SOBRE LA ESTRUCTURA CONFORME
DE LOS ESPACIO_TIEMPO

Javier Lafuente

INDICE

SOBRE LA ESTRUCTURA CONFORME

DE LOS ESPACIO-TIEMPO

Javier Lafuente

§1 ESTRUCTURAS PROYECTIVAS Y CONFORMES. TEOREMA DE WEYL.

En lo que sigue M será una variedad diferenciable real conexa y con dimensión finita $n\geq 2$. En este artículo "conexión" es sinónimo de "conexión lineal (no necesariamente simétrica). "Métrica" significa métrica semi_Riemanniana. Una métrica semi_Riemanniana no Riemanniana la llamaremos métrica indefinida. Recuerdese que una métrica de Lorentz es no definida y tiene signatura $(-,+,\ldots,+)$.

Finalmente, si g es una métrica en M, una conexión ∇ se dirá g_métrica si preserva el producto g por transporte paralelo, es decir $\nabla g=0$. Si además ∇ es simétrica, se llama conexión de Levi_Civita (que como es bien conocido, fijada g, existe y es única).

1.1 Trayectorias geodésicas. Equivalencia proyectiva de conexiones.

Una trayectoria geodésica de una conexión ∇ en M, es la imagen de una geodésica de ∇.

Dos conexiones ∇ y $\bar{\nabla}$ en M se dicen proyectivamente equivalentes si tienen las mismas trayectorias geodésicas. Esta relación es de equivalencia, y se denotará por $[\nabla]$ la clase de equivalencia proyectiva definida por la conexión ∇. Se denomina $\mathcal{P}=[\nabla]$ estructura proyectiva en M.

Nótese que dada una conexión, existe una única simétrica con el mismo spray de geodésicas. Por tanto cada estructura proyectiva admite siempre un representante simétrico.

TEOREMA 1.1.1

Dos conexiones simétricas ∇ y $\bar{\nabla}$ son proyectivamente equivalentes si y solo si existe una 1-forma α en M tal que:

$$\bar{\nabla}_X Y-\nabla_X Y=\alpha(X)Y+\alpha(Y)X \text{ para todo } X,Y\in\mathfrak{X}(M)$$

Esquema de la demostración:

Las conexiones ∇ y $\bar{\nabla}$ tienen las mismas trayectorias geodésicas, si y solo si el tensor diferencia $\Delta:\mathfrak{X}(M)\times\mathfrak{X}(M)\ni(X,Y)\longrightarrow\bar{\nabla}_X Y-\nabla_X Y\in\mathfrak{X}(M)$ verifica:

$$\Delta(X,X) \text{ es proporcional a } X \text{ para todo } X\in\mathfrak{X}(M)$$

Restringiendonos a $V=T_pM$, se prueba que la función $\beta_p:T_pM\longrightarrow\mathbb{R}$ con $\Delta(v,v)=\beta_p(v)v$ es diferenciable, y homogenea de grado 1. Por un teorema de Euler, se concluye que β_p es una forma lineal. Finalmente se ve que la asignación $p \longrightarrow \beta_p$ define una 1-forma en M.

Como las conexiones ∇ y $\bar{\nabla}$ son simétricas, el tensor Δ es simétrico, y se concluye que la 1-forma $\alpha = \frac{1}{2}\beta$ es la buscada.

Veamos de forma más explícita porqué ∇ y $\bar{\nabla}$ tienen las mismas geodésicas:

LEMA 1.1.2

Sean ∇ y $\bar{\nabla}$ conexiones simétricas proyectivamente equivalentes y sea α la 1-forma en M tal que:

$$\bar{\nabla}_X Y - \nabla_X Y = \alpha(X)Y + \alpha(Y)X \text{ para todo } X,Y \in \mathfrak{X}(M)$$

Si $\gamma:[0,b) \ni t \longrightarrow \gamma(t) \in M$ es una ∇_geodésica, entonces se define un cambio de parámetro $[0,b) \ni t \longrightarrow s(t) = \int_0^t exp(\Lambda(\zeta))d\zeta \in [0,b')$, siendo:

$$\Lambda(\zeta) = 2\int_0^\zeta \alpha(\gamma'(t))dt$$

Entonces $\bar{\gamma}:[0,b') \ni s \longrightarrow \gamma(t(s)) \in M$ es la $\bar{\nabla}$_geodésica con $\bar{\gamma}'(0) = \gamma'(0)$, siendo $[0,b') \ni s \longrightarrow t(s) \in [0,b)$ la aplicación inversa de $t \longrightarrow s(t)$.

La demostración se obtiene por simple comprobación.

1.2 Estructura conforme y estructura causal.

Dos métricas g y $\bar{g}$ de M se dicen conformemente equivalentes si existe una función $\sigma: M \longrightarrow \mathbb{R}^+$ diferenciable, con $\bar{g} = e^{2\sigma}g$. Esta relación es de equivalencia, y se denotará [g] la clase de equivalencia definida por la métrica g. Se denomina a $\mathcal{C}=[g]$ estructura conforme en M.

La estructura conforme $\mathcal{C}=[g]$ se dice indefinida, Riemanniana, o Lorentz, si g o -g lo son.

Una estructura conforme Lorentz $\mathcal{C}$ con una orientación tiempo se llama estructura causal $\mathcal{C}^+$. Los puntos de M se consideran entonces sucesos. Usaremos líbremente los conceptos definiciones y resultados de la teoría de causalidad. Nuestra referencia en este punto es [ON].

OBSERVACION 1.2.1

En una estructura causal Lorentz $\mathcal{C}$ en M, los conceptos de curva temporal causal y luz, desprovistos del adjetivo pasada ó futura mantienen su validez aunque no sea orientable tiempo.

Conviene en particular recordar el siguiente teorema de Causalidad:

TEOREMA 1.2.2

Sea (M,g) una variedad de Lorentz, y $\gamma:[a,b] \longrightarrow M$ una curva causal uniendo $p=\gamma(a)$ con $q=\gamma(b)$. Entonces, existe siempre una curva temporal (arbitrariamente próxima a γ) *uniendo p a q, a no ser que γ sea un segmento de trayectoria* *geodésica luz sin puntos conjugados.*■

Se concluye de aquí que la propiedad de ser *segmento de trayectoria geodésica luz sin puntos conjugados*, solo depende de la estructura conforme $\mathcal{C}$. que determina por tanto univocamente las trayectorias geodésicas luz, de cualquier métrica $g \in \mathcal{C}$. Establecemos la siguiente

DEFINICION 1.2.3

Sea $\mathcal{C}$ una estructura conforme Lorentz en M.

a) Dos puntos $p,q \in M$ se dicen luz_separados, si hay una curva causal -pero no temporal- que los une.

b) Un rayo de luz, es la trsayectoria definida por una curva luz $\gamma: I \longrightarrow M$ que verifica la siguiente propiedad:

Para cada $s \in I$, existe $\varepsilon>0$ tal que para todo $t,t' \in (s-\varepsilon, s+\varepsilon) \cap I$ $\gamma(t)$ está luz separado de $\gamma(t')$.

Por el teorema de causalidad se concluye:

COROLARIO 1.2.4

En una estructura conforme Lorentz $\mathcal{C}$, los rayos de luz son las trayectorias geodésicas asociadas a cualquier métrica $g \in \mathcal{C}$.■

Más adelante en 1.3 se obtendrá generalización de este resultado para estructuras conformes indefinidas.

LEMA 1.2.5

Sean g y $\bar{g}$ métricas de M con $\bar{g}=e^{2\sigma}g$ para cierta función $\sigma: M \longrightarrow \mathbb{R}^+$ diferenciable, y supóngase ∇ la conexión de Levi_Civita de g. Entonces, la conexión $\bar{\nabla}$ de Levi_Civita de $\bar{g}$, viene caracterizada por la identidad:

$$g(\bar{\nabla}_X Y,Z)=g(\nabla_X Y,Z)+X(\sigma)g(Y,Z)+Y(\sigma)g(X,Z)-Z(\sigma)g(X,Y)$$

para todo X, Y, $Z \in \mathfrak{X}(M)$.

Demostración:

La fórmula anterior permite definir una única conexión $\bar{\nabla}$ que es simétrica. Por otra parte, se comprueba que

$$X(\bar{g}(Y,Z))=$$
$$X(e^{2\sigma}g(Y,Z))=e^{2\sigma}\{X(g(Y,Z))+2X(\sigma)g(Y,Z)\}=e^{2\sigma}\{g(\bar{\nabla}_X Y,Z)+g(Z,\bar{\nabla}_X Y)\}=$$
$$\bar{g}(\bar{\nabla}_X Y,Z)+\bar{g}(Z,\bar{\nabla}_X Y)$$

Por tanto $\bar{\nabla}$ es la conexión de Levi_Civita para $\bar{g}$. ■

Aplicando un conocido resultado de álgebra lineal relativo al hecho de que el cono de luz, si es no vacio, determina salvo constantes multiplicativas no nulas, la forma cuadrática que lo define , se concluye:

TEOREMA 1.2.6

Dos métricas indefinidas en M dan lugar la misma estructura conforme $\mathcal{C}$ si y solo si ambas métricas definen los mismos conos de luz en cada espacio tangente. ∎

OBSERVACION 1.2.7

Una definición alternativa de estructura conforme (indefinida) en M, consiste en identificarla con una asignación *suave* de un cono de luz en cada espacio tangente. La *suavidad* se refiere a la existencia de una métrica indefinida en el entorno de cada punto, que induzca en dicho entorno los conos de luz que la estructura asigna. Sin embargo, usando particiones diferenciables se prueba la existencia de alguna métrica global con este requisito.

1.3 Conexiones conformes.

Sea $\mathcal{C}$ una estructura conforme en M, y ∇ una conexión. Se dice que ∇ es $\mathcal{C}$-conforme si induce transformaciones lineales conformes (entre los espacios tangentes) por transporte paralelo. Esto equivale a decir en el caso indefinido que ∇ preserva los conos de luz por transporte paralelo. En particular, las geodésicas de las conexiones conformes en estructuras de Lorentz, mantienen un caracter causal (temporal, luz, o espacial) definido.

