TOMO I : GEOMETRIA VECTORIAL Y GEOMETRIA AFIN

CAPITULO I : ELEMENTOS DE LA GEOMETRIA VECTORIAL

1.- Estructura de espacio vectorial 1
2.- Teorema de la base. Dimensión 5
3.- Geometría vectorial.Aplicaciones semilineales 10
4.- Subespacios vectoriales 19

CAPITULO II : GEOMETRIA ANALITICA VECTORIAL

1.- Sistemas lineales de coordenadas. Espacio dual 1
2.- Determinacion analitica de aplicaciones semilineales 6
3.- Representación anlítica de subespacios:Ortogonalidad dual ... 10

CAPITULO III : CLASIFICACION LINEAL DE ENDOMORFISMOS EN UN ESPACIO VECTORIAL.

1.- Equivalencia lineal de endomorfismos:Invariantes lineales ... 1
2.- Subespacios invariantes 5
3.- Primer Teorema de descomposición:Subespacios caracteristicos. 11
4.- Segundo Teorema de descomposición:Teorema de Jordan 18
B.- Apendice sobre el anillo de polinomios

CAPITULO IV : ELEMENTOS DE LA GEOMETRIA AFIN

1.- Estructura de espacio afin 1
2.- Aplicaciones afines y semiafines.Geometría afin 7
3.- Subespacios afines 17
4.- Aplicaciones semiafines y subespacios 25
5.- Combinaciones afines de puntos 31

CAPITULO V : TEOREMAS DE ESTRUCTURA PARA ESPACIOS AFINES.

1.- Teorema fundamental de la geometría afin 1
2.- Estructura y Geometría en espacios afines.................. 6

CAPITULO VI : EXTENSIONES VECTORIALES. GEOMETRIA ANALITICA AFIN

1.- Extensiones vectoriales canónicas en espacios afines 1
2.- Geometría analítica afin 8

CAPITULO VII : CLASIFICACION AFIN DE ENDOMORFISMOS AFINES.

1.- Aproximación al problema. Preliminares 1
2.- Endomorfismos con puntos fijos 4
3.- Teorema de clasificación 8

TOMO II : GEOMETRIA PROYECTIVA. CUADRICAS

CAPITULO VIII : ELEMENTOS DE LA GEOMETRIA PROYECTIVA

1.- Estructura de espacio proyectivo 2
2.- Subespacios 5
3.- Correspondencias entre espacios proyectivos 9

CAPITULO IX : GEOMETRIA ANALITICA PROYECTIVA

1.- Sistemas homogeneos de coordenadas 1
2.- Geometria analítica Proyectiva 6
3.- Homografías entre rectas proyectivas. Razón doble 9

CAPITULO X : TEOREMAS DE ESTRUCTURA PROYECTIVA

1.- Espacio proyectivo dual 1
2.- Restricciones afines en Geometría proyectiva 7
3.- Segundo Teorema Fundamental de la Geometría Proyectiva 12
4.- Geometría y estructura proyectivas 18

CAPITULO XI : CLASIFICACION DE CORRESPONDENCIAS PROYECTIVAS.

1.- Equivalencia proyectiva de correspondncias. Invariantes 1
2.- Teorema de clasificación de correspondencias proyectivas ... 6

CAPITULO XII : FORMAS CUADRATICAS.CUADRICAS PROYECTIVAS.

1.- Definiciones y resultados básicos 1
2.- Ortogonalidad y Polaridad 8
3.- Clasificación 14
4.- Espacios vectoriales métricos. Clasificación 24
5.- Grupo Ortogonal. Grupo de una cuadrica. 29
6.- Posiciones relativas entre cuadrica y subespacio 36

APENDICE A

GEOMETRIA Y GRUPOS DE TRANSFORMACIONES

En 1.872 el matemático alemán Felix Klein estableció una notable definición general de geometría, según la cual una geometría viene determinada por un grupo de transformaciones que actua sobre un conjunto, y el estudio de ésta, no es más que el estudio de las propiedades y conceptos relativos al conjunto que permanecen invariantes por la acción del grupo.

Este punto de vista contribuyó a formar un cuerpo metódico y sistemático de todas las geometrías conocidas en la época. Incluso hoy en día, por lo que respecta a las geometrías lineales mantiene toda su validez y potencia unificadora.

La presentación del "plan" de Klein para el estudio de las geometrías lineales (conocido por Programa de Erlangen) requiere dos herramientas básicas: La teoría elemental de grupos (que suponemos conocida), y la actuación de grupos sobre conjuntos.

1.- ACTUACION DE GRUPOS SOBRE CONJUNTOS

X es um conjunto no vacío.

1.1 Conceptos preliminares

1.1.1 Definición

Se dice que un grupo G actua(por la izquierda) sobre el conjunto X, si se ha definido una aplicación $G\times X \ni (g,x) \longmapsto g.x \in X$ verificando las propiedades:

i) Para todo $g,h \in G$ y todo $x \in X$ es $(gh).x=g.(h.x)$

ii) Para todo $x \in X$ es $e.x=x$

En donde e representa el elemento neutro del grupo, y $G\times G \ni (g,h) \longmapsto gh \in G$ es la operación del grupo

1.1.2 Comentario

El caso más frecuente es cuando tenemos un subgrupo G del grupo $X!$ de permutaciones de X (es decir , aplicaciones biyectivas de X en X). El grupo G actua entonces de forma natural sobre X mediante:

$G\times X \ni (g,x) \longmapsto g.x=g(x) \in X$.

En la práctica, como veremos, éste es el caso mas general posible

1.1.3 Observación

La actuación de un grupo G por la derecha sobre el conjunto X, de define de forma análoga mediante una aplicación $X \times G \ni (x,g) \longmapsto x.g \in X$, verificando las propiedades:

i) $x.(gh)=(x.g).h$ para todo $g,h \in G$ y todo $x \in X$

ii) $x.e=x$ para todo $x \in X$.

Nosotros fijaremos la atención sobre las actuaciones por la izquierda. Se entiende que todos los conceptos y resultados establecidos pueden traducirse de manera obvia al caso de actuación por la derecha.

1.1.4 Proposicion

Si G actua por la izquierda sobre X: $G \times X \ni (g,x) \mapsto g.x \in X$, entonces para cada $g \in G$ la aplicación $\varphi(g): X \ni x \longmapsto g.x \in X$ es una biyección y $\varphi: G \longmapsto X!$ es un homomorfismo de grupos.

Demostración:

Para $g \in G$, $\varphi(g): X \longmapsto X$ es desde luego aplicación, y por i) de 1.1.1 es $\varphi(gh)= \varphi(g)\circ\varphi(h)$. En particular, $\varphi(g\, g^{-1})= \varphi(g)\circ\varphi(g^{-1})=\varphi(e)=id$ y $\varphi(g^{-1})$ es la aplicación inversa de $\varphi(g)$.

1.1.5 Observación

De hecho se podría haber definido la actuación del grupo G sobre X, como un homomorfismo $\varphi: G \longrightarrow X!$. La equivalencia con la definición 1.1.1 es inmediata a partir de 1.1.4 .

1.1.6 Definición

Con la notación e hipótesis de 1.1.3, diremos que G actua libremente sobre X, si la aplicación $\varphi: G \longmapsto X!$ es homomorfismo inyectivo, es decir $Ker\, \varphi = \{e\}$. Esto equivale a decir que se verifica la implicación : $[g.x=x$ para todo $x \in X \Rightarrow g=e]$.

Nótese que si G actua de manera efectiva sobre X, entonces G puede considerarse subgrupo de X! identificando cada $g \in G$ con su correspondiente $\varphi(g) \in X!$.

1.2 Ejemplos

Los ejemplos que siguen están graduados de lo general a lo particular, y serán de utilidad posterior

1.2.1 Supongase que el grupo G actua sobre X, $G \times X \ni (g,x) \longmapsto g.x \in X$. Un subconjunto no vacío Y de X se dice G-saturado si para todo $y \in Y$ y todo $g \in G$ es $g.y \in Y$. En esta situación, $G \times Y \ni (g,y) \longmapsto g.y \in Y$ define una actuación de G en Y.

1.2.2 Si el grupo G actua sobre X, y G' es subgrupo de G, entonces G' actua de manera obvia sobre X

1.2.3 Supuesto que G actua sobre X, existe una actuación natural de G sobre las partes $\mathcal{P}(X)$ de X definida por
$G \times \mathcal{P}(X) \ni (g,A) \longmapsto g.A = \{g.a \ / \ a \in A\} \in \mathcal{P}(X)$.
Una familia $\mathcal{F}$ de subconjuntos de X se dice G- saturada, si es G-saturada respecto a ésta última actuación.

1.2.4 Un grupo G admite varias formas naturales de actuar sobre si mismo:
a) $L: G \times G \ (g,x) \longmapsto L_g(x) = gx \in G$ es una actuación por la izquierda
b) $R: G \times G \ (x,g) \longmapsto R_g(x) = xg \in G$ es una actuación por la derecha
a L y R se les denomina "traslaciones" del grupo (por izquierda y derecha respectivamente)
c) La actuación "conjugación" puede venir definida por:
$C: G \times G \ni (g,x) \longmapsto C_g(x) = g \ x \ g^{-1} \in G$: Conjugación por la izquierda
$C': G \times G \ni (x,g) \longmapsto C'_g(x) = g^{-1} x \ g \ \ G$:Conjugación por la derecha

1.2.5 La familia $\mathcal{L}(G)$ de subgrupos del grupo G no es G-saturada respecto a las traslaciones, sin embargo si lo es respecto a la conjugación, pues C_g y C'_g definen isomorfismos de G en si mismo para todo $g \in G$.

1.2.6 El grupo multiplicativo $GL(n,K)$ de matrices no singulares con coeficientes en el cuerpo K $(n \geqslant 1)$ actua de forma natural sobre el conjunto $K^n = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} : x_i \in K \right\}$, de la forma: $GL(n,K) \times K^n \ni \left(A, \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}\right) \longmapsto A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in K^n$
$GL(n,K)$ es el grupo lineal de orden n sobre K.

1.2.7 El grupo de matrices $GA(n,K)$, formado por las matrices con coeficientes en el cuerpo K de la forma $A = \begin{pmatrix} 1 & 0^t \\ a & \vec{A} \end{pmatrix}$ donde $a = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$, $0 = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ son elementos de K^n y $\vec{A} \in GL(n,K)$, actua sobre K^n de la forma:

$$GA(n,K) \times K^n \ni \left(A, \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}\right) \longmapsto A \begin{pmatrix} 1 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \{1\} \times K^m \simeq K^n .$$

Se denomina a $GA(n,K)$ grupo afin de orden n sobre K.

1.3 Orbitas. Espacios homogeneos.

1.3.1 Definición

Una actuacion de un grupo G sobre el conjunto X $(G \times X \ni (g,x) \longmapsto g.x \in X)$ induce una clasificación natural de los puntos de X:

Dos puntos x, x' X se dicen (G-) equivalentes si existe $g \in G$ con $g.x = x'$
(Se escribe entonces $x \sim x'$)

1.3.2 Proposición

La relación en X definida en 1.3.1 es relación de equivalencia. La clase de cada $x \in X$ es $\mathrm{Orb}(x) = \{ g.x : g \in G \}$, y se denomina orbita del elemento x.

1.3.3 Definición

Si el grupo G actua sobre el conjunto X, una aplicación $\Phi : X \longmapsto L$ se dice invariante, si verifica la implicación:

$x \sim x' \Rightarrow \Phi(x) = \Phi(x')$.

Un sistema $(\Phi_1, \ldots, \Phi_r)$ de invariantes se llama completo cuando $\Phi_i(x) = \Phi_i(x')$ para $i = 1, \ldots, r \Rightarrow x \sim x'$.

El sistema completo de invariantes $(\Phi_1, \ldots, \Phi_r)$ se llama irreducble si deja de ser completo al eliminar uno cualquiera de sus elementos.

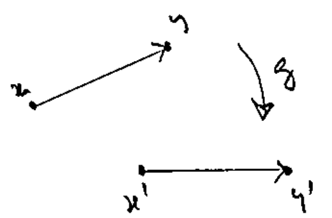
1.3.4

La manera usual de resolver los problemas concretos de clasificación bajo la actuación de un grupo, es la de obtener sistemas completos e irreducibles de invariantes "accesibles" desde el punto de vista practico. Esto permite decidir cuando dos elementos son equivalentes.
Por otra parte, determinando las relaciones de ligadura entre los invariantes del sistema, podrá describirse explicitamente la familia de orbitas.

Aclararemos ésto con un par de ejemplos intuitivos:

1.3.5 Ejemplos

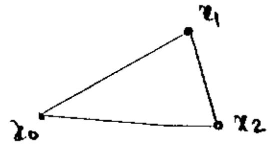
a) El grupo G de los movimientos del plano real "intuitivo" X, actua sobre el conjunto de pares ordenados de puntos $X \times X = X^2$ de la forma:



$G \times X^2 \ni (g, (x, y)) \longmapsto (g(x), g(y)) \in X^2$.

La aplicación $\Phi : X^2 \ni (x, y) \longmapsto \mathrm{dist}(x, y) \in R$ constituye un sistema completo de invariantes. La "ligadura" es $\Phi \geqslant 0$, es decir, la familia de órbitas es de la forma $\{ O_r : r \in R^+ \cup \{0\} \}$, donde $O_r = \{ (x, y) \in X^2 : \mathrm{dist}(x, y) = r \}$.

b) El mismo grupo G anterior actua de manera ya evidente sobre el conjunto X^3 de ternas ordenadas de puntos. Las aplicaciones:



$\Phi_i : X^3 \ni (x_o,x_1,x_2) \longmapsto \mathrm{dist}(x_i,x_{i+1}) \in R \quad i=0,1$

$\Phi_2 : X^3 \ni (x_o,x_1,x_2) \longmapsto \mathrm{dist}(x_2,x_o) \in R$

constituyen un sistema completo de invariantes.

Las relaciones de ligadura son: $\Phi_i \geqslant 0 \quad i=0,1,2$

$|\Phi_i - \Phi_j| \leq \Phi_k \leq \Phi_i + \Phi_j$ para i, j, k distintos. Esto permite describir todas las órbitas en forma explícita.

1.3.6 Definición

Un grupo G que actua sobre un conjunto X, se dice que actua de forma transitiva si para todo $x,y \in X$ existe $g \in G$ con $g.x=y$. Se dice entonces que (X,G) es un espacio homogéneo.

Nótese que en un espacio homogeneo se verifica que $\mathrm{Orb}(x)=X$ para todo $x \in X$.

1.3.7 Ejemplos

Son espacios homogeneos los espacios (X, G) dados por

a) $X=K^n$, $G=GL(n,K)$ (ver ejemplo 1.2.6)

b) $X=K^n$, $G=GA(n,K)$ (ver ejemplo 1.2.7)

c) X es el plano real intuitivo, y G el grupo de sus movimientos. (ver ejemplo 1.3.5)

1.4 <u>Grupo de isotropía</u>

> Se supone que el grupo G actua por la izquierda sobre el conjunto no vacío X: $G \times X \ni (g,x) \longmapsto g.x \in X$.

1.4.1 Definición

Se denomina grupo de isotropía ó estabilizador de un elmento $o \in X$ a $G_o = \{g \in G : g.o=o\}$.

Probaremos que el estabilizador es un subgrupo, que está determinado salvo conjugación en los espacios homogeneos independientemente del punto base:

1.4.2 Proposición

i) G_o es subgrupo de G para todo $o \in X$.

ii) Si $o' \in X$ y $g.o=o'$, entonces $G_{o'}=g\, G_o g^{-1}$.

En particular si (X, G) es espacio homogeneo, todos los subgrupos de isotropía son conjubados.

Demostración:

i) Si $g,h \in G_o$ entonces $(hg).o=h.(g.o)=h.o=o$, y $hg \in G_o$.
Además $e \in G_o$ por 1.1.1 ii) , y si $g \in G_o$ es $g^{-1}.o=g^{-1}.(g.o)=(g^{-1}g).o=o$.
ii) Si $o'=g.o$ y $h \in G_o$ es $(g\,h\,g^{-1}).o'=(gh).(g^{-1}.o)=g.(h.o)=g.o=o'$, así $g\,G_o g^{-1} \subset G_{o'}$. De forma análoga, $g^{-1}G_{o'}g \subset G_o$, y se verifica la igualdad pedida.

1.4.3 Ejemplo

a) Considerese la actuación por conjugación (a la izquierda) de un grupo G sobre si mismo: $G \times G \ni (g,x) \mapsto g\,x\,g^{-1} \in G$.
Fijado $x \in G$, $G_x=\{g \in G : gx=xg\}$ es el subgrupo (conmutador de x) formado por los elementos de G que conmutan con x. En particular , $G_e=G$, y G es abeliano si y solo si $G_x=G$ para todo $x \in G$.

b) Considerese el grupo G actuando por conjugación (por la izquierda) sobre la familia de sus subgrupos $\mathcal{L}(G)$:
$G \times \mathcal{L}(G) \ni (g,h) \mapsto g.H=gHg^{-1} \in \mathcal{L}(G)$.
El estabilizador G_H de un cierto subgrupo H es el maximo subgrupo de G respecto al cual H es subgrupo normal. Se denomina normalizador de H.

1.4.4 Ejemplo

El grupo de isotropía G_o del punto $o=\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix} \in K^m$ en la actuación del grupo afin $GA(n,K)$ sobre K^n descrita en 1.2.7, está constituido por matrices de la forma: $\begin{pmatrix}1 & 0^t\\ 0 & \vec{A}\end{pmatrix}$ con $\vec{A} \in GL(n,K)$ (ver 1.2.6).

El subgrupo G_o puede identificarse con el grupo lineal $GL(n,K)$ vía el isomorfismo: $GL(n,K) \ni \vec{A} \to \begin{pmatrix}1 & 0^t\\ 0 & \vec{A}\end{pmatrix} \in G_o$, y esto da lugar a la actuación de $GL(n,K)$ en K^m descrita en 1.2.6

1.4.5 Ejemplo

El grupo G de isometrías del plano real intuitivo X actua sobre las figuras (subconjuntos) de X de la forma en que se indica en 1.2.3.
La "amplitud" del grupo G_F de una figura F mide la regularidad ó grado de simetría de la figura. Así por ejemplo , el grupo de isotrpía de una figura formada por tres puntos distintos $\{x_o,x_1,x_2\}$ no alineados es:
a) Isomorfo al grupo de permutaciones $\{0,1,2\}$ si F determina un triángulo equilátero.

b) Isomorfo al grupo Z_2 de dos elementos, si F determina un triangulo isosceles.

c) La identidad, si F determina un triangulo escaleno.

2. GEOMETRIAS KLEINIANAS

Pretendemos establecer aquí algunos conceptos generales en torno a "las geometrías", que perfilarán el argumento básico sobre el cual se desarrollan en estos apuntes las geometrías lineales clasicas.

2.1 <u>Definiciones y ejemplos</u>

2.1.1 Definición

Una geometría es una pareja (X,G) en donde X es un conjunto, y G es un grupo que actua (por la izquierda) libremente sobre X.

Dos geometrías (X,G) (X,G') sobre un mismo conjunto X se dicen iguales si existe $\theta: G \to G'$ isomorfismo de grupos tal que:

$$\theta(g).x = g.x \quad \text{para todo } x \in X \text{ y todo } g \in G$$

Se dice en este caso que los grupos G y G' definen la misma geometría sobre el conjunto X.

2.1.2 Proposición

Dos grupos G y G' definen la misma geometría sobre el conjunto X, si y solo si $\operatorname{im}\varphi = \operatorname{im}\varphi'$, siendo $\varphi: G \to X!$ $\varphi': G' \to X!$ los monomorfismos inducidos según la definición 1.1.6.

Demostración:

Si existe $\theta: G \to G'$ isomorfismo de grupos tal que $\theta(g).x = g.x$ para todo $x \in X$ y todo $g \in G$, entonces el diagrama

$$\begin{tikzcd} G \arrow[rr, "\theta"] \arrow[dr, "\varphi"'] & & G' \arrow[dl, "\varphi'"] \\ & X! & \end{tikzcd}$$

es conmutativo, y $\varphi(G) = \varphi'\theta(G) = \varphi'(G')$.

Recíprocamente si $\varphi(G) = \varphi'(G') = G_X$ entonces $\varphi: G \to G_X$, $\varphi': G' \to G_X$ son isomorfismos de grupos, y $\varphi'^{-1}.\varphi: G \to G'$ es el isomorfismo buscado.

2.1.3 Definición

Con las notaciones de 2.1.2, se denomina a $\operatorname{im}\varphi$ grupo de transformaciones de la geometría (X,G).

Una geometría queda pues unívocamente determinada por su grupo de transformaciones.

2.1.4 Ejemplo: Geometría vectorial en K^n

El grupo $GL(n,K)$ actua sobre K^n segun se indicó en 1.2.6. Esta actuación es libre, ya que si $A=(a_{ij}) \in GL(n,K)$ verifica $A.x=x$ para todo $x \in K^n$

se tendrá en particular $A\begin{pmatrix}1\\0\\ \vdots\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11}\\ \vdots\\ a_{n1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\ \vdots\\0\end{pmatrix}$ ... $A\begin{pmatrix}0\\0\\ \vdots\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{1n}\\ \vdots\\ a_{nn}\end{pmatrix}$, y $A=I$.

(por un procedimiento análogo se puede ver que las actuaciones definidas en los ejemplos que siguen son también libres).

GL(n,K) define pues un geometría en K^n que se denomina geometría vectorial.

2.1.5 Ejemplo: Geometria afin en K^n

El grupo afin GA(n) define en K^n la geometría afin (vease 1.2.7).

El espacio $(K^n, GA(n))$ es homogeneo, ya que si $a=\begin{pmatrix}a_1\\ \vdots\\ a_n\end{pmatrix}$, $b=\begin{pmatrix}b_1\\ \vdots\\ b_n\end{pmatrix}\in K^n$, la matriz $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & \dots & 0\\ b-a & 1 & \dots & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ b-a & 0 & \dots & 1\end{pmatrix}$

es de GA(n), y verifica $A\begin{pmatrix}1\\a_1\\ \vdots\\a_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\b_1\\ \vdots\\b_n\end{pmatrix}$

Por otra parte, como se vió en 1.1.4 el grupo de isotropía G_o de $o=\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\0\end{pmatrix}$

es isomorfo a GL(n), y vía este isomorfismo define la geometría vectorial de K^n (Vease 2.1.4)

2.1.6 Ejmplo: Geometria vectorial euclidea (tómese K=R)

Considerese el grupo $O(n)=\{A\in GL(n) : A^tA = I\}$ donde A^t denota la matriz transpuesta de A, y I es la matriz identidad. La actuación de O(n) sobre R^n viene definida por la misma fórmula de 1.2.6 y es libre. La geometría definida así en R^n se denomina geometría vectorial euclidea.

$(R^n, O(n))$ no es espacio homogeneo pues $A.o=o$ para todo $A\in O(n)$.

2.1.7 Ejemplo: Geometría afin euclidea (K=R)

El grupo OA(n) formado por las matrices $A=\begin{pmatrix}1 & 0^t\\ a & \vec{A}\end{pmatrix}\in GA(n)$ tales que $\vec{A}\in O(n)$ actua libremente sobre K^n por la misma formula dada en 1.2.7, y define la geometría afin euclidea de R^n. El espacio $(R^n, OA(n))$ es espacio homogéneo y se demuestra de la misma forma que en 2.1.5

2.2 Invariantes de una geometría. Subgeometrías

2.2.1 Definición

Se denominan invariantes de una geometría, aquellos conceptos y propiedades que se conservan por la acción del grupo de transformaciones.

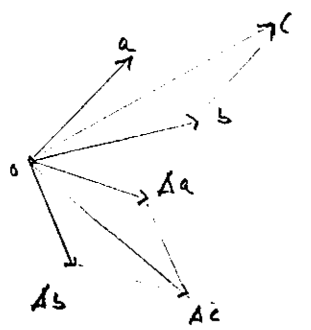
El estudio de una geometría es esencialmente el estudio de sus invariantes. Esto engloba en particular , la resolución de problemas de clasificación obtenidos por actuaciones "inducidas" del grupo de transformaciones sobre familias de objetos relativas al conjunto base. (Véase ejemplos 1.2.3 ,1.3.5)

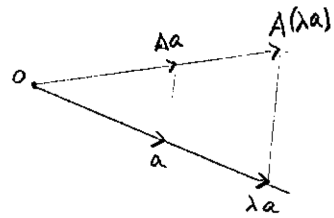
2.2.2 Ejemplo

Considerese un sistema (a,b,c) de elementos de K^n , $a=\begin{pmatrix}a_1\\ \vdots\\ a_n\end{pmatrix}$, $b=\begin{pmatrix}b_1\\ \vdots\\ b_n\end{pmatrix}$

$c=\begin{pmatrix}c_1\\ \vdots\\ c_n\end{pmatrix}$. El sistema (a,b,c) se dice que está en posición de paralelogramo respecto a $o=\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}\in K^n$, si $c_i=a_i+b_i$ $i=1,\dots,n$ y se escribe $c=a+b$.

Esta propiedad es geométrica en la geometría vectorial definida por $GL(n,K)$ en K^n (véase 2.1.2) , ya que si $a+b=c$, entonces para todo





$A\in GL(n,K)$ es $Ac=Aa+Ab$, y por tanto (Aa,Ab,Ac) están en posición de paralelogramo. Así la suma de vectores en K^n es un concepto própio de la geometría vectorial de K^n.

De forma análoga se prueba que el producto de escalares $\lambda\in K$ por vectores a K^n : $\lambda a=\begin{pmatrix}\lambda a_1\\ \vdots\\ \lambda a_n\end{pmatrix}$ también lo es.

En definitiva, la estructura vectorial canonica de K^n es objeto de estudio para la geometría vectorial.

2.2.3 Definición

Con las hipótesis de 2.1.7, se dice que la geometría definida en X por G' es subgeometría de la definida por G, si $\operatorname{im}\varphi\subset\operatorname{im}\varphi'$. Esto equivale a decir que existe $\xi: G\to G'$ monomorfismo de grupos, tal que $\xi(g)\cdot x=g\cdot x$ para todo $g\in G$ y todo $x\in X$.

2.2.4 Comentario

Los invariantes de una geometría son tambien invariantes de cualquiera de sus subgeometrías, pero no recíprocamente. Pongamos un ejemplo:

2.2.5 Ejemplo ($K=R$)

El grupo ortogonal $O(n)$ es subgrupo de $GL(n)$, y define por tanto una sub geometría de la geometría vectorial de K^n (véase ejemplo 2.1.3) que hemos denominado geometría vectorial euclidea. La estructura vectorial de K^n es también un invariante de ésta geometría, por 2.2.4. por otra parte, la aplicación $K^n \times K^n \ni (a,b) \longmapsto a_1 b_1 + \ldots + a_n b_n \in K$ (producto escalar de vectores de K^n) es invariante en la geometría vectorial euclidea. En efecto, nótese que $a_1 b_1 + \ldots + a_n b_n = a^t b$ (producto matricial). Si $A \in O(n)$ es $A^t A = I$, y se verifica:

$(Aa)^t (Ab) = a^t (A^t A) b = a^t I b = a^t b.$

El producto escalar no es sin embargo invariante en geometría vectorial, como puede comprobarse mediante algún contraejemplo trivial.

2.2.6 Ejemplo ($K=R$)

El grupo afin euclideo $OA(n)$ es subgrupo del grupo afin $GA(n)$ (Véase 2.1.7) y define por tanto una subgeometría de la geometría afin de R^n. Se prueba que la aplicación "distancia euclidea":

$d: R^n \times R^n \ni (a,b) \longmapsto \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (b_i - a_i)^2} \in R$ es un invariante de la geometría afín euclidea. Puede probarse que el grupo de transformaciones está formado exactamente por el conjunto de biyecciones de R^n que preservan la distancia euclidea

3. GEOMETRIAS LINEALES EN EL PLANO REAL INTUITIVO

Ilustraremos aquí las ideas desarrolladas en el parágrafo anterior, estableciendo de manera informal las geometrías lineales clásicas sobre el plano real intuitivo, y mostrando la graduación natural que existe entre ellas. Se utilizarán libremente los conceptos y resultados básicos correspondientes a un curso escolar de geometría euclídea del plano.

La formalización de las ideas que aquí exponemos informalmente, y su generalización a espacios lineales abstractos multidimensionales, constituye básicamente el objeto de ésta obra.

X denotará un plano intuitivo (real) eventualmente sumergido en el espacio intuitivo tridimensional $\mathcal{E}$.

3.1 Geometría afín

Es natural exigir a una geometría lineal en el plano X, que en ella tenga consistencia el concepto (intuitivo) elemental de lineal recta. La geometría afín que ahora definiremos, es en este sentido la geometría lineal mas grande (ó abstracta).

3.1.1 Definición (Proposición)

Una biyeccion $g:X \longrightarrow X$ se denomina transformación afin, si para toda recta R de X se verifica que g(R) es recta de X.

El conjunto GA(X) de transformaciones afines de X es un grupo respecto a la composición de aplicaciones, y se denomina grupo afin del plano X. (X,GA(X)) es el plano afin (intuitivo).

Veamos que el paralelismo y la incidencia de rectas son conceptos afines:

3.1.2 Proposición

Sean R_1,R_2 dos rectas de X, y $g \in GA(X)$. Entonces:

a) Si R_1 es paralela a R_2, $g(R_1)$ es paralela a $g(R_2)$

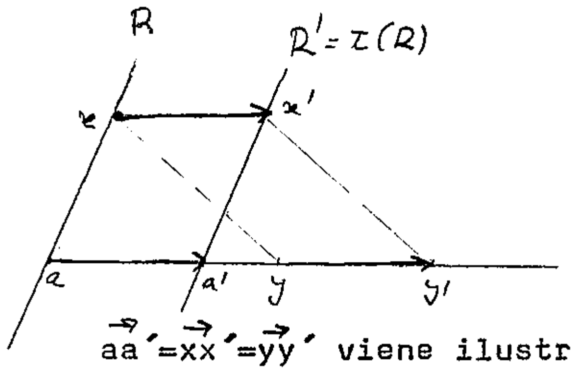
b) Si R_1 y R_2 son incidentes, también lo son $g(R_1)$ y $g(R_2)$.

Demostración:

Dos rectas distintas R_1 y R_2 de X son paralelas, si y solo si $R_1 \cap R_2 = \emptyset$. Pero $R_1 \cap R_2 = \emptyset \Leftrightarrow g(R_1 \cap R_2) = g(R_1) \cap g(R_2) = \emptyset$.

3.1.3 Traslaciones

Si a, a' son dos puntos distintos de X, denotamos por $\langle a,a'\rangle$ a la única recta que contiene a ambos puntos. Si x es un punto no situado sobre la recta $\langle a,a'\rangle$, existe un único punto x' que determina con los otros tres un paralelogramo, es decir $\langle x,x'\rangle // \langle a,a'\rangle$ y $\langle a,x\rangle // \langle a',x'\rangle$. Se escribe entonces $\vec{aa'}=\vec{xx'}$ (y también $\vec{ax}=\vec{a'x'}$). Cuando $y\in\langle a,a'\rangle$, la construcción de y' tal que $\vec{aa'}=\vec{xx'}=\vec{yy'}$ viene ilustrada en la figura.



La aplicación $\tau=\tau_{\vec{aa'}}:X\longrightarrow X$ tal que $\tau(x)=x' \Longleftrightarrow \vec{xx'}=\vec{aa'}$, se denomina traslación (de vector libre $\vec{aa'}$), y es transformación afin. Nótese que la recta $\tau(R)$ es paralela a R , para cada recta R de X.

Se tiene así de forma inmediata el siguiente resultado:

3.1.4 Proposición

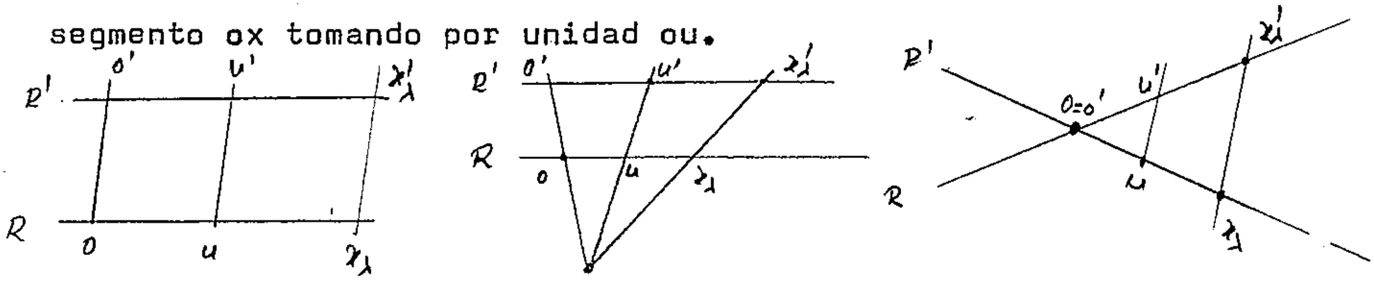
La geometría afin del plano es homogenea, es decir $(X,GA(X))$ es espacio homogeneo.

Demostración:

Si $a,a'\in X$ la traslación $\tau=\tau_{\vec{aa'}}$, verifica $\tau(a)=a'$.

3.1.5 Razón simple

Fijados en una recta R dos puntos distintos o (origen) y u (unidad) es sabido que queda inducida una graduación de la recta R que permite describir biunívocamente sus puntos en la forma x_λ , $\lambda\in\mathbb{R}$, siendo $o=x_0$ y $u=x_1$. Se denomina razón simple entre o,x_λ y u al número λ y escribimos $(o:x_\lambda:u)=\lambda$. λ representa intuitivamente, la medida del segmento ox tomando por unidad ou.



Establecida una graduación en la recta R, es posible construir con la única ayuda de la escuadra y cartabón, cualquier otra graduación sobre otra recta distinta R', tal y como se indica en las figuras.

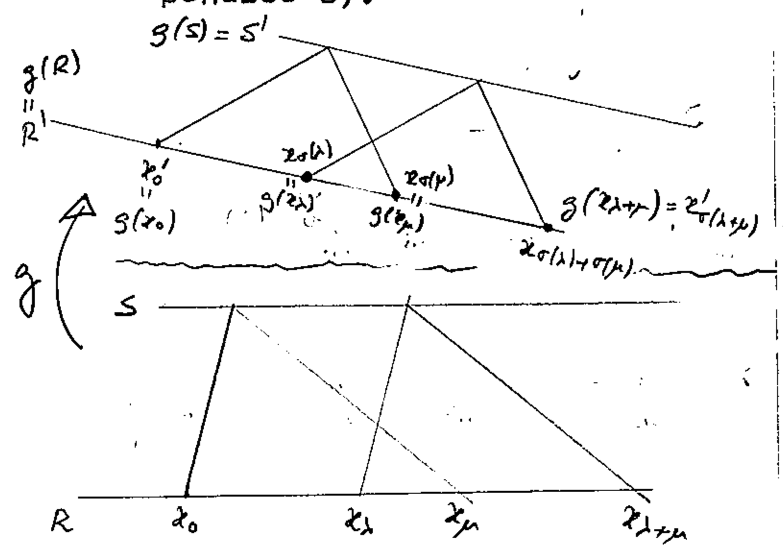
Probaremos a continuación que la razón simple es un invariante de la geometría afin del plano:

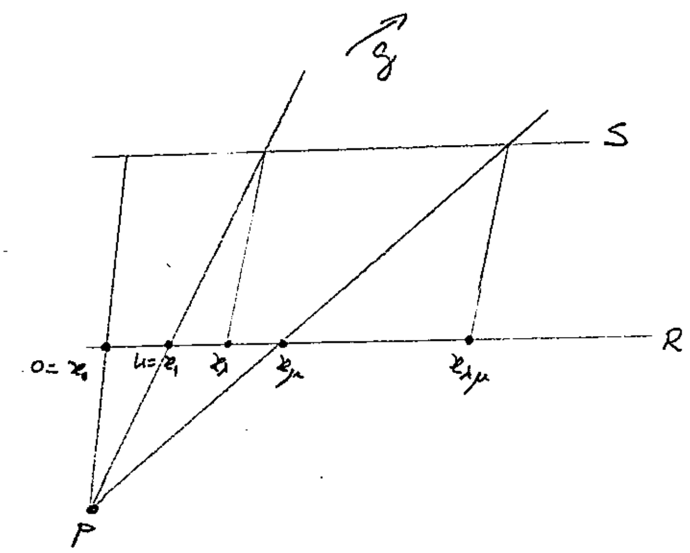
3.1.6 Teorema

Toda transformación afin $g:X \longrightarrow X$ conserva la razón simple, es decir, para o, x, u puntos alineados ($o \neq u$) sus imagenes por g están alineadas y se tiene $(g(o):g(x):g(u))=(o:x:u)$.

Demostración:

Fijemos o y u sobre una recta R, $o \neq u$ y sean $o'=g(o)$ $u'=g(u)$ sus correspondientes imagenes sobre la recta $R'=g(R)$. Denotando como en 3.1.5, por x_λ el único punto de R tal que $(o:x_\lambda:u)=\lambda$, probaremos que la aplicación $\sigma:\mathbb{R}\ni\lambda\mapsto(o':g(x_\lambda):u')\in\mathbb{R}$ es la aplicación identidad. Para ello es suficiente probar que σ es automorfismo de cuerpos (véase apendice B).





En efecto: Tomemos S recta auxiliar paralela (y distinta) a R, e indiquemos por $S'=g(S)$ y x'_λ la graduación inducida en R' por o'(origen) y u'(unidad). Por definición de σ es $g(x_\lambda)=x'_{\sigma(\lambda)}$ para todo $\lambda\in\mathbb{R}$. Teniendo en cuenta que g conserva el paralelismo y la incidencia de rectas, la figura de la izquierda muestra que $\sigma(\lambda+\mu)=\sigma(\lambda)+\sigma(\mu)$. Utilizando el teorema de tales y la figura 2, se ve que $\sigma(\lambda\mu)=\sigma(\lambda)\,\sigma(\mu)$.

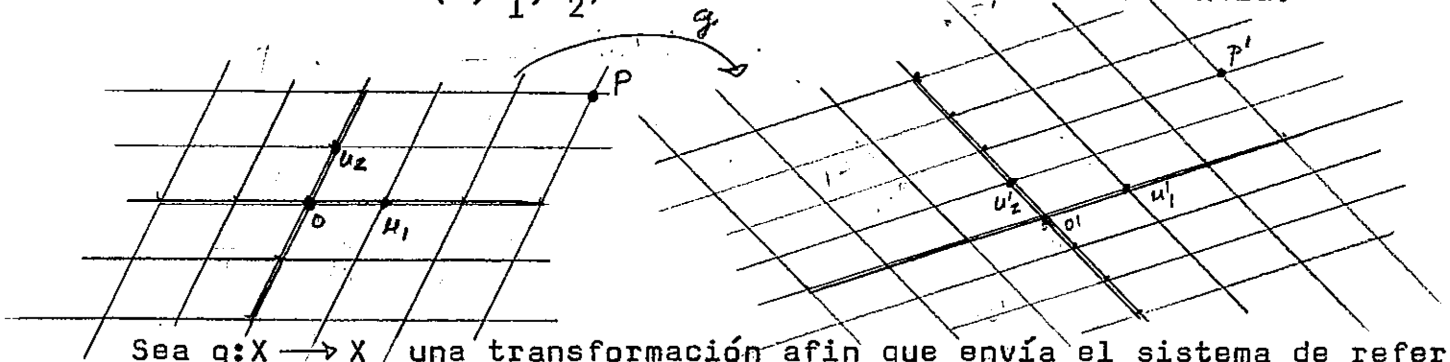
Nótese que la esencia de la demostración está en el hecho de poder describir la estructura algebraica del cuerpo $\mathbb{R}$ sobre una recta graduada, utilizando construcciones geométricas las que solo intervienen la incidencia y paralelismo de rectas (construcciones con escuadra y cartabón), y son por tanto conservadas por toda transformación afin g.

3.1.7 Sistemas de referencia.

Un sistema de tres puntos no alineados (o,u_1,u_2) permite asignar de manera unívoca a cada punto $p\in X$ una pareja de coordenadas (λ_1,λ_2) donde $\lambda_i=(o:p_i:u_i)$ siendo $p_i\in\langle o,u_i\rangle$ puntos tales que $\overrightarrow{op_2}=\overrightarrow{p_1p}$.

En particular, los puntos de la recta $\langle o, u_1 \rangle$ son de la forma $(\lambda_1, 0)$ y los de $\langle o, u_2 \rangle$ de la forma $(0, \lambda_2)$.

A la terna $\mathcal{R} = (o, u_1, u_2)$ se denomina sistema de referencia.



Sea $g: X \longrightarrow X$ una transformación afin que envía el sistema de referencia $\mathcal{R} = (o, u_1, u_2)$ a $\mathcal{R}' = (o', u_1', u_2')$. Como g conserva los paralelogramos y la razón simple, se deduce que g transforma cada punto $p \in X$ con coordenadas (λ_1, λ_2) respecto a $\mathcal{R}$ en el punto p' con las mismas coordenadas (λ_1, λ_2) respecto a $\mathcal{R}'$. Recíprocamente, si se tienen los sistemas de referencia $\mathcal{R}$ y $\mathcal{R}'$ la transformación descrita antes es afin, y así se tiene el siguiente

3.1.8 Teorema (Fundamental)

Si $\mathcal{R} = (o, u_1, u_2)$ y $\mathcal{R}' = (o', u_1', u_2')$ son sistemas de referencia, existe una única transformación afín $g: X \longrightarrow X$ que transforma $\mathcal{R}$ en $\mathcal{R}'$.

3.1.9 Invariantes afines

Hemos descrito ya algunas propiedades y conceptos invariantes de la geometría afín:

- La incidencia y paralelismo de rectas
- La razón simple de tres puntos alineados

Por otra parte, la descripción dada en 3.1.7 de las transformaciones afines por medio de sistemas de referencia, permite intuir como son las "deformaciones" que dan lugar a figuras afinmente equivalentes. Para comparar afinmente dos figuras, debemos pasar por alto aquellos detalles que las diferencien y no correspondan a invariantes de la geometría afin, así por ejemplo:

- Todos los triangulos no degenerados son afinmente equivalentes
- Las conicas no degeneradas del plano se clasifican afinmente en elipses, hiperbolas y parabolas. Esto significa por ejemplo, que todas las elipses son afinmente equivalentes entre si indepaendientemente de su forma (excentricidad) ó tamaño (parámetro), pero no es posible aplicar mendiante una transformación afin una elipse sobre una hiperbola.

3.2 El plano ampliado

La geometría afín es la geometría mas abstracta que mantiene invariante el concepto de linea recta entendida en un sentido elemental. Es posible sin embargo "ampliar" el concepto de recta de forma que siga teniendo significado afin. La geometría de las biyecciones que transforman rectas ampliadas en rectas ampliadas es la geometría proyectiva y contiene a la afin como subgeometría.

3.2.1 Puntos del infinito: plano ampliado

La relación usual de paralelismo "//" sobre la familia $\mathcal{L}$ de rectas afines de X, define en $\mathcal{L}$ una relación de equivalencia. Cada elemento α del conjunto cociente $\mathcal{L}/\!/$ representa una dirección en el plano. Se denomina a α punto del infinito de X, y a $\infty_X = \mathcal{L}/\!/$ recta del infinito.

La proyección canónica $\mathcal{L} \ni R \longmapsto \infty_R \in \infty_X$ asigna a cada recta el punto del infinito definido por su dirección. Nótese que $\infty_R = \infty_{R'}$ si y solo si $R/\!/R'$.

El conjunto $\widetilde{X} = X \cup \infty_X$ se denomina plano ampliado de X ó plano proyectivo intuitivo.

3.2.2 Rectas en el plano ampliado

Si R es una recta del plano afin X , se denomina a $\widetilde{R} = R \cup \infty_R \subset \widetilde{X}$ recta proyectiva ampliada de R ó recta propia. Las rectas proyectivas de $\widetilde{X}$ son por definición las rectas propias, y la recta del infinito ∞_X que denominamos recta impropia.

3.2.3 Geometría afin del plano ampliado

El grupo afín GA(X) conserva el paralelismo de rectas. Así si R_1 y R_2 son rectas paralelas, es decir $\infty_{R_1} = \infty_{R_2}$,entonces para todo $g \in GA(X)$ es $g(R_1)/\!/g(R_2)$, es decir, $\infty_{g(R_1)} = \infty_{g(R_2)}$. Podemos definir entonces la actuación $GA(X) \times X \ni (g, \tilde{x}) \longmapsto g.\tilde{x} \in \widetilde{X}$ tal que: $g.x = g(x)$ si $x \in X$, $g.\infty_R = \infty_{g(R)}$ para $\infty_R \in \infty_X$.

Nótese que si $g.\tilde{x} = \tilde{x}$ para todo $\tilde{x} \in \widetilde{X}$ se verifica en particular que $g(x) = x$ para todo $x \in X$ y $g = id$. Por tanto la actuación es efectiva, y define en $\widetilde{X}$ una geometría que denominamos (proyectivo) afin.

La aplicación $GA(X) \ni g \mapsto \tilde{g} \in X!$ tal que $\tilde{g}(\tilde{x}) = g.\tilde{x}$ para todo $\tilde{x} \in \widetilde{X}$ es un homomorfismo inyectivo de grupos que identifica GA(X) con su imagen $GA(\widetilde{X}) = \{\tilde{g} \,/\, g \in GA(X)\}$ que es el grupo de transformaciones de la geometría afin de $\widetilde{X}$.

Se denomina a $\widetilde{g}$ extensión proyectiva de la transformación afín g, y se tiene el siguiente resultado:

3.2.4 Teorema

El grupo afín $GA(\widetilde{X})$ sobre el plano ampliado $\widetilde{X}$, es el grupo de las biyecciones de $\widetilde{X}$ que transforman rectas proyectivas en rectas proyectivas, y dejan invariante la recta del infinito ∞_X.

Demostración:

Si $\widetilde{g} \in GA(\widetilde{X})$ y $\alpha_R \in \alpha_X$, entonces $g(\alpha_R) = \alpha_{g(R)} \in \alpha_X$. Así $g(\alpha_X) \in \alpha_X$.

Tambien se tiene por el mismo motivo $\widetilde{g}^{-1}(\alpha_X) \in \alpha_X$ y por tanto $g(\alpha_X) = \alpha_X$.

Recíprocamente, si $\varphi : \widetilde{X} \rightarrow \widetilde{X}$ es una biyección que transforma rectas proyectivas en rectas proyectivas y $\varphi(\alpha_X) = \alpha_X$, entonces la aplicación $\varphi_X : X \ni x \mapsto \varphi(x) \in X$ transforma rectas de X en rectas de X , y por tanto $\varphi_X \in GA(X)$. Por otra parte $\widehat{\varphi}_X = \varphi$ ya que:

$$\varphi(\alpha_R) = \varphi(\widetilde{R} \cap \alpha_X) = \varphi(\widetilde{R}) \cap \alpha_X = \alpha_{\varphi_X(R)} = \widetilde{\varphi}_X(\alpha_R) .$$

3.3 Geometría Proyectiva en el plano ampliado

La geometría proyectiva en el plano ampliado $\widetilde{X}$, es la más general posible en la que la propiedad de ser recta proyectiva, es invariante.

3.3.1 Definición

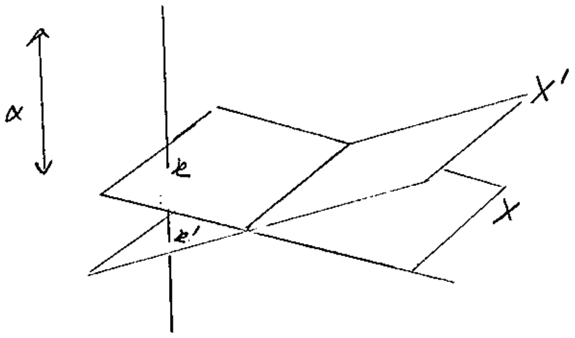
Se denomina grupo proyectivo $GP(\widetilde{X})$ del plano ampliado $\widehat{X}$ al grupo de las biyecciones en $\widetilde{X}$ que transforman rectas proyectivas en rectas proyectivas. La geometría así definida en $\widetilde{X}$ se denomina proyectiva.

Nótese que $GA(\widehat{X}) < GP(\widetilde{X})$ (Teorema 3.2.4) , y la geometría afín de $\widetilde{X}$ es subgeometría de la proyectiva.

3.3.2 Proyecciones cónicas paralelas

Supongamos nuestro plano intuitivo X sumergido en el espacio intuitivo tridimensional $\mathcal{E}$, y sea X'un plano de $\mathcal{E}$ distinto de X (véase figura de la página siguiente). Considérese una dirección α en $\mathcal{E}$ que sea transversal a X y a X'.

La aplicación $\pi_\alpha : X \rightarrow X'$ que hace corresponder a cada punto $x \in X$ el punto $\pi_\alpha(x) = x'$ intersección de la recta R (que pasa por x y tiene



dirección α) con el plano X', es una biyección que transforma rectas de X en rectas de X'.
Se denomina a π_α proyección cónica paralela de X en X' con dirección α.

3.3.3 Isomorfismos afines

Una biyección $f:X \to X'$ entre planos afines intuitivos que transforma rectas en rectas se denomina isomorfismo afín. Así, la proyección cónica paralela π_α establecida en 3.3.2 es isomorfismo afín.
En general un isomorfismo afin $f:X \to X'$ transforma un par de rectas paralelas en un par de rectas paralelas (se prueba de la misma forma que 3.1.2) y siguiendo el mismo argumento de 3.2.3 se ve que f puede ampliarse a una biyección $\tilde{f}:\tilde{X} \to \tilde{X}'$ tomando $\hat{f}(\infty_R)=\infty_{f(R)}$ para cada recta R de X; Se denomina a $\tilde{f}$ extensión proyectiva de f.
Los mismos argumentos empleados en 3.1.6 y 3.1.7 permiten probar que un isomorfismo afin conserva la razón simple, y viene unívocamente determinado por las imagenes de tres puntos no alineados.

3.3.4 Isomorfismos proyectivos

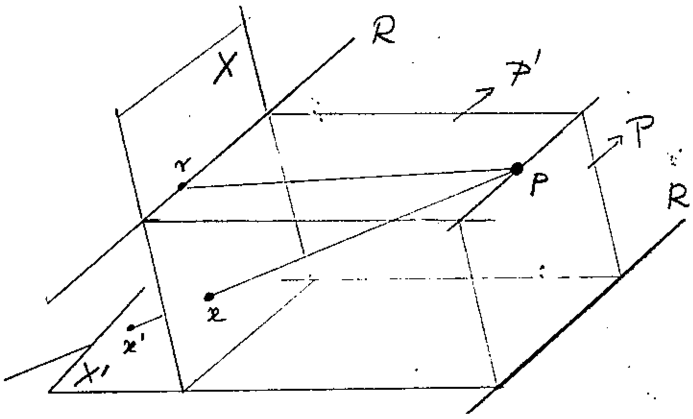
Una aplicación $\varphi:\tilde{X} \to \tilde{X}'$ entre planos proyectivos ampliados, se denomina isomorfismo proyectivo si transforma rectas proyectivas en rectas proyectivas.
En particular, la extensión proyectiva $\hat{f}:\tilde{X} \to \tilde{X}'$ de un isomorfismo afín $f:X \to X'$ es un isomorfismo proyectivo. Veremos inmediatamente que no todos los isomorfismos proyectivos de $\tilde{X}$ en $\tilde{X}'$ se obtienen de esta forma, de hecho puede establecerse el siguiente resultado análogo a 3.2.4

Teorema

Si $\varphi:\hat{X} \to \tilde{X}'$ es un isomorfismo proyectivo, la condición necesaria y suficiente para que φ sea la extemsión proyectiva de un isomorfismo afin $f:X \to X'$ es que $\varphi(\alpha_X)=\infty_{X'}$.

3.3.5 Proyecciones cónicas no paralelas

En las mismas condiciones de 3.3.2 , elijamos ahora un punto p no situado sobre $X \cup X'$ tal como se indica en la figura de la siguiente página. Dado el punto $x \in X$, en general, la recta $\langle p,x \rangle$ determinada por p y x cortará a X' en un punto x'. Escribimos $\pi_p(x)=x'$



Sin embargo si r es un punto situado sobre la recta R intersección del plano P' (que pasa por p y es paralelo a X') con el plano X, la recta $\langle p,r\rangle$ no corta a X', pero define claramente una dirección $\alpha' \in X'$. Escribimos $\pi_p(r)=\alpha'$.

Finalmente, si $\alpha \in \infty_X$ es una dirección en X no paralela a R, la recta que pasa por p y tiene dirección α interseca a X' en un punto $\pi_p(\alpha)$ de la recta R', intersección de X' con el plano P (paralelo a X que pa- pasa por p).

Siguiendo las mismas reglas de construcción se ve que $\pi_p(\tilde{R})=\infty_{X'}$ y $\pi_p(\infty_X)=\tilde{R}'$.

Se intuye facilmente que π_p es una biyección de X en X' que transforma rectas proyectivas en rectas proyectivas, y es por tanto un isomorfismo proyectivo que denominamos proyección cónica de $\tilde{X}$ sobre $\tilde{X}'$ con centro p. Este isomorfismo será la extensión proyectiva de un isomorfismo afin si y solo si los planos X y X' son paralelos.

De la figura anterior se obtiene facilmente que:

Si los planos X y X' no son paralelos, fijada una recta $\tilde{R}$ de $\tilde{X}$ existe un punto $p \notin X \cup X'$ tal que la proyección cónica $\pi_p : \tilde{X} \to \tilde{X}'$ verifica: $\pi_p(\tilde{R})=\infty_{X'}$. Por otra parte, como se vió en 3.3.2 es posible enviar la recta impropia ∞_X a $\infty_{X'}$, mediante (la extensión proyectiva de) una proyección conica paralela cualquiera. Se tiene así:

<u>Teorema</u>

Supuestos los planos X y X' (sumergidos en $\mathcal{E}$) no paralelos, es posible enviar una recta proyectiva cualquiera de $\tilde{X}$ a la recta imprópia $\infty_{X'}$ de X' mediante una proyección cónica de $\tilde{X}$ en $\tilde{X}'$.

La composición de proyecciones cónicas es un isomorfismo proyectivo. esto es consecuencia del siguiente resultado general con demostración inmediata:

Proposición

La composición de isomorfismos proyectivos entre planos proyectivos (intuitivos) es isomorfismo proyectivo.

3.3.6 Teorema Fundamental de la Geometría Proyectiva

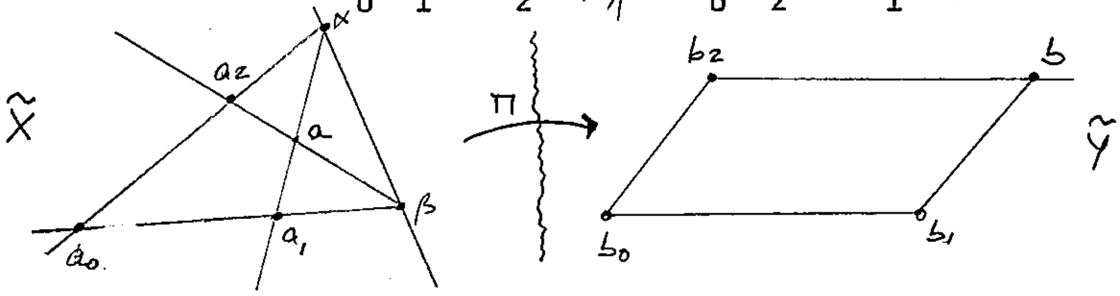
Para determinar una transformación afín es suficiente conocer las imagenes de tres puntos no alineados. La determinación de una transformación proyectiva requiere el conocimiento de las imagenes de cuatro puntos dispuestos en posición general.

Definición

Una cuaterna ordenada de puntos en X , (a_0,a_1,a_2,a) se denomina sistema de referencia proyectivo, si no existen rectas proyectivas que contengan tres elementos del sistema, es decir, no existen en el sistema tres puntos alineados.

Construcción

Fijado el sistema de referencia proyectivo (a_0,a_1,a_2,a) , y denotando por $\langle x,y\rangle$ a la recta proyectiva definida por los puntos $x,y\in\tilde{X}$ $(x\neq y)$, sean $\alpha=\langle a_0,a_1\rangle\cap\langle a_2,a\rangle$, $\beta=\langle a_0,a_2\rangle\cap\langle a_1,a\rangle$.



Supuesto X sumergido en el espacio intuitivo tridimensional $\mathcal{E}$, tomemos Y plano no paralelo. Por el teorema de 3.3.5, es posible determinar una proyección cónica $\pi:\tilde{X}\mapsto\tilde{Y}$ que envie la recta $\tilde{R}=\langle\alpha,\beta\rangle$ a ∞_Y . Denotando por $b_i=\pi(a_i)$, $b=\pi(a)$ se verifica

$\langle b_0,b_1\rangle\cap\langle b_2,b\rangle=\pi(\alpha)\in\infty_Y$, $\langle b_0,b_2\rangle\cap\langle b_1,b\rangle=\pi(\beta)\in\infty_Y$, y por tanto (b_0,b_1,b_2,b) determinan los vertices de un paralelogramo, siendo b_0 y b vertices opuestos.

Se tiene a partir de aquí el siguiente resultado (compárese con 3.1.8)

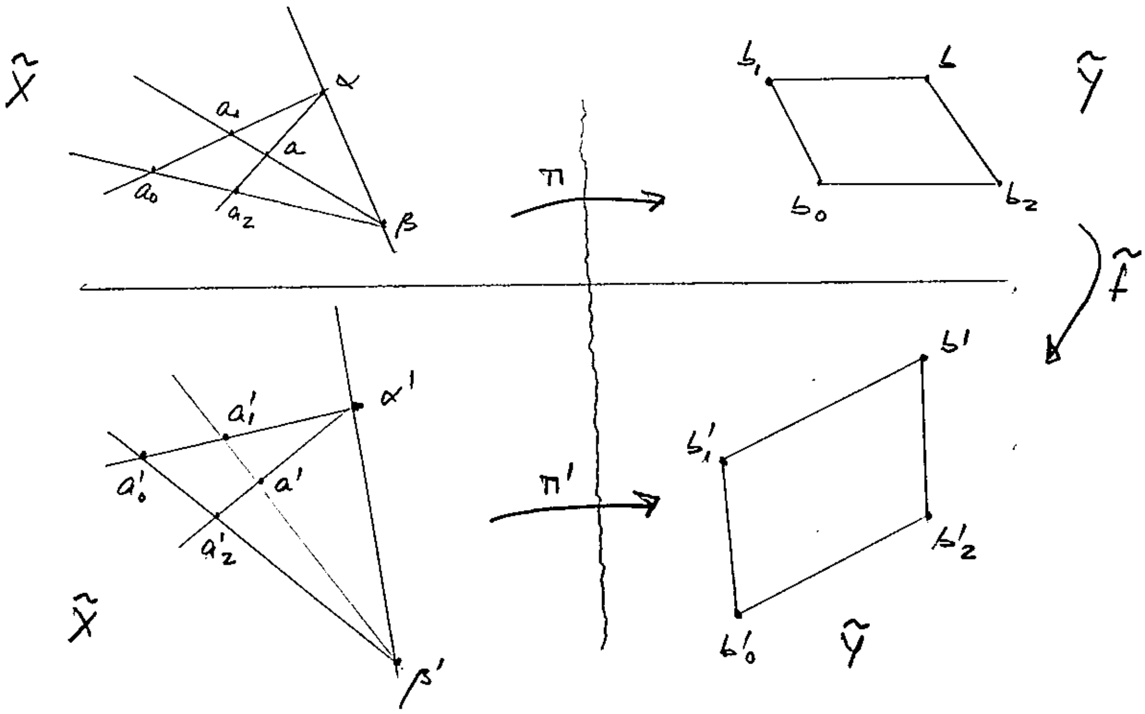
Teorema (Fundamental)

Sean $\mathcal{R}=(a_0,a_1,a_2,a)$ $\mathcal{R}'=(a_0',a_1',a_2',a')$ sistemas de referncia proyectivos en el plano ampliado $\hat{X}$. Existe entonces una única transformación proyectiva $\varphi:\hat{X}\mapsto\hat{X}$ tal que $\varphi(\mathcal{R})=\mathcal{R}'$.

Demostración:

Supuesto X sumergido en $\mathcal{E}$, tomemos Y plano de $\mathcal{E}$ no paralelo a X.

Efectuemos para ambos sistemas $\mathcal{R}$ y $\mathcal{R}'$ la construcción anterior:



Por el Teorema Fundamental de la Geometría Afin 3.1.8 existe una transformación afín (única) tal que $f(b_0,b_1,b_2)=(b'_0,b'_1,b'_2)$, y necesariamente es $f(b)=b'$, pues f conserva paralelogramos. Sea $f:Y \to Y$ su extensión proyectiva. La aplicación $\varphi = \pi'^{-1}.f.\pi : \tilde{X} \mapsto \tilde{X}$ es por la prop. de 3.3.5 transformación proyectiva, y verifica $\pi(\mathcal{R})=\mathcal{R}'$. φ es la única verificando esta propiedad, ya que $f = \pi'.\varphi.\pi^{-1}$ es la única transformación (proyectivo) afin que aplica (b_0,b_1,b_2) en (b'_0,b'_1,b'_2).

