el significado y sabemos calcular la integral de funciones sobre recintos de una superficie M. En el caso de que la superficie sea compacta, es posible definir la integral de una función continua sobre toda la superficie. La integral de la curvatura de Gauss $K : M \to \mathbb{R}$ se denomina curvatura íntegra der M.

Uno de los resultados más profundos y paradigmáticos de la teoría global intrínseca de superficies lo constituye el teorema de Gauss-Bonnet, que relaciona la *Curvatura Íntegra* de la superficie compacta orientada M con su "género" (topológico) g. El género es un entero que determina de hecho la clase topológica de la superficie, y que intuitivamente cuenta el número de agujeros: La esfera tiene genero cero, el toro uno,...etc.



De hecho se puede probar que el género g coincide con la dimensión del primer grupo de cohomología de deRham de M.

Se llama característica de Euler de la superficie M al número χ_M dado por

$$\chi_M = 2 - 2g$$

La característica de Euler de una superficie puede calcularse en la práctica por alguno de los siguientes métodos:

a) Usando una triangulación cualquiera de la superfice.

b) Calculando su curvatura íntegra

c) Determinando la dimensión del primer grupo de Cohomología de DeRham

d) Usando cualquier campo con ceros aislados.

El método a) es estrictamente topológico. El género se obtiene por medio de una función determinada que depende del número de caras aristas y vértices de la triangulación (ver (64))

El método b) viene avalado por el Teorema de Gauss-Bonnet que establece

$$\int_M K\Omega = 2\pi\chi_M$$

El método d) constituye la versión Poincaré-Hopf del teorema de Gauss-Bonnet, que es lo que nos proponemos desarrollar en esta sección.

5.1. Una revisión de la teoría de superficies[4]

Se trata en esta primera sección, de aproximarse rápidamente al manejo y comprensión de ciertos conceptos relevantes de la Geometría Diferencial de Superficies, que intervienen en el resultado y la demostración del teorema de Poincaré-Hopf. Nos ha parecido aconsejable hacer esta aproximación usando el método de la referencia móvil de Cartan. El motivo, es que este planteamiento utiliza al máximo una supuestamente conocida teoría de formas exteriores y diferencial exterior en superficies, y por otra parte requiere de mínimos recuerdos del curso de anterior. Además permite obtener rápidamente la fórmula (54) de la pág 91. Con ella se demuestra el teorema Egregio de Gauss, y será crucial en el de Poincaré-Hopf.

En lo que sigue M es una superficie sumergida en $\mathbb{R}^3$ y denotamos por $\iota_M : M \hookrightarrow \mathbb{R}^3$ la inclusión canónica. En cada punto $p \in M$, el espacio tangente a M en p, T_pM, se considera sumergido en $T_p\mathbb{R}^3$. No obstante en ocasiones $T_p\mathbb{R}^3$podrá identificarse con $\mathbb{R}^3$ y T_pM con un plano vectorial de $\mathbb{R}^3$ Las coordenadas canónicas de $\mathbb{R}^3$ serán denotadas por (x, y, z) o (x_1, x_2, x_3) indistintamente, y entonces $(\partial/\partial x, \partial/\partial y, \partial/\partial z)$ representa la base canónica de $\mathbb{R}^3$ y (dx, dy, dz) su base dual. Observese que $\partial/\partial x_i$ puede interpretarse como campo constante en $\mathbb{R}^3$ de forma que $\Big((\partial/\partial x)_p\,, (\partial/\partial y)_p\,, (\partial/\partial z)_p\Big)$ es base canónica en $T_p\mathbb{R}^3$, y $(dx(p), dy(p), dz(p))$ es su base dual.

Finalmente se denota $\Omega^r(M)$ $(r = 0, 1, 2)$ al espacio de las formas exteriores de grado r sobre M, y

$$\mathcal{F}(M) = \Omega^0(M) = \{f : M \to \mathbb{R}, \text{ diferenciables}\}$$

es el anillo de funciones.

5.1.1. Orientación y volumen

Recordemos que una superficie M en $\mathbb{R}^3$ se dice orientable si admite un campo ν con $\langle \nu, \nu \rangle = 1$, y normal a M, es decir, para todo $p \in M$:

$$T_pM = \left\{\xi \in T_p\mathbb{R}^3 : \langle \nu(p), \xi \rangle = 0\right\}$$

[4]Este sección no es necesaria para aquellos lectores que tengan reciente un curso clásico de Geometría diferencial de curvas y superficies.

Se denomina a ν campo unitario normal a M, y se determina una orientación en M. Recordemos que si M es conexa admite exactamente dos orientaciones la de ν y la de $-\nu$.

La forma de volumen canónica $\Omega \in \Omega^2(M)$ es

$$\Omega|_p : T_pM \times T_pM \to \mathbb{R},\ (\xi, \eta) \to \det(\xi, \eta, \nu)$$

El par de vectores (ξ, η) de T_pM es base , si y solo si $\Omega(\xi, \eta) \neq 0$, y si $\Omega(\xi, \eta) > 0$ se dice que es positiva, o está positivamente orientada. De la identidad de Graham:

$$\Omega(\xi, \eta)\, \Omega(\bar{\xi}, \bar{\eta}) = \det \begin{pmatrix} \langle \xi, \bar{\xi} \rangle & \langle \xi, \bar{\eta} \rangle \\ \langle \eta, \bar{\xi} \rangle & \langle \eta, \bar{\eta} \rangle \end{pmatrix} \tag{53}$$

se concluye que en efecto, es la única forma de volumen en M que toma el valor 1 sobre las bases ortonormales positivas.

5.1.2. Angulo orientado

Si $M = (M, \nu)$ es superficie orientada y $\xi, \eta \in T_pM$ son vectores no nulos, por la identidad de Graham (53) se tiene $\Omega(\xi, \eta)^2 = |\xi|^2 |\eta|^2 - \langle \xi, \eta \rangle^2$ y por tanto

$$\left(\frac{\langle \xi, \eta \rangle}{|\xi|\,|\eta|}, \frac{\Omega(\xi, \eta)}{|\xi|\,|\eta|} \right) = (\cos\theta, \sin\theta)$$

representa un punto de la circunferencia $\mathbb{S}^1$y por tanto un ángulo $\measuredangle(\xi, \eta) \in \mathbb{Z}/2\pi\mathbb{Z}$ cuyo valor numérico θ está determinado salvo múltiplo de 2π. Se denomina, ángulo orientado definido por ξ, η. Usualmente se tomarán determinaciones θ del ángulo con $-\pi \leq \theta < \pi$.

5.1.3. Forma de conexión

Sea M una superficie orientada, y Ω su forma de volumen canónica. Sea $\mathcal{U}$ un abierto paralelizable de M, y $E \in \mathfrak{X}(\mathcal{U})$ un campo tangente a M y unitario ($|E| = 1$). Se tiene:

(a) Existe un único campo $E_2 \in \mathfrak{X}(\mathcal{U})$ de forma que ($E = E_1, E_2$) constituye una paralelización ortonormal positiva en $\mathcal{U}$.

(b) Hay una única 1-forma $\omega_E \in \Omega^1(\mathcal{U})$, que viene caracterizada por la propiedad

$$\nabla_\xi E_1 = \omega_E(\xi)\, E_2$$

para cada vector ξ tangente a M en un punto de $\mathcal{U}$. La forma de conexión puede también caracterizarse por verificar[5]

$$\left. \begin{array}{l} \nabla_V E_1 = \omega_E(V)\, E_2 \\ \nabla_V E_2 = -\omega_E(V)\, E_1 \end{array} \right\} \ \forall V \in \mathfrak{X}(\mathcal{U})$$

[5] Naturalmente ∇ representa la derivada intrínseca covariante en la superficie.