TEOREMA 1.3.1

Sea $\mathcal{C}=[g]$ una estructura conforme, $\bar{\nabla}$ una conexión simétrica, y ∇ la conexión de Levi-Civita asociada a g. La condición necesaria y suficiente para que $\bar{\nabla}$ sea $\mathcal{C}$-conforme es que exista un campo de vectores $A\in\mathfrak{X}(M)$ tal que:

$$\bar{\nabla}_X Y-\nabla_X Y=\alpha(X)Y+\alpha(Y)X-g(X,Y)A \text{ para todo } X,\ Y\in\mathfrak{X}(M)$$

donde α es la 1-forma g-métricamente equivalente a A, $\alpha:\mathfrak{X}(M)\ni X \longrightarrow g(A,X)\in\mathcal{F}(M)$.

En particular, $A=\mathrm{grad}\ \sigma$, y $\alpha=d\sigma$ cuando ∇ y $\bar{\nabla}$ son las conexiones de Levi-Civita asociadas a g y $\bar{g}=e^{2\sigma}g$ respectivamente.

Por otra parte, las trayectorias geodésicas luz de dos conexiones $\mathcal{C}$-conformes simétricas, necesariamente coinciden.

Para probar el Teorema es necesario el siguiente Lema técnico cuya demostración aparece en el Apendice III:

LEMA 1.3.2

Fijada la conexión $\mathcal{C}$-conforme ∇, y una 1-forma $\alpha\in\mathfrak{X}^*(M)$, entonces la conexión $\tilde{\nabla}$ definida por:

$$\tilde{\nabla}_X Y=\nabla_X Y+\alpha(X)Y$$

es conforme, y de hecho, fijado $g\in\mathcal{C}$ puede elegirse α de forma que la conexión

$\tilde{\nabla}$ *sea g-métrica.*

Por otra parte la relación entre los tensores de torsión T *y* $\tilde{T}$ *de* ∇ *y* $\tilde{\nabla}$ *es:* $\tilde{T}(X,Y)=T(X,Y)+\alpha(X)Y-\alpha(Y)X$ ■.

Demostración de 1.3.1:

Supongase primero que partimos de una conexión (simétrica) $\bar{\nabla}$ $\mathscr{C}$-conforme.

Por el lema, existe una conexión g-métrica $\tilde{\nabla}$, con $\bar{\nabla}_X Y=\tilde{\nabla}_X Y+\alpha(X)Y$ para cierta 1-forma α de M, y como la torsión $\bar{T}$ de $\bar{\nabla}$ es nula, se tiene:

$$\tilde{T}(X,Y)=\alpha(Y)X-\alpha(X)Y$$

que en coordenadas locales tiene por componentes:

$$\tilde{T}^k_{ij}=\delta^k_i\alpha_j-\delta^k_j\alpha_i$$

Si ∇ es la conexión de Levi-Civita asociada a g, la relación que existe entre los símbolos de Christoffer de ∇ y $\tilde{\nabla}$ es la siguiente:

$$\tilde{\Gamma}^m_{ki}-\Gamma^m_{ki}=\frac{1}{2}\{\tilde{T}^m_{ki}+g^{mr}\tilde{T}^s_{rk}g_{is}+g^{mr}\ \tilde{T}^s_{ri}g_{ks}\}=$$

$$\frac{1}{2}\{\delta^m_k\alpha_i-\delta^m_i\alpha_k+g^{mr}(\delta^s_r\alpha_k-\delta^s_k\alpha_r)g_{is}+g^{mr}(\delta^s_r\alpha_i-\delta^s_i\alpha_r)g_{ks}\}=$$

$$=\frac{1}{2}\{\delta^m_k\alpha_i-\delta^m_i\alpha_k+\delta^m_i\alpha_k-a^m g_{ki}+\delta^m_k\alpha_i-a^m g_{ki}\}=\ \delta^m_k\alpha_i-g^{mr}\alpha_r g_{ki}=\ \delta^m_k\alpha_i-a^m g_{ki}$$

donde $a^m=g^{mr}\alpha_r$, y $A=a^m\dfrac{\partial}{\partial x^m}$ es el campo métricamente equivalente a α. Así:

$$\tilde{\nabla}_X Y=\nabla_X Y+\alpha(Y)X-g(X,Y)A$$

Por tanto: $\bar{\nabla}_X Y=\tilde{\nabla}_X Y+\alpha(X)Y=\nabla_X Y+\alpha(Y)X+\alpha(X)Y-g(X,Y)A$.

Recíprocamente, dado α, se toma el campo A g_métricamente equivalente, y se prueba que la conexión $\tilde{\nabla}$ definida por

$$\tilde{\nabla}_X Y=\nabla_X Y+\alpha(Y)X-g(X,Y)A$$

es g_métrica, es decir:

$$\tilde{\nabla}_X(g(Y,Z))=g(\tilde{\nabla}_X Y,Z)+g(Y,\tilde{\nabla}_X Z)$$

y por el lema 1.3.2 la conexión $\bar{\nabla}$ definida por:

$$\bar{\nabla}_X Y=\nabla_X Y+\alpha(X)Y+\alpha(Y)X-g(X,Y)A=\tilde{\nabla}_X Y+\alpha(X)Y \quad \text{para todo } X,\ Y\in\mathfrak{X}(M)$$

es conforme y simétrica.

El caso particular $\alpha=d\sigma$ con $\sigma:M\longrightarrow\mathbb{R}$ diferenciable, está contemplado en el lema 1.2.5.

La última afirmación relativa a que las trayectorias geodésicas de ∇ y $\bar{\nabla}$ coinciden se deduce directamente del hecho de que para todo campo luz $X\in\mathfrak{X}(M)$ se tiene $\bar{\nabla}_X X-\nabla_X X=2\alpha(X)X$. Así si X es ∇-geodésico, entonces $\bar{\nabla}_X X=2\alpha(X)X$, y X es pregeodésico. Otra demostración más cuidada es consecuencia del siguiente:

COROLARIO 1.3.3

Supóngase $\mathscr{C}$ *indefinida. Dadas* ∇ *y* $\bar{\nabla}$ *conexiones* $\mathscr{C}$*-conformes simétricas, existe una conexión D simétrica con las mismas trayectorias geodésicas que* ∇, *y las mismas geodésicas luz que $\bar{\nabla}$.*

En particular ∇ y $\bar{\nabla}$ tienen las mismas trayectorias geodésicas luz.

Demostración:

Usando el teorema, se prueba que existe una 1_forma α de manera que:

$$\bar{\nabla}_X Y=\nabla_X Y+\alpha(X)Y+\alpha(Y)X-g(X,Y)A \text{ para todo } X,Y\in\mathfrak{X}(M)$$

siendo g tomando *cualquier* métrica auxiliar con $\mathcal{C}=[g]$, y A el campo g_equivalente a α. (Nótese que el tensor $(X,Y)\longrightarrow g(X,Y)A$ solo depende de α y la estructura conforme $\mathcal{C}$).

La conexión D definida por $D_X Y=\nabla_X Y+\alpha(X)Y+\alpha(Y)X$ es proyectivamente equivalente a ∇ y tiene las mismas geodésicas luz que $\bar{\nabla}$, pues $D_X X=\bar{\nabla}_X X$ para los campos luz.

OBSERVACION 1.3.4

En el caso Lorentz, el corolario anterior, junto con 1.2.4 nos permite afirmar que los rayos de luz son trayectorias geodésicas de cualquier conexión conforme

1.4 Espacio de Weyl.

En lo que sigue $\mathcal{C}$ es una estructura conforme Lorentz en M.

Si U es un entorno de $p\in M$, se denota por $J(p,U)$ ($I(p,U)$) al conjunto de puntos x de U que se unen a p por una curva causal (temporal).

Por el teorema de Causalidad, cada punto $x\in\mathcal{C}^*(p,U)=J(p,U)-I(p,U)$ puede unirse a p mediante un rayo de luz τ_x contenido en U. Denotamos por $\mathcal{C}(p,U)=\mathcal{C}^*(p,U)\cup\{p\}$

Tomando un entorno normal del punto p respecto a una métrica auxiliar $g\in\mathcal{C}$, puede demostrarse:

LEMA 1.4.1

Para cada punto $p\in M$ existe un entorno U de p (arbitrariamente pequeño), de forma que $U-\mathcal{C}(p,U)$ es abierto, y se descompone en tres componentes conexas $I^+(p,U)$, $I^-(p,U)$, y $E(p,U)$. ($I(p,U)=I^+(p,U)\cup I^-(p,U)$)

Por otra parte, cualquier curva α que parte de p, con vector inicial espacial, entra en $E(p,U)$.■

Supóngase ahora que $\mathcal{P}$ es una estructura proyectiva definida por cierta conexión simétrica ∇ en M.

Discutiremos a continuación la equivalencia entre dos criterios de compatibilidad causal entre $\mathcal{P}$ y $\mathcal{C}$

TEOREMA 1.4.2

Son equivalentes las siguientes afirmaciones:

(a) En cada punto $p\in M$ existe un entorno U de p arbitrariamente pequeño en donde se verifica la siguiente propiedad:

Si $x\in J(p,U)$, existe una geodésica causal contenida en U, uniendo p con x.

(b) Los rayos de luz de $\mathcal{C}$ son trayectorias geodésicas de $\mathcal{P}$.

Demostración:

(a)⇒(b) Fijado $p\in M$, podemos suponer que el entorno U de la propiedad (a) es un entorno normal de p respecto a la conexión ∇, y en él se verifica el Lema 1.4.1. De esta manera, para cada $x\in\mathcal{C}(p,U)$ existe un rayo de luz τ_x en U uniendo p con x. Por la condición (a) (y ser U ∇-normal) existe una (única) geodésica $\gamma_{px}:[0,1]\longrightarrow U$, uniendo p y x, que es curva causal. Pero si la tra

yectoria de γ_{px} no es τ_x, se concluye que $x\in I(p,U)$ lo cual es contradictorio. Esto prueba que el trayo de luz τ_x es trayectoria geodésica de ∇.