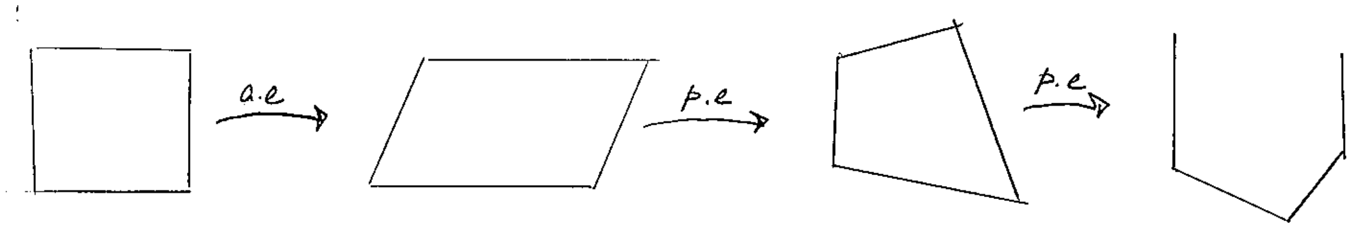
3.3.7 Invariantes de la Geometría Proyectiva

Toda propiedad (relativa a los "entes" del plano) que se conserva por el grupo proyectivo-afin GA(X), es conservada por el grupo proyectivo GP(X) , ya que $GA(X) < GP(X)$. En particular, dos figuras afinmente equivalentes son proyectivamente equivalentes, pero no se verifica en general el recíproco. Decimos por esto, que la geometría proyectiva es mas abstracta que la afin. Pongamos algunos ejemplos que sirvan para constatar éste hecho:

1) En geometría proyectiva todas las rectas son equivalentes. La geometría afín sin embargo, distingue entre rectas propias y la recta imprópia ∞_X. (véase Teorema 3.2.4)

2) La clasificación afin de pares de rectas distintas tiene dos clases: rectas paralelas e incidentes. La geometría proyectiva observa el paralelismo como un caso de incidencia (incidencia en el infinito) y solo distingue una sola clase,

3) Para la geometría afín "el paralelogramo" constituye una clase especial de cuadrilátero. Para la geometría proyectiva, los cuadriláteros no degenerados son todos equivalentes. (Véase 3.3.6)
Este hecho viene sugerido en el siguiente esquema, en donde "a.e" y "p.e" signufica afin y proyectivamente equivalente:

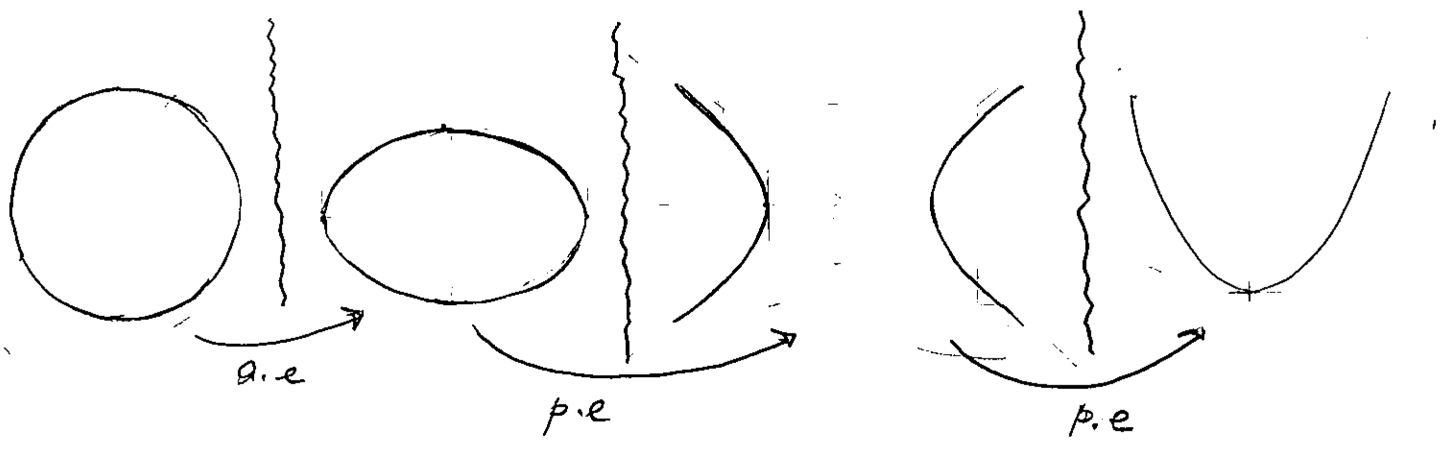


4) Puede probarse que en geometría proyectiva todas las ternas de puntos alineados distintos son equivalentes. En geometría afin estas ternas vienen clasificadas por la razón simple, que NO es invariante proyectivo.
Existe en geometría proyectiva un invariante análogo a la razón simple- la razón doble de cuatro puntos alineados- que permite clasificar estas cuaternas de puntos.

5) Hacemos por último mención a la clasificación proyectiva de las cónicas no degeneradas.

Como es sabido, todos los tipos afines de cónicas (elipses, hiperbolas y parabolas) se pueden obtener como secciones planas de una superficie cónica. Es decir, una proyección cónica es capaz de transformar una elipse en una hiperbola ó una parabola (véase figura).

De aquí se deduce facilmente, que todas las cónicas no degeneradas son proyectivamente equivalentes.
El esquema de más abajo, sugiere este hecho:



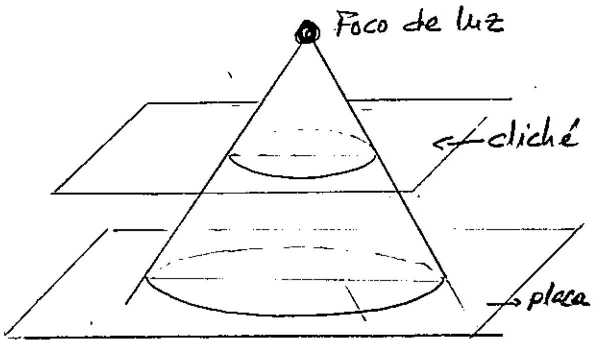
3.4 Geometria afin equiforme

Se denomina así, por ser la geometría del plano cuya propiedad caracteristica es la de conservar "la forma" de las figuras.

Es conocido al menos intuitivamente el significado de que dos figuras sean semejantes:

Un mapa bien construido es semejante al terreno que representa. En él podemos hacer medidas de longitud que se transforman en medidas reales del terreno, si ñas multiplicamos por un factor constante denominado escala del mapa.

Distintas copias de distintos tamaños de una fotografía familiar, dan lugar a figuras semejantes. El esquema de funcionamiento de una ampliadora fotográfica, es el que se indica en la figura.



La biyección que lleva los puntos del cliché a los de la placa fotográfica por medio del rayo que parte del foco, es una proyección no paralela entre planos paralelos (cliché y placa), y define una semejanza.

Puede parecer a primera vista sorprendente, que el hecho de que una biyección entre planos sea semejanza , depende esencialmente del hecho de que transforme rectas ortogonales en rectas ortogonales.

3.4.1 Ortogonalidad

Partimos de la intuición geométrica para fijar la idea de ortogonalidad; sin pretender definirla formalmente, destacaremos sus propiedades esenciales.

Si $\alpha=\infty_R$, $\beta=\infty_S$ son puntos de ∞_X , se dice que son ortogonales si las rectas R y S lo son , y escribimos $\alpha\perp\beta$. La dirección β es la única ortogonal a α , y la denotamos $\beta=\alpha^{\perp}$. Nótese que $(\alpha^{\perp})^{\perp}=\alpha$.

Tenemos así una biyección $\perp:\infty_X\ni\alpha\longmapsto\alpha^{\perp}\in\infty_X$, y $\perp^2=$ id.

3.4.2 Semejanzas en el plano

Una biyección $f:X\longrightarrow X$ se denomina semejanza, si transforma cada par de rectas ortogonales, en un par de rectas ortogonales.

El conjunto $GO(X)$ de semejanzas en el plano tiene estructura natural de grupo respecto a la composición de aplicaciones.

Evidentemente se tiene la inclusión de grupos $GO(X)<GA(X)$

A la geometría definida por $GO(X)$ en el plano se denomina geometría afin equiforme.

3.4.3 Proposición

Sea $f: X \longrightarrow X$ una transformación afin. Entonces, f es semejanza si y solo si $f/\infty_X = f_\infty : \infty_X \longrightarrow \infty_X$ preserva la relación de ortogonalidad, es decir, $\alpha \perp \beta \Rightarrow f_\infty(\alpha) \perp f_\infty(\beta)$ para $\alpha, \beta \in \infty_X$.

Demostración:

Sea $\alpha = \infty_R$, $\beta = \infty_S$, $\alpha \perp \beta$. Si f es semejanza, entonces las rectas f(R) y f(S) son ortogonales, así $f_\infty(\alpha) = f_\infty(\infty_R) = \tilde{f}(\infty_R) = \infty_{f(R)}$ es orotogonal a $\infty_{f(S)} = \hat{f}(\infty_S) = f_\infty(\beta)$. El recíproco es analogo.

3.4.4 Geometría equiforme Proyectivo-afin

El conjunto $GO(\hat{X}) = \{\tilde{f} \ / \ f \in GO(X)\}$, es un subgrupo de $GA(\tilde{X})$, y la aplicación $GO(X) \ni f \longmapsto \tilde{f} \in GO(\tilde{X})$ es un isomorfismo de grupos. $GO(\tilde{X})$ define la geometria Proyectivo-afin equiforme de X.

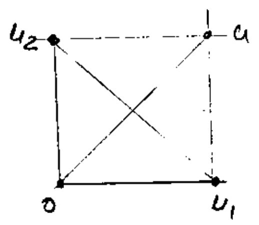
Se tiene de forma inmediata aplicando 3.2.4 y 3.4.3 el siguiente

Corolario

$GO(\tilde{X})$ está formado por el conjunto de transformaciones proyectivas $\varphi \in GP(\tilde{X})$ tales que $\varphi(\infty_X) = \infty_X$ y $\varphi/\infty_X : \infty_X \longrightarrow \infty_X$ presrva la relación de ortogonalidad.

3.4.5 Sistema de referencia métrico ortogonal

Un sistema de referencia afín en X está determinado por una terna (o, u_1, u_2) de tres puntos no alineados (véase 3.1.7).



Sea u el punto que determina con (o, u_1, u_2) un paralelogramo en el que o y u son vertices opuestos. Se dice que (o, u_1, u_2) es un sistema de referencia métrico ortogonal si:

i) Las rectas $\langle o, u_1\rangle$, $\langle o, u_2\rangle$ son ortogonales

ii) Las diagonales $\langle o, u\rangle$, $\langle u_1, u_2\rangle$ también son ortogonales

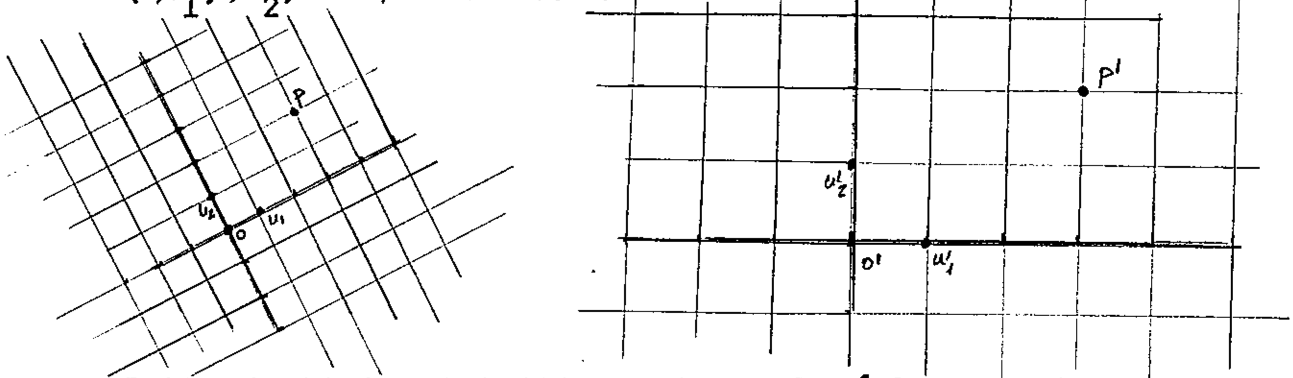
Nótese que i) y ii) son condiciones necesarias y suficientes para que el paralelogramo o, u_1, u, u_2 sea un cuadrado.

De la definición de semejanza y de las consideraciones hechas en 3.1.7 para la determinación de transformaciones afines en el plano, se tiene el siguiente resultado:

3.4.6 Proposición

Una semejanza $f:X \to X$ transforma cada sistema de referencia métrico ortogonal $\mathcal{R}=(o,u_1,u_2)$ en otro sistema de referencia métrico ortogonal $\mathcal{R}'=(o,u_1',u_2')$. Más concretamente:

Un punto p arbitrario con coordenadas (λ_1,λ_2) respecto a $\mathcal{R}$, se transforma mediante f el el punto p´ con las mismas coordenadas (λ_1,λ_2) respecto a $\mathcal{R}'$.

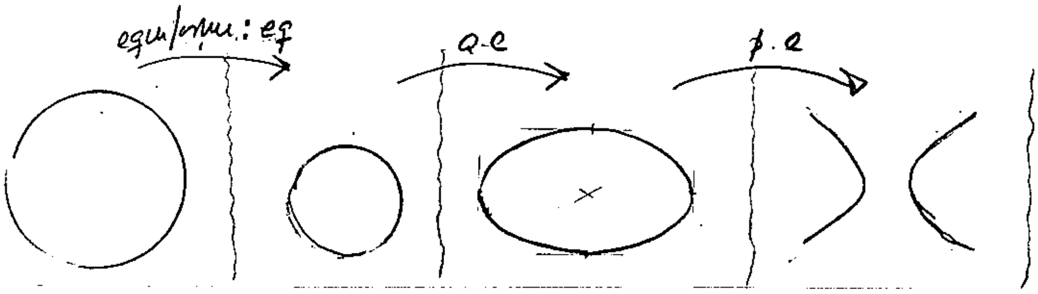


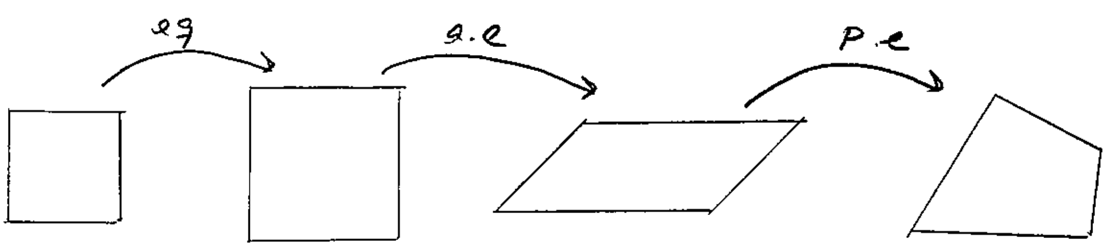
Esto justifica intuitivamente porqué las semejanzas preservan la forma de las figuras en el plano.

3.4.7 Invariantes "equiformes"

En geometría afin equiforme es válido el cocepto de angulo orientado entre dos rectas. Este invariante es el que permite clasificar los pares de rectas en el plano, lo cual responde a la idea intuitiva de que todos los ángulos con una misma amplitud tienen la misma "forma". Los triangulos no degenerados (que son todos equivalentes en geometría afin) se clasifican aquí en razón de sus ángulos.

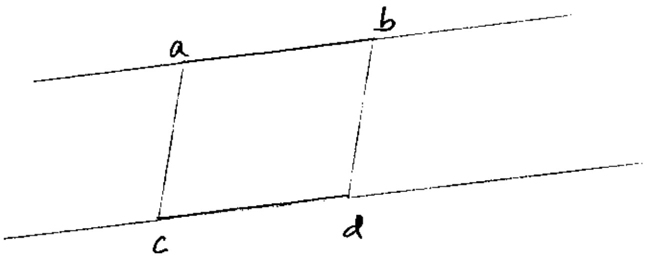
La geometría afin equiforme distingue-como la geometría afin- elipses parábolas e hiperbolas. La clasificación equiforme de cada uno de estos grupos viene determinada por la excentricidad (que define la forma de la cónica), y es independiente del parametro (que define su tamaño). Justifique el lector la siguiente secuencia de figuras:





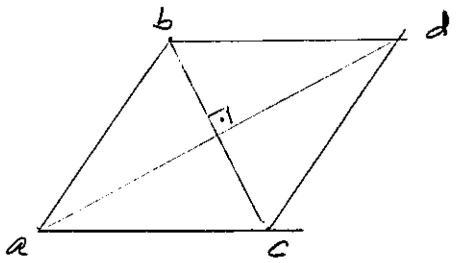
3.4.8 Comparación de segmentos

El concepto de distancia ó longitud no es propio de la geometría afin equiforme. Sin embargo, sorprendentemente puede establecerse en esta geometría un criterio para reconocer cuando dos segmentos tienen la "misma longitud". La razón profunda de éste hecho radica en la conocida propiedad de que un paralelogramo es rombo, si y solo si tiene sus diagonales ortogonales:

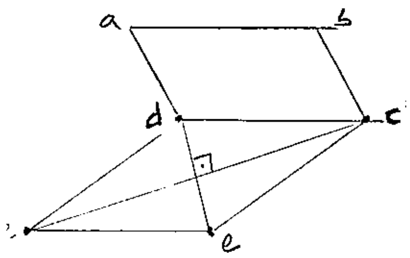


Dados los puntos $a,b \in X$, $a \neq b$ denotamos por $[a,b]$ al segmento no orientado definido por dichos puntos. Si $[c,d]$ es otro segmento paralelo decimos que $[a,b]$ tiene la misma longitud que $[c,d]$, y escribimos $[a,b]\,\ell\,[c,d]$ si existe una traslación $\tau : X \to X$ que lleva $[a,b]$ en $[c,d]$.

Comparemos ahora segmentos de la forma a,b y a,c con a,b,c puntos no alineados. Escribimos a,b   a,c si a,b y a,c forman lados consecutivos de un rombo, es decir, si las diagonales a,d y y b,c son ortogonales (vease figura).



La definición general de igualdad de longitudes entre segmentos cualesquiera , puede establecerse ahora facilmente tal y como se sugiere en la figura, y establece una relación de equivalencia sobre el conunto de segmentos no orientados del plano X.



$[a,b]\,\ell\,[c,d]\,\ell\,[c,e]$

Teniendo en cuenta que las traslaciones del plano son semejanzas,y que las semejanzas conservan rombos, se tiene el siguiente resultado:

<u>Teorema</u>

Sean $[a,b]$,$[c,d]$ segmentos de X tales que $[a,b]\,\ell\,[c,d]$. Si $f \in GO(X)$ entonces $[f(a),f(b)]\,\ell\,[f(c),f(d)]$. Es decir, la noción de "igualdad de longitud" es un concepto propio de la geometría afin equiforme.

<u>Nota</u>: Un punto $a \in X$ puede considerarse un caso prticular de segmento $a = [a,a]$. Se considera que todos los segmentos de éste tipo tienen la misma longitud, es decir $[a,a]\,\ell\,[b,b]$ para todo $a,b \in X$.

3.5 Geometría afin euclidea:

Esta geometría esta determinada por el subgrupo de las semejanzas que transforman cada segmento en otro de la misma longitud. Elegido un segmento dado como segmento unidad será posible establecer el concepto de distancia entre dos puntos (ó medida del segmento que los une). La distancia, definida así salvo constantes multiplicativas será el invariante caracteristico de la geometría afín euclidea.

3.5.1 Movimientos

El grupo de los movimientos del plano está formado por el conjunto de transformaciones $f \in GO(X)$ que verifican la siguiente propiedad:

Para todo $a,b \in X$ es $[a,b]\,\ell\,[f(a),f(b)]$.

El grupo $O(X)$ de los movimientos es el grupo de transformaciones de la geometría afin euclidea.

El grupo $O(\tilde{X}) = \{\tilde{f} \ / \ f \in O(X)\}$ es canónicamente isomorfo a $O(X)$, y define la geometría proyectivo-afin euclidea de X. Se tienen los siguientes contenidos:

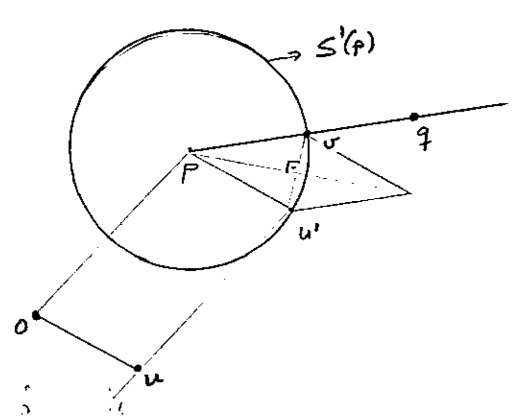
$$O(\tilde{X}) < GO(\tilde{X}) < GA(\tilde{X}) < GP(\tilde{X})$$

Esta graduación de las (extensiones proyectivas de las) geometrías explica la famosa frase de Cayley: "La geometría proyectiva contiene a toda la geometría", frase bastante justa para la época en que fué pronunciada.

3.5.2 Medida de segmentos. distancia

En este apartado recurrimos de manera especial a la intuición geométrica elemental. Un desarrollo más preciso del tema nos apartaría de nuestro objetivo inicial expuesto en la introducción. Por éste motivo, hemos eliminado las demostraciones, apoyandonos en la evidencia intuitiva de los resultados.

Fijados dos puntos distintos $o,u \in X$ establezcamos por convenio que la distancia de o a u , $d(o,u)$ es la unidad.



Para cualquier otro punto $p \in X$ se define la circunferencia unidad:

$S^1(p) = \{x \in X \ / [p,x]\,\ell\,[o,u]\}$.

Cada semi-recta R^+ con origen en p corta a $S^1(p)$ en un único punto v . Podemos tomar como distancia de p al punto $q \in R^+ - \{p\}$ como la razón simple $d(p,q) = (p:q:v)$.

Como los movimientos transforman cada circunferencia unidad en una circunferencia unidad, y conservan la razón simple , se tiene:

Teorema

La distancia es un invariante de la geometría afin euclidea, es decir si $f \in O(X)$, entonces para todo $a,b \in X$ es $d(a,b)=d(f(a),f(b))$.

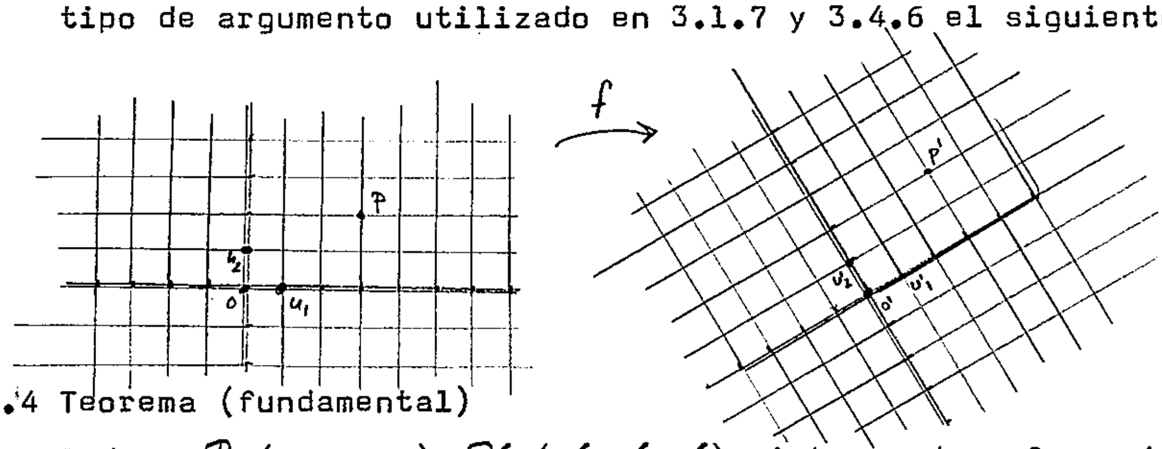
Por otra parte, si $a,b,c,d \in X$ se verifica la equivalencia:

$[a,b] \ell [c,d] \Leftrightarrow d(a,b)=d(c,d)$.

3.5.3 Sistemas de referencia métrico ortonormal

Un sistema de referencia métrico ortogonal (o,u_1,u_2) , se dice ortonormal si $d(o,u_1)=1$ .Por 3.4.5 se concluye que también $d(o,u_2)=1$

Claramente un movimiento $f \in O(X)$ transforma un sistema de referencia métrico ortonormal, en otro del mismo tipo, y se tiene siguiendo el tipo de argumento utilizado en 3.1.7 y 3.4.6 el siguiente resultado:



3.5.4 Teorema (fundamental)

Dados $\mathcal{R}=(o,u_1,u_2)$ $\mathcal{R}'=(o',u'_1,u'_2)$ sistemas de referencia métricos ortonormales, existe un único movimiento $f \in O(X)$ tal que $f(\mathcal{R})=\mathcal{R}'$.

Por otra parte, f hace corresponder a cada punto p con coordenadas (λ_1, λ_2) respecto a $\mathcal{R}$ el punto p´ con las mismas coordenadas (λ_1, λ_2) respecto a $\mathcal{R}'$.

Esto justifica intuitivamente porque los movimientos conservan el tamaño y la forma de las figuras.

3.5.5 Invariantes euclideos

a) La distancia entre dos puntos es el invariante euclideo fundamental. De hecho, la longitud de los segmentos, es el invariante que los clasifica.

b) Dos triangulos son iguales desde el punto de vista euclídeo si y solo si tienen iguales sus lados correspondientes.

c) La geometría afin euclidea considera iguales dos cónicas si tienen la misma excentricidad (forma) y paraámetro (tamaño)

Justifiquense las siguientes secuencias de figuras:

CAPITULO I

ELEMENTOS DE LA GEOMETRIA VECTORIAL

1. ESTRUCTURA DE ESPACIO VECTORIAL

La estructura vectorial, es la estructura algebraica básica que permite por una parte, el desarrollo del algebra lineal en un contexto geométrico adecuado, y por otra, sirve de soporte para la construcción algebraica de las geometrías lineales.

Los axiomas que establecen la estructura vectorial, se obtienen por abstracción de las propiedades esenciales de la suma de vectores, y producto de escalares por vectores en los modelos vectoriales intuitivos (recta plano ó espacio vectorial intuitivo) conocidos de la geometría elemental (véase 1.1.3)

K representa un cuerpo conmutativo, con operaciones $+$ y $\cdot$

1.1 Espacio vectorial. Ejemplos

1.1.1 Definición

Sea $(V,+)$ un grupo abeliano. Una estructura vectorial sobre K para $(V,+)$, viene determinada por una aplicación

$$K \times V \ni (\lambda, v) \longmapsto \lambda v \in V$$

verificando, para todo $\lambda, \mu \in K$ y todo $u,v \in V$ las propiedades:

V1) $\lambda(u+v)=\lambda u+\lambda v$

V2) $(\lambda+\mu)v=\lambda v+\mu v$

V3) $(\lambda\mu)v=\lambda(\mu v)$

V4) $1v=v$

Se dice entonces que V es un K-espacio vectorial, ó espacio vectorial sobre K.

Se utiliza la denominación genérica de "vectores" para los elementos de V, y de "escalares" para los de K

1.1.2 Observaciones

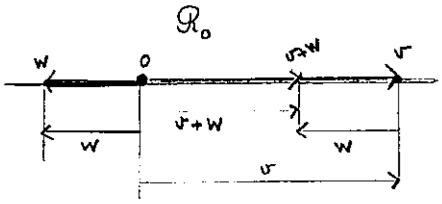
1) Nótese que el simbolo "$+$" se utiliza indistintamente para designar sumas de vectores ó escalares. Análoga observación para el producto.

2) Por una sencilla inducción, se vé que la propiedad V1) equivale a admitir la igualdad: $\lambda(v_1 \dotplus \ldots \dotplus v_r) = \lambda v_1 \dotplus \ldots \dotplus \lambda v_r$, para $v_1, \ldots, v_r$ vectores, y λ escalar. Puede hacerse un comentario análogo para la propiedad V2).

1.1.3 Modelos vectoriales intuitivos

1) Recta vectorial intuitiva

Recordemos que la recta vectorial intuitiva, se construye fijando un punto "o" (denominado origen de vectores) sobre la recta $\mathcal{R}$ intuitiva de puntos.

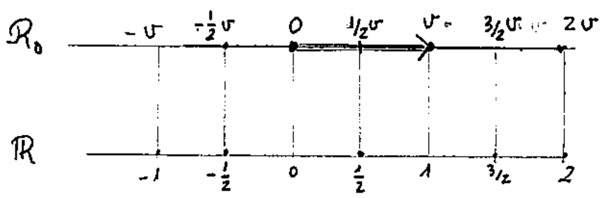


Cada punto v de $\mathcal{R}$ puede ahora representarse por una flecha que une el origen "o" con v, y darle el nombre genérico de vector.

Escribimos $\mathcal{R}_o$ para indicar el conjunto de puntos de $\mathcal{R}$ representados de esta forma; $\mathcal{R}_o$ es pues el conjunto de vectores.

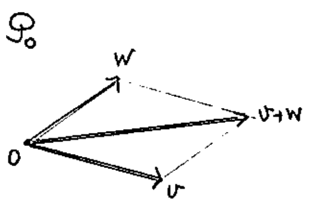
Para la construcción del grupo abeliano $(\mathcal{R}_o, \dotplus)$ se utiliza la idea intuitiva de deslizamiento rígido de vectores a lo largo de $\mathcal{R}$ (véase figura).

El producto λv, $\lambda \in R$ y $v \in V$ $(v \neq 0)$ es un vector w, que viene determinado por el "lugar" que ocupa en $\mathcal{R}$ el escalar λ, en la graduación de la recta obtenida tomando o como origen, y v como punto unidad.



2) Plano vectorial intuitivo

De manera análoga, se construye a partir de un punto o del plano $\mathcal{P}$ intuitivo de puntos, el plano vectorial intuitivo $\mathcal{P}_o$.



El grupo abeliano $(\mathcal{P}_o, \dotplus)$ se construye utilizando la conocida regla del paralelogramo, ó la regal de sumar expuesta anteriormente, según los casos.

La construcción del producto de escalares por vectores, sigue la regla expuesta más arriba.

3) Espacio vectorial intuitivo

No existe esencialmente nada "nuevo" que añadir para la construcción del espacio vectorial intuitivo $\mathcal{E}_o$.

Estos ejemplos constituyen la base intuitiva fundamental de ésta exposición, y el lector deberá recurrir a ellos sistemáticamente.

1.1.4 Ejemplos

1) El grupo abeliano $(K,\dotplus)$ admite una estructura natural de K-espacio vectorial, si se define el producto de $\lambda \in K$ (escalar) por $v \in K$ (vector) como λv (producto de escalares en K). Se denota por $V_1(K)$ a dicho espacio vectorial.

2) Sea X conjunto, y V un K-espacio vectorial. El conjunto V^X de todas las aplicaciones de X en V, tiene estructura natural de K-espacio vectorial definida por las operaciones:

$(f \dotplus g): X \ni x \longmapsto f(x) \dotplus g(x) \in V$, para $f,g \in V^X$

$(\lambda f): X \ni x \longmapsto \lambda f(x) \in V$ para $\lambda \in K$ y $f \in V^X$

3) Una matriz de m filas y n columnas con coeficientes en K, puede definirse como una aplicación:

$$A: \{1,\dots,m\} \times \{1,\dots,n\} \ni (i,j) \longmapsto a_{ij} \in K.$$

El conjunto $FL(n,m;K)$ de tales aplicaciones (ó simplemente $FL(n,m)$ si se sobreentiende K), tiene por tanto estructura natural de K-espacio vectorial.

Como es sabido los coeficientes a_{ij} de la matriz A se disponen en filas y columnas, y se escribe:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = (a_{ij}) = A \in FL(n,m)$$

Se denota por $EL(n)$ al espacio vectorial $FL(n,n)$.

4) En particular, escribimos $V_n(K)$ (ó simplemente V_n) para denotar al espacio vectorial $FL(1,n) = \left\{ \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} : a_i \in K \right\}$.

$V_n(K)$, es el modelo analítico n-dimensional de espacio vectorial.

5) Un ejemplo trivial: El conjunto unitario $\{0\}$ admite una estructura vectorial canónica sobre cualquier cuerpo K. Se denomina espacio vectorial nulo.

1.1.5 Proposición

En todo espacio vectorial V sobre K son ciertas las siguientes afirmaciones, para todo $\lambda \in K$ y $v \in V$:

1) $\lambda v = 0 \iff \lambda = 0$ ó $v = 0$

2) $(-\lambda)v = \lambda(-v) = -(\lambda v)$

1.1.6 Notacion permanente

V, V', V''...ect , representarán en toda ésta sección, espacios vectoriales sobre los cuerpos conmutativos K, K', K''... etc. respectivamente.

1.2 Dependencia lineal

Un sistema de r elementos de un conjunto X, es un elemento $(x_1 ... x_r)$ del producto cartesiano X^r. Se escribe $(x_1, ... x_r) \subset X$ para indicar ésta circunstancia.

1.2.1 Definición

Una combinación lineal en el espacio vectorial V, viene determinada por un sistema de vectores $(v_1, ..., v_r) \subset V$, y un sistema de escalares $(\lambda_1, ..., \lambda_r) \subset K$ (denominado sistema de coeficientes de la combinación lineal), y se escribe formalmente como $\lambda_1 v_1 + ... + \lambda_r v_r$, ó bién $\sum_{i=1}^{r} \lambda_i v_i$.

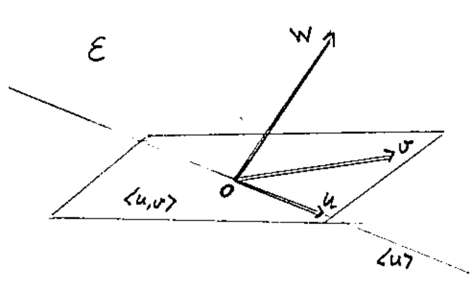
El resultado de tal combinación lineal es el vector $v = \lambda_1 v_1 + ... + \lambda_r v_r$ (indicado también por $v = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i v_i$). Se dice entonces que v es combinación lineal de $(v_1, ..., v_r)$ ó también que v depende linealmente del sistema, y se escribe: v d.l. $(v_1, ..., v_r)$.

Al conjunto $\{ v \in V / v \text{ d.l.} (v_1, ..., v_r) \}$ se le denota por $\langle v_1, ..., v_r \rangle$ y lo denominamos incidentalmente envolvente lineal del sistema.

Por convenio, la envolvente lineal del sistema vacío ( ) es el ~~sub~~-espacio nulo $\{ 0 \}$.

1.2.2 Ejemplo

Si u es un vector no nulo del espacio vectorial intuitivo $\mathcal{E}$, la



envolvente ⟨u⟩ es justamente la recta vectorial (intuitiva) que contiene a u.

Si $v \in \mathcal{E} - \langle u \rangle$, $\langle u,v \rangle$ es el plano vectorial que contiene a u y a v .

Finalmente , si $w \in \mathcal{E} - \langle u,v \rangle$, $\langle u,v,w \rangle$ es todo el espacio vectorial $\mathcal{E}$.

No volveremos ya a insistir aquí sobre éste tipo de ejemplos.

1.2.3 Comentario

Es obvio que la envolvente lineal $\langle v_1, ..., v_r \rangle$ depende solo del conjunto $\{v_1,\dots,v_r\}$, y no del orden en que sean tomados los vectores. De la identidad $v_1=1.v_1+0v_2+\dots+0v_r$ se deduce que v_1 , y análogamente cada v_i , está en la envolvente lineal $\langle v_1,\dots,v_r\rangle$.

1.2.4 Proposición

Sean $(v_1,\dots,v_r)$, $(w_1,\dots,w_s)$ sistemas de vectores de V. Si $\{w_1,\dots,w_s\}\subset\langle v_1,\dots,v_r\rangle$, entonces $\langle w_1,\dots,w_s\rangle\subset\langle v_1,\dots,v_r\rangle$.

Demostración:

Por hipótesis podemos escribir para $i=1,\dots,s$ $w_i=\sum_{j=1}^{r}\lambda_{ij}v_j$, para ciertos escalares λ_{ij} , y así si $(\lambda_1,\dots,\lambda_s)\subset K$ se tiene:

$$\sum_{i=1}^{s}\lambda_i w_i=\sum_{i=1}^{s}\lambda_i(\sum_{j=1}^{r}\lambda_{ij}v_j)=\sum_{j=1}^{r}(\sum_{i=1}^{s}\lambda_i\lambda_{ij})v_j \quad .$$

(justifíquense las igualdades)

1.2.5 Definición

Un sistema generador (finito) de V, es un sistema $(v_1,\dots v_r)$ de vectores, cuya envolvente lineal $\langle v_1,\dots,v_r\rangle$ es igual a V.

Se dice que el espacio vectorial V es de dimensión finita, si admite un sistema generador (finito).

1.2.6 Ejemplos

1) El sistema de vectores $(I_1,\dots,I_n)$ de $V_n(K)$, con $I_j=\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 1\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}$ (el número 1 en el lugar j-ésimo) $j=1,\dots,n$ es un sistema generador de $V_n(K)$ pues se tiene la identidad: $\begin{pmatrix}x_1\\ x_n\end{pmatrix}=\sum_{j=1}^{n}x_jI_j$.

2) El anillo de polinómios $K[t]$ admite una K-estructura vectorial natural, respecto a la cual <u>no</u> tiene dimensión finita.

2. BASES. DIMENSION

Supóngase V, espacio vectorial de dimensión finita. Parece natural plantearse la cuestión de cual es el entero mínimo n- denominado dimensión de V- para el cual existe un sistema generador, digamos $(v_1,\dots,v_n)$, formado por n vectores. Tal sistema debe ser minimal, en el sentido de que para cada $i=1,\dots n$ el subsistema $(v_1,\dots,v_{i-1},v_{i+1},\dots,v_n)$ ya no es sistema generador, y en consecuencia , $v_i\notin\langle v_1\dots v_{i-1},v_{i+1},\dots v_n\rangle$.

Los sistemas generadores minimales de V , se denominan bases. Se probará que todos ellos tienen el mismo número de vectores.

2.1 Sistemas linealmente independientes

La propiedad de "minimalidad" anterior, dá lugar a la siguiente definición general:

2.1.1 Definición

Un sistema $(v_1,\dots,v_r)\subset V$ se dice linealmente independiente (l.i.) si para todo $i=1,\dots,r$ se tiene que $v_i \notin \langle \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots \rangle$. Caso contrario, se dice que el sistema es linealmente dependiente (l.d.) .

2.1.2 Proposición

Un sistema $(v_1,\dots,v_r)\subset V$ es linealmente dependiente, si y solo si existe $(\lambda_1,\dots,\lambda_r)\subset K$, $(\lambda_1,\dots,\lambda_r)\neq(0,\dots,0)$ tal que $\lambda_1 v_1+\dots+\lambda_r v_r = 0$.

En particular el sistema $(v_1,\dots,v_r)$ es linealmente independiente si y solo si de la igualdad $\lambda_1 v_1+\dots+\lambda_r v_r = 0$ $(\lambda_i\in K)$, se deduce que $\lambda_i = 0$ para $i=1,\dots r$.

Demostración:

Si el sistema tiene un solo vector ($r=1$), entonces (v_1) l.d. equivale a $v_1 = 0$ (pues $v_1 \in \langle\ \rangle = \{0\}$) , y ésto es equivalente a que exista $\lambda\neq 0$ tal que $\lambda v_1 = 0$.

Si el sistema tiene dos vectores ó más ($r\geq 2$) , y por ejemplo es $v_i=\sum_{j\neq i}\lambda_j v_j$, entonces es $\sum_{j=1}^{r}\lambda_j v_j = 0$, si se toma $\lambda_i=-1$.

2.1.3 Observaciones

1) Un sistema con dos ó más vectores repetidos, es automáticamente l.d. . Por tanto en un sistema l.i todos sus vectores son distintos.
2) La propiedad de independencia lineal, no depende del orden en que sean tomados los vectores del sistema.

Recordamos que un subsistema de un sistema de elementos $(x_1,\dots,x_r)$ de un conjunto X, es un sistema de la forma $(y_1,\dots,y_s)=(x_{j_1},\dots,x_{j_s})$, y se escribe $(y_1,\dots,y_s)\subset(x_1,\dots,x_r)$. $(1\leq j_1<\dots<j_s\leq r)$

2.1.4 Proposición

Sea $(v_1,\dots,v_r)$ un sistema de vectores de V, y $(w_1,\dots w_s)\subset(v_1,\dots,v_r)$. Entonces:

1) Si $(v_1,\dots,v_r)$ es l.i , $(w_1,\dots,w_s)$ es l.i

2) Si $(w_1,\dots,w_s)$ es l.d , entonces $(v_1,\dots,v_r)$ es l.d

En particular, todo sistema que contenga al vector 0 es l.d. •

La de mostración es inmendiata a partir de 2.1.2 .

2.1.5 Proposición

Sea $(v_1,\dots,v_r)$ un sistema l.i. de vectores de V, y $v \in V$. Entoces $v \notin \langle v_1,\dots,v_r\rangle$ si y solo si $(v,v_1,\dots,v_r)$ es l.i. •

Demostración:

Si $\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_r v_r + \lambda v = 0$, entonces necesariamente es $\lambda = 0$ (justifíquese), y queda $\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_r v_r = 0$. Por ser $(v_1,\dots,v_r)$ l.i. se concluye que $\lambda_i = 0$ para $i=1,\dots,r$.

La otra implicación es trivial.

2.2 Bases

2.2.1 Definición

Un sistema de vectores $(v_1,\dots,v_n)$ de V es una base, di verifica:

B1) $(v_1,\dots,v_n)$ es sistema generador de V

B2) $(v_1,\dots,v_n)$ es un sistema linealmente independiente

2.2.2 Ejemplos

1) Sea I_{ij} $(i=1,\dots,m,\ j=1,\dots n)$ la matriz de $FL(n,m)$ cuyos coeficientes son todos nulos, escepto el que ocupa el lugar (i,j) que vale la unidad. El sistema $(I_{11},\dots,I_{1n},\dots,I_{m1},\dots,I_{mn})$ constituye una base para $FL(n,m)$.

Si $A=(a_{ij}) \in FL(n,m)$ se tiene la identidad $A=\sum a_{ij} I_{ij}$.

2) En particular el sistema $(I_1,\dots,I_n)$ de $V_n(K)$ es base, y se denomina base canónica de V_n.

2.2.3 Teorema

Si $(v_1,\dots,v_m)$ es sistema generador de V, existe $(w_1,\dots,w_n) \subset$ $\subset (v_1,\dots,v_m)$ que es base de V.

En particular, todo espacio de dimensión finita , admite una base finita. (si V es no nulo)

Demostración:

Por inducción sobre m :

Si $m=1$ el resultado es evidentemente cierto. Supongámoslo cierto para sistemas generadores de menos de m vectores:

Sea $(v_1,\dots,v_m)$ sistema generador. Si es l.i., es base y no hay nada que probar. Si es l.d , sea j el primen entero tal que

$v_j \in \langle \dots, v_{j-1}, v_{j+1}, \dots \rangle$. Entonces el sistema $(\dots, v_{j-1}, v_{j+1} \dots)$ es subsistema de $(v_1, \dots, v_m)$, y sigue siendo generador. Aplíquese ahora la hipótesis de inducción.

2.2.4 Proposición

Si $(v_1, \dots, v_n)$ es una base para V , entonces cada vector v de V se escribe de una única forma como combinación lineal de $(v_1 \dots v_n)$, es decir, existe un único sistema $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \subset K$ tal que $v = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n$.

Demostración:

Supuesto $v = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n = \mu_1 v_1 + \dots + \mu_n v_n$, se tiene: $(\lambda_1 - \mu_1) v_1 + \dots + (\lambda_n - \mu_n) v_n = 0$; entonces $\lambda_i - \mu_i = 0$ para $i = 1, \dots, n$ por ser $(v_1, \dots, v_n)$ l.i. .

2.3 <u>Teorema de la base. Dimensión</u>

Se probará que en un espacio vectorial (no nulo) de dimensión finita, todas las bases tienen el mismo número de vectores. Este número es por definición la dimensión del espacio.

Para evitar escepciones triviales, convendremos en asignar el sistema vacío ( ) como base del espacio vectorial nulo.

2.3.1 Teorema

Sean $(v_1, \dots v_n)$, $(u_1, \dots u_{n+1})$ sistemas de vectores de V. Supongase que $(u_1, \dots, u_{n+1}) \subset \langle v_1, \dots, v_n \rangle$. Entonces:

Si $(v_1, \dots, v_n)$ es l.i se verifica que $(u_1, \dots, u_{n+1})$ es l.d. .

Es decir, cualquier sistema de más de n vectores de la envolvente lineal de un sistema de n vectores l.i, es l.d.

Demostración:

Por inducción sobre n.

Sea $v_1 \neq 0$, y supóngase $(u_1, u_2) \subset \langle v_1 \rangle$; los vectores u_1, u_2 son entonces proporcionales, y constituyen un sistema l.d

Supóngase ahora cierto el resultado para sistemas l.i (v_i) con menos de n vectores $(n > 1)$, y situémonos en las hipótesis del teorema. Como $(u_1, \dots, u_{n+1}) \subset \langle v_1, \dots, v_n \rangle$ se tiene :

$$\left.\begin{array}{l} u_1 = \lambda_{11} v_1 + \dots + \lambda_{1n} v_n \\ \vdots \\ u_{m+1} = \lambda_{m+1,1} v_1 + \dots + \lambda_{m+1,n} v_n \end{array}\right\}$$

Si $\lambda_{11} = \ldots = \lambda_{n+1,1} = 0$, entonces $(u_1,\ldots,u_n) \subset \langle v_2,\ldots,v_n\rangle$, y por la hipótesis de inducción, es $(u_1,\ldots u_n)$ l.d y en consecuencia tambien el l.d el sistema completo $(u_1,\ldots,u_{n+1})$.

En caso contrario, reordenando si es preciso el sistema (u_i) , podemos suponer que $\lambda_{11} \neq 0$, y se tiene para j=2,...n-1 :

$$u_j - \frac{\lambda_{j1}}{\lambda_{11}} u_1 = (\lambda_{j2} - \frac{\lambda_{j1}}{\lambda_{11}}\lambda_{12})v_2 + \ldots + (\lambda_{jn} - \frac{\lambda_{j1}}{\lambda_{11}}\lambda_{1n})v_n$$

Llamando para simplificar λ_j a $\frac{\lambda_{j1}}{\lambda_{11}}$, se vé que el sistema $(u_2-\lambda_2 u_1,\ldots,u_{n+1}-\lambda_{n+1}u_1)$ está contenido en $(v_2,\ldots,v_n)$, y es por la hipótesis de inducción l.d , es decir, existe $(\mu_2,\ldots,\mu_{n+1}) \neq (0,\ldots,0)$ sistema de escalares tal que

$$\sum_{j=2}^{n+1} \mu_j(u_j - \lambda_j u_1) = (\sum_{j=2}^{n+1}\mu_j\lambda_j)u_1 + \sum_{j=2}^{n+1}\mu_j u_j = 0$$

de donde se concluye que el sistema $(u_1,\ldots,u_{n+1})$ es l.d .

2.3.2 Corolario

Si el espacio vectorial V tiene una base formada por n vectores, entonces cualquier sistema con más de n vectores , es l.d .

2.3.3 Corolario

Todas las bases de un espacio vectorial de dimensión finita, tienen el mismo número de vectores

2.3.4 Definición (Dimensión de un espacio vectorial)

Se llama dimensión de un espacio vectorial (de dimensión finita), al número de vectores de que consta cualquiera de sus bases, y se denota por dim V.

2.3.5 Corolario

Si dim V = n , todo sitema l.i ó generador, con n vectores, es base de V.

Demostración

Supóngase por ejemplo $(v_1,\ldots,v_n) \subset V$ l.i . Si $v \in V$, por 2.3.1 $(v_1,\ldots v_n,v)$ es l.d, y por 2.1.5 , $v \in \langle v_1,\ldots,v_n\rangle$. Por tanto $(v_1,\ldots,v_n)$ es sistema generador.

La otra afirmación es consecuencia de 2.2.3

2.3.6 Corolario (Teorema de prolongación)

Si dim V = n, y $(v_1,\ldots,v_r)$ es un sistema l.i de vectores de V, existen vectores $v_{r+1},\ldots,v_n \in V$ tales que $(v_1,\ldots,v_n)$ es base de V.

Demostración:

Necesáriamente, es $r \leq n$. Si $r=n$, por 2.3.5 el sistema es base, y no hay nada que probar. Si $r < n$, existe $v_{r+1} \notin \langle v_1,\ldots v_r \rangle$, y el sistema $(v_1,\ldots,v_{r+1})$ es l.i. Continuando con este argumento, se construyen $v_{r+2},\ldots,v_n$. El sistema $(v_1,\ldots,v_n)$ es l.i, y como $\dim V = n$, constituye una base de V.

3. GEOMETRIA VECTORIAL. APLICACIONES SEMILINEALES

Una biyección f del espacio vectorial V en un conjunto X, induce una estructura vectorial en X, sin más que "copiar" a traves de f en X, las operaciones que definen la estructura vectorial de V, es decir, para $x,y \in X$ y $\lambda \in K$ es

$x+y= f(f^{-1}(x)+f^{-1}(y))$ y $\lambda x = f(\lambda f^{-1}(x))$

Las biyecciones f de V en V que inducen sobre V la estructura vectorial original (ó más brevemente, que conservan la estructura) se denominan transformaciones lineales de V, y conforman el grupo $GL(V)$ que define la geometría vectorial del espacio.

Por otra parte, el estudio de las aplicaciones entre espacios vectoriales compatibles con los correspondientes grupos de transformaciones lineales- en un sentido que se explicitará- motiva la definición y análisis del concepto general de aplicación semilineal.

3.1 Transformaciones lineales

De acuerdo con lo dicho más arriba, una biyección $f:V \to V$ conserva la estructura vectorial, si y solo si, para cada $u', v' \in V$, $\lambda \in K$ se verifica: $f^{-1}(u'+v')=f^{-1}(u')+f^{-1}(v')$, y $f^{-1}(\lambda v')=\lambda f^{-1}(v')$.

Escribiendo $u'=f(u)$, $v'=f(v)$, se obtienen justamente las condiciones indicadas en la siguiente definición:

3.1.1 Definición

Una biyección $f:V \to V$ se denomina transformacion lineal, si para todo $u,v \in V$, $\lambda \in K$ se verifica:

T1) $f(u+v)=f(u)+f(v)$

T2) $f(\lambda v)= \lambda f(v)$

En particular, f es un automorfismo del grupo aditivo $(V,+)$, y tiene por tanto nucleo nulo, es decir $f(v)=0 \Rightarrow v=0$.

Una caracterización trivial de las transformaciones lineales de V es la siguiente:

3.1.2 Proposicion

La aplicación biyectiva $f:V \to V$ es transformación lineal, si y solo si para cada $u,v \in V$ $\lambda, \mu \in K$ se verifica:

T) $f(\lambda u + \mu v) = \lambda f(u) + \mu f(v)$.

3.1.3 Comentario

Por una sencilla inducción, se vé que las transformaciones lineales conservan las combinaciones lineales de vectores, es decir, si $(v_1,\dots,v_r) \subset V$ y $(\lambda_1,\dots,\lambda_r) \subset K$, es $f(\sum_{i=1}^{r} \lambda_i v_i) = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i f(v_i)$.

3.1.4 Teorema

i) Una transformación lineal f de V, aplica sistemas l.i en sistemas l.i, y en particular, transforma bases en bases.

ii) Si $(v_1,\dots,v_n)$ $(v_1',\dots v_n')$ son dos bases de V, existe una única transformación lineal f de V tal que $f(v_i)=v_i'$.

Demostración:

i) Sea $f:V \longrightarrow V$ transformación lineal, y $(v_1,\dots,v_r)$ un sistema l.i de V. Entonces $(f(v_1),\dots,f(v_n))$ es l.i , pues si $\lambda_1 f(v_1)+\dots+\lambda_n f(v_n)=0$, entonces $f(\lambda_1 v_1+\dots+\lambda_n v_n)=0$, y $\lambda_1 v_1+\dots+\lambda_n v_n=0$, con lo que $\lambda_1 =\dots=\lambda_n=0$.

ii) Si existe $f:V \longrightarrow V$ transformación lineal tal que $f(v_i)=v_i'$ para $i=1,\dots,n$, necesariamente es :

$$(1): \quad f(\sum_{i=1}^{r} \lambda_i v_i) = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i v_i'$$

Por ser $(v_1,\dots,v_n)$ sistema generador, queda probada la unicidad de f.

Por otra parte, por ser $(v_1,\dots,v_n)$ base, la fórmula (1) define sin ambigüedad una aplicación $f:V \longrightarrow V$ (vease proposición 2,2.4) que transforma v_i en v_i' $i=1,\dots n$. Es un sencillo ejercicio probar ahora que f es transformación lineal

3.1.5 Ejemplo

Una transformación lineal del espacio vectorial $V_n=V_n(K)$, aplica la base $(I_1,\dots,I_n)$, en otra base $(a_1,\dots a_n)$, donde $a_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix} \in V_n$. La matriz $A=(a_{ij}) \in EL(n)$, determina completamente a la transformación lineal, que se denota por la misma letra A. La actuación de A es la siguiente:

$$V_n \ni \begin{pmatrix} x_1 \\ \\ x_n \end{pmatrix} \longmapsto A \begin{pmatrix} x_1 \\ \\ x_n \end{pmatrix} \in V_n \quad \text{y las ecuaciones} \quad \begin{pmatrix} y_1 \\ \\ y_n \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1 \\ \\ x_n \end{pmatrix}$$

se denominan ecuaciones [illegible] de la transformación.

Por otra parte, una matriz $A \in EL(n)$ determina una transformación lineal de V_n si y solo si A es no singular ($\det A \neq 0$).

3.2 El grupo lineal. Homotécias vectoriales

3.2.1 Proposición

Si f y g son transformaciones lineales de V, entonces g.f , y f^{-1} también lo són.

La demostración es inmediata.

3.2.2 Corolario

El conjunto GL(V) de transformaciones lineales de V, tiene estructura de grupo respecto a la composición de aplicaciones. Dicho grupo se denomina grupo lineal de V.

3.2.3 Ejemplo

El grupo $GL(V_n)$ se identifica con el grupo GL(n) de matrices no singulares de BL(n). El producto en GL(n), se corresponde con el producto usual de matrices.

3.2.4 Proposición (definición)

Dado $\lambda \in K^*$, la aplicación $h_\lambda : V \ni v \longmapsto \lambda v \in V$, es una transformación lineal denominada homotécia vectorial de razón λ ($\lambda \neq 0$).

Por otraparte, si $\lambda , \mu \in K-0$, es $h_\lambda . h_\mu = h_{\mu\lambda}$, y el conjunto Z(V) de las homotecias vectoriales de V, es un subgrupo de GL(V) isomorfo al grupo multiplicativo $K^* = K-0$.

La demostración no ofrece dificultades.

3.2.5 Comentario

Nótese que los elementos de Z(V) conmutan con cualquier transformación lineal f de GL(V), ya que para $\lambda \in K^*$ es

$(h_\lambda . f)(v) = \lambda f(v) = f(\lambda v) = f.h_\lambda (v)$ para cada $v \in V$.

Se llama centro Z de un grupo G al conjunto de elementos de G que conmutan con todos los demás. Z es siempre un subgrupo.

Se probará que Z(V) es justamente el centro de GL(V).

3.2.6 Teorema

Sea $h \in GL(V)$ tal que $h.f = f.h$ para todo $f \in GL(V)$. Entonces h es homotecia vectorial.

Demostración:

1) Se probará que para cada $v \in V$, el sistema $(v, h(v))$ es l.d. :

Si existe $v \in V$ tal que $(v,h(v))$ es l.i, por el teorema de prolongación , existe una base de V de la forma $(v,h(v),v_3,\ldots,v_n)$. Como el sistema $(v,v+h(v),v_3,\ldots,v_n)$ también es base;por 3.1.4 existe $f \in GL(V)$, que transforma una base en la otra; en particular, es $f(v)=v$, $f(h(v))=v+h(v)$, y de la igualdad $f.h=h.f$ se deduce $h(v)=h(f(v))=f(h(v))=v+h(v)$. Es decir $v=0$, lo cual contradice la hipótesis $(v,h(v))$ l.i .

2) Probaremos que existe $\lambda \in K^*$ tal que $h(v)=\lambda v$ para todo $v \in V$.
Por 1) se sabe que existe una función $\lambda : V-\{0\} \to K^*$ tal que para cada $v \in V-0$ es $h(v)=\lambda(v)v$. Veamos que λ es función constante:
En efecto,es fácil probar que $\lambda(\mu v)=\lambda(v)$ para $\mu \in K^*$ $v \in V-\{0\}$,
pues $h(\mu v)=\mu h(v)$, y $\lambda(\mu v)\mu v=h(\mu v)=\mu h(v)=\mu\lambda(v)v$.
Además si (u,v) es l.i , se verifica
$h(u+v)=\lambda(u+v)(u+v)=\lambda(u+v)u+\lambda(u+v)v$ y por otra parte
$h(u+v)=h(u)+h(v)=\lambda(u)u+\lambda(v)v$ y por tanto
$(\lambda(u+v)-\lambda(u))u+(\lambda(u+v)-\lambda(v))v=0$, es decir $\lambda(u)=\lambda(v)=\lambda(u+v)=\lambda$.

3.3 <u>Biyecciones compatibles con las geometrías</u>

Recordemos que una aplicación biyectiva f entre dos conjuntos X y X´ induce un isomorfismo f_* entre los grupos X! y X´! de las permutaciones de X (es decir , aplicaciones biyectivas de X en X) y X´ respectivamente, definido por:

$$f_* : X! \ni g \longmapsto fgf^{-1} \in X'!$$

y verificando las propiedades funtoriales:
i) $(g.f)_* = g_*.f_*$; ii) $f_*^{-1}=(f^{-1})_*$; iii) $id_* = id$.
donde f y g son biyecciones de X en X´

3.3.1 Definición

Una aplicación biyectiva $f:V \longrightarrow V'$ entre espacios vectoriales, se dice compatible con las geometrías, si $f_*(GL(V))=GL(V')$.
Si los espacios vectoriales V y V´coinciden, se dice que f conserva la geometría.

3.3.2 Definición

Una aplicación $f:V \longrightarrow V'$ entre espacios vectoriales, se llama aditiva , cuando induce homomorfismo entre los grupos $(V,+)$ y $(V',+)$, es decir , $f(u+v)=f(u)+f(v)$ para todo $u,v \in V$.

3.3.3 Teorema

Sea $f:V \longrightarrow V'$ una biyección aditiva entre espacios vectoriales.

Son entonces equivalentes las siguientes afirmaciones :

i) $f_*(Z(V)) = Z(V')$ (es decir, f es compatible con los subgrupos de homotecias)

ii) Existe $\sigma: K \longrightarrow K'$ isomorfismo de cuerpos, tal que para todo $\lambda \in K$, $v \in V$, es $f(\lambda v)=\sigma(\lambda)f(v)$.

iii) f es compatible con las geometrías, es decir $f_*(GL(V))=GL(V')$

Demostración:

i) $\Rightarrow$ ii)

Las aplicaciones $h:K^* \ni \lambda \longmapsto h_\lambda \in Z(V)$, y $h':K^* \ni \lambda \longrightarrow h'_\lambda \in Z(V')$ son isomorfismos de grupos, y por tanto también lo es la aplicación $\sigma:K^* \longrightarrow K'^*$ que cierra el diagrama:

$$\begin{tikzcd}
Z(V) \arrow[r, "f_*"] & Z(V') \\
K^* \arrow[u, "h"] \arrow[r, dashed, "\sigma"'] & K'^* \arrow[u, "h'"']
\end{tikzcd}$$

Nótese que σ está definida por la igualdad $f_*.h_\lambda = h'_{\sigma(\lambda)}$ para todo $\lambda \in K^*$, es decir $h'_{\sigma(\lambda)}=f.h_\lambda.f^{-1}$, y en consecuencia , para cada $\lambda \in K^*$, $v \in V$ se verifica : $f(\lambda v)=\sigma(\lambda)f(v)$. En particular, si $v \neq 0$ es $f(v)\neq 0$, y $f(o)=0$.

Veamos que $\sigma:K \longrightarrow K'$ es aditiva:

Fijado $v \in V-\{0\}$, si $\lambda,\mu \in K$, $\lambda \neq -\mu$, se verifica

$f((\lambda+\mu)v)=\sigma(\lambda+\mu)f(v)=f(\lambda v)+f(\mu v)=(\sigma(\lambda)+\sigma(\mu))f(v)$, y así $\sigma(\lambda+\mu)=\sigma(\lambda)+\sigma(\mu)$.

Definiendo $\sigma(0)=0$, se obtiene el isomorfismo de cuerpos buscado.

ii) $\Rightarrow$ iii)

Supongase que existe $\sigma:K \rightarrow K'$ isomorfismo de cuerpos, tal que $f(\lambda v)=\sigma(\lambda)f(v)$ para todo $\lambda \in K$, $v \in V$.

Probaremos que $f_*(GL(V))\subset GL(V')$. Aplicando el mismo argumento a f_*^{-1} (que verifica $f^{-1}(\lambda' v')=\sigma^{-1}(\lambda')f^{-1}(v')$ para $\lambda' \in K'$, $v' \in V'$) se obtiene la conclusión buscada.

Si $g \in GL(V)$, la aplicación $f_*(g)=f.g.f^{-1}$ es una biyección aditiva de V' en V' , que pertenece a $GL(V')$, pues para $\lambda' \in K'$ y $v' \in V'$:

$(f_*(g))(\lambda' v')=f.g.f^{-1}(\lambda' v')=f.g(\sigma^{-1}(\lambda')f^{-1}(v'))=f(\sigma^{-1}(\lambda')g.f^{-1}(v'))=$
$=\sigma(\sigma^{-1}(\lambda'))f.g.f^{-1}(v')= \lambda'(f_*(g))(v')$.

iii) $\Rightarrow$ i) : Se prueba trivialmente, que un isomorfismo entre dos grupos G y G', envia el centro de G al centro de G'.