(c) Si $K : M \to \mathbb{R}$ es la función curvatura de Gauss de M entonces se tiene en $\mathcal{U}$

$$d\omega_E = -K\Omega \tag{54}$$

Demostración:

Va dedicada a los lectores que tengan reciente un curso clásico de Teoría de Superficies:

(a) El campo E_2 necesariamente único viene definido por $E_2 = \nu \times E_1$

(b) Podemos escribir para cada $X \in \mathfrak{X}(\mathcal{U})$:

$$X = \langle X, E_1 \rangle E_1 + \langle X, E_2 \rangle E_2 \tag{55}$$

En particular tomando $X = \nabla_V E_1$ tenemos

$$\nabla_V E_1 = \langle \nabla_V E_1, E_1 \rangle E_1 + \langle \nabla_V E_1, E_2 \rangle E_2$$

pero como $\langle E_1, E_1 \rangle = 1$, es $0 = V(\langle E_1, E_1 \rangle) = 2 \langle \nabla_V E_1, E_1 \rangle$, por lo que $\nabla_V E_1 = \langle \nabla_V E_1, E_2 \rangle E_2$, y podemos tomar

$$\omega_E(V) = \langle \nabla_V E_1, E_2 \rangle$$

y queda

$$\nabla_V E_1 = \omega_E(V) E_2$$

Por otra parte, como $\langle E_1, E_2 \rangle = 0$, es $0 = V(\langle E_1, E_2 \rangle) = \langle \nabla_V E_1, E_2 \rangle + \langle E_1, \nabla_V E_2 \rangle$ y así

$$\nabla_V E_2 = \langle \nabla_V E_2, E_1 \rangle E_1 = -\omega_E(V) E_1$$

(c) Recordemos que la curvatura de Gauss, viene definida por $K = \det \mathcal{L}$, siendo $\mathcal{L} : \mathfrak{X}(\mathcal{U}) \to \mathfrak{X}(\mathcal{U})$ la aplicación de Weingarten. definida por $\mathcal{L}(V) = -\nabla_V \nu$ siendo ν el vector normal a la superficie compatible con la orientación. Tomando en (55) $X = \mathcal{L}(E_i)$ $i = 1, 2$ queda

$$\begin{gathered}\mathcal{L}(E_1) = \langle \mathcal{L}(E_1), E_1 \rangle E_1 + \langle \mathcal{L}(E_1), E_2 \rangle E_2 \\ \mathcal{L}(E_1) = \langle \mathcal{L}(E_2), E_1 \rangle E_1 + \langle \mathcal{L}(E_2), E_2 \rangle E_2\end{gathered}$$

y por tanto:

$$K = \langle \mathcal{L}(E_1), E_1 \rangle \langle \mathcal{L}(E_2), E_2 \rangle - \langle \mathcal{L}(E_1), E_2 \rangle^2$$

Por otra parte puede probarse la identidad

$$-\nabla_{E_1}\nabla_{E_2}E_1 + \nabla_{E_2}\nabla_{E_1}E_1 + \nabla_{[E_1,E_2]}E_1 = <\mathcal{L}E_1, E_1> \mathcal{L}E_2 - <\mathcal{L}E_2, E_1> \mathcal{L}E_1 \; .$$

Se tiene entonces:

$$
\begin{aligned}
d\omega_E(E_1E_2) &= \\
&= E_1(\omega_E(E_2)) - E_2(\omega_E(E_1)) - \omega_E([E_1, E_2]) \\
&= E_1(\langle\nabla_{E_2}E_1, E_2\rangle) - E_2(\langle\nabla_{E_1}E_1, E_2\rangle) - \left\langle\nabla_{[E_1,E_2]}E_1, E_2\right\rangle \\
&= \left\langle\nabla_{E_1}\nabla_{E_2}E_1 - \nabla_{E_2}\nabla_{E_1}E_1 - \nabla_{[E_1,E_2]}E_1, E_2\right\rangle \\
&= -\left(\langle\mathcal{L}(E_1), E_1\rangle\langle\mathcal{L}(E_2), E_2\rangle - \langle\mathcal{L}(E_1), E_2\rangle^2\right) \\
&= -K = -K\Omega(E_1E_2)
\end{aligned}
$$

En la cuarta igualdad se ha utilizado la identidad:

$$\nabla_{E_1}E_2 - \nabla_{E_2}E_1 = [E_1, E_2]$$

y la regla de derivación de Leibnitz.

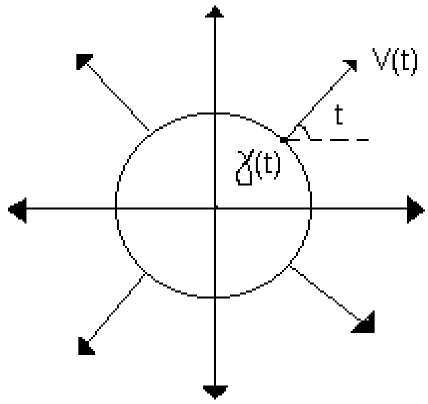
5.2. El Teorema de Poincaré-Hopf

Ya es bastante sorprendente constatar que la integral de la curvatura de Gauss sobre una superficie compacta *cualquiera* es necesariamente un múltiplo entero de 2π, digamos $2\pi\chi$. Pero sorprende aún más constatar que el entero χ -llamado característica de Euler- depende solamente de la topología de la superficie. Es más, caracteriza su topología. En este apartado, trataremos de acercarnos suavemente y con las herramientas de la geometría diferencial a este fascinante festival Geométrico-Topológico. ¡Comienza el espectáculo

5.2.1. Indice de un campo en un cero aislado

Ejemplos previos Intuitivamente el índice de un campo en un cero aislado, es el número (con signo) de vueltas que da el vector del campo, al restringirlo a una pequeña curva simple (recorrida en el sentido *positivo*) que rodea el punto. Para despertar nuestra intuición sobre el concepto de índice, presentaremos algunos ejemplos significativos en el plano $\mathbb{R}^2$.

A) Por ejemplo consideremos el campo $V = x\partial/\partial x + y\partial/\partial y$ de $\mathbb{R}^2$, que tiene un cero aislado en $o = (0,0)$. Sobre la circunferencia γ, de ecuaciones $x = \cos t$, $y = \sin t$, $0 \leq t \leq 2\pi$ el campo V toma *valores* $\overrightarrow{V(\gamma(t))} = (\cos t, \sin t)$ $0 \leq t \leq 2\pi$. Así, $\theta(t) = t$ determina el ángulo que va formando $\overrightarrow{V(\gamma(t))}$ con el eje de las x, y se ve por tanto que el campo V da una sola vuelta (en el mismo sentido que γ) alrededor del origen. Por esto se dice que su indice es igual a $+1$.



Debemos observar que el índice no depende de la parametrización positiva γ de la circunferencia, y ni siquiera de la curva γ simple elegida que rodee el origen

B) Variaciones del ejemplo A) pueden obtenerse *girando* el campo V del ejemplo, un ángulo constante σ es decir, tomando

$$V_\sigma = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right) \begin{pmatrix} \cos\sigma & -\sin\sigma \\ \sin\sigma & \cos\sigma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

todos ellos tienen índice $+1$ en el origen. Como caso particular, tenemos $V_{\pi/2} = -y\partial/\partial x + x\partial/\partial y$

C) consideremos ahora el campo

$$V = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Una buena forma de visualizar la dirección y el sentido del campo en cada punto, consiste en dibujar sus curvas integrales. En general, las curvas integrales de $V = A\frac{\partial}{\partial x} + B\frac{\partial}{\partial y}$ son aquellas $\gamma = \gamma(t)$ tales que

$$V(\gamma(t)) = \gamma'(t) \text{ para todo } t$$

es decir deberán satisfacer las eucaciones diferenciales $\gamma(t) = (x(t), y(t))$:

$$\begin{aligned} dx/dt &= A(x, y) \\ dy/dt &= B(x, y) \end{aligned}$$

En el caso particular que nos ocupa tenemos

$$\begin{aligned} dx/dt &= x \\ dy/dt &= -y \end{aligned}$$

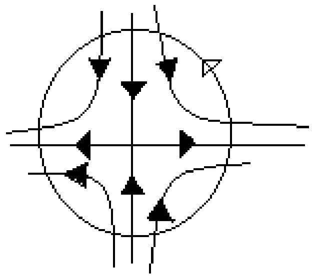
cuya solución general, viene dada por

$$\begin{aligned} x(t) &= x_0 e^{t-t_0} \\ y(t) &= y_0 e^{-(t-t_0)} \end{aligned}$$

cuya ecuación implícita viene dada por

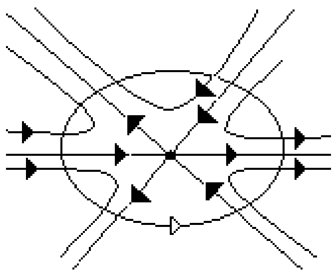
$$xy = cte$$

una idea del flujo de curvas integrales es:



El lector debería ser capaz de explicar ahora porqué el indice en el origen de este campo es igual a -1.

D) Se pueden dar ejemplos gráficos de campos con índice negativo arbitrario. Por ejemplo, el campo cuyas curvas integrales se sugieren en el siguiente dibujo:



debería tener índice -2 en torno al origen.

Proponemos al lector la generalización de este ejemplo, y la construcción gráfica de campos con índice entero positivo arbitrariamente alto.

Hipótesis de trabajo $M = (M, \nu)$ es una superficie orientada, y $\gamma : I = [a, b] \to M$ una curva diferenciable. U es campo unitario tangente definido en un entorno de $im\,(\gamma)$, supongase definida en un entorno de $im(\gamma)$ una paralelización ortonormal positiva $(E = E_1, E_2)$. Por último, ω_E, ω_U denotan las formas de conexión de E y U definidas en sus correspondientes dominios.

Recordemos que la curva revertida de γ es la curva $\sim \gamma : [a, b] \to M$ definida por

$$(\sim \gamma)\,(t) = \gamma(-t + b + a)$$

que tiene la misma imagen recorrida en sentido inverso.