(b)⇒(a) Fijado $p\in M$, tomemos U entorno normal respecto a ∇, y supongase que en él se verifica el Lema 1.4.1.

Sea $x\in J(p,U)$. Si $x\in\mathcal{C}(p,U)$ el rayo de luz τ_x que une p con x es la geodésica causal buscada.

Podemos suponer por ejemplo, que $x\in I^+(p,U)$, y sea $\gamma:[0,1]\longrightarrow U$ la única geodésica que une p con x. Si $\gamma'(0)$ es luz, por la hipótesis (b) γ es rayo de luz y estamos en el caso anterior. Prrobemos que $\gamma'(0)$ es temporal:

Si $\gamma'(0)$ es espacial, hay un $\varepsilon>0$ con $\gamma(\varepsilon)\in E(p,U)$. Como $\gamma(1)=x\in I^+(p,U)$ se concluye por el lema que para cierto r es $y=\gamma(r)\in\mathcal{C}(p,U)$. Esto supone que hay dos trayectorias geodésicas en U: $\gamma([0,r])$ y el rayo de luz τ_y , que unen p con y en U, lo cual es contradictorio.

Así, $\gamma'(0)$ es un vector temporal. Como $\gamma'(t)$ nunca puede ser vector luz (por la hipótesis im γ sería un rayo de luz y $\gamma'(0)$ sería luz) se concluye que γ es un curva temporal, tal y como queriamos demostrar.

DEFINICION 1.4.3

Cuando la estructura proyectiva $\mathcal{P}$ verifica las condiciones equivalentes (a) y (b), se dice que $\mathcal{P}$ es compatible con $\mathcal{C}$. A la terna $(M,\mathcal{P},\mathcal{C})$ se le denomina espacio de Weil.

Como la estructura proyectiva $\mathcal{P}$ inducida por una conexión simétrica ∇ conforme, verifica la propiedad (b) (ver 1.3.4), se concluye que $\mathcal{P}$ es compatible con $\mathcal{C}$. Demostraremos a continuación que todas las estructuras proyectivas $\mathcal{P}$

compatibles con $\mathcal{C}$ pueden obtenerse por este procedimiento.

TEOREMA 1.4.3 (de Weyl)

Dado un espacio de Weyl $(M,\mathcal{P},\mathcal{C})$, existe una única conexión simétrica $\mathcal{C}$-conforme $\bar{\nabla}\in\mathcal{P}$.

Esquema para la demostración del Teorema de Weyl.

Se requiere del siguiente resultado de álgebra lineal:

LEMA 1.4.4

Sea $\Delta:V\times V\longrightarrow V$ un tensor simétrico sobre el espacio vectorial de Lorentz V. Supóngase que $\Delta(u,u)$ es proporcional a u para todo vector luz u de V.

Existe entonces una única 1-forma $\alpha\in V^*$, y un único vector $a\in V$ tales que:

$$\Delta(v,w)=\langle v,w\rangle a+\beta(v)w+\beta(w)v \text{ para todo } v,\ w\in V$$

■

El esquema de la demostración del teorema de Weyl es ahora el siguiente:

Fijemos $g\in\mathcal{C}$, y sea D la conexión de Levi-Civita asociada. Fijemos también una conexión simétrica $\nabla\in\mathcal{P}$. Considérese ahora el tensor diferencia de ambas:

$$\Delta(X,Y)=\nabla_X Y-D_X Y \quad (X,Y\in\mathfrak{X}(M))$$

Como las trayectorias geodésicas luz de $\mathcal{C}$ y $\mathcal{P}$ coinciden, Δ define en cada espacio tangente un tensor de las características del Lema, y existen $\beta\in\mathfrak{X}^*(M)$ y $A\in\mathfrak{X}(M)$ tales que:

$$\Delta(X,Y)=g(X,Y)A+\beta(X)Y+\beta(Y)X \text{ para todo } X,Y\in\mathfrak{X}(M)$$

si α es la 1-forma métricamente equivalente a A, se toma entonces:

$$\bar{\nabla}_X Y=\nabla_X Y-(\beta+\alpha)(X)Y-(\beta+\alpha)(Y)X \ , \ \bar{D}_X Y=D_X Y-\alpha(X)Y-\alpha(Y)X+g(X,Y)A$$

Por el Teorema 1.1.1, $\bar{\nabla}\in\mathcal{P}$ y por 1.3.1, $\bar{D}\in\mathcal{C}$, y se tiene:

$$\bar{\nabla}_X Y-\bar{D}_X Y=\Delta(X,Y)-\beta(X)Y-\beta(Y)X-g(X,Y)A=0$$

por tanto $\bar{\nabla}=\bar{D}$ es la conexión buscada.

Por otra parte, si $\tilde{\nabla}$ verifica las mismas condiciones, entonces:

$$\tilde{\nabla}_X Y-\bar{\nabla}_X Y=\tilde{\beta}(X)Y+\tilde{\beta}(Y)X=\tilde{\nabla}_X Y-\bar{D}_X Y=\tilde{\alpha}(X)Y+\tilde{\alpha}(Y)X-g(X,Y)\tilde{A}$$

para cierta 1-forma $\beta\in\mathfrak{X}^*(M)$, y cierto campo $\tilde{A}\in\mathfrak{X}(M)$.

Necesariamente es $\tilde{A}=0$, con lo que $\tilde{\alpha}=\tilde{\beta}=0$, y $\bar{\nabla}=\tilde{\nabla}$.

§2 CARACTERIZACIÓN DE LAS CONEXIONES CONFORMES LOCALMENTE MÉTRICAS.

Por simplicidad supondremos ahora que la variedad M es topológicamente orientable.

2.1 Operadores de Divergencia.

Un operador $\mathrm{div}:\mathfrak{X}(M)\longrightarrow\mathcal{F}(M)$ será denominado operador divergencia si para todo $X,Y\in\mathfrak{X}(M)$ y todo $f\in\mathcal{F}(M)$ se verifica:

OD1) $\mathrm{div}(X+Y)=\mathrm{div}(X)+\mathrm{div}(Y)$.

OD2) $\mathrm{div}(fX)=X(f)+f\,\mathrm{div}(X)$.

TEOREMA 2.1.1

El conjunto $\mathcal{D}(M)$ de operadores divergencia en M tiene estructura natural de espacio afín, sobre el espacio vectorial real de las 1-formas $\mathfrak{X}^*(M)$. Es decir:

(1) Si div, $\mathrm{div}'\in\mathcal{D}(M)$ entonces $\mathrm{div}'-\mathrm{div}\in\mathfrak{X}^*(M)$.

(2) Si $\mathrm{div}\in\mathcal{D}(M)$, entonces $\mathcal{D}(M)=\mathrm{div}+\mathfrak{X}^*(M)$.

PROPOSICION 2.1.2

Cualquier operador $\mathrm{div}\in\mathcal{D}(M)$ es localizable, es decir:

Si U es abierto de M, existe un único operador $\mathrm{div}|U\in\mathcal{D}(U)$ tal que:

$$(\mathrm{div}|U)(X|U)=(\mathrm{div}\ X)|U \text{ para todo } X\in\mathfrak{X}(U).$$

EJEMPLO 2.1.3

Si Ω es una forma de volumen en M, el operador divergencia usual div_Ω definido por la siguiente identidad, para todo $X\in\mathfrak{X}(M)$:

$$L_X\Omega=(\mathrm{div}_\Omega X)\ \Omega$$

es un operador divergencia que denominamos trivial.

PROPOSICION 2.1.4

Si Ω y Ω' son dos formas de volumen en M con $\Omega'=e^{\sigma}\Omega$ para cierta función diferenciable $\sigma:M\longrightarrow\mathbb{R}$ entonces:

$$\mathrm{div}_{\Omega'}=\mathrm{div}_\Omega+d\sigma$$

En particular se verifica la equivalencia:

$$\mathrm{div}_\Omega=\mathrm{div}_{\Omega'}\Leftrightarrow\ \exists\lambda\in\mathbb{R}^+ \text{ con } \Omega'=\lambda\Omega$$

2.2 Trivialización local.

Una trivialización local de un operador $\mathrm{div}\in\mathcal{D}(M)$ es un par (U,Ω) donde U es un abierto de M, Ω es un forma de volumen en U, y se verifica:

$$\mathrm{div}|U=\mathrm{div}_\Omega$$

El operador $\mathrm{div}\in\mathcal{D}(M)$ se denomina localmente trivial, si admite una trivialización local por cada punto de M.

OBSERVACIONES 2.2.1

1) Si (U,Ω) y (U',Ω') son dos trivializaciones locales del operador $div\in\mathcal{D}(M)$ entonces en cada componente conexa V de $U\cap U'$ existe $\lambda\in\mathbb{R}^+$ con $\Omega'|V=(\lambda\Omega)|V$.

2) Puede establecerse por tanto de forma natural, una "Teoría de Transporte de formas de volumen a lo largo de curvas" respecto de un operador divergencia localmente trivial.

TEOREMA 2.2.2

a) Sea Ω forma de volumen en M, y α 1-forma. El operador $div=div_\Omega+\alpha\in\mathcal{D}(M)$ es localmente trivial si y solo si α es cerrada, y es trivial, si y solo si α es exacta.

b) Un operador $div\in\mathcal{D}(M)$ es localmente trivial si y solo si verifica:

OD3) $div\ [X,Y]=X(div\ Y)-Y(div\ X)$

c) Los conjuntos $\mathcal{T}(M)$ y $\mathcal{L}(M)$ de operadores divergencia triviales y localmente triviales respectivamente, son subespacios afines de $\mathcal{D}(M)$ con espacios vectoriales asociados respectivos $B^1(M)$ y $Z^1(M)$.