3.3.4 Definición

Una aplicación aditiva entre espacios vectoriales , $f:V \longrightarrow V'$ se llama isomorfismo semilineal (ó isomorfismo σ-lineal), si verifica la propiedad ii) del teorema 3.3.3.

Si $K = K'$ y $\sigma = id$, se dice que f es isomorfismo lineal.

Los isomorfismos semilineales de V en V´, son por tanto las biyecciones de V en V´ que conservan las geometrías. Si $K = K' = R$, todo isomorfismo semilineal, es lineal.

3.4 <u>Teorema fundamental de la geometría vectorial</u>

Un subconjunto R de un espacio vectorial V , se denomina recta vectorial, si existe $v \in V-\{0\}$ tal que $R = \langle v \rangle$. Nótese que una recta vectorial, tiene estructura natural de espacio vectorial de dimensión la unidad.

3.4.1 Teorema [illegible]

Sea $f:V \longrightarrow V'$ una biyección aditiva entre espacios vectoriales. Considerense las afirmaciones:

i) f es isomorfismo semilineal

ii) f(R) es una recta vectorial de V´ para cada recta vectorial R de V.

Entonces, i) $\Rightarrow$ ii), y si $\dim V \geq 2$, entonces ii) $\Rightarrow$ i).

Demostración

i) $\Rightarrow$ ii)

Si $\sigma : K \longrightarrow K'$ es el isomorfismo asociado a f, y $R = \langle v \rangle$ es recta vectorial de V, $f(\langle v \rangle) = \{ f(\lambda v) \ / \lambda \in K \} = \{ \sigma(\lambda) f(v) \ / \lambda \in K \} =$
$= \{ \lambda' f(v) \ / \lambda' \in K' \} = \langle f(v) \rangle$.

ii) $\Rightarrow$ i) ($\dim V \geq 2$)

Sean R_1 y R_2 dos rectas vectoriales distintas de V , entonces $R_1 \cap R_2 = \{0\}$, y $f(R_1)$, $f(R_2)$ son rectas vectoriales distintas de V´, por tanto $f(R_1) \cap f(R_2) = 0$, y se verifica $f(0)=0$.

Por ser $f:V \longrightarrow V'$ biyectiva , para cada $v \in V-\{0\}$ es $f(v) \neq 0$, y queda inducida una única biyección $\sigma_v : K \longrightarrow K'$ tal que $f(\lambda v) = \sigma_v(\lambda) f(v)$.

Se probará: 1) Si $v, w \in V-\{0\}$, es $\sigma_v = \sigma_w = \sigma$.

2) $\sigma : K \longrightarrow K'$ es isomorfismo de cuerpos.

Esto concluye evidentemente la demostración del teorema.

Demostración de 1)

Supongase $v, w \in V-\{0\}$, (v,w) l.i . Las rectas $f(\langle v \rangle)$ y $f(\langle w \rangle)$ son distintas, y como $f(v) \neq 0 \neq f(w)$, es $f(\langle v \rangle) = \langle f(v) \rangle$ y $f(\langle w \rangle) = \langle f(w) \rangle$, por lo que el sistema$(f(v),f(w))$ es l.i .

Fijado $\lambda \in K-\{0\}$, probaremos que $\sigma_v(\lambda)=\sigma_{v+w}(\lambda)=\sigma_w(\ \ )$. En efecto: Por una parte $f(\lambda(v+w))=\sigma_{v+w}(\lambda)f(v)+\sigma_{v+w}(\lambda)f(w)$, y por otra, $f(\lambda(v+w))=f(\lambda v)+f(\lambda w)=\sigma_v(\lambda)f(v)+\sigma_w(\lambda)f(w)$. Comparando, y teniendo en cuenta la independencia lineal de $(f(v),f(w))$ se obtiene la conclusión deseada. Si (v,w) es l.d, tomando $w_1 \in V-\langle v\rangle$, los sistemas (v,w_1) y (w,w_1) son l.i, y por lo anterior, es $\sigma_v=\sigma_{w_1}=\sigma_w$

Demostración de 2)

Fijemos $v \in V-\{0\}$. Si $\lambda, \mu \in K$ entonces,

$\sigma(\lambda\mu)f(v)=f((\lambda\mu)v)=f(\lambda(\mu v))=\sigma(\lambda)f(\mu v)=\sigma(\lambda)\sigma(\mu)f(v)$,

y como $f(v)\neq 0$, es $\sigma(\lambda\mu)=\sigma(\lambda)\sigma(\mu)$.

Por otra parte $\sigma(\lambda+\mu)f(v)=f((\lambda+\mu)v)=f(\lambda v)+f(\mu v)=$
$=(\sigma(\lambda)+\sigma(\mu))f(v)$, y $\sigma(\lambda+\mu)=\sigma(\lambda)+\sigma(\mu)$.

Este teorema junto con el 3.3.3 dan lugar al siguiente resultado:

3.4.2 Corolario (Teorema fundamental)

Sea $f: V \longrightarrow V'$ una biyección aditiva entre espacios vectoriales. Supóngase $\dim V \geq 2$. Son equivalentes las siguientes afirmaciones:

i) f es compatible con las geometrías

ii) f es isomorfismo semilineal

iii) $f(R)$ es recta vectorial de V' para cada recta vectorial R de V

El teorema fundamental, admite una interesante interpretación que relaciona la estructura, la geometría , y la familia de rectas vectoriales de un espacio vectorial:

Sea $(X,+)$ un grupo abeliano al que se dota de dos estructuras de espacio vectorial denotadas por V y V' sobre los cuerpos K y K$'$ respectivamente. En estas condiciones podemos enunciar el siguiente resultado, consecuencia inmediata de 3.4.2

3.4.3 Corolario (Teorema de estructura)

Son equivalentes las siguientes afirmaciones:

i) Las estructuras vectoriales V y V' inducen la misma geometria en X

ii) La familia de rectas vectoriales de V coincide con la de V'

iii) La aplicación identidad, $id: V \longrightarrow V'$ es isomorfismo semilineal

En particular, si $K = K' = R$ la condición iii) puede sustituirse por

iii)$'$ Las estructuras vectoriales V y V' sobre X , coinciden.

3.5 Aplicaciones semilineales

Las transformaciones lineales de un espacio vectorial, y los isomorfismos semilineales estudiados anteriormente , constituyen un caso particular del concepto de aplicación semilineal entre espacios vectoriales que vamos a analizar a continuación:

3.5.1 Definición

Una aplicación aditiva entre espacios vectoriales, $f:V \longrightarrow V'$ se denomina aplicación semilineal, si existe $\sigma:K \longrightarrow K'$ isomorfismo de cuerpos, tal que para todo $\lambda \in K$, $v \in V$ se verifica:

$$f(\lambda v)=\sigma(\lambda)f(v)$$

Se dice entonces que σ es el isomorfismo asociado a f, ó bien que f es aplicacion σ-lineal.

Si $K = K'$ y $\sigma=id:K \longrightarrow K$, se dice que f es aplicación lineal.

A las aplicaciones semilineales inyectivas se les denomina inmersiones semilineales.

3.5.2 Observaciones

1) Si $f:V \longrightarrow V'$ es aplicación σ-lineal, entonces
$f(\sum_{i=1}^{r} \lambda_i v_i)=\sum_{i=1}^{r} \sigma(\lambda_i)f(v_i)$, para $(v_1,\dots,v_r) \subset V$, y $\lambda_i \in K$.
2) Nótese que si $K = K'=R$, toda aplicación semilineal, es lineal.
3) Las inmersiones semilineales sobreyectivas, las hemos denominado en 3.3.4 isomorfismos semilineales, y constituyen en virtud de 3.3.3 , la familia de biyecciones compatibles con las geometrías de V y V' .

3.5.3 Definición

Se llama núcleo de la aplicación semilineal $f:V \longrightarrow V'$, al conjunto $\text{Ker } f =\{v \in V \ / \ f(v)=0\}$

3.5.4 Proposición

Una aplicación semilineal $f:V \longrightarrow V'$, es inmersión semilineal , si y solo si su nucleo Ker f es nulo, es decir se verifica la propiedad $f(v)=0 \Rightarrow v=0$

Demostración

Es suficiente utilizar el hecho de qu f es homomorfismo entre los grupos $(V,+)$ y $(V',+)$: si $u,v \in V$ y $f(u)=f(v)$ entonces $f(u-v)=0$, y por tanto $u-v=0$; en consecuencia f es inyectiva. El recíproco es trivial

3.5.5 Proposicion

Si $f: V \longrightarrow V'$ es aplicación σ-lineal, y $(v_1,\dots,v_r)$ es un sistema de vectores de V, entonces $f(\langle v_1,\dots,v_r\rangle)=\langle f(v_1),\dots,f(v_r)\rangle$.

Demostración:

Es inmediata a partir de la observación 1) de 3.5.2. Probemos por ejemplo el contenido $\langle f(v_1),\dots,f(v_r)\rangle \subset f(\langle v_1,\dots,v_r\rangle)$:

Si $v'=\sum_{i=1}^{r} \lambda_i' f(v_i)$ con $\lambda_i' \in K'$, sea $(\lambda_1,\dots,\lambda_r)\subset K$ tal que $\sigma(\lambda_i)=\lambda_i'$ $i=1,\dots,r$. Entonces $v' = \sum_{i=1}^{r} \sigma(\lambda_i) f(v_i) = f(\sum_{i=1}^{r} \lambda_i v_i)$.

3.5.6 Teorema (Determinación de aplicaciones semilineales)

Sea $(v_1,\dots,v_n)$, una base del espacio vectorial V, y $(v_1',\dots,v_n')$ un sistema de vectores del espacio vectorial V'.

Fijado un isomorfismo $\sigma: K \longrightarrow K'$, existe una única aplicación σ-lineal $f: V \longrightarrow V'$, tal que $f(v_i)=v_i'$ para $i=1,\dots,n$. Por otra parte, dicha aplicación es isomorfismo semilineal, si y solo si $(v_1',\dots,v_n')$ es base de V'.

Demostración:

Si $f: V \longrightarrow V'$ es aplicación σ-lineal tal que $f(v_i)=v_i'$ $i=1,\dots,n$ se verifica para todo $(\lambda_1,\dots,\lambda_n)\subset K$ la fórmula

$$(1): \quad f(\lambda_1 v_1+\dots+\lambda_n v_n)=\sigma(\lambda_1)v_1'+\dots+\sigma(\lambda_n)v_n'$$

Esto prueba la unicidad de f. Para la existencia, basta construir la aplicación f a través de la fórmula (1).

Si $(v_1',\dots,v_n')$ es base de V', entonces por 3.5.5 f es sobreyectiva, y si $f(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i)=0$, entonces $\sum_{i=1}^{n} \sigma(\lambda_i)v_i'=0$, y $\sigma(\lambda_i)=0$ $(\lambda_i=0)$ para $i=1,\dots,n$, es decir $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i=0$, y por 3.5.4, f es inyectiva, y por tanto isomorfismo semilineal. La otra implicación es un ejercicio.

3.5.7 Proposición

Supóngase $K = K'$. El conjunto $FL(V,V')$ de aplicaciones lineales de V en V' tiene estructura natural de espacio vectorial, respecto a las operaciones:

$f+g : V \ni v \longmapsto f(v)+g(v) \in V'$ para $f,g \in FL(V,V')$

$\lambda f : V \ni v \longmapsto \lambda f(v) \in V'$ para $\lambda \in K$, $f \in FL(V,V')$

Por otra parte, el espacio vectorial $EL(V)=FL(V,V)$ tiene estructura de anillo respecto a las operaciones + y . (composición de aplicaciones); es por tanto una K-algebra.

La demostración es automática.

3.5.8 Ejemplo

Una aplicación semilineal $f:V_n(K) \longrightarrow V_m(K')$, viene determinada por un isomorfismo de cuerpos $\sigma: K \to K'$ y una matriz $A \in FL(n,m;K')$

Se escribe $f=A.\sigma$ y se tiene:

$$A.\sigma : V_n(K) \ni \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \longmapsto A \begin{pmatrix} \sigma(x_1) \\ \\ \sigma(x_n) \end{pmatrix} \in V_m(K')$$

Las ecuaciones implícitas de A. son por definición: $\begin{pmatrix} y_1 \\ \\ y_n \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} \sigma(x_1) \\ \\ \sigma(x_n) \end{pmatrix}$

Si $K = K'$ y $\sigma = id:K \to K$, se identifica f con la matriz A, y por tanto se identifican los conjuntos $FL(V_n,V_m)$ con $FL(n,m)$, y en particular $EL(V_n)$, con $EL(n)$. Las operaciones mencionadas en 3.5.7 ,para aplicaciones lineales, se traducen en las correspondientes operaciones usuales entre matrices.

4. SUBESPACIOS VECTORIALES

Los subconjuntos de un espacio vectorial V que "heredan" la estructura vectorial de V, se denominan subespacios vectoriales.

La propiedad de ser subespacio vectorial, depende pues de la estructura del espacio ambiente, y es por tanto conservada por el grupo lineal (y en general por las aplicaciones semilineales). En consecuencia, es una propiedad geométrica.

La familia $\mathcal{S}L(V)$ de todos los subespacios vectoriales de V, es un retículo respecto a operaciones "+" (suma de subespacios) y "$\cap$" (intersección conjuntista). El comportamiento de la aplicación dimensión $\dim : \mathcal{S}L(V) \ni U \longmapsto \dim U \in Z$ en relación con la estructura reticular de $\mathcal{S}L(V)$ (cuando V es de dimensión finita), se sintetiza en una formula de dimensión, que será la llave para el estudio geométrico de las posiciones relativas entre subespacios.

4.1 Definiciones básicas

4.1.1 Definición (proposición)

Un subconjunto U no vacío del espacio vectorial V, se denomina subespacio vectorial de V, si verifica:

S1) Para cada $u,v \in U$, es $u+v \in U$

S2) Si $u \in U$ y $\lambda \in K$, entonces $\lambda u \in U$.

Por otra parte, estas dos condiciones son equivalentes a la condición única:

S) Para todo $u,v \in U$ $\lambda,\mu \in K$ es $\lambda u+\mu v \in U$.

La demostración de ésta equivalencia es inmediata, y también lo és la de la siguiente proposición:

4.1.2 Proposición

Un subespacio vectorial U de V, admite una estructura natural de espacio vectorial, con las mismas operaciones vectoriales definidas para V , es decir:

$U \times U \ni (u,v) \longmapsto u+v \in U$, $K \times U \ni (\lambda ,v) \longmapsto \lambda u \in U$

4.1.3 Observacion

Si V es de dimensión finita, y U es subespacio de V, la dimensión de U como espacio vectorial es un entero, dim U, tal que $0 \leq \dim U \leq \dim V$. Al subconjunto $\{0\}$ de V , que es evidentemente subespacio vectorial de V, se le asigna dimensión nula. El subespacio U coincide con el espacio total V si y solo si $\dim U = \dim V$.

Estas afirmaciones, son en parte consecuencia del hecho de que los conceptos de dependencia e independencia lineal de sistemas, no dependen del subespacio concreto en el que se consideren sumergidos.

4.1.4 Notación

Se escribe $U < V$ para indicar que U es subespacio vectorial de V. Si U tiene dimensiòn finita escribimos $\dim U < \infty$.

4.1.5 Ejemplos

1) Si $(v_1,\dots,v_r) \subset V$ es un sistema de vectores, entonces la envolvente lineal $\langle v_1,\dots,v_r\rangle$ es un subespacio vectorial de V (véase 1.2.4) En particular , si $(v_1,\dots,v_n)$ es base de V , y $U_i=\langle v_1,\dots,v_i\rangle$, $i=1,\dots,n$, se verifica : $\{0\} \subsetneq U_1 \subsetneq \dots \subsetneq U_{n-1} \subsetneq U_n = V$, y $\dim U_i = i$.

2) El conjunto $U = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_n \end{pmatrix} \in V_n \;/\; \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n = 0 \right\} \subset V_n$, donde

$(\lambda_1,\dots,\lambda_n) \subset K$, es un subespacio vectorial de V_n :

Si $(\lambda_1,\dots,\lambda_n) \neq (0,\dots,0)$ entonces $\dim U = n-1$

Si $(\lambda_1,\dots,\lambda_n) = (0,\dots,0)$ entonces $U=V$.

Se dice que $\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n = 0$ es la ecuación implícita de U, y se escribe $U:(\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n = 0)$

4.2 Reticulo de subespacios vectoriales

Denotaremos por $\mathcal{G}L(V)$ a la familia de subespacios vectoriales del espacio vectorial V

4.2.1 Proposición

Si $(U_i)_{i\in I} \subseteq \mathcal{G}L(V)$, entonces $\bigcap_{i\in I} U_i \in \mathcal{G}L(V)$.
La demostración es inmediata.

4.2.2 Ejemplo

En el espacio vectorial V_n , se considera la familia de subespacios $U_i:(\lambda_{i1}x_1+\ldots+\lambda_{in}x_n=0)$ $i=1,\ldots,m$, donde $(\lambda_{i1},\ldots,\lambda_{in})\subset K$.
Entonces $U=\bigcap_{i=1}^{m} U_i=\left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_n \end{pmatrix} / \lambda_{i1}x_1+\ldots+\lambda_{in}x_n=0 \ , \ i=1,\ldots,m \right\}$ es un subespacio vectorial de V_n , con ecuaciones implícitas
$U : \lambda_{i1}x_1+\ldots+\lambda_{in}x_n=0 \}_{i=1\ldots m}$. La dimensión de U es igual a n-r , siendo r el rango de la matriz $(\lambda_{ij})\in FL(n,m)$.

4.2.3 Definición (subespacio generado por un subconjunto)

Sea S un subconjunto del espacio vectorial V. la familia
$\mathfrak{F} =\{ U\in\mathcal{G}L(V) / U\supset S\}$, es no vacía , pues $V\supset S$, y la intersección $\langle S\rangle=\bigcap_{U\in\mathfrak{F}} U$ es un subespacio vectorial que contiene a S, y se denomina subespacio vectorial generado por S.

La siguiente proposición , cuya demostración es inmediata, expresa que el subespacio $\langle S\rangle$ es el más pequeño que contiene a S:

4.2.4 Proposición

El subespacio vectorial $\langle S\rangle$ generado por el subconjunto S de V, es el único que verifica las siguientes condiciones:
i) $S\subset\langle S\rangle$; ii) Si $U< V$ y $U\supset S$ entonces $U\supset\langle S\rangle$.

4.2.5 Teorema

Dado $S\subset V$, $S\neq\emptyset$, se dice que el vector $v\in V$ depende linealmente de S (v d.l S) si existe $(v_1,\ldots,v_r)\subset S$ tal que v d.l $(v_1,\ldots,v_r)$.
Sea $L(S)=\{ v\in V / v \text{ d.l } S\}$. Entonces $\langle S\rangle = L(S)$.

Demostración:

L(S) es evidentemente subespacio vectorial de V. Es suficiente por tanto probar que L(S) verifica las propiedades i) y ii) de 4.2.4
La propiedad i) para L(S) es consecuencia inmediata de su propia definición , y par la propiedad ii) basta tener en cuenta, que toda combinación lineal de vectores de un subespacio, está en el mismo.

4.2.6 Observación

La notación "$\langle\ \rangle$" introducida en 4.2.5 para subconjuntos de un espacio vectorial, es consistente con la misma notación establecida en 1.2.2 para sistemas finitos de vectores , ya que si $(v_1,\dots,v_r)\subset V$, los subespacios $\langle\{v_1,\dots,v_r\}\rangle$ y $\langle(v_1,\dots,v_r)\rangle$ coinciden y se le denota por $\langle v_1,\dots v_r\rangle$. En adelante nos referiremos a él,como subespacio generado por el sistema $(v_1,\dots,v_r)$.

4.2.7 Definición (Suma de subespacios vectoriales)

Si $(U_i)_{i\in I}\subset \mathcal{S}L(V)$ es una familia de subespacios, se define la suma como el subespacio $\sum_{i\in I} U_i = \langle \bigcup_{i\in I} U_i\rangle$.

Si I= 1,...,m , se escribe $U_i = \sum_{i=1}^{m} U_i = U_1 + \dots + U_m$.

4.2.8 Proposición

Si $(U_1,\dots,U_m)$ es un sistema de subespacios vectoriales de V, entonces $U_1+\dots+U_m = \{ u_1+\dots+u_m \ /\ u_i\in U_i \quad i=1,\dots,m\}$

Demostración

Utilícese la caracterización dada en 4.2.4. , para $S=U_1\cup\dots\cup U_m$.

4.2.9 Teorema

El conjunto $\mathcal{S}L(V)$ de los subespacios vectoriales del espacio vectorial V , con las operaciones "$+$" y "$\cap$" definidas anteriormente, es un retículo no distributivo y complementado, con elemento universal el espacio total V, y elemento nulo el subespacio $\{0\}$.

Demostración

Si se dan como válidas las propiedades reticulares de la intersección conjuntista, el enunciado anterior se reduce a comprobar las siguientes afirmaciones para U_1,U_2,U_3 L(V) :

i) $U_1\subset U_2 \Leftrightarrow U_1+U_2=U_2$

ii) $U_1+U_2=U_2+U_1$

iii) $(U_1+U_2)+U_3=U_1+(U_2+U_3)$

iv) Si $U<V$, existe $W<V$ tal que $U+W=V$, y $U\cap W=\{0\}$.

Las propiedades i) y ii) son evidentes,y la propiedad iii) es consecuencia de 4.2.8.

La propiedad iv) , válida en general sin ninguna restricción, la probaremos solo para el caso dim $V<\infty$:

Supóngase que el subespacio U es distinto de $\{0\}$, entonces, $1\leq \dim U\leq \dim V$, y U admite una base $(u_1,\dots u_r)$ que es sistema l.i de V. Por el teorema de prolongación 2.3.6, existe $(u_{r+1},\dots u_n)$ V tal que $(u_1,\dots,u_n)$ es base de V. Es ya una cuestión trivial, probar que el subespacio $W=\langle u_{r+1},\dots,u_n\rangle$ es el complementario buscado.

4.2.10 Comentario

Existen contraejemplos sencillos que prueban que el retículo $\mathcal{G}L(V)$ no es distributivo. No obstante, sí se verifica la propiedad: $U_1+(U_2\cap U_3)=(U_1+U_2)\cap U_3$, cuando $U_1\subset U_3$.

4.3 Formula de dimensión

4.3.1 Teorema

Sean U y W subespacios vectoriales de dimensión finita de V, emtonces $U+W$ y $U\cap W$, tienen dimensión finita, y se verifica:

$$\dim(U+W)=\dim U+\dim W-\dim(U\cap W)$$

Demostración

Como $U\cap W\subset U$ y $U\cap W\subset W$, entonces $U\ \ W$ tiene dimensión finita, digamos r, y $r\leq \dim U=p$, $r\leq \dim W=q$.

Sea $(v_1,\dots,v_r)$ una base de $U\cap W$ (eventualmente vacía, si $r=0$), por el teorema de prolongación aplicado a U y a W existen bases $(v_1,\dots v_r,u_{r+1},\dots,u_p)$ de U y $(v_1,\dots,v_r,w_{r+1},\dots,w_q)$ de W.

Todo se reduce a probar que $\mathcal{E}=(v_1,\dots,v_r,u_{r+1},\dots,u_p,w_{r+1},\dots,w_q)$ es una base de $U+W$. Evidentemente, $\mathcal{E}$ es sistema generador de $U+W$.

Supongase $\sum_{i=1}^{r}\lambda_i v_i+\sum_{j=r+1}^{p}\mu_j u_j+\sum_{k=r+1}^{q}\nu_k w_k=0$. Entonces el vector $w=\sum_{k=r+1}^{q}\nu_k w_k=-\sum_{i=1}\lambda_i v_i-\sum_{j=r+1}\mu_j u_j\in U\cap W=\langle v_1,\dots,v_r\rangle$, y por la unicidad de coordenadas (en U) se concluye que $\sum\mu_j u_j=0$, es decir $\mu_{r+1}=\dots=\mu_p=0$. Teniendo ahora en cuenta que $(v_1,\dots v_r,w_{r+1},\dots,w_q)$ es l.i se concluye $\lambda_1=\dots=\lambda_r=\dots=\nu_q=0$.

4.3.2 Definición

La base $\mathcal{E}$ construida en el teorema anterior, se denomina base de $U+W$, adaptada a U y a W.

4.3.3 Corolario

Sean U y W subespacios vectoriales de un espacio vectorial V de dimensión finita n. Supongase $\dim U=p$, $\dim W=q$, $\dim(U\cap W)=r$.

Se tiene entonces

$$(1)\ :\max(0,p+q-n)\leq r\leq \min(p,q)$$

Recíprocamente fijados los enteros p y q con $0\leq p\leq n$, $0\leq q\leq n$ y y r verificando las desigualdades (1), existen entonces subespacios vectoriales U y W de V, con dim U=p dim W=q y dim($U\cap W$)=r.

Demostración:

la primera parte es una sencilla consecuencia de 4.3.1

para la segunda parte, dados p,q y r enteros no-negativos, verificando las desigualdades (1); queda garantizado que $r\leq p$, $r\leq q$ y $p+q-r\leq n$, y así a partir de una base $(e_1,\dots,e_n)$ de V , pueden construirse los subespacios $U=\langle e_1,\dots e_r,\dots e_p\rangle$,
$W=\langle e_1,\dots e_r,e_{p+1},\dots,e_{p+q-r}\rangle$, que verifican las condiciones pedidas.

4.4 Subespacios y aplicaciones semilineales. Posiciones relativas.

4.4.1 Teorema

Sea $f:V\rightarrow V'$ una aplicación σ-lineal, entonces:

i) Si $U<V$ es $f(U)<V'$ y $f/U:U\ni u\mapsto f(u)\in f(U)$ es aplicación σ-lineal

ii) Si $U'<V'$, es $f^{-1}(U')<U$, y $f/f^{-1}(U'):f^{-1}(U')\longrightarrow U'$ es aplicación σ-lineal.

Demostración:

Probemos por ejemplo i) dejando ii) como ejercicio.

Si $u',v'\in f(U)$, $\lambda',\mu'\in K'$, existen $u,v\in U$, $\lambda,\mu\in K$ con $f(u)=u'$, $f(v)=v'$ $\sigma(\lambda)=\lambda'$, $\sigma(\mu)=\mu'$, y se verifica:
$\lambda'u'+\mu'v'=f(\lambda u+\mu v)\in f(U)$. La segunda afirmación de i) es trivial.

4.4.2 Corolario

Si $f:V\rightarrow V'$ es aplicación σ-lineal , y $S\subset V$, entonces $f(\langle S\rangle)=\langle f(S)\rangle$.

Demostración

Claramente , el subconjunto f(S) esta contenido en el subespacio $f(\langle S\rangle)$. Probemos que es el mínimo subespacio que lo contiene:
Si $U'<V'$ y $f(S)\subset U'$, entonces $S\subset f^{-1}(U')<V$, y $\langle S\rangle\subset f^{-1}(U')$, así $f(\langle S\rangle)\subset f(f^{-1}(U'))\subset U'$.

Nota: Puede darse una demostración más directa utilizando simplemente la proposición 3.5.5 .

4.4.3 Definición

Dos sistemas de subespacios $(U_1,\dots U_r)$, $(U_1',\dots,U_r')$ del espacio vectorial V se dicen linealmente equivalentes, si existe $f\in GL(V)$ tal que $f(U_1,\dots,U_r)=(U_1',\dots,U_r')$ es decir $f(U_i)=U_i'$, i=1,...,r.
Se escribe entonces $(U_1,\dots,U_r)$ l.e $(U_1',\dots,U_r')$ y se dice que ambos sistemas definen la misma posición relativa.

4.4.4 Comentario

La relación de "equivalencia lineal" de sistemas de subespacios es obviamente una relación de equivalencia, y procede de la actuación natural del grupo GL(V) sobre $\mathcal{G}L(V)^r$ $(r \geqslant 1)$ definida por:

$GL(V) \times \mathcal{G}L(V)^r \ni (f,(U_1,\dots,U_r)) \longmapsto (f(U_1),\dots,f(U_r)) \in \mathcal{G}L(V)^r$

4.4.5 Teorema

Sean U,W,U',W' subespacios vectoriales del espacio vectorial V de dimensión finita. Entonces:

i) U l.e $U' \Longleftrightarrow \dim U=\dim U'$

ii) (U,W) l.e $(U',W') \Longleftrightarrow (\dim U, \dim W, \dim(U\cap W))=$
$=(\dim U', \dim W', \dim(U'\cap W'))$

Demostración

Se probarán solo las implicaciones no triviales:

i) $\Longleftarrow$)

Sean $(u_1,\dots,u_p,\dots u_n)$ $(u_1',\dots,u_p',\dots u_n')$ bases de V tales que $\langle u_1,\dots u_p\rangle = U$, $\langle u_1',\dots,u_p'\rangle = U'$. Por 3.5.6 existe una transformación lineal $f\in GL(V)$ tal que $f(u_i)=u_i'$, $i=1,\dots,n$. Entonces $f(U)=U'$.

ii) $\Longleftarrow$)

Basta tomar $\mathcal{E}$ base de V extensión de una base de $U+W$ adaptada a U y W (véase definición 4.3.2). Se define análogamente $\mathcal{E}'$ respecto a U' y W'. La transformación lineal que pasa de $\mathcal{E}$ a $\mathcal{E}'$, transforma (U,W) en (U',W').

4.4.6 Comentario

La aplicación $I: \mathcal{G}L(V)^2 \ni (U,W) \longmapsto (\dim U, \dim W, \dim(U\cap W)) \in Z^3$ es un invariante lineal de la clasificación (pues se mantiene constante en cada clase de equivalencia), pero además , se trata de un invariante completo, es decir, toma distintos valores en clases diferentes.

De acuerdo con el teorema anterior y el corolario 4.3.3 se obtiene el siguiente resultado:

4.4.7 Teorema

Sea $n=\dim V$. Fijados p y q enteros con $0\leq p\leq n$, $0\leq q\leq n$, las diferentes posiciones relativas entre subespacios p-dimensionales y q-dimensionales , vienen descritas por un entero r (que representa la dimensión de la intersección) tal que:

$$\max(0,p+q-n) \leq r \leq \min(p,q)$$

4.5 Espacio vectorial cociente

Un subespacio vectorial U de V, es en particular un subgrupo del grupo aditivo (V,+), y tiene sentido considerar el grupo cociente (V/U,+), donde como es sabido V/U es el conjunto cociente de la relación de equivalencia inducida por U en V:

$$v_1 \equiv v_2 \pmod U \Leftrightarrow v_2 - v_1 \in U$$

La clase definida por $v \in V$ se representa por $v+U$, y coincide con el conjunto $\{v+u \;/\; u \in U\}$. La operación "+" en V/U es también natural: $(v_1+U)+(v_2+U)=(v_1+v_2)+U$.

4.5.1 Teorema (Espacio vectorial cociente)

Si U es un subespacio vectorial de V, el grupo cociente (V/U,+) admite una única estructura de espacio vectorial, tal que la aplicación $\theta : V \ni v \longrightarrow v+U \in V/U$ es lineal. Se denota por V/U a dicho espacio vectorial, y se denomina espacio vectorial cociente (de V sobre U)

Demostración:

la aplicación $\theta : (V,+) \longrightarrow (V/U,+)$ es aditiva,por la construcción del grupo V/U. Una estructura vectorial en (V/U,+) para la cual $\theta : V \longrightarrow V/U$ sea lineal, debe verificar necesariamente:

$\theta(\lambda v)=\lambda\,\theta(v)$ para $\lambda \in K$, $v \in V$; es decir $\lambda v+U = \lambda(v+U)$.

Por otra parte, ésta fórmula define una estructura vectorial en (V/U,+) que es justamente la buscada.

4.5.2 Proposición (Dimensión del cociente)

Si V tiene dimensión finita y U V, entonces:

$$\dim(V/U)=\dim(V)-\dim(U)$$

Demostración

Sea $(u_1,\dots,u_n)$ base de V tal que $\langle u_1,\dots,u_r\rangle = U$. Entonces $(u_{r+1}+U,\dots,u_n+U)$ es base de V/U

4.5.3 Definición

Se llama codimensión de un subespacio U de V al número:

codim U= dim(V/U), cuando $\dim(V/U)<\infty$. Se denominan hiperplanos vectoriales, a los subespacios de codimensión igual a la unidad.

4.5.4 Observacion

Si $U=\{0\}$ el cociente V/U se identifica naturalmente con V. Por otra parte se tiene la "igualdad" $V/V=\{0\}$.

4.5.5 Teorema (de isomorfía)

Sea $f:V\longrightarrow V'$ una aplicación σ-lineal. Existe entonces una única aplicación semilineal $f':V/\mathrm{Ker}\ f\longrightarrow \mathrm{im}\ f$ que hace conmutativo el diagrama:

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{f} & V' \\ \vartheta\downarrow & & \uparrow i \\ V/\mathrm{Ker}\ f & \xrightarrow{f'} & \mathrm{im}\ f \end{array}$$

Es decir, $f=i.f'.\vartheta$, donde $\vartheta:V\longrightarrow V/\mathrm{Ker}\ f$ es la proyección canónica, y $i:\mathrm{im}\ f\hookrightarrow V'$ es la aplicación inclusión.

Por otra parte, f' es isomorfismo semilineal.

Demostración

Si f' hace conmutativo el diagrama anterior, necesariamente es

(1): $f'(v+\mathrm{Ker}\ f)=f(v)$ para todo $v\in V$.

Teniendo en cuenta la equivalencia $f(v_1)=f(v_2)\Leftrightarrow v_1+\mathrm{Ker}\ f=v_2+\mathrm{Ker}\ f$, se prueba la consistencia de la formula (1) para establecer la definición de f' y su biyectividad. Por otra parte f' así definida es obviamente σ-lineal y por tanto isomorfismo semilineal.

4.5.6 Corolario

Si $f:V\longrightarrow V'$ es aplicación semilineal y la dimensión de V es finita, entonces $\mathrm{Ker}\ f$ y $\mathrm{im}\ f$ son subespacios de dimensión finita, y se verifica: $\dim V = \dim(\mathrm{im}\ f)+\dim(\mathrm{Ker}(f))$.

En particular es, $\dim(\mathrm{im}\ f)\leqslant \dim V$, y se verifica la igualdad, si y solo si f es isomorfismo semilineal.

Demostración

Es aplicación inmediata de 4.5.5 y 4.5.2 .

4.6 <u>Suma directa de subespacios. Proyecciones</u>

Sea U un subespacio vectorial de V, y W complementario de U en el retículo $\mathcal{G}L(V)$, es decir $U+W=V$ y $U\cap W = 0$. Entonces, para cada vector $v\in V$, existen unos únicos vectores $\Pi_U(v)\in U$, $\Pi_W(v)\in W$ tales que $v = \Pi_U(v)+\Pi_W(v)$, y las aplicaciones $\Pi_U:V\to V$ y $\Pi_W:V\to V$ son endomorfismos lineales denominados proyecciones respecto a U y W que verifican: $\Pi_U+\Pi_W = id$, $\Pi_U^2 =\Pi_U$, $\Pi_W^2 = \Pi_W$ y $\Pi_U\cdot\Pi_W = 0$.

En éstas condiciones escribimos $V=U\oplus W$, y se dice que V es suma directa de U y W.

Trataremos de generalizar éstas ideas para más de dos subespacios.

4.6.1 Definición

Sea $(U_1,\dots,U_r)$ un sistema de subespacios de V, y sea $U = U_1 \dotplus \dots \dotplus U_r$. Se dice que U es suma directa de $U_1,\dots,U_r$, y se escribe $U=U_1 \oplus \dots \oplus U_r = \bigoplus_{i=1}^{r} U_i$, si para cada $u \in U$ existen unos únicos vectores $\pi_i(u) \in U_i$, tales que $u=\pi_1(u)\dotplus\dots\dotplus\pi_r(u)$.

4.6.2 Teorema

Sea $(U_1,\dots,U_r) \subset L(V)$, $U=U_1\dotplus\dots\dotplus U_r$ $U_i \neq \{0\}$. Son equivalentes las siguientes afirmaciones: (se supone U de dimensión finita)

i) $U=U_1 \oplus \dots \oplus U_r$

ii) Para todo $j=1,\dots,r$ es $U_j \cap (\sum_{i\neq j} U_i) = \{0\}$

iii) Para todo $j=1,\dots,r-1$ es $(U_1\dotplus\dots\dotplus U_j)\cap U_{j+1} = 0$

iv) $\dim U = \dim U_1 \dotplus \dots \dim U_r$

v) Si $\mathcal{E}_i$ es base de U_i, entonces $\mathcal{E} = \mathcal{E}_1 \cup \dots \cup \mathcal{E}_r$ es base de U

vi) Si $u_i \in U_i - \{0\}$ $i=1,\dots,r$ entonces el sistema $(u_1,\dots u_r)$ es l.i

Demostración

Probaremos i) $\Rightarrow$ ii) $\Rightarrow$ iii) $\Rightarrow$ iv) $\Rightarrow$ v) $\Rightarrow$ vi) $\Rightarrow$ i)

i) $\Rightarrow$ ii)

Si $u \in U_j \cap (\sum_{i\neq j} U_i)$, se tiene por una parte $u=0\dotplus\dots\dotplus u\dotplus\dots\dotplus 0$ y por otra $u=u_1\dotplus\dots\dotplus u_{j-1}\dotplus u_j\dotplus\dots\dotplus u_r$ $(u_i \in U_i)$. Por la unicidad, es $u=0$.

ii) $\Rightarrow$ iii) Trivial

iii) $\Rightarrow$ iv)

Por inducción sobre r:

Para $r=2$, se parte de la hipótesis $U_1 \cap U_2 = 0$, $U_1\dotplus U_2=U$, entonces $\dim U=\dim U_1 \dotplus \dim U_2$, por la fórmula de dimensiones 4.3.1.

Supuesto cierto iii) $\Rightarrow$ iv) para $r-1 \geq 2$ probémoslo para r:

Como el sistema $(U_1,\dots U_{r-1})$ verifica la hipótesis iii) se concluye que $\dim(U_1\dotplus\dots\dotplus U_{r-1})=\dim U_1 \dotplus\dots\dotplus \dim U_{r-1}$, pero por hipótesis $(U_1\dotplus\dots\dotplus U_{r-1})\cap U_r = 0$, y aplicando el caso $p=2$, se deduce que $\dim U = \sum_{i=1}^{r} \dim U_i$.

iv) $\Rightarrow$ v)

$\mathcal{E} = \mathcal{E}_1 \cup \dots \cup \mathcal{E}_r$ es un sistema generador de $U=U_1\dotplus\dots\dotplus U_r$ con $\dim(U_1)\dotplus\dots\dotplus\dim(U_r)=\dim U$ vectores, luego $\mathcal{E}$ es base de U.

v) $\Rightarrow$ vi)

Supongase que existen vectores $u_i \in U_i - \{0\}$ tales que el sistema $(u_i,\dots,u_r)$ es l.d. Entonces fijando en U_i una base $\mathcal{E}_i$ que contenga $u_i \in U_i - \{0\}$, $i=1,\dots,r$, el sistema $\mathcal{E} = \mathcal{E}_1 \cup \dots \cup \mathcal{E}_r$

contiene a $(u_1,\dots,u_r)$ y es l.d . Esto contradice la hipótesis v).

vi) $\Rightarrow$ i)

De vi) se deduce que si $0=u_1+\dots+u_r$ $(u_i\in U_i)$ necesariamente $u_i=0$ para $i=1,\dots,r$. y de aquí se obtiene trivialmente i).

Supongase $V=U_1\oplus\dots\oplus U_r$. Para cada $i=1,\dots,r$, y cada $v\in V$ existe un único vector $\Pi_i(v)\in U_i$ tal que $v=\Pi_1(v)+\dots+\Pi_r(v)$, y para cada i la aplicación $\Pi_i:V\to V$ es lineal :

4.6.3 Definición (Proposición)

Al sistema de endomorfismos $(\Pi_1,\dots,\Pi_r)$ se denomina sistema de proyecciones asociado a la descomposición $V=U_1\oplus\dots\oplus U_r$.

Dicho sistema verifica las propiedades:

i) $\Pi_1+\dots+\Pi_r=id$

ii) $\Pi_i^2=\Pi_i$ para $i=1,\dots,r$

iii) $\Pi_i\cdot\Pi_j=0$ si $i\neq j$

Por otra parte se tiene que $\mathrm{im}\,\Pi_i=U_i$ $i=1,\dots,r$.

La demostración es un sencillo ejercicio.

Recíprocamente:

4.6.4 Teorema

Sea $(\Pi_1,\dots,\Pi_r)$ un sistema de endomorfismos lineales de V, verificando las propiedades i) ii) y iii) de 4.6.3. Entonces si $U_i=\mathrm{im}\,\Pi_i$ se verifica $V=U_1\oplus\dots\oplus U_r$, y $(\Pi_1,\dots,\Pi_r)$ es el sistema de proyecciones asociado a tal descomposición.

Demostración

Para cada $v\in V$, $v=(id)(v)=\Pi_1(v)+\dots+\Pi_r(v)\in U_1+\dots+U_r$, y por tanto $V=U_1+\dots+U_r$.

Por otra parte, por ser $\Pi_i^2=\Pi_i$, se deduce facilmente que $\Pi_i(u)=u$ para $u\in U_i=\mathrm{im}\,\Pi_i$, y por tanto, eligiendo arbitrariamente un vector $u_i\in U_i-\{0\}$ para cada $i=1,\dots,r$, el sistema $(u_1,\dots,u_r)$ es l.i , ya que si $\lambda_1u_1+\dots+\lambda_ru_r=0$, entonces se verifica :

$\lambda_1\Pi_1(u_1)+\dots+\lambda_r\Pi_r(u_r)=0$, y aplicando a los dos mimbros de la igualdad Π_j , por iii) se concluye que $\Pi_j(\Pi_j(u_j))=0$, y por ii) $\lambda_ju_j=0$, para $j=1,\dots,r$.

4.7 Proyecciones y simetrias vectoriales.

4.7.1 Definición.

Sea f un endomorfismo lineal de un espacio vectorial V:

a) Se dice que f es proyección vectorial si f es idempotente, es decir $f^2=f$.

b) Se dice que f es simetria (vectorial) si f es involutiva, es decir $f^2=id$.

Observese que cada uno de los elementos del sistema $(\pi_1,\dots,\pi_r)$ asociado a la descomposición $V=U_1\oplus\dots\oplus U_r$, es una proyección.

Reciprocamente:

4.7.2 Teorema.

Si $\pi : V \longrightarrow V$ es una proyección, entonces $id - \pi = \pi'$ tambien es proyección y (π , π') es el sistema de proyecciones asociado a la descomposición $V= im\,\pi \oplus ker\,\pi$.

Demostración: Por hipótesis es $\pi^2=\pi$; se tiene:

$\pi'^2=(id-\pi)(id-\pi)=id-\pi-\pi+\pi^2=id-2\pi+\pi=id-\pi=\pi'$; por tanto π' es proyección.

Además $\pi.\pi'=\pi(id-\pi)=\pi-\pi^2=0$ y analogamente $\pi'\pi=0$; por consiguiente (π,π') verifica las condiciones i),ii) e iii) de 4.6.3 y por el teorema 4.6.4, es el sistema de proyecciones asociado a la descomposición $V=im\,\pi\oplus im\,\pi'$.

Es facil ver ahora que $im\,\pi'= ker\,\pi$.

4.7.3 Definición.(Base y dirección de una proyección).

Si $V=U\oplus W$, y $(\pi, id-\pi)$ es el sistema de proyecciones asociado, los subespacios $U= im\,\pi$ y $W= ker\,\pi$ se denominan respectivamente base y dirección de la proyección π. Nótese que $U=im\,\pi=\{v/\pi(v)=v\}$.

4.7.4 Proposición.(definición)

Sea $\sigma:V \longrightarrow V$ una simetria vectorial,(es decir $\sigma^2=id$); Entonces $U=\{v\in V/\sigma(v)=v\}$ y $W=\{v\in V/\sigma(v)=-v\}$ son subespacios vectoriales de V, y se verifica $V=U\oplus W$. (Se supone, la característica de K distinta de dos)

Se denominan a U y W base y dirección de σ respectivamente.

Demostración:

Nótese que $U= ker(\sigma-id)$ y $W= ker(\sigma+id)$, por tanto son subespacios vectoriales de V, y $U\cap W= 0$.

Por otra parte se tiene la identidad $v=\frac{1}{2}(v+\sigma(v))+\frac{1}{2}(v-\sigma(v))$ para cada $v\in V$, como $v+\sigma(v)\in U$, $v-\sigma(v)\in W$ (utilícese $\sigma^2=id$) se verifica, $V=U\oplus W$.

4.7.5 Proposición.

Sea π proyección de base U y dirección W de V. Entonces $\sigma=2\pi-id$ es la simetria vectorial, de base U y dirección W.

Demostración:

$\sigma^2=(2\pi-id)^2=4\pi^2-4\pi+id=id$, por tanto σ es simetria y $\sigma(v)=v \Leftrightarrow 2\pi(v)-v=v \Leftrightarrow \pi(v)=v \Leftrightarrow v\in im\pi=U$; analogamente $\pi(v)=-v \Leftrightarrow 2\pi(v)=0 \Leftrightarrow v\in ker\pi=W$.

CAPITULO II

GEOMETRIA ANALITICA VECTORIAL

Los sistema lineales de coordenadas permiten representar en forma analítica los elementos de la geometría de espacios vectoriales de dimensión finita . Esta representación da lugar a una técnica para la formulación y resolución de problemas de geometría vectorial.

Se supone al lector familiarizado con los rudimentos del Algebra lineal elemental, tales com teoría de matrices y determinantes, teorema de Rouché-Frobeniüs...etc., que constituyen la herramienta básica de trabajo.

Los temas habituales de dualidad (bases duales, ortogonalidad dual, transposición...etc.) van surgiendo de forma natural a medida que se profundiza en el estudio de la Geometría analítica.

En lo que sigue, V será espacio vectorial de dimensión finita , n , sobre un cuerpo (conmutativo) K.

1. SISTEMAS LINEALES DE COORDENADAS: ESPACIO DUAL

1.1 Coordenadas y dualidad:

1.1.1 Definicion: Sistema de coordenadas respecto a una base.

Dada $\mathcal{E}=(e_1,\dots,e_n)$ base de V, cada vector $v\in V$ se escribe de una única manera com combinación lineal de elementos de $\mathcal{E}$:

$$v = x_1(v)e_1+\dots+x_n(v)e_n$$

Se denomina a $x_i(v)$, i-ésima coordenada del vector v respecto a $\mathcal{E}$. La aplicación $x_i:V\to K$, es la i-ésima coordenada(respecto a $\mathcal{E}$), y el sistema $\begin{pmatrix} x_1\\ \vdots \\ x_n\end{pmatrix} = \underset{\sim}{x}$, es por definición el sistema de coordenadas inducido por la base $\mathcal{E}$.

1.1.2 Proposición:

La i-ésima coordenada $x_i:V\to V_1(K)$ de la definición anterior, es aplicación lineal

Demostración:

Si $v,w\in V$ y $\lambda,\mu\in K$, es $\lambda v+\mu w=\lambda(\sum_{i=1}^{n} x_i(v)e_i)+\mu(\sum_{i=1}^{n} x_i(w)e_i)=$ $=\sum_{i=1}^{n}(\lambda x_i(v)+\mu x_i(w))e_i$. El resultado se obtiene por la unicidad de las coordenadas.

1.1.3 Definición: Espacio dual

Se denomina espacio dual de V, al espacio vectorial $FL(V,V_1(K))$ de las aplicaciones lineales de V en $V_1(K)$, y se le denota por V^*. Los elementos de V^* se denominan formas lineales de V.

1.1.4 Comentario

El sistema de coordenadas $\underset{\sim}{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ inducido por una base $\mathcal{E}$ de V es así un sistema de vectores de V. Antes de comprobar que dicho sistema es base de V^*, establezcamos algunos criterios de notación:

1.1.5 Notación ambigüa (./.)

Si $v \in V$, y $x \in V^*$, se denotará indistintamente al escalar $x(v)$ por (x/v) ó (v/x). En general, la escritura (a/b) significa que uno de los elementos de $\{a,b\}$ está en V, y el otro en V^*, y el valor de la forma sobre el vector es (a/b).

Con éste convenio, pueden establecerse las siguientes reglas formales de calculo:

1.1.6 Propsición:

1) $(a/b)=(b/a)$

2) $(\lambda a+\mu b/c)=\lambda(a/c)+\mu(b/c)$, para $\lambda,\mu \in K$.

3) Si $(a/b)=0$ para todo b, entonces $a=0$

Demostración:

Las propiedades 1) y 2) son cosecuencia inmediata del criterio de notación, de la "linealidad" de las formas, y de la estructura vectorial de V.

La propiedad 3) solo es no trivial, cuando se toma a como vector de V:

Si $\underset{\sim}{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, es el sistema de coordenadas inducido por una base de V, se verifica la identidad:

$$a=(x_1/a)e_1+\dots+(x_n/a)e_n$$

Por hipótesis $(x_i/a)=0$ para $i=1\dots,n$, luego $a=0$.

1.1.7 Propsición:

Si $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_n \end{pmatrix}$ es el sistema de coordenadas inducido por una base $\mathcal{E}=(e_1,\dots,e_n)$ de V, entonces para cualquier $x \in V^*$ se tiene la identidad:

$x=(x/e_1)x_1+\dots+(x/e_n)x_n$

En particular $\underset{\sim}{x}=\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ es una base de V^*.

Demostración:

Es suficiente observar que la forma lineal $\lambda_1 x_1+\dots+\lambda_n x_n$, $\lambda_i \in K$ es la única forma lineal que toma sobre e_i el valor λ_i.

1.1.8 Definición : Bases duales

Dos bases $(a_1,\dots,a_n)$, $(b_1,\dots,b_n)$ se denominan duales si

$(a_i/b_j)=\begin{cases} 0 \text{ para } i\neq j \\ 1 \text{ para } i=j \end{cases}$

Observese que las bases $\mathcal{E}=(e_1,\dots,e_n)$, y $\mathcal{E}^*=x^t=(x_1,\dots,x_n)$ son bases duales. $\mathcal{E}^*$ es pues base dual de $\mathcal{E}$.

1.1.9 Proposición (definición)

Un sistema de coordenadas en el espacio vectorial V, es por definición una base $\underset{\sim}{x}=\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ de V^*.

A la aplicación $\underset{\sim}{x}:V\ni v \mapsto \underset{\sim}{x}(v)=\begin{pmatrix} x_1/v \\ \vdots \\ x_n/v \end{pmatrix}\in V_n(K)$, se denomina isomorfismo de coordenadas, y es un isomorfismo lineal.

Demostración:

La aplicación $\underset{\sim}{x}:V\longrightarrow V_n(K)$ es evidentemente lineal. Como $\dim(V)=\dim(V_n)=n$,para ver que $\underset{\sim}{x}$ es isomorfismo, es suficiente comprobar que es inyectiva. En efecto, si $(x_i/v)=0$ para $i=1,\dots,n$ entonces $(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i x_i/v)=0$ para todo sistema $(\lambda_1,\dots,\lambda_n)\in K$, y por 3) de 1.1.6, es $v=0$.

1.1.10 Corolario

Todo sistema de coordenadas $\underset{\sim}{x}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_n \end{pmatrix}$ de V, es el sistema de coordenadas inducido por una (única) base $\mathcal{E}$ de V.

Demostración:

Tómese $e_j=\underset{\sim}{x}^{-1}(I_j)$.

El siguiente teorema en notación "ambigüa" resume las ideas fundamentales del parágrafo:

1.1.11 Teorema

Si $(a_1,\dots,a_n)$ es una base de V (ó V^*) existe una única base $(b_1,\dots,b_n)$ de V^* (respect. de V) dual de la primera, y se verifica para todo $a\in\langle a_1,\dots,a_n\rangle$ la identidad:

$a=(a/b_1)a_1+\dots+(a/b_n)a_n$.

1.2 Sistemas de vectores y matrices. Cambios lineales de coordenadas

1.2.1 Representación analítica de sistemas de vectores

Fijada una base $\mathcal{E}=(e_1,\dots,e_n)$ con coordenadas $\underset{\sim}{x}=\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, cada vector v de V puede representarse por una matriz

$$\underset{\sim}{x}(v)=\begin{pmatrix} x_1/v \\ x_n/v \end{pmatrix}$$ de $FL(1,n)$, y la aplicación $\varphi_{\underset{\sim}{x}}: V \to FL(1,n)$ es un isomorfismo lineal. De manera análoga, un sistema de vectores de V, $\underset{\sim}{v}=(v_1,\dots,v_m)$ puede representarse por una matriz

$$\underset{\sim}{x}(v)=\begin{pmatrix} (x_1/v_1),\dots,(x_1/v_m) \\ \dots\dots\dots\dots \\ (x_n/v_1),\dots,(x_n/v_m) \end{pmatrix} \text{ de } FL(m,n)$$

El sistema $\underset{\sim}{v}$ puede considerarse un elemento de $V^m=V\times\overset{m)}{\dots}\times V$, y $\varphi_{\underset{\sim}{x}}$ es aplicación biyectiva de V^m en $FL(m,n)$ que es isomorfismo lineal, si se dota a V^m de su estructura vectorial producto canónica.

Observese que utilizando la regla formal de multiplicar matrices se tiene la siguiente identidad:

$v=\mathcal{E}\,\varphi_{\underset{\sim}{x}}(v)$, es decir:

$$(v_1,\dots,v_m)=(e_1,\dots,e_n)\begin{pmatrix} (x_1/v)\dots(x_1/v_m) \\ \dots\dots\dots\dots \\ (x_n/v_1)\dots(x_n/v_m) \end{pmatrix}$$

que equivale a la identidad : $v_j=\sum_{i=1}^{n}(x_i/v_j)e_i$ para $j=1\dots m$.

Todo esto sugiere el siguiente planteamiento general:

1.2.2 Definición

Si $\underset{\sim}{v}=(v_1,\dots,v_m)$ es un sistema de vectores de V, y $A=(a_{ij})$ es una matriz de $FL(p,m)$, el producto $\underset{\sim}{v}A$ representa el sistema de vectores $w=(w_1,\dots,w_p)$, donde $w_j=\sum_{i=1}^{m}a_{ij}v_i$ para $j=1,\dots,p$.

Denotando por $\underset{\sim}{v}^t$ a $\begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_m \end{pmatrix}$, es natural tomar escribir (por definición) la igualdad: $A^t v^t=(vA)^t$

La siguiente proposición establece las reglas operativas de este tipo de producto; Antes, una cuestión previa de notación:

1.2.3 Notación

Si $f: V \to V'$ es una aplicación lineal, y $\underset{\sim}{v}=(v_1,\dots,v_m)$ es sistema de vectores de V, se define $f(\underset{\sim}{v})=$
$=(f(v_1),\dots,f(v_m))$. Nótese que $f\ V^m \to V'^m$ es lineal

Si $\sigma: K \to K'$ es un isomorfismo de cuerpos, $A=(a_{ij})\in FL(n,m;K)$, escribimos $A^\sigma=(a_{ij}^\sigma)\in FL(n,m;K')$. La

1.2.4 Proposición

Sean $\underset{\sim}{v}$, $\underset{\sim}{w} \in V^m$, A , $A' \in FL(p,m)$, $B \in FL(q,p)$, $\lambda \in K$, entonces:

1) Si $f: V \to V'$ es aplicación σ-lineal, se verifica $f(\underset{\sim}{v}A) = f(\underset{\sim}{v})A^{\sigma}$

2) $(\lambda \underset{\sim}{v})A = \lambda(\underset{\sim}{v}A) = \underset{\sim}{v}(\lambda A)$

3) $(\underset{\sim}{v}+\underset{\sim}{w})A = \underset{\sim}{v}A + \underset{\sim}{w}A$; $\underset{\sim}{v}(A+A') = \underset{\sim}{v}A + vA'$

4) $\underset{\sim}{v}(AB) = (\underset{\sim}{v}A)B$

5) Si $\underset{\sim}{v}$ es l.i, entonces : $\underset{\sim}{v}A = \underset{\sim}{v}A' \Rightarrow A = A'$

6) Si $\underset{\sim}{v}$ es l.i , la dimensión del subespacio $\langle \underset{\sim}{v}A \rangle$ coincide con el rango de la matriz A.

Demostración:

La verificación de 1) 2) 3) y 4) es automática. La afirmación 5) es consecuencia de la unicidad de las coordenadas respecto a $\underset{\sim}{v}$ en el espacio vectorial $\langle \underset{\sim}{v} \rangle$ generado por v. El isomorfismo de coordenadas inducido por $\underset{\sim}{v}$ en $\langle \underset{\sim}{v} \rangle$, permite establecer facilmente 6).

1.2.5 Observación

Puede, evidentemente enunciarse una proposición análoga a 1.2.4 para productos del tipo $A\begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_m \end{pmatrix}$ con $A \in FL(m,p)$

1.2.6 Corolario

Sea $\mathcal{E} = (e_1, \ldots, e_n)$ base de V. Si $\mathcal{E}' = (e_1', \ldots, e_n')$ es un sistema de n vectores de V, Existe una única matriz $P \in FL(n)$, tal que $\mathcal{E}' = \mathcal{E}\, P$.

Además $\mathcal{E}'$ es base de V, si y solo si $\det(P) \neq 0$ (es decir, $P \in GL(n)$). Se denomina a P matriz del cambio de base.

La demostración es inmediata a partir de 1.2.4

1.2.7 Teorema: Ecuaciones de un cambio de coordenadas.

Sean $\mathcal{E} = (e_1, \ldots, e_n)$, $\mathcal{E}' = (e_1', \ldots, e_n')$ dos bases de V, y $P \in GL(n)$ la matriz del cambio de base, es decir $\mathcal{E}' = \mathcal{E}\, P$.

Sean $\mathcal{E}^* = (x_1, \ldots, x_n)$, $\mathcal{E}'^* = (x_1', \ldots, x_n')$ sus correspondientes sistemas de coordenadas. Se tiene entonces la identidad:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} x_1' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix} \text{ , es decir } \mathcal{E}^* = \mathcal{E}'^* P^t$$

Las ecuaciones $\left. x_i = \sum_{j=1}^{n} p_{ij} x_j' \right\}_{i=1,\ldots,n}$ representan las ecuaciones del cambio de coordenadas.

Demostración:

Para cada vector v de V se tiene:

$$v=\mathcal{E}'\begin{pmatrix}x_1'/v\\ \vdots\\ x_n'/v\end{pmatrix}=\mathcal{E}\left(P\begin{pmatrix}x_1'/v\\ \\ x_n'/v\end{pmatrix}\right)=\mathcal{E}\begin{pmatrix}x_1/v\\ \\ x_n/v\end{pmatrix},\ \text{y así}\ \begin{pmatrix}x_1/v\\ \\ x_n/v\end{pmatrix}=P\begin{pmatrix}x_1'/v\\ \\ x_n'/v\end{pmatrix}.$$

por 5) de 1.2.4 . Esto es justamente lo que se pretendía probar.

2. DETERMINACION ANALITICA DE APLICACIONES SEMILINEALES

V y V' serán espacios vectoriales sobre los cuerpos K y K', y con dimensiones n y m respectivamente. Se denotan por FL(n,m) y FL'(n,m) a las matrices de m filas y n columnas con coeficientes en K y K' respectivamente. Análoga notación para EL(n), EL'(n) GL(n), y GL'(n).

2.1 Matriz de una aplicación semilineal

Sean $\mathcal{E}=(e_1,\dots,e_n)$, $\mathcal{E}'=(e_1',\dots,e_m')$ bases respectivas de V y V'. Una aplicación semilineal $f:V\to V'$, viene unívocamente determinada por su automorfismo asociado $\sigma:K\to K'$, y los "valores" $f(\mathcal{E})=(f(e_1),\dots,f(e_n))$ que toma sobre la base $\mathcal{E}$.

Si $f(e_j)=\sum_{i=1}^{m} a_{ij}e_i'$ $j=1\dots n$, la matriz $A=(a_{ij})$ de FL'(n,m) es la única verificando $f(\mathcal{E})=\mathcal{E}'A$:

2.1.1 Definición

La matriz $A\in FL'(n,m)$ anterior, se denomina matriz de la aplicación semilineal f respecto a las bases $\mathcal{E}$, y $\mathcal{E}'$. Se escribe $A=M_{\mathcal{E},\mathcal{E}'}(f)$.

Notese que $M_{\mathcal{E},\mathcal{E}'}(f)=A \iff f(\mathcal{E})=\mathcal{E}'A$

Las siguientes proposiciones tienen demostración inmediata a partir de 1.2.4 , y de la definición anterior

2.1.2 Proposición

Sean $\mathcal{E}$, $\mathcal{E}'$,y $\mathcal{E}''$ bases respectivas de los espacios vectoriales V, V', V'' , $f:V\to V'$, $g:V'\to V''$ aplicaciones semilineales. Entonces $M_{\mathcal{E},\mathcal{E}''}(g.f)=M_{\mathcal{E}',\mathcal{E}''}(g)\ M_{\mathcal{E},\mathcal{E}'}(f)^{\sigma}$ (σ es el automorfismo de f)

2.1.3 Proposición

Si $\mathcal{E}$ y $\mathcal{E}'$ son bases de V y V' respectivamente (K=K') la aplicación $M_{\mathcal{E},\mathcal{E}'}:FL(V,V')\to FL(n,m)$ es un isomorfismo lineal.