Determinación diferenciable del ángulo (DDA) Sean M, γ, $(E = E_1, E_2)$, U, como en 5.2.1

Una determinación diferenciable del ángulo (DDA) $\measuredangle(E_1, U \circ \gamma)$ es una aplicación diferenciable $\theta : I \to \mathbb{R}$ tal que

$$U \circ \gamma = (\cos\theta)(E_1 \circ \gamma) + (\sin\theta)(E_2 \circ \gamma)$$

Si θ y $\bar{\theta}$ son DDA $\measuredangle(E_1, U \circ \gamma)$ entonces la diferencia $\bar{\theta} - \theta : I \to \mathbb{R}$ es una función continua que toma valores sobre $2\pi\mathbb{Z}$, y es (ya que I es conexo), constante de la forma $2\pi k, \in k \in \mathbb{Z}$. Esto prueba que todas las DDA se obtienen sumandole a una dada un múltiplo entero de 2π.

Probemos que existen DDA. Supongamos $I = [a, b]$, entonces obviamente se tiene:

1) Para todo $t_0 \in I$, existe un $\varepsilon > 0$ y $\theta : (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon) \cap I \to \mathbb{R}$ que es DDA.

Por otra parte, usando la compacidad de I, se tiene que

2) Existe una partición $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_r = b$ y funciones $\bar{\theta}_i : [t_{i-1}, t_i] \to \mathbb{R}$ que son DDA.

Finalmente la demostración se concluye así

Pongamos $\bar{\theta}_1 : [t_0, t_1] \to \mathbb{R}$, $\bar{\theta}_2 : [t_1, t_2] \to \mathbb{R}$ entonces $\bar{\theta}_2(t_1) - \bar{\theta}_1(t_1) = 2n\pi$ para $n \in \mathbb{Z}$, y se construye $\theta_2 : [t_0, t_2] \to \mathbb{R}$, DDA de la forma:

$$\theta_2(t) = \begin{cases} \bar{\theta}_1(t) \text{ si } t \in [t_0, t_1] \\ \bar{\theta}_2(t) - 2n\pi \text{ si } t \in [t_1, t_2] \end{cases}$$

Tenemos así definida paso a paso $\theta_r : [a, b] \to \mathbb{R}$ que es DDA.

La DDA y las formas de conexión Sean M, γ, $(E = E_1, E_2)$, U, ω_U, ω_E, como en 5.2.1 . Para cualquier DDA $\theta : I \to \mathbb{R}$ de $\measuredangle(E, U \circ \gamma)$ se tiene

$$\theta' = \omega_U(\gamma') - \omega_E(\gamma') \tag{56}$$

Demostración

Identificando $U = U(t) = (U \circ \gamma)(t)$, $E_a = E_a(t) = (E_a \circ \gamma)(t)$, se tiene

$$U = (\cos\theta) E_1 + (\sin\theta) E_2 \tag{57}$$

y por tanto

$$U^\perp = -(\sin\theta) E_1 + (\cos\theta) E_2 \tag{58}$$

Calculando dU/dt teniendo en cuenta las identidades (**??**) y (58) queda

$$\frac{dU}{dt} = \omega_U(\gamma') U^\perp + ()\,\nu = \omega_U(\gamma')(-(\sin\theta) E_1 + (\cos\theta) E_2) + ()\,\nu \tag{59}$$

donde el primer sumando es tangente a M, y se ha denotado por $()\,\nu$ la parte proporcional a ν.

Calculando ahora dU/dt usando(57) queda

$$\begin{aligned} \frac{dU}{dt} &= \theta'\left(-(\sin\theta)\,E_1 + (\cos\theta)\,E_2\right) + \\ &\quad + (\cos\theta)\,\omega_E(\gamma')\,E_2 - (\sin\theta)\,\omega_E(\gamma')\,E_1 + ()\,\nu \\ &= -\sin\theta\,(\theta' + \omega_E(\gamma'))\,E_1 + \cos\theta\,(\theta' + \omega_E(\gamma'))\,E_2 + ()\,\nu \end{aligned} \tag{60}$$

comparando las partes tangentes (59) y (60) se obtiene (56)

Indice (relativo) en torno a un lazo Sean M, γ, $(E = E_1, E_2)$, U, como en 5.2.1, suponiendo que $\gamma : [a,b] \to M$ es un lazo (es decir, $\gamma(a) = \gamma(b)$) es claro que $\theta(b) - \theta(a)$ es un múltiplo entero de 2π, que no depende de la DDA tomada. Se define indice de U, en torno a γ, y relativo a E al entero

$$Ind\,(U,\gamma,E) = \frac{1}{2\pi}\left(\theta(b) - \theta(a)\right)$$

Usando la igualdad (56) se concluye que

$$Ind\,(U,\gamma,E) = \frac{1}{2\pi}\int_a^b \left(\omega_U(\gamma') - \omega_E(\gamma')\right)dt = \frac{1}{2\pi}\int_\gamma (\omega_U - \omega_E) \tag{61}$$

Indice en torno a un lazo elemental Sean M, $(E = E_1, E_2)$, U, como en 5.2.1. y $\gamma : [a,b] \to M$ un lazo. Supongamos ahora que $\Gamma = im\gamma$ es el borde $\partial\mathcal{R}$ de un dominio regular compacto y paralelizable $\mathcal{R} \subset M$; *diremos que γ es un lazo elemental. Si* p es un punto que está en el interior de $\mathcal{R}$, se dice que γ es *es un lazo elemental.en torno al punto* p.Naturalmente se supone que el sentido de recorrido de γ es el positivo, es decir, $\nu \times \gamma'$ es un vector entrante.

En estas circunstancias, *el índice $Ind\,(U,\gamma,E)$ no depende del campo unitario E definido en un entorno de $\mathcal{R}$, y se denomina simplemente $Ind\,(U,\gamma)$, que es el índice de U en torno a γ.*

En efecto:

Si F es otro campo tangente unitario definido en un entorno de $\mathcal{R}$, por la igualdad (54) se concluye que $d\omega_F = d\omega_E = -Kd\Omega$, por lo que

$$d\,(\omega_F - \omega_E) = 0$$

Por otra parte, usando la igualdad (61)

$$\begin{aligned} Ind\,(U,\gamma,E) &= \frac{1}{2\pi}\int_\gamma (\omega_U - \omega_E) \\ &= \frac{1}{2\pi}\left[\int_\gamma (\omega_U - \omega_F) + \int_\gamma (\omega_F - \omega_E)\right] \\ &= Ind\,(U,\gamma,F) \end{aligned}$$

ya que por el teorema de Stokes se tiene

$$\int_\gamma (\omega_F - \omega_E) = \int_{\partial \mathcal{R}} (\omega_F - \omega_E) = \int_{\mathcal{R}} d(\omega_F - \omega_E) = 0$$

Naturalmente, si U está definido en un entorno de $\mathcal{R}$ entonces:

$$Ind\,(U,\gamma) = Ind\,(U,\gamma,U) = \frac{1}{2\pi}\int_\gamma (\omega_U - \omega_U) = 0$$

Observación 5.2.1.1 *Nótese que* $Ind\,(U,\gamma)$ *no depende de la parametrización y podemos escribir más propiamente* Si Γ

$$Ind(U,\Gamma) = Ind\,(U,\gamma)$$

Indice de un campo en un cero aislado Supondremos ahora que $V \in \mathfrak{X}(M)$ es un campo tangente y $p \in M$ es un cero aislado de V, es decir, $V(p) = 0$, y hay un entorno $\mathcal{V}$ de p en M tal que $V(x) \neq 0$ para todo $x \in \mathcal{V}$.

Denotamos por U al campo unitario definido en $\mathcal{U} - \{p\}$

$$U = \frac{V}{|V|}$$

Podemos imaginar un $\mathcal{U} \subset \mathcal{V}$ que es la imagen de una parametrización local *positiva* $\varphi = \varphi(u,v)$, , con $\varphi : \mathbb{U} \to \mathcal{U}$,, y $\varphi(0,0) = p$.