2.3 Operador de Divergencia de una conexión.

Fijada una conexión ∇ en M, se prueba que el operador:

$$div_\nabla:\mathfrak{X}(M)\ni X\longrightarrow \mathrm{Traza}(\mathfrak{X}(M)\ni V\longrightarrow\nabla_V X)\in\mathcal{F}(M)$$

es un operador de divergencia, que se denomina operador divergencia asociado a la conexión ∇.

Se dice que ∇ preserva localmente formas de volumen por transporte paralelo (brevemente ∇ tiene volumen local) si para todo punto $p\in M$ existe U abierto con $p\in U$, y Ω forma de volumen en U tal que $\nabla\Omega=0$ en U. Se dice entonces que Ω es un volumen local para ∇. Si U=M se dice que ∇ tiene volumen global, y Ω es volumen global para ∇.

TEOREMA 2.3.1

Sea ∇ una conexión en M:

a) La condición necesaria y suficiente para que ∇ preserve una forma de volumen Ω por transporte paralelo es que $div_\nabla=div_\Omega$.

b) La condición necesaria y suficiente para que ∇ tenga volumen local es que div_∇ sea localmente trivial. De hecho, (U,Ω) es una trivialización local de div_∇ si y solo si Ω es un volumen local para ∇.

La expresión local del operador div_∇ en las coordenadas (U,φ) de una carta es:

$$div_\nabla\left(\sum X^i\frac{\partial}{\partial x^i}\right)=\sum\left(\frac{\partial X^i}{\partial x^i}+\Gamma_i X^i\right)\text{ donde }\Gamma_i=\sum\Gamma^k_{ik}$$

Denotando por $\Gamma_\varphi=\Gamma_i dx^i$, *y* div_φ *el operador divergencia inducido por la forma de volumen canónica* $\Omega_\varphi=dx^1\wedge\ldots\wedge dx^n$ *se verifica en U:*

$$\mathrm{div}_\nabla=\mathrm{div}_\varphi+\Gamma_\varphi$$

■

Los apartados a) y b) están probados en el Apendice II Teorema II.4.1.

COROLARIO 2.3.2

La condición necesaria y suficiente para que la conexión ∇ *admita volumen local es que para cada carta* (U,φ) *se verifique:*

$$d(\Gamma_\varphi)=0$$

2.4 Contracciones del tensor de Curvatura. Tensor de Ricci y forma trázica.

Dada una conexión ∇ en M adoptamos la siguiente definición de tensor R de curvatura:

$$R(X,Y)Z=-\nabla_X\nabla_Y Z+\nabla_Y\nabla_X Z+\nabla_{[X,Y]}Z \text{ para } X,Y,Z\in\mathfrak{X}(M)$$

En las coordenadas $(U,\varphi=(x^1,\ldots,x^n))$ de una carta se tiene:

$$R\left(\frac{\partial}{\partial x^i},\frac{\partial}{\partial x^j}\right)\frac{\partial}{\partial x^k}=R^h_{kij}\frac{\partial}{\partial x^h}$$

Se define el tensor de Ricci por:

$$\mathrm{Ricc}(X,Y)=\mathrm{Traza}\left(\mathfrak{X}(M)\ni V\longrightarrow R(X,V)Y\right) \text{ para } X,Y\in\mathfrak{X}(M)$$

y en coordenadas podemos escribir:

$$\mathrm{Ricc}\left(\frac{\partial}{\partial x^i},\frac{\partial}{\partial x^k}\right)=\mathrm{Ricc}_{ik}=\sum_h R^h_{kih}$$

Las otras contracciones de R son:

$$\overline{\mathrm{Ricc}}(X,Y)=\mathrm{Traza}\left(\mathfrak{X}(M)\ni V\longrightarrow R(V,X)Y\right) \text{ para } X,Y\in\mathfrak{X}(M)$$

$$\mathrm{TRZ}(X,Y)=\mathrm{Traza}\left(\mathfrak{X}(M)\ni V\longrightarrow R(X,Y)V\right) \text{ para } X,Y\in\mathfrak{X}(M)$$

Como $R(X,V)Y=-R(V,X)Y$ se deduce que $-\mathrm{Ricc}=\overline{\mathrm{Ricc}}$, y de la identidad:

$$R(X,V)Y+R(V,Y)X+R(Y,X)V=0$$

se concluye que $\mathrm{Ricc}(X,Y)-\mathrm{Ricc}(Y,X)=\mathrm{TRZ}(X,Y)$.

El tensor TRZ es una 2-forma que denominamos aquí forma trázica. Se tiene por tanto:

TEOREMA 2.4.1

El tensor de Ricci de una conexión ∇ *en M es simétrico si y solo si la forma trázica TRZ es identicamente nula.* ■

Por otra parte, En las coordenadas locales $(U,\varphi=(x^1,\ldots,x^n))$, si como antes $\Gamma_\varphi=\Gamma_i dx^i$ con $\Gamma_i=\sum\Gamma^k_{ik}$ se verifica:

$$TRZ=d(\Gamma_\varphi)$$

En efecto, se tiene: $TRZ_{kr}=\sum_h R^h_{hkr}$, y como:

$R^i_{jkr}=\frac{\partial}{\partial x^r}\Gamma^i_{kj}-\frac{\partial}{\partial x^k}\Gamma^i_{rj}+\Gamma^i_{rm}\Gamma^m_{kj}-\Gamma^i_{km}\Gamma^m_{rj}$, se tiene, $TRZ_{kr}=\frac{\partial}{\partial x^r}\Gamma_k-\frac{\partial}{\partial x^k}\Gamma_r$. y

$$d(\Gamma_\varphi)=\sum_{k<r} TRZ_{kr}dx^k\wedge dx^r=\sum_{r,k} TRZ_{kr}dx^k\otimes dx^r$$

Relacionando este resultado con el corolario 2.3.2 se tiene:

TEOREMA 2.4.2

La condición necesaria y suficiente para que la conexión ∇ admita volumen local es que su tensor de Ricci sea simétrico.■

2.5 Conexiones (conformes) localmente métricas.

En éste epígrafe supondremos fijada en M una estructura conforme $\mathscr{C}$, y una orientación topológica.

Una métrica local de $\mathscr{C}$ es un par (U,g) donde U es abierto de M y g es una métrica en U tal que $[g]=\mathscr{C}|U$.

Sea ∇ una conexión conforme. Diremos que ∇ es métrica si existe $g\in\mathscr{C}$ tal que ∇ es la conexión de Levi-Civita de g. Se dice entonces que g es una métrica de ∇.

Diremos que ∇ es localmente métrica, si por cada punto $p\in M$ existe una métrica local de $\mathscr{C}$ (U,g) con $p\in U$ de forma que $g\in\mathscr{C}|U$, y $\nabla|U$ es la conexión de Levi-Civita de g. Se dice entonces que (U,g) es una métrica local de ∇.

TEOREMA 2.5.1

Sea ∇ una conexión métrica, y g, $\bar{g}$ métricas de ∇. Existe entonces una constante $\lambda\in\mathbb{R}^+$ tal que $\bar{g}=\lambda g$.

Demostración:

Como $g,\bar{g}\in\mathscr{C}$ existe $\sigma:M\longrightarrow\mathbb{R}$ con $\bar{g}=e^{2\sigma}g$. Pero ∇ coincide con la conexión $\bar{\nabla}$ de Levi-Civita de $\bar{g}$. Por 1.2.2 se concluye que $d\sigma=0$, y σ es constante en M.

COROLARIO 2.5.2

Supongamos ∇ conforme y localmente métrica. Si (U_1,g_1), (U_2,g_2) son métricas locales de ∇, entonces para cada componente conexa U de $U_1\cap U_2$, existe una constante $\lambda\in\mathbb{R}^+$ con $g_2=\lambda g_1$ en U. ■

OBSERVACIONES 2.5.3

a) Sea (V,g) un espacio de Lorentz. Una base base $(u_1,\ldots,u_n)$ de V, se dirá ortogonal si existe $\lambda\in\mathbb{R}^+$, de forma que $(e_1,\ldots,e_n)=(\lambda u_1,\ldots,\lambda u_n)$ sea base ortonormal (es decir $g(e_1,e_1)=-1$, $g(e_i,e_i)=1$ para $i>1$ y $g(e_i,e_j)=0$ si $i\neq j$).

El concepto de base ortogonal solo depende de la estructura conforme $[g]$.

b) La estructura conforme $\mathscr{C}$ en M, induce para cada $p\in M$ una estructura conforme $\mathscr{C}_p$ en T_pM. Una base $(u_1,\ldots,u_n)$ en T_pM, se dirá ortogonal si lo es respecto a $\mathscr{C}_p$.

c) Una métrica $g\in\mathscr{C}$, determina una forma de volumen canónica Ω en M definida por la condición $\Omega(e_1,\ldots,e_n)=1$ si $(e_1,\ldots,e_n)$ constituye una base ortonormal positivamente orientada. Al operador divergencia trivial asociado, lo denotamos por div_g.

Enunciamos dos resultados elementales con demostración trivial:

LEMA 2.5.4

Sea (V,g) un espacio vectorial de Lorentz Ω forma de volumen en V. Supongamos $(u_1,\ldots,u_n)$ base ortonormal y $(\bar{u}_1,\ldots,\bar{u}_n)$ base ortogonal. Si $\Omega(u_1,\ldots,u_n)=\Omega(\bar{u}_1,\ldots,\bar{u}_n)$, entonces $(\bar{u}_1,\ldots,\bar{u}_n)$ es base ortonormal.■

LEMA 2.5.5

Si ∇ es una conexión conforme y $(u_1,\ldots,u_n)$ es base ortogonal, entonces para toda curva diferenciable $\gamma:[0,b]\longrightarrow M$ con $\gamma(0)=p$ el transporte paralelo $(\gamma u_1(t),\ldots,\gamma u_n(t))$ de $(u_1,\ldots,u_n)$ define bases ortogonales para todo $t\in[0,b]$.