2.1.4 Proposición

Si $\mathcal{E}$ es base de V, la aplicación $M_{\mathcal{E}}=M_{\mathcal{E},\mathcal{E}}:EL(V)\to EL(n)$, es isomorfismo de algebras, es decir

i) $M_{\mathcal{E}}$ es isomorfismo lineal

ii) $M_{\mathcal{E}}(g.f)=M_{\mathcal{E}}(g)\ M_{\mathcal{E}}(f)$ para $f,g\in E\,H(V)$

Por otra parte , $M_{\mathcal{E}}$ induce isomorfismo entre los grupos $GL(V)$ y $GL(n)$.

2.1.5 Proposición

Si $f:V\longrightarrow V'$ es aplicación semilineal, la dimensión de la imagen de f, es el rango de cualquiera de sus representaciones matriciales, y se denomina rango de f.

2.1.5 Variación de la representación matricial por un cambio de bases

Sean $\mathcal{E}$, δ bases de V, y $\mathcal{E}'$, δ' bases de V'. Supongase que $\delta=\mathcal{E}P$, $\delta'=\mathcal{E}'P'$, $P\in GL(n)$, $P'\in GL'(m)$, y sea $f:V\longrightarrow V'$ una aplicación σ-lineal con $M_{\mathcal{E},\mathcal{E}'}(f)=A\in FL'(n,m)$, es decir, $f(\mathcal{E})=\mathcal{E}'A$. Entonces $f(\delta)=f(\mathcal{E}P)=f(\mathcal{E})P^{\sigma}=\mathcal{E}'(AP^{\sigma})=\delta'(P'^{-1}AP^{\sigma})$, y así $M_{\delta,\delta'}(f)=P'^{-1}AP^{\sigma}$, con lo cual se tiene:

Teorema:

Si $\mathcal{E}$, δ son bases de V $(\delta=\mathcal{E}P)$, $\mathcal{E}'$, δ' son bases de V' $(\delta'=\mathcal{E}'P')$ y $f:V\longrightarrow V'$ es aplicación σ-lineal , entonces $M_{\delta,\delta'}(f)=P'^{-1}AP^{\sigma}$.

2.1.7 Corolario

Si $\mathcal{E}$, $\mathcal{E}'$ son bases de V con $\mathcal{E}'=\mathcal{E}P$ $(P\in GL(n))$, entonces $M_{\mathcal{E}'}(f)=P^{-1}A\ P$

2.2 <u>Ecuaciones de una aplicación semilineal</u>

Sean $\mathcal{E}=(e_1,\dots,e_n)$, $\mathcal{E}'=(e_1',\dots,e_m')$ bases de V y V' respectivamente, y $\underset{\sim}{x}=\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$ $\underset{\sim}{x}'=\begin{pmatrix}x_1'\\ \vdots\\ x_m'\end{pmatrix}$ los correspondientes sistemas de coordenadas; Sea $f:V\longrightarrow V'$ una aplicación σ-lineal, y $A=(a_{ij})\in FL'(n,m)$ la representación matricial de f respecto a $\mathcal{E}$ y $\mathcal{E}'$, es decir: $f(\mathcal{E})=\mathcal{E}'A$.

Para cada vector v de V se tiene: $f(v)=\mathcal{E}'\begin{pmatrix}x_1'/f(v)\\ \\ x_m'/f(v)\end{pmatrix}=\mathcal{E}'\underset{\sim}{x}'(f(v))$

Por otra parte, $f(v)=f(\mathcal{E}\underset{\sim}{x}(v))=\mathcal{E}'(A\ x(v)^{\sigma})$, y por tanto

$x'(f(v))=A\ x(v)^{\sigma}$, es decir: $\begin{pmatrix}(x_1'/f(v))\\ \vdots\\ (x_m'/f(v))\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}(x_1/v)^{\sigma}\\ \vdots\\ (x_n/v)^{\sigma}\end{pmatrix}$ (1)

Denotando por x_i^{σ} la composición $\sigma.x_i:V\longrightarrow K'$, la igualdad matricial anterior (por ser válida para todo vector v de V) puede escribirse en la forma:

$$\begin{pmatrix} x_1'.f \\ \vdots \\ x_m'.f \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \qquad (2) \qquad \text{ó aún}$$

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ \vdots \\ x_m' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \qquad (3)$$

si convenimos en hacer el abuso de notación: $x_j' = x_j'.f$

Las ecuaciones (3) constituyen las ecuaciones de la aplicación semilineal f respecto a $\mathcal{E}$ y $\mathcal{E}'$, cuyo significado preciso viene dado por las ecuaciones (1) ó (2)

2.1.9 Comentario

Si $V=V'$ y $\mathcal{E}=\mathcal{E}'$, las ecuaciones de la aplicación σ-lineal $f:V \to V'$ respecto a $\mathcal{E}$ se escriben aún de la forma (3), donde ahora $x_i' = x_i.f$, y $A=M_{\mathcal{E}}(f)$.

2.2 Transposición de aplicaciones lineales

Si $f:V \to V'$ es una aplicación lineal ($K=K'$) las ecuaciones de f respecto a las bases $\mathcal{E}$ y $\mathcal{E}'$ de V y V' con coordenadas respectivas $\underset{\sim}{x}$ y $\underset{\sim}{x}'$, pueden escribirse de la forma:

(1) : $(x_1'.f, \ldots, x_m'.f) = (x_1, \ldots, x_n)\ A^t$, donde $A=M_{\mathcal{E},\mathcal{E}'}(f) \in FL(n,m)$

y las aplicaciones $x_i'.f:V \to K$ son formas lineales. Esto justifica la siguiente definición:

2.2.1 Definición

Sea $f:V \to V'$ una aplicación lineal (por tanto, $K=K'$), y α' es una forma lineal de V', la composición $\alpha'.f:V \to K$ es una forma lineal que se denota por $f^t(\alpha')$. La aplicación $f^t:V'^* \to V^*$ se denomina aplicación transpuesta de f

2.2.2 Observación

La aplicación f^t de la definición anterior viene caracterizada por la propiedad $(f^t\alpha'/v) = (\alpha'/f(v))$, para $\alpha' \in V'^*$ y $v \in V$. Esta caracterización, y la igualdad (1) permiten probar facilmente los dos resultados que siguen:

2.2.3 Proposición

Si $f:V \to V'$ es aplicación lineal, entonces $f^t:V'^* \to V^*$ es lineal. Para $\mathcal{E}$ y $\mathcal{E}'$ bases de V y V' se tiene: $M_{\mathcal{E}'^*,\mathcal{E}^*}(f^t) = M_{\mathcal{E},\mathcal{E}'}(f)^t$.

Por otra parte, la aplicación $t:FL(V,V') \ni f \mapsto f^t \in FL(V'^*,V^*)$ es un isomorfismo lineal

Demostración:

La primera afirmación es consecuencia de la igualdad (1) anterior. La linealidad de $t:FL(V,V')\rightarrow FL(V'^{*},V^{*})$ se prueba automaticamente a partir de la caracterización 2.2.2 y la proposición 1.1.6

Para demostrar que t es isomorfismo, es suficiente- por cuestiones de dimensión- probar que t es inyectiva:

Si $f\in FL(V,V')$ y $f^{t}=0$, entonces para cada $v\in V$ y $\alpha'\in V'$ se verifica , $(\alpha'/f(v))=(f^{t}\alpha'/v)=0$, por 3) de 1.1.6, es $f(v)=0$, y $f=0$.

2.2.4 Proposición:

Si $f:V\rightarrow V'$, $g:V'\rightarrow V''$ son aplicaciones lineales, entonces $(g.f)^{t}=f^{t}.g^{t}$

La demostración es inmediata

2.2.5 Identificación bidual

La aplicación transpuesta $t:FL(n,m)\ A\longmapsto A^{t}\in FL(m,n)$, es involutiva, es decir $(A^{t})^{t}=A$ para $A\in FL(n,m)$; Sin embargo, la igualdad $(f^{t})^{t}=f$ para f aplicación lineal, carece en principio de sentido,a no ser que se establezca cierto convenio consistente en identificar un espacio vectorial V con su bidual V^{**} mediante un isomorfismo natural:

Proposición:

Si V es espacio vectorial, la aplicación $i:V\rightarrow V$ definida por $(i(v)/\alpha)=(v/\alpha)$ para $v\in V$ y $\alpha\in V^{*}$, es isomorfismo lineal

Demostración:

Por cuestion de dimensiones, es suficiente probar la inyectividad de i (que es obviamente lineal).Esto se prueba de forma análoga a la inyectividad de t en 2.2.3

Si se identifica el vector v de V con i(v) de V^{**} puede enunciarse, utilizando la notación ambigüa, la siguiente proposición:

2.2.6 Proposición

Si f es aplicación lineal entre espacios vectoriales, la aplicación f^{t} viene caracterizada por la condición:

$(f^{t}(a)/b)=(a/f\ (b))$ para a y b arbitrarios.

En consecuencia $(f^{t})^{t}=f$

Demostración:

Sean V y V' espacios vectoriales (sobre K), y $g: V'^{*} \longrightarrow V^{*}$ aplicación lineal. Entonces g^t es aplicación lineal de $V^{**}=V$ en $V'^{**}=V'$, y para cada $v \in V$ el vector $g^t(v)$ se identifica con la forma lineal de V' que toma el valor $(v/g(\alpha'))$ sobre cada α' de V'^{*}, y asi $(g^t(v)/\alpha')=(v/g(\alpha'))$.

Si $g=f^t$ con $f \in FL(V,V')$ se verifica:

$(f^{tt}(v)/\alpha')=(v/f^t(\alpha'))=(f(v)/\alpha')$ para todo $\alpha' \in V'^{*}$. Por tanto $f^{tt}(v)=f(v)$ para todo v V, y $f^{tt}=f$.

3. REPRESENTACION ANALITICA DE SUBESPACIOS: ORTOGONALIDAD DUAL

Sea $\underset{\sim}{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ un sistema de coordenadas en el espacio vectorial V, y U un subespacio vectorial de V de dimensión p.

Probaremos que U puede expresarse de forma anlítica mediante un sistema homogéneo de $r=n-p$ ecuaciones lineales independientes en las variables $x_1,\ldots,x_n$ de la forma:

$$\left.\begin{aligned} \lambda_{11} x_1 + \ldots + \lambda_{1n} x_n &= 0 \\ \lambda_{r1} x_1 + \ldots + \lambda_{rn} x_n &= 0 \end{aligned}\right\}$$

que constituyen las denominadas ecuaciones implícitas de U.

El significado preciso de ésta terminolgía es el siguiente:

Para cada $i=1\ldots r$, $y_i=\sum_{j=1}^{n} \lambda_{ij} x_j$, representa una forma lineal en V, y $U=\{v \in V \;/\; (y_i/v)=0 \text{ para } i=1\ldots r\}$.

Esto motiva la introducción y análisis del concepto de ortogonalidad dual, y su utilización para establecer las ecuaciones implícitas de subespacios.

3.1 Ortogonalidad dual. Ecuaciones implicitas de subespacios

3.1.1 Definición

Sea S subconjunto del espacio vectorial V (ó V^{*}). Se llama ortogonal dual de S, S^{ω}, al conjunto de todos los elementos a de V (respect. de V^{*}) tales que $(a/s)=0$ para todo elemento $s \in S$.

A partir de ésta definición, es inmediato el siguiente resultado que describe algunas propiedades elementales del operador ω

3.1.2 Proposición

Sean S , T subconjuntos de V (ó V^{*}). Entonces:

1) S^{ω} es subespacio vectorial

2) Si $S \subset T$ entonces $T^{\omega} \subset S^{\omega}$

3) $S^{\omega} = \langle S \rangle^{\omega}$

4) $S \subset S^{\omega\omega}$

3.1.3 Proposición

Si U y W son subespacios de V (ó V) se verifica :
$(U+W)^{\omega} = U^{\omega} \cap W^{\omega}$.

Demostración

Como el subespacio $U+W$ contiene a U y a W , se deduce por 2) de 3.1.2 que $(U+W)^{\omega} \subset U^{\omega} \cap W^{\omega}$. El otro contenido es inmediato a partir de la definición 3.1.1 .

3.1.4 Teorema

Si U es subespacio vectorial de V (ó de V^*), entonces:
$\dim(U) + \dim(U^{\omega}) = \dim(V) = n$.

Demostración:

Sea $(a_1,\dots a_r)$ base de U, y $(a_1,\dots,a_r,\dots,a_n)$ base del espacio vedtorial ambiente. Sea $(b_1\dots b_r\dots b_n)$ base dual de la anterior; Se probará que $\langle b_{r+1},\dots,b_n\rangle = U^{\omega}$. Esto concluirá la demostración. En efecto:

Còmo $(a_i/b_j)=0$ si $i\neq j$, cada b_j $(j=r+1\dots n)$ está en el subespacio $\{a_1,\dots,a_r\}^{\omega} = \langle a_1,\dots a_r\rangle^{\omega} = U^{\omega}$, y $\langle b_{r+1},\dots,b_n\rangle \subset U^{\omega}$.

Por otra parte, si $b \in U^{\omega}$, por 1.1.11 podemos escribir:
$b=(b/a_1)b_1+\dots+(b/a_r)b_r+\dots+(b/a_n)b_n$, y como $(b/a_i)=0$ para $i.1\dots r$ se concluye que $b \in \langle b_{r+1},\dots,b_n\rangle$.

3.1.5 Corolario

Si U y W son subespacios de V (ó V) entònces:

i) $U = (U^{\omega})^{\omega}$

ii) $(U \cap W)^{\omega} = U^{\omega} + W^{\omega}$

Demostración:

i) Basta tener en cuenta que $U \subset U^{\omega\omega}$, yque por 3.1.4 es $\dim(U)=\dim(U^{\omega\omega})$.

ii) Aplicando 3.1.3 a U y W se obtiene : $(U^{\omega}+W^{\omega})^{\omega} = U^{\omega\omega} \cap W^{\omega\omega} = U \cap W$ tomando el ortogonal dual en ambos miembros, se obtiene ii).

3.1.6 Ecuaciones implicitas de subespacios

Sea $\underset{\sim}{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ un sistema de coordenadas en el espacio vectorial V, y sea U subespacio vectorial de V de dimensión p. Si $r=n-p$ se tiene el siguiente resultado:

Proposición

Si $y_i=\sum_{j=1}^{n}\lambda_{ij}x_j$,$i=1,\ldots r$ son r formas lineales independientes de U^{ω}, entonces $U=\{ v\in V \,/\, \sum_{j=1}^{n}\lambda_{ij}(x_j/v) = 0 \,,\; i=1\ldots r \}$, y el sistema homogéneo : $\left.\sum_{j=1}^{n}\lambda_{ij}x_j = 0 \right\}_{i=1\ldots r}$ son unas ecuaciones implícitas para U.

Demostración:

$(y_1,\ldots,y_r)$ son $r=n-p$ formas independientes en el espacio U^{ω} que tiene dimensión r, y por tanto constituyen una base de U^{ω}. En particular $\langle y_1,\ldots,y_r\rangle = U^{\omega}$, y se verifica:

$\{ v\in V \,/\, (y_i/v)=0 \text{ para } i=1\ldots r\} = \{y_1,\ldots y_r\}^{\omega} = \langle y_1,\ldots,y_r\rangle^{\omega} = U^{\omega\omega} = U.$

3.2 Ortogonalidad dual y transposición

La conexión entre ambos conceptos, viene explicitada en la siguiente proposición, que constituye además un ejemplo de utilización de la identificación bidual

3.2.1 Proposición

Sea f una aplicación lineal entre los espacios vectoriales V y V', sea U subespacio vectorial de V, y U' subespacio de V'.

Entonces:

1) $f(U)^{\omega}=(f^t)^{-1}(U^{\omega})$

2) $f^t(U')^{\omega}= f^{-1}(U'^{\omega})$

Demostración:

1) $\alpha'\in f(U)^{\omega} \Leftrightarrow (\alpha'/f(u))=0\ \forall u\in U \Leftrightarrow (f^t(\alpha')/u)=0\ \forall u\in U \Leftrightarrow f^t(\alpha')\in U^{\omega}$

Observese por otra parte que el enunciado 2) es "dual" del 1), y se demuestra automáticamente, aplicando 1) a f^t, y teniendo en cuenta que $f^{tt}=f$ por la identificación bidual (véase 2.2.6)

3.2.2 Corolario

Si $f:V\longrightarrow V'$ es aplicación lineal, entonces:

i) f es suprayectiva si y solo si f^t es inyectiva

ii) f es inyectiva, si y solo si f^t es suprayectiva

Demostración:

i) Nótese que por la proposición anterior es :

$f(V)^{\omega}=(f^t)^{-1}(V^{\omega})=(f^t)^{-1}(0)$, y así $f(V)=V'$ equivale a $(f^t)^{-1}(0)=0$, es decir, f^t inyectiva

ii) El enunciado, es dual del i), y se demuestra por tanto , aplicando i) a f^t, es decir:

f^t suprayectiva $\Leftrightarrow f^{tt}=f$ inyectiva .

CAPITULO 3

CLASIFICACION LINEAL DE ENDOMORFISMOS EN UN ESPACIO VECTORIAL

El problema de clasificación geométrica que aquí nos planteamos, tiene solución complicada cualquiera que sea la técnica para la demostración del correspondiente teorema, y el sistema empleado para describir sus soluciònes.
Existen de hecho algunas versiones distintas más ó menos complicadas, y todas ellas requieren de ciertos conocimientos relativos a técnicas algebraicas con polinomio de una variable; las que nosotros necesitámos están incluidas en el apendice , y se supondrán implicitamente conocidas desde ahora.

1. EQUIVALENCIA LINEAL DE ENDOMORFISMOS: INVARIANTES LINEALES

Dos endomorfismos f y f′ de un espacio vectorial V se dirán linealmente equivalentes, si existen dos sistemas de coordenadas x y x′ de forma que las ecuaciones de f respecto a x sean formalmente las mismas que las de f′ respecto a x′. Intuitivamente hablando esto significa, que ambas se ven actuar de la misma forma respecto a dos "puntos de vista" vectoriales adecuadamente elegidos.
Trataremos de precisar estas ideas, y de formular con exactitud el problema de clasificación geométrica correspondiente.

En todo el Capitulo, V denota un espacio vectorial de dimensión finita $n>0$, sobre el cuerpo (conmutativo K.

1.1 Equivalencia lineal de endomorfismos

1.1.1 Definición

Dos endomorfismos f y f′de V se dicen linealmente equivalentes (y se escribe $f \sim f'$) cuando existen bases de V $\mathcal{E}$ y $\mathcal{E}'$ tales que $M_{\mathcal{E}}(f)=M_{\mathcal{E}'}(f')$

El concepto de equivalencia lineal de endomorfismos está intimamente relacionado con el de semejanza de matrices que se define a continuación:

1.1.2 Definición (Proposición)

Dos matrices A y A′ de $EL(n)$ se dicen semejantes, (y se escribe $A\sim A'$) si existe una matriz $P\in GL(n)$ (denominada matriz de paso) , tal que $A'=P^{-1}A\ P$.
La relación de semejanza de matrices "$\sim$" es relación de equivalencia en $FL(n)$

1.1.3 Proposición

Sea $f\in EL(V)$, $\mathcal{E}$ base de V y $A=M_{\mathcal{E}}(f)$. Si $A'\in EL(n)$ son equivalentes las siguientes afirmaciones:

i) $A \sim A'$; ii) Existe $\mathcal{E}'$ base de V con $M_{\mathcal{E}'}(f)=A'$.

Demostración

La equivalencia se basa en el hecho de que si $\mathcal{E}'=\mathcal{E}P$, $P\in GL(n)$, entonces $M_{\mathcal{E}'}(f)= P^{-1}A\,P$ (ver 2.1.7 Cap 2)

La relación entre la semejanza de matrices y la equivalencia lineal de endomorfismos, se explicíta en la siguiente proposición:

1.1.4 Proposición

Sea δ una base de V y f , f' dos endomorfismos. Son equivalentes las siguientes afirmaciones:

i) $f\sim f'$; ii) $M_\delta(f)\sim M_\delta(f')$; iii) Existe $g\in GL(V)$ con $f'=g^{-1}f\,g$

Demostración:

i) $\Rightarrow$ ii) Si $f\sim f'$ existen bases $\mathcal{E}$ y $\mathcal{E}'$ de V con $M_{\mathcal{E}}(f)= M_{\mathcal{E}'}(f')$. Por 1.1.4 , es : $M_\delta(f)\sim M_{\mathcal{E}}(f)$ y $M_\delta(f')\sim M_{\mathcal{E}'}(f')$. Por la transitividad de la relación de semejanza, se concluye qu $M_\delta(f)\sim M_\delta(f')$.

ii) $\Rightarrow$ iii) Sea $P\in GL(n)$ con $M_\delta(f')= P^{-1}M_\delta(f)P$, y sea $g\in GL(V)$ tal que $M_\delta(g)=P$ Entonces $M_\delta(f')= M_\delta(g)^{-1}M_\delta(f)\,M_\delta(g)=M_\delta(g^{-1}f\,g)$, y $f'=g^{-1}f\,g$, por la inyectividad de M_δ .

iii) $\Rightarrow$ i) Si $f'=g^{-1}f\,g$ $(g\in GL(n))$, fijada la base $\mathcal{E}$, se comprueba que $M_{g(\mathcal{E})}(f) = M_{\mathcal{E}}(f')$

1.1.5 Corolario

La relacion de equivalencia lineal de endomorfismos, es relación de equivalencia.

1.1.6 Comentarios

1) El grupo GL(V) actua por la izquierda sobre el conjunto EL(V) según la regla: $GL(V)\times EL(V)\ni(g,f)\longmapsto g^*(f)= g^{-1}f\,g\in EL(V)$, es decir, se verifica para $g_1,g_2\in GL(V)$ $(g_2\cdot g_1)^*= g_1^*\cdot g_2^*$, y $id^*=id$

De 1.1.4 se concluye que la relación de equivalencia lineal de endomorfismos, es justamente la inducida por dicha actuación , es decir, dos endomorfismos $f,f'\in EL(V)$ son linealmente equivalentes, cuando existe $g\in GL(V)$ tal que $g^*(f)=f'$

Las clases de equivalencia, son pués las órbitas de dicha actuación: $Orb(f)=\left\{ g^*(f)\ /g\in GL(V)\right\}$, para cada $f\in FL(V)$.

2) Fijada la base $\mathcal{E}$ de V , queda establecido el isomorfismo $M_{\mathcal{E}}:EL(V)\longrightarrow EL(n)$.

La proposición 1.1.4 , muestra que existe una única aplicación $M:EL(V)/\sim\ \longrightarrow EL(n)/\sim$ que hace conmutativo el diagrama

$$\begin{array}{ccc} EL(V) & \xrightarrow{M_{\mathcal{E}}} & EL(n) \\ \downarrow & & \downarrow \\ EL(V)/_{\sim} & \xrightarrow{M} & EL(n)/_{\sim} \end{array}$$

Además M es biyectiva e independiente de la base $\mathcal{E}$ elegida. Esto permite "reducir" el problema de clasificación de endomorfismos, al de clasificación por semejanza de matrices cuadradas.

3) En el espacio vectorial $V_n(K)$, despues de las identificaciones de 3.5.8, los conceptos de equivalencia lineal de endomorfismos, y de semejanza de matrices, coinciden.

1.1.7 Ejemplos

1) Sea π proyección vectorial de V con base U y dirección W . Respecto a la base $\mathcal{E}=(e_1,\dots,e_n)$ donde $U=\langle e_1,\dots,e_r\rangle$ y $W=\langle e_{r+1},\dots e_n\rangle$, la matriz de π es de la forma: $M_{\mathcal{E}}(\pi) = \mathrm{diag}(I(r),0)$ donde $I(r)\in GL(r)$ es la matriz identidad.

Esto permite afirmar, que dos proyecciones vectoriales respecto a bases con la misma dimensión, son linealmente equivalentes.

2) De forma análoga , todas las simetrías vectoriales respecto a bases r-dimensionales son linealmente equivalentes, pues admiten una representación matricial de la forma $\mathrm{diag}(I(r),-I(n-r))$.

3) Recíprocamente, si π (respectivamente σ) es proyección (simetría) son base U ,y $g\in GL(V)$, entonces $g^{-1}\pi\, g$ ($g^{-1}\sigma\, g$) es una proyección (simetría) con base $g^{-1}(U)$, y por tanto con la misma dimensión que U.

1.2 Invariantes lineales

1.2.1 Definición

Sea X un conjunto. Una aplicación $\Phi : FL(V)\longrightarrow X$ se llama invariante lineal (de FL(V)) si es compatible con la relación de equivalencia lineal de endomorfismos, es decir, si se verifica la propiedad:

$f\sim f' \Rightarrow \Phi(f)=\Phi(f')$ para $f,f'\in FL(V)$.

En particular, si $V=V_n$, un invariante lineal es una aplicación $\overline{\Phi} : FL(n)\longrightarrow X$ compatible con la relación de semejanza: $\overline{\Phi}(P^{-1}A\,P)=\overline{\Phi}(A)$ para $A\in EL(n)$ y $P\in GL(n)$.

1.2.2 Teorema

Sea $\Phi : EL(V)\longrightarrow X$ un invariante lineal, y $\mathcal{E}$ base de V. Existe entonces una única aplicación $\overline{\Phi} : EL(n)\longrightarrow X$ tal que $\overline{\Phi}.M_{\mathcal{E}}=\Phi$, y $\overline{\Phi}$ es un invariante lineal de EL(n) independiente de la base $\mathcal{E}$ de V utilizada para construirlo.

Recíprocamente, a partir de un invariante lineal $\bar{\bar{\Phi}} : EL(n) \longrightarrow X$, puede recuperarse $\bar{\Phi} : EL(V) \longrightarrow X$ invariante lineal de $FL(V)$ a través de una base $\mathcal{E}$ de V: $\bar{\Phi} = \bar{\bar{\Phi}} M_{\mathcal{E}}$, y $\bar{\Phi}$ es independiente de la base elegida.

Demostración:

La fórmula $\bar{\bar{\Phi}}.M_{\mathcal{E}} = \bar{\Phi}$ determina unívocamente $\bar{\bar{\Phi}}$ por la biyectividad de $M_{\mathcal{E}}$, es decir $\bar{\bar{\Phi}} = \bar{\Phi}.M_{\mathcal{E}}^{-1}$.

Si A y A'son matrices de $EL(n)$, y $A \sim A'$ podemos elegir $f, f' \in FL(V)$ con $M_{\mathcal{E}}(f) = A$ y $M_{\mathcal{E}}(f') = A'$. Por 1.1.4 es $f \sim f'$; así $\bar{\Phi}(f) = \bar{\Phi}(f')$ y $\bar{\bar{\Phi}} M_{\mathcal{E}}(f) = \bar{\bar{\Phi}} M_{\mathcal{E}}(f')$, por tanto $\bar{\bar{\Phi}}(A) = \bar{\bar{\Phi}}(A')$, y $\bar{\bar{\Phi}}$ es un invariante lineal en $EL(n)$.

Por otra parte, si $\mathcal{E}'$ es otra base de V y $f \in EL(V)$, por 1.1.3 $M_{\mathcal{E}}(f)$ y $M_{\mathcal{E}'}(f)$ son matrices semejantes, y $\bar{\bar{\Phi}} M_{\mathcal{E}}(f) = \bar{\bar{\Phi}} M_{\mathcal{E}'}(f)$.

El resto de la demostración es ya trivial.

1.2.3 Convenio

En la practica se denotan por el mismo símbolo (y nombre) a los invariantes lineales $\bar{\Phi}$ y $\bar{\bar{\Phi}}$.

1.2.4 Ejemplos

1) La aplicación determinante, $det: EL(n) \longrightarrow K$, verifica para $A \in EL(n)$ y $P \in GL(n)$ $det(P^{-1} A\ P) = (det\ P)^{-1} det\ A\ det\ P = det\ A$; es por tanto un invariante lineal, e induce la aplicación determinante $det: EL(V) \longrightarrow K$, invariante lineal de $FL(V)$. Observese que el determinante de un endomorfismo f, es el determinante de cualquiera de sus representaciones matriciales.

2) La aplicación rango $rg: EL(V) \ni f \longrightarrow rg(f) = dim(im\ f) \in N$, es un invariante lineal, ya que si $f \in EL(V)$ y $g \in GL(V)$, es $im(g^{-1} f\ g) = g^{-1}(im\ f)$, y por consiguiente , $rg(g^{-1} f\ g) = rg(f)$.

La aplicación $rg: EL(n) \longrightarrow N$ es justamente el rango usual de matrices, que es por tanto invariante lineal.

1.2.5 Definición

Un sistema de invariantes lineales ($\Phi_1, \ldots, \Phi_s$) de $EL(V)$ se dice completo, si si se verifica: $\Phi_i(f) = \Phi_i(f')$ para $i=1,\ldots,r \Rightarrow f \sim f'$ ($f, f' \in FL(V)$).

1.2.6

Resolver el problema de clasificación lineal de endomorfismos, significa en primera aproximación, establecer criterios que permitan decidir (en la práctica) cuando dos endomorfismos son linealmente equivalentes,y dar una descripción del conjunto cociente $EL(V)/\sim$.

De una forma más precisa, la resolución puede concretarse en los siguientes puntos:

1º) Dar una colección de modelos "sencillos" de matrices cuadradas - que denominamos matrices reducidas de Jordan- que representen todos los posibles tipos de semejanza, y un criterio practico para reconocer cuando dos de éstos modelos corresponden al mismo tipo.

2º) Establecer "reglas" que permitan deducir a partir de un endomorfismo f cualquiera, cual es su representación matricial reducida de Jordan.
Estas "reglas" se establecen a través de sistemas completos de invariantes. Los invariantes, deberían elegirse, a ser posible , accesibles desde el punto de vista practico.
Finalmente, aunque no es un detalle esencial para la resolución del problema, puede ser interesante, determinar a partir de un endomorfismo f dado, una base (denominada base de Jordan) respecto a la cual, f tenga la representación matricial reducida.

2. SUBESPACIOS INVARIANTES

Para alcanzar el primero de los objetivos expuestos en 1.2.6 , parece natural intentar encontrar representaciones matriciales de un endomorfismo f, cada vez más sencillas, en el sentido de que tengan el mayor número posible de ceros.
Una buena técnica para ésto, viene proporcionada por la determinación de subespacios invariantes. Un subespacio U de V se dice invariante respecto a un endomorfismo f, si $f(U)\subset U$. A partir de un subespacio U invariante r-dimensional, puede construirse una base $\mathcal{E}=(e_1,\dots,e_n)$ de forma que $U=\langle e_1,\dots e_r\rangle$, y la matriz $A=M_{\mathcal{E}}(f)$, es de la forma:

$$A=\begin{pmatrix} B & C \\ O & D \end{pmatrix}$$ donde: $B\in \mathrm{EL}(r)$, $D\in \mathrm{EL}(n-r)$, $C\in \mathrm{EL}(n-r,r)$, y O es la matriz nula de $\mathrm{EL}(r,n-r)$.

Mejor aún, si $V=U\oplus W$, con U y W subespacios invariantes, puede conseguirse a partir de una base $\mathcal{E}$ adaptada a U y W , una representación matricial A de f como la anterior, pero con B=O , es decir A=diag(B,D).

f denotará en todo el epígrafe 2 un endomorfismo lineal fijo del espacio vectorial V

2.1 Retículo de subespacios invariantes

2.1.1 Definición

Un subespacio vectorial U de V se dice f-invariante (ó simplemente, invariante, si se sobreentiende f) , si $f(U)\subset U$.

Si U es subespacio invariante, la aplicación $f_U : U \ni u \to f(u) \in U$ es un endomorfismo lineal de U, que se denomina endomorfismo restricción de f a U.

Se escribirá $U < V_f$ para indicar que U es subespacio invariante de V , y se denota por $\mathcal{S}L(V_f)$ a la familia de tales subespacios.

Observese que $\{0\}, V \in \mathcal{S}L(V_f)$.

2.1.2 Proposición

La familia $\mathcal{S}L(V_f)$ de subespacios invariantes, es un subretículo del retículo de subespacios de V , $\mathcal{S}L(V)$. Es decir, para $U<V_f$ y $W<V_f$, se verifica que $U+W<V_f$ y $U\cap W<V_f$.

La demostración es un sencillo ejercicio.

2.1.3 Ejemplos

1) Respecto a una homotecia vectorial, todos los subespacios son invariantes.

2) El núcleo ker f de un endomorfismo, es un subespacio f-invariante.

3) Cualquier subespacio vectorial contenido en la base ó dirección de una simetria (ó proyección) vectorial, es un subespacio invariante.

2.1.4 Observación

Si U es un subespacio f-invariante, y $W<U$, entonces W es f-invariante, si y solo si es f_U-invariante. Escribimos $W<U_f$ para indicar ésta situación.

2.2 Descomposición de endomorfismos

"Desgraciadamente" el retículo $\mathcal{S}L(V_f)$ de subespacios invariantes, no es complementado. Cuando un subespacio no nulo $U<V_f$ admite complementario, invariante se dice que el endomorfismo f se ha descompuesto. Precisemos ésta idea:

2.2.1 Definición

Sea $(U_1,\dots,U_r)$ un sistema de subespacios f-invariantes de V, y sea $f_i=f_{U_i}$.

Se escribe $f=f_1\oplus\dots\oplus f_r$, cuando se verifique $V=U_1\oplus\dots\oplus U_r$, y se dice que f se descompone en suma directa de $f_1,\dots,f_r$. También se escribe a veces $V_f=U_1\oplus\dots\oplus U_r$, para indicar esta circunstancia.

Se dice que la descomposición anterior es propia, si cada U_i es distinto de $\{0\}$

Se denominan triviales las descomposiciones de la forma $V_f=V\oplus 0$, $V_f=0\oplus V$.

2.2.2 Proposicion

Sean $f,g\in EL(V)$, y $(U_1,\ldots U_r)$ un sistema de subespacios f y g -invariantes.

Si $f_i=f_{U_i}$, $g_i=g_{U_i}$, y $V= U_1 \oplus \ldots \oplus U_r$, entonces:

i) $\lambda f+\mu g= (\lambda f_1+\mu g_1) + \ldots +(\lambda f_r+\mu g_r)$ para todo $\lambda ,\mu \in K$.

ii) $g.f=g_1.f_1 + \ldots +g_r f_r$

Demostración:

Es claro que cada U_i es $(\lambda f+\mu g)$-invariante. Además

$(\lambda f+\mu g)_{U_i} : U_i \ni u \mapsto (\lambda f+\mu g)(u)=\lambda f_i(u)+\mu g_i(u)\in U_i$.

La demostración de ii) es análoga.

2.2.3 Proposición

Supongase $V_f=U_1 \oplus \ldots \oplus U_r$, $f_i=f_{U_i}$, y sea $\mathcal{E}_i$ base para U_i , $M_{\mathcal{E}_i}(f_i)=A_i$.

Considerese la base $\mathcal{E} = \mathcal{E}_1 \cup \ldots \cup \mathcal{E}_r$ de V. Entonces:

i) $M_{\mathcal{E}}(f)=diag(A_1,\ldots,A_r)$

ii) $\det f = \det f_1 \cdot \ldots \cdot \det f_r$

iii) $rg\ f = rg\ f_1+\ldots+rg\ f_r$

Demostración

i) es consecuencia de que la imagen por f de cada elemento de $\mathcal{E}_i$, se escribe como combinación lineal del sistema $\mathcal{E}_i$.

Para probar ii) y iii) basta calcular det f y rg f, utilizando la representación matricial de f obtenida en i).

2.2.4 Ejemplo

Si f es una simetría vectorial de base U y dirección W , se verifica $V_f=U\oplus W$, y $f_U=id:U\to U$, $f_W= -id:W\to W$.

2.2.4 Definición

El endomorfismo f se dice irreducible,si no admite descomposición (no trivial).

Un subespacio invariante U de V , se dice irreducible si f_U es irreducible.

Finalmente una descomposición (propia) $V_f=U_1 \oplus\ldots\oplus U_r$ se dice irreducible, si cada subespacio U_i , es irreducible.

2.2.5 Comentario

Por un evidente proceso inductivo,se prueba que todo endomorfismo admite una descomposición irreducible. Este resultado es trivial, y no aporta gran cosa, así enunciado, a la resolución del problema de clasificación.

lo que si interesa desde este punto de vista, es establecer métodos generales de descomposición de endomorfismos, que permitan obtener descomposiciones irreducibles,"controladas" por la teoría de invariantes

2.3 Determinación de rectas invariantes. Polinomio caracteristico

La determinación de rectas invariantes, está obviamente relacionada, con la obtención de soluciones en λ y v de la ecuación $f(v)=\lambda v$.

2.3.1 Definición

Un escalar $\lambda \in K$, se llama autovalor del endomorfismo f de V, si existe $v \in V-\{0\}$ tal que $f(v)=\lambda v$. Se dice entonces que v es autovector asociado al autovalor .

2.3.2 Proposición

Sea $\lambda \in K$. Son equivalentes las siguientes afirmaciones:

i) λ es autovalor de f

ii) $\ker(f-\lambda\, id) \neq 0$

iii) $\det(f-\lambda\, id)=0$ (ó bién $\det(\lambda\, id-f)=0$)

La demostración no ofrece dificultades.

2.3.3 Definición

Si $\lambda \in K$ es autovalor de f, se denota $V(\lambda)=\ker(f-\lambda\, id)$, y se denomina autoespacio asociado a λ.

2.3.4 Observación

Nótese que $V(\lambda)$ está formado pro todos los autovectores asociados a λ y el vector nulo. El autoespacio $V(\lambda)$ es invariante, y $f_{V(\lambda)} \in FL(V(\lambda))$ es una homotécia vectorial de razón λ. Por tanto todos los subespacios de $V(\lambda)$ son invariantes,

2.3.5 Ejemplo

Una simetría vectorial, $f \neq \pm\, id$, tiene exactamente dos autovalores $\lambda=1$, y $\lambda=-1$. $V(1)$ es la base de la simetría, y $V(-1)$ es la dirección

La equivalencia i)$\Leftrightarrow$ iii) de 2.3.2 sugiere el siguiente procedimiento de calculo de autovalores

2.3.6 Teorema (Polinomio caracteristico)

i) La función $\chi_f: K \ni \lambda \longmapsto \det(\lambda\, id-f) \in K$, es una función polinómica de grado $n=\dim V$. Se denomina a $\chi_f(t) \in K[t]$ polinómio caracteristico de f.

ii) El conjunto de autovalores de f, coincide con el conjunto de raices del polinomio caracteristico χ_f en K

Demostración:

i) El determinante del endomorfismo $\lambda\, id-f$, puede calcularse a partir de cualquiera de sus representaciones matriciales. Si $\mathcal{E}$ es base de V y $M_{\mathcal{E}}(f)=A \in FL(n)$, entonces $M_{\mathcal{E}}(\lambda\, id-f)=\lambda I-A$, y $\det(\lambda\, id-f)=\det(\lambda I-A)$. Así pues el polinómio $\chi_f(t)$, se escribe de la forma:

$$\det\begin{pmatrix} t-a_{11}, & -a_{12},\dots,-a_{1n} \\ \vdots & \vdots \quad \vdots \\ -a_{n1}, & -a_{n2},\dots,t-a_{nn} \end{pmatrix}$$

que es claramente un polinómio de grado igual a n.

La afirmación ii) es inmediata a partir de 2.3.2

2.3.7 Corolario

La aplicación $\chi: EL(V) \to \chi_f \in K[t]$, es un invariante lineal.

Demostración:

Si $f \in EL(V)$ y $g \in GL(V)$, es $\lambda id-(g^{-1}f\ g)= g^{-1}(\lambda id-f)\ g$, y ambos endomorfismos tienen el mismo determinante, para todo $\lambda \in K$.

2.3.8 Observaciones

1)La aplicación $\chi_A : EL(n) \ni A \longmapsto \chi_A(t)=\det(tI-A) \in K[t]$, es un invariante. Si $f \in FL(V)$, es $\chi_f = \chi_A$, para cualquier representación matricial A de f.

2) El polinomio característico define de hecho un sistema de n-1 invariantes no triviales,que son los coeficientes de t^k (k=0,...,n-1) de dicho polinomio.

Si $A=(a_{ij}) \in EL(n)$, se prueba (por inducción sobre n) que el polinomio χ_A es de la forma $\chi_A = t^n-(a_{11}+\dots+a_{nn})t^{n-1}+\dots+(-1)^n \det A$. Así la aplicación traza $tr: EL(n) \ni A \longrightarrow \sum_{i=1}^{n} a_{ii} \in K$, es un invariante.

Si n=2, podemos escribir $\chi_A(t)=t^2-(tr\ A)t+\det A$.

2.3.9 Teorema

Dada una descomposición proppia del endomorfismo f, $f=f_1 \oplus \dots \oplus f_r$, entonces

$\chi_f = \chi_{f_1} \cdots \chi_{f_r}$.

Demostración:

Utilizando 2.2.2 y 2.2.3, es $id-f=(\lambda id-f_1) \oplus \dots \oplus (\lambda id-f_r)$ $(\lambda \in K)$ y $\det(\lambda id-f)=\det(\lambda id-f_1)\dots\det(\lambda id-f_r)$, y de aquí se deduce el resultado.

2.4 Endomorfismos diagonalizables

Un endomorfismo f de V se dice diagonalizable, si admite una representación matricial de la forma $diag(\lambda_1,\dots,\lambda_n)$ con $\lambda_i \in K$. Esto significa, que existe una base formada por autovectores de f, ó también, que V se descompone en suma directa de autoespacios

2.4.1 Teorema

Sean $\lambda_1,\dots,\lambda_r$ autovalores distintos del endomorfismo f. Si $U=V(\lambda_1)+\dots+V(\lambda_r)$ entonces se verifica $U= V(\lambda_1) \oplus \dots \oplus V(\lambda_r)$.

Demostración:

Es suficiente probar (por 4.6.2 Cap 1) que si $v_i \in V(\lambda_i)-\{0\}$, $i=1,\dots,r$, entonces el sistema $(v_1,\dots v_r)$ es l.i. :

El resultado es trivialmente cierto para r=1. Supóngase cierto para menos de r autoespacios $(r>1)$: Si $\sum_{i=1}^{r}\mu_i v_i=0$, $v_i \in V(\lambda_i)-\{0\}$, aplicando f a los dos miembros queda $\sum_{i=1}^{r}\mu_i\lambda_i v_i=0$, y se tiene: $0=\sum_{i=1}^{r}\mu_i\lambda_i v_i - \lambda_1(\sum_{i=1}^{r}\mu_i v_i) = \sum_{i=2}^{r}\mu_i(\lambda_i-\lambda_1)v_i$. Por la hipotesis de inducción es $\mu_i(\lambda_i-\lambda_1)=0$, para $i=2,\dots,r$. Como $\lambda_i-\lambda_1\neq 0$, es $\mu_i=0$ $i=2,\dots,r$. Automáticamente, μ_1 también es un escalar nulo.

2.4.2 Corolario

La condición necesária y suficiente para que el endomorfismo $f\in EL(V)$ sea diagonalizable, es que su polinómio caracteristico $\chi_f(t)$ se descomponga en producto de factores lineales de $K[t]$, y para cada $\lambda\in K$ raiz de $\chi_f(t)$ con multiplicidad m, sea $\dim V(\lambda)=m$.

Demostración

Supóngase $\chi_f(t)=(t-\lambda_1)^m\dots(t-\lambda_r)^m$ siendo $\lambda_1,\dots,\lambda_r$ las r raices distintas de χ_f.

Si $\dim V(\lambda_i)=m_i$ $(i=1,\dots,r)$, tomando $\mathcal{E}_i$ base de $V(\lambda_i)$, es $\mathcal{E}=\mathcal{E}_1\cup\dots\cup\mathcal{E}_r$ base de $V(\lambda_1)\oplus\dots\oplus V(\lambda_r)$, formada por $m_1+\dots+m_r=n$ autovectores. Por tanto la suma de los autoespacios coincide con V , y $M_{\mathcal{E}}(f)$ es matriz diagonal.

Recíprocamente, si $\mathcal{E}=(e_1,\dots,e_n)$ es una base de V formada por autovectores de f, podemos ordenarla convenientemente de forma que

$M_{\mathcal{E}}(f)=\mathrm{diag}(\lambda_1,\overset{m_1)}{\dots},\lambda_1,\dots,\lambda_r,\overset{m_r)}{\dots},\lambda_r)$ $\lambda_i\neq\lambda_j$ para $i\neq j$, y por tanto $\chi_f(t)=(t-\lambda_1)^{m_1}\dots(t-\lambda_r)^{m_r}$. En cada $V(\lambda_i)$ existen m_i vectores de la base $\mathcal{E}_i$, y por tanto $\dim V(\lambda_i)\geq m_i$, y se tiene entonces:

$n\geq \dim(V(\lambda_1)\oplus\dots\oplus V(\lambda_r))=\dim V(\lambda_1)+\dots+\dim V(\lambda_r)\geq m_1+\dots+m_r=n.$

De aquí se concluye que cada $V(\lambda_i)$ tiene exactamente dimensión m_i.

3. PRIMER TEOREMA DE DESCOMPOSICION: SUBESPACIOS CARACTERISTICOS

Se establecera un procedimiento standar de descomposición de un endomorfismo f a partir de la descomposición en factores primos de polinomios K t que anulan a f. La determinación de tales polinomios constituye el primer objetivo de éste apartado.

Se supondra fijado un endomorfismo f en el espacio vectorial V.

3.1 Polinomios anuladores. Polinomio minimo

Si $\varphi(t)= a_0+a_1t+\dots+a_mt^m\in K[t]$, la sustitución formal de t por el endomorfismo f en φ, $a_0id+a_1f+\dots+a_mf^m$, da lugar a un endomorfismo $\varphi(f)=\sum_{i=0}^{m} a_if^i$ $(f^0=id)$

3.1.1 Proposición

La aplicación "t=f": $K[t]\ni\varphi(t)\longrightarrow\varphi(f)\in FL(V)$, verifica las siguientes propiedades para todo $\varphi,\psi\in K[t]$:

i) $(\varphi+\psi)(f)=\varphi(f)+\psi(f)$

ii) $(\varphi\psi)(f)=\varphi(f).\psi(f)$

La demostración es inmediata

3.1.2 Notacion

Cuando se sobreentiende el endomorfismo f, se conviene en escribir , para $\varphi\in K[t]$ y $v\in V$, $\varphi v=\varphi(f)(v)$

3.1.3 Comentario

Para todo $\varphi,\psi\in K[t]$ y todo $u,v\in V$ se verifica:

M1) $\varphi(u+v)=\varphi u+\varphi v$

M2) $(\varphi+\psi)v=\varphi v+\psi v$

M3) $(\varphi\psi)v=\varphi(\psi v)$

M4) $1v=v$

Estas propiedades -análogas a las de espacio vectorial- establecen por definición una estructura de $K[t]$ -módulo para el grupo $(V,+)$ que depende del endomorfismo (sobreentendido) f, y que denotamos por V_f.

3.1.4 Proposición

Si $U<V$ es un subespacio invariante de f, y $\varphi\in K[t]$ entonces

i) U es subespacio invariante para $\varphi(f)$

ii) ker $\varphi(f)$ y im $\varphi(f)$ son subespacios f-invariantes

iii) $\varphi(f_U)=\varphi(f)_U$

iv) si $f=f_1\oplus\dots\oplus f_r$ entonces $\varphi(f)=\varphi(f_1)+\dots+\varphi(f_r)$

Demostración

i) Si $\varphi(t)=a_o+a_1t+\dots+a_mt^m$, entonces para todo $u\in U$, es $\varphi(f)(u)=a_ou+a_1f(u)+\dots+a_mf^m(u)$. Como $f^k(u)\in U$ para $k\in N$, se concluye que $\varphi(f)(u)\in U$.

ii) Si $u\in\ker\varphi(f)$, entonces $\varphi(f)(f(u))=\varphi(tu)=t(\varphi u)=t0=0$, y $f(u)\in\ker\varphi(f)$. de forma análoga se prueba que im $\varphi(f)$ es f-invariante.

iii) y iv) son inmediatas.

3.1.5 Comentarios

Un submódulo del $K[t]$-módulo V_f es un subconjunto U de V tal que para todo $u,v\in U$, se verifica $u+v\in U$, y para todo $\varphi\in K[t]$, es $\varphi v\in U$.

La afirmación i) de 3.1.4 prueba que los subespacios f-invariantes de V son justamente los submódulos de V_f. La notación "$U<V_f$" es pues consistente con este hecho.

3.1.6 Definición

Sea S un subconjunto de V. Se denomina anulador (respecto a f) de S, al subconjunto $An_f(S)=\{\varphi\in K[t]\ /\ \varphi v=0\ ,\forall v\in S\}$. Un polinomio $\varphi\in An_f(S)$, se dice que anula a S. Un polinomio φ que anula a V, se dice que anula a f.

3.1.7 Teorema

i) Si $S\subset V$, entonces $An_f(S)$ es un ideal de $K[t]$, y $An_f(S)=An_f(\langle S\rangle)$

ii) Si $T\subset S\subset V$, entonces $An_f(T)\supset An_f(S)$

iii) Si $(U_1,\dots,U_r)$ es una familia de subespacios de V, entonces $An_f(\sum_{i=1}^{r}U_i)=\bigcap_{i=1}^{r}An_f(U_i)$

iv) $An_f(V)$ es un ideal no trivial de $K[t]$.

v) Si $U<V_f$, entonces $An_{f_U}(U)=An_f(U)$

Demostracion:

Las afirmaciones i) y ii) son bastante evidentes. Probemos iii):

Sea $U=\sum_{i=1}^{r}U_i$. Como $U\supset U_i$, por ii) es $An_f(U)\subset An_f(U_i)$ para $i=1,\dots,r$, en consecuencia, $An_f(U)\subset\bigcap_{i=1}^{r}An_f(U_i)$.

Por otra parte, si $\varphi\in\bigcap_{i=1}^{r}An_f(U_i)$ y $u=u_1+\dots u_r\in U$ $(u_i\in U_i)$, entonces $\varphi u_i=0$ para $i=1,\dots,r$, y $\varphi u=\varphi u_1+\dots+\varphi u_r=0$. Así, $\varphi\in An_f(U)$.

iv): Dado un vector $v\in V-\{0\}$, existe un polinomio no nulo $\varphi\in K[t]-\{0\}$ tal que $\varphi v=0$. En efecto, el sistema $(v,tv,\dots,t^kv)$ es l.d para k suficientemente grande (pues V es de dimension finita), y existen $(\lambda_0,\dots,\lambda_k)\neq(0,\dots,0)$ tal que $\lambda_0v+\lambda_1tv+\dots+\lambda_kt^kv=(\lambda_0+\lambda_1t+\dots+\lambda_kt^k)v=0$.

Construyendo de forma análoga un polinomio $\varphi_i\in K[t]-\{0\}$, para cada uno de los vectores e_i de una base $\mathcal{E}=(e_1,\dots,e_n)$ de V, se concluye que $\varphi=\varphi_1\dots\varphi_r$, es un polinomio no nulo de $\bigcap_{i=1}^{r} An_f(e_i)=An_f(\langle e_1\rangle+\ldots+\langle e_n\rangle)=An_f(V)$. Así $An_f(V)\neq\{0\}$, y obviamente , $An_f(V)\neq K[t]$, ya que el polinómio constante 1 , no anula a V.

3.1.8 Definición (Proposición)

Fijado $S\subset V$, $S\neq\emptyset$, existe un único polinomio mónico $\phi_S\in K[t]$, tal que: $An_f(S)=K[t]\,\phi_S$. Se denomina a ϕ_S , polinomio mínimo anulador de S

Demostración: Es consecuencia de i) de 3.1.7 , y de ser $K[t]$ un anillo principal.

3.2 Polinomio minimo

3.2.1 Definición

Se denomina polinomio mínimo del endomorfismo f de V, ϕ_f , al polinómio mínimo anulador de V, ϕ_V .

3.2.2 Observaciones

1) Nótese que ϕ_f es el único polinomio mónico que verifica la propiedad: $\varphi\in K[t]$, $\varphi(f)=0\Leftrightarrow\varphi\in K[t]\,\phi_f$.

2) Si U es subespacio invariante de V , entonces $\phi_U=\phi_{f_U}$.

La siguiente proposición permite establecer invariantes lineales del tipo que se utilizarán para resolver el problema de clasificación de endomorfismos:

3.2.3 Proposición

Dado $\varphi\in K[t]$, $f\in EL(V)$ y $g\in GL(V)$, se verifica : $\varphi(g^{-1}f\cdot g)=g^{-1}\varphi(f)\cdot g$.

Demostración

Basta tener en cuenta que $\lambda(g^{-1}f\,g)=g^{-1}(\lambda f)\,g$, y que para todo $k\in N$ es $(g^{-1}f\,g)^k=g^{-1}f^k g$, pues así , si $\varphi(t)=\sum_{i=0}^{m}a_i t^i$, es $\varphi(g^{-1}f\,g)=\sum_{i=0}^{m}a_i(g^{-1}f\,g)^i=$
$=\sum_{i=0}^{m}a_i(g^{-1}f^i g)=\sum_{i=0}^{m}g^{-1}(a_i f^i)g=\ g^{-1}\varphi(f)\ g$.

3.2.4 Corolario

Sea $\xi\in K[t]$. Entonces:

i) La aplicación $\phi:\ EL(V)\ni f\longmapsto\phi_f\ \ K[t]$, es invariante lineal

ii) La aplicación $\rho_\xi:\ EL(V)\ni f\longmapsto rg(\xi(f))\in N$ es invariante lineal

Demostración

i) Es suficiente probar que $An_{g^{-1}f\,g}(V)=An_f(V)$:
$\varphi\in An_{g^{-1}fg}(V)\Leftrightarrow\varphi(g^{-1}f\,g)=g^{-1}\varphi(f)\,g=0\Leftrightarrow\varphi(f)=0\Leftrightarrow\varphi\in An_f(V)$.

ii) Como los endomorfismos $\xi(f)$ y $\xi(g^{-1}fg)=g^{-1}\xi(f)g$, son linealmente equivalentes, tienen el mismo rango.

3.2.5 Ejemplos

1) Si h es una homotecia vectorial de razón $\lambda\in K$, su polinomio mínimo es $\phi_h(t)=t-\lambda$.

2) El polinomio mínimo de una simetría $\sigma \neq \pm id$, es $\phi_\sigma(t)=(t-1)(t+1)$, pues $\sigma^2 = id$.

3) El polinomio mínimo de una proyección $\Pi \neq 0$, es $\phi_\Pi(t)=t^2-t$, ya que $\Pi^2=\Pi$.

3.2.6 Teorema

Sea $f=f_1 \oplus \dots \oplus f_r$ una descomposición própia del endomorfismo f. Entonces $\phi_f = m.c.m\,(\phi_{f_1},\dots,\phi_{f_r})$.

Demostración:

Sea U_i el dominio de definición de f_i. Entonces $V_f=U_1 \oplus \dots \oplus U_r$, y $\phi_{U_i} = \phi_{f_i}$.

Por 3.1.7 iii) se tiene:

$K[t]\,\phi_f = An_f(V) = \bigcap_{i=1}^{r} An_f(U_i) = \bigcap_{i=1}^{r} K[t]\,\phi_{f_i}$, de donde $\phi_f=m.c.m(\phi_{f_1},\dots,\phi_{f_r})$.

Tomando $V = V_n$ en la definición 3.2.1 , se deduce que el polinomio mínimo de una matriz $A \in FL(n)$ es el polinomio mónico de grado mínimo tal que $\phi_A(A)= 0$, y se verifica: $\{\varphi \in K[t] / \varphi(A) = 0\} = K[t]\,\phi_A$.

3.2.7 Proposicion

Sea $A \in FL(n)$ una representación matricial cualquiera del endomorfismo f, y sea $\xi \in K[t]$. Entonces:

i) $\phi_f = \phi_A$

ii) rg $\xi(f)$= rg $\xi(A)$.

Demostración:

Si $\mathcal{E}$ es base de V, la aplicación $M_\varepsilon : FL(V) \rightarrow FL(n)$ es isomorfismo de algebras, y por tanto $\varphi(M_\varepsilon(f))= M_\varepsilon(\varphi(f))$, para todo $\varphi \in K[t]$. Así, $\{\varphi \in K[t] / \varphi(f)=0\} = \{\varphi \in K\,t / \varphi(A)=0\}$.

La afirmación ii) es ahora inmediata.

3.3. Primer teorema de descomposición

Veremos que la descomposición en factores primos del polinomio mínimo, induce una descomposición canónica del espacio vectorial V en suma directa de subespacios invariantes, denominados subespacios caracteristicos del endomorfismo.

3.3.1 Teorema

Sea $\varphi \in K[t]$, tal que $\varphi(f)=0$. Supóngase $\varphi = \varphi_1 \cdots \varphi_r$, y sea $\xi_i = \varphi / \varphi_i$. Entonces , si m.c.d $(\xi_1,\dots,\xi_r)= 1$, se verifica:

$V_f = \ker \varphi_1(f) \oplus \dots \oplus \ker \varphi_r(f)$.

Demostración:

Como m.c.d $(\xi_1,\dots,\xi_r) = 1$, existen polinomios $\zeta_i \in K[t]$, tales que:

$\zeta_1\xi_1+\dots+\zeta_r\xi_r=1$. Sea $\Pi_i=(\zeta_i\xi_i)(f)$, $i=1,\dots,r$. Para demostrar el teorema, es suficiente comprobar que $(\Pi_1,\dots,\Pi_r)$ es el sistema de proyecciones asociado a una descomposición de V en suma directa de subespacios (véase 4.6.3 Cap 1), y que esta descomposición es justamente la del enunciado. En efecto:

De la igualdad $\sum_{i=1}^{r}\zeta_i\xi_i=1$ se deduce que $\Pi_1+\dots+\Pi_r=\mathrm{id}$.

Por otra parte, el producto $\xi_i\zeta_j$ $(i\neq j)$ es multiplo de φ y en consecuencia, $(\xi_i\zeta_j)(f)=0$. En particular $\Pi_i\Pi_j=(\zeta_i\zeta_j\xi_i\xi_j)(f)=0$.

Finalmente, fijado el indice i, se tiene: $1-\zeta_i\xi_i=\sum_{j\neq i}\zeta_j\xi_j$, y así $\zeta_i\xi_i(1-\zeta_i\xi_i)=\sum_{j\neq i}\zeta_i\zeta_j\xi_i\xi_j$ es múltiplo de φ , y por cosiguiente, $\Pi_i(1-\Pi_i)=0$, es decir, $\Pi_i^2=\Pi_i$. Aplicando 4.6.3 (Cap. 1), se concluye que $(\Pi_1,\dots,\Pi_r)$ es el sistema de proyecciones asociado a la descomposición: $V=\mathrm{im}\,\Pi_1\oplus\dots\oplus\mathrm{im}\,\Pi_r$. Queda probar , que $\mathrm{im}\,\Pi_i=\ker\varphi_i(f)$:

El producto $\varphi_i\xi_i$ es múltiplo de φ , por tanto $\varphi_i\xi_i(f)=0$. Esto prueba que $\varphi_i(f)(\Pi_i(v))=(\zeta_i\xi_i\varphi_i)(f)(v)=0$, y $\Pi_i(v)\in\ker\varphi_i(f)$, para cada $v\in V$, es decir , $\mathrm{im}\,\Pi_i\subset\mathrm{Ker}\,\varphi_i(f)$.

Recíprocamente, si $u\in\ker\varphi_i(f)$, es $\varphi_i u=0$, y $u-\Pi_i(u)=(1-\zeta_i\xi_i)u=(\sum_{j\neq i}\zeta_j\xi_j)u=0$, pues cada ξ_j $j\neq i$ es múltiplo de φ_i . Así $\Pi_i(u)=u\in\mathrm{im}\,\Pi_i$.

Observese finalmente que por la proposición 3.1.4 , cada subespacio $\ker\varphi_i(f)$ es invariante.

3.2.2 Corolario

Sea $\varphi\in K[t]$. Entonces:

i) Si $\varphi=\varphi_1\varphi_2$, m.c.d $(\varphi_1,\varphi_2)=1$, y $\varphi(f)=0$, entonces:

$$V_f=\ker\varphi_1(f)\oplus\ker\varphi_2(f).$$

ii) Si m.c.d $(\varphi,\phi_f)=1$, entonces $\varphi(f):V\to V$ es isomorfismo lineal.

Demostración:

i) es consecuencia inmediata del teorema.

Para probar ii), observese que el polinomio $\psi=\varphi\,\phi_f$, verifica $\psi(f)=0$, y m.c.d $(\varphi,\phi_f)=1$, aplicando i) queda $V_f=\ker\varphi+\ker\phi_f$, como $\ker\phi_f=V$ es, ker $\varphi(f)=0$.

3.2.3 Corolario

Supongase el polinomio mínimo de f , $\phi_f = p_1^{m_1} \dots p_r^{m_r}$ descompuesto en factores primos ($p_i \neq p_j$, si $i \neq j$). Se tiene entonces : $V_f = U_1 \oplus \dots \oplus U_r$, donde $U_i = \ker p_i^m(f)$ $i = 1,\dots,r$, además $\phi_{f_i} = p_i^{m_i}$, siendo $f_i = f_{U_i}$.

Demostración:

Los polinomios $\xi_i = \phi_f / p_i^{m_i} = \prod_{j \neq i} p_j^{m_j}$, no tienen divisores primos comunes,y por tanto, m.c.d $(\xi_1,\dots,\xi_r) = 1$. Apliquese ahora el teorema 3.2.1 , para obtener la descomposición pedida.

Probemos que $\phi_{f_i} = p_i^m$: Como $p_i^{m_i}(f_i) = p_i^{m_i}(f)_{U_i} = 0$, se deduce que $p_i^m \in K[t]\phi_{f_i}$, y por tanto existe $\xi_i \in K[t]$ con $p_i^{m_i} = \xi_i \phi_{f_i}$, pero como p_i es polinomio primo necesáriamente es $\phi_{f_i} = p_i^{n_i}$ para cierto $n_i \leq m_i$.