Para cada $r > 0$ denotamos por D_r al disco cerrado de radio r centrado en $(0,0) \in \mathbb{R}^2$ y $C_r = \partial D_r$ es la circunferencia borde. Sea $R > 0$, tal que $D_R \subset \mathbb{U}$. Finalmente para $0 < r \leq R$ se considera el lazo elemental en torno a p

$$\gamma_r(t) = \varphi(r\cos 2\pi t, r\sin 2\pi t)\,,\ 0 \leq t \leq 1$$

Realmente la imagen de γ_r es $\Gamma_r = \varphi(C_r)$ que es el borde del dominio regular $\mathcal{R}_r = \varphi(D_r)$

Si Γ es un lazo elemental en torno a p, llamamos indice de V en p respecto a Γ a $Ind\,(U,\Gamma)$ es decir:

$$Ind\,(V,\Gamma) = Ind\,(U,\Gamma)$$

El resultado fundamental es el siguiente:

Si Γ y $\widetilde{\Gamma}$ son lazos elementales en torno al punto p, entonces

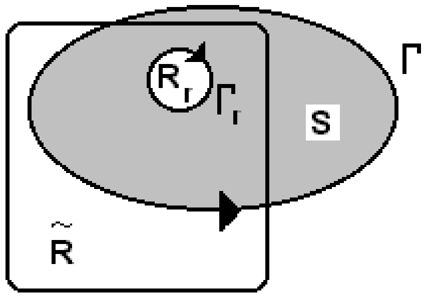
$$Ind\,(V,\Gamma) = Ind\left(V,\widetilde{\Gamma}\right)$$

Demostración

Tomemos $r > 0$ suficientemente pequño para que

$$\mathcal{R}_r \subset (int\mathcal{R}) \cap \left(int\widetilde{\mathcal{R}}\right)$$

siendo $\mathcal{R}$ y $\widetilde{\mathcal{R}}$ los correspondientes dominios cuyas fronteras son Γ y $\widetilde{\Gamma}$.



Demostraremos que

$$Ind(V,\Gamma) = Ind(V,\Gamma_r) = Ind\left(V,\widetilde{\Gamma}\right)$$

Probemos la primera igualdad (la segunda se prueba igual). En efecto: fijemos E campo tangente unitario en $\mathcal{R}$

$$\mathcal{S} = \mathcal{R} - int\mathcal{R}_r$$

es un dominio regular con borde orientado

$$\partial\mathcal{S} = \Gamma \cup (\backsim \Gamma_r)$$

así, usando que $d\omega_E = d\omega_U$ en $\mathcal{S}$, y el teorema de Stokes se tiene:

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\mathcal{S}} d(\omega_U - \omega_E) = \int_{\partial\mathcal{S}} (\omega_U - \omega_E) = \\ &= \int_{\Gamma} (\omega_U - \omega_E) - \int_{\Gamma_r} (\omega_U - \omega_E) = \\ &= Ind(V,\Gamma) - Ind(V,\Gamma_r) \end{aligned}$$

5.2.2. Curvatura integra y Característica de Euler

Veremos que en una superficie orientada y compacta, la integral de la curvatura de Gauss es un múltiplo entero de 2π, digamos $2\pi\chi$, con $\chi \in \mathbb{Z}$. Este entero χ asociado a la superficie , es evidentemente un invariante por isometrías. *El teorema de Poincaré Hopf* demuestra que χ es también la suma de los indices de cualquier campo definido en toda la superficie con ceros aislados. Se denomina a χ caracteristica de Euler-Poincaré y resulta ser también invariante por difeomorfismos.

Indice total de un campo Supóngase ahora la superficie $M = (M, \nu)$ orientada y compacta. Sea V un campo tangente en M que tiene todos sus ceros aislados. Por la compacidad de M, se concluye que el número total de ceros es finito, digamos $\{p_1, \ldots, p_m\}$. Se define el indice total de V como

$$Ind(V) = \sum_{i=1}^{m} Ind(V, p_i)$$

Observese que como cada sumando es un número entero, entonces $Ind(V)$ es entero.

El campo unitario $U = V/|V|$ está definido en $M - \{p_1, \ldots, p_m\}$. Tomando en torno a cada punto p_i parametrizaciones locales positivas, podemos construir un lazo elemental α_i que describe la frontera orientada de un dominio regular compacto y paralelizable $\mathcal{R}_i$ que contiene en su interior a p_i de forma que

$$Ind(V, p_i) = Ind(U, \alpha_i)$$

Curvatura íntegra Se llama *curvatura íntegra* de la superficie orientada compacta $M = (M, \nu)$ la la integral

$$\int_M K\Omega$$

donde K es su curvatura de Gauss y Ω es su forma de volumen canónica.

Si V, U son como en 5.2.2, podemos organizar el cálculo de la curvatura íntegra de la siguiente forma:

Fijemos un campo unitario E definido sobre un abierto que contiene al dominio regular

$$\mathcal{R} = \cup_{i=1}^{m} \mathcal{R}_i$$

y sea

$$\mathcal{S} = M - \overset{o}{\mathcal{R}}$$

Nótese que $\mathcal{S}$ es también dominio regular, cuya frontera orientada viene determinada por las curvas α_i recorridas en sentido contrario, es decir las $\sim \alpha_i$.

Tenemos así, la forma conexión ω_U definida en un entorno de $\mathcal{S}$, y la ω_E definida en un entorno de $\mathcal{R}$ y se tiene:

$$\begin{aligned} d\omega_U &= -K\Omega \text{ en } \mathcal{S} \\ d\omega_E &= -K\Omega \text{ en } \mathcal{R} \end{aligned}$$

Aplicando en cada región el teorema de Stokes, se tiene:

$$\begin{aligned} \textstyle\int_{\mathcal{S}} K\Omega &= -\textstyle\int_{\mathcal{S}} d\omega_U = -\textstyle\int_{\partial\mathcal{S}} \omega_U = \textstyle\sum_{i=1}^{m} \int_{\alpha_i} \omega_U \\ \textstyle\int_{\mathcal{R}} K\Omega &= -\textstyle\int_{\mathcal{R}} d\omega_E = -\textstyle\int_{\partial\mathcal{R}} \omega_E = -\textstyle\sum_{i=1}^{m} \int_{\alpha_i} \omega_E \end{aligned}$$

de manera que

$$\begin{aligned}
\int_M K\Omega &= \int_{\mathcal{S}} K\Omega + \int_{\mathcal{R}} K\Omega = \\
&= \sum_{i=1}^{m} \int_{\alpha_i} (\omega_U - \omega_E) = \\
&= 2\pi \sum_{i=1}^{m} Ind(V, p_i) = 2\pi Ind(V)
\end{aligned}$$

Por tanto se tiene:

Teorema de Poincaré-Hopf Sea M es una superficie compacta y orientada con elemento de area Ω y curvatura de Gauss K, y sea V un campo en M con ceros aislados. Entonces

$$\frac{1}{2\pi} \int_M K\Omega = Ind(V) \tag{62}$$

Es decir,

La curvatura integra $\int_M K\Omega$ de la superficie es de la forma $2\pi\chi_M$ donde χ_M es un número entero.asociado a la superficie que verifica la siguiente propiedad geométrica:

Todos los campos tangentes a M con ceros aislados tienen el mismo índice y coincide con χ_M

Característica de Euler *El entero χ_M asociado a un superficie compacta orientable M se denomina característica de Euler de M, y no depende de la orientación.* Por otra parte, si $\bar{M}$ es isométrica a M, entonces $\chi_M = \chi_{\bar{M}}$.

Como el cálculo de la característica de Euler de la superficie M, se limita a determinar el indice de algún campo conocido V con ceros aislados, parece plausible esperar que la característica de Euler sea también invariante por difeomorfismos. Todo depende de la validez de la siguiente

Proposición

Sea $\phi : M \to \bar{M}$, un difeomeorfismo entre superficies, y sea V un campo en M con ceros aislados $\{p_1, \dots, p_m\}$, entonces $\phi_* V$ es un campo en $\bar{M}$ con ceros aislados $\{\phi(p_1), \dots, \phi(p_m)\}$, y se verifica para cada $i = 1, \dots, m$

$$Ind(V, p_i) = Ind(\phi_* V, \phi(p_i))$$

En particular, si M es compacta orientable, $\bar{M}$ también lo es, y $\chi_M = \chi_{\bar{M}}$.

Idea de la Demostración:

Para calcular el índice del campo V en un cero aislado p, debemos recurrir a una parametrización local $\varphi = \varphi(u, v)$, con $\varphi : \mathbb{U} \to \mathcal{U}$ y $U = V/|V|$ definido en $\mathcal{U} - \{p\}$, $\varphi(0,0) = p$. Usando la notación de **??**, y suponiendo que $D_r \subset \mathbb{U}$, $C_r(t) = r(\cos t, \sin t)$, $\alpha_r(t) = \varphi(C_r(t))$, $0 \leq t \leq 2\pi$.