■

TEOREMA 2.5.6

Sea ∇ una conexión conforme. La condición necesaria y suficiente para que ∇ sea conexión métrica, es que el operador divergencia div_∇ sea trivial.

Demostración:

Si $g\in\mathscr{C}$ es una métrica global ∇ entonces ∇ preserva el volumen Ω de g, y se verifica que $div_\nabla=div_\Omega=div_g$ que es un operador divergencia trivial.

Recíprocamente, supongase $div_\nabla=div_\Omega$ para cierta forma de volumen Ω de M. Fijemos $p\in M$ y $(u_1,\ldots,u_n)$ base ortogonal de T_pM, con $\Omega(u_1,\ldots,u_n)=1$. Para cada punto $q\in M$ sea $\gamma_q:[0,1]\longrightarrow M$ curva diferenciable que une p y q, y tomemos g_q métrica en T_qM tal que $(\gamma_q u_1(1),\ldots,\gamma_q u_n(1))$ sea base g_q-ortonormal.

La métrica g_q no depende de la curva γ_q tomada uniendo p a q, pues si $\bar{\gamma}_q:[0,1]\longrightarrow M$ es otra tal curva, por el lema 2.5.5, la base $(\bar{\gamma}_q u_1(1),\ldots,\bar{\gamma}_q u_n(1))$ es $\mathscr{C}$-ortogonal, y por tanto g_q-ortogonal. Como $\nabla\Omega=0$:

$$1=\Omega(\gamma_q u_1(1),\ldots,\gamma_q u_n(1))=\Omega(\bar{\gamma}_q u_1(1),\ldots,\bar{\gamma}_q u_n(1))$$

se concluye por 2.5.4 que $(\bar{\gamma}_q u_1(1),\ldots,\bar{\gamma}_q u_n(1))$ es también base g_q-ortonormal.

Es trivial ver que la correspondencia $M\ni q\longrightarrow g_q$ define una métrica g global para ∇. ■

COROLARIO 2.5.7

La condición necesaria y suficiente para que una conexión conforme ∇ *en M sea localmente métrica es que su tensor de Ricci sea simétrico.*

Demostración

Si ∇ es localmente métrica, por cada punto p existe una métrica local (U,g) y $div_{\nabla}|U=div_{g}$. Así div_{∇} es localmente trivial, y por 2.4.2 el tensor de Ricci es simétrico.

Recíprocamente, si el tensor de Ricci es simétrico, nuevamente por 2.4.2 div_{∇} es localmente trivial. Si (U,Ω) es una trivialización local de ∇, por 2.5.6, $\nabla|U$ es conexión métrica, y por tanto ∇ es localmente métrica. ■

Finalmente, no es dificil probar el siguiente resultado:

TEOREMA 2.5.8

Dado un operador divergencia div, existe una única conexión conforme ∇ *tal que* $div=div_{\nabla}$. *Dicha conexión es (localmente) métrica si y solo si div es (localmente) trivial.* ■

2.5 Sobre una ¿admisible? extensión del concepto "modelo espacio-tiempo".

Sea ∇ una conexión localmente métrica

APENDICE I

Demostración de un Lema técnico de Algebra Lineal

LEMA 1.5.1

Sea $\Delta:V\times V\longrightarrow V$ un tensor simétrico sobre el espacio vectorial de Lorentz V. Supóngase que $\Delta(u,u)$ es proporcional a u para todo vector luz u de V.

Existe entonces una única 1-forma $\alpha\in V^*$, y un único vector $a\in V$ tales que:

$$\Delta(v,w)=\langle v,w\rangle a+\beta(v)w+\beta(w)v \text{ para todo } v,\ w\in V$$

Idea de la demostración:

Haremos la demostración para dimensión de V igual a cuatro:

Evidentemente los tensores del tipo de arriba pertenecen al espacio vectorial $\mathcal{T}$ de los tensores $\Delta:V\times V\longrightarrow V$ tales que $\nabla(u,u)$ es proporcional a u para todo vector luz u de V, y la aplicación:

$$V\times V^*\ni(a,\beta)\longrightarrow\{\Delta_{(a,\beta)}:V\times V\ni(u,v)\longrightarrow\langle v,w\rangle a+\beta(v)w+\beta(w)v\in V\}\in\mathcal{T}$$

es lineal e inyectiva, por lo que dim $\mathcal{T}\geq 8$.

Si probamos por algún procedimiento que dim $\mathcal{T}\leq 8$ habremos concluido.

Fijada (e_0,e_1,e_2,e_3) base ortonormal de V, e identificando cada vector ξ con sus coordenadas $(\xi^0,\xi^1,\xi^2,\xi^3)$ tendremos:

$$\Delta(\xi,\xi)=(\Delta^k_{ij}\ \xi^i\ \xi^j)e_k$$

Sea Δ^k la forma bilineal en V con $\Delta^k(\xi,\xi)=\Delta^k_{ij}\ \xi^i\ \xi^j$.

Por hipótesis para cada vector luz ξ existe un número $\gamma(\xi)\in\mathbb{R}$ tal que:

$$\Delta^k(\xi,\xi)=\Delta^k_{ij}\ \xi^i\ \xi^j=\gamma(\xi)\xi^k \text{ para } k=0,1,2,3,4$$

y se tiene para $h,k\in\{0,1,2,3,4\}$ y para todo vector luz ξ:

$$\xi^k\Delta^h(\xi)=\xi^h\Delta^k(\xi)$$

Como la dimensión del espacio de tensores simétricos $V\times V\longrightarrow V$ es igual a 40, será necesario obtener 32 ecuaciones lineales independientes en los coeficientes Δ^k_{ij} de los tensores de $\mathcal{T}$. Sea $\Delta\in\mathcal{T}$:

Imponiendo la condición $\xi^0\Delta^1(\xi)=\xi^1\Delta^0(\xi)$ a la colección de vectores luz:

$$u_1=(1,0,1,0),\ u_2=(1,0,-1,0),\ u_3=(1,0,0,1),\ u_4=(1,0,0,-1)$$

$$u_5=\left(1,0,\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right),\ u_6=\left(1,0,-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

en los que $\xi^0=1$, $\xi^1=0$, se deduce $\Delta^1(u_i,u_i)=0$, i=1,2,3,4,5,6. obteniendose el sistema:

$$
\begin{array}{llllll}
\Delta^1_{00} & +2\Delta^1_{02} & +0\Delta^1_{03} & +\Delta^1_{22} & +0\Delta^1_{23} & +0\Delta^1_{33}=0 \\
\Delta^1_{00} & -\ 2\Delta^1_{02} & +0\Delta^1_{03} & +\Delta^1_{22} & +0\Delta^1_{23} & +0\Delta^1_{33}=0 \\
\Delta^1_{00} & +0\Delta^1_{02} & +2\Delta^1_{03} & +\Delta^1_{22} & +0\Delta^1_{23} & +\Delta^1_{33}=0 \\
\Delta^1_{00} & +0\Delta^1_{02} & -2\Delta^1_{03} & +\Delta^1_{22} & +0\Delta^1_{23} & +\Delta^1_{33}=0 \\
\Delta^1_{00}+\frac{1}{\sqrt{2}} & \Delta^1_{02}+\frac{1}{\sqrt{2}} & \Delta^1_{03} & +\frac{1}{2}\Delta^1_{22}+ & \frac{1}{2}\Delta^1_{23} & +\frac{1}{2}\Delta^1_{33}=0 \\
\Delta^1_{00}+\frac{1}{\sqrt{2}} & \Delta^1_{02}+\frac{1}{\sqrt{2}} & \Delta^1_{03} & +\frac{1}{2}\Delta^1_{22}- & \frac{1}{2}\Delta^1_{23} & +\frac{1}{2}\Delta^1_{33}=0
\end{array}
$$

Que equivale a: $\Delta^1_{00} \overset{(1)}{=} \Delta^1_{02} \overset{(2)}{=} \Delta^1_{03} \overset{(3)}{=} \Delta^1_{22} \overset{(4)}{=} \Delta^1_{23} \overset{(5)}{=} \Delta^1_{33} \overset{(6)}{=} 0$.

De forma análoga se obtiene:

$\Delta^2_{00} \overset{(7)}{=} \Delta^2_{01} \overset{(8)}{=} \Delta^2_{03} \overset{(9)}{=} \Delta^2_{11} \overset{(10)}{=} \Delta^2_{13} \overset{(11)}{=} \Delta^2_{33} \overset{(12)}{=} 0$

$\Delta^3_{00} \overset{(13)}{=} \Delta^3_{01} \overset{(14)}{=} \Delta^3_{02} \overset{(15)}{=} \Delta^3_{11} \overset{(16)}{=} \Delta^3_{12} \overset{(17)}{=} \Delta^3_{22} \overset{(18)}{=} 0$.

Rescribiendo ahora las funciones Δ^k queda por ejemplo

$$\Delta^1(\xi)=\xi^1(2\Delta^1_{01}\xi^0+\Delta^1_{11}\xi^1+\Delta^1_{21}\xi^2+\Delta^1_{31}\xi^3),\ \Delta^2(\xi)=\xi^2(2\Delta^2_{02}\xi^0+\Delta^2_{22}\xi^1+\Delta^2_{22}\xi^2+\Delta^2_{32}\xi^3)$$

y la condición $\xi^1\Delta^2(\xi)=\xi^2\Delta^1(\xi)$ para vectores luz ξ, implica:

$$\xi^1\xi^2(2\Delta^1_{01}\xi^0+\Delta^1_{11}\xi^1+\Delta^1_{21}\xi^2+\Delta^1_{31}\xi^3)=\xi^1\xi^2(2\Delta^2_{02}\xi^0+\Delta^2_{12}\xi^1+\Delta^2_{22}\xi^2+\Delta^2_{32}\xi^3)$$

Tomando una base de vectores luz con $\xi^1\xi^2\neq 0$, se concluye:

$$\Delta^1_{01} \overset{(19)}{=} \Delta^2_{02}\ ,\ \Delta^1_{11} \overset{(20)}{=} \Delta^2_{12},\ \Delta^1_{12} \overset{(21)}{=} \Delta^2_{22},\ \Delta^1_{31} \overset{(22)}{=} \Delta^2_{32}$$

y aplicando análogo razonamiento intercambiando el 2 y el 3, queda:

$$\Delta^1_{01} \overset{(23)}{=} \Delta^3_{03},\ \Delta^1_{11} \overset{(24)}{=} \Delta^3_{13},\ \Delta^1_{21} \overset{(25)}{=} \Delta^3_{23},\ \Delta^1_{31} \overset{(26)}{=} \Delta^3_{33}$$

Hemos ya obtenido ya 26 ecuaciones independientes.