Por 3.2.6 , es $\phi_f = p_1^{m_1} \dots p_r^{m_r} = \text{m.c.m.}(p_1^{n_1},\dots,p_r^{n_r}) = p_1^{n_1} \dots p_r^{n_r}$, y por tanto $n_i = m_i$, para $i = 1,\dots,r$.

Observese que la descomposición es propia (es decir , cada U_i es distinto de $\{0\}$)

3.2.4 Definición.

Sea $p \in K[t]$ un divisor primo del polinomio mínimo ϕ_f. Se denomina subespacio caracteristico (de f) asociado a p, al subconjunto $V_p = \bigcup_{k \in N} \ker p^k(f) = \{ v \in V / \exists k \in N \text{ con } p^k v = 0 \}$.

3.2.5 Teorema.

i) Si p es un divisor primo de ϕ_f con multiplicidad m ($m \geq 1$), entonces: $V_p = \ker p^m(f)$. En particular V_p es invariante.

ii) V se descompone en suma directa de todos los subespacios caracteristicos, es decir, $V_f = V_{p_1} \oplus_f \dots \oplus_f V_{p_r}$ donde $(p_1,\dots,p_r)$ es el sistema de divisores primos de ϕ_f.

Demostración:

La afirmación ii) es evidente a partir de i) y 3.2.3.

Para probar i), escribamos $\phi_f = p^m \cdot \varphi$; como p no es factor primo de φ , se verifica m.c.d.$(p^k, \varphi) = 1$ para todo $k \in N$. Por 3.2.2 , es $V_f = \ker p^m(f) \oplus \ker \varphi(f)$

Si $k \leq m$ evidentemente se verifica $\ker p^k(f) \leq \ker p^m(f)$.

Si $k \geq m$, el polinomio $p^k \varphi$ anula a f, y por 3.2.2 se verifica $V_f = \ker p^k(f) \oplus_f \ker \varphi(f)$, y por consiguiente $\dim(\ker p^k(f)) = n - \dim \ker \varphi(f) = \dim(\ker p^m(f))$.

Como $\ker p^k(f) \supset \ker p^m(f)$, se tiene la igualdad $\ker p^m(f) = \ker p^k(f)$.

Se tiene así la siguiente cadena de contenidos:

(1): $\{0\} \subset \ker p(f) \subset \ldots \subset \ker p^{m}(f) = \ker p^{m+1}(f) = \ldots$,

y $V_p = \bigcup_{k \in N} \ker p^{k}(f) = \ker p^{m}(f)$.

3.2.6 Corolario

El orden de multiplicidad m de un divisor primo p de ϕ_f , es el entero positivo que verifica la propiedad: $\{0\} \subsetneq \ker p(f) \subsetneq \ldots \subsetneq \ker p^{m}(f) = \ker p^{m+1}(f) = \ldots$

Demostración:

Por la demostración del teorema anterior, se sabe que:

$\{0\} \subset \ker p(f) \subset \ldots \subset \ker p^{m}(f) = \ker p^{m+1}(f) = \ldots$.

Como p^m es el polinomio minimo de V_p (teorema 3.2.3) se concluye que $\ker p^{k}(f) \subsetneq \ker p^{m}(f)$, para $k < m$.

El resultado se deduce ahora inmediatamente del siguiente lema:

Lema

Si $g \in FL(V)$, y $\ker g^{r} = \ker g^{r+1}$, entonces $\ker g^{r} = \ker g^{r+s}$ para todo $s \in N$.

Demostración:

Supóngase $\ker g^{r} = \ker g^{r+1}$, entonces:

$v \in \ker g^{r+2} \Rightarrow g(v) \Rightarrow \operatorname{Ker} g^{r+1} = \ker g^{r} \Rightarrow g^{r}(g(v)) = 0 \Rightarrow v \in \ker g^{r+1}$

y por tanto se verifica la igualdad $\ker g^{r+1} = \ker g^{r+2}$.

El resultado se sigue por inducción.

3.2.7 Proposición

Si U es un subespacio f-invariante irreducible , entonces U está contenido en algún subespacio caracteristico.

Demostración:

En efecto: Si U es subespacio invariante irreducible, el polinómio mínimo de f_U es por 3.2.2 de la forma $\phi_{f_U} = \phi_U = p^{k}$, donde p es un polinomio primo , por tanto $U \subset \ker p^{k}(f) \subset V_p$.

3.3 Teorema de Hamilton-Cayley.

El teorema establece que el polinomio caracteristico χ_f anula el endomorfismo f. La prueba se efectuará en principio bajo la hipótesis de que el cuerpo base K es algebraicamente cerrado (es decir, todo polinomio de $K[t]$, se descompone en factores del tipo $(t-\lambda_i)^{m_i}$) Para probarlo en el caso general se debe admitir el resultado que asegura la existencia de cierre algebraico para un cuerpo K; esto significa que dado el cuerpo K, existe un cuerpo $\tilde{K}$ que contiene a K como subcuerpo, y que es algebraicamente cerrado. Por ejemplo, el cuerpo R de los números reales admite a $\mathbb{C}$ cuerpo de los complejos como cierre algebraico. Los ledtores no familiarizados con éstos temas pueden suponer implicitamente que el cuerpo K base es R, $\mathbb{C}$ ó el cuerpo Q de los números racionales.

Más adelante se establecerá otra prueba del teorema que no utiliza la teoria de extensiones algebraicas.

3.3.1 Teorema.

Si $\phi_f(t)=(t-\lambda)^m$, entonces λ es el único autovalor de f, y $m\leq n=\dim V$. En particular, si K es algebraicamente cerrado $\chi_f(t)=(t-\lambda)^n$, y $\chi_f(f)=0$.

Demostración:

Como $(f-\lambda id)^m=0$ se verifica, det $(f-\lambda id)^m=(\det(f-\lambda id))^m=0$ y $\det(f-\lambda id)=0$, así λ es autovalor de f.

Si $\mu\in K$ es autovalor de f y $v\in V-0$ es autovector asociado a μ, se verifica: $f(v)=\mu v$, $(f-\lambda id)v=(\mu-\lambda)v,\ldots$ y en general $(f-\lambda id)^k v=(\mu-\lambda)^k v$. Como $(f-\lambda id)^m=0$ se concluye $(\lambda-\mu)^m=0$, es decir $\lambda=\mu$.

Probemos que $m\leq n$, construyendo en V un sistema de m vectores l.i.. Se sabe que $(f-\lambda id)^{m-1}\neq 0$, y por tanto existe $v\in V$ con $(f-\lambda id)^{m-1}v\neq 0$ y $(f-\lambda id)^m v=0$. El sistema $(v,(f-\lambda id)v,\ldots,(f-\lambda id)^{m-1}v)$ es l.i. como consecuencia del siguiente lema.

3.3.2 Lema.

Sea $g\in EL(V)$, $v\in V$ y $m\in N$ tales que $g^{m-1}v\neq 0$ $g^m v=0$; entonces el sistema $(v,g(v),\ldots,g^{m-1}(v))$ es l.i. .

Demostración:

El resultado es cierto para m=1.

Si $\lambda_0 v + \lambda_1 g(v) + \ldots + \lambda_{m-1} g^{m-1}(v) = 0$ aplicando g a los dos miembros queda $\lambda_0 g(v) + \lambda_1 g(g(v)) + \ldots + \lambda_{m-2} g^{m-2}(g(v)) = 0$ y por la hipótesis de inducción $(g(v),\ldots,g^{m-2}(v))$ es l.i. luego $\lambda_0 = \lambda_1 = \ldots = \lambda_{m-2} = 0$. Automaticamente, $\lambda_{m-1} = 0$.

3.3.3 Corolario.

Supongase K algebraicamente cerrado y $\phi_f = (t-\lambda_1)^{m_1}\ldots(t-\lambda_r)^{m_r}$ siendo $\lambda_1,\ldots,\lambda_r$ las r raices distintas de ϕ_f; entonces es $\chi_f(t) = (t-\lambda_1)^{n_1}\ldots(t-\lambda_r)^{n_r}$ con $n_i \geqslant m_i$ para $i=1,\ldots,r$. En particular, χ_f es múltiplo de ϕ_f, y por consiguiente $\chi_f(f) = \sigma_c$.

Demostración:

Si V_{λ_i} es el subespacio caracteristico asociado a $(t-\lambda_i)$, por 3.2.5 se verifica $V_f = V_{\lambda_1} \oplus \ldots \oplus V_{\lambda_r}$ y $\phi_{f_i} = (t- \ _i)^{m_i}$, donde $f_i = f_{V_{\lambda_i}}$. Por 3.3.1 se concluye que $\chi_{f_i}(t) = (t-\lambda_i)^{n_i}$, donde $m_i \leqslant n_i = \dim V_{\lambda_i}$. Así $\chi_f(t) = \chi_{f_1}(t)\ldots\chi_{f_r}(t) = (t-\lambda_1)^{n_1}\ldots(t-\lambda_r)^{n_r}$.

3.3.3 Teorema (de Hamilton-Cayley)

$\chi_f(f) = 0$. Demostración:

Es suficiente probar que para $A \in FL(n)$ se verifica $\chi_A(A) = 0$.
Sea $\widehat{K}$ cierre algebraico de K, La matriz A puede interpretarse como un endomorfismo en $V_n(\widetilde{K})$:

$$A:\ V_n(\widetilde{K}) \ni \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \dashrightarrow A\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in V_n(\widetilde{K})$$

y se le puede aplicar 3.3.2 para concluir que $\chi_A(A) = 0$.
Debe observarse previamente que el polinomio caracteristico, $\chi_A(t)$ det(tI-A), es independiente de esta interpretación "pasajera" de la matriz A.

4. SEGUNDO TEOREMA DE DESCOMPOSICION. TEOREMA DE JORDAN.

Fijado el endomorfismo f de V, se ha establecido una descomposición canónica del espacio vectorial, en suma directa de los denominados subespacios caracteristicos de f, $V = V_{p_1} \oplus \ldots \oplus V_{p_r}$, donde $p_1 \ldots p_r$ es el conjunto de divisores primos del polinomio mínimo ϕ_f.
Escribiendo $f_i = f_{V_{p_i}}$, el polinomio mínimo de f_i, es de la forma

$$\phi_{f_i} = \phi_{V_{p_i}} = p_i^{m_i} \quad \text{y} \quad \phi_f = p_1^{m_1}\ldots p_r^{m_r}$$

Cada endomorfismo f_i puede ser eventualmente descompuesto en bloques aún mas pequeños hasta dar lugar a una descomposición irreducible. Se establecerá un segundo teorema para la descomposición de un endomorfismo f con polinomio mínimo primario(es decir, $\phi_f = p^m$, para cierto polinomio p primo), en bloques irreducibles. Veremos que estos bloques no son canónicos, pero si sus correspondientes dimensiones, que pueden construirse a partir de f mediante un sistema adecuado de invariantes.

Finalmente el estudio y determinación de representaciones matriciales reducidas para endomorfismos irreducibles, permite resolver el problema de clasificación que nos ocupa.

4.1 Endomorfismos con polinomio mínimo primario p^m.

f es un endomorfismo del espacio vectorial V con polinomio mínimo $\phi_f = p^m$, donde m es un entero positivo y $p \in K[t]$ es un polinomio mónico primo, grado(p)= ν.
$K_r[t]$ denota al espacio vectorial de los polinomios de grado estrictamente menor que r.

4.1.1 Proposición.

i) Si $\{0\} \subsetneq S \subset V$, entonces $\phi_S = p^k$ donde $1 \leq k \leq m$.

ii) Si $U_i < V$ $i=1,\dots,r$ y $V = \sum_{i=1}^{r} U_i$ entonces $\exists$ $i=1,\dots,r$ tal que $\phi_{U_i} = p^m$.

iii) Existe $v_1 \in V$ tal que $\phi_{v_1} = p^m$.

Demostración:

i) Como $0 \subsetneq S \subset V$ se verifica, $An_f(V) \subset An_f(S) \subsetneq K[t]$, es decir, $\phi_f = p^m \in K[t]\phi_S$; pero p es primo, y por tanto $\phi_S = p^k$ para cierto k con $1 \leq k \leq m$.

ii) Por 3.1.7.(ii) se verifica que $\phi_V = \phi_f = p^m = m.c.m.(\phi_{U_1},\dots,\phi_{U_r})$ pero por i) $\phi_{U_j} = p^{k_j}$ $j=1,\dots,r$, y para que se verifique $m.c.m.(p^{k_1},\dots,p^{k_r}) = p^m$, es necesario que algún k_i tome el valor m.

iii) Basta tomar una base $(e_1,\dots,e_n)$ de V, aplicar ii) para $U_i = \langle e_i \rangle$, y tener en cuenta que $\phi_{U_i} = \phi_{e_i}$.

4.1.2 Definición.

Sea $u \in V - \{0\}$, al subconjunto $K[t]u = \{\varphi u / \varphi \in K[t]\}$ se le denomina recta modular generada por u.

4.1.3 Proposición.

Sea $u \in V - \{0\}$, y sea $U = K[t]u$ la recta modular generada por u. Entonces:

i) U es el subespacio f-invariante más pequeño que contiene al vector u y $\phi_U = \phi_u = p^k$ para algun k con $1 \leq k \leq m$.

ii) La aplicación $K[t] \ni \varphi \dashrightarrow \varphi u \in U$ es una aplicación lineal suprayectiva con nucleo igual a $An_f(u) = K[t]p^k$.

iii) La aplicación anterior induce un isomorfismo lineal $K_{\nu k}[t] \ni \xi \dashrightarrow \xi u \in U$. Por tanto $\dim(U) = \nu k$, y podemos escribir $U = K_{\nu k}[t]u = \{\xi u \,/ gr(\xi) < \nu k\}$

iv) Si $u_1 \in U$ entonces, $\phi_{u_1} = p^k$ si y solo si $U = K[t]u_1$

Demostración:

i) $U = K[t]u$ es claramente subespacio, y es invariante, pues para $\varphi \in K[t]$ se verifica $f(\varphi u) = (t\varphi)u \in U$. Por otra parte, si W es subespacio f-invariante, es $\varphi(f)$-invariante para todo $\varphi \in K[t]$, (ver 3.1.4) así, si $u \in W \Rightarrow \varphi u = \varphi(f)u \in W$ y $U = K[t]u \subset W$.

Dejamos como ejercicio la comprobación: $\phi_U = \phi_u$

Además ϕ_u es de la forma p^k $(1 \leq k \leq m)$ por i) de 4.1.1.

ii) Es una simple comprobación.

iii) La aplicación $K_{\nu k}[t] \ni \xi \dashrightarrow \xi u \in U$ es evidentemente lineal e inyectiva (pues si $\xi u = 0$ y $gr(\xi) < \nu k$, como $\xi \in K[t]p^k$ y $gr(p^k) = \nu k$, se concluye $\xi = 0$).

Veamos que es supreyectiva: sea $\varphi u \in U$ $\varphi \in K[t]$; si $gr(\varphi) \geq \nu k$, aplicando el algoritmo de la división se concluye que existen polinomios ζ , $\xi \in K[t]$ con $\xi \in K_{\nu k}[t]$ tales que $\varphi = \zeta . p^k + \xi$, y $\varphi u = \zeta(p^k u) + \xi u = \xi u \in K_{\nu k}[t]u$.

iv) Sea $u_1 \in U$. Entonces $K[t]u_1 \subset U$. Si $\phi_{u_1} = p^{k_1}$, aplicando iii) a $K[t]u_1$ se tiene:

$K[t]u_1 = U \Longleftrightarrow \dim(K[t]u_1) = \nu k_1 = \dim U = \nu k \Longleftrightarrow k = k_1$

4.1.4 Observación.

La prueba de que $\dim U = \nu k$ se puede realizar directamente aplicando en ii) el teorema de Isomorfia (4.5.1 Cap.I) para concluir que $U = K[t]u$ es canonicamente isomorfo al espacio vectorial:

$K[t]_{p^k} = K[t]/K[t]p^k$ que tiene dimensión igual a νk.

En la siguiente proposición se utiliza implicitamente la estructura natural de cuerpo para $K[t]_p$ descrita en el apéndice.

4.1.5 Teorema.

Sea U subespacio f-invariante de V, y supongase $\phi_U = p$. La aplicación

(1): $K[t]_p \times U \ni (\varphi \dotplus K[t]p,\ u) \longrightarrow (\varphi \dotplus K[t]p)u = \varphi u \in U$

define una estructura de espacio vectorial (sobre el cuerpo $K[t]_p$) de grupo $(U,\dotplus)$, que denotamos por U_f. Los subespacios f-invariantes contenidos en U, son justamente los subespacios vectoriales de U_f. En particular, todo subespacio f-invariante contenido en U, admite en U un complementario f-invariante.

Demostración:

Como p es polinomio primo, $K[t]_p$ es cuerpo (ver apéndice), y por 3.1.3, es $\varphi u \in U$, para todo $\varphi \in K[t]$ y todo $u \in U$; Además como $An(U) = K[t]p$, la aplicación (1) está correctamente definida (si $\varphi_1 - \varphi_2 \in K[t]p$ entonces $\varphi_1 u = \varphi_2 u$, $\forall\, u \in U$) y se verifican trivialmente las propiedades de espacio vectorial.

Finalmente, si W es subespacio f-invariante contenido en U es $\varphi W = \{\varphi w / w \in W\} < W$ para todo $\varphi \in K[t]$. Reciprocamente, si W es subespacio de U_f, en particular es $tW = f(W) \subset W$ y por tanto es f-invariante.

Para probar que $\dim U_f \leq \dim U$ basta tener en cuenta, que una base de U, $(u_1,\dots,u_r)$ es sistema generador de U_f, ya que:

$$\lambda_1 u_1 \dotplus \dots \dotplus \lambda_r u_r = \sum_{i=1}^{r} (\lambda_i \dotplus K[t]p) u_i \quad \forall\, \lambda_1,\dots,\lambda_r \in K.$$

4.1.6 Corolario.

Si $\phi_f = p$, entonces existen $v_1,\dots,v_r \in V$ tales que:

$V_f = K[t]v_1 \oplus \dots \oplus K[t]v_r$

Demostración:

Tomese una base $(v_1,\dots,v_r)$ del espacio vectorial V_f, y compruebese que: $K[t]v_i = K[t]_p v_i$.

4.2 Segundo Teorema de descomposición.

El corolario 4.1.7 establece una descomposición de V en suma directa de rectas modulares cuando m=1, es decir $\phi_f = p$. Se trata de establecer el mismo resultado cuando $\phi_f = p^m$ para un entero positivo m arbitrario. Posteriormente se probará que las rectas modulares son subespacios irreducibles.

El siguiente lema establece una equivalencia entre dos afirmaciones. Cada una de ellas es esencialmente el enunciado del segundo teorema de descomposición.

4.2.1 Lema.

Sea $f \in FL(V)$ con $\phi_f = p^m$. Las siguientes propiedades son entonces equivalentes:

(1): $\forall U < V_f$, si $u_1 \in U$ y $\phi_{u_1} = \phi_U$ entonces existe $U_2 < U$ subespacio invariante tal que $U = K[t]u_1 \oplus U_2$

(2): $\forall U < V_f$, si $u_1 \in U$ con $\phi_{u_1} = \phi_U$, existe $(u_2, \ldots, u_r) < U$ tal que $U = K[t]u_1 \oplus \ldots \oplus K[t]u_r$.

Demostración:

Claramente (2)$\Rightarrow$(1) ya que $U_2 = K[t]u_2 \oplus \ldots \oplus K[t]u_r$ es complementario invariante de $K[t]u_1$ en U.

Reciprocamente, supuesto cierto (1), y fijado $U < V_f$ y $u_1 \in U$ con $\phi_{u_1} = \phi_U$, tenemos $U = K[t]u_1 \oplus U_2$ para cierto subespacio invariante $U_2 < U$. Si $U_2 = \{0\}$ hemos terminado; si $U_2 \neq \{0\}$ entonces, por 4.1.1 es $\phi_{U_2} = p^{m_2}$ con $1 \leq m_2 \leq m$, y existe $u_2 \in U_2$ con $\phi_{u_2} = \phi_{U_2} = p^{m_2}$; aplicando nuevamente la hipótesis (1) a U_2 se tiene $U_2 = K[t]u_2 \oplus U_3$ para cierto subespacio invariante U_3, y $U = K[t]u_1 \oplus K[t]u_2 \oplus U_3$; continuando con este proceso, se construye la descomposición buscada.

4.2.2 Teorema.

Supongase $\phi_f = p^m$, y $v_1 \in V$ tal que $\phi_{v_1} = p^m$. Entonces la recta modular $K[t]v_1$ admite en V un complementario invariante.

Demostración:

Se hará por inducción sobre m. Si m=1, el resultado se obtiene directamente del teorema 4.1.6. Supongase cierto el teorema para

para endomorfismos g con $\phi_g = p^k$ con $k < m$, $(m > 1)$; Sea $\phi_f = p^m$ y $v_1 \in V$ con $\phi_{v_1} = p^m$.

El subconjunto $pV = \{ pv / v \in V \}$ es por 3.1.3 un subespacio invariante, y $\phi_{pV} = p^{m-1} = \phi_{pv_1}$. Por la hipótesis de inducción, pV verifica la condición $(1) \Leftrightarrow (2)$ del lema 4.2.1, y existe por tanto $(v_2, \dots, v_r) \subset V$ tal que

$(*)$: $pV = K[t]pv_1 \oplus \dots \oplus K[t]pv_r$ (descomposición propia)

Sea $V' = K[t]v_1 \dotplus \dots \dotplus K[t]v_r$

Probaremos:

i) $V' = K[t]v_1 \oplus \dots \oplus K[t]v_r$:

Dados $\varphi_1, \dots, \varphi_r \in K[t]$ con $\varphi_1 v_1 \dotplus \dots \dotplus \varphi_r v_r = 0$, basta probar que cada sumando debe ser nulo. En efecto, "multiplicando" por p los dos miembros de la igualdad $\varphi_1 v_1 \dotplus \dots \dotplus \varphi_r v_r = 0$, se tiene $\varphi_1 (pv_1) \dotplus \dots \dotplus \varphi_r (pv_r) = 0$ y por $(*)$ se deduce que $\varphi_i (pv_i) = 0$; por 4.1.1 i) cada $\varphi_i \in K[t]p$, es decir, existen $\xi_i \in K[t]$ con $\varphi_i = \xi_i p$, y se tiene:

$\xi_1 (pv_1) \dotplus \dots \dotplus \xi_r (pv_r) = 0$. Por $(*)$ se concluye nuevamente que $(\xi_i p) v_i$ $i=1, \dots, r$, y así $\varphi_i v_i$.

ii): Si $U = \ker p(f)$, entonces $V = V' \dotplus U$:

Para ello es suficiente probar que la aplicación $p(f): V' \dashrightarrow pV$ es suprayectiva, pues así, dado $v \in V$, existe $v' \in V'$ tal que $pv = pv'$; por tanto $v - v' \in U$ y $v = v' \dotplus (v - v') \in V' \dotplus U$.

La construción de un complementario invariante en V de $K[t]v_1$ se realiza de la siguiente forma:

Por i), $W' = K[t]v_2 \oplus \dots \oplus K[t]v_r$ es complementario invariante de $K[t]v_1$ en V', es decir, $V' = K[t]v_1 \oplus W'$

Como $\phi_U = p$, por 4.1.6 U admite una estructura de espacio vectorial sobre el cuerpo $K[t]_p$ denotada por U_f, y por ser $V \cap U < U$ invariante es $V \cap U$ subespacio de U_f. Si W es complementario de $V \cap U$ en U_f, entonces W es un subespacio invariante; utilizando ii) se comprueba facilmente que $V = V' \oplus W$, así $V = K[t]v_1 \oplus W' \oplus W$, y $W \oplus W'$ es complementario invariante de $K[t]v_1$ en V.

4.2.3 <u>Corolario</u>.

Toda recta modular de V ($\phi_f=p^m$) es un espacio invariante irreducible.

Demostración:

Si U es recta modular, por 4.1.1 se verifica $\phi_U=p^k$ con $1\leq k\leq m$. Supongase que existen subespacios invariantes U_1 y U_2 tales que $U=U_1\oplus U_2$. Probemos que la descomposición es trivial: por 4.1.1 alguno de los polinomios ϕ_{U_1},ϕ_{U_2} es igual a p^k; supongamos por ejemplo $\phi_{U_1}=p^k$. Existe entonces $u_1\in U_1$ con $\phi_{u_1}=p^k$ y por 4.1.3 iv) es $U= K[t]u_1\subset U_1$. luego $U=U_1$ y $U_2=0$.

4.2.4 <u>Corolario. (Segundo teorema de descomposición)</u>

Sea $f\in EL(V)$ $\phi_f=p^m$ $p\in K[t]$ polinomio primo y gr $p=\nu$. Entonces:

i) Existe $v_1\in V$ tal que $\phi_{v_1}=p^m$.

ii) Existe un sistema $(v_2,\dots,v_s)\subset V$ con $\phi_{v_j}=p^{k_j}$ y $m=k_1\geq k_2\geq\dots\geq k_s\geq 0$ de forma que $V= K[t]v_1\oplus\dots\oplus K[t]v_s$, y la descomposición es propia e irreducible .

iii) La sucesión $(k_1,k_2,\dots,k_s)$ viene determinada por f. Concretamente si c_j representa el número de veces que aparece j en dicha sucesión ($1\leq j\leq m$) se verifica $c_j=\rho(j-1)+\rho(j+1)-2\rho(j)$ siendo $\rho(j)=\mathrm{rg}\ p^j(f)/\nu$ $j=0,\dots,m$.

Demostración:

El teorema 4.2.2 prueba que la afirmación (1) del lema 4.2.1 es cierta y en consecuencia también es cierta la afirmación (2). Por tanto se verifican (las afirmaciones) i) y ii).

Probemos iii):

Por 3.1.3 iv) se sabe que para $j=0,\dots,r$, se tiene:

$p^jV= K[t]p^jv_1\oplus\dots\ K[t]p^jv_s$, donde los sumandos $K[t]p^jv_i$ son nu los a partir del primer indice $i(j)$ tal que $j\geq k_i$ es decir $p^jV=\bigoplus_{i<i(j)}K[t]p^jv_i$. Como $\phi_{p^jv_i}=p^{k_i-j}$ es $\dim(K[t]p^jv_i)=\nu(k_i-j)$

y se verifica :

$\mathrm{rg}\ p^j(f)=\dim(p^jV)=\sum_{j<k_i}\nu(k_i-j)$. Por consiguiente

$\rho(j)=\sum_{j<k_i}(k_i-j)=\sum_{i=j}^{m}(i-j)c_i$ $j=0,\dots,m.$

Asi por ejemplo $\rho(0)=\dim V=n=\sum_{i=0}^{m}ic_i=\sum_{i=1}^{s}k_i$

Fijado j con $1 \leq j \leq m$ se tiene

$$\rho(j-1) - \rho(j) = \sum_{i=j-1}^{m} (i-j+1)c_i - \sum_{i=j}^{m} (i-j)c_i = \sum_{i=j}^{m} c_i$$

Analogamente $\rho(j) - \rho(j+1) = \sum_{i=j+1}^{m} c_i$ y restando queda

$$(\rho(j-1) - \rho(j)) - (\rho(j) - \rho(j+1)) = \sum_{i=j}^{m} c_i - \sum_{i=j+1}^{m} c_i = c_j$$

de donde se obtiene la fórmula enunciada.

4.3. Representación matricial reducida de endomorfismos irreducibles

4.3.1 Proposición.

Sea f un endomorfismo irreducible de V. Entonces $\phi_f = p^k$ donde k es un entero positivo, y $p \in K[t]$ es un polinomio primo. Además, existe $v \in V$ tal que $V = K[t]v$.

Demostración:

Como consecuencia del primer teorema de descomposición (corolario 3.2.2) el polinomio mínimo ϕ_f de f es de la forma p^k indicada. Por 4.1.1 iii) existe $v \in V$ con $\phi_v = p^k$, y por el segundo teorema de descomposición 4.2.2 , $K[t]v$ admite un complementario invariante, que es necesariamente nulo, por ser f irreducible. Así $K[t]v = V$.

4.3.2

> Supondremos que f es un endomorfismo irreducible del espacio vectorial V, es decir, su polinomio mínimo ϕ_f es de la forma p^k (donde $p = a_0 + a_1 t + \ldots + a_\nu t^\nu$ es un polinomio primo de grado ν y k es un entero positivo) y $V = K[t]v$ para cierto vector $v \in V$.

Se tratará de construir una base de V respecto a la cual la matriz de f sea sencilla. Por la proposición 4.1.3 , la aplicación

$K_{\nu k}[t] \ni \varphi \longrightarrow \varphi v \in V$ es un isomorfismo lineal, y así las bases de V se corresponden con las de $K_{\nu k}[t]$. Construyamos pues la base adecuada en $K_{\nu k}[t]$.

4.2.3 Lema.

El sistema de polinomios

$\mathcal{E}(p;k) = (1, t, \ldots, t^{\;-1}, p, tp, \ldots, t^{\;-1}p, \ldots, p^{k-1}, tp^{k-1}, \ldots, t^{\;-1}p^{k-1})$

es una base para $K_{\nu k}[t]$.

Demostración:

El número de elementos del sistema $\mathcal{E}(p;k)$ es justamente $\nu k = \dim(K_{\nu k}[t])$. Es suficiente ver por tanto que $\mathcal{E}(p;k)$ es un sistema l.i. .

En efecto, una combinación lineal (con coeficientes en K) de elementos de $\mathcal{E}(p;k)$ puede expresarse siempre de la forma $\psi_0+\psi_1 p+\dots+\psi_{k-1}p^{k-1}$ donde $\psi_i \in K_\nu[t]$.

Si $0=\psi_0+\psi_1 p+\dots+\psi_{k-1}p^{k-1}$, entonces $\psi_0 \in K[t]p$, y como $\mathrm{gr}\,\psi_0 < \mathrm{gr}\,p=\nu$ se concluye que $\psi_0=0$. Así, $p(\psi_1+\psi_2 p+\dots+\psi_{k-1}p^{k-2})=0$

Como $p\neq 0$ se verifica $\psi_1+\dots+\psi_{k-1}p^{k-2}=0$. Continuando con este proceso, se concluye que $\psi_0=\psi_1=\dots=\psi_{k-1}=0$, y $\mathcal{E}(p;k)$ es l.i. .

4.3.4 Notación.

$\mathcal{E}(p;k)v=(v,tv,\dots,t^{\nu-1}v,pv,tpv,\dots,t^{\nu-1}pv,\dots,p^{k-1}v,\dots,t^{\nu-1}p^{k-1}v)$

$$A(p)=\begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & -a_1 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & -a_{\nu-2} \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -a_{\nu-1} \end{pmatrix} \in FL(\nu)$$

$$N_\nu = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix} \in FL(\nu)$$

$$C(p;k)=\begin{pmatrix} A(p) & & & \\ N_\nu & A(p) & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & N_\nu & A(p) \end{pmatrix} \in FL(\nu k)$$

Se denomina a $C(p;k)$, celda de jordan asociada a p

4.3.5 Teorema.

El endomorfismo f admite respecto a la base $\mathcal{E}(p;k)v$ una representación matricial de la forma $C(p,k)$.

Demostración:

Teniendo en cuenta la identidad $t^{\nu}=-a_o-a_1t-\dots-a_{\nu-1}t^{\nu-1}+p$ se tiene para $j=o,\dots,k-1$ y $i=o,\dots,\nu-2$ $f(t^ip^jv)=t^{i+1}p^jv$, y si $i=\nu-1$
$f(t^{\nu-1}p^jv)=t^{\nu}p^jv=-a_o(p^jv)-a_1(tp^jv)-\dots-a_{\nu-1}(t^{\nu-1}p^jv)+p^{j+1}v$,
cuando $j=k-1$ el último sumando de la expresión anterior es $p^kv=0$ y desaparece quedando:
$f(t^{\nu-1}p^{k-1}v)=-a_o(p^{k-1}v)-a_1(tp^{k-1}v)-\dots-a_{\nu-1}(t^{\nu-1}p^{k-1}v)$

Una reflexión sobre estas expresiones, muestra que pueden escribirse matricialmente de la forma:

$$f(\mathcal{E}(p;k))=\mathcal{E}(p;k)C(p,k)$$

Esto concluye la demostración.

4.3.6 Notación.

Si $\lambda\in K$ y $k\in N$ se define

$$C_k(\lambda)=\begin{pmatrix} \lambda & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & & & & \cdot \\ \cdot & & & & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \lambda \end{pmatrix}=C(t-\lambda,k)$$

Y se denomina celda de Jordan de orden k asociada a λ.

4.3.6 Corolario.

Supongase $p=(t-\lambda)^k=\phi_f$ (f irreducible $\phi_v=(t-\lambda)^k$). Entonces respecto a la base $\mathcal{E}=(v,(t-\lambda)v,\dots,(t-\lambda)^{k-1}v)$ de V el endomorfismo f admite una representación matricial de la forma $C_k(\lambda)$.

4.4 Teorema de clasificación de endomorfismos.

4.4.1 Introducción.

Dado el endomorfismo f de V con polinomio mínimo $\phi_f=p_1^{m}\dots p_r^{m}$ donde $p_1,\dots,p_r$ son los divisores primos(distintos) de ϕ_f, $\operatorname{gr}p_i=\nu_i$,

El primer teorema de descomposición permite escribir V como suma directa de los subespacios caracteristicos asociados a los divisores primos $p_1,\dots,p_r$: $V=V_{p_1}\oplus\dots\oplus V_{p_r}$ donde $\phi_{V_{p_i}}=p_i^m$. Por el segundo teorema de descomposición, cada V_{p_i} se descompone en suma de rectas modulares $V_{p_i}=K[t]v_{i1}\oplus\dots\oplus K[t]v_{is_i}$ y la descomposición

(1): $V=(K[t]v_{11}\oplus\cdots\oplus K[t]v_{1s_1})\oplus\cdots\oplus(K[t]v_{r1}\oplus\cdots\oplus K[t]v_{rs_r})$

es ya irreducible. Para cada i=1...r sea $\phi_{v_{i\ell}}=p^{k_{i\ell}}$, $\ell=1\ldots s_i$

en estas condiciones, se establece el siguiente resultado:

4.4.2 Teorema.

Sea $\rho^j_{p_i}(f)=\dfrac{rg(p^j(f))}{\nu_i}$ para $j=o,\ldots,m_i$. Entonces:

1) $\rho^j_{p_i}$ son invariantes lineales, denominados invariantes de rango. De forma mas precisa, si $f,f'\in FL(V)$ y $f\sim f'$ entonces $\phi_f=\phi_{f'}$, por tanto los sistemas de divisores primos distintos $(p_1,\ldots,p_r)$ de ambos polinomios coinciden, y se tiene $\rho^j_{p_i}(f)=\rho^j_{p_i}(f')$ $j=o,\ldots,m_i$

2) Para cada $i=1,\ldots,r$, si $c_{ij}(j=o,\ldots,m_i)$ denota el número de veces que aparece el número j en la sucesión $m_i=k_{i1},k_{i2},\ldots,k_{is_i}$ se verifica la fórmula $c_{ij}=\rho^{j+1}_{p_i}(f)+\rho^{j-1}_{p_i}(f)-2\rho^j_{p_i}(f)$

Demostración:

1) Es consecuencia inmediata de 3.2.4 .

2) Sea $f_i=f_{V_{p_i}}$, $\dim V_{p_i}=n_i$. Para cada $j=o,\ldots,m_i$ se verifica

$p_i^j(f)=p_i^j(f_1)\oplus\cdots\oplus p_i^j(f_i)\oplus\cdots\oplus p_i^j(f_r)$, y por tanto

$rg(p_i^j(f))=rg\ p_i^j(f_1)+\cdots+rg\ p_i^j(f_i)+\cdots+rg\ p_i^j(f_r)$: (1)

para $\ell\neq i$ la aplicación lineal $p_i^j(f_\ell):V_{p_\ell}\longrightarrow V_{p_\ell}$ es por 3.2.2 no singular, pues $\phi_{f_\ell}=p^{m_\ell}$ y $m.c.d.(\phi_{f_\ell},p_i^j)=1$ por consiguiente de la fórmula (1) se concluye que

$rg(p_i^j(f))=n_1+\cdots+rg\ p_i^j(f_i)+\cdots+n_r$ es decir

$$\rho^j_{p_i}(f)=\frac{rg(p^j(f_i))}{\nu_i}=\frac{rg\ p^j(f_i)}{\nu_i}+\frac{n-n_i}{\nu_i}$$

Por el segundo teorema de descomposición 4.2.4 se tiene:

$$c_{ij}=\frac{rg(p_i^{j+1}(f_i))}{\nu_i}+\frac{rg(p_i^{j-1}(f_i))}{\nu_i}-2\,\frac{rg(p_i^j(f_i))}{\nu_i}=$$

$$=\left(\frac{rg(p_i^{j+1}(f_i))}{\nu_i}+\frac{n-n_i}{\nu_i}\right)+\left(\frac{rg(p_i^{j-1}(f_i))}{\nu_i}+\frac{n-n_i}{\nu_i}\right)-2\left(\frac{rg(p_i^j(f_i))}{\nu_i}+\frac{n-n_i}{\nu_i}\right)=$$

$= \rho_{p_i}^{j+1}(f) + \rho_{p_i}^{j-1}(f) - 2\rho_{p_i}^{j}(f)$.

4.4.3 Teorema.

Con las mismas notaciones de 4.3.1, para el endomorfismo f, existe una base $\mathcal{E}$ de V de forma que la representación matricial de f respecto a dicha base es de la forma $J = \mathrm{diag}(J_1,\dots,J_r)$ en donde

$J_i = \mathrm{diag}(C(p_i,k_{i1}),\dots,C(p_i,k_{is_i}))$ para $i=1\dots m$ $(k_{i1}=m_i)$

y el número c_{ij} de cajas de la forma $C(p_i,j)$ $(j=1\dots m_i)$ que aparecen en la diagonal de J_i es exactamente

$$c_{ij} = \rho_{p_i}^{j+1}(f) + \rho_{p_i}^{j-1}(f) - 2\rho_{p_i}^{j}(f)$$

Demostración

Considérese la descomposición irreducible (1) de 4.3.1. Para cada $i=1,\dots,r$ y cada $j=1,\dots,s_i$ se elige la base de $K[t]v_{ij}$ $\mathcal{E}_{ij} = \mathcal{E}(p_j,k_{ij})v_{ij}$ descrita en el lema 4.3.3 , y respecto a la cual la matriz de $f_{ij} = f_{K[t]v_{ij}}$ es de la forma $C(p_i,k_{ij})$

$\mathcal{E}_i = \mathcal{E}_{i1} \cup \dots \cup \mathcal{E}_{is_i}$ es entonces una base de V_{p_i} respecto a la cual la representación matricial de $f_i = f_{V_{p_i}}$ es

$J_i = \mathrm{diag}(C(p_i,k_{i1}),\dots,C(p_i,k_{is_i}))$

Finalmente $\mathcal{E} = \mathcal{E}_1 \cup \dots \cup \mathcal{E}_r$ es una base de V respecto a la cual f tiene por representación matricial $J = \mathrm{diag}(J_1,\dots,J_r)$

4.4.4 Comentarios.

1) Las matrices del tipo $\mathrm{diag}(C(p,k_1),\dots,C(p,k_s))$ donde $C(p,k_i)$ son celdas de Jordan (ver 4.3.4), se denominan cajas de Jordan. Las matrices de la forma $\mathrm{diag}(J_1,\dots,J_r)$ donde J_i son cajas de Jordan, se denominan matrices de Jordan.

2) La matriz J del teorema 4.4.3 se dice que es una representación matricial reducida (de Jordan) para f. La base $\mathcal{E}$ correspondiente, se denomina base de Jordan (para f).

3) Si los polinomios p_i del teorema 4.4.3 son de la forma $p_i=(t-\lambda_i)$ $i=1,\dots,r$, las celdas del tipo $C(p_i,k)$ deben sustituirse (en el

enunciado) por celdas del tipo

$$C(t-\lambda_i;k)=C_k(\lambda_i)=\begin{pmatrix}\lambda_i & & & \\ 1 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & \lambda_i\end{pmatrix}\in \quad EL(k)$$

Esta situación se dá automaticamente para todo endomorfismo de un espacio vectorial sobre un cuerpo K algebraicamente cerrado.

Los siguientes resultados, resuelven ya definitivamente el problema de clasificación que nos ocupa, y sus demostraciones pueden reducirse a simples comentarios.

4.3.5 Corolario.

El sistema de invariantes de rango descrito en 4.3.2 , y el invariante polinomio mínimo, es un sistema completo de invariantes para la clasificación lineal de endomorfismos.

De forma mas explícita:

Dados f y $f'\in EL(V)$ tales que $\phi_f=\phi_{f'}=p_1^m\dots p_r^m$ y $\rho^j_{p_i}(f)=\rho^j_{p_i}(f')$ para $i=1,\dots,r$ $j=o,\dots,m_i$, entonces f y f´ admiten una misma representación matricial reducida, y son por tanto linealmente equivalentes.

4.3.6 Corolario.

Sean $J,J'\in FL(n)$ dos matrices de Jordan, $J=\mathrm{diag}(J_1,\dots,J_r)$ $J'=\mathrm{diag}(J_1',\dots,J_{r'}')$ donde J_i y J_i' son las correspondientes cajas de Jordan. Las matrices J y J´ son semejantes si y solo si r=r´, y existe una permutación $\sigma:\{1,\dots,r\}\longrightarrow\{1,\dots,r\}$ de forma que las cajas J_i y $J'_{\sigma(i)}$ son iguales salvo quizás el orden de las celdas que componen la diagonal.

Demostración:

Observese que las matrices de Jordan J y J´ consideradas como endomorfismos de $V_n(K)$ son linealmente equivalentes (es decir semejantes) si y solo si tienen los mismos invariantes de rango, y estos determinan salvo el orden las celdas de la matriz.

4.3.7 Corolario.(Teorema de Hamilton-Cayley)

Con las mismas notaciones de 4.3.1 para el endomorfismo f de V se verifica $\chi_f=p_1^{n_1}\dots p_r^{n_r}$ donde $n_i=\dim V_{p_i}/\wp_i$ $i=1,\dots,r$ y $n_i\geqslant m_i$.

En particular $\chi_f(f)=0$.

Demostración:

Calcúlese por medio de la representación matricial reducida J de f dada en 4.3.3 el polinomio caracteristico de f, $\chi_f = \chi_J$, teniendo en cuenta que $\chi_{C(p_i,k_{ij})} = \chi_{f_{ij}} = p_i^{k_{ij}}$ donde $f_{ij} = f_{K[t]v_{ij}}$. Observese ademas que la primera celda de J_i es $C(p_i,k_{i1}) = C(p_i,m_i)$; esto prueba que $\nu_i n_i$ (que es el orden de J_i) es mayor ó igual que $\nu_i m_i$ (que es el orden de $C(p_i,m_i)$). Por tanto $n_i \geqslant m_i$.

4.3.8 Corolario.

Con las mismas notaciones de 4.3.1 para el endomorfismo f de V si $\nu = \min(\nu_1,\ldots,\nu_r)$, existe un subespacio f invariante de dimensión igual a ν.

Demostración:

Supongase $\nu = \nu_1$ y sea $f_1 = f_{V_{p_1}}$. Entonces respecto a alguna base $\mathcal{E}_1$ de V_{p_1}, f_1 admite una representación matricial de la forma de caja de Jordan J_1 con celdas del tipo

$$C(p_1,k) = \begin{pmatrix} A(p_1) & & & \\ N_\nu & A(p_1) & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & N_\nu & A(p_1) \end{pmatrix}$$

así los ultimos $\nu = \nu_1$ vectores de la base $\mathcal{E}_1$ generan un subespacio invariante U; (la representación matricial de f_U respecto a dicha base es justamente $A(p_1)$)

4.3.9 Corolario.

Todo endomorfismo de un espacio vectorial real, admite al menos un plano invariante.

Demostración:

Nótese que los polinomios primos de $\mathbb{R}[t]$ son a lo más de grado igual a dos.

4.3.10 Ejemplos.

1) Describiremos los distintos tipos de matrices de Jordan en $EL(2;\mathbb{C})$ con los correspondientes valores del sistema de invariantes:

$J = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ $\quad \phi_J = t-\lambda,\ \chi_J = (t-\lambda)^2 \quad rg(J-\lambda I) = 0$

$J=\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 1 & \lambda \end{pmatrix}$ $\phi_J=(t-\lambda)^2=\chi_J$ $rg(J-\lambda I)=1$ $rg(J-\lambda I)^2=0$

$J=\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ $(\lambda_1\neq\lambda_2)$, $\phi_J=(t-\lambda_1)(t-\lambda_2)=\chi_J$

$rg(J-\lambda_1 I)=1=rg(J-\lambda_2 I)$

2) Para $FL(3;\mathbb{C})$ y prescindiendo de las matrices de Jordan diagonales se tiene

$J=\begin{pmatrix} \lambda & & \\ 1 & \lambda & \\ & & \lambda_1 \end{pmatrix}$ $\phi_J=(t-\lambda)^2(t-\lambda_1)=\chi_J$

$(\lambda\neq\lambda_1)$, $rg(J-\lambda I)=2$ $rg(J-\lambda I)^2=1$

$J=\begin{pmatrix} \lambda & & \\ 1 & \lambda & \\ & & \lambda \end{pmatrix}$ $\phi_J=(t-\lambda)^2$, $\chi_J=(t-\lambda)^3$

$rg(J-\lambda I)=1$ $rg(J-\lambda I)^2=0$

$J=\begin{pmatrix} \lambda & & \\ 1 & \lambda & \\ & 1 & \lambda \end{pmatrix}$ $\phi_J=(t-\lambda)^3=\chi_J$

$rg(J-\lambda I)=2$ $rg(J-\lambda I)^2=1$ $rg(J-\lambda I)^3=0$

APENDICE II

ANILLO DE POLINOMIOS

El motivo de este apéndice es el de dar un breve repaso a los conceptos y resultados fundamentales de la teoria elemental de polinomios en una variable, para pasar luego a analizar otras tecnicas algebraicas menos elementales, que nos serán de utilidad en el Capítilo III para establecer el teorema de clasificación de endomorfismos en un espacio vectorial.

1.TEORIA ELEMENTAL DE POLINOMIOS.

1.1 Sobre la estructura algebraica de los polinomios.

1.1.1 De una manera informal, un polinomio en la variable t sobre el cuerpo K es una expresión del tipo $\varphi(t)=a_0+a_1t+\ldots+a_nt^n$, y tambien se escribe $\varphi(t)=\sum_{i=0}^{n} a_it^i$ $(t^0=1)$. $K[t]$ denota el conjunto de todos estos polinomios. Dos polinomios $\varphi(t)=\sum_{i=0}^{n} a_it^i$, $\psi(t)=\sum_{j=0}^{m} b_jt^j$ ($n \leq m$ por ejemplo) se consideran iguales, si $a_i=b_i$ para $i=1,\ldots,n$ y $b_j=0$ para $j=n+1,\ldots,m$.

1.1.2 Es conocido que $K[t]$ tiene estructura de anillo conmutativo con elemento unidad respecto a las operaciones suma y producto usuales, y contiene al cuerpo K como subanillo. Por tanto los elementos 0 y 1 de K representan los elementos neutros respecto a la suma y multoplicación de polinomios.

1.1.3 Si $\varphi(t)=\sum_{i=0}^{n} a_it^i \in K[t]$ y $a_n \neq 0$ se dice que n es el grado de φ y se escribe $\mathrm{gr}\,\varphi=n$. Al polinomio nulo 0, no se le asocia grado alguno. Asi pues escribir $\mathrm{gr}\,\varphi=n$ supone implicitamente que φ es un polinomio no nulo.

1.1.4 La aplicación $\mathrm{gr}: K[t] \longrightarrow N$ verifica la propiedad:

$\mathrm{gr}(\varphi\psi)=\mathrm{gr}\,\varphi+\mathrm{gr}\,\psi$ (cuando $\varphi,\psi \in K[t]-\{0\}$).

En particular, esto quiere decir que si $\varphi\neq 0$, $\psi \neq 0$ entonces $\varphi\psi\neq 0$ por esto se dice que $K[t]$ es un dominio de integridad.

1.1.5 Observese que $K-\{0\}$ se identifica con el conjunto $\{\varphi \in K[t]-0 \ / \ /\mathrm{gr}\varphi=0\}$. Por otra parte el grupo $(K[t],+)$ admite una estructura obvia de espacio vectorial (de dimensión infinita) sobre K, definiendo para $\lambda \in K$, $\varphi \in K[t]$ $\lambda\varphi$ como el producto usual de polinomios. Se dice por esto que $K[t]$ es una K-álgebra.

1.1.6 Un polinomio $\varphi(t)=\sum_{i=0}^{n} a_i t^i$ de grado n se dice polinomio mónico si $a_n=1$. Observese que si $\varphi(t)$ no es polinomio mónico, el polinomio $\lambda\varphi(t)$ con $\lambda=1/a_n$ si lo es.

1.1.7 Un polinomio $\varphi(t)=\sum_{i=0}^{n} a_i t^i \in K[t]$, se identifica usualmente con la función polinómica $\varphi: K \ni \lambda \; ---- \; \varphi(\lambda)=\sum_{i=0}^{m} a_i \lambda^i \in K$. Los valores $\lambda \in K$ tales que $\varphi(\lambda)=0$ se denominan raices del polinomio .

1.2 <u>Divisibilidad de polinomios</u>.

1.2.1 Algoritmo de división.

Dados los polinomios $\phi, \varphi \in K[t]$, $\varphi \neq 0$, existen otros dos polinomios únicos $\xi, \rho \in K[t]$ tales que $\phi = \varphi . \xi + \rho$ y verificando alguna de las siguientes condiciones (excluyentes):

1) $\rho=0$ en cuyo caso se dice que φ divide a ϕ (o es divisor de ϕ) y se escribe φ/ϕ . Los divisores de ϕ de la forma $\lambda\phi$ $(\lambda \in K-\{0\})$ se denominan divisores triviales

2) Si $\rho \neq 0$ debe ser gr $\rho <$ gr φ.

Se denominan a ξ y ρ cociente y resto de la división de ϕ entre φ.

1.2.2 Teorema del resto.

En particular si ξ y ρ son el cociente y resto de la división de ϕ por $\varphi(t)=t-\lambda$, es $\phi(t)=\xi(t)(t-\lambda)+\rho$, y ρ es un escalar de K, que coincide con el valor numérico del polinomio ϕ para $t=\lambda$, $\phi(\lambda)$, es decir $\rho=\phi(\lambda)$. En particular, se tiene $\phi(\lambda)=0 \Leftrightarrow \phi(t)=(t-\lambda)\xi(t) \Leftrightarrow (t-\lambda)$ es divisor de ϕ .

1.2.3 Polinomios primos ó irreducibles.

Un polinomio $p \in K[t]$, $p \notin K$, se dice primo si no admite divisores (no triviales) de grado mayor que cero. Observese que si p es primo, λp es primo $\forall \lambda \in K-\{0\}$. Así los polinomios de la forma $t-\lambda$ son irreducibles para cualquier cuerpo K. Si los polinomios irreducibles de $K[t]$ son únicamente los de grado igual a la unidad, se dice que K es algebraicamente cerrado.

1.2.4 Proposición.

1) Los polinomios primos de $\mathbb{R}[t]$ son de grado uno ó dos. $\mathbb{R}$ no es algebraicamente cerrado.

2) $\mathbb{C}$ es un cuerpo algebraicamente cerrado.

1.3 Descomposición en factores primos.

1.3.1 Se llama orden de multiplicidad de un divisor primo $p \in K[t]$ de un polinomio $\phi \in K[t]$ al máximo número natural m tal que p^m divide a ϕ, es decir $\phi = p^m \phi_1$, y p no divide a ϕ_1. (Si m=0 se interpreta que p no divide a ϕ).

Si $p(t)=t-\lambda$, se dice que m es el orden de multiplicidad de λ como raiz de ϕ .

1.3.2 Teorema de descomposición.

Sea $\phi \in K[t]$ polinomio mónico. Existe entonces un número finito de divisores primos mónicos de ,digamos $p_1,\ldots,p_r$. Si m_i es el orden de multiplicidad de p_i como divisor de ϕ , entonces $\phi = p_1^{m_1} \ldots p_r^{m_r}$, y la descomposición es única salvo el orden de factores. Se denomina descomposición irreducible de ϕ. (Para polinomios no mónicos la descomposición es de la forma $p=a_n p_1^{m_1}\ldots p_r^{m_r}$ donde a_n es el coeficiente del término de mayor grado).

1.3.3 En particular si K es algebraicamente cerrado,(por ejemplo $K=\mathbb{C}$) la descomposición irreducible de ϕ es de la forma $\phi(t)=(t-\lambda_1)^{m_1}\ldots(t-\lambda_r)^{m_r}$ donde $\lambda_1,\ldots \lambda_r$ son las distintas raices de ϕ con multiplicidades $m_1,\ldots,m_r$ respectivamente.

1.3.4 La descomposición irreducible de un polinomio $\phi(t) \in \mathbb{R}[t]$ es de la forma:

$$\phi(t)=(t-\lambda_1)^{m_1}\ldots(t-\lambda_r)^{m_r}((t-\alpha_1)^2+\beta_1^2)^{n_1}\ldots((t-\alpha_s)^2+\beta_s^2)^{n_s}$$

donde $\lambda_1,\ldots,\lambda_r$ son las raices de ϕ.

1.3.4 Se supone al lector familiarizado con los conceptos de máximo comun divisor y mínimo comun múltiplo de un sistema finito de polinomios, así como de su cálculo por medio de las descomposiciones irreducibles de los polinomios del sistema. No obstante, en el siguiente epígrafe se analizarán estos conceptos desde un punto de vista menos elemental pero más adecuado para su uso en el problema de clasificación lineal de endomorfismos.

2. COMPLEMENTOS A LA TEORIA ELEMENTAL DE POLINOMIOS.

2.1 Ideales.

2.1.1 Definición.

Un ideal de $K[t]$ es un subconjunto no vacio I de $K[t]$ verificando las propiedades:

(1) $\forall\ \xi_1, \xi_2 \in I \Rightarrow \xi_1 + \xi_2 \in I$

(2) $\forall\ \xi \in I,\ \forall \varphi \in K[t] \Rightarrow \xi\varphi \in I$.

En particular un ideal I es subanillo de K[t].

Si $\phi \in K[t]$, el conjunto $K[t]\phi = \{\varphi\phi\ /\ \varphi \in K[t]\}$ es un ideal de K[t]. Se denomina ideal principal generado por ϕ.

2.1.2 Proposición.

Si $I_1,\ldots,I_r$ son ideales de $K[t]$ entonces:

(1) $I_1 \cap \ldots \cap I_r = \bigcap_{i=1}^{r} I_i$ es un ideal de $K[t]$.

(2) $I_1 + \ldots + I_r = \sum_{i=1}^{r} I_i = \{\xi_1 + \ldots + \xi_r / \xi_i \in I_i\ \ i=1,\ldots,r\}$ es un ideal de K[t], y contiene a la unión $I_1 \cup \ldots \cup I_r$.

La demostración es inmediata.

2.1.3 Proposición.

Todo ideal I de K[t] es un ideal principal. De forma más precisa: Dado I ideal de K[t], existe un único polinomio mónico $\phi \in K[t]$ tal que $I = K[t]\phi$.

Se dice por esto que K[t] es un anillo principal.

Demostración: Si I= 0 no hay nada que probar. Supongase pues $I \neq \{0\}$ Sea $\phi \in I$ un polinomio tal que $gr\,\phi = \min\{gr\,\xi / \xi \in I-\{0\}\}$; Evidentemente ϕ puede elegirse mónico. Probemos que $K[t]\phi = I$.

En efecto, como $\phi \in I$, por (2) de 2.1.1 es $K[t]\phi \subset I$. Si $\xi \in I$, aplicando el algoritmo de la división de ξ por ϕ se concluye que existen $\zeta, \rho \in K[t]$ con $\xi = \phi\zeta + \rho$.

Si $\rho \neq 0$ entonces $gr\,\rho < gr\,\phi$ y $\rho = \xi + (-\zeta)\phi \in I$, pues $\xi, \phi \in I$. Esto contradice la hipótesis sobre el grado de ϕ, por tanto $\rho = 0$ y $\xi = \zeta\phi \in K[t]\phi$.

La unicidad de ϕ es ahora clara:

Si ϕ_1 es polinomio mónico con $I = K[t]\phi_1 = K[t]\phi$, se deduce $\phi_1 = \zeta_1\phi$ $\phi = \zeta\phi_1$ para ciertos polinomios $\zeta, \zeta_1 \in K[t]$ y se tiene $(1-\zeta\zeta_1)\phi = 0$. Como $\phi \neq 0$ es $\zeta\zeta_1 = 1$ y por tanto $\zeta, \zeta_1 \in K$. Pero ϕ y ϕ_1 son mónicos luego $\zeta = \zeta_1 = 1$.

2.2 Máximo comun divisor, mínimo comun multiplo.

2.2.1 Teorema.

Sean $(\phi_1,\ldots,\phi_r)$ un sistema de polinomios de K[t]. Existe entonces un único polinomio mónico $\delta \in K[t]$ verificando las condiciones:

(1) $\delta | \phi_1, \ldots, \delta | \phi_r$.

(2) $\forall \psi \in K[t]$ tal que $\psi | \phi_1, \ldots, \psi | \phi_r \Rightarrow \phi / \delta$.

Se denomina a δ máximo comun divisor de $(\phi_1,\dots,\phi_r)$, y se escribe δ=m.c.d.$(\phi_1,\dots,\phi_r)$.

Demostración:

Por 2.1.2, $K[t]\phi_1 + \dots + K[t]\phi_r$, es un ideal de $K[t]$ generado por un único polinomio mónico δ , es decir $K[t]\delta = K[t]\phi_1 + \dots + K[t]\phi_r$. Así cada $\phi_j \in K[t]\delta$, y $\delta \mid \phi_j$ para j=1,...,r. Ademas, como $\delta \in \sum_{i=1} K[t]\phi_i$, existen polinomios $\xi_1,\dots,\xi_r \in K[t]$ con $\delta = \xi_1\phi_1 + \dots + \xi_r\phi_r$, por tanto, si $\varphi \in K[t]$ y $\varphi \mid \phi_j$ para j=1,...,r es $\phi_j = \xi_j\varphi$ para ciertos $\xi_j \in K[t]$, de esta forma se tiene:

$\delta = \xi_1\phi_1 + \dots + \xi_r\phi_r = \varphi(\xi_1\xi_1 + \dots + \xi_r\xi_r)$ es decir φ / δ .

La unicidad de δ se demuestra de forma análoga que la unicidad de 2.1.3.

De la demostración de 2.2.1 se deduce el siguiente corolario:

2.2.2 Corolario.

Sea $(\phi_1,\dots,\phi_r)$ un sistema de polinomios de $K[t]$, entonces el polinomio δ=m.c.d.$(\phi_1,\dots,\phi_r)$ es el único polinomio mónico que verifica $K[t]\delta = K[t]\phi_1 + \dots + K[t]\phi_r$.

En particular, si m.c.d.$(\phi_1,\dots,\phi_r)$=1, existen polinomios $\xi_1,\dots,\xi_r \in K[t]$ tales que $\xi_1\phi_1 + \dots + \xi_r\phi_r = 1$.

Esta última igualdad, se conoce con el nombre de identidad de Bezout.

2.2.3 Teorema.

Sean $(\phi_1,\dots,\phi_r)$ un sistema de polinomios de $K[t]$. Existe entonces un único polinomio mónico $\mu \in K[t]$ verificando las condiciones:

(1) $\mu \in K[t]\phi_i$ para i=1,...,r (es decir μ es multiplo de ϕ_i)

(2) Si $\varphi \in K[t]\phi_i$ para i=1,...,r entonces $\varphi \in K[t]\mu$.

Se denomina a μ mínimo comun multiplo de $(\phi_1,\dots,\phi_r)$ y se escribe =m.c.m.$(\mu_1,\dots,\mu_r)$.

Demostración:

Basta tomar $\mu \in K[t]$ el polinomio mónico tal que $K[t]\mu = K[t]\phi_1 \cap \dots \cap K[t]\phi_r$.

2.3 <u>Cociente por ideales</u>.

2.3.1 Proposición.

Si $\phi \in K[t]$, y grϕ=m entonces el K-espacio vectorial cociente $K[t]_\phi = K[t] / K[t]\phi$ es isomorfo al espacio vectorial $K_m[t]$ de los polinomios de grado estrictamente menor que m. En particular se tiene $\dim\left(K[t]/_{K[t]\phi}\right)=m$.

Demostración:

La aplicación $K_m[t]\ni\rho \dashrightarrow \rho + K[t]\phi \in K[t]_\phi$ es claramente lineal e inyectiva (pues si $\rho + K[t]\phi = 0$ y $\mathrm{gr}\rho < m = \mathrm{gr}\phi$, necesariamente es $\rho = 0$, ya que $\rho \in K[t]\phi$). Además es suprayectiva, ya que para $\varphi \in K[t]$, si ξ y ρ son el cociente y resto de la división de φ por ϕ se tiene $\varphi = \phi\xi + \rho$. Si $\rho \neq 0$ es $\mathrm{gr}\,\rho < \mathrm{gr}\phi = m$ y $\varphi + K[t]\phi = \rho + K[t]\phi$. Si $\rho = 0$, es $\varphi + K[t]\phi = 0 + K[t]\phi$.

2.3.2 Proposición.

El K-espacio vectorial cociente $K[t]_\phi = {K[t]}/_{K[t]\phi}$ $(\phi \in K[t])$

tiene estructura natural de anillo, y es por tanto una K-álgebra.