Sabemos que

$$Ind(V,p) = Ind(U, \alpha_r) = Ind(U, \alpha_r, E) = \frac{1}{2\pi}(\theta(2\pi) - \theta(0))$$

donde podemos tomar como campo unitario de referencia

$$E = \frac{\partial/\partial u}{|\partial/\partial u|}$$

y $\theta : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$ una DDA de $\measuredangle(U \circ \alpha_r, E)$

Digamos que esta *operación* podemos efectuarla en $\mathbb{U}$ con la representación analítica de V :

$$V_\varphi = V_\varphi^1 \frac{\partial}{\partial u} + V_\varphi^2 \frac{\partial}{\partial v}$$

y la métrica (g_{ab}^φ)dada por la primera forma fundamental

$$g_{ab}^\varphi = \left\langle \frac{\partial}{\partial u^a}, \frac{\partial}{\partial u^b} \right\rangle$$

y así $\theta(t)$ indica el $(g_{ab}^\varphi)_{C_r(t)}$-ángulo que determina $V_\varphi(C_r(t))$ con el eje de *horizontal* de las u. Definamos la familia

$$g_{ab}^s = (1-s)\, g_{ab}^0 + s\delta_{ab},\ 0 \leq s \leq 1$$

donde (δ_{ab}) denota la matriz identidad (ó métrica euclidea). Puede probarse que (g_{ab}^s) define una *.métrica* respecto a la cual puede determinarse una DDA digamos $\theta^s = \theta^s(t)$ del $(g_{ab}^s)_{C_r(t)}$-ángulo que determina $V_\varphi(C_r(t))$ con el eje de *horizontal* de las u, de forma que $\theta^0(t) = \theta(t)$, y la aplicación $(s,t) \to \theta^s(t)$ resulta ser continua. Como

$$\frac{1}{2\pi}(\theta^s(2\pi) - \theta^s(0))$$

toma solo valores enteros, se concluye que es una función (de s) constante y así

$$Ind(V,p) = \frac{1}{2\pi}\left(\theta^1(2\pi) - \theta^1(0)\right) \tag{63}$$

donde $\theta^1 : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$ representa una DDA del *ángulo euclideo* $\measuredangle(V_\varphi \circ C_r, \partial/\partial u)$ en el abierto euclideo $\mathbb{U}$.

La demostración se concluye, teniendo en cuenta que para cada punto p de M, pueden tomarse parametrizaciones $\varphi : \mathbb{U} \to \mathcal{U}$, $\bar{\varphi} = \phi \circ \varphi : \mathbb{U} \to \phi(\mathcal{U})$ con $\varphi(0,0) = p$, de forma que la representación analítica de V y $\phi_* V$ definen el mismo campo V_φ en $\mathbb{U}$. La fórmula (63) no depende más que de V_φ (¡ y no de las métricas (g_{ab}^φ) ó $\left(g_{ab}^{\bar{\varphi}}\right)$)

5.2.3. Gauss-Bonnet y Poincaré-Hopf

Recordemos que un *triángulo* T *en una superficie* M es, por definición, la imagen $\varphi(\triangle) \subset \mathcal{U}$ de un triángulo (rectilíneo) $\Delta \subset \mathbb{U} \subset \mathbb{R}^2$, siendo $\varphi{:}\mathbb{U} \to \mathcal{U}$ una parametrización de M.

Se llaman *lados* (respectivamente, *vértices*) de T a las imágenes por φ de los lados (respectivamente, vértices) de $\triangle$. Así, el borde ∂T es la unión de tres lados y puede parametrizarse por una curva regular a trozos:

$$\gamma : [t_0, t_3] \to \mathcal{U} \ ,$$

cerrada (en el sentido de que $\gamma(t_0) = \gamma(t_3)$) y simple, donde se supone que cada $\gamma_i \equiv \gamma \mid_{[t_{i-1},t_i]}$ $(i = 1, 2, 3)$ está parametrizada por la longitud de arco, con $t_0 < t_1 < t_2 < t_3$. Los puntos $p_i \equiv \gamma(t_i)$ $(i = 1, 2, 3)$ son los vértices y los segmentos $\gamma_i([t_{i-1}, t_i])$ $(i = 1, 2, 3 \ ; \ p_0 \equiv p_3)$ los lados de T .

Una *triangulación de una superficie compacta* M es una familia finita $\mathcal{T} = \{T_1, ..., T_n\}$ de triángulos de tal forma que:

(1) $\cup_i T_i = M$

(2) Si $T_i \cap T_j \neq \emptyset$, entonces, o bien $T_i \cap T_j$ es un único vértice, o bien es exactamente un lado común (con sus dos vértices incluidos)

Puede probarse que, en estas condiciones, se verifica además la propiedad:

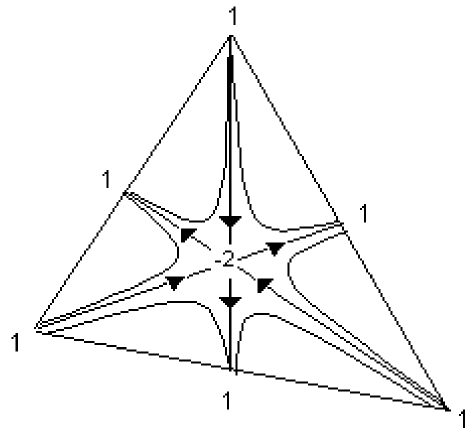
(3) Cada lado de $\mathcal{T}$ es exactamente intersección de dos triángulos distintos de $\mathcal{T}$.

Si n_0 n_1, y $n_2 = n$ denotan respectivamente el número de vértices lados y triánfulos de $\mathcal{T}$, se denomina *característica de Euler de la superficie* M *respecto de la triangulación* $\mathcal{T} = \{T_1, ..., T_n\}$ al entero:

$$\chi_{\mathcal{T}}(M) := n_0 - n_1 + n_2 \tag{64}$$

Puede demostrarse que todas las triangulaciones $\mathcal{T}$ tienen la misma característica $\chi_{\mathcal{T}}(M) = \chi(M)$. Se denomina característica de Euler de la superficie. Pretendemos dar aquí argumentos intuitivos de plausibilidad de este hecho y de que la característica $\chi(M)$ de M así definida coincide con la definición de χ_M dada en 5.2.2.

Para probar esto indicaremos cómo es posible determinar a partir de una triangulación $\mathcal{T} = \{T_1, ..., T_n\}$ un campo $V \in \mathfrak{X}(M)$ con ceros aislados, e indice total $\chi_{\mathcal{T}}(M) = n_0 - n_1 + n_2$. A este nivel intuitivo, esperamos que al lector le sea suficiente con el siguiente esquema que muestra el flujo del campo V en un triángulo T arbitrario de la triangulación $\mathcal{T}$. Nótese que los ceros de V en en cada triángulo T son un punto interior del mismo (por ejemplo el baricentro), un punto en cada lado (por ejemplo el centro), y los vértices, . En cada uno de los *ceros* se ha marcado el valor del índice del campo:



según esto, el indice total de V es

$$Ind(V) = -2n_2 + n_1 + n_0 \tag{65}$$

Teniendo en cuenta que en una triangulación, cada lado limita exactamente a dos caras, se concluye que

$$2n_1 = 3n_2$$

lo que permite escribir sumano y restando n_2 en (65), y teniendo en cuenta el teorema de Poincaré-Hopf, (ver (62)) queda:

$$\begin{aligned}
\chi_M &= Ind(V) = -3n_2 + n_2 + n_1 + n_0 = \\
&= -2n_1 + n_2 + n_1 + n_0 = \\
&= -n_1 + n_2 + n_0 = \\
&= \chi_{\mathcal{T}}(M)
\end{aligned}$$

6. APENDICE: DIFERENCIAL EXTERIOR GENERAL

Este Apéndice está dedicado a establecer el cálculo exterior de formas diferenciables, y la diferencial exterior de cualquier grado en variedades diferenciables de cualquier dimensión.

6.1. ÁLGEBRA EXTERIOR

En lo sucesivo, para $m \in \mathbb{N}^*$ denotaremos por $\mathfrak{S}^m$ al *grupo de permutaciones* de m elementos, es decir:

$$\mathfrak{S}^m = \{\sigma : \{1, \ldots m\} \mapsto \{1, \ldots m\} \ \sigma \,\text{es biyectiva}\}$$

que tiene $m!$ elementos. El homomorfismo *signatura* es

$$\mathfrak{S}^m \ni \sigma :\mapsto (-1)^\sigma \in \{-1, 1\}$$

Una permutación $\sigma \in \mathfrak{S}^r$ puede interpretarse como una aplicación

$$\sigma : \mathfrak{X}^r \ni (X_1, \ldots, X_r) \mapsto (X_{\sigma(1)}, \ldots, X_{\sigma(r)}) \in \mathfrak{X}^r$$

y de esta forma se tiene una actuación natural por la derecha del grupo $\mathfrak{S}^r$ sobre el $\mathfrak{F}$-módulo $L^r(\mathfrak{X})$ de los tensores covariantes de órden r:

$$L^r(\mathfrak{X}) \times \mathfrak{S}^r \ni (\mathbf{A}, \sigma) \mapsto \mathbf{A} \circ \sigma = \mathbf{A}.\sigma \in L^r(\mathfrak{X})$$

Es fácil probar que se verifican las siguientes propiedades, para todo $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in L^r(\mathfrak{X})$, todo $\sigma, \tau \in \mathfrak{S}^r$ y todo $f \in \mathfrak{F}$:
1) $(\mathbf{A}.\sigma).\tau = \mathbf{A}.(\sigma\tau)$
2) $(\mathbf{A} + \mathbf{B}).\sigma = \mathbf{A}.\sigma + \mathbf{B}.\sigma$
3) $(f\mathbf{A}).\sigma = f(\mathbf{A}.\sigma)$.