Las últimas 6 ecuaciones afectan a los coeficientes de la forma bilineal Δ^0. Aplicando al vector luz $\xi=(1,1,0,0)$ $\Delta^0(\xi)=\Delta^1(\xi)$ y a $(1,-1,0,0)$ $\Delta^0(\xi)=\Delta^1(\xi)$ se obtiene: $\Delta^0_{01} \overset{(27)}{=} \Delta^1_{01}$ y $\Delta^0_{00}+\Delta^0_{11} \overset{(28)}{=} \Delta^1_{11}$. Análogamente:

$$\Delta^0_{02} \overset{(29)}{=} \Delta^2_{02},\ \Delta^0_{00}+\Delta^0_{22} \overset{(30)}{=} \Delta^2_{22}\ ,\Delta^0_{03} \overset{(31)}{=} \Delta^3_{03},\ \Delta^0_{00}+\Delta^0_{33} \overset{(32)}{=} \Delta^3_{33}$$

APENDICE II

Transporte de formas de volumen

En lo que sigue, $\gamma:I=[0,a]\longrightarrow M$ es una curva (al menos continua) en M, $\gamma(0)=p$, y Ω_p es una forma de volumen en T_pM.

§II.1 Transporte respecto a un Operador divergencia localmente trivial.

DEFINICION II.1.1

Fijado un operador divergencia localmente trivial (ODLT) div en M, se define el transporte paralelo de Ω_p a lo largo de γ como una función $\Omega(t)$ que hace corresponder a cada $t\in I$ una forma de volumen $\Omega(t)$ en $T_{\gamma(t)}M$, verificando las propiedades:

TP0) $\Omega(0)=\Omega_p$.

TP1) Para cada $t_0\in I$ existe (U,Ω) trivialización local de div y $\varepsilon>0$ tal que:

$$\Omega(t)=\Omega(\gamma(t)) \text{ para todo } t\in I \text{ con } |t-t_0|<\varepsilon$$

Usando la Observación 1) de 2.1.1 es elemental probar:

TEOREMA II.1.2

El transporte de Ω_p a lo largo de γ, respecto a un ODLT div, existe y es único. El transporte $\Omega(t)$ construido se denotará por:

$$\Omega(t)=(\gamma\Omega_p)_{div}(t)$$

EJEMPLO II.1.3

Si Ω es una forma de volumen en M, y $\Omega_p=\lambda\Omega(p)$, entonces:

$$(\gamma\Omega_p)_{div_\Omega}(t)=\lambda\Omega(\gamma(t))$$

TEOREMA II.1.4

Si Ω es una forma de volumen en M, y div ODLT tal que

$$div=div_\Omega+\alpha \text{ (para } \alpha \text{ 1-forma, necesariamente cerrada)}$$

entonces:

$$(\gamma\Omega_p)_{div}(t)=\left(exp\int_0^t\gamma^*(\alpha)\right)(\gamma\Omega_p)_{div_\Omega}(t) \qquad (1)$$

Demostración:

Podemos elegir Ω de forma que $\Omega_p=\Omega(p)$. Supóngase primero que $\alpha=d\sigma$ en M. Entonces $div=div_{\Omega'}$, con $\Omega'=\exp(\sigma)\Omega$ y podemos elegir σ con $\sigma(p)=0$, de forma que $\Omega'(p)=\Omega_p$. Así:

$$(\gamma\Omega_p)_{div}(t)=\Omega'(\gamma(t))=\exp\left(\sigma(\gamma(t)-\sigma(\gamma(0)\right)\Omega(\gamma(t))=\left(\exp\int_0^t\gamma^*(d\sigma)\right)(\gamma\Omega_p)_{div_\Omega}(t)$$

Como la fórmula (1) del transporte es válida al menos localmente, se concluye que el conjunto de puntos $t\in I$, tales que dicha fórmula es válida es abierto,(y cerrado por razones de continuidad) ∎

COROLARIO II.1.5

Sean div y div' ODLT con div'=div+β (β cerrada). Entonces:

$$(\gamma\Omega_p)_{div'}(t)=\left(exp\int_0^t\gamma^*(\beta)\right)(\gamma\Omega_p)_{div}(t)$$

Demostración:

Fijada Ω forma de volumen en M, sea $div=div_\Omega+\alpha$, $div'=div_\Omega+\alpha'$, entonces $\beta=\alpha'-\alpha$, y se tiene:

$$(\gamma\Omega_p)_{div'}(t)=\left(\exp\int_0^t\gamma^*(\alpha')\right)\ \Omega(\gamma(t))=\left(\exp\int_0^t\gamma^*(\alpha')\right)\left(\exp\int_0^t\gamma^*(-\alpha)\right)(\gamma\Omega_p)_{div}(t)\ \blacksquare$$

II.2 Transporte respecto a un operador divergencia.

Usaremos la fórmula del corolario II.1.5 para definir el transporte de formas de volumen respecto a un OD arbitrario:

TEOREMA (DEFINICION) II.2.1

Sea $\overline{div}$ un OD, y sean div, div' ODLT. Supóngase:

$$\overline{div}=div+\alpha,\quad \overline{div}=div'+\alpha'$$

Entonces:

$$\left(exp\int_0^t\gamma^*(\alpha)\right)\ (\gamma\Omega_p)_{div}(t)=\left(exp\int_0^t\gamma^*(\alpha')\right)\ (\gamma\Omega_p)_{div'}(t)$$

a este valor común se le denota por $(\gamma\Omega_p)_{\overline{div}}(t)$, y se denomina transporte paralelo de Ω_p respecto al operador divergencia $\overline{div}$.

Demostración:

Sea $\bar\Omega(t)=\left(\exp\int_0^t\gamma^*(\alpha)\right)\ (\gamma\Omega_p)_{div}(t)$ y $\bar\Omega'(t)=\left(\exp\int_0^t\gamma^*(\alpha')\right)\ (\gamma\Omega_p)_{div'}(t)$.

Se tiene $div'=div+(\alpha-\alpha')$. Por II.1.5 se verifica:

$$(\gamma\Omega_p)_{div'}(t)=\left(exp\int_0^t\gamma^*(\alpha-\alpha')\right)(\gamma\Omega_p)_{div}(t)$$

y se deduce $\bar\Omega'(t)=\bar\Omega(t)$ por simple sustitución.$\blacksquare$

COROLARIO II.2.2

Si div, div' son OD en M, con div'=div+α entonces:

$$(\gamma\Omega_p)_{div'}(t)=\left(exp\int_0^t\gamma^*(\alpha')\right)\ (\gamma\Omega_p)_{div}(t)$$

II.4 Operador divergencia de una conexión afín.

Una conexión ∇ (no necesariamente simétrica) en M, induce un operador

$$div_\nabla:\mathfrak{X}(M)\ni X\longmapsto -\mathrm{Traza}(A_X)\in\mathfrak{F}(M)\ \text{con}\ A_X:\mathfrak{X}(M)\ni V\longmapsto T(V,X)-\nabla_V X\in\mathfrak{X}(M)$$

que es un operador divergencia, que en coordenadas locales se escribe:

$$div_\nabla(X)=\Sigma\frac{\partial X^k}{\partial x^k}+X^j\,\Sigma\,\Gamma^k_{jk}$$

Se puede probar que el transporte de formas volumen inducido por la conexión, coincide con el definido por el operador div_∇. Sin embargo para nuestro propósito es suficiente con lo siguiente:

TEOREMA II.4.1

Sea ∇ una conexión, y Ω forma de volumen en M. Entonces:

Ω es un volumen para ∇ si y solo si $div_\nabla = div_\Omega$.

En particular, ∇ admite volumen global, si y solo si div_∇ es trivial.

Demostración:

Se ve fácilmente que para cada $X \in \mathfrak{X}(M)$ es $A_X = L_X - \nabla_X$, que induce un operador diferencial tal que $A_X(f)=0$ para todo $f \in \mathfrak{F}(M)$.

Así, si Ω es un volumen para ∇, y $(X_1,\ldots,X_n)$ es una paralelización local de M, se tiene para $X \in \mathfrak{F}(M)$ por ser $\nabla_X\Omega=0$:

$$(L_X\Omega)(X_1,\ldots,X_n)=(A_X\Omega)(X_1,\ldots,X_n)=-\sum \Omega(\ldots,A_XX_i,\ldots)=(-\text{traza } A_X)\Omega(X_1,\ldots,X_n)$$

el recíproco se prueba de forma análoga. ■

COROLARIO II.4.2

Una conexión ∇ en M admite un volumen local en un entorno de cada punto, si y solo si el operador div_∇ es un ODLT.

APENDICE III

Operadores divergencia y estructuras conformes y proyectivas

III.1 Sobre el Lema técnico 1.3.2

Fijada la conexión $\mathcal{C}$-conforme ∇, y una 1-forma $\alpha\in\mathfrak{X}^*(M)$, entonces la conexión $\tilde{\nabla}$ definida por:

$$\tilde{\nabla}_X Y=\nabla_X Y+\alpha(X)Y$$

es conforme, y de hecho, fijado $g\in\mathcal{C}$ puede elegirse α de forma que la conexión $\tilde{\nabla}$ sea g-métrica.