Demostración:

La estructura de anillo para $K[t]_\phi$ se obtiene a partir de la suma vectorial en el espacio cociente, y el producto inducido por el producto usual de polinomios:

$(\varphi + K[t]\phi)(\psi + K[t]\phi) = \varphi\psi + K[t]\phi$.

Esta fórmula define sin ambiguedad el producto de ele mentos en $K[t]_\phi$, pues si $\varphi_1 - \varphi \in K[t]\phi$, $\psi_1 - \psi \in K[t]$ entonces

$\varphi_1\psi_1 - \varphi\psi = \varphi_1(\psi_1 - \psi) + \psi(\varphi_1 - \varphi) \in K[t]\phi$.

La prueba de que $K[t]_\phi$ con estas operaciones es anillo, no ofrece ya dificultad.

2.3.3 Proposición.

Si $p \in K[t]$ es polinomio primo, entonces $K[t]_p$ es cuerpo.

Demostración:

Por 2.3.1, cada elemento no nulo de $K[t]_p$, puede escribirse en la forma $\rho + K[t]p$ con $\mathrm{gr}\,\rho < \mathrm{gr}\,p$, y por ser p primo m.c.d.$(\rho, p) = 1$. Por la identidad de Bezout (2.2.2) existen polinomios ξ, $\zeta \in K[t]$ con $\xi\rho + \zeta p = 1$, y así:

$(\xi + K[t]p)(\rho + K[t]p) = (\xi\rho) + K[t]p = 1 + K[t]p$, es decir, $\xi + K[t]p$ es elemento inverso de $\rho + K[t]p$.

CAPITULO IV: ELEMENTOS DE LA GEOMETRIA AFIN

1. ESTRUCTURA DE ESPACIO AFIN

El vector nulo desempeña dentro de la geometría vectorial, un papel singular que lo distingue de los demás vectores del espacio; En este sentido, un espacio vectorial no es homogéneo, y se hace necesario elegir un modelo más adecuado para representar el espacio puntual intuitivo.

Estableceremos el concepto de espacio afín, mediante un sistema de axiomas que abstraiga las propiedades esenciales del "transporte paralelo" de vectores fijos, por medio de la idea elemental de equipolencia.

El modelo afin así construido, veremos que refleja fielmente la propiedad de homogeneidad del espacio puntual intuitivo, así como las relaciones básicas de incidencia y paralelismo de planos y rectas, ignorando todas las demás cuestiones en las que interviene la noción de distancia , ángulo,...etc.

Por otra parte no supone trabajo adicional, y resulta una generalización conveniente, elegir como cuerpo base de nuestra estructura afin n-dimensional un cuerpo conmutativo cualquiera K, donde n representa un número natural.

1.1 <u>Relación de equipolencia</u>:

Sea X un conjunto y $\triangle$ una relación de equivalencia en el producto crtesiano $X \times X$. Se denota por ab, a la clase de equivalencia definida por el par (a,b) de $X \times X$, y por $X_\triangle$ al cojunto cociente $X \times X/\triangle$.

Así si $a,b,c,d \in X$, $ab \in X_\triangle$ y $(a,b)\triangle(c,d) \Leftrightarrow ab=cd$.

1.1.1 Definición:

Una relación de <u>equipolencia</u> sobre un conjunto X, es una relación de equivalencia $\triangle$ en $X \times X$ verificando las propiedades:

E1) Si $a,c,d \in X$, existe un único $b \in X$ tal que $(a,b)\triangle(c,d)$ (es decir, $ab=cd$)

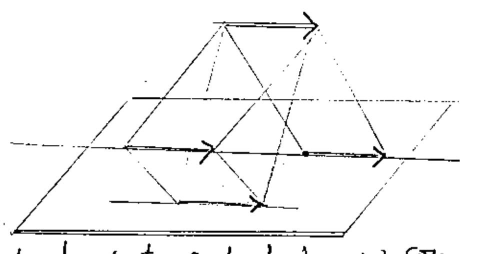
E2) $(a,b)\triangle(c,d) \Rightarrow (a,c)\triangle(b,d)$ (ó de forma equivalente: $ab=cd \Rightarrow ac=bd$)

1.1.2 Ejemplo:

Si V es un espacio vectorial, la relación de equivalencia en $V \times V$ definida por: $(u,v)\ \Delta\ (u',v') \Leftrightarrow v-u = v'-u'$, es una relación de equipolencia, y la aplicación $\Delta_o : V \ni v \mapsto ov \in V$, es biyectiva.

Nos referiremos a Δ como la relación natural de equipolencia en el espacio vectorial V.

1.1.3 Ejemplo:



Todos los vectores de la figura son equipolentes

La relación usual de equipolencia entre vectores fijos de la recta plano, ó espacio puntual intuitivo, es una relación de equipolencia,en el sentido de la definición 1.1.1 (Véase figura).

Este ejemplo constituye la base intuitiva fundamental de esta exposición, y el lector deberá utilizarlo sistemáticamente a lo largo de toda la sección II, realizando personalmente las construcciones geométricas oportunas.

1.1.4 Proposición:

Si Δ es una relación de equipolencia sobre un conjunto X, entonces el cociente $X_\Delta = X \times X/\Delta$, admite una estructura natural de grupo abeliano.

<u>Demostración</u> :

Si $v, w \in X_\Delta$ se define la suma $v \dotplus w$, con ayuda de un punto auxiliar $a \in X$: Por E1) existe $b \in X$ tal que $ab = v$, y existe $c \in X$ con $bc = w$. Por definición, la suma $v \dotplus w$ es el elemento $ac \in X_\Delta$, y se escribe : $v \dotplus w = ab \dotplus bc = ac$.

Supóngase $v = ab = a'b'$, $w = bc = b'c'$. Por E2) es $aa' = bb' = cc'$, y $ac = a'c'$, por lo que la suma $v \dotplus w$ no depende del punto auxiliar elegido, y la definición es consistente.

La prueba de que $(X_\Delta\ , \dotplus)$ es grupo abeliano, no ofrece dificultad. Nótese que para $a \in X$, $aa = 0 \in X_\Delta$ es el elemento neutro, y si $v = ab$, $-v = ba$.

1.2 Espacio afín y estructura afin.

1.2.1 Definición:

Una estructura afín sobre un conjunto X, viene definida por una pareja $(\triangle, \rightarrow)$ donde $\triangle$ es una relación de equipolencia sobre X, y "$\rightarrow$" una estructura vectorial sobre el grupo abeliano $(X_\triangle, \dotplus)$.

1.2.2

Se denomina al conjunto X conjunto de puntos, y a $X_\triangle$ con su estructura vectorial, que denotamos por $\vec{X}_\triangle$, espacio de los vectores libres. La dimensión de $\vec{X}_\triangle$ es la dimesión de la estructura afín.

Si $(a,b) \in X \times X$, escribimos $\vec{ab}$ para referirnos al elemento ab de $\vec{X}_\triangle$. Designando igualmente por $\triangle : X \times X \ni (a,b) \longmapsto ab \in \vec{X}_\triangle$ a la proyección canónica de la relación de equipolencia, la propiedad E1) y la regla de sumar en $(X_\triangle, \dotplus)$ se pueden escribir en la forma:

$\triangle 1)$ Para todo $a \in X$, la aplicación $\triangle_a$ definida por : $\triangle_a(x) = \triangle(a,x)$, para $x \in X$, es biyectiva.

$\triangle 2)$ Para todo $a,b,c \in X$ es $\triangle(a,b) \dotplus \triangle(b,c) = \triangle(a,c)$

y se tiene la siguiente proposición:

1.2.3 Proposición

Sea X conjunto, $\vec{X}$ espacio vectorial, y $\triangle : X \times X \longrightarrow \vec{X}$ aplicación verificando las propiedades $\triangle 1)$ y $\triangle 2)$ anteriores. Existe entonces una única estructura afín $(\triangle, \rightarrow)$ sobre X, tal que:

i) si $a,b,c,d \in X$, $(a,b) \triangle (c,d) \Longleftrightarrow \triangle(a,b) = \triangle(c,d)$

ii) La aplicación $\overline{\triangle} : \vec{X}_\triangle \ni \vec{ab} \longmapsto \triangle(a,b) \in \vec{X}$, es lineal

Demostración:

La relación de equivalencia $\triangle$ en $X \times X$ queda unívocamente determinada por la condición i), y la aplicación $\overline{\triangle}$ de ii) es obviamente biyectiva.

La condición de linealidad de $\overline{\triangle}$ determina pues unívocamente la estructura Vectorial "$\rightarrow$" de $X_\triangle$.

Para concluir la demostración, solo queda probar que la relación $\triangle$ satisface las propiedades E1) y E2). Solo E2) no es absolutamente trivial:

Sean $a,b,c,d \in X$ y supóngase $(a,b) \triangle (c,d)$, es decir $\triangle(a,b) = \triangle(c,d)$. Utilizando $\triangle 2)$ se tiene: $\triangle(a,c) = \triangle(a,b) \dotplus \triangle(b,d) \dotplus \triangle(d,c) = \triangle(c,d) \dotplus \triangle(d,c) \dotplus \triangle(b,d) = \triangle(b,d)$, ya que $\triangle(c,d) \dotplus \triangle(d,c) = \triangle(c,c) = \vec{0} \in \vec{X}$.

1.2.4 Definición

Un espacio afín X es una terna $X=(X,\vec{X},\triangle)$, donde X es un conjunto (de puntos), $\vec{X}$ es un espacio vectorial, y $\triangle$ es aplicación de $X_{\times}X$ en $\vec{X}$ verificando las propiedades $\triangle 1)$ y $\triangle 2)$ de 1.2.2

1.2.5 Observación

Si $(X,\vec{X},\triangle)$ es espacio afín, entonces X admite la estructura afín descrita en la proposición 1.2.3 $(\triangle, \rightarrow)$, y la aplicación $\overline{\triangle} : X_{\triangle} \ni \vec{ab} \longmapsto \triangle(a,b) \in \vec{X}$, define un isomorfismo lineal que permite identificar el vector libre $\vec{ab}$ con $\triangle(a,b)$, y denotar a ambos por el mismo símbolo $\vec{ab}$.

Con este convenio queda establecida cierta equivalencia formal entre las definiciones 1.2.1 y 1.2.4, pero en un sentido estricto no puede hablarse de equivalencia absoluta. La relación precisa entre ambas definiciones viene establecida por el siguiente teorema:

1.2.6 Teorema

a) Si $(\triangle, \rightarrow)$ es una estructura afín sobre un conjunto X, entonces $(X,\vec{X}_{\triangle},\triangle)$ es un espacio afín. (Véase 1.2.2)

b) Si $(X,\vec{X},\triangle)$, $(X,\vec{X}',\triangle')$ son dos espacios afines definidos sobre el mismo conjunto de puntos X, ambos inducen la misma estructura afín sobre X , si y solo si existe $\theta : \vec{X} \to \vec{X}'$ isomorfismo lineal que hace conmutativo el diagrama:

$$\begin{tikzcd} X_{\times}X \arrow[r, "\triangle'"] \arrow[dr, "\triangle"'] & \vec{X}' \\ & \vec{X} \arrow[u, "\theta"'] \end{tikzcd}$$

Los detalles de la demostración , quedan como ejercicio

1.2.7 Definición

Se llama dimensión de un espacio afín $X = (X, \vec{X}, \Delta)$, a la dimensión de su estructura afín, que coincide con la dimensión de su espacio vectorial asociado $\vec{X}$.

1.2.8 Ejemplo

En la figura 1 (ejemplo 1.1.3) se recuerda la definición de relación de equipolencia en los espacios intuitivos puntuales

En la figura 2 se muestra el producto $\lambda\vec{ab}$, donde a,b son dos puntos distintos y $\lambda \in R$:

$\lambda\vec{ab}$ es el vector $\vec{ac}$, donde c es el punto (de la recta definida por a y b) que se corresponde con el valor de λ, en la graduación (de la recta) obtenida al tomar el punto "a" como origen, y el "b" como punto unidad.

Esta regla proporciona una estructura vectorial sobre el espacio de vectores libres, y una estructura afín sobre los espacios puntuales intuitivos.

Denotaremos por $\mathcal{R}$, $\mathcal{P}$, y $\mathcal{E}$ a la recta, plano, y espacio afin intuitivos respectivamente.

1.2.9 Ejemplo

Si V es espacio vectorial, y Δ la relación de equipolencia natural en V descrita en 1.2.7, la biyección $\Delta_0 : V \ni v \longmapsto ov \in V_\Delta$ es un isomorfismo entre los grupos $(V,+)$ y $(V_\Delta, +)$, e induce sobre este último una estructura vectorial "$\longrightarrow$" única, que hace a Δ_0 isomorfismo lineal.

$(\Delta, \longrightarrow)$, es la estructura afín natural del espacio vectorial V.

Por otra parte, la aplicación $\Delta : V \times V \ni (v,w) \longmapsto w-v \in V$, verifica las propiedades $\Delta 1)$ y $\Delta 2)$ de 1.2.2, e induce sobre V la estructura afín anterior. Se denota por $A(V)=(V,V,\Delta)$ al correspondiente espacio afín.

Observese que la igualdad $\vec{vw} = w-v$ es consecuencia del convenio de 1.2.5 .

Si $V = V_n(K)$, escribimos $A(V) = A(K^n)$.

1.2.10 Ejemplo

Sea V K-espacio vectorial y α una forma lineal no nula $\alpha: V \longrightarrow K$. Sea $X = \{x \in V \ / \ \alpha(x)=1\}$ y $\vec{X} = \{\vec{x} \in V \ / \ \alpha(\vec{x})=0\}$. $\vec{X}$ es hiperplano vectorial de V, y la aplicación $\triangle: X \times X \ni (x,y) \longmapsto y-x \in \vec{X}$ verifica las propiedades $\triangle 1)$ y $\triangle 2)$ de 1.2.2.

Así $X = (X, \vec{X}, \triangle)$ es un espacio afín que denominamos hiperplano afín (no vectorial) asociado a (V, α).

En particular tomando

$$V = \hat{A}_n(K) = \left\{ \hat{a} = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0 \\ a \end{pmatrix} \Big/ a_i \in K \right\} \text{ y } \alpha = x_0 : \hat{A}_n(K) \ni \begin{pmatrix} a_0 \\ a \end{pmatrix} \longmapsto a_0 \in K$$

la forma lineal correspondiente a la 0-ésima coordenada, se obtiene el espacio afín $A_n(K) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ a \end{pmatrix} \Big/ a_i \in K \right\}$, con espacio vectorial asociado $\vec{A}_n(K) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ a \end{pmatrix} \Big/ a_i \in K \right\}$

1.2.11 Definición

Fijado un punto $a \in X$ del espacio afín $(X, \vec{X}, \triangle)$ (por $\triangle 1)$) se verifica que $\triangle_a : X \ni x \longmapsto \triangle(a,x) = \vec{ax} \in \vec{X}$ es aplicación biyectiva, e induce una única estructura vectorial sobre X tal que $\triangle_a$ es isomorfismo lineal. Se denota por X_a a este espacio vectorial, y se denomina vectorialización del espacio afín X en el punto a.

La aplicación $\triangle_a^{-1} : \vec{X} \longrightarrow X$ viene definida por la condición: $\triangle_a^{-1}(\vec{v}) = b \Leftrightarrow \vec{ab} = \vec{v}$, y se escribe por convenio $\triangle_a^{-1}(\vec{v}) = a \dotplus \vec{v}$, así $a \dotplus \vec{v} = b \Leftrightarrow \vec{ab} = \vec{v}$, y se tiene la identidad: $a \dotplus \vec{ab} = b$.

La aplicación $\dotplus : X \times \vec{X} \ni (a, \vec{v}) \longmapsto a \dotplus v \in X$, traduce las propiedades $\triangle 1)$ y $\triangle 2)$ de la siguiente forma:

$\not\leq 1)$ Dados $a, b \in X$, existe un único $\vec{v} \in \vec{X}$ tal que $b = a \dotplus \vec{v}$

$\not\leq 2)$ Si $a \in X$, $\vec{v}, \vec{w} \in \vec{X}$, entonces $(a \dotplus \vec{v}) \dotplus \vec{w} = a \dotplus (\vec{v} \dotplus \vec{w})$

y se tiene el siguiente resultado:

1.2.12 Proposición

Sea X un conjunto, $\vec{X}$ espacio vectorial, y $\dotplus : X \times \vec{X} \longrightarrow X$, verificando las propiedades $\not\leq 1)$ y $\not\leq 2)$ anteriores.

Si $a,b \in X$, sea $\Delta(a,b) \in \vec{X}$ el único vector tal que : $a \dotplus \Delta(a,b) = b$; Entonces $X=(X,\vec{X},\Delta)$ es un espacio afin. La demostración es inmediata.

Se puede así establecer la siguiente definición de espacio afin equivalente a la 1.2.4 :

1.2.13 Definición

Un espacio afin X es una terna $X=(X,\vec{X},\dotplus)$ donde X es un conjunto (de puntos), $\vec{X}$ un espacio vectorial, y $\dotplus : X \times \vec{X} \rightarrow X$, una aplicacion verificando las propiedades $\lesssim 1)$ y $\lesssim 2)$.

1.2.14 Observación

Si a es un punto del espacio afin X (sobre el cuerpo K), la combinación lineal $\lambda x \dotplus \mu y$ en la vectorialización X_a ($\lambda, \mu \in K$, $x,y \in X$) la denotamos por $(\lambda x \dotplus \mu y)_a$, y se tiene la identidad: $(\lambda x \dotplus \mu y)_a = a \dotplus \lambda \vec{ax} \dotplus \mu \vec{ay}$

1.2.15 Ejemplo

La suma de punto y vector en los ejemplos 1.2.9 y 1.2.10 , se corresponde con la suma de vectores en la estructura vectorial subyacente.

1.2.16 Notación

Si $X=(X,\vec{X},\Delta)$, $X'=(X',\vec{X}',\Delta)$...etc. son espacios afines, se denotan por $(\Delta, \rightarrow)$, $(\Delta', \rightarrow)$ ...etc. las correspondientes estructuras afines, e indicamos en todos ellos por el simbolo $\dotplus$ la suma de punto y vector, y la suma de vectores. El símbolo $\vec{ab}$ representa en cualquier caso al vector libre definido por los puntos a y b (véase convenio 1.2.1). Esta notación será mantenida en adelante, sin necesidad de hacer referencia explícita.

2. APLICACIONES AFINES Y SEMIAFINES. GEOMETRIA AFIN

Las aplicaciones naturales entre espacios afines, son aquellas compatibles con las estructuras afines correspondientes.

Las biyecciones de un espacio afin compatibles con la estructura, constituyen el grupo de transformaciones que da lugar a la geometría afín del espacio.

El intereés del estudio (simultáneo) de las aplicaciones semiafines será posteriormente justificado. De momento baste decir, que las biyecciones semiafines de un espacio son justamente aquellas que conservan la geometría afín.

2.1 Definiciones preliminares

Sean $X=(X,\vec{X},\Delta)$, $X'=(X',\vec{X}',\Delta')$ espacios afines sobre los cuerpos K y K' respectivamente (véase notación 1.2.14).

En estas condiciones se establece la siguiente definición:

2.1.1 Definición

Una aplicación $f:X\longrightarrow X'$ se dice semiafin si

A1) f es compatible con las relaciones de equipolencia, ó de forma equivalente : Si $a,b,c,d\in X$, $\vec{ab}=\vec{cd} \Rightarrow \overrightarrow{f(a)f(b)} = \overrightarrow{f(c)f(d)}$.

A2) Existe $\sigma:K\longrightarrow K'$ automorfismo de cuerpos, tal que la aplicación $\vec{f}:\vec{X}\ni\vec{ab}\longmapsto\overrightarrow{f(a)f(b)}\in\vec{X}'$, verifica $\vec{f}(\lambda\vec{v})=\lambda^{\sigma}\vec{f}(\vec{v})$ para todo $\vec{v}\in\vec{X}$ y $\lambda\in K$, donde $\lambda^{\sigma}=\sigma(\lambda)$.

Se denomina a σ automorfismo asociado a f.

La aplicación f se dice afín, si K=K' y σ es el automorfismo identidad

2.1.2

Una aplicación f del espacio afín X en el X' que verifica la propiedad A1), induce la aplicación $\vec{f}:\vec{X}\longrightarrow\vec{X}'$ que es automáticamente aditiva. Si además f verifica A2), entonces f es aplicación σ-lineal. Se denomina a f aplicación semilineal asociada a f.

Observese por otra parte que el hecho de que f sea aplicación semiafín, solo depende de las estructuras afines $(\Delta, \rightarrow)$ y $(\Delta', \rightarrow)$.

2.1.3

Si $f:X\longrightarrow X'$ es una aplicación entre espacios afines (no necesariamente semiafin), y $a\in X$, la aplicación:

$f_a:\vec{X}\ni\vec{ax}\longmapsto\overrightarrow{f(a)f(x)}\in\vec{X}'$, es la única que hace conmutativo el diagrama:

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & X' \\ \Delta_a\downarrow & & \downarrow\Delta'_{f(a)} \\ \vec{X} & \xrightarrow[f_a]{} & \vec{X}' \end{array}$$

Cuando f es semiafín, entonces $f_a=\vec{f}$ para todo $a\in X$. En particular , f_a es semilineal.

Establezcamos el recíproco:

2.1.4 Teorema

Sea $f:X \longrightarrow X'$ aplicación entre espacios afines, y supóngase que existe $a \in X$ tal que la aplicación $f_a:\vec{X} \longrightarrow \vec{X}'$ es semilineal. Entonces para todo $b \in X$, es $f_a=f_b$ y la aplicación f es semiafín, con aplicación semilineal asociada $\vec{f}=f_a$.

Demostración:

Sea $\vec{v} = \vec{bx} \in \vec{X}$. Entonces : $f_b(\vec{v})=f_b(\vec{bx})=\overrightarrow{f(b)f(x)}=\overrightarrow{f(a)f(x)}-\overrightarrow{f(a)f(b)}=$
$=f_a(\vec{ax})-f_a(\vec{ab})=f_a(\vec{ax}-\vec{ab})=f_a(\vec{bx})=f_a(\vec{v})$.

El resto es trivial.

Utilizando el concepto de vectorialización de un espacio afín en un punto (1.2.11), y este teorema, se llega al siguiente criterio:

2.1.5 Corolario

Si $f:X \longrightarrow X'$ es aplicación entre espacios afines, son equivalentes las siguientes afirmaciones:

i) f es aplicación semiafín

ii) Existe $a \in X$ tal que $f_a:\vec{X} \longrightarrow \vec{X}$ es semilineal

iii) Existe $a \in X$ tal que $f : X_a \longrightarrow X_{f(a)}$ es semilineal

iv) Para todo $a \in X$, $f : X_a \longrightarrow X_{f(a)}$ es semilineal.

Demostración:

La equivalencia entre ii) y iii) es consecuencia de 2.1.12 y de la conmutatividad del diagrama de 2.1.3 .

2.1.6 Corolario

1) Si $f:X \longrightarrow X'$ es aplicación semiafin, y $a \in X$ entonces:
$f(a+\vec{v}) = f(a)+\vec{f}(\vec{v})$, para todo $\vec{v} \in \vec{X}$

2) Recíprocamente: si $\varphi : \vec{X} \longrightarrow \vec{X}'$ es aplicación semilineal, $a \in X$ $a' \in X'$, existe una única aplicación semiafin $f:X \longrightarrow X'$ tal que $f(a) = a'$ y $\vec{f} = \varphi$, y viene definida por la formula:
$f(a+v)=a'+\varphi(\vec{v})$ para todo $\vec{v} \in \vec{X}$.

Demostración:

1) Para $x \in X$, $\vec{ax} = \vec{v}$, es $f(x)=f(a+\vec{v})=f(a)+\overrightarrow{f(a)f(x)}=f(a)+\vec{f}(\vec{ax})=$
$=f(a)+\vec{f}(\vec{v})$.

2) Observese simplemente que $f_a= \varphi$.

2.1.7 Corolario

Una aplicación semiafin $f:X\longrightarrow X'$ es inyectiva (suprayeciva) si y solo si lo es su aplicación semilineal asociada $\vec{f}$. En particular f es isomorfismo semiafin (es decir, aplicación afin biyectiva), si y solo si $\vec{f}$ es isomorfismo semilineal.

Demostración:

Es suficiente tener en cuenta el diagrama conmutativo de 2.1.3, el teorema 2.1.4, y la observación de que Δ_a y $\Delta'_{f(a)}$ son aplicaciones biyectivas.

2.1.8 Ejemplo:

Una aplicación semiafin $f:A_n(K)\longrightarrow A_m(K')$ con automorfismo asociado $\sigma:K\longrightarrow K'$, viene determinado por una aplicación semilineal $\vec{f}:\vec{A}_n(K)\longrightarrow\vec{A}_m(K')$ y la imagen por f de $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\in A_n(K)$, digamos $\begin{pmatrix}1\\a\end{pmatrix}\in A_m(K')$

Sea $\vec{A}=\begin{pmatrix}a_{11}\dots a_{1n}\\ a_{m1}\dots a_{mn}\end{pmatrix}\in FL(m,n;K')$ tal que $\vec{f}\begin{pmatrix}0\\x\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\x'\end{pmatrix}\Leftrightarrow x'=\vec{A}x^{\sigma}$

en donde $(x^{\sigma})^t=(x_1^{\sigma},\dots x_n^{\sigma})$. Se tiene entonces:

$\begin{pmatrix}1\\x'\end{pmatrix}=f\begin{pmatrix}1\\x\end{pmatrix}=f\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+\vec{f}\begin{pmatrix}0\\x\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\a\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&0^t\\0&A\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\x^{\sigma}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0^t\\a&\vec{A}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\x^{\sigma}\end{pmatrix}$; y el sistema

$\left.x_i'=a_i+\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j\right\}_{i=1,\dots,m}$ representa las ecuaciones de f.

Las matrices de la forma $A=\begin{pmatrix}1&0^t\\a&A\end{pmatrix}$ con $\vec{A}\in FL(n,m;K')$ se denominan afines, y $FA(n,m;K')$ denota al conjunto de dichas matrices.

Si n=m, se escribe $FA(n;K')$ (ó $FA(n)$ simplemente) para denotar $\mathcal{A}(n,n;K')$.

Finalmente, cuando $K=K'$ y $\sigma=id:K\longrightarrow K$, la aplicación afín f se identifica con la matriz A, y se escribe $f=A:A_n\longrightarrow A_n$.

2.2 Producto de aplicaciones semiafines

Sean $X=(X,\vec{X},\Delta)$, $X'=(X',\vec{X}',\Delta')$, $X''=(X'',\vec{X}'',\Delta'')$ espacios afines, y $f:X\longrightarrow X'$ $g:X'\longrightarrow X''$ dos aplicaciones:

2.2.1 Teorema

Si f y g son dos aplicaciones semiafines con automorfismos asociados σ y τ respectivamente, entonces g.f es semiafin, con automorfismo asociado $\tau\cdot\sigma$.

Además $\overrightarrow{g\cdot f} = \vec{g}\cdot\vec{f}$, y en particular si f y g son afines , g.f también lo es.

<u>Demostración</u>:

Fijado el punto $a\in X$, por ser f y g semiafines, es $f_a=\vec{f}$, y $g_{f(a)}=\vec{g}$. Se tiene el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend left, "g\cdot f"] \arrow[d, "\Delta_a"'] & X' \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\Delta_{f(a)}"] & X'' \arrow[d, "\Delta_{g(f(a))}"] \\
\vec{X} \arrow[r, "\vec{f}"] \arrow[rr, bend right, "\vec{g}\cdot\vec{f}"'] & \vec{X}' \arrow[r, "\vec{g}"] & \vec{X}''
\end{tikzcd}$$

De aquí se deduce que $(g\cdot f)_a = \vec{g}\cdot\vec{f}$, y es por tanto semilineal respecto a $\tau\cdot\sigma$. Por 2.1.5, g.f es semiafín.

2.2.2 Corolario

Si f es isomorfismo semiafin, también lo es f^{-1}, y $\overrightarrow{f^{-1}}=(\vec{f}^{-1})$

2.2.3 Ejemplo

Sean $A=\begin{pmatrix}1 & 0^t\\ a & \vec{A}\end{pmatrix}\in FA(n,m;K')$, $B=\begin{pmatrix}1 & 0^t\\ b & B\end{pmatrix}\in FA(m,p;K'')$, $\sigma:K\longrightarrow K'$

$\tau:K'\longrightarrow K''$ automorfismos, y $A_\sigma:A_n(K)\longrightarrow A_m(K')$, $B_\tau:A_m(K')\longrightarrow A_p(K'')$ aplicaciones semilineales de ecuaciones respectivas:

$\begin{pmatrix}1\\ x'\end{pmatrix}= A\begin{pmatrix}1\\ x^\sigma\end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix}1\\ x''\end{pmatrix}= B\begin{pmatrix}1\\ x'^\tau\end{pmatrix}$.

Las ecuaciones de $B_\tau\cdot A_\sigma$ serán : $\begin{pmatrix}1\\ x''\end{pmatrix}= B(A^\tau)\begin{pmatrix}1\\ x^{\tau\cdot\sigma}\end{pmatrix}$, donde A^τ es la matriz deducida de A aplicndo el automorfismo τ a cada uno de sus elementos.

Así, $B_\tau\cdot A_\sigma = (B(A^\tau))_{\tau\cdot\sigma}$. En particular, si $K=K'=K''$, y σ , τ son la identidad, se puede escribir (véase 2.1.8): $B\cdot A = BA:A_n\longrightarrow A_p$

y $\overrightarrow{B\cdot A} = \vec{B}\cdot\vec{A} = \vec{BA}:A_n\longrightarrow A_p$.

2.2.4

Una aplicación afín de un espacio en si mismo, se denomina endomorfismo afín. El conjunto EA(X) de endomorfismos afines de un espacio afín X, tiene (por 2.2.1) estructura de semigrupo respecto a la composición de aplicaciones (Nótese que la aplicación $id:X\longrightarrow X$ es afín).

La correspondencia $\rightarrow : EA(X) \ni f \longmapsto \vec{f} \in EL(\vec{X})$, es un homomorfismo suprayectivo de semigrupos

2.2.5

La familia $GA(X)$ de los endomorfismos biyectivos de un espacio afín X, tiene estructura de grupo respecto a la composición de aplicaciones, y se denomina grupo afin.

El grupo afín , define la geometría afín del espacio:
Una propiedad (relativa a algún ente del espacio) se llamará propiedad afín, si es conservada por el grupo afín mediante la actuación (natural) que deberá precisarse en cada caso.

El grupo afín es en este sentido, el mayor grupo de biyecciones del espacio, respecto al cual la estructura (Δ , $\rightarrow$) es una propiedad geométrica.

2.2.6 Ejemplo

El semigrupo de endomorfismos afines de A_n , se identifica con el semigrupo de matrices afines $EA(n)$ (ver 2.1.8 y 2.2.3)

El grupo afín de A_n , $GA(n)$, se identifica con el de matrices no singulares de $EA(n)$

2.3 Grupo de traslaciones

Sea X un espacio afín. La aplicación $\rightarrow : EA(X) \ni f \longmapsto \vec{f} \in EL(\vec{X})$ es un homomorfismo suprayectivo de semigrupos, que aplica el grupo afín $GA(X)$ sobre el grupo lineal $GL(\vec{X})$, y así

$\rightarrow : GA(X) \longrightarrow GL(\vec{X})$ es homomorfismo (suprayectivo) de grupos, cuyo nucleo es el grupo de las traslaciones, que inmediatamente describiremos.

El grupo de traslaciones de un espacio afín abstracto, refleja la idea de transporte paralelo en el espacio afín intuitivo;Se verá cómo a partir de él , puede reproducirse la relación de equipolencia.

2.3.1 Definición

Sea $X=(X,\vec{X}, \Delta)$ espacio afín, y $\vec{v} \in \vec{X}$. La aplicación :
$t_{\vec{v}} : X \ni x \longrightarrow x \dotplus \vec{v} \in X$, se denomina traslación de vector $\vec{v}$.

2.3.2 Proposición

El conjunto $T(X)$ de traslaciones de un espacio afín X es un subgrupo abeliano del grupo afín $GA(X)$, y la aplicación: $(\vec{X},+) \ni \vec{v} \to t_{\vec{v}} \in T(X)$ es un isomorfismo de grupos.

Por otra parte, si $f \in EA(X)$, f es traslación si y solo si $\vec{f} = \vec{id}: \vec{X} \to \vec{X}$.

Demostración:

Sea $\vec{v} \in \vec{X}$ y $f=t_{\vec{v}}: X \ni x \mapsto x+\vec{v} \in X$. Si $a,x \in X$, se verifica: $\vec{v} = \overrightarrow{af(a)} = \overrightarrow{xf(x)} \Rightarrow \vec{ax} = \overrightarrow{f(a)f(x)} = \vec{f}_a(\vec{ax})$, y $\vec{f}_a = \vec{id}: \vec{X} \to \vec{X}$. Por 2.1.5 , $f=t_{\vec{v}}$ es afin y $\vec{f} = \vec{id}$.

Recíprocamente: si $f \in EA(X)$ y $\vec{f}=\vec{id}$, tomando $a \in X$ y $\vec{v}=\overrightarrow{af(a)}$, para todo $x \in X$ es: $f(x)=f(a+\vec{ax})=f(a)+\vec{ax}=(a+\overrightarrow{af(a)})+\vec{ax} =$ $=(a+\vec{ax})+\vec{v}=x+\vec{v}$, y $f=t_{\vec{v}}$.

Por último, se comprueba trivialmente que para $v,w \in \vec{X}$, es $t_{\vec{w}} \cdot t_{\vec{v}} = t_{\vec{v}+\vec{w}}$, y la aplicación $\vec{X} \ni v \to t_{\vec{v}} \in T(X)$ es isomorfismo de grupos.

2.3.3 Ejemplo

Una traslación $A: A_n \to A_n$ es de la forma $A = \begin{pmatrix} 1 & 0^t \\ v & \vec{I} \end{pmatrix}$, donde $\begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix} \in \vec{A}_n$ es el vector de traslación, y $\vec{I} \in GL(n)$ es la matriz identidad. Las ecuaciones son $\left. x_i' = x_i + v_i \right\}_{i=1,\dots,n}$.

2.3.4 Observaciones

1. El primer teorema de isomorfía para grupos, aplicado al homomorfismo $\to$: $GA(X) \to GL(\vec{X})$, muestra que el grupo $GL(\vec{X})$ es isomorfo al cociente $GA(X)/T(X)$.
2. Un subgrupo T del grupo de las biyecciones $X!$ de un conjunto X, se dice simplemente transitivo, si para todo $a,b \in X$ existe una única transformación $t \in T$ con $t(a)=b$.

   Observese que el grupo $T=T(X)$ de traslaciones en el espacio afín X, es simplemente transitivo, y se puede construir con la única ayuda de la relación de equipolencia .

La siguiente proposición, muestra un resultado recíproco, que da lugar a una nueva definición de estructura afín:

2.3.5 Proposición

Un subgrupo T abeliano y simplemente transitivo del grupo $X!$ de biyecciones de un conjunto X, induce una relación de equipolencia natural sobre X, definida por la condición:
$(a,b) \triangle (a',b')$ si y solo si la aplicación $t \in T$ que transforma a en a', transforma b en b'.
Por otra parte, existe un isomorfismo natural entre los grupos T y X_Δ. En consecuencia, una estructura afín sobre un conjunto X, puede interpretarse como una pareja $(T, \rightarrow)$ donde T es un subgrupo abeliano simplemente transitivo de $X!$, y "$\rightarrow$" una estructura de espacio vectorial para el grupo T. (Compárese con la definición 1.2.1).
La demostración constituye un buen tema para un ejercicio.

2.4 Homotecias afines. Grupo de dilataciones.

El grupo de dilataciones Dil(X), de un espacio afín X, es la imagen inversa del subgrupo de homotecias vectoriales $\mathcal{Z}(\vec{X})$, mediante el homomorfismo $\rightarrow : GA(X) \rightarrow GL(\vec{X})$, y contiene por tanto al grupo de traslaciones.
Las homotecias afines distintas de la identidad, son los elementos del conjunto Dil(X)-T(X), y están caracterizadas (dentro del grupo de dilataciones) por la propiedad de poseer algún punto fijo, que resulta ser único, y se denomina centro de homotecia. Se llama razón de homotecia, a la de la homotecia vectorial asociada.
Centro y razón son los elementos geométricos que definen una homotecia afín.

2.4.1 Definición

Sea X espacio afín sobre K. La homotecia (afín) de centro $c \in X$ y razón $k \in K$ $(k \neq 0)$, es la aplicación: $h: X \ni x \rightarrow c + k\vec{cx} \in X$.
Se escribe : $h = h(c;k)$.
Observese que $h(c;1)=id$.

2.4.2 Proposición

Sea $k \in K$, distinto de 0 y de 1.

Una homotécia afin $h=h(c;k)$ en el espacio afín X , es una transformación afín cuya aplicación lineal asociada $\vec{h}$, es homotecia vectorial en X de razón igual a k.

Recíprocamente : si h es una transformación afín de X, cuya aplicación lineal asociada es homotecia vectorial de razón k , entonces h tiene un único punto fijo que puede expresarse en la forma : $c = a + \frac{1}{1-k} \overrightarrow{af(a)}$ para cualquier $a \in X$. Además, h es homotécia afín de centro c y razón k .

Demostración:

Sea $h=h(c;k)$, si $\vec{v}=\vec{cx}$ X es $h(x)=c+k\vec{cx}$ y $h(c)=c$; Se tiene: $h_c(\vec{v})=h_c(\vec{cx})=\overrightarrow{h(c)h(x)}=\overrightarrow{ch(x)}=k\vec{cx}=k\vec{v}$, y h_c es la homotecia vectorial $\vec{h}_k:\vec{X}\longrightarrow\vec{X}$. Por 2.1.4 , h es afín y $\vec{h}=\vec{h}_k$.

Recíprocamente: Si $h \in EA(X)$, y $\vec{h} = \vec{h}_k$, para $a \in X$, $a'=h(a)$ se tiene $h(x)=a'+k\vec{ax}$, y $h(x)=x \Leftrightarrow \overrightarrow{a'x} = k\vec{ax} \Leftrightarrow \overrightarrow{a'a}+\vec{ax} = k\vec{ax} \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow (1/1-k)\overrightarrow{aa'}=\vec{ax} \Leftrightarrow x = a+(1/1-k)\overrightarrow{aa'}$; y este punto c, es el único fijo para h.

Además, para todo $x \in X$ es $h(x)=h(c+cx)=c+h(cx)=c+kcx$, y $h=h(c;k)$.

2.4.3 Ejemplo

Una homotécia $A:A_n \longrightarrow A_n$, es de la forma $A =\begin{pmatrix} 1 & 0^t \\ a & k\vec{I} \end{pmatrix}$, donde $\vec{I} \in GL(n)$ es la matriz identidad, y $k \in K-\{0,1\}$ es la razón de homotécia.

Tomando como referencia el punto $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in A_n$, el centro se obtiene:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{1-k}\begin{pmatrix} 0 \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{1-k}a \end{pmatrix}.$$

Las ecuaciones són: $\left. x_i' = a_i + kx_i \right\}_{i=1\dots n}$.

2.4.4 Definición (proposición)

Una dilatación en un espacio afín X, es una transformación afín cuya aplicación lineal asociada es una homotécia vectorial.

El conjunto $Dil(X)$ de dilataciones, es un subgrupo de $GA(X)$ que contiene al grupo $T(X)$ de las traslaciones.

Demostración:

Observese simplemente que $Dil(X)$ es la imagen inversa del subgrupo $H(\vec{X})$ de homotecias vectoriales por el homomorfismo $\vec{\ }:GA(X)\longrightarrow GL(\vec{X})$.

La siguiente proposición, explicita en función de los elementos geométricos que las definen, los distintos productos de dilataciones. Su demostración constituye un buen ejercicio de calculo algebraico en espacios afines.

2.4.5 Proposición

Sea X espacio afín sobre K y k_1,k_2 $K-\{0\}$. Sea $\vec{v}\in\vec{X}$, y $c_1,c_2\in X$. Entonces:

1) si $k_1k_2\neq 1$, es $h(c_2;k_2).h(c_1;k_1)=h(c;k)$, con $k=k_1k_2$ y $c=c_2+(1-k_1/1-k_1k_2)\overrightarrow{c_1c_2}$.

2) Si $k_1k_2=1$, entonces $h(c_2;k_2).h(c_1;k_1)=t_w$, $w=(1-k_2)\overrightarrow{c_1c_2}$

3) $h(c;k_2).h(c;k_1)=h(c;k)$, $k=k_1k_2$

4) Si $k_1\neq 1$, es $t_{\vec{v}}.h(c_1;k_1)=h(c;k)$, con $k=k_1$, y $c=c_1+\frac{1}{1-k_1}\vec{v}$

5) Si $k_1\neq 0$, $h(c_1;k_1).t_{\vec{v}}=h(c;k)$, donde $k=k_1$ y $c=c_1+(k_1/1-k_1)\vec{v}$.

3. SUBESPACIOS AFINES

Los subconjuntos de un espacio afin que "heredan" la estructura del espacio ambiente se denominan subespacios afines.

Si X es un espacio afin, la familia $\mathcal{S}A(X)$ de sus subespacios, tiene estructura natural de retículo respecto a las operaciones "$\cap$" (intersección conjuntista) y "$\dotplus$" (suma afin de subespacios)

El comportamiento de la aplicación dimensión,
$\dim: \mathcal{S}A(X) \ni A \longmapsto \dim(A) \in \mathbb{Z}$, en relación con la estructura reticular de $\mathcal{S}A(X)$ se sintetiza en dos fórmulas de dimensión, que serán la llave para el estudio geométrico de las posiciones relativas entre subespacios afines.

3.1 Concepto de subespacio afin

3.1.1 Introducción:

Sea (Δ , $\rightarrow$) una estructura afin sobre el conjunto (no vacío) X. La relación de equipolencia $\triangle$ en X, induce sobre el producto cartesiano $A_\times A$ de cualquier subconjunto no vacío A de X , una relación de equivalencia que podemos denotar igualmente por $\triangle$.

Parece natural exigir en primer lugar a un subespacio afin A de X, que dicha relacion sea de equipolencia. Pero esta condición es equivalente a :

S1) Si $a,b,c \in A$, $d \in X$, y $\vec{ab} = \vec{cd}$, entonces $d \in A$.

Supongase que A verifica la condición S1). Denotando por $ab \in A_\Delta$, a la clase de equivalencia definida por $(a,b) \in A_\times A$ respecto a la relación de equipolencia Δ en $A_\times A$, la aplicación:

$\iota_A : A_\Delta \ni ab \longmapsto \vec{ab} \in X_\Delta$, es un homomorfismo inyectivo entre los grupos $(A_\Delta, \dotplus)$ y $(X_\Delta, \dotplus)$, cuya imagen $\iota_A(A_\Delta) = \{\vec{ab}/a,b \in A\}$ es un subgrupo de $(X_\Delta, \dotplus)$. $\vec{A}$ $/\!/$

Parece natural exigir ahora que dicha imagen sea subespacio vectorial de $\vec{X}$, ó lo que es equivalente:

S2) si $a,b \in A$ y $\lambda \in K$, entonces $c = a \dotplus \lambda \vec{ab} \in A$.

De ésta manera, la aplicación $\Delta : A_\times A \ni (a,b) \longmapsto \vec{ab} \in \vec{A}$ permite definir el espacio afin $A = (A, \vec{A}, \Delta)$ que dá estructura afín canónica al conjunto A.

Queda así justificada la siguiente definición:

3.1.2 1ª definición de subespacio afin

Sea X espacio afin, y A subconjunto no vacío de X. Se dice que A es subespacio(afín)de X (y se escribe $A < X$) cuando verifica las condiciones:

S1) Para $a,b,c \in A$, y $d \in X$, si $\vec{ab}=\vec{cd}$ entonces $d \in A$.

S2) Para $a,b \in A$ y $\lambda \in K$, es $c=a+\lambda\vec{ab} \in A$.

3.1.3 Proposición

Sea A subespacio afin (no vacío) del espacio afin $X=(X,\vec{X},\Delta)$. Entonces:

i) El conjunto $\vec{A}=\{\vec{ab}/a,b \in A\}$ es un subespacio vectorial de $\vec{X}$

ii) La aplicación $\Delta : A \times A \ni (a,b) \mapsto \vec{ab} \in \vec{A}$, verifica las condiciones Δ 1) y Δ 2) de 1.2.2 , y por tanto $(A,\vec{A},\Delta)$ es espacio afin.

Demostración:

i) Sea $\vec{u},\vec{v} \in \vec{A}$. Supóngase $\vec{u}=\vec{ab}$ con $a,b \in A$, y $\vec{v}=\vec{bc}$. Como $\vec{v} \in \vec{A}$, existen $b',c' \in A$ con $v=\vec{b'c'}=\vec{bc}$, por S1) es $c \in A$ y por tanto $u+v=\vec{ab}+\vec{bc}=\vec{ac} \in \vec{A}$.

Si $\vec{v} \in \vec{A}$, $\lambda \in K$ por S2) se deduce directamente que $\lambda\vec{v} \in \vec{A}$.

El resto de la proposición es trivial.

3.1.4 Definición

Si A es subespacio del espacio afin X, al subespacio vectorial $\vec{A}=\{\vec{ab}/a,b \in A\}$ se denomina (variedad de) dirección de A.

La proposición 3.1.3 permite establecer una segunda definición (equivalente) de subespacio afin más operativa que la anterior, y que hace intervenir explícitamente la variedad de dirección:

3.1.5 2ª Definición de espacio afin

Un subconjunto (no vacío) A del espacio afín $X=(X,\vec{X},\Delta)$ es subespacio afin de X, si existe $\vec{A}$ subespacio vectorial de X tal que:

S´1) Para todo $a,b \in A$, se verifica $\vec{ab} \in \vec{A}$.

S´2) Si $a \in A$ y $\vec{v} \in \vec{A}$ entonces $a+\vec{v} \in \vec{A}$.

La demostración de la equivalencia entre las definiciones 3.1.2 y 3.1.4 es un sencillo ejercicio.

3.1.6 Observaciones

Sea X un espacio afin:

1) Un punto a de X define un subespacio afin $A=\{a\}$ cuya dirección es el subespacio $\{\vec{0}\}$ de $\vec{X}$.

El espacio total X, es asímismo subespacio del espacio afin X.

2) El conjunto vacío se considera (por convenio) subespacio de cualquier espacio afin, y no se le asocia variedad de dirección.

Los subespacios afines de X distintos del vacío y del total, se denominan subespacios no triviales de X.

3) Si A es subespacio afin de B y B lo es de X, entonces A es subespacio afin de X.
Por otra parte, si A y B son subespacios afines de X y $A\subset B$, entonces A es subespacio afín de B.

4) Si A es subespacio afin de X, la aplicación inclusión $\iota_A: A\hookrightarrow X$ es aplicación afin con lineal asociada la inclusión de A en X $\vec{\iota}_A : \vec{A}\hookrightarrow \vec{X}$

3.1.7 Ejemplo

Sea $A_n=A_n(K)$ el espacio afín analítico n-dimensional, y sean $\alpha_0,\dots \alpha_n$ elementos de K. El conjunto $A=\left\{\begin{pmatrix}1\\x\end{pmatrix} / \alpha_0+\alpha_1 x_1+\dots+\alpha_n x_n=0\right\}$ constituye un subespacio del espacio afin A_n, de forma que:

1) Si $\alpha_0\neq 0$ y $\alpha_1=\dots=\alpha_n=0$, entonces $A=\emptyset$.
2) Si $\alpha_0=\alpha_1=\dots=\alpha_n=0$, entonces $A=A_n$.
3) En cualquier otro caso A es subespacio no trivial de A_n con variedad de dirección $\vec{A}=\left\{\begin{pmatrix}0\\x\end{pmatrix} / \alpha_1 x_1+\dots+\alpha_n x_n=0\right.$ (utilícese la definición 3.1.4).
La ecuación: $\alpha_0+\alpha_1 x_1+\dots+\alpha_n x_n=0$ es la ecuación implícita de A, y se escribe $A:(\alpha_0+\alpha_1 x_1+\dots+\alpha_n x_n=0)$, y
$\vec{A}:(\alpha_1 x_1+\dots+\alpha_n x_n=0)$.

3.1.8 Ejemplo

Los subespacios vectoriales de un espacio vectorial V son subespacios afines del espacio afín A(V) (véase 1.2.9).
Si α es una forma lineal no nula de V, el conjunto $X=\{x\in V/ \alpha(x)=1\}$ es subespacio afín de A(V), con variedad de dirección $\vec{X}=$
$=\{x\in V / \alpha(x)=0\}$ (véase 1.2.10)

Si A es subespacio (no vacío) del espacio afín $X=(X,\vec{X},\Delta)$, fijado $a\in A$, la aplicación $\Delta_a: A\ni x\longmapsto \vec{ax}\in\vec{A}$ es una biyección, y así $\Delta_a(A)=\{\vec{ax}/x\in A\}=\vec{A}$ es subespacio vectorial de $\vec{X}$.

El siguiente teorema muestra que el recíproco de éste resultado también es cierto.

3.1.9 Teorema.

Sea $X=(X,\vec{X},\Delta)$ un espacio afin, y $A\subset X$ no vacio.
Supongamos que existe un $a\in A$ tal que $\Delta_a(A)=\{\vec{ax} \ / \ x\in A\}$ es subespacio vectorial de $\vec{X}$. Entonces, para todo $b\in A$ es $\Delta_a(A)=\Delta_b(A)$, y A es subespacio afín de X con dirección $\vec{A}=\Delta_a(A)$.

Demostración:

Si $b\in A$ y $v\in\Delta_b(A)$, existe $x\in A$ con $\vec{v}=\vec{bx}=\vec{ax}-\vec{ab}\in\Delta_a(A)$.
Recíprocamente, si $\vec{v}\in\Delta_a(A)$, existe $x\in A$ con $\vec{ax}=\vec{v}$.
Sea $y=b+\vec{v}$, es decir, $\vec{v}=\vec{by}$; es suficiente probar que $y\in A$. En efecto: $\vec{ay}=\vec{ab}+\vec{by}=\vec{ab}+\vec{ax}\in\Delta_a(A)$, y existe y' con $\vec{ay}=\vec{ay'}$, por lo que $y=y'\in A$.

3.1.10 Corolario

Sea X espacio afin:

1) Si A es subespacio afin de X con dirección $\vec{A}$, entonces para todo $a\in A$ es $A=a+\vec{A}=\{a+\vec{v} \ /\vec{v}\in\vec{A}\}$.
2) Recíprocamente, si V es subespacio vectorial de $\vec{X}$, y $a\in X$, entonces $a+V=\{a+\vec{v} \ /\vec{v}\in V\}$ es subespacio afin de X con dirección V.

Demostración:

1) Nótese que para $x\in A$ es $x=a+\vec{ax}\in a+\vec{A}$.
2) Observese simplemente que $\Delta_a(A)=V$ es (por hipótesis) subespacio vectorial de $\vec{X}$.

3.1.11 Ejemplo

Si V es espacio vectorial, los subespacios afines de A(V) son todos de la forma $\vec{v}+U$, donde $\vec{v}\in V$ y U es subespacio vectorial de V.

3.1.12 Corolario

Si A es subconjunto no vacio del espacio afin $X=(X,\vec{X},\Delta)$, las siguientes afirmaciones son equivalentes:

i) A es subespacio afín de X
ii) existe $a\in A$ tal que $\Delta_a(A)$ es subespacio vectorial de $\vec{X}$.
iii) Existe $a\in A$ tal que A_a es subespacio vectorial de X_a
iv) Para todo $a\in A$, A_a es subespacio vectorial de X_a.

Demostración:

La equivalencia entre ii) y iii) es consecuencia de la conmutatividad del siguiente diagrama (para a A) y de la definición 2.1.11

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, hook, "\iota_A"] \arrow[d, "\Delta_a"'] & X \arrow[d, "\Delta_a"] \\ \Delta_a(A) \arrow[r, hook, "\vec{\iota}_A"] & \vec{X} \end{tikzcd}$$

3.2 Reticulo de subespacios afines

Se denota por $\mathcal{S}A(X)$ a la familia de subespacios de un espacio afin X (incluido el conjunto vacio)

3.2.1 Proposición

Sea X espacio afín y $(A_i)_{i\in I}$ una familia de subespacios de X. Entonces $A=\bigcap_{i\in I} A_i$ es subespacio afin de X , y si $A\neq\emptyset$ es $\vec{A}=\bigcap_{i\in I}\vec{A}_i$.

Demostración:

Si $A=\emptyset$ no hay nada que probar.

Si $A\neq\emptyset$ entonces tomando $a\in A$, es $A_i=a+\vec{A}_i$ para todo $i\in I$, y $\bigcap_{i\in I}(a+\vec{A}_i)=a+\bigcap_{i\in I}\vec{A}_i=a+\vec{A}$, de donde $\vec{A}=\bigcap_{i\in I}\vec{A}_i$.

3.2.2 Ejemplo

En el espacio afin $A_n(K)=A_n$, sea $A_i:(\alpha_0+\alpha_1x_1+\dots+\alpha_nx_n=0)$, $i=1\dots m$ (véase 1.3.7). Entonces:

$A=\bigcap_{i\in I} A_i=\left\{\begin{pmatrix}1\\x\end{pmatrix}\in A_n \,/\, \alpha_0+\alpha_1x_1+\dots+\alpha_nx_n=0\ ,\ i=1,\dots,m\right\}$ es un subespacio afin con ecuaciones implícitas $A:(\alpha_0+\alpha_1x_1+\dots+\alpha_nx_n=0)_{i=1\dots m}$

La condición de que A sea no vacío, es equivalente a la compatibilidad del sistema anterior. En éste caso las ecuaciones implícitas de $\vec{A}$ son $\vec{A}:(\alpha_1x_1+\dots+\alpha_nx_n=0)_{i=1\dots m}$

3.2.3 Subespacio afin generado por un sitema de puntos

Sea S un subconjunto de un espacio afin X ; La familia de subespacios $\mathcal{F}=\{A<X \,/\, A\supset S\}$ es no vacía (pues $X\in\mathcal{F}$), y la intersección $\bigcap_{A\in\mathcal{F}} A=\langle S\rangle$ es un subespacio afín que contiene a S, y se denomina subespacio afín generado por S.

Si $S=\{a_1,\dots a_m\}$ es cribimos $\langle a_1\dots a_m\rangle$ en lugar de $\langle\{a_1,\dots a_m\}\rangle$.

Observese que el subespacio afín S viene caracterizado por la condición de ser el subespacio más pequño que contiene a S. Este hecho se puede explicitar de forma más precisa en la siguiente proposición, cuya demostración es inmediata:

3.2.4 Proposición

El subespacio $\langle S\rangle$ generado por el subconjunto S del espacio afín X, es el único que verifica las condiciones:

i) $S\subset\langle S\rangle$

ii) Si $A<X$ y $A\supset S \Rightarrow A\supset\langle S\rangle$.

3.2.5 Suma de subespacios

Sea X un espacio afín, y $(A_i)_{i\in I}$ una familia de subespacios.

Se define la suma de la familia $(A_i)_{i\in I}$ como el subespacio

$\sum_{i\in I} A_i = \langle \bigcup_{i\in I} A_i \rangle$.

Si I= 1,...,m , se escribe $\sum_{i\in I} A_i = A_1 \dotplus \ldots \dotplus A_m$

3.2.6 Prpposicion

Si X es espacio afin, el conjunto $\mathcal{S}A(X)$ de sus subespacios con las operaciones "$\dotplus$" y "$\cap$" definidas anteriormente, es un retículo no distributivo, con elemento universal el espacio total X, y elemento nulo el conjunto vacío.

Demostración:

Esencialmente, si se dan como válidas las propiedades reticulares de la intersección conjuntista,el enunciado anterior puede reducirse a comprobar las siguientes afirmaciones, para $A,B,C\in\mathcal{S}A(X)$:

i) $A\subset B \Leftrightarrow A\dotplus B=B$

ii) $A\dotplus B=B\dotplus A$

iii) $(A\dotplus B)\dotplus C=A\dotplus(B\dotplus C)$

Solo la afirmación iii) no es absolutamente trivial; Probaremos la primera igualdad de la expresión: $(A\dotplus B)\dotplus C=A\dotplus B\dotplus C=A\dotplus(B\dotplus C)$. La segunda igualdad se prueba de forma análoga:

Como $A\cup B\cup C$ $(A\dotplus B)\dotplus C$, por 3.2.4 se deduce que $A\dotplus B\dotplus C\subset(A\dotplus B)\dotplus C$.

Por otra parte $(A\dotplus B)\cup C\subset A\dotplus B\dotplus C$, y análogamente se concluye que $\langle(A\dotplus B)\cup C\rangle=(A\dotplus B)\dotplus C\subset A\dotplus B\dotplus C$.

3.3 Formulas de dimensión para subespacios afines.

La dimensión de un subespacio afín (no vacio) A del espacio afín X es la dimensión de A con su estructura afin canónica, que coincide (por definición) con la de su variedad de dirección $\vec{A}$.

Al conjunto vacío se le asocia por convenio dimensión igual a -1. Así, los subespacios de dimensión cero son los puntos, los de dimensión uno se denominan rectas, y planos a los de dimensión dos. Si el espacio afín X es de dimensión finita, se llama codimensión de un subespacio afín A , al número codim(A)=dim(X)-dim(A)=codim(A). Los subespacios de codimensión uno, se denominan hiperplanos.

El comportamiento de la dimensión respecto a la estructura reticular de $\mathcal{S}A(X)$ se analiza en el siguiente teorema:

3.3.1 Teorema

Sean A y B subespacios de dimensión finita de un espacio afin X, entonces $A\dotplus B$ tiene dimensión finita, y se tiene:

1) Si $A\cap B\neq\emptyset$, $\dim(A\dotplus B)=\dim(\vec{A}\dotplus\vec{B})$

2) Si A $B=\emptyset$, $\dim(A\dotplus B)=\dim(\vec{A}\dotplus\vec{B})\dotplus 1$

la demostración de 3.3.1 es consecuencia inmediata del siguiente lema

3.3.2 Lema

Si A y B son subespacios no vacíos del espacio afin X, $a\in A$ y $b\in B$ se verifica entonces que $\vec{A}\dotplus\vec{B}\subset\overrightarrow{A\dotplus B}$, y además:

1) Si $A\cap B\neq\emptyset$ es $\overrightarrow{A\dotplus B}=\vec{A}\dotplus\vec{B}$

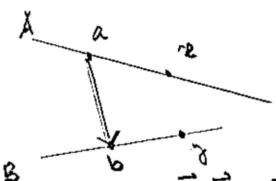
2) Si $A\cap B=\emptyset$ es $\overrightarrow{A\dotplus B}=(\vec{A}\dotplus\vec{B})\dotplus\langle\vec{ab}\rangle$

Demostración:

Como $A\subset A\dotplus B$ y $B\subset A\dotplus B$ es $\vec{A}\subset\overrightarrow{A\dotplus B}$ y $\vec{B}\subset\overrightarrow{A\dotplus B}$, por tanto $\vec{A}\dotplus\vec{B}\subset\overrightarrow{A\dotplus B}$.

1) Si $A\cap B\neq\emptyset$, sea $c\in A\cap B$. Entonces $c\dotplus(\vec{A}\dotplus\vec{B})\supset A\dotplus B=c\dotplus(\overrightarrow{A\dotplus B})$, y así $\vec{A}\dotplus\vec{B}\supset\overrightarrow{A\dotplus B}$.

2) Si $A\cap B=\emptyset$, la suma $V=(\vec{A}\dotplus\vec{B})\dotplus\langle\vec{ab}\rangle$ es directa, ya que si $\vec{ab}\in\vec{A}\dotplus\vec{B}$ existen $x\in A$ $y\in B$ con $\vec{ab}=\vec{ax}\dotplus\vec{yb}$, es decir: $\vec{ax}\dotplus\vec{xy}\dotplus\vec{yb}=\vec{ax}\dotplus\vec{yb}$, y así $\vec{xy}=0$, por tanto $x=y\in A\cap B$, lo cual contradice la hipotesis.



Sea pues $V=(\vec{A}\dotplus\vec{B})\oplus\langle\vec{ab}\rangle$. Observese primero que $a\dotplus V\supset a\dotplus\vec{A}=A$, y que si $y\in B$ es $y=a\dotplus\vec{ay}=a\dotplus\vec{ab}\dotplus\vec{by}\in a\dotplus(\vec{B}\dotplus\langle\vec{ab}\rangle)\subset a\dotplus V$, es decir: $a+V\supset B$, y así $V=(\vec{A}\dotplus\vec{B})\oplus\langle\vec{ab}\rangle\supset\overrightarrow{A\dotplus B}$.

Por otra parte los subespacios $\vec{A},\vec{B}$ y $\langle\vec{ab}\rangle$ están contenidos en $\overrightarrow{A\dotplus B}$ y por tanto tambien lo está su suma V.

3.3.2 Ejemplos

Si A es subespacio del espacio afín X, y $\dim(A)=r$, aplicando 3.3.1 se deduce que $\dim(a\dotplus A)=r\dotplus 1$ si y solo si $a\in X-A$. En particular:

a) Si A es hiperplano de X , es $a\dotplus A=X$ para $a\in X-A$

b) Si a, b son dos puntos distintos del espacio afín X, el subespacio $a\dotplus b=\langle a,b\rangle$ es una recta afín. Si $c\in X-\langle a,b\rangle$, entonces $\langle a,b,c\rangle$ es un plano afín...etc.