6.1.1. El módulo de Formas Exteriores de grado r

Se dice que $\mathbf{A} \in L^r(\mathfrak{X})$ es una *forma exterior* de grado r si:

$$\mathbf{A}.\sigma = (-1)^\sigma \mathbf{A} \ \forall \sigma \in \mathfrak{S}^r$$

Evidentemente, el conjunto $\Omega^r(\mathfrak{X})$ de todas las formas diferenciables de grado r, es un $\mathfrak{F}$-submódulo de $L^r(\mathfrak{X})$. Se denota por $\Omega^r(M)$ al $\mathfrak{F}$-módulo $\Lambda^r(\mathfrak{X}(M))$

6.1.2. Operador de Alternación

Si $\mathbf{A} \in L^r(\mathfrak{X})$ se define

$$\mathcal{A}(\mathbf{A}) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}^r} (-1)^\sigma \mathbf{A}.\sigma \ , \mathbb{A}(\mathbf{A}) = \frac{1}{r!}\mathcal{A}(\mathbf{A})$$

No es dificil probar que $\mathcal{A}(\mathbf{A}) \in \Lambda^r(\mathfrak{X})$, y que si $\alpha \in \Lambda^r(\mathfrak{X})$ entonces es $\mathcal{A}(\alpha) = r!\alpha$. En particular es $\mathcal{A}^2(\mathbf{A}) = r!\mathbf{A}$ y así el endomorfismo $\mathbb{A} : L^r(\mathfrak{X}) \mapsto L^r(\mathfrak{X})$ verifica $\mathbb{A}^2 = \mathbb{A}$, y es por tanto una proyección con imagen $im(\mathbb{A}) = \Lambda^r(\mathfrak{X})$. Llamando $N^r = Ker(\mathbb{A})$ se verifica entonces:

$$L^r(\mathfrak{X}) = \Lambda^r(\mathfrak{X}) \bigoplus N^r$$

Lema 6.1.2.1 Si $\mathbf{A}\in N^r$ y $\mathbf{B}\in L^s(\mathfrak{X})$ *entonces se verifica que* $\mathbf{A}\otimes\mathbf{B}\in N^{r+s}$ *y.*$\mathbf{B}\otimes\mathbf{A}\in N^{r+s}$

Demostración. : Se hace, fijada $\mathbf{A}\in N^r$ por inducción sobre el grado s del tensor $\mathbf{B}\in L^s(\mathfrak{X})$. Para $s = 0$ el resultado es evidente. Para $s = 1$ se tiene:

$$\left(\mathcal{A}(\mathbf{A} \otimes \mathbf{B})\right)(X_1, \ldots, X_{r+1}) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}^{r+1}} (-1)^\sigma \mathbf{A}(X_{\sigma(1)}, \ldots, X_{\sigma(r)})\mathbf{B}(X_{\sigma(r+1)}) = (*)$$

sacando *factor común* $\mathbf{B}(X_1)$ después $\mathbf{B}(X_2)$ ... etc la suma anterior se reorganiza en la forma

$$(*) = \sum_{i=1}^{r+1} \pm\mathbf{B}(X_i)\left(\mathcal{A}(\mathbf{A})\right)(\ldots, \widehat{X_i}, \ldots) = 0$$

ya que por hipótesis $\mathcal{A}(\mathbf{A}) = 0$. (Hemos denotado por $(\ldots, \widehat{X_i}, \ldots)$ la $r-1$ étupla $(X_1, \ldots, X_r)$, en la que se ha prescindido de la componente i-ésima.)

Supongamos cierto el resultado para $s > 0$, y sea $\mathbf{B} = \mathbf{B}_s\otimes\mathbf{B}_1$ con $\mathbf{B}_s \in L^s(\mathfrak{X})$ y $\mathbf{B}_1 \in L^1(\mathfrak{X})$, entonces $\mathbf{A}\otimes\mathbf{B}_s \in N^{r+s}$ por hipótesis, y asi $\mathbf{A} \otimes \mathbf{B} = (\mathbf{A}\otimes\mathbf{B}_s)\otimes\mathbf{B}_1 \in N^{r+s+1}$ pues el resultado es cierto para $s = 1$. Como cualquier $\mathbf{B} \in L^{s+1}(\mathfrak{X})$ se obtiene como suma de elementos del tipo $\mathbf{B}_s\otimes\mathbf{B}_1$ se concluye la demostración.

6.1.3. Producto Exterior

Si $\alpha \in \Lambda^r(\mathfrak{X})$ y $\beta \in \Lambda^s(\mathfrak{X})$ se define el *producto exterior*:

$$\alpha \wedge \beta = \frac{1}{r!s!}\mathcal{A}(\alpha \otimes \beta)$$

Propiedades del producto exterior Es fácil probar que el producto exterior es una aplicación

$$\Lambda^r(\mathfrak{X}) \times \Lambda^s(\mathfrak{X}) \ni (\alpha,\beta) \to \alpha \wedge \beta \in \Lambda^{r+s}(\mathfrak{X})$$

y además es $\mathfrak{F}$-bilineal, decir, para todo $f, g \in \mathfrak{F}(M)$ $\alpha \in \Lambda^r(\mathfrak{X})$, $\beta \in \Lambda^s(\mathfrak{X})$ y $\gamma \in \Lambda^k(\mathfrak{X})$

$$(f\alpha + g\beta) \wedge \gamma = f\alpha \wedge \gamma + g\beta \wedge \gamma, \ \ \gamma \ \wedge (f\alpha + g\beta) = f\gamma \wedge \alpha + g\gamma \wedge \beta$$

.Probemos que es asociativa, es decir,

$$(\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma = \alpha \wedge (\beta \wedge \gamma)$$

En efecto, como cuestión previa observese que la descomposición

$$L^{r+s}(\mathfrak{X}) = \Lambda^{r+s}(\mathfrak{X}) \bigoplus N^{r+s}$$

permite escribir, para $\mathbf{A} \in L^r(\mathfrak{X})$ y $\mathbf{B} \in L^s(\mathfrak{X})$, la igualdad:

$$\mathbf{A} \otimes \mathbf{B} = \mathbf{A} \triangle \mathbf{B} + \mathbf{A} \Box \mathbf{B}$$

donde $\mathbf{A} \triangle \mathbf{B} = \mathbb{A}(\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}) \in \Lambda^{r+s}(\mathfrak{X})$ y $\mathbf{A} \Box \mathbf{B} \in N^{r+s}$. Así, usando el LEMA 6.1.2.1, se tiene:

$$\begin{aligned}
\mathbb{A}((\alpha \otimes \beta) \otimes \gamma)) &= \mathbb{A}((\alpha \triangle \beta + \alpha \Box \beta) \otimes \gamma) = \mathbb{A}((\alpha \triangle \beta) \otimes \gamma + (\alpha \Box \beta) \otimes \gamma) = \\
\mathbb{A}((\alpha \triangle \beta) \otimes \gamma)) &= \mathbb{A}((\alpha \triangle \beta) \triangle \gamma + (\alpha \triangle \beta) \Box \ \gamma \ )) = \mathbb{A}((\alpha \triangle \beta) \triangle \gamma)) = \\
(\alpha \triangle \beta) \triangle \ \gamma &= \mathbb{A}(\ \alpha \otimes (\beta \ \otimes \gamma)) = \cdots = \alpha \triangle (\beta \triangle \ \gamma)
\end{aligned}$$

pero

$$\alpha \triangle \beta = \mathbb{A}(\alpha \otimes \beta) = \frac{1}{r!s!}\mathcal{A}(\alpha \otimes \beta) = \frac{r!s!}{(r+s)!}\alpha \wedge \beta$$

por tanto

$$\begin{aligned}
(\alpha \triangle \beta) \triangle \gamma &= \left(\frac{r!s!}{(r+s)!}\alpha \wedge \beta \right) \triangle \gamma = \frac{r!s!}{(r+s)!} \frac{(r+s)!k!}{(r+s+K)!}(\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma \\
&= \frac{r!s!k!}{(r+s+k)!}(\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma
\end{aligned}$$

hemos probado por tanto que:

$$(\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma = \alpha \wedge (\beta \wedge \gamma) = \frac{1}{r!s!k!}\mathcal{A}(\alpha \otimes \beta \otimes \gamma)$$

Proposición 6.1.3.1 *Si $\alpha_i \in \Lambda^{r_i}(\mathfrak{X})$ para $i = 1, \cdots, s$ se tiene:*

$$\alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_s = \frac{1}{r_1! \cdots r_s!}\mathcal{A}(\alpha_1 \otimes \cdots \ \otimes \alpha_s)$$

Demostración: Ya se ha probado el resultado para $s = 2$, y $s = 3$. Supuesto cierto para $s \geq 3$, probémoslo para $s+1$. En efecto,

$$(\alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_s) \wedge \alpha_{s+1} = \frac{(r_1 + \ldots r_{s+1})!}{(r_1 + \ldots r_s)! r_{s+1}!} \mathbb{A}\left((\alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_s) \otimes \alpha_{s+1}\right) =$$

$$= \frac{(r_1 + \ldots r_{s+1})!}{r_1! \cdots r_s! r_{s+1}!} \mathbb{A}\left(\mathbb{A}(\alpha_1 \otimes \cdots \otimes \alpha_s) \otimes \alpha_{s+1}\right)$$

Pero

$$\mathbb{A}\left(\mathbb{A}(\alpha_1 \otimes \cdots \otimes \alpha_s) \otimes \alpha_{s+1}\right) =$$

$$= \mathbb{A}\left((\mathbb{A}(\alpha_1 \otimes \cdots \otimes \alpha_s) - \alpha_1 \otimes \cdots \otimes \alpha_s + \alpha_1 \otimes \cdots \otimes \alpha_s) \otimes \alpha_{s+1}\right)$$

$$= \mathbb{A}(\alpha_1 \otimes \cdots \otimes \alpha_s \otimes \alpha_{s+1})$$

de donde se concluye el resultado para $s+1$.