Demostración:

Sea $\gamma:[0,a]\longrightarrow M$ una curva diferenciable, y X(t) un campo ∇-paralelo a lo largo de γ. Probaremos que:

$$\tilde{X}(t)=\left[\exp\int_0^t -\gamma^*\alpha\right]X(t)$$

es un campo $\tilde{\nabla}$-paralelo. En efecto, denotando $E(t)=\exp\int_0^t -\gamma^*\alpha$, se verifica:

$$\frac{dE}{dt}=-E\alpha(\gamma'),\ \text{y}\quad \tilde{\nabla}_{\gamma'}\tilde{X}=\tilde{\nabla}_{\gamma'}(E\ X)=\frac{dE}{dt}X + E\ \alpha(\gamma')X= -\alpha(\gamma')E+\alpha(\gamma')=0$$

Por tanto $\tilde{\nabla}$ lleva igual que ∇ bases ortogonales a bases ortogonales por transporte paralelo, y $\tilde{\nabla}$ es conforme.

La cuestión ahora es, si fijada la conexión $\mathcal{C}$-conforme ∇ y una métrica $g\in\mathcal{C}$, es posible elegir la 1-forma α de manera que la conexión $\tilde{\nabla}$ sea g-métrica.

La respuesta es ahora trivialmente afirmativa, si se tiene en cuenta que

$$\mathrm{div}_{\tilde{\nabla}}=\mathrm{div}_{\nabla}+n\alpha$$

y tomando $n\alpha=\mathrm{div}_g-\mathrm{div}_\nabla$ se concluye $\mathrm{div}_{\tilde{\nabla}}=\mathrm{div}_g$. De la demostración de 2.5.6 se concluye que $\tilde{\nabla}$ es g-métrica.

III.2 Operador divergencia y estructura proyectiva.

TEOREMA

Dada una estructura proyectiva $\mathcal{P}$ en M, y div OD en M, existe una única conexión simétrica $\bar{\nabla}$ compatible con $\mathcal{P}$ y tal que $\mathrm{div}_{\bar{\nabla}}=\mathrm{div}$.

Demostración:

Sea $\nabla\in\mathcal{P}$. Usando el Teorema 1.1.1 se ve que todas las conexiones (simétricas) $\bar{\nabla}$ compatibles con $\mathcal{P}$ se obtienen de la forma:

$$\bar{\nabla}_X Y=\nabla_X Y+\gamma(X)Y+\gamma(Y)X$$

para γ 1-forma en M. Se prueba inmediatamente que:

$$\mathrm{div}_{\bar{\nabla}}=\mathrm{div}_\nabla+(n+1)\gamma$$

así es suficiente tomar $(n+1)\gamma=\mathrm{div}-\mathrm{div}_\nabla$. ∎

III.3 Operador divergencia y estructura conforme.

TEOREMA

Dada una estructura conforme $\mathcal{C}$ en M, y div OD en M, existe una única conexión simétrica $\bar{\nabla}$ compatible con $\mathcal{C}$ y tal que $div_{\bar{\nabla}}=div$.

Demostración:

Sea ∇ conexión g-métrica. Usando el Teorema 1.2.2 se ve que todas las conexiones (simétricas) $\bar{\nabla}$ $\mathcal{C}$-conformes se obtienen de la forma:

$$\bar{\nabla}_X Y=\nabla_X Y+\alpha(X)Y+\alpha(Y)X-g(X,Y)A$$

para α 1-forma en M y A el campo g-equivalente. Se prueba inmediatamente que:

$$div_{\bar{\nabla}}=div_{\nabla}+n\alpha$$

así es suficiente tomar $n\alpha=div-div_{\nabla}$. ∎

APENDICE IV

SOBRE EL TENSOR DE CURVATURA DE UNA CONEXIóN CONFORME

En lo que sigue M será un variedad diferenciable con dimensión $n\geq 3$.

§IV.0 Reconsideraciones previas sobre las contracciones de la curvatura.

Dada una conexión ∇ en M adoptamos la siguiente definición de tensor R de curvatura:

$$R(X,Y)Z=-\nabla_X\nabla_Y Z+\nabla_Y\nabla_X Z+\nabla_{[X,Y]}Z \quad \text{para } X,Y,Z\in\mathfrak{X}(M)$$

Se define el tensor de Ricci por:

$$Ric(X,Y)=Traza\left(\mathfrak{X}(M)\ni V\longrightarrow R(X,V)Y\right) \quad \text{para } X,Y\in\mathfrak{X}(M)$$

La otra contracción relevante de R es la 2-forma $\mathcal{R}$:

$$\mathcal{R}(X,Y)=\frac{1}{n}\,Traza\left(\mathfrak{X}(M)\ni V\longrightarrow R(X,Y)V\right) \quad \text{para } X,Y\in\mathfrak{X}(M)$$

que denominamos forma [caracteristica] de ∇.

De la identidad: $R(X,V)Y+R(V,Y)X+R(Y,X)V=0$, se concluye que:

$$Ric(X,Y)-Ric(Y,X)=n\,\mathcal{R}(X,Y)$$

y por tanto el tensor de Ricci es simétrico si y solo si $\mathcal{R}=0$.

Por razones de tipo técnico, nos interesa usar ahora una modificación del tensor clásico de Ricci, que denominamos Ricci *conforme* y denotamos por $\mathcal{R}c$. Se define:

$$\mathcal{R}c=Ric-\mathcal{R}$$

y coincide con Ric si y solo si $(\mathcal{R}c)$ es simétrico, pues se verifica:

$$\mathcal{R}c(X,Y)-\mathcal{R}c(Y,X)=n\,\mathcal{R}(X,Y)-\mathcal{R}(X,Y)+\mathcal{R}(Y,X)=(n-2)\mathcal{R}(X,Y)$$

En particular $\mathcal{R}c$ coincide con Ric para las conexiones de Levi_Civita.

En lo sucesivo, nuestro tensor $\mathcal{R}c$ será denominado *nuevo* tensor de Ricci.

§IV.1 Tensores característicos de un espacio de Weil. El Tensor de Weil.

En lo que sigue $(M,\mathcal{C})$ es un espacio conforme, con dim $M=n\geq 3$ y ∇, $\bar\nabla$ son conexiones simétricas $\mathcal{C}$-conformes. Fijaremos una métrica $g\in\mathcal{C}$. Supondremos (por comodidad) que ∇ es la conexión de Levi_Civita de g.

Trabajaremos, sin embargo con una conexión conforme $\bar\nabla$ totalmente general.

1.1 Notaciones generales

Se denota por $\uparrow:\mathfrak{T}^r_s(M)\ni T\longrightarrow T_\uparrow\in\mathfrak{T}^{r+1}_{s-1}(M)$ el operador subida de indices respecto a la métrica g, *en los dos últimos subindices*, y por $\mathfrak{C}:\mathfrak{T}^r_s(M)\longrightarrow\mathfrak{T}^{r-1}_{s-1}(M)$ la correspondiente contracción.

Se define para $T\in\mathfrak{T}^r_s(M)$ $(s\geq 1)$:

$$\mathcal{C}T=g\otimes(T_\uparrow)\in\mathfrak{T}^{r+1}_{s+1}(M)$$

el operador $\mathcal{C}:\mathfrak{T}^r_s(M)\longrightarrow\mathfrak{T}^{r+1}_{s+1}(M)$ depende *solo* de la estructura conforme $\mathcal{C}$.

1.2 Notaciones particulares.

Por el Teorema 1.3.1, se sabe que existe una 1-forma α tal que:

$$\bar{\nabla}_X Y-\nabla_X Y=\alpha(X)Y+\alpha(Y)X-g(X,Y)A \text{ para todo } X,\ Y\in\mathfrak{X}(M)$$

donde $A=\alpha_{\uparrow}$ es el campo g-métricamente equivalente a α, es decir:

$$\alpha:\mathfrak{X}(M)\ni X \longrightarrow g(A,X)\in\mathcal{F}(M)$$

En particular, si $A=\operatorname{grad}\sigma$, y $\alpha=d\sigma$ entonces $\bar{\nabla}$ es la conexione de Levi_Civita asociadas a $\bar{g}=e^{2\sigma}g$.

Es trivial comprobar, que aunque ∇ NO fuera la conexión de Levi_Civita, persiste la existencia de una única 1-forma α, tal que:

$$\bar{\nabla}_X Y-\nabla_X Y=\alpha(X)Y+\alpha(Y)X-(\mathcal{C}\alpha)(X,Y) \text{ para todo } X,\ Y\in\mathfrak{X}(M)$$

No insistiremos sin embargo con este asunto.

En particular, si $\overline{\mathcal{R}c}\in\mathfrak{T}^0_2(M)$ es el tensor *conforme* de Ricci de $\bar{\nabla}$ se denota:

$$\overline{\mathrm{RIC}}=\mathcal{C}\overline{\mathcal{R}c}\in\mathfrak{T}^1_3(M),\ \text{y}\ \overline{\mathrm{SC}}=\mathfrak{C}(\overline{\mathrm{RIC}})\in\mathfrak{T}^0_2(M)$$

por tanto se tiene:

$$\overline{\mathrm{RIC}}(Z,X,Y)=g(Z,X)(\overline{\mathcal{R}c_{\uparrow}})(Y),\ \overline{\mathrm{SC}}(X,Z)=g(X,Z)\overline{\mathrm{Sc}}\ ,\ X,Y,Z\in\mathfrak{X}(M)$$

donde $\mathrm{Sc}=\mathfrak{C}(\overline{\mathcal{R}c_{\uparrow}})=\mathfrak{C}(\overline{\mathrm{Ric}_{\uparrow}})$ (ya que $\mathcal{R}c=\mathrm{Ric}-\mathcal{R}$ y $\mathcal{R}$ es antisimétrico)

Naturalmente, las mismas notaciones sin barra, se refieren a la conexión de Levi_Civita ∇, (en la que por cierto $\mathcal{R}c$ coincide con Ric). En adelante, $g(X,Y)$ será denotado por $\langle X,Y\rangle$.