3.3.3 Corolario

Sean A y B subespacios no vacíos del espacio afín n-dimensional X. Sea $p=\dim(A)$, $q=\dim(B)$, y $r=\dim(\vec{A}\cap\vec{B})$; se ~~tiene~~ concluye :

1) Si $A \cap B \neq \emptyset$ es $\dim(A+B)=p+q-r$, y se tiene:

$$\max(0,p+q-n) \leq r \leq \min(p,q)$$

2) Si $A \cap B=\emptyset$ entonces $\dim(A+B)=p+p-r+1$, y se tiene

$$\max(0,p+q-n+1) \leq r \leq \min(p,q)$$

Demostración:

Aplíquese el resultado 3.3.1, y el teorema de incidencia para subespacios vectoriales.

3.3.4 Definición

Sean A y B subespacios no vacíos de un espacio afin X, sea $p=\dim(A)$ $q=\dim(B)$, y $r=\dim(\vec{A} \cap \vec{B})$. Entonces:

a) Si $A \cap B \neq \emptyset$, A y B se cortan en un subespacio $A \cap B$ de dimensión r, y se dice que son r-incidentes

b) Si $A \cap B=\emptyset$, los subespacios se cruzan con dirección comun r-dimensional, y se dice que son r-disjuntos.

c) Si $r=\min(p,q)$ diremos que A y B son paralelos.

3.3.5 Observación

Nótese que los subespacios A y B son paralelos si y solo si existe relación de contenido entre sus variedades de dirección $\vec{A}$ y $\vec{B}$. En éste daso A y B son incidentes si y solo si existe relación de contenido entre ambos. En consecuencia, si V y W son subespacios vectoriales de $\vec{X}$, con $V \subset W$, y a y b son dos puntos del espacio afín X con $a \notin b+W$, entonces $(a+V) \cap (b+W)=\emptyset$.

Demostraremos ahora que de hecho r, puede tomar todos los valores posibles descritos en el corolario 3.3.3 para p y q fijos:

3.3.6 Teorema

Sea X espacio afín de dimensión n, p y q enteros no negativos menores ó iguales que n. Entonces:

1) Si r es entero con $\max(0,p+q-n) \leq r \leq \min(p,q)$, existen subespacios afines A y B r-incidentes con $\dim(A)=p$, $\dim(B)=q$.

2) Si r es entero con $\max(0,p+q-n+1) \leq r \leq \min(p,q)$, existen subespacios afines A y B r-disjuntos, $\dim(A)=p$, $\dim(b)=q$.

Demostración:

Fijado r entero tal que $\max(0,p+q-n) \leq r \leq \min(p,q)$ se sabe por que existen subespacios vectoriales $\vec{A}$ y $\vec{B}$ de X con $\dim(\vec{A})=p$ $\dim(\vec{B})=q$ y $\dim(\vec{A} \cap \vec{B})=r$:

1) Tomando $a\in X$, los subespacios $A=a+\vec{A}$, $B=b+\vec{B}$ son r-incidentes

2) Si $\max(0,p+q-n+1)\leq r\leq \min(p,q)$ entonces $\dim(\vec{A}+\vec{B})=p+q-r<n$, y tomando $a\in X$ es $a+(\vec{A}+\vec{B})\neq X$, y existe $b\in X$ con $b\notin a+(\vec{A}+\vec{B})$. Si $A=a+\vec{A}$ y $B=b+\vec{B}$, los subespacios A y B son r-disjuntos.

3.3.7 Ejemplo

Sean R y S dos rectas en un espacio afin X con $\dim(X)=n$

a) si $n\geqslant 3$ es $\dim(R)+\dim(S)-n=2-n\geqslant -1$, y se tiene

1) Si R y S son r-incidentes, es $0\leq r\leq 1$:
- Para $r=0$ las rectas se cortan en un punto
- Para $r=1$ las rectas son coincidentes

2) Si R y S son r-disjuntas es $0\leq r\leq 1$:
- Para $r=0$, las rectas se cruzan
- Para $r=1$, son paralelas

b) Si $n=2$ es $\dim(R)+\dim(S)-n=0$, y se tiene

1) Si R y S son r-incidentes, es $0\leq r\leq 1$, y se tienen las mismas posibilidades del caso 1) de a)

2) Si R y S son r-disjuntas, entonces $r=1$, y las rectas son paralelas.

4. Aplicaciones semiafines y subespacios

La imagen de un subespacio por una aplicación semiafin, es un subespacio, y si la aplicación es inyectiva se conserva la dimensión. De aquí se deduce en particular, que los conceptos de subespacio afin y dimensión son conceptos geométricos, es decir, son conservados por el grupo de transformaciones.

Por otra parte, el grupo afin actua naturalmente sobre los sistemas de $\ell\geqslant 1$ subespacios; esto dá lugar a un problema de clasificación geométrica, que será completamente resuelto para $\ell=1$ y $\ell=2$. La solución del problema para $\ell\geqslant 2$, describe las diferentes "posiciones relativas" entre parejas , ternas,...etc, de subespacios.

4.1 Actuación de las aplicaciones semiafines sobre subespacios.

4.1.1 Teorema

Sean $X=(X,\vec{X},\Delta)$ $X'=(X',\vec{X}',\Delta')$ espacios afines, y $f:X\longrightarrow X'$ una aplicación semiafin. Si A es subespacio afín de X, y A′ lo es de X′ entonces:

1) $f(A)$ es subespacio afin de X′, y $\overrightarrow{f(A)}=\vec{f}(\vec{A})$

2) $f^{-1}(A')$ es subespacio afin de X, y si $f^{-1}(A')\neq\emptyset$ entonces

$\overrightarrow{f^{-1}(A')} = \vec{f}^{-1}(\vec{A}')$.

3) Las aplicaciones $f|_A : A \to f(A)$, $f|_{f^{-1}(A')} : f^{-1}(A') \to A'$ son semi-afines.

Demostración:

1) Si $a \in A$, de la conmutatividad del diagrama:

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & X' \\ {\scriptstyle \Delta_a}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \Delta'_{f(a)}} \\ \vec{X} & \xrightarrow{\vec{f}} & \vec{X}' \end{array}$$

se deduce que $\Delta'_{f(a)}(f(A))=\vec{f}(\Delta_a A)=\vec{f}(\vec{A})$ es subespacio vectorial de $\vec{X}'$; por 3.1.9, $f(A)$ es subespacio afin de X' y $\overrightarrow{f(A)}=\vec{f}(\vec{A})$.

2) Analogamente, si $f^{-1}(A')$ es no vacio, y $a \in f^{-1}(A')$, por la conmutatividad del diagrama anterior, se deduce:
$\Delta_a f^{-1}(A')=\vec{f}^{-1}(\Delta'_{f(a)}A')=\vec{f}^{-1}(\vec{A}')$. Aplicando otra vez 3.1.9 se obtiene el resultado.

La última afirmación es trivial.

4.1.2 Corolario

Si $f:X \to X'$ es aplicación semiafin, y A es subespacio afin de X, entonces $\dim(f(A)) \leq \dim(A)$, y se tiene la equivalencia:
$\dim(A)=\dim(f(A)) \Longleftrightarrow f|_A : A \to f(A)$ es isomorfismo semiafin.

Demostración:

Basta aplicar el corolario análogo a la aplicación semilineal $\vec{f}$ asociada a f.

4.1.3 Corolario

Si $f:X \to X'$ es aplicación semiafin y S es subconjunto de X, entonces $f(\langle S\rangle)=\langle f(S)\rangle$.

En particular , si A y B son subespacios de X, es $f(A \dotplus B)=f(A)\dotplus f(B)$.

Demostración:

Como $S \subset \langle S\rangle$, es $f(S) \subset f(\langle S\rangle)$ y $\langle f(S)\rangle \subset f(\langle S\rangle)$.

Por otra parte, si A' es subespacio de X' con $f(S) \subset A'$ se verifica $S \subset f^{-1}(A')$, y por ser $f^{-1}(A')$ subespacio, es:
$\langle S\rangle \subset f^{-1}(A')$ y $f(\langle S\rangle) \subset f(f^{-1}(A')) \subset A'$.

La segunda afirmación es ahora trivial.

4.1.4 Ejemplo

Si $f:X \to X'$ es aplicación semiafin, y a, b son dos puntos distintos de X, entonces:

- Si $f(a)=f(b)=c'$, la recta $\langle a,b\rangle$ se aplica sobre el punto c'
- Si $f(a) \neq f(b)$, la recta $\langle a,b\rangle$ se aplica biyectivamente sobre la recta $\langle f(a),f(b)\rangle$.

4.2 Posiciones relativas entre subespacios

El grupo afin GA(X) de un espacio afín X, actua sobre el conjunto $\mathcal{G}A(X)^{\ell}=\mathcal{G}A(X)\times\overset{\ell)}{\cdots}\times\mathcal{G}A(X)$ formado por los sistemas de ℓ subespacios de la siguiente forma:

$GA(X)\times\mathcal{G}A(X)\ni(f,(A_1,\dots,A\ ))\longmapsto f(A_1,\dots,A\ )=(f(A_1),\dots f(A\ ))\in\mathcal{G}A(X)^{\ell}$

La siguiente definición establece una terminología adecuada al correspondiente problema de clasificación:

4.2.1 Definición

Dos sistemas $(A_1,\dots,A_{\ell}),(A_1',\dots,A_{\ell}')$ de subespacios de un espacio afin X, tienen la misma posición relativa, sii existe $f\in GA(X)$ tal que $f(A_1,\dots,A_{\ell})=(A_1',\dots,A_{\ell}')$. También se dice, en estas condiciones, que los sistemas son afinmente equivalentes.

4.2.2 La relación de equivalencia afín entre sistemas, procede de una actuación, y es por tanto relación de equivalencia.

La resolución del problema de clasificación para un ℓ dado, consiste en describir por medio de un sistema completo de invariantes todas las posiciones relativas entre ℓ subespacios.

La aplicación $\dim:\mathcal{G}A(X)^{\ell}\ni(A_1,\dots A\ )\longmapsto(\dim(A_1),\dots,\dim(A\ ))\in Z^{\ell}$ proporciona (evidentemente) un primer sistema de invariantes, que es completo para $\ell=1$:

4.2.3 Proposición

Dos subespacios afines A y A$'$ de un espacio afin X son afinmente equivalentes si y solo si $\dim(A)=\dim(A')$

Demostración:

Se probará solo la parte no trivial:

Si $\dim(A)=\dim(A')\geqslant 0$, sea $a\in A$, $a'\in A'$. como $\dim(\vec{A})=\dim(\vec{A}')$, por existe $\varphi\in GL(\vec{X})$ con $\varphi(\vec{A})=\vec{A}'$ y por 2.1.6 existe $f\in GA(X)$ con $f(a)=a'$ y $\vec{f}=\varphi$. Entonces $f(A)=A'$

4.2.4 Para $\ell=2$ el problema es algo más complejo, y su solución viene esencialmente descrita en la definición 3.3.4 :

Dados (A,B) pareja de subespacios no vacios de un espacio afín X, se define $I(A,B)=\{\delta,(p,q),r\}$, donde $\delta=0$ si $A\cap B=\emptyset$, y $\delta=1$ si $A\cap B\neq\emptyset$, $p=\dim(A)$, $q=\dim(B)$, $r=\dim(\vec{A}\cap\vec{B})$.

Se probará que I define un sistema completo de invariantes:

4.2.5 Teorema

Dos parejas (A,B) , (A',B') de subespacios no vacios de un espacio afin X son afinmente equivalentes, si y solo si $I(A,B)=I(A',B')$.

Demostración:

Si (A,B) es afinmente equivalente a (A',B'), sea $f\in GA(X)$ con $f(A,B)=f(A',B')$. Entónces $f(A)=A'$, $f(B)=b'$ $f(A\cap B)=A'\cap B'$ y $f(\vec{A}\cap\vec{B})=\vec{A}'\cap\vec{B}'$, por tanto $I(A;B)=I(A';B')$.

Supogase ahora que $I(A;B)=I(A';B')=\{\delta,(p,q),r\}$:

Como $\dim(A)=\dim(A')=p$, $\dim(B)=\dim(B')=q$, y $\dim(\vec{A}\cap\vec{B})=\dim(\vec{A}'\ \vec{B}')=r$, la pareja (A,B) es linealmente equivalente a (A',B') (vease)

y existe $\varphi\in GL(\vec{X})$ con $\varphi(\vec{A})=\vec{A}'$ y $\varphi(\vec{B})=\vec{B}'$.

Si $\delta=1$, sea $c\in A\cap B$ y $c'\in A'\cap B'$. Por 2.1.6, puede construirse $f\in GA(X)$ tal que $f(c)=c'$ y $\vec{f}=\varphi$. La aplicacón f transforma entonces (A,B) en (A',B').

Si $\delta=0$, sean $a\in A, b\in B$, $a'\in A', b'\in B'$. Como $A\cap B=A'\cap B'=\phi$ es $\overrightarrow{A+B}=(\vec{A}+\vec{B})+\langle\vec{ab}\rangle$ y $\overrightarrow{A'+B'}=(\vec{A}'+\vec{B}')+\langle\overrightarrow{a'b'}\rangle$, y puede refinarse la elección anterior de φ imponiendo la condición adicional de que $\varphi(\vec{ab})=(\overrightarrow{a'b'})$, y cónstruir $f\in GA(X)$ con $\vec{f}=\varphi$ y $f(a)=a'$.

Se tiene entonces, $f(b)=f(a+\vec{ab})=a'+\varphi(\vec{ab})=a'+\overrightarrow{a'b'}=b'$, y f transforma (A,B) en (A',B').

4.2.6 Observación

Fijados p,q enteros con p,q $n=\dim(X)$, cada una las posiciones relativas entre variedades p-dimensionales y q-dimensionales viene unívocamente determinada por una pareja (δ,r), donde δ toma los valores 0 y 1, y

- $\max(0,p+q-n)\leq r\leq\min(p,q)$ si $\delta=1$ (subespacios r-incidentes)
- $\max(0, p+q-n+1)\leq r\leq\min(p,q)$ si $\delta=0$ (subespacios r-disjuntos)

Si por ejemplo es p=-1, el problema se reduce trivialmente al caso $\delta=1$.

4.3 <u>Espacio afin cociente</u>

Sea $X=(X,\vec{X},\Delta)$ espacio afin y U subespacio vectorial de X. El conjunto de todos los subespacios afines con variedad de dirección U constituye una familia de subespacios afines paralelos, que denotamos por X/U.

Por cada punto $x\in X$, existe un único elemento de la familia X/U que contiene a x , que es precisamente $x+U$.

Si $x,y \in X$, entonces $x+U=y+U$ si y solo si $\vec{xy} \in U$, y si $\vec{xy} \notin U$ es $(x+U)\cap(y+U)=\emptyset$. Así la familia de subespacios $X/U=\{x+U \,/ x\in X\}$ define una partición del conjuntode puntos X, que es justamente la indúcida por la relación de equivalencia en X:

$$x \equiv y \quad (\text{mod. } U) \Longleftrightarrow \vec{xy} \in U$$

Se demostrará que X/U admite una estructura afín canónica:

4.3.1 Teorema

Sea $X=(X,\vec{X},\Delta)$ espacio afín, y U subespacio vectorial de $\vec{X}$. Existe entonces una única estructura de espacio afin de X/U sobre el espacio vectorial $\vec{X}/U$ tal que la proyección:

$\pi : X \ni x \longmapsto x+U \in X/U$ es aplicación afín con aplicación lineal asociada $\vec{\pi}: X \ni \vec{x} \longmapsto \vec{x}+U \in \vec{X}/U$

Demostración

Si existe tal estructura de espacio afin en X/U, entonces para $x+U, y+U \in X/U$ se verifica:

$\overrightarrow{(x+U)(y+U)}=\overrightarrow{\pi(x)\,\pi(y)}=\vec{\pi}(\vec{xy})=\vec{xy}+U\in \vec{X}/U$, con lo que queda probada la unicidad.

Debemos pues demostrar que la fórmula anterior proporciona en efecto una estructura de espacio afin de X/U sobre $\vec{X}/U$.

La única dificultad que el segundo miembro de la igualdad $\overrightarrow{(x+U)(y+U)}=\vec{xy}+U$, no depende de los representantes x e y elegidos en $x+U$, $y+U$ respectivamente:

En efecto, si $\vec{xx'}\in U$, $\vec{yy'}\in U$ entonces

$$\overrightarrow{x'y'}+U=(\overrightarrow{x'x}+\vec{xy}+\overrightarrow{yy'})+U=\vec{xy}+U.$$

El resto de la demostración es trivial.

4.3.2 Observación

De hecho,puede probarse que existe una única estructura afín en X/U tal que $\pi : X \longrightarrow X/U$ es aplicación afin. La demostración requiere cierta sutileza en el manejo de las definiciones 1.2.1 y 2.1.1, y constituye un excelente ejercicio.

Nótese que $\dim(X/U)=\dim(X)-\dim(U)$ cuando dimensión de X es finita.

4.3.3 Definición

Si X es espacio afín y U subespacio vectorial de X, al espacio afín X/U construido en 4.3.1 se denomina espacio afín cociente.

4.3.4 Teorema

Sea $f:X\longrightarrow X'$ una aplicación semiafin. Existe entonces una unica aplicación f' que hace conmutativo el diagrama

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi"'] & X' \\ X/\mathrm{Ker}\vec{f} \arrow[r, "f'"] & f(X) \arrow[u, hook, "\iota"'] \end{tikzcd}$$

Por otra parte f' es isomorfismo semiafin

Demostración

Necesáriamente es $f'(x+\ker\vec{f})=f(x)$. La equivalencia :

$\vec{xy}\in\ker\vec{f}\Leftrightarrow f(x)=f(y)$, prueba la consistencia de la definición de f' y su biyectividad.

Además $\overrightarrow{f'(\pi(a))f'(\pi(x))}=\overrightarrow{f(a)f(x)}=\vec{f}(\vec{ax})$, y así $f'_{\pi(a)}$ es la única aplicación que hace conmutativo el diagrama:

$$\begin{tikzcd} \vec{X} \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\vec{\pi}"'] & \vec{X}' \\ \vec{X}/\ker\vec{f} \arrow[r, "f'_{\pi(a)}"] & \vec{f}(\vec{X}) \arrow[u, hook] \end{tikzcd}$$

Por tanto $\vec{f'}$ es semilineal, y por 2.1.4 , f' es semiafin.

4. COMBINACIONES AFINES DE PUNTOS

Si $(p_0,\dots,p_r)$ es un sistema de puntos de un espacio afin X sobre el cuerpo K, y $(\lambda_0,\dots,\lambda_r)$ es un sistema de escalares, carece en principio de sentido la combinacion lineal $\sum_{i=0}^{r}\lambda_i p_i$, a no ser que X se considere a priori subespacio afin de un espacio vectorial V. Aún en éste caso, el resultado de tal combinación lineal puede ser un elemento (vector de V) ajeno al espacio afin.

Para fijar ideas, supóngase $\alpha\in V^*-0$ y $X=\{x\in V\ /\ \alpha(x)=1\}$, el espacio afín descrito en el ejemplo 2.1.10, cuyo espacio vectorial asociado es $\vec{X}=\{\vec{x}\in V\ /\ \alpha(\vec{x})=0\}$:

Si $(p_0,\dots,p_r)_r$ X y $(\lambda_0,\dots,\lambda_r)\subset K$, es $\alpha(\sum_{i=0}^{r}\lambda_i p_i)=\sum_{i=0}^{r}\lambda_i$, y por tanto, $\sum_{i=0}^{r}\lambda_i p_i$ es un punto p de X , cuando $\sum_{i=0}\lambda_i=1$, y un v de $\vec{X}$ cuando $\sum_{i=0}\lambda_i=0$.

Trataremos en este epígrafe de dar un significado preciso a la combinación lineal de puntos $\sum_{i=0}^{r}\lambda_i p_i$ en un espacio afín abstracto, cuando la suma de coeficientes $\sum_{i=0}\lambda_i$ tiene valor cero ó la unidad; Se analizará además el comportamiento de tales combinaciones lineales frente a las aplicaciones semiafines y subespacios.

4.1 Combinaciones afines

4.1.1 Teorema (definición)

Sea $(p_0,\dots,p_r)$ un sistema de puntos de un espacio afin $X=(X,\vec{X},\Delta)$, y $(\lambda_0,\dots,\lambda_r)\subset K$ un sistema de escalares. Sea $a\in X$, entonces:

1) Si $\sum_{i=0}^{r}\lambda_i=1$, el valor de la combinación lineal $\sum_{i=0}^{r}\lambda_i p_i$ en la vectorialización X_a , $(\sum_{i=0}^{r}\lambda_i p_i)_a=a+\sum_{i=0}^{r}\lambda_i ap_i$, es un punto $p\in X$, independiente del punto a elegido. Se escribe $p=\sum_{i=0}^{r}\lambda_i p_i$, y se dice que p es combinación afín de $(p_0,\dots,p_r)$

2) Si $\sum_{i=0}^{r}\lambda_i=0$, entonces el vector $v=\sum_{i=0}^{r}\lambda_i\vec{ap_i}\in\vec{X}$ es independiente del punto a elegido. Se escribe $v=\sum_{i=0}^{r}\lambda_i p_i$, y se dice igualmente que v es combinación afín de $(p_0,\dots,p_r)$

Demostración:

Sea b un punto cualquiera de X:

1) Si $\sum_{i=0}^{r}\lambda_i=1$, entonces $a+\sum_{i=0}^{r}\lambda_i\vec{ap_i}=a+\sum_{i=0}^{r}\lambda_i(\vec{ab}+\vec{bp_i})=$
$=a+(\sum_{i=0}^{r}\lambda_i)ab+\sum_{i=0}^{r}\lambda_i\vec{bp_i}=a+\vec{ab}+\sum_{i=0}^{r}\lambda_i\vec{bp_i}=b+\sum_{i=0}^{r}\lambda_i\vec{bp_i}$.

2) Si $\sum_{i=0}^{r}\lambda_i=0$, entonces $\sum_{i=0}^{r}\lambda_i\vec{ap}_i=\sum_{i=0}^{r}\lambda_i(\vec{ab}+\vec{bp}_i)=$
$=(\sum_{i=0}^{r}\lambda_i)\vec{ab}+\sum_{i=0}^{r}\lambda_i bp_i=\sum_{i=0}^{r}\lambda_i\vec{bp}_i$.

Para determinar en la practica el valor de la combinación afin $\sum_{i=0}^{r}\lambda_i p_i$ se usa por tanto el siguiente criterio:

1) Si $\sum_{i=0}^{r}\lambda_i=1$, $p=\sum_{i=0}^{r}\lambda_i p_i \Leftrightarrow \vec{ap}=\sum_{i=0}^{r}\lambda_i\vec{ap}_i$

2) Si $\sum_{i=0}^{r}\lambda_i=0$, $v=\sum_{i=0}^{r}\lambda_i p_i \Leftrightarrow v=\sum_{i=0}^{r}\lambda_i\vec{ap}_i$

para cualquier punto a de X.

4.1.2 Convenios

Sea $\sum_{i=0}^{r}\lambda_i p_i$ una combinación afín de puntos:

a) Si algún λ_k es nulo, se puede prescindir evidentemente del correspondiente sumando. Así por ejemplo : $1a+0b=a$. También se puede cambiar el orden de los sumandos.

b) Si algún $\lambda_k=1$, se conviene en sustituir el sumando $\lambda_k p_k$ por p_k. Si $\lambda_k=-1$, se sustituye por $-p_k$. Así pues, si a y b son dos puntos del espacio afin es $ab=1b+(-1)a=b-a$

4.1.3 Observaciones

a) En la estructura afín canónica de un espacio vectorial V (véase ejemplo 1.2.9), una combinacion lineal de vectores $\sum_{i=0}^{r}\lambda_i v_i$ con $\sum_{i=0}^{r}\lambda_i$ igual a cero ó la unidad es una combinación afín de puntos. Nótese pues el doble sentido de la igualdad $\vec{ab}=b-a$, para $a,b\in V$.

b) Como veremos en el capítulo siguiente, las combinaciones afines son en definitiva combinaciones lineales de vectores, y pueden por tanto manipularse como tales, teniendo la precaución de que el resultado final sea una combinación afín de puntos.

Por ejemplo, de la igualdad $x=a+\lambda\vec{ab}$ puede concluirse $x=(1-\lambda)a+\lambda b$, ó $a=(1/1-\lambda)x-(\lambda/1-\lambda)b$ $(\lambda\neq 1)$, sustituyendo $\vec{ab}$ por b-a, y operando tal como se haría en una combinación lineal de vectores, es decir $x=a+\lambda(b-a)=a+\lambda b-\lambda a=$ $=(1-\lambda)a+\lambda b$ ...etc.

De momento solo precisaremos el siguiente resultado que expresa cierta propiedad distributiva de las combinaciones afines:

4.1.4 Proposicion

Sean $(a_0,\dots,a_r)$, $(b_0,\dots,b_s)$ Sistemas de puntos dd un espacio afin X sobre el cuerpo K, y $(\lambda_0,\dots,\lambda_r)$, $(\mu_0,\dots,\mu_s)$ sistemas de escalares con $\sum_{i=0}^{r}\lambda_i=1$, $\sum_{j=0}^{s}\mu_j=1$. Sean $\lambda,\mu\in K$ con $\lambda+\mu=1$. Entonces $\lambda(\sum_{i=0}^{r}\lambda_i a_i)+\mu(\sum_{j=0}^{s}\mu_j b_j)=\sum_{i=0}^{r}(\lambda\lambda_i)a_i+\sum_{j=0}^{s}(\mu\mu_j)b_j$.

Demostración:

Es suficiente observar que la igualdad anterior se transforma en una identidad veotorial, en cualquier vedtorialización X_a del espacio afin.

4.1.5 Razón simple

Sean a y b dos puntos del espacio afín X. Cada punto x de la recta $\langle a,b\rangle$ se escribe de la forma $x=a+\lambda\vec{ab}$, para algún valor de $\lambda\in K$. Se denomina a λ razón simple entre los puntos a , x, y b , y se denota por $\lambda=(a;x;b)$. Como $x=(1-\lambda)a+\lambda b$ se tienen las identidades:

i) $(a;x;b)\vec{ab}=\vec{ax}$; También se escribe por convenio: $(a;x;b)=\frac{\vec{ax}}{\vec{ab}}$

ii) $x=(b;x;a)a+(a;x;b)b$

para cada punto x de la recta $\langle a,b\rangle$.

En la recta afín intuitiva la razón simple $\lambda=(a;x;b)$ representa la abcisa del punto x en la graduación (de la recta) que se obtiene tomando el punto a por origen, y el b por punto unidad.

4.2 Combinaciones afines y subespacios

4.2.1 Teorema

Sea X un esapcio afin sobre el cuerpo K, y A un subconjunto no vacio de X. Considerense las siguientes afirmaciones:

i) A es subespacio afin de X

ii) Para $(a_0,\dots,a_r)$ A y $(\lambda_0,\dots,\lambda_r)\subset K$ con $\sum_{i=0}^{r}\lambda_i=1$, es $\sum_{i=0}^{r}\lambda_i a_i\in A$

iii) Para $a,b\in A$ y $\lambda\in K$, es $(1-\lambda)a+\lambda b\in A$

iv) Para $a,b,c\in A$, $\lambda,\mu,\nu\in A$ con $\lambda+\mu+\nu=1$ es $\lambda a+\mu b+\nu c\in A$.

Entonces:

1) en cualquier caso i) $\Rightarrow$ ii) $\Rightarrow$ iii) y iv) $\Rightarrow$ i)

2) Si la caracteristica de K es distinta de dos, entonces iii) $\Rightarrow$ iv) , y las cuatro afirmaciones son equivalentes.

Demostración:

1) i) $\Rightarrow$ ii) : Fijado $b \in A$, si $a=\sum_{i=0}^{r} \lambda_i a_i$, es $\vec{ba}=\sum_{i=0}^{r} \lambda_i \vec{ba_i} \in \vec{A}$, y por tanto $a \in A$.

ii) $\Rightarrow$ iii) y iv $\Rightarrow$ iii) son triviales.

iv) $\Rightarrow$ i): Fijado $a \in A$, se comprobará que $\Delta_a A= \{\vec{ax} \ / \ x \in A\}$ es subespacio vectorial de X. En efecto:

Si $x \in A$ y $\lambda \in K$, entonces $\lambda\vec{ax}=\vec{az} \Rightarrow z=(1-\lambda)a+\lambda x \in A$ (por iii)) así $\lambda\vec{ax}=\vec{az} \in \Delta_a A$.

Además si $x,y \in A$, $\vec{ax}+\vec{ay}=\vec{az} \Rightarrow z=x+y-a \in A$ (por iv)) y $\vec{ax}+\vec{ay}=\vec{az} \in \Delta_a A$.

2) Si $\lambda, \mu, \nu \in K$, y $\lambda+\mu+\nu=1$, por ser $1+1\neq 0$, alguno de los coeficientes λ, μ, ν es distinto de 1. Supongase por ejemplo $\nu\neq 1$, es decir $\lambda+\mu\neq 0$. Para $a,b,c \in A$, por 4.1.4 es
$$\lambda a+\mu b+\nu c=(\lambda+\mu)\left(\frac{\lambda}{\lambda+\mu}a+\frac{\mu}{\lambda+\mu}b\right)+\nu c$$
. Aplicando sucesivamente la hipotesis iii) se concluye que A verifica iv).

4.2.2 Corolario

Un subconjunto A de un espacio afin X sobre un cuerpo K de caracteristica distinta de dos, es subespacio afin , si y solo si contiene a cada recta que pasa por dos cualesquiera de sus puntos.

4.2.3 Observación

El corolario anterior es aplicable incluso cuando la caracteristica de K es dos, pero $K\neq \mathbb{Z}_2$ (véase ejercicio).

4.2.4 Corolario

Sea S un subconjunto no vacío de un espacio afin X sobre K.

El conjunto A de todas las combinaciones afines de puntos de S $\sum_{i=0}^{r} \lambda_i a_i$ con $\sum_{i=0}^{r}\lambda_i=1$ $(a_i \in S)$, constituye un subespacio afin, que coincide con el subespacio $\langle S \rangle$ generado por S.

Demostración:

Sean $a=\sum_{i=0}^{r} \lambda_i a_i$, $b=\sum_{j=0}^{s} \mu_j b_j$ dos puntos de A, donde $a_i, b_j \in S$, $\sum_{i=0}^{r}\lambda_i=\sum_{j=0}^{s}\mu_j=1$. Si $\lambda, \mu \in K$ con $\lambda+\mu=1$ por 4.1.4 se concluye que $\lambda a+\mu b \in A$, y por 4.2.1 A es subespacio afin (si el cuerpo K es patológico puede probarse que la combinación afín de tres puntos de A está en A).

Por otra parte, como $S \subset A$ es $\langle S\rangle \subset A$, y por 4.2.1 $A=\langle S\rangle$.

4.3 Combinaciones afines y aplicaciones semiafines

4.3.1 Teorema

Sean X y X´ espacios afines sobre los cuerpos K y K´, $f:X\longrightarrow X'$ una aplicación, y $\sigma:K\longrightarrow K'$ un automorfismo de cuerpos.

Considerense las afirmaciones:

i) La aplicacion f es σ-afín

ii) Para $(a_0,\dots,a_r)$ X y $(\lambda_0,\dots,\lambda_r)\subset K$ con $\sum_{i=0}^{r}\lambda_i=1$ es $f(\sum_{i=0}^{r}\lambda_i a_i)=\sum_{i=0}^{r}\lambda_i^{\sigma}f(a_i)$.

iii) Para $a,b\in X$, $\lambda,\mu\in K$ con $\lambda+\mu=1$, es $f(\lambda a+\mu b)=\lambda^{\sigma}f(a)+\mu^{\sigma}f(b)$

iv) Para $a,b,c\in X$ $\lambda,\mu,\nu\in K$ con $\lambda+\mu+\nu=1$, es $f(\lambda a+\mu b+\nu c)=\lambda^{\sigma}f(a)+\mu^{\sigma}f(b)+\nu^{\sigma}f(c)$.

Entonces:

1) En cualquier caso i) $\Rightarrow$ ii) $\Rightarrow$ iii) y iv) $\Rightarrow$ i)

2) Si la caracteristica de K es distinta de dos, entonces iii) $\Rightarrow$ iv) y por tanto las cuatro afirmaciones son equivalentes.

Demostración:

1) i) $\Rightarrow$ ii): Fijado $b\in X$, si $a=\sum_{i=0}^{r}\lambda_i a_i$, es $\vec{ba}=\sum_{i=0}^{r}\lambda_i\vec{ba_i}$ y $\overrightarrow{f(b)f(a)}=\vec{f}(\vec{ba})=\sum_{i=0}^{r}\lambda_i^{\sigma}\vec{f}(\vec{ba_i})=\sum_{i=0}^{r}\lambda_i^{\sigma}\overrightarrow{f(b)f(a_i)}$, y por 4.1.1 se deduce el resultado ii).

ii) $\Rightarrow$ iii) y iv) $\Rightarrow$ iii) son triviales

iv) $\Rightarrow$ i) : Fijado $a\in X$ se probará que $f_a:\vec{X}\ni\vec{ax}\longmapsto\overrightarrow{f(a)f(x)}\in \vec{X}'$ es aplicación σ-lineal. En efecto:

Si $\lambda\vec{ax}=\vec{ay}$ entonces $y=(1-\lambda)a+\lambda x$, como iv) $\Rightarrow$ iii) es $f(y)=(1-\lambda)^{\sigma}f(a)+\lambda^{\sigma}f(b)=(1-\lambda^{\sigma})f(a)+\lambda^{\sigma}f(b)$, y por tanto $f_a(\lambda\vec{ax})=f_a(\vec{ay})=\overrightarrow{f(a)f(y)}=\lambda^{\sigma}\overrightarrow{f(a)f(x)}=\lambda^{\sigma}f_a(\vec{ax})$.

Además si $ax+ay=az$, es $z=x+y-a$, y (por iv)) $f(z)=f(x)+f(y)-f(a)$, de donde se deduce : $f_a(\vec{ax}+\vec{ay})=f_a(\vec{az})=\overrightarrow{f(a)f(z)}=\overrightarrow{f(a)f(x)}+\overrightarrow{f(a)f(y)}=f_a(\vec{ax})+f_a(\vec{ay})$.

La de mostración de 2) es análoga a la correspondiente del teorema 4.2.1 y se deja como ejercicio

4.3.2 Corolario

Sean X y X´espacios afines sobre los cuerpos K y K´, $\sigma:K\to K'$ un automorfismo, y $f:X\longrightarrow X'$ una aplicacion inyectiva.

Entonces f es σ-afin, si y solo si para toda terna alineada de puntos $a,x,b\in X$, la terna $f(a)$, $f(x)$, $f(b)$ está alineada, y $(f(a);f(x);f(b))^{\sigma}=(a;x;b)^{\sigma}$.

Demostración

Para a,x,b $\in$ X alineados, se tiene la identidad para $a\neq b$: $x=(b;x;a)a+(a;x;b)b$,si f(x) está alineado con f(a) y f(b) , se tiene analogamente $f(x)=(f(b);f(x);f(a))f(a)+(f(a);f(x);f(b))f(b)$, y $f(a)\neq f(b)$. Aplicando f a los dos miembros de la primera igualdad, y comparando con la segunda, se deduce el resultado a partir del teorema 4.3.1.

4.3.3 Definición

Una biyección f de un espacio afin, se dice que conserva la razón simple, si transforma cada terna de puntos alineados a,x,b $\in$ X en una terna de puntos alineados f(a),f(x),f(b), y además (si $a\neq b$) es $(a;x;b)=(f(a);f(x);f(b))$

Cuando la caracteristica del cuerpo base K es distinta de dos, se tiene el siguiente resultado consecuencia inmediata de 4.3.2

4.3.4 Corolario

Una biyección f de un espacio afin es transformación afín , si y solo si conserva la razón simple

4.3.5 Observaciónes

a) El corolario anterior expresa que la razón simple es un concepto geométrico (ó invariante de la geometria afín),pues se conserva por el grupo afín. Por otra parte , la razon simple determina el grupo afin de transformaciones; se dice por esto , que es un invariante caracteristico.

b) Utilizando una nueva formulación del resultado de 1.2.6, y el corolario 4.3.4, se concluye que dos espacios afines $(X,\vec{X}\Delta)$ $(X,\vec{X}',\Delta')$ con el mismo conjunto X de puntos, y sobre el mismo cuerpo K (de caracteristica distinta de dos), definen la misma estructura afin sobre X, si y solo si la aplicación identidad $id:X\rightarrow X$ es afin,y esto sucede si y solo si ambos espacios inducen la misma razón simple sobre X. Así pues , la razon simple y la estructura afin, se determinan entre si unívocamente.
Por éste motivo, el resultado de una combinación afín de puntos $\sum_{i=0}^{r}\lambda_i p_i$ en X con $\sum_{i=0}^{r}\lambda_i=1$, depende exclusivamente de la estructura afín inducida sobre X.

CAPITULO V

TEOREMAS DE ESTRUCTURA PARA ESPACIOS AFINES

El estudio de las aplicaciones biyectivas entre espacios afines, que transforman rectas en rectas, constituyen el punto de partida de éste Capítulo, cuya meta final es el análisis de las relaciones entre estructura y geometría afín.

1.- TEOREMA FUNDAMENTAL DE LA GEOMETRIA AFIN

Una aplicación semiafin $f:X\longrightarrow X'$ transforma rectas en rectas ó puntos, es decir, para $a,b\in X$ es $f(\langle a,b\rangle) = \langle f(a),f(b)\rangle$.

El objeto de éste epígrafe es analizar bajo que restricciones se verifica el recíproco de la afirmación anterior.

1.1 Teorema Fundamental (Caso biyectivo)

X y X´ denotarán espacios afines sobre los cuerpos K y K´respectivamente.

1.1.1 Definición

Una aplicación biyectiva $f:X\longrightarrow X'$ se llama colineación, si $f(R)$ es una recta afín de X' para cada recta afín R de X.

1.1.2 Observaciones

1) Cualquier biyección entre rectas afines es una colineación

2) Si $K=K'=Z_2$, cualquier biyección $f:X\longrightarrow X'$ es colineación

Probaremos que una colineación $f:X\longrightarrow X'$ es aplicación semiafin, cuando se imponen las restricciones, $K\neq Z_2$, y $\dim X'\geq 2$.

Esto exige algunos preparativos:

1.1.3 Proposición

Sea $f:X\longrightarrow X'$ una colineación. Supongase $K'\neq Z_2$. Entonces:

i) La imagen por f de cada subespacio afín de X, es subespacio afín de X'.

ii) $f(P)$ es un plano de X'para cada plano P de X.

Demostración:

i) Si A es subespacio afín de X, y $a'=f(a)$ $b'=f(b)$ son dos puntos ϵ de $f(A)$, la recta $R=\langle a,b\rangle$ está contenida en A , y su imagen $R'=f(R)$, es la recta de X' determinada por a' y b' , que está por tanto contenida en $f(A)$. La conclusión es ahora consecuencia de 4.2.2 y 4.2.3 (Cap.IV) ya que K' debe ser también distinto de Z_2 (¿porque?)

ii) Sea P un plano afín de X, y $P'=f(P)$ el subespacio imagen. Fijada la recta afin R de $\mathcal{R}$, su imagen $R'=f(R)$ es una recta afin estrictamente contenida en P'. Así dim $P'>1$

Como $f^{-1}:X'\longrightarrow X$ es también colineación, se puede aplicar el mismo argumento para probar que dim $f^{-1}(P_1')>1$, para P_1' plano vectorial de P'. Pero $f^{-1}(P_1')\subset P$, y dim P=2, luego se verifica la igualdad $f^{-1}(P_1')=P$, y por tanto $f(P)=P'=P_1'$.

1.1.4 Corolario

Si $f:X\longrightarrow X'$ es colineación , dim $X'\geqslant 2$, y $K'\neq Z_2$, entonces f transforma un par de rectas paralelas de X, en un par de rectas paralelas de X'.

Demostración:

Si R_1 y R_2 son dos rectas paralelas (distintas) de X, las rectas $R_1'=f(R_1)$ y $R_2'=f(R_2)$ están contenidas en el plano P' imagen por f del plano $P=R_1\dotplus R_2$, y $R_1'\cap R_2'=\emptyset$ (pues $R_1\cap R_2=\emptyset$). Por el teorema de incidencia, es R_1' paralela a R_2' .

1.1.5 Corolario

Si $f:X\longrightarrow X'$ es colineación, dim $X'\geqslant 2$, y $K'\neq Z_2$,entonces f conserva la relación de equipolencia, es decir:

Si $a,b,c,d\in X$ y $\vec{ab}=\vec{cd}$ entonces $\overrightarrow{f(a)f(b)}=\overrightarrow{f(c)f(d)}$

Demostración:

a) Si los puntos $a,b,c\in X$ no están alineados, la condición necesaria y suficiente para que el vector $\vec{ab}$ sea igual al $\vec{cd}$, es que $\langle a,b\rangle /\!/ \langle c,d\rangle$ y $\langle a,c\rangle /\!/ \langle b,d\rangle$. Así si $\vec{ab}=\vec{cd}$, la recta $f(\langle a,b\rangle)=\langle f(a),f(b)\rangle$ es paralela a $f(\langle c,d\rangle)=\langle f(c),f(d)\rangle$, y análogamente $\langle f(a),f(c)\rangle /\!/ \langle f(b),f(d)\rangle$, por tanto $\overrightarrow{f(a)f(b)}=\overrightarrow{f(c)f(d)}$.

b) Si los puntos $a,b,c\in X$ están situados sobre una recta R ($a\neq b$), podemos elegir un punto $x\in X-R$ (la igualdad X=R, llevaría a dim $X'=1$). Si $y=x+\vec{ab}$, por a) se verifica si $\vec{ab}=\vec{cd}$, $\overrightarrow{f(a)f(b)}=\overrightarrow{f(x)f(y)}=\overrightarrow{f(c)f(d)}$.

1.1.6 Teorema fundamental (caso biyectivo)

Si $f:X\longrightarrow X'$ es colineación, dim $X'\geqslant 2$, y $K'\neq Z_2$, entonces f es aplicación semiafin.

Demostración:

Por 1.1.5 , la aplicación $f:X\longrightarrow X'$ verifica la condición A1 de la definición (2.1.1, CapIV) de aplicación semiafín, en donde se denota por $\vec{f}$ la aplicación f: $\vec{X}\ni\vec{ab}\longmapsto\overrightarrow{f(a)f(b)}\in\vec{X}'$, que es automáticamente aditiva.

Para probar que $\vec{f}$ es semilineal, es suficiente, por 3.4.2 (Cap I), demostrar que $\vec{f}:\vec{X}\longrightarrow\vec{X}'$ es una biyección, tal que $\vec{f}(\vec{R})$ es una recta vectorial de $\vec{X}'$ para cada recta vectorial $\vec{R}$ de $\vec{X}$. Probémoslo:

Fijado el punto $a\in X$, la aplicación $\vec{f}$ hace conmutativo el diagrama:

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & X' \\ {\scriptstyle \Delta_a}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \Delta'_{f(a)}} \\ \vec{X} & \xrightarrow{\vec{f}} & \vec{X}' \end{array}$$

Esto prueba por una parte que $\vec{f}$ es biyectiva, y por otra, que para cada vector $v\in\vec{X}$ es $f(a+\vec{v})=f(a)+f(\vec{v})$. Así si $\vec{R}$ es recta vectorial de X, $R=a+\vec{R}$ es recta afin de X, y $f(R)=f(a)+\vec{f}(\vec{R})$ es por hipótesis recta afin de X', cuya dirección $\vec{f}(\vec{R})$ es pues recta vectorial de $\vec{X}'$.

1.1.7 Corolario

Sea $f:X\longrightarrow X'$ una aplicación inyectiva entre espacios afines, tal que $f(R)$ es una recta afín de X' para cada recta afín R de X. Supongase $K\neq Z_2$. Entonces:

i) im f es un subespacio afín de X'.

ii) Si $\dim(\text{im } f)\geqslant 2$, entonces f es aplicación semiafin.

Demostración:

La demostración de i) es análoga a i) de 1.1.3. El apartado ii) ya es consecuencia inmediata de 1.1.6 .

1.1.8 OBSERVACIÓN : Nótese que en las hipótesis del teorema 1.1.6 puede sustituirse la condición $\mathbb{K}\neq Z_2$ por la de que f transforme cada par de rectas paralelas en un par de rectas paralelas

1.2 Teorema Fundamental (caso general)

Por razones de brevedad, se introduce incidentalmente la siguiente definición:

1.2.1 Definición

Una aplicación $f:X\longrightarrow X'$ entre espacios afines se denominará pseudo-afín si $f(\langle a,b\rangle)=\langle f(a),f(b)\rangle$ para todo $a,b\in X$.

El motivo de éste apartado es probar que bajo **ciertas restricciones**

toda aplicación pseudo-afin $f:X\longrightarrow X'$ es semiafin.

La idea de la demostración viene sugerida en la siguiente

1.2.2 Proposición

Si $f:X\longrightarrow X'$ es aplicación pseudo-afin, y $\pi:X\longrightarrow Y$ es aplicación afín suprayectiva, tal que existe $f':Y\longrightarrow X'$ con $f=f'.\pi$,entonces im $f=$ im f', y y f'es pseudo-afín.

Demostración:

La primera parte de la conclusión (im f=im f´) es evidente. Probemos la segunda:

Si $y_1=\pi(x_1)$ $y_2=\pi(x_2)$ son dos puntos de Y ($x_1,x_2\in X$), entonces
$f'(\langle y_1,y_2\rangle)=f'(\langle\pi(x_1),\pi(x_2)\rangle)=f'.\pi(\langle x_1,x_2\rangle)=f(\langle x_1,x_2\rangle)=$
$=\langle f(x_1),f(x_2)\rangle=\langle f'.\pi(x_1),f'.\pi(x_2)\rangle=\langle f'(y_1),f'(y_2)\rangle$.

La siguiente proposición, permitirã construir Y , π y f´ como en 1.1.2 de forma que f´es inyectiva:

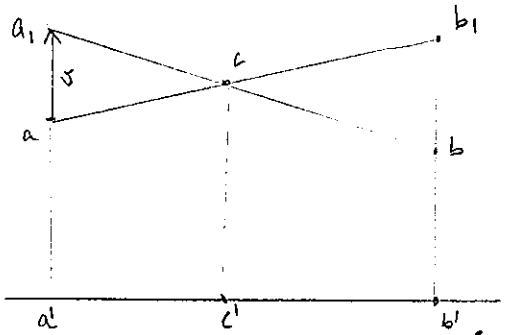
1.2.3 Proposición

Sea $f:X\to X'$ una aplicación psudo-afin. Supóngase $K\neq Z_2$, ~~y dim(im f) ≥ 2~~. Existe entonces un subespacio vectorial V de $\vec{X}$ tal que para todo punto $a'=f(a)$ de im f se verifica $f^{-1}(a')=a+V$.

Demostración:

Observese en primer lugar que para todo $a'\in$ im f , $f^{-1}(a')$ es un subespacio afin no vacío de X, ya que si $a,b\in f^{-1}(a')$ es $f(\langle a,b\rangle)=\langle f(a),f(b)\rangle=\langle a',a'\rangle=a'$, y $\langle a,b\rangle\subset f^{-1}(a')$. Así pues , $f^{-1}(a')=a+V(a')$. Demostraremos que $V(a')=V(b')$ para todo $b'\in$ im f , para lo cual es suficiente probar el contenido $V(a')\subset V(b')$ (el otro se obtiene intercambiando los papeles de a´y b´):

Supóngase a´distinto de b´. Fijados $a\in f^{-1}(a')$, $b\in f^{-1}(b')$, sea $v\in V(a)$, $a_1=a+v\in f^{-1}(a')$. Para demostrar que $v\in V(b)$ es suficiente probar la siguiente afirmación: "Existe $b_1\in f^{-1}(b')$, $b_1\neq b$, tal que las rectas $\langle a,a_1\rangle$ y $\langle b,b_1\rangle$ son paralelas" Esto probaría que los vectores $v=\vec{aa_1}$ y $\vec{bb_1}\in V(b')$, son proporcionales, y $v=\lambda\vec{bb_1}\in V(b')$.



Demostremos la afirmación:

La recta $\langle a_1,b\rangle$ contiene al menos un punto c distinto de a_1 y de b (pues $K\neq Z_2$), y $f(c)=c'\in\langle a',b'\rangle$ es distinto de a´y de b´ (si por ejemplo fuera $c'=a'$ entonces $a,c\in f^{-1}(a')$ y $\langle a,c\rangle=\langle a,b\rangle\subset f^{-1}(a')$ lo que es absurdo).Como $f(\langle a,c\rangle)=\langle a',b'\rangle$, existe $b_1\in\langle a,c\rangle$ con $f(b_1)=b'$. Claramente es $b\neq b_1$ (si $b=b_1$ entonces $a_1,a,$ y c estarían alineados y $f(c)=a'$) y los puntos a,c,b no están alineados(pruébese). Así las rectas $\langle a_1,b\rangle$ y $\langle a,b_1\rangle$ son dos rectas distintas que se cortan en c, y los puntos a_1,b,a,b_1 son coplanarios.Como las rectas $\langle a,a_1\rangle\subset f^{-1}(a')$ y $\langle b,b_1\rangle\subset f^{-1}(b')$ tienen intersección vacía, son paralelas.

1.2.4 Teorema Fundamental (Caso general)

Sea $f:X \longrightarrow X'$ una aplicación pseudo-afin. Supongase $K \neq Z_2$. Entonces im f es subespacio afin de X', y si $\dim(\text{im } f) \geqslant 2$, entonces f es aplicación semiafin.

Demostración:

Por la proposición 1.2.3, existe V subespacio vectorial de X tal que $f^{-1}(a')=a+V$ para todo $a' \in \text{im } f$. Sea $Y=X/V$ el espacio afín cociente, y $\Pi:X \longrightarrow Y$ la proyección canónica (véase 4.1.3 Cap IV) . Así la aplicación $f':Y \ni x+V \longmapsto f(x) \in X'$, está correctamente definida , es inyectiva, y verifica $f=f'.\Pi$. Aplicando ahora la proposición 1.2.2, se concluye que f' verifica las hipótesis de 1.1.7, y por tanto es semiafin.En consecuencia $f=f'.\Pi$ tambien lo es.

1.2.5 Corolario

Sea $f:X \longrightarrow X$ aplicación que transforma biyectivamente cada recta de X en una recta paralela. Si $\dim X \geqslant 2$, y $K \neq Z_2$,entonces f es dilatación de X.

Indicaciones para la demostración:

En X existen dos rectas no paralelas (pues $\dim X \geqslant 2$) digamos R_1 y R_2. $f(R_1)$ (paralela a R_1) no es paralela a $f(R_2)$; por tanto $\dim(\text{im } f) \geqslant 2$. Como consecuencia de 1.2.4 , f es semiafin , y su aplicación lineal asociada $\vec{f}:\vec{X} \longrightarrow \vec{X}$, deja invariantes todas las rectas vectoriales.Esto permite deducir que $\vec{f}$ es homotécia vectorial.

1.3 Teorema Fundamental para espacios afines de dimensión finita

1.3.1 Definición

Una aplicación $f:X \longrightarrow X'$ se dice que conserva la alineación,si transforma cualquier terna de puntos alineados de X , en una terna de puntos alineados de X'.

Veremos que una aplicación biyectiva f que conserva la alineación, entre los espacios afines X y X'de la misma dimensión finita $n \geqslant 2$, es semiafin (si se supone $K \neq Z_2$)

1.3.2 Proposición

Si $f:X \longrightarrow X'$conserva la alineación, entonces $f^{-1}(A')$ es subespacio afín de X, para cada subespacio afín A' de X' ($K \neq Z_2$)

Demostración:

Si $a,b \in f^{-1}(A')$, entonces $f(\langle a,b\rangle) \subset \langle f(a),f(b)\rangle \subset A'$, y por tanto $\langle a,b\rangle \subset f^{-1}(A')$.

1.3.3 Lema

Supongase X espacio afin de dimensión finita n, y A_1 una recta afin de X. Entonces:

1) Existe una cadena de subespacios de X $\emptyset \subsetneq A_o \subsetneq A_1 \ldots \subsetneq A_n = X$

2) Si $\emptyset \subsetneq B_o \subsetneq B_1 \ldots \subsetneq B_n$ es una cadena de subespacios de X, entonces $\dim B_i = i$ para $i=o,\ldots,n$.

Demostración:

1) Si $\vec{A_1} = \langle \vec{e}_1 \rangle \subset \vec{X}$, sea $(\vec{e}_1,\ldots,\vec{e}_n)$ base de $\vec{X}$. Basta tomar $A_i = a + \langle e_1 \ldots, e_i \rangle$ donde a es un punto de A_1.

2) La conclusión es consecuencia inmediata del hecho de que $\dim B_i < \dim B_{i+1}$, y $\dim X = n$.

1.3.4 Teorema Fundamental (para dimensión finita)

Supóngase $\dim X = \dim X' = n \geq 2$, y $K \neq Z_2$. Si $f: X \longmapsto X'$ es biyectiva y conserva la alineación, entonces f es colineación, y por tanto semiafin.

Demostración:

Sea $R = \langle a,b \rangle$ una recta cualquiera de X, y $A_1' = \langle f(a), f(b) \rangle$. Por hipótesis es $f(R) \subset A_1'$. Construyamos la cadena de subespacios de X'indicada en 1.3.3 $\emptyset \subsetneq A_o' \subsetneq A_1' \ldots \subsetneq A_n'$. Por 1.3.2 y la biyectividad de f, es $\emptyset \subsetneq f^{-1}(A_o') \subsetneq f^{-1}(A_1') \subsetneq \ldots \subsetneq f^{-1}(A_n')$ una cadena de subespacios de X. Nuevamente por 1.3.3 se concluye que $f^{-1}(A_1')$ es una recta afín de X (que contiene a R). Por tanto $f(R) = A_1'$ es una recta afín, que es lo que queriamos demostrar.

2. ESTRUCTURA Y GEOMETRIA EN ESPACIOS AFINES

Dos estructuras afines distintas sobre un mismo conjunto, pueden dar lugar al mismo grupo de transformaciones, es decir, a la misma geometría. Veremos que de la misma forma que la razón simple determina la estructura (véase 4.3. Cap IV), las rectas determinan la geometria. Estudiaremos primeramente una caracterización geométrica de las biyecciones semiafines, que tiene interés por si misma:

2.1 <u>Biyecciones que conservan la geometría</u>

Recordemos que una aplicación biyectiva f entre los conjuntos X y X' induce un isomorfismo f entre los correspondientes grupos de permutaciones X! y X'!, $f: X! \ni g \longmapsto f.g.f^{-1} \in X'!$ verificando las propiedades funtoriales descritas en 3.3 Cap I.

X y X'denotaran espacios afines sobre los cuerpos K y K'(resp.)

2.1.2 Definición

Una biyección $f:X \longrightarrow X'$ se dice compatible con las geometrías , si $f_*(GA(X))= GA(X')$. Si $X=X'$ se dice que f conserva la geometría.

Veremos que las biyecciones de X en X' compatibles con las geometrías son justamente los isomorfismos semi-afines. Se establecerán previamente los siguientes lemas:

2.1.3 Lema

Si $f:X \longrightarrow X'$ es una aplicación biyectiva ,y $g \in X!$, entonces $a \in X$ es punto fijo para f, si y slo si $f(a)$ es punto fijo para $f_*(g)$.

2.1.4 Lema

Si X es espacio afin y $a \in X$, entonces el grupo lineal, y el subgrupo de homotecias vectoriales de la vectorialización X_a , vienen descritos respectivamente por:

$GL(X_a)=\{g \in GA(X) \; / \; g(a)=a\}$, $Z(X_a)=\{h \in Dil(X) \; / \; h(a)=a\}$.

La demostración de 2.1.3 es inmediata, y la de 2.1.4 es consecuencia inmediata de 2.1.5 (Cap. IV)

2.1.5 Teorema

Sea $f:X \longrightarrow X'$ una biyección y supongase $K' \neq Z_2$. Son equivalentes las siguientes afirmaciones:

i) f es compatible con los subgrupos de dilataciones, es decir, $f(Dil(X))=Dil(X')$

ii) f es semiafin

iii) f es compatible con las geometrías, es decir : $f_*(GA(X))=GA(X')$

Demostración:

i) $\Rightarrow$ ii)

Por el lema 2.1.3 , f transforma una traslación t de X , $t \neq id$ (dilatación sin puntos fijos) en una traslación $f_*(t)$ de X'. En consecuencia, f conserva la relación de equipolencia:

Si $v=\overrightarrow{ab}=\overrightarrow{cd} \in \overrightarrow{X}$, la traslación t_v en X verifica $t_v(a)=b$ $t_v(c)=d$. Por tanto la traslación $f_*(t_v)$ transforma $f(a)$ en $f(b)$ y $f(c)$ en $f(d)$. Así es $\overrightarrow{f(a)f(b)}= \overrightarrow{f(c)f(d)}$.

De ésta forma, fijado el punto $a \in X$, la aplicación $f:X_a \rightarrow X_{f(a)}$ es aditiva entre espacios vectoriales , y nuevamente por 2.1.3 (y 2.1.4) se verifica : $f_*(Z(X_a))= Z(X'_{f(a)})$. Por 3.3.3 (Cap. I) se concluye que $f:X_a \rightarrow X'_{f(a)}$ es semilineal , y por 2.1.5 (Cap IV), f es semiafin.

ii) iii) Se deduce inmediatamente de la regla del producto de aplicaciones semiafines (véase 2.2.1 Cap. IV)

iii) i) Como $f:X_a \to X'_{f(a)}$ verifica $f_*(GL(X_a)=GL(X'_{f(a)})$, por 3.3.3 (Cap I) se deduce que $f_*(Z(X_a)=Z(X'_{f(a)})$ para todo a X. Es decir, f transforma el conjunto H(X) de homotécias de X, en el conjunto H(X') de homotecias de X'. De 2.4.5 (Cap IV) se deduce que $H(X)\subset Dil(X)$ es sistema generador del subgrupo Dil(X) de dilataciones, y por ser $f_*: GA(X)\to GA(X')$ isomorfismo de grupos, se concluye que f (H(X))=H(X') es sistema generador de f (Dil(X)). Por tanto $f_*(Dil(X))=Dil(X')$.

2.2 Estructuras afines que inducen la misma geometría

Se probará que la familia de rectas de un espacio afin determina unívocamente su geometría. Por otra parte, dos estructuras afines sobre un mismo conjunto X inducen la misma geometría, si y solo si la aplicación identidad es semiafin de una estructura en la otra. La geometría afin determina por tanto la alineación de puntos, y la razón simple salvo isomorfismos de cuerpos.

2.2.1 Notaciones

Si $(\Delta,\to)$ y $(\Delta,\to')$ son dos estructuras afines en un mismo conjunto X sobre los cuerpos K y K' respectivamente, se denota por $G=GA(X,\Delta)$ $G'=GA(X',\Delta')$ los correspondientes grupos de transformaciones, y por (a;x;b) y (a;b;x)' las razones simples correspondientes a tres puntos alineados.

El cuerpo K se supondrá distinto de Z_2,

2.2.2 Teorema

Sean $(\Delta,\to)$, $(\Delta',\to')$ dos estructuras afines sobre el conjunto X. Las siguientes afirmaciones son equivalentes: $(\dim(X,\Delta)\geq 2)$

i) Las dos estructuras inducen la misma geometría, es decir : G=G'

ii) Las dos estructuras inducen el mismo grupo de dilataciones

iii) La aplicación identidad id $:(X,\Delta)$ (X,Δ') es semiafin

iv) Las rectas afines de (X,Δ) coinciden con las de (X,Δ')

Demostración:

Las equivalencias i)$\Leftrightarrow$ii)$\Leftrightarrow$iii) son consecuencia inmediata de 2.1.5 , si se tiene en cuenta que $id_*=id:X!\to X!$.

La equivalencia iii)$\Leftrightarrow$iv) se deduce del teorema fundamental de la geometría afin (Véase 1.1.6)

En el caso particular K=K'=R, el teorema anterior dá lugar al siguiente resultado:

2.2.3 Corolario

Si $(\Delta,\to)$ y $(\Delta',\to)$ son dos estructuras afines reales sobre un mismo conjunto X , y dim $(X,\Delta)\geq 2$, las afirmaciones que siguen son equivalentes:

i) Las dos estructuras afines coinciden

ii) Las dos estructuras inducen la misma geometria afin

iii) Las dos estructuras inducen el mismo grupo de dilataciones

iv) La familia de rectas afines de (X,Δ) coincide con la de (X,Δ')

El siguiente corolario es un enunciado más explícito de la parte más significativa del teorema 2.2.2

2.2.4 Corolario

Dos estructuras afines $(\Delta,\rightarrow)$, $(\Delta',\rightarrow)$ sobre un mismo conjunto X, inducen la misma geometría si y solo si se verifica la propiedad: Para $a,x,b \in X$,
a,x,b alineados en $(X,\Delta) \Leftrightarrow a,x,b$ alineados en (X,Δ').
En este caso existe $\sigma : K \mapsto K'$ isomorfismo de cuerpos, tal que $(a;x;b)^{\sigma}=(a;x;b)'$ cuando a,x,b son tres puntos alineados.

CAPITULO VI

EXTENSIONES VECTORIALES. GEOMETRIA ANALITICA AFIN

Utilizando la técnica de las extensiones vectoriales de espacios afines, se desarrollará la geometría analítica afin en el contexto de la geometría analítica vectorial.

1. EXTENSIONES VECTORIALES CANONICAS EN ESPACIOS AFINES

Una extensión vectorial de un espacio afin X , es un espacio vectorial V que contiene a X como subespacio afín. Por razones de homogeneidad se impone la condicion adicional de que el vector nulo de V no pertenezca al espacio afín X.

Las extensiones vectoriales "mas pequeñas" ó minimales de un espacio afín X, veremos que son aquellas que hacen a X hiperplano afín no vectorial del espacio vectorial V. No es dificil probar la existencia de tales extensiones.