6.1.4. Producto exterior de 1-formas

De la proposición anterior se deduce en particular, que si $\alpha_i \in \Lambda^1(\mathfrak{X})$ para $i = 1, \cdots, r$ se tiene:

$$(\alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_r)(X_1, \cdots, X_r) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}^r} (-1)^\sigma \, (\alpha_1 \otimes \cdots \otimes \alpha_r)(X_{\sigma(1)}, \cdots, X_{\sigma(r)}). =$$

$$\begin{aligned} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}^r} (-1)^\sigma \alpha_1(X_{\sigma(1)}) \ldots \alpha_r(X_{\sigma(r)}) &= \det(\alpha_i(X_j)) = \det(\alpha_i(X_j))^t \\ \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}^r} (-1)^\sigma \alpha_{\sigma(1)}(X_1) \ldots \alpha_{\sigma(r)}(X_r) &= \left\{ \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}^r} (-1)^\sigma \alpha_{\sigma(1)} \otimes \ldots \otimes \alpha_{\sigma(r)} \right\} (X_1, \ldots, X_r) \end{aligned}$$

$$\text{y queda : } \alpha_1 \wedge \ldots \wedge \alpha_r = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}^r} (-1)^\sigma \alpha_{\sigma(1)} \otimes \ldots \otimes \alpha_{\sigma(r)}$$

Proposición 6.1.4.1 *Si $\alpha_i \in \Lambda^1(\mathfrak{X})$ para $i = 1, \ldots, r$, y $\tau \in \mathfrak{S}^r$ entonces:*

$$(-1)^\tau \alpha_{\tau(1)} \wedge \ldots \wedge \alpha_{\tau(r)} = \alpha_1 \wedge \ldots \wedge \alpha_r$$

6.1.5. Una base del espacio de las r–formas exteriores

Sea $(E_1, \ldots, E_m)$ una base de $\mathfrak{X}$, y $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_m)$ su base dual. Si $\alpha \in \Lambda^r(\mathfrak{X})$ podemos escribir

$$\alpha = \sum_{i_1, \ldots, i_r = 1}^{n} \alpha_{i_1, \ldots, i_r} \varepsilon_{i_1} \otimes \ldots \otimes \varepsilon_{i_r}$$

donde $\alpha_{i_1,\dots,i_r} = \alpha(E_{i_1},\dots E_{i_r})$ con lo que para todo $\sigma \in \mathfrak{S}^r$se tiene:

$$\alpha_{i_{\sigma(1)},\dots,i_{\sigma(r)}} = (-1)^\sigma \alpha_{i_1,\dots,i_r}$$

por tanto, $\alpha_{i_1,\dots,i_r}$ será nulo cuando haya dos subíndices iguales, así:

$$\begin{aligned}
\alpha &= \sum_{1\le i_1<\cdots<i_r\le m} \left\{ \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}^r} \alpha_{i_{\sigma(1)},\dots,i_{\sigma(r)}} \varepsilon_{i_{\sigma(1)}} \otimes \ldots \otimes \varepsilon_{i_{\sigma(r)}} \right\} = \\
& \sum_{1\le i_1<\cdots<i_r\quad\le m} \alpha_{i_1,\dots,i_r} \left\{ \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}^r} (-1)^\sigma \varepsilon_{i_{\sigma(1)}} \otimes \ldots \otimes \varepsilon_{i_{\sigma(r)}} \right\} \\
&= \sum_{1\le i_1<\cdots<i_r\quad\le m} \alpha_{i_1,\dots,i_1} \varepsilon_{i_1} \wedge \ldots \wedge \varepsilon_{i_r}
\end{aligned}$$

hemos obtenido así el siguiente

Teorema 6.1.5.1 *Si $(E_1,\dots,E_m)$ una base de $\mathfrak{X}$, y $(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_m)$ su base dual, entonces*

$$\{\varepsilon_{i_1} \wedge \ldots \wedge \varepsilon_{i_r} : 1 \le i_1 < \cdots < i_r \le m\}$$

constituye una base de $\Lambda^r(\mathfrak{X})$. Concretamente, si $\alpha \in \Lambda^r(\mathfrak{X})$ podemos escribir

$$\alpha = \sum_{1\le i_1<\cdots<i_r\quad\le n} \alpha_{i_1,\dots,i_r} \varepsilon_{i_1} \wedge \ldots \wedge \varepsilon_{i_r}$$

donde $\alpha_{i_1,\dots,i_r} = \alpha(E_{i_1},\dots E_{i_r})$. En particular $\Lambda^r(\mathfrak{X}) = \{0\}$ si $r > n$.

Corolario 6.1.5.1 *Si M es variedad diferenciable de dimensión n, entonces $\Omega^r(M) = 0$ si $r > n$.*

6.1.6. Pullback de formas exteriores.

Como se vió en el epígrafe 6.2.2, una aplicación diferenciable $\phi : M \to \bar{M}$ entre variedades induce un *pullback* ϕ^*:$\mathfrak{L}^r(\bar{M}) \to \mathfrak{L}^r(M)$, definido para $\bar{\alpha} \in \mathfrak{L}^r(\bar{M})$ por:

$$(\phi^*\bar{\alpha})(x)(\xi_1,\dots,\xi_r) = \bar{\alpha}(\phi(x))(d\phi(x)(\xi_1),\dots,d\phi(x)(\xi_1))$$

para todo $x \in M$, $\xi_1,..,\xi_r \in T_xM$. Es fácil comprobar que ϕ^* induce una aplicación $\mathbb{R}$-lineal

$$\phi^* : \Omega^r(\bar{M}) \to \Omega^r(M)$$

y como ϕ^* preserva el producto tensorial, se concluye fácilmente de la definición 6.1.3, que ϕ^* preserva el producto exterior, es decir:

$$\phi^*(\bar{\alpha} \wedge \bar{\beta}) = (\phi^*\bar{\alpha}) \wedge (\phi^*\bar{\beta})$$

para todo $\bar{\alpha}, \bar{\beta}$, formas exteriores de $\bar{M}$.

6.2. La diferencial exterior.

Demostraremos que fijada una variedad diferenciable, existe para cada grado r un único operador, $\mathbf{d}:\Omega^r(M) \to \Omega^{r+1}(M)$ $\mathbb{R}$-lineal, que verifica

1. $\mathbf{d}f = df$, y $\mathbf{d}(df) = 0$ para toda $f \in \mathfrak{F}(M)$.
2. $\mathbf{d}(\alpha \wedge \beta) = (\mathbf{d}\alpha) \wedge \beta + (-1)^r \alpha \wedge \mathbf{d}\beta$, si $\alpha \in \Omega^r(M)$

Denominamos *diferencial exterior* a este operador.