El tensor $Q=\nabla\alpha-\alpha\otimes\alpha$, desempeñará un papel importante en lo que sigue:

$$Q(X,Y):=(\nabla_X\alpha)(Y)-(\alpha\otimes\alpha)(X,Y)=X\langle A,Y\rangle-\langle A,\nabla_X Y\rangle-\langle A,X\rangle\langle A,Y\rangle$$

Llamaremos a $Q_{\uparrow}$, $\tilde{Q}$, y por tanto podemos escribir:

$$\tilde{Q}(X)=\nabla_X A-\langle A,X\rangle A.$$

Finalmente será denotada por $q=\mathfrak{C}(\tilde{Q})$ a la contracción de $\tilde{Q}$.

Usando el teorema 1.3.1 se obtiene tras algunos cálculos:

1.1 Tensor diferencia $D=\bar{R}-R$.

Si R y $\bar{R}$ denotan los tensores de curvatura de las conexiones ∇ y $\bar{\nabla}$ respectivamente, y definimos $D(X,Y)Z=\bar{R}(X,Y)Z-R(X,Y)Z$, se verifica:

$$\begin{aligned}D(X,Y)Z= &\{Q(Y,Z)+\langle Y,Z\rangle\langle A,A\rangle\}X\\ &-\{Q(X,Z)+\langle X,Z\rangle\langle A,A\rangle\}Y\\ &+\langle Y,Z\rangle\tilde{Q}(X)-\langle X,Z\rangle\tilde{Q}(Y)\\ &-(d\alpha)(X,Y)\langle Z,W\rangle\end{aligned}$$

En particular podemos escribir:

$$\begin{gathered}\langle D(X,Y)Z,W\rangle=\\ \{Q(Y,Z)\langle X,W\rangle+\langle Y,Z\rangle Q(X,W)\}-\{Q(X,Z)\langle Y,W\rangle+\langle X,Z\rangle Q(Y,W)\}+\\ +\langle A,A\rangle\{\langle Y,Z\rangle\langle X,W\rangle-\langle X,Z\rangle\langle Y,W\rangle\}-(d\alpha)(X,Y)\langle Z,W\rangle.\end{gathered}$$

1.2 Contracciones del tensor D

Existen dos contracciones básicas del tensor D:

1.2.1 $\mathrm{TRAZA}(Z \longrightarrow D(X,Y)Z)=n\bar{\mathcal{R}}(X,Y)-n\mathcal{R}(X,Y)=n\bar{\mathcal{R}}(X,Y)$.

Se tiene entonces la expresión 1.1 de $D(X,Y)Z$:

$\bar{\mathcal{R}}(X,Y)=Q(Y,X)+\langle Y,X\rangle\langle A,A\rangle-\{Q(X,Y)+\langle X,Y\rangle\langle A,A\rangle\}+\langle Y,\tilde{Q}(X)\rangle-\langle X,\tilde{Q}(Y)\rangle-nd\alpha(X,Y)=$ $Q(Y,X)-Q(X,Y)+Q(X,Y)-Q(Y,X)-nd\alpha(X,Y)=-nd\alpha(X,Y)$. Por tanto:

$$d\alpha=-\mathcal{R}$$

1.2.2 Tensor diferencia $E=\overline{\mathcal{R}c}-\mathcal{R}c$.

La contracción $\mathfrak{C}D$ del tensor D, viene definida por:

$$(\mathfrak{C}D)(X,Z):=\mathrm{TRAZA}\{Y \longrightarrow D(X,Y)Z\}$$

y representa la diferencia: $(\mathfrak{C}D)(X,Z)=\overline{Ric}(X,Z)-Ric(X,Z)$. un calculo demuestra:

$$(\mathfrak{C}D)(X,Z)=(2-n)Q(X,Z)-\{q+(n-1)\langle A,A\rangle\}\langle X,Z\rangle+\bar{\mathcal{R}}(X,Z)$$

Por tanto el tensor $E(X,Z):=\overline{\mathcal{R}c}(X,Z)-\mathcal{R}c(X,Z)$ admite la siguiente expresión:

$$E(X,Z)=(2-n)Q(X,Z)-\{q+(n-1)\langle A,A\rangle\}\langle X,Z\rangle$$

Nótese que $\overline{\mathcal{R}c}_{\uparrow}-\mathcal{R}c_{\uparrow}=E_{\uparrow}=(2-n)Q-\{q+(n-1)\langle A,A\rangle\}Id$, y $g\circledast E_{\uparrow}=\overline{RIC}-RIC$

1.3 Función diferencia $\overline{Sc}$-Sc.

Contrayendo $E_{\uparrow}$ se obtiene $\mathfrak{C}E_{\uparrow}=\overline{Sc}-Sc$:

$$\overline{Sc}-Sc=(2-2n)q+(1-n)n\langle A,A\rangle.$$

En particular se deduce, eliminando q entre 1.2 y 1.3, y despejando Q:

1.4 Una expresión para $Q:=\nabla\alpha-\alpha\circledast\alpha$

$$Q=-\frac{1}{2}\langle A,A\rangle g+\frac{1}{2(1-n)(2-n)}\{\overline{SC}-SC\}+\frac{1}{2-n}\{\overline{\mathcal{R}c}-\mathcal{R}c\}$$

Teorema 1.5

El tensor diferencia $D(X,Y)Z=\bar{R}(X,Y)Z-R(X,Y)Z$ admite la expresión:

$$D(X,Y)Z=\frac{1}{n-2}\left\{\left(\overline{\mathcal{R}c}(X,Z)Y-\mathcal{R}c(X,Z)Y\ -\right)\ \left(\overline{\mathcal{R}c}(Y,Z)X-\mathcal{R}c(Y,Z)X\right)\right\}+$$
$$+\frac{1}{n-2}\left\{\left(\overline{RIC}(Z,X,Y)-RIC(Z,X,Y)\right)-\left(\overline{RIC}(Y,Z,X)-RIC(Y,Z,X)\right)\right\}+$$
$$+\frac{1}{(n-1)(n-2)}\left\{\left(\overline{SC}(Y,Z)-SC(Y,Z)\right)X-\left(\overline{SC}(X,Z)-SC(X,Z)\right)Y\right\}$$
$$+\bar{\mathcal{R}}(X,Y)Z$$

Demostración: De hecho se tiene:

$$\langle D(X,Y)Z,W\rangle=\frac{1}{n-2}\{E(X,Z)\langle Y,W\rangle-E(Y,Z)\langle X,W\rangle\}$$
$$\frac{1}{n-2}\{\langle Z,X\rangle E(Y,W)-\langle Z,Y\rangle E(X,W)\}$$
$$+\frac{\overline{Sc}-Sc}{(n-1)(n-2)}\{\langle Y,Z\rangle\langle X,W\rangle-\langle X,Z\rangle\langle Y,W\rangle\}$$
$$+\bar{\mathcal{R}}(X,Y)\langle Z,W\rangle$$

1.6 Construcción del Tensor de Weil

Sea:

$$\bar{G}(X,Y)Z= \frac{1}{n-2}\left(\overline{\mathcal{R}c}(Y,Z)X-\overline{\mathcal{R}c}(X,Z)Y+\overline{RIC}(Y,Z,X)-\overline{RIC}(Z,X,Y)\right)$$
$$+\frac{1}{(n-1)(n-2)}\left(\overline{SC}(X,Z)Y-\overline{SC}(Y,Z)X\right)+\bar{\mathcal{R}}(X,Y)Z$$

y $\bar{C}(X,Y)Z=\bar{R}(X,Y)Z+\bar{G}(X,Y)Z$. Podemos denotar por G y C los correspondientes tensores para ∇, y se tiene:

$$C(X,Y)Z=R(X,Y)Z+G(X,Y)Z$$

por 1.5 se verifica:

$$D(X,Y)Z=\bar{R}(X,Y)Z-R(X,Y)Z=-\bar{G}(X,Y)Z+G(X,Y)Z$$

luego $\bar{C}-C=\bar{R}-R+\bar{G}-G=D+\bar{G}-G=0$, y $C=\bar{C}$ es un tensor que no depende más que de la estructura conforme $\mathscr{C}$, y se denomina tensor de Weil.

Para una conexión $\mathscr{C}$-conforme ∇ cualquiera, viene definido por:

$$C(X,Y)Z=R(X,Y)Z+\frac{1}{n-2}\left(\mathcal{R}c(Y,Z)X-\mathcal{R}c(X,Z)Y+RIC(Y,Z,X)-RIC(Z,X,Y)\ +\right)$$
$$+\frac{1}{(n-1)(n-2)}\left(SC(X,Z)Y-SC(Y,Z)X\right)+\mathcal{R}(X,Y)Z$$

1.7 Propiedades del tensor de Weil.

1.7.1 El tensor de Weil C goza de todas las propiedades de simetría del tensor de Curvatura R.

1.7.2 Todas las contracciones del tensor de Weil son nulas. En particular, el tensor de Weil C coincide con el de curvatura R si y solo si el tensor de Ricci es idénticamente nulo.

1.7.3 Si la dimensión n de M es 3, entonces el tensor de Weil es nulo.

1.7.4 Si (M,g) tiene curvatura seccional constante, entonces el Tensor de Weil es idénticamente nulo.

§IV.2 Estructuras conformes planas y localmente planas.

Una conexión simétrica ∇ en M se dice plana si su tensor de curvatura es identicamente nulo. Si M admite una conexión ∇ simétrica, plana y $\mathscr{C}$-conforme, se dice que la estructura conforme es plana. Esta conexión es de hecho localmente métrica, y define en el entorno de cada punto una métrica plana compatible con $\mathscr{C}$ (determinada salvo constante multiplicativa no nula).

Diremos que $\mathscr{C}$ es localmente plana, si en cada punto $p\in M$ hay un entorno U tal que $\mathscr{C}|U$ es una estructura conforme plana.

TEOREMA 1

La estructura Conforme $\mathscr{C}$ es localmente plana, si y solo si su tensor C de Weil es identicamente nulo.

Esto exige algunos prerequisitos.