De hecho, con estos datos podríamos determinar ya su actuación analítica local. Por ejemplo:

si $\alpha = Adx + Bdy + Cdz$, entonces $d\alpha = dA \wedge dx + dB \wedge dy + dC \wedge dz=$

$$= \frac{\partial A}{\partial y}(dy \wedge dx) + \frac{\partial A}{\partial z}(dz \wedge dx) + \frac{\partial B}{\partial x}(dx \wedge dy) +$$
$$+ \frac{\partial B}{\partial z}(dz \wedge dy) + \frac{\partial C}{\partial x}(dx \wedge dz) + \frac{\partial C}{\partial y}(dy \wedge dx) =$$

$$= \left(\frac{\partial B}{\partial x} - \frac{\partial A}{\partial y}\right) dx \wedge dy + \left(\frac{\partial C}{\partial x} - \frac{\partial A}{\partial z}\right) dx \wedge dz + \left(\frac{\partial C}{\partial y} - \frac{\partial B}{\partial z}\right) dy \wedge dz$$

La demostración se hace en dos etapas:

(1) *Supongamos $M = \mathcal{U}$ dominio de una carta:*

Sea $\mathbf{c} = (u_1, \ldots u_m)$ una carta con dominio $M = \mathcal{U}$ sea $\boldsymbol{\alpha} \in \Omega^r(M)$

$$\boldsymbol{\alpha} = \sum_{1 \le i_1 < \cdots < i_r \le m} \alpha_{i_1,\ldots,i_1} du_{i_1} \wedge \ldots \wedge du_{i_r}$$

definamos entonces

$$\mathbf{d_c}\boldsymbol{\alpha} = \sum_{1 \le i_1 < \cdots < i_r \le m} (d\alpha_{i_1,\ldots,i_1}) \wedge du_{i_1} \wedge \ldots \wedge du_{i_r}$$

Evidentemente $\mathbf{d_c}:\Omega^r(M) \to \Omega^{r+1}(M)$ es una aplicación $\mathbb{R}-$lineal que verifica $\mathbf{d_c}f = df$, para todo $f \in \mathfrak{F}(M)$. Además,

$$\mathbf{d_c}(df) = \mathbf{d_c}\left(\sum_{j=1}^m \frac{\partial f}{\partial u_j} du_j\right) = \left(\sum_{j=1}^m d\left(\frac{\partial f}{\partial u_j}\right) \wedge du_j\right) =$$

$$= \sum_{i,j=1}^m \left(\frac{\partial^2 f}{\partial u_i \partial u_j}\right) du_i \wedge du_j =$$
$$= \sum_{1 \le i < j \le m} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial u_i \partial u_j} - \frac{\partial^2 f}{\partial u_j \partial u_i}\right) du_i \wedge du_j = 0$$

Demostraremos por último que $\mathbf{d_c}(\boldsymbol{\alpha} \wedge \boldsymbol{\beta}) = (\mathbf{d_c}\boldsymbol{\alpha}) \wedge \boldsymbol{\beta} + (-1)^r \boldsymbol{\alpha} \wedge \mathbf{d_c}\boldsymbol{\beta}$ si $\boldsymbol{\alpha} \in \Omega^r(M)$ y $\boldsymbol{\beta} \in \Omega^s(M)$. Creemos suficiente demostrarlo cuando $\boldsymbol{\alpha} = f du_{i_1} \wedge \ldots \wedge du_{i_r}$ y $\boldsymbol{\beta} = g du_{j_1} \wedge \ldots \wedge du_{j_s}$. Se tiene:

$$\begin{aligned}
\mathbf{d_c}(\boldsymbol{\alpha} \wedge \boldsymbol{\beta}) &= d(fg) \wedge du_{i_1} \wedge \ldots \wedge du_{i_r} \wedge du_{j_1} \wedge \ldots \wedge du_{j_s} \\
&= (gdf + fdg) \wedge du_{i_1} \wedge \ldots \wedge du_{i_r} \wedge du_{j_1} \wedge \ldots \wedge du_{j_s} \\
&= gdf \wedge du_{i_1} \wedge \ldots \wedge du_{i_r} + (-1)^r f du_{i_1} \wedge \ldots \wedge du_{i_r} \wedge dg \wedge du_{j_1} \wedge \ldots \wedge du_{j_s} \\
&= (\mathbf{d_c}\boldsymbol{\alpha}) \wedge \boldsymbol{\beta} + (-1)^r \boldsymbol{\alpha} \wedge \mathbf{d_c}\boldsymbol{\beta}
\end{aligned}$$

Como $\mathbf{d}$ es única, no depende de la carta $\mathbf{c}$ elegida, y podemos denotar $\mathbf{d_c} = \mathbf{d}_{\mathcal{U}}$

(2) *Caso general:*

Si $\boldsymbol{\alpha} \in \Omega^r(M)$ se define $\mathbf{d}\boldsymbol{\alpha}$, como la única $(r+1)-$ forma tal que para cada $\mathcal{U}$ abierto coordenado de M:

$$\mathbf{d}\boldsymbol{\alpha}|_{\mathcal{U}} = \mathbf{d}_{\mathcal{U}}\left(\boldsymbol{\alpha}|_{\mathcal{U}}\right)$$

■

Observación 6.2.0.1 *Nótese que se ha construido para la variedad m-dimensional M, la sucesión*

$$0 \xrightarrow{d} \Omega^0(M) \xrightarrow{d} \Omega^1(M) \xrightarrow{d} \cdots \xrightarrow{d} \Omega^{m-1}(M) \xrightarrow{d} \Omega^m(M) \xrightarrow{d} 0$$

con la propiedad $\mathbf{d}^2 = 0$, a partir de la cual se construye la sucesión de cohomología de deRham.

6.2.1. Expresión analítica global de la diferencial

Grados 1 y 2 Usando la identidad c) de **??** puede obtenerse una expresión anlítica explícita de la diferencial. Por ejemplo, se puede probar que si $\alpha \in \Omega^1(M)$, $V, W \in \mathfrak{X}(M)$ entonces:

$$\mathbf{d}\alpha(V,W) = V(\alpha(W)) - W(\alpha(V)) - \alpha([V,W])$$

ya que $\mathbf{d}\alpha(V,W) = (i_V\mathbf{d}\alpha)(W) = (L_V\alpha - \mathbf{d}(i_V\alpha))(W) = V(\alpha(W)) - \alpha([V,W]) - W(\alpha(V))$, y supuesta cierta esta fórmula se concluye análogamente que si $\alpha \in \Omega^2(M)$, $V, W, U \in \mathfrak{X}(M)$ se tiene:

$$\begin{gathered}
\mathbf{d}\alpha(V,W,U) = V(\alpha(W,U)) - W(\alpha(V,U)) + U(\alpha(V,W)) \\
-\alpha([V,W],U) + \alpha([V,U],W) - \alpha([W,U],V)
\end{gathered}$$

de forma general se tiene:

Caso general Para $\alpha \in \Omega^r(M)$, y $V_0, V_1, ..., V_r \in \mathfrak{X}(M)$ se tiene

$$\mathbf{d}\alpha(V_0, ..., V_r) = \sum_i^r (-1)^i V_i(\alpha(...\hat{V}_i...)) + \sum_{i<j} (-1)^{i+j} \alpha([V_i, V_j], ...\hat{V}_i, \hat{V}_j, ...)$$

6.2.2. Pullback

Sea $\phi : M \to \bar{M}$ aplicación diferenciable, y $\bar{\alpha} \in \Omega^r(\bar{M})$. Entonces:

$$\mathbf{d}(\phi^* \bar{\alpha}) = \phi^*(\mathbf{d}\bar{\alpha})$$

En particular $\phi^* : \Omega^r(\bar{M}) \to \Omega^r(M)$ aplica $Z^r(\bar{M})$ en $Z^r(M)$, y *$B^r(\bar{M})$ en $B^r(M)$.*

Demostración:

Es suficiente comprobarlo para las funciones y diferenciales de funciones. Pero, $\phi^*(\mathbf{d}\bar{f}) = \phi^*(d\bar{f}) = \mathbf{d}(\phi^* f)$, y $\mathbf{d}(\phi^* d\bar{f}) = \mathbf{d}(\mathbf{d}(\phi^* \bar{f})) = 0 = \phi^*(\mathbf{d}(d\bar{f}))$. Así si $\alpha \in \Omega^r(\bar{M})$ se escribe $\bar{\alpha} = \bar{f} d\bar{f}^1 \wedge \ldots \wedge d\bar{f}^r$, es $\mathbf{d}\bar{\alpha} = d\bar{f} \wedge d\bar{f}^1 \wedge \ldots \wedge d\bar{f}^r$

$$\mathbf{d}(\phi^* \bar{\alpha}) = \mathbf{d}\{\phi^*(\bar{f} d\bar{f}^1 \wedge \ldots \wedge d\bar{f}^r)\} = \mathbf{d}\{(\phi^* \bar{f})\phi^*(d\bar{f}^1) \wedge \ldots \wedge \phi^*(d\bar{f}^r)\} =$$

$$\phi^* d\bar{f} \wedge \phi^*(d\bar{f}^1) \wedge \ldots \wedge \phi^*(d\bar{f}^r)\} = \phi^*(\mathbf{d}\alpha)$$

ver[5], [2], [1], [3], [6], [4]

Referencias

[1] A. M. . A. Fomenko. *A course of differential geometry and topology.* Mir Publisher Moscow, 1988.

[2] J. R. . J. Gamboa. *Introduccion al estudio de las variedades.* Ed. Alhambra, 1980.

[3] Hopf. *Introduccion al estudio de superficies.* Ed. Alhambra, 1980.

[4] W. Klingenberg. *Curso de Geometría diferencial.* Ed. Alhambra, 1978.

[5] J. Munkres. *Topology A first course.* Prentice-Hall, 1975.

[6] Thorpe. *Introduccion al estudio de superficies.* Ed. Alhambra, 1980.

Índice alfabético