La cuestión no trivial que inicialmente analizaremos, es la determinación de una extensión vectorial canónica minimal para un espacio afin abstracto.

El problema de la extensión vectorial minimal de subespacios afines y aplicaciones semiafines, se plantea y se resulve a partir de aquí, de forma natural

1.1 Extensiones vectoriales de un espacio afin

1.1.1 Definición

Una extensión vectorial de un espacio afin $X=(X,\vec{X},\Delta)$ es un espacio vectorial V que contiene a X como subespacio afin no vectorial (es decir, $o\notin X$, y la aplicación inclusión $i:X\hookrightarrow V$ es aplicación afín)

La extensión vectorial V se llama minimal, si no existe subespacio vectorial propio de V que sea extensión vectorial de X.

1.1.2 Observaciones

a) Si V es extensión vectorial del espacio afin X, la aplicacion inclusión $i:X\hookrightarrow V$ es afín e inyectiva, y $\vec{i}:\vec{X}\rightarrow V$ define una inmersión vectorial de $\vec{X}$ en V que permite considerar a X espacio afín sobre el espacio vectorial i(X) con la misma estructura afin (véase 1.2.6 Cap IV)

b) Una extensión vectorial V del espacio afin X, puede así entenderse como una aplicación afin inyectiva (inmersión afin) $i:X\rightarrow V$, si se conviene en identificar cada punto $x\in X$ con su imagen i(x)

1.1.3 Teorema

Si V es extensión vectorial minimal del espacio afin X, entonces X es hiperplano afin no vectorial de V, y existe una única forma lineal $\alpha\in V^*$ tal que: $X=\{x\in V\ /\alpha(x)=1\}$. La variedad de dirección de X es entonces $\vec{X}=\{\vec{x}\in V/\alpha(\vec{x})=0\}$.

Se denomina a α forma asociada a la extensión.

Demostración:

Por razones de minimalidad, X es sistema generador del espacio vectorial V. Si $a\in X$ es $X=a+\vec{X}$ y $a\notin\vec{X}$ (pues si $a\in X$ es $a+\vec{X}=\vec{X}=X$, y $o\in X$). Sea A la recta vectorial genrada por a en V. Probaremos que $V=A\oplus\vec{X}$:

Claramente $A\cap\vec{X}=\emptyset$, y si $v\in V$, se puede escribir $v=\sum_{i=0}^{r}\lambda_i p_i$ para ciertos escalares λ_i y puntos $p_i\in X$.

- Si $\sum_{i=0}^{r}\lambda_i=0$, entonces $v\in\vec{X}\subset A\oplus\vec{X}$
- Si $\sum_{i=0}^{r}\lambda_i=\lambda\neq 0$, entonces $(1/\lambda)v=p=\sum_{i=0}^{r}(\lambda_i/\lambda)p_i\in X=a+\vec{X}$, por tanto $(1/\lambda)v=a+\vec{x}$ con $\vec{x}\in\vec{X}$, es decir $v=\lambda a+\lambda\vec{x}\in A\oplus\vec{X}$.

Por ser $\vec{X}$ hiperplano vectorial de V , existe una forma lineal $\beta\in V^*-\{0\}$ tal que $\vec{X}=\{\vec{x}\in V\ /\ \beta(\vec{x})=0\}$. Sea $\lambda=\beta(a)$, entonces $\alpha=(1/\lambda)\beta$ es la forma lineal pedida, ya que $\alpha(a)=1$ y $X=a+\vec{X}$. Los detalles quedan como ejercicio.

1.1.4 Ejemplos

1) Si V es K-espacio vectorial, el producto $\hat{V}=V_1(K)\times V$ es un espacio vectorial que representa una extensión vectorial minimal del espacio afin V , si se toma la inmersión $i: V\ni v\mapsto(1,v)\in\hat{V}$. La forma lineal asociada a la extensión es:

$\alpha: V\ni(\lambda,v)\longmapsto\lambda\in K$.

2) El espacio vectorial de las (n+1)étuplas $\hat{A}_n(K)=\left\{\begin{pmatrix}a_0\\ \vdots\\ a_n\end{pmatrix}\ /\ a_i\in K\right\}$, es extensión vectorial del modelo cartesiano $A_n(K)$.

La forma lineal asociada a la extensión es la coordenada $x_o: A_n\ni\begin{pmatrix}a_0\\ a_n\end{pmatrix}\to a_o\in K$.

Las extensiones vectoriales definidas en éstos ejmplos, se denominan naturales.

La existencia de extensiones minimales para un espacio afin abstracto, queda probada en el siguiente teorema:

1.1.5 Teorema

Todo espacio afin X admite una extensión vectorial minimal

Demostración:

Sea $a\in X$, X_a la vectorialización de X en a, y $\hat{X}_a=V_1(K)\times X_a$, la extensión vectorial natural de X_a.

La aplicación $i: X\ni x\longmapsto(1,x)\in\hat{X}_a$ es inyectiva. Probemos que es afin: si $x,y\in X$ $\lambda,\mu\in K$ con $\lambda+\mu=1$ se tiene $i(\lambda x+\mu y)=(1,\lambda x+\mu y)=(\lambda+\mu,(\lambda x+\mu y)_a)$ $=(\lambda,(\lambda x)_a)+(\mu,(\mu y)_a)=\lambda(1,x)+\mu(1,y)=\lambda i(x)+\mu i(y)$.

La forma $\alpha:\hat{X}_a\ni(\lambda,x)\longmapsto\lambda\in K$ es la forma lineal asociada a la extensión.

1.2 Extensión vectorial canónica de un espacio afin

La idea para la construcción de $\hat{X}$, conjunto base de la extensión vectorial canónica de un espacio afin X, está implícita en el siguiente resultado:

1.2.1 Proposición

Sea V una extensión vectorial minimal de un espacio afin X sobre el cuerpo K , y $\vec{X}$ su varidad de dirección en V.

El espacio vectorial V se descompone entonces en la unión disjunta de los conjuntos $K^{*}X = \{\lambda x \,/\, \lambda \in K^{*},\ x \in X\}$ y $\vec{X}$.

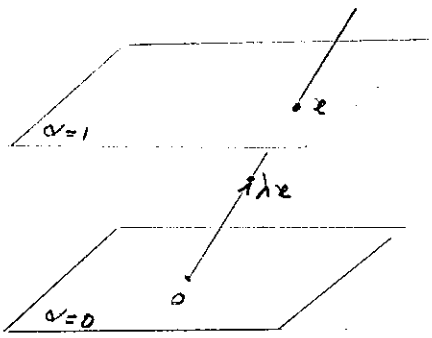
Demostración:

Por 1.3.3 existe $\alpha \in V^{\vee}-\{0\}$ tal que $X = \{x \in V \,/\, \alpha(x)=1\}$, y se verifica que $\vec{X} = \{\vec{x} \in V \,/\, \alpha(x)=0\}$. Demostraremos que $K^{*}X = \{v \in V \,/\, \alpha(v) \neq 0\}$:

Si $v \in V$ y $\alpha(v) \neq 0$, entonces $x=(1/\alpha(v))v \in X$, pues $\alpha(x)=(1/\alpha(v))\alpha(v)=1$, y así $v=\alpha(v)x \in K^{*}X$.

Recíprocamente, si $\lambda \in K^{*}$ y $x \in X$, entonces $\alpha(\lambda x)=\lambda\alpha(x)=\lambda \neq 0$

Observese por último que $V = \{v \in V \,/\, \alpha(v)\neq 0\} \cup \{v \in V \,/\, \alpha(v)=0\}$.



Si $x \in X$ y $\lambda \in K$, es útil pensar que el vector $\lambda x \in V$ "representa" el punto x afectado de una masa $\lambda = \alpha(\lambda x)$. Con ésta interpretación , la forma lineal α mide la masa de cada vector de V. De ésta forma , los puntos de X tendrían asociada una masa igual a la unidad, y los vectores de $\vec{X}$ seían de masa cero.

1.2.2 Definición

Sea $X=(X,\vec{X},\Delta)$ espacio afín sobre el cuerpo K. Si $\lambda \in K$ y $x \in X$, a la pareja (λ,x) se le denomina punto másico de masa λ . Un punto másico de masa cero, es por definición una pareja de la forma $(0,\vec{x})$ con $\vec{x} \in \vec{X}$.

Denotamos por $\hat{X} = (K^{*}_{\times}X)\cup\{0\}_{\times}\vec{X}$ al conjunto de los puntos másicos de X, y por ms: $\hat{X} \to K$ a la aplicación que asocia a cada elemento, su masa.

1.2.3 Teorema

Sea $X=(X,\vec{X},\Delta)$ un espacio afin sobre el cuerpo K, y $\hat{X} =(K^{*}_{\times} X)\cup\{0\}_{\times}\vec{X}$ el conjunto de sus puntos másicos,

Existe una única estructura vectorial (canónica) para $\hat{X}$, tal que la aplicación $j:X \ni x \longmapsto (1,x) \in \hat{X}$ es afin. Dicha estructura vectorial, viene unívocamente determinada por el grupo de fórmulas:

$$(\lambda,x)+(\mu,y)=\begin{cases}(\lambda+\mu,\ \frac{\lambda}{\lambda+\mu}x+\frac{\mu}{\lambda+\mu}y) & \text{si } \lambda+\mu\neq 0\\ (\lambda+\mu,\ \lambda x+\mu y)=(0,\lambda x+\mu y) & \text{si } \lambda+\mu=0\end{cases}$$

$(\lambda,x)+(0,v)=(\lambda,x+(1/\lambda)v)$; $(0,v)+(0,w)=(0,v+w)$

$\lambda(\mu,x)=(\lambda\mu,x)$; $\lambda(0,v)=(0,\lambda v)$; $0\hat{x}=(0,0)$

Donde $x,y\in X$, $v,w\in\vec{X}$, $\lambda,\mu\in K$, $\hat{x}\in\hat{X}$.

Por otra parte , en dicha estructura vectorial, la aplicación masa $ms:\hat{X}\to K$ es una forma lineal.

Si se identifica cada punto x de X con su imagen por j $(x=(1,x))$ el espacio vectorial $\hat{X}$ así construido resulta ser extensión vectorial minimal del esapcio afin X , y se denomina extensión vectorial cnónica.

Demostración:

Por 1.1.5 se sabe que existe una extensión vectorial minimal V de X; Sea $i:X\hookrightarrow V$ la aplicación inclusión. Para simplificar la exposición, identificaremos la variedad de dirección $\vec{i}(\vec{X})$ de X en V , con $\vec{X}$ mediante el isomorfismo lineal $\vec{i}:\vec{X}\to\vec{i}(\vec{X})$

Sea $\alpha\in V^*$ la forma lineal en V tal que $X=\{x\in V / \alpha(x)=1\}$. Entonces es $\vec{X}=\vec{i}(\vec{X})=\{\vec{x}\in V / \alpha(\vec{x})=0\}$.

Considerese la aplicación $I:\hat{X}\to V$ definida por:

$I(\lambda,x)=\lambda x$ si $\lambda\in K$ y $x\in X$

$I(0,\vec{x})=\vec{x}$ para $\vec{x}\in\vec{X}$

El teorema quedará evidentemente probado, si se demuestran las siguientes afirmaciones:

i) La aplicación $I:\hat{X}\to V$ es biyectiva

ii) La única estructura vectorial para $\hat{X}$ que hace a I isomorfismo lineal, verifica que la aplicación $j:X\ni x\mapsto(1,x)\in\hat{X}$ es afin.

iii) Dicha estructura vectorial en $\hat{X}$ viene explicitada por el grupo de fórmulas del enunciado, que solo dependen de la estructura afin de X.

Demostración de i) :

Si $I(\lambda,x)=I(\mu,y)$ con $\lambda,\mu\in K$ $x,y\in X$, entonces $\lambda x=\mu y$ y $\lambda=\alpha(\lambda x)=\alpha(\mu y)=\mu$ se deduce de aquí que $(\lambda,x)=(\mu,y)$. Esto prueba (salvo observaciones triviales) que I es aplicación inyectiva. Probemos que es suprayectiva:

Sea $v\in V$; si $v\in\vec{X}$ es $v=I(0,v)$. Si $v\notin\vec{X}$ entonces $\alpha(v)\neq 0$, y $x=(1/\alpha(v))v\in X$, y es $v=I(\alpha(v),x)$.

Demostración de ii):

Sean $x,y\in X$ $\lambda,\mu\in K$ con $\lambda+\mu=1$. Se probará la igualdad

$\lambda(1,x)+\mu(1,y)=(1,\lambda x+\mu y)$.

En efecto, como $I:\hat{X}\to V$ es aplicación lineal se tiene: $I(\lambda(1,x)+\mu(1,y)) = \lambda I(1,x)+\mu I(1,y) = \lambda x+\mu y = I(1,\lambda x+\mu y)$. Utilícese ahora la inyectividada de la aplicación I.

Demostración de iii):

La estructura vectorial en $\hat{X}$ que hace a $I:\hat{X}\to V$ isomorfismo lineal, puede establecerse mediante las siguientes fórmulas:

$\hat{x}+\hat{y}=I^{-1}(I(\hat{x})+I(\hat{y}))$; $\lambda\hat{x}=I^{-1}(\lambda I(\hat{x}))$ para $\hat{x},\hat{y}\in\hat{X}$ y $\lambda\in K$.

Teniendo en cuenta que $I^{-1}(v)=(0,v)$, y $I^{-1}(w)=(\alpha(w),(1/\alpha(w))w)$ para $v\in\vec{X}$ y $w\in V-\vec{X}$, pueden establecerse facilmente las fórmulas del enunciado.

Por ejemplo, si $x,y\in X$, $\lambda,\mu\in K$ se tiene:

a) Si $\lambda+\mu=0$ entonces $(\lambda,x)+(\mu,y)=I^{-1}(\lambda x+\mu y)=(0,\lambda x+\mu y)$

b) Si $\lambda+\mu\neq 0$ entonces $(\lambda,x)+(\mu,y)=I^{-1}(\lambda x+\mu y)=(\lambda+\mu,\frac{1}{\lambda+\mu}(\lambda x+\mu y))= (\lambda+\mu,\frac{\lambda}{\lambda+\mu}x+\frac{\mu}{\lambda+\mu}y)$.

El resto queda como ejercicio.

1.2.4 Identificaciones

a) Sea X espacio afin. La inmersión afin $j:X\ni x\mapsto(1,x)\in\hat{X}$, permite identificar el punto $x\in X$ con $(1,x)\in\hat{X}$, es decir $x=(1,x)$, y así podemos escribir: $X=\{x\in X \,/\, ms(x)=1\}$. Por otra parte, si $x\in X$ y $\lambda\in K^{*}$, es $(\lambda,x)=\lambda(1,x)=\lambda x$, es decir, el punto másico (λ,x) se identifica entonces con λx, y escribiremos $(\lambda,x)=\lambda x$.

b) Si $X=(X,\vec{X},\Delta)$ es espacio afin y $X\cap\vec{X}=\emptyset$, la inmersión vectorial $\vec{j}:\vec{X}\ni\vec{x}\mapsto(0,\vec{x})\in\{0\}_\times\vec{X}\subset\hat{X}$ sugiere la identificación $\vec{x}=(0,\vec{x})$ para cada $\vec{x}\in\vec{X}$, de ésta forma $\vec{X}=\{\vec{x}\in\vec{X} \,/\, ms(\vec{x})=0\}$.

1.2.5 Observación

Las combinaciones afines de puntos $\sum_{i=0}^{r}\lambda_i p_i$ en un espacio afin X, son "realmente" combinaciones afines de vectores, y pueden por tanto manipularse como tales.

Por otra parte, la suma $\sum_{i=0}^{r}\lambda_i p_i$ $(p_i\in X\ \ \lambda_i\in K$, $i=0,\dots,r)$ tiene ahora sentido aunque no se trate de una combinación afin de puntos (es decir, $\sum_{i=0}^{r}\lambda_i$ distinto de cero y uno), ya que se tiene la identidad $\sum_{i=0}^{r}\lambda_i p_i=\sum_{i=0}^{r}(\lambda_i,p_i)$ que es un punto másico con masa $\lambda=\sum_{i=0}^{r}\lambda_i$.

1.2.6 Proposición (definición)

Si X es un espacio afín y $((\lambda_1,p_1),\dots,(\lambda_r,p_r))\subset\hat{X}$ es un sistema de puntos másicos de X, se denomina baricentro del sistema al punto másico

$$\sum_{i=0}^{r}(\lambda_i, p_i) = \sum_{i=0}^{r}\lambda_i p_i \quad . \text{ Si } \lambda = \sum_{i=0}^{r}\lambda_i \text{ entonces:}$$

$$\sum_{i=0}^{r}(\lambda_i, p_i) = (\lambda, \sum (\lambda_i/\lambda) p_i) \quad \text{si } \lambda \neq 0$$

$$\sum_{i=0}^{r}(\lambda_i, p_i) = (0, \sum_{i=0}^{r}\lambda_i p_i) \quad \text{si } \lambda = 0 \text{ .}$$

Demostración:

Aplíquense las fórmulas del enunciado del teorema 1.2.3

1.2.7 **Ejemplo**

Sea V un espacio vectorial, consu estructura afín canónica (V, V, Δ) donde $\Delta : V \times V \ni (a,b) \mapsto \vec{ab} = b - a \in V$.

El conjunto de puntos másicos para V es $\bar{V} = K \times V$, y la estructura vectorial canónica para V viene definida por las fórmulas del teorema 1.2.3. Dicha estructura vectorial, no coincide con la del producto de espacioas vectoriales $\hat{V} = V_1(K) \times V$, que es la extensión vectorial natural del espacio afin V (véase 1.1.4). Así por ejemplo:

$$\lambda(1,v) = \begin{cases} (\lambda, v) & \text{en } \hat{V} \\ ((1, \lambda v) & \text{en } \bar{V} \end{cases} \qquad \text{para } v \in V \text{ y } \lambda \in K \text{ .}$$

Por tanto $\hat{V}$ representa una extensión vectorial <u>no canonica</u> del espacio afin V. Sin embargo una combinación afin $\lambda(1,v) + \mu(1,w)$ con $\lambda + \mu = 1$ toma como es de esperar el mismo valos $(1, \lambda v + \mu w)$ en ambas extensiones.

1.3 <u>Extensiones vectoriales de aplicaciones semiafines</u>

Sean X y X' espacios afines sobre los cuerpos K y K' respectivamente, y sean X y X' las correspondientes extensiones vedtoriales minimales (eventualmente canónicas). Se denota por $ms : X \mapsto K$, $ms' : X' \mapsto K'$ las formas lineales masa. Se tiene:

$X = \{x \in X \ / \ ms(x) = 1\}$ $\vec{X} = \{\vec{x} \in X \ / \ ms(\vec{x}) = 0\}$ $X' = \{x' \in X' / ms'(x') = 1\}$ $\vec{X}' = \{\vec{x}' \in X' / \ ms'(\vec{x}') = 0\}$. Sea $\sigma : K \to K'$ un isomorfismo de cuerpos

1.3.1 **Teorema**

a) Si $\hat{f} : \hat{X} \to \hat{X}'$ es aplicación σ-lineal tal que $ms' . \hat{f} = \sigma . ms$, entonces $\hat{f}(X) \subset X'$ y $\hat{f}(\vec{X}) \subset \vec{X}'$. Además $f = \hat{f}/X : X \to X'$ es aplicación σ-afin , con aplicación σ-lineal asociada $\vec{f} = \hat{f}/\vec{X} : \vec{X} \to \vec{X}'$.

b) Si $f : X \to X'$ es aplicación σ-afin, existe una única aplicación semilineal $\hat{f} : \hat{X} \to \hat{X}'$ tal que $ms' . \hat{f} = \sigma . ms$, y $f = \hat{f}/X : X \to X'$. Por otra parte se verifica $\vec{f} = \hat{f}/\vec{X} : \vec{X} \to \vec{X}'$.

Se denomina a $\hat{f} : \hat{X} \to \hat{X}'$ extensión vectorial de la aplicación semiafin f .

Demostración:

a) Si $x \in X$, es $ms.\hat{f}(x) = \sigma.ms(x) = \sigma(1) = 1$, y $\hat{f}(x) \in X'$. Análogamente, si $\vec{x} \in \vec{X}$ $ms.\hat{f}(\vec{x}) = \sigma.ms(\vec{x}) = \sigma(0) = 0$ y $\hat{f}(\vec{x}) \in \vec{X}'$.

Fijado $a \in X$, para cada $v \in \vec{X}$ se verifica $f(x+v) = \hat{f}(x+v) = \hat{f}(x) + \hat{f}(v) = f(x) + \vec{f}(v)$, y como $\vec{f}: \vec{X} \longrightarrow \vec{X}'$ es σ-lineal, se concluye por 2.1.5 (Cap IV) que f es σ-afin.

b) Probemos primero la unicidad:

Si $a \in X$, sea A la recta vectorial generada por a en $\hat{X}$. Se tiene $A \cap \vec{X} = \emptyset$ y $\hat{X} = A \oplus X$.

Si $\hat{f}: \hat{X} \longrightarrow \hat{X}'$ es aplicación σ-lineal verificando $ms'.f = \sigma.ms$, y $f/X = f: X \rightarrow X'$, entonces por a) es $\vec{f} = \hat{f}/\vec{X}: \vec{X} \longmapsto \vec{X}'$, y se tiene $\hat{f}(\lambda a + \vec{x}) = \lambda^{\sigma}\hat{f}(a) + \hat{f}(\vec{x}) = \lambda^{\sigma} f(a) + \vec{f}(\vec{x})$ para todo $\lambda \in K$ y todo $\vec{x} \in \vec{X}$.

Por otra parte la fórmula $\hat{f}(\lambda a + x) = \lambda^{\sigma} f(a) + \vec{f}(\vec{x})$ define una aplicación $\hat{f}: \hat{X} \longrightarrow \hat{X}$ que es claramente σ-lineal, y $ms'(f(\lambda a + \vec{x})) = ms'(\lambda^{\sigma} f(a) + f(\vec{x})) = \lambda^{\sigma} = ms(\lambda a + \vec{x})^{\sigma}$, es decir, $ms'.\hat{f} = \sigma.ms$; Como $\hat{f}(a + \vec{x}) = f(a) + \vec{f}(\vec{x}) = f(a + \vec{x})$ para todo $\vec{x} \in \vec{X}$ se concluye que $\hat{f}/X = f$.

1.3.2 Corolario

Sean $f: X \longrightarrow X'$, $g: X' \longrightarrow X''$ aplicaciones afines con extensiones vectoriales $\hat{f}: \hat{X} \rightarrow \hat{X}'$ y $\hat{g}: \hat{X}' \rightarrow \hat{X}''$. Entonces la extensión vectorial de $g.f$ es $\hat{g}.\hat{f}$. Es decir $\widehat{g.f} = \hat{g}.\hat{f}$.

La demostración es un sencillo ejercicio.

1.3.3 Corolario

Dado el espacio afín X, la aplicación $\wedge: GA(X) \ni f \mapsto \hat{f} \in GL(\hat{X})$ es un homomorfismo inyectivo de grupos, cuya imagen viene definida por el conjunto de transformaciones lineales de X tales que $ms.f = ms'$.

1.4 <u>Extension vectorial de subespacios afines</u>

Sea X espacio afinm, $\hat{X}$ extensión vectorial minimal de X, y $ms: \hat{X} \rightarrow K$ la aplicación masa correspondiente a la extensión.

1.4.1 Teorema

a) Sea $\hat{A}$ subespacio vectorial de $\hat{X}$ tal que $\hat{A} \not\subset \vec{X}$. Entonces $A = \hat{A} \cap X$ es un subespacio afin no vacio de X, con variedad de dirección $\vec{A} = \hat{A} \cap \vec{X}$. Además $\dim \hat{A} = \dim A + 1$

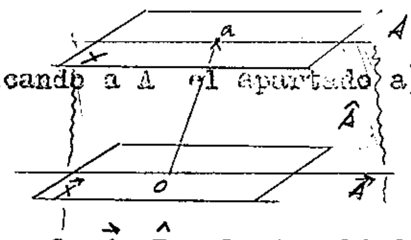
b) Si A es subespacio afin no vacío de X, existe un único subespacio vectorial $\hat{A}$ de $\hat{X}$ tal que $A = \hat{A} \cap X$. Además se verifica $\vec{A} = \hat{A} \cap \vec{X}$.

Se denomina a $\hat{A}$ extensión vectorial del subespacio afin A.

Demostración

a) Por hipótesis la forma lineal $ms/\hat{A}: \hat{A} \rightarrow K$ es no nula, y como $A = \hat{A} \cap X = \{a \in \hat{A} / ms(a) = 1$ se verifica que A es un hiperplano afin no vectorial de $\hat{A}$, con variedad de dirección $\vec{A} = \{\vec{a} \in \hat{A} / ms(\vec{a}) = 0\} = \hat{A} \cap \vec{X}$. Por tanto A es subespacio afin de X.

b) Sea $a \in A$ y L la recta vectorial generada por el vector a en $\hat{X}$. Se tiene $L \cap \vec{X} = 0$, y como la variedad de dirección $\vec{A}$ de A está contenida en X, la suma $\hat{A} = L \oplus \vec{A}$ es directa.



Observese que para un vector $\hat{a} = \lambda a + \vec{a} \in L \oplus \vec{A}$ con $\lambda \in K$ y $\vec{a} \in \vec{A}$, es $ms(\hat{a}) = \lambda$, y así $\hat{A} \cap X = a + \vec{A} = A$. Aplicando a $\hat{A}$ el apartado a) se concluye que $\vec{A} = \hat{A} \cap \vec{X}$. Por otra parte, si el subespacio vectorial $\hat{B}$ de $\hat{X}$ tambien verifica $\hat{B} \cap X = A$, por a) es $\hat{B} \cap \vec{X} = \vec{A}$, y $\hat{A} = L \oplus \vec{A} \subset \hat{B}$. La igualdad $\hat{A} = \hat{B}$ es cierta por razones de dimensión.

1.4.2 Observación

Si $\hat{X}$ es la extensión vectorial canónica del espacio afin X, y A es subespacio afín de X, entonces el subespacio vectorial $\hat{A}$ construido en 1.4.1, es la extensión vectorial canónica del espacio afin A

1.4.3 Proposición

Sea $f: X \longrightarrow X'$ aplicación σ-afin, A subespacio afin de X, y A' subespacio afin de X'. Entonces :

i) $\widehat{f(A)} = \hat{f}(\hat{A})$

ii) $\widehat{f^{-1}(A')} = \hat{f}^{-1}(\hat{A}')$, si $f^{-1}(A') \neq \emptyset$

Demostración:

i) Es suficiente probar la igualdad $\hat{f}(\hat{A}) \cap X' = f(A)$:

Si $a' \in \hat{f}(\hat{A}) \cap X'$ existe $a \in \hat{A}$ con $a' = \hat{f}(a)$ y $ms'(a') = 1$. Como $ms'.\hat{f} = \sigma.ms$, se deduce que $\sigma.ms(a) = 1$, y en consecuencia, $ms(a) = 1$ y $a \in A$. Así $a' = \hat{f}(a) \in f(A)$.

la otra inclusión es trivial

ii) Análogamente se probará que $\hat{f}^{-1}(\hat{A}') \cap X = f^{-1}(A')$. En efecto:

$\hat{f}^{-1}(\hat{A}') \cap X = \hat{f}^{-1}(\hat{A}') \cap \hat{f}^{-1}(X') = \hat{f}^{-1}(\hat{A}' \cap X') = \hat{f}^{-1}(A') = f^{-1}(A')$. La última igualdad es consecuencia de que $\hat{f}^{-1}(A') \subset X$, pues $ms(a) = 1 \Rightarrow ms'(f(a)) = 1$

2. GEOMETRIA ANALITICA AFIN

Los sistemas de referencia que más adelante se introducen, permiten representar en forma analítica los elementos de la geometría de espacios afines de dimensión finita tales como subespacios, aplicaciones semiafines...etc.

Esta representación da lugar a una técnica para la formulación y resolución de problemas de geometria afin. Es la técnica prpia de la geometría analítica lineal.

La existencia de extensiones vectoriales canñicas para espacios afines, permite formular la geometría analítica afin, en el contexto de la geometría analítica vectorial. Por otra parte, los conceptos básicos de dependencia e independencia afín, se reducen a dependencia e independencia lineal. Este será nuestro punto de partida para la introducción de las coordenadas baricéntricas, como primer ejemplo de sistema de coordenadas en un espacio afín.

En 1

En lo que sigue, $\hat{X}, \hat{X}', \hat{X}''$...etc denotan extensiones vectoriales minimales (eventualmente canónicas) de los espacios afines X, X', X''...etc y ms, ms', ms'' son las correspondientes formas de masa.

2.1 Dependencia afín. Coordenadas baricentricas

2.1.1 Definición

Sea S un sistema de puntos de un espacio afin X sobre el cuerpo K. Un punto $p \in X$, se dice que depende afinmente de S (p d.a.S), si puede escribirse com combinación afin de elementos de S, es decir: existen $\lambda_o, \dots, \lambda_r \in K$, $p_o, \dots, p_r \in X$ con $\sum_{i=0}^{r} \lambda_i = 1$ y $p = \sum_{i=0}^{r} \lambda_i p_i$.

2.1.2 Observación

a) Por el corolario 4.2.4 (Cap. IV), un punto $p \in X$ depende afinmente del sistema de puntos S, si y solo si p es un punto del subespacio afin $\langle S \rangle$ generado por S.

b) En un espacio vectorial V con su estructura afin canónica, los conceptos de dependencia afin y lineal, no son equivalentes:

La dependencia afin implica la lineal, pero no recíprocamente.

La situación cambia, cuando se analizan ambos conceptos en la extensión vectorial canónica de un espacio afin.

2.1.3 Teorema

Sea S un sistema de puntos de un espacio afin X, y $p \in X$. Son equivalentes las siguientes afirmaciones:

i) p depende afinmente de S

ii) p depende linealmente de S (en $\hat{X}$)

Demostración:

Solo ii) $\Rightarrow$ i) requiere algún comentario:

Si p d.l. S, existen $\lambda_o, \dots, \lambda_r \in K$, $p_o, \dots, p_r \in X$ con $p = \lambda_o p_o + \dots + \lambda_r p_r$, pero $ms(p) = \lambda_o + \dots + \lambda_r = 1$, por tanto, p d.a. S .

2.1.4 Definición

Un sistema S deppuntos de un espacio afin X se dice afinmente dependiente (a.d.) si existe $p \in S$ tal que p d.a. S- p . Caso contrario, se dice que S es afinmente independiente (a.i.)

2.1.5 Ejemplo

En un espacio afin X , dos puntos distintos determinan un sistema a.i. Tambien son sistemas afinmente independientes , tres puntos no alineados, cuatro puntos no coplanarios...etc.

Como consecuencia inmediata de 2.1.3 se tiene el siguiente resultado:

2.1.6 Proposición

Para un sistema S de puntos de un espacio afín X, sonequivalentes las siguientes afirmaciones:

i) S es afinmente dependiente

ii) S es linealmente dependiente (en $\hat{X}$)

iii) Existen $\lambda_0, \dots, \lambda_r \in K$ no todos nulos, y existen $p_0, \dots, p_r \in X$ tal que: $\sum_{i=0}^{r} \lambda_i p_i = 0$.

2.1.7 Observación

La igualdad $\sum_{i=0}^{r} \lambda_i p_i$ de iii) puede suponerse que está tomada indistintamente en X ó $\hat{X}$. En cualquier caso queda implícita la condición $\sum_{i=0}^{r} \lambda_i = 0$. Sin embargo esta condición debe explicitatse cuando se trabaja en la estructura afin de un espacio vectorial V. Así por ejemplo un sistema de vectores $(v_0, \dots, v_r)$ de V es afinmente independiente, si y solo si las igualdades $\sum_{i=0}^{r} \lambda_i v_i = 0$ y $\sum_{i=0}^{r} \lambda_i = 0$ implican $\lambda_0 = \dots = \lambda_r = 0$.

2.1.8 Definición

Un sistema S de puntos de un espacio afin X se denomina sistema generador , si $\langle S \rangle = X$, es decir, si cada punto $p \in X$ depende afinmente de S. Un sistema generador afinmente independiente, se llama base ó sitema de referencia afin para X.

2.1.9 Observación

Hemos denotado por $\langle S \rangle$ al subespacio afin generado por por el sistema S de puntos del espacio afin X. Escribimos $\langle S \rangle_L$ para denotar al subespacio vectorial generado en $\hat{X}$ por S. La relación entre ambos conceptos viene dada por el siguiente resultado:

2.1.10 Proposición

Si S es un sistema de puntos de un espacio afin X, entonces $\langle S \rangle_L$ es la extensión vectorial del subespacio afin $\langle S \rangle$. En particular, S es sistemageneradom de X, si y solo si S es sistema generador de $\hat{X}$.

Demostración:

Es suficiente probar que $\langle S\rangle = \langle S\rangle_L \cap X$ ó lo que es equivalente: si $(p_o,\dots,p_r)\subset S$, $(\lambda_o,\dots,\lambda_r)$ K entonces $\sum_{i=0}^{r}\lambda_i p_i \in X \iff \sum_{i=0}^{r}\lambda_i = 1$, lo cúal es evidente.

2.1.11 Corolario

i) Un sistema S de puntos de un espacio afin X, es base afin, si y solo si es base vectorial de $\hat{X}$.

ii) Todas las bases afines de un espacio afin n-dimensional constan de n+1 puntos.

Demostración:

Es consecuencia de 2.1.6, 2.1.10 , y el teorema de la base para espacios vectoriales.

2.1.12 Proposición : Coordenadas baricentricas

Sea $S=(p_o,\dots,p_n)$ un sistema de referencia (ó base) afin de X. Para cada $p \in X$, existe un único sistema de escalares $(\lambda_o,\dots,{}_r\lambda_n)\subset K$ tal que $\sum \lambda_i = 1$ y $\sum_{i=0}^{r}\lambda_i p_i = p$. Se denomina a $\begin{pmatrix}\lambda_o\\ \\ \lambda_n\end{pmatrix}$ coordenadas baricentricas del punto p respecto a S.

Demostración

Observese que $(p_o,\dots,p_n)$ es una base vectorial de $\hat{X}$, y cada punto $p\in X$ se escribe de una única manera como combinación lineal de (p_i) : $p=\sum_{i=0}^{n}\lambda_i p_i$.
Además $ms(p)=1=\sum \lambda_i$.

El siguiente resultado dá caracter de propiedad geométrica a los conceptos de dependencia afin y base:

2.1.13 Teorema

i) Si $(p_o,\dots,p_r)$ es un sistema a.i del espacio afin X, y $f\in GA(X)$, entonces $(f(p_o),\dots,f(p_r))$ es a.i

ii) Si $(p_o,\dots,p_r)$, $(p_o',\dots p_r')$ son sistemas afinmente independientes del espacio afín X, existe $f\in GA(X)$ con $f(p_i)=p_i'$ $i=o,\dots,r$. Ademas si $(p_o,\dots,p_r)$ es base afin, la transformación afin f es única.

Demostración:

i) Es suficiente observar que $\hat{f}\in GL(\hat{X})$ transforma sistemas independientes en sistemas independientes.

ii) Los sitemas a.i. $(p_o,\dots,p_r)$,$(p_o',\dots,p_r')$ pueden completarse a bases afines $(p_o,\dots,p_r,\dots,p_n)$ y $(p_o',\dots,p_r',\dots,p_n')$. Existe entonces una única transformación lineal $\hat{f} \in GL(\hat{X})$ tal que $\hat{f}(p_i)=p_i'$ $(i=o,\dots,n)$. Para cad $p \in X$, $p=\sum_{i=0}^{n} \lambda_i p_i$ con $\sum_{i=0}^{n} \lambda_i=1$, es $\hat{f}(p)=\sum_{i=0}^{n} \lambda_i p_i' \in X$, así $\hat{f}/X=f:X \to X$ es transformación afin con $f(p_i)=p_i'$ $i=0,\dots,n$.

Por otra parte, cualquier transformación afin que aplique p_i en p_i', $i=0,\dots n$ tiene por extensión vectorial a $\hat{f}$, y coincide por tanto con f.

2.2 Sistemas de referencia en un espacio afin

Todos los espacios afines aquí considerados se supondrán de dimensión finita

2.2.1 Definición

Un sistema genral de referencia en un espacio afin X, viene definido por una base $\hat{\mathcal{E}}=(\hat{e}_o,\dots,\hat{e}_n)$ de $\hat{X}$. Su base dual en $\hat{X}^*$ $\underset{\sim}{x}=\begin{pmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ se denomina sistema de coordenadas en X inducido por $\hat{\mathcal{E}}$.

Si $p \in X$ se tiene $p=\sum_{i=0}^{n} x_i(p)\hat{e}_i$. a $\underset{\sim}{x}(p)=\begin{pmatrix} x_0(p) \\ \vdots \\ x_n(p) \end{pmatrix}$ se denominan coordenadas de p respecto a $\hat{\mathcal{E}}$.

2.2.2 Observación

Una base afin $(p_o,\dots,p_n)$ del espacio afin X determina por tanto un sistema de referencia que hemos denominado afin.

El sistema de coordenadas inducido $\underset{\sim}{x}=\begin{pmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ se denomina baricéntrico. Para cada $p \in X$ $\underset{\sim}{x}(p)=\begin{pmatrix} x_0(p) \\ \vdots \\ x_n(p) \end{pmatrix}$ son las coordenadas baricentricas del punto p, y se verifica $\sum_{i=0}^{n} x_i(p)=1$. En general puede establecerse el siguiente resultado:

2.2.3 Proposición

Sea $\underset{\sim}{x}=\begin{pmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ un sistema de coordenadas inducido por la base $\hat{\mathcal{E}}=(\hat{e}_o,\dots,\hat{e}_n)$ de $\hat{X}$. Entonces la forma lineal masa se escribe: $ms=\alpha_o x_o+\dots+\alpha_n x_n$, donde $\alpha_i=ms(e_i)$ $i=0,\dots,n$

En consecuencia las ecuaciones implicitas de X y $\vec{X}$ respecto a $\underset{\sim}{x}$ son respectivamente $\alpha_o x_o+\dots+\alpha_n x_n=1$, $\alpha_o x_o+\dots+\alpha_n x_n=0$.

Demostración:

Nótese que la forma $\alpha_o x_o+\dots+\alpha_n x_n$ toma el mismo valor que ms sobre los elementos de la base $\hat{\mathcal{E}}$.

2.2.4 Corolario

El sistema de coordenadas $x=\begin{pmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ en el espacio afin X es baricéntrico si y solo si la forma lineal masa se escribe $ms=x_o+\dots+x_n$.

2.2.5 Sistemas de referencia cartesianos

Si e_o es un punto del espacio afin X, podemos escribir $X=\langle e_o \rangle_L \oplus \vec{X}$. Por tanto, si $\vec{\mathcal{E}}=(\vec{e}_1,\ldots,\vec{e}_n)$ es unna base de $\vec{X}$, $\mathcal{E}=(e_o;\vec{e}_1,\ldots,\vec{e}_n)=(e_o;\vec{\mathcal{E}})$ es una base de $\hat{X}$, es decir un sistema de referencia que denominamos sistema de referencia acartesiano. El punto e_o se denomina origen del sistema.

2.2.6 Corolario

El sistema de coordenadas $\underset{\sim}{x}=\begin{pmatrix}x_o\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$ en el espacio afin X es cartesiano, si y solo si la forma lineal masa se escribe: $ms=x_o$.

2.2.7 Comentario

Si $\mathcal{E}=(e_o;\vec{\mathcal{E}})$ es un sistema de referencia cartesiano en el espacioaafin X , las coordenadas cartesianas $x_i(p)$ de cada punto p de X, coinciden para $i=1,\ldots,n$ conlas correspondientes coordenadas lineales del vetor $\overrightarrow{e_op}\in\vec{X}$ respecto a la base $\vec{\mathcal{E}}$. La coordenada $x_o(p)$ toma el valor 1 .

En particular , un sistema de coordenadas $x=\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$ en un espacio vectorial V, inducido por una base $\vec{\mathcal{E}}=(e_1,\ldots,e_n)$, puede interpretarse como un sistema de coordenadas cartesiano en el espacio afin V , respecto al sistema de referencia cartesiano $(0;\vec{\mathcal{E}})$ siendo 0 el vector nulo de V. En efecto: cada vector $v\in V$ se escribe en la forma $v=0+x_1(v)e_1+\ldots+x_n(v)e_n$.

2.2.8 Proposición

Sea $(p_o,\ldots,p_n)$ un sistema de referencia baricentrico en el espacio afin X, con coordenadas $\underset{\sim}{x}=\begin{pmatrix}x_o\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$. Entonces $\mathcal{E}=(p_o;\overrightarrow{p_op_1},\ldots,\overrightarrow{p_op_n})$ es un sistema de referencia cartesiano (asociado a $(p_o,\ldots,p_n)$), y si $y=\begin{pmatrix}y_o\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix}$ denota sus coordenadas, se tiene : $x_i=y_i$ $i=1,\ldots,n$ $x_o=1-\sum_{i=1}^{n} y_i$.

Recíprocamente, si $\mathcal{E}=(e_o;\vec{e}_1,\ldots,\vec{e}_n)$ es un sistema de referencia cartesiano, entonces $(e_o,e_o+\vec{e}_1,\ldots,e_o+\vec{e}_n)$ es un sistema de referencia baricentrico que tiene a $\mathcal{E}$ como sistema de referencia cartesiano asociado.

Demostración:

Si $(p_o,\ldots,p_n)$ es un sistema de referencia baricentrico, probemos que el sistema $(\overrightarrow{p_op_1},\ldots,\overrightarrow{p_op_n})$ es l.i:

Si $\lambda_1\overrightarrow{p_op_1}+\ldots+\lambda_n\overrightarrow{p_op_n}=0$ entonces $\lambda_1(p_1-p_o)+\ldots+\lambda_n(p_n-p_o)=$

$(-\lambda_1-\ldots-\lambda_n)p_o+\lambda_1p_1+\ldots+\lambda_np_n=0$, y $\lambda_1=\ldots=\lambda_n=0$ por ser $(p_o,\ldots,p_n)$ afinmente independiente. Esto prueba la primera afirmacion.

Para estudiar la relación entre las coordenadas $\underset{\sim}{x}$ e $\underset{\sim}{y}$ basta observar que para cada $p\in X$ se tiene la identidad: $p=\sum_{i=0}^{n}x_i(p)p_i$, es decir $\overrightarrow{p_op}=\sum_{i=1}^{n}x_i(p)\overrightarrow{p_op_i}$, y comparando con $\overrightarrow{p_op}=\sum_{i=1}^{n}y_i(p)\overrightarrow{p_op_i}$ $(\sum_{i=0}^{n}x_i(p)=1)$ se obtiene la relación pedida.

la última afirmación es trivial.

2.3 Representación analitica de subespacios afines

Sea $\underset{\sim}{x} = \begin{pmatrix} x_o \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ un sistema general de coordenadas en un espacio afin X sobre el cuerpo K . $\hat{X}$ es la extensión vectorial canónica , y ms la masa asociada cuya expresión analítica es de la fórma $ms = \alpha_o x_o + \dots + \alpha_n x_n$.

2.3.1 Teorema (Ecuaciones implicitas de subespacios)

Un subespacio afin no vacío A de X de dimensión r, puede describirse respecto al sistema de coorcenadas $\underset{\sim}{x}$ por un sistema de ecuaciones implícitas de la forma:

$$\left.\begin{array}{l} \alpha_{10} x_o + \dots + \alpha_{1n} x_n = 0 \\ \alpha_{s1} x_o + \dots + \alpha_{sn} x_n = 0 \\ \alpha_0 x_o + \dots + \alpha_n x_n = 1 \end{array}\right\} (S)$$

Verificando la condición : (C) : $\mathrm{rg} \begin{pmatrix} \alpha_{10}, \dots, \alpha_{1n} \\ \vdots \\ \alpha_{s0}, \dots, \alpha_{sn} \\ \alpha_0, \dots \alpha_n \end{pmatrix} = s+1 = n-r+1$

Recíprocamente, cualquier sistema de ecuaciones del tipo (S) verificando la condición (C) , son ecuaciones implícitas de un subespacio afin A de X de dimensión r.

Las ecuaciones implícitas de $\vec{A}$ son entonces $\left.\begin{array}{l} \alpha_{10} x_o + \dots + \alpha_{1n} x_n = 0 \\ \alpha_{s0} x_o + \dots + \alpha_{sn} xx_n = 0 \\ \alpha_0 x_o + \dots + \alpha_n x_n = 0 \end{array}\right\}$

Demostración:

Si $\hat{A}$ es la extensión vectorial de A en $\hat{X}$, es dim $\hat{A}$ = r+1 , y $\hat{A}$ admite(por 3.1.6 (Cap II)) respecto al sistema de coordenadas $\underset{\sim}{x}$ de $\hat{X}$ ecuaciones implícitas de la forma $\left.\sum_{j=0}^{n} \alpha_{ij} x_j = 0 \right\}_{i=1,\dots,s}$ con rg $(\alpha_{ij}) = s = (n+1)-(r+1) = n-r$.

La demostración se concluye observando que $A = \hat{A} \cap X$, $\vec{A} = \hat{A} \cap \vec{X}$, y que $\alpha_o x_o + \dots + \alpha_n x_n = 1$, $\alpha_o x_o + \dots + \alpha_n x_n = 0$ son ecuaciones implícitas respectivas de X y $\vec{X}$.

La condición C sobre el rango, es consecuencia de que $A \not\subset \vec{X}$. Nótese que ésta condición es suficiente para la compatibilidad del sistema S(S)

2.3.2 Comentario

Las aecuaciones implícitas del subespacio r-dimensional A de X , y las de $\vec{A}$, respecto a un sistema $\underset{\sim}{x}$ de coordenadas baricéntricas , vienen descritas en el teorema tomando $\alpha_o = \dots = \alpha_n = 1$

2.3.3 Corolario

Si A es un subespacio afin (no vacío) de X, de dimensión r , A puede ser descrito respecto a un sistema $\underset{\sim}{x}$ de coordenadas cartesianas , por un sistema de ecuaciones

de la forma:
$$\left.\begin{array}{l}\alpha_{10}+\alpha_{11}x_1+\dots+\alpha_{1n}x_n=0\\ \\ \alpha_{s0}+\alpha_{s1}x_1+\dots+\alpha_{sn}x_n=0\end{array}\right\} :(S')$$
$$(x_o = 1)$$

verificando la condición (C') : $\operatorname{rg}\begin{pmatrix}\alpha_{11} & \dots & \alpha_{1n}\\ \vdots & & \\ \alpha_{s1} & \dots & \alpha_{sn}\end{pmatrix} = s = n-r$

Las ecuaciones implícitas de $\vec{A}$ son entonces de la forma:
$$\left.\begin{array}{l}\alpha_{11}x_1+\dots+\alpha_{1n}x_n=0\\ \\ \alpha_{s1}x_1+\dots+\alpha_{sn}x_n=0\end{array}\right\}$$
$$(x_o = 0)$$

En la práctica la ecuación $x_o=1$ del primer sistema y $x_o=0$ del segundo, quedan sobreentendidas y no se escriben.

Demostración:

Se aplica el teorema 3.3.1 para $\alpha_o=1$, $\alpha_1=\dots=\alpha_n=0$,"realizando" la sustitución $x_o=1$ en las ecuaciones implicitas de A , y la de $x_o=0$ en las de $\vec{A}$.

La condición (C') sobre el rango se deriva directamente de la condición (C) del teorema ya que :
$$\operatorname{rg}\begin{pmatrix}\alpha_{10} & \alpha_{11} & \dots & \alpha_{1n}\\ \vdots & & & \\ \alpha_{s0} & \alpha_{s1} & \dots & \alpha_{sn}\\ 1 & 0 & \dots & 0\end{pmatrix} = \operatorname{rg}\begin{pmatrix}0 & \alpha_{11} & \dots & \alpha_{1n}\\ \vdots & & & \\ 0 & \alpha_{s1} & \dots & \alpha_{sn}\\ 1 & 0 & \dots & 0\end{pmatrix}$$

2.3.4 Comentario

Las ecuaciones implícitas descritas en 2.3.1,2.3.2 y 2.3.3 se denominan ecuaciones implicitas normalizadas del subespacio. En ellas figura de forma explícita la ecuación del espacio afin X en $\hat{X}$. Cualquier otro sistema equivalente al (S) de 2.3.1 puede servir para describir al subespacio, aunque en el no figure explícitamente la ecuacion de X .

2.4 Representación analítica de aplicaciones semiafines

Sean $\hat{\mathcal{E}} = (\hat{e}_o,\dots,\hat{e}_n)$ $=(\hat{e}'_o,\dots,\hat{e}'_m)$ sistemas de refernoia en los espacios afines X y X', y sean ms= $\alpha_o x_o+\dots+\alpha_n x_n$, ms'= $\alpha'_o x'_o+\dots+\alpha'_m x'_m$ las expresiones analiticas de las correspondientes formas "masa" respecto a los sistemas de coordenadas $\underset{\sim}{x}$ y $\underset{\sim}{x}'$ inducidos por $\hat{\mathcal{E}}$ y $\hat{\mathcal{E}}'$ respectivamente.

Sea $\sigma : K \longrightarrow K'$ un isomorfismo entre los correspondientes cuerpos base:

2.4.1 Teorema

Sea $f : X \longrightarrow X'$ una aplicación σ-lineal con matriz respecto a $\hat{\mathcal{E}}$ y $\hat{\mathcal{E}}'$: $A=(a_{ij})$

a_{ij} K' $i=0,\dots,m$ $j=0,\dots,n$; la condición necesaria y suficiente para que f induzca una aplicación σ-afin $f=\hat{f}/X : X \to X'$ es que la matriz A verifique la condición (M): $\sum_{i=0}^{m} a_{ij}\alpha_i' = \alpha_j^{\sigma}$. En este caso las ecuaciones de f son:

$$(E): \begin{pmatrix} a_{00} & & a_{0n} \\ & & \\ a_{m0} & & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0^{\sigma} \\ \\ x_n^{\sigma} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0' \\ \\ x_m' \end{pmatrix} \quad \text{abreviadadmente: } A\,\underset{\sim}{x}^{\sigma} = \underset{\sim}{x}'$$

Cuando se restringen al subespacio afin X de ecuación $\alpha_0 x_0 + \dots + \alpha_n x_n = 1$ determinan las ecuaciones de f. Las ecuaciones de $\vec{f}$ se obtienen restringiendo al subespacio vectorial $\vec{X}$ de ecuación $\alpha_0 x_0 + \dots + \alpha_n x_n = 0$.

Demostración:

Las ecuaciones (E) se escriben de forma mas precisa: : $\left. x_i' . \hat{f} = \sum_{j=0}^{n} a_{ij}\, x_j^{\sigma} \right\}_{i=0\dots m}$

Por 1.3.1 , $\hat{f}$ induce una aplicación σ-afin $f=\hat{f}/X : X \to X'$ si y solo si, $ms'.f=\sigma.ms$ pero $ms'.\hat{f} = (\sum_{i=0}^{m} \alpha_i' x_i').\hat{f} = \sum_{i=0}^{m} \alpha_i'(x_i'.\hat{f}) = \sum_{j=0}^{n}\left[\sum_{i=0}^{m} a_{ij}\alpha_i'\right] x_j^{\sigma}$, y por ptra parte $\sigma.ms = \sigma(\sum_{j=0}^{n} \alpha_j x_j) = \sum_{j=0}^{n} \alpha_j^{\sigma} x_j$.

Comparando ambas expresiones se llega a la condición (M)

2.4.2 Definición

Se denomina a la matriz A anterior, matriz de f respecto a las referencias $\hat{\mathcal{E}}$ y $\hat{\mathcal{E}}'$, y se escribe $A = M_{\hat{\mathcal{E}},\hat{\mathcal{E}}'}(f)$. Nótese que ésta matriz coincide con $M_{\hat{\mathcal{E}},\hat{\mathcal{E}}'}(\hat{f})$

2.4.3 Proposición

Si $\hat{\mathcal{E}}$, $\hat{\mathcal{E}}'$, y $\hat{\mathcal{E}}''$ son sistemas de referencia en los espacios afines X, X', y X'' respectivamente, y $f: X \to X'$ $g: X' \to X''$ son aplicaciones semiafines entonces:

$M_{\hat{\mathcal{E}},\hat{\mathcal{E}}''}(g.f) = M_{\hat{\mathcal{E}}',\hat{\mathcal{E}}''}(g) . M_{\hat{\mathcal{E}},\hat{\mathcal{E}}'}(f)$.

Dmostración:

Basta aplicar el resultado análogo para aplicaciones semilineales

2.4.4 Comentario

Si $f: X \to X$ es aplicación semiafin, $\hat{\mathcal{E}}$ es un sistema de referencia en X , se escribe $M_{\hat{\mathcal{E}},\hat{\mathcal{E}}}(f) = M_{\hat{\mathcal{E}}}(f)$. Si $A = M_{\hat{\mathcal{E}}}(f)$, en el sistema de coordenadas inducido por $\hat{\mathcal{E}}$, $\underset{\sim}{x} = \begin{pmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ las ecuaciones de f se escriben de la forma

$$\begin{pmatrix} a_{00} & & a_{0n} \\ & & \\ a_{m0} & & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0^{\sigma} \\ \\ x_m^{\sigma} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0' \\ \\ x_m' \end{pmatrix} \quad \text{donde} \quad x_i' = x_i . \hat{f}$$

De ésta forma, las eduaciones tienen el mismo aspecto formal que las de (E) en 2.4.1

2.4.5 Corolario

Sean $\hat{\mathcal{E}}=(p_o,\ldots,p_n)$, $\hat{\mathcal{E}}'=(p_o',\ldots,p_m')$ sistemas de referencia baricentricos en los espacios afines X y X′ respectivamente, y $f:X\to X'$ una aplicación σ-afin.

Las ecuaciones de f se escriben entonces:

$$\begin{pmatrix} a_{oo} & & a_{on} \\ & & \\ a_{mo} & & a_{mn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_o^\sigma \\ \vdots \\ x_n^\sigma \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x_o' \\ \vdots \\ x_m' \end{pmatrix} \quad \text{donde} \quad \begin{pmatrix} a_{oj} \\ \\ a_{mj} \end{pmatrix} \text{ son las coordenadas baricéntricas}$$

de $f(p_j)$ respecto a $\hat{\mathcal{E}}'$, es decir , $f(p_j)=\sum_{i=0}^{m} a_{ij}p_i'$ para $j=0,\ldots,n$

En particular, $\sum_{i=0}^{m} a_{ij}=1$ para $j=0,\ldots,n$.

Las ecuaciones de f y de $\vec{f}$, se obtienen por restricción de las de $\hat{f}$ a $x_o+\ldots+x_n=1$ y a $x_o+\ldots+x_n=0$ respectivamente.

Demostración

Aplicando el teorema 2.4.1 al caso particular $ms=x_o+x_1+\ldots+x_n$, $ms'=x_o'+\ldots+x_m'$, la condición (M) sobre la matriz A se traduce en $\sum_{i=0}^{m} a_{ij}=1$ para $j=0,\ldots,n$.

El resto es trivial.

2.4.6 Observación

Nótese que $M_{\hat{\mathcal{E}},\hat{\mathcal{E}}'}(f)=A \Leftrightarrow (f(p_o),\ldots,f(p_n))=(p_o',\ldots,p_m')\,A$.

2.4.7 Corolario

Sean $\mathcal{E}=(e_o;\vec{\mathcal{E}})$ $\mathcal{E}'=(e_o';\vec{\mathcal{E}}')$ dos sitemas de referencia cartesianos en los espacios afines X y X′ respectivamente, donde $\vec{\mathcal{E}}=(\vec{e}_1,\ldots,\vec{e}_n)$ $\vec{\mathcal{E}}'=(\vec{e}_1',\ldots,\vec{e}_m')$. Sea $f:X\to X'$ una aplicación σ-afin. Las ecuaciones de f se escriben entonces:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0^t \\ a & \vec{A} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ \vec{x}^\sigma \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ \vec{x}' \end{pmatrix} \quad \text{donde} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ a \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix},\ \vec{x}=\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},\ \vec{x}'=\begin{pmatrix} x_1' \\ \vdots \\ x_m' \end{pmatrix}\quad 0=\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Siendo $\vec{A}=(a_{ij})$ $a_{ij}\in K'$ $i=1,\ldots m$ $j=1,\ldots n$ la matriz de la aplicación σ-lineal $\vec{f}:\vec{X}\ \vec{X}'$ respecto a $\vec{\mathcal{E}}$, y $\vec{\mathcal{E}}'$, y $\begin{pmatrix} 1 \\ a \end{pmatrix}$ las coordenadas cartesianas de $f(e_o)$ respecto a $\mathcal{E}$ (es decir $f(e_o)=e_o'+a_1\vec{e}_1'+\ldots+a_m\vec{e}_m'$)

Demostración:

Aplicando el teorema 2.4.1 para el caso particular $ms=x_o$ $ms'=x_o'$, la condición (M) sobre la matriz A se escribe $a_{oj}=0$ $j=1,\ldots,n$ $a_{oo}=1$, lo que da lugar a la matriz $A=\begin{pmatrix} 1 & 0^t \\ a & \vec{A} \end{pmatrix}$.

Las ecuaciones de $\hat{f}$ son $\begin{pmatrix} 1 & 0^t \\ a & \vec{A} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_o^\sigma \\ x^\sigma \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x_o' \\ x' \end{pmatrix}$ que estringidas a $x_o=1$ proporcionan las ecuaciones de f del enunciado.

Las ecuaciones de $\vec{f}$ se obtienen haciendo $x_o=0$ y queda : $\vec{A}\,\vec{x}^\sigma=\vec{x}'$.

2.4.8 Observación

Se verifica la siguiente equivalencia:

$$M_{\varepsilon,\varepsilon'}(f)=A=\begin{pmatrix}1 & 0^t\\ a & \vec{A}\end{pmatrix}\Leftrightarrow (f(e_o);\vec{f}(\vec{e}_1),\dots,\vec{f}(\vec{e}_n))=(e'_o;\vec{e}'_1,\dots,\vec{e}'_m)\begin{pmatrix}1 & 0^t\\ a & \vec{A}\end{pmatrix}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (f(e_o);\vec{f}(\vec{\varepsilon}))=(e'_o;\vec{\varepsilon}')\begin{pmatrix}1 & 0^t\\ a & \vec{A}\end{pmatrix}.$$

2.5 Apendice

2.5.1 Modelos analiticos de espacio afin

Fijado el cuerpo K, hemos denotado por $\hat{A}_n$ al espacio vectorial de las (n+1)-etuplas $\hat{a}=\begin{pmatrix}a_o\\ a_n\end{pmatrix}$, $a_i\in K$ (véase 1.2.10 Cap IV). El espacio vectorial dual $\hat{A}_n^{*}$ se identifica entonces con las (n+1)étuplas $\alpha=(\alpha_o,\dots,\alpha_n)$ $\alpha_i\in K$ donde $\alpha: A_n\ni\begin{pmatrix}a_o\\ a_n\end{pmatrix}\mapsto \alpha_o a_o+\dots+\alpha_n a_n\in K$. Si $\alpha\neq 0$ se denota por A_n^{α} al hiperplano afin de A_n : $A_n^{\alpha}=\{\hat{a}\in\hat{A}_n/\ \alpha(a)=1\}$ que tiene por variedad de dirección: $\vec{A}_n^{\alpha}=\{\hat{a}\in\hat{A}_n\ /\ \alpha\ (\hat{a})=0\}$. El espacio afin $A_n=(A_n,A_n,\Delta)$, donde

$\Delta: A_n^{\alpha}\times A_n^{\alpha}\ni(a,b)\mapsto b-a\in\vec{A}_n^{\alpha}$ se denomina modelo analítico de espacio afin n-dimensional asociado a la forma $\alpha=(\alpha_o,\dots,\alpha_n)\in\hat{A}_n^{*}$.

Si $\alpha=(1,0,\dots,0)$, A_n^{α} es el modelo analítico cartesiano introducido en 1.2.10

Si $\alpha=(1,\dots,1)$ entonces $A_n=B_n=\{\hat{a}\in\hat{A}_n/\ a_o+\dots+a_n=1\}$, y $B_n=\{\hat{a}\in\hat{A}_n\ /\ a_o+\dots+a_n=0\}$

Se denomina a B_n modelo analítico baricéntrico n-dimensional.

El interes de los modelos analíticos radica en el hecho de que la geometría analítica de un espacio afin de dimensión finita X, se realiza-fijado el sistema de referencia- sobre cierto modelo anlítico A_n a través de los isomorfismos de coordenadas.

2.5.2 Isomorfismos de coordenadas.

Fijemos en el espacio afin X un sistema de referencia $\hat{\varepsilon}=(\hat{e}_o,\dots,\hat{e}_n)$ con coordenadas $\underset{\sim}{x}=\begin{pmatrix}x_o\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$ respecto a las cuales la forma lineal masa se escribe:

$ms=\alpha_o x_o+\dots+\alpha_n x_n$. El isomorfismo lineal de coordenadas $\hat{\varphi}_{\underset{\sim}{x}}:\hat{X}\ni\hat{p}\to\begin{pmatrix}x_o(\hat{p})\\ x_n(\hat{p})\end{pmatrix}\in\hat{A}_n$, aplica el espacio afin X sobre el modelo analítico A_n^{α} (ya que $p\in X\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow\alpha_o x_o(p)+\dots+\alpha_n x_n(p)=0\Leftrightarrow\hat{\varphi}_{\underset{\sim}{x}}(p)\in A_n^{\alpha}$). La aplicación $\varphi_{\underset{\sim}{x}}=\hat{\varphi}_{\underset{\sim}{x}}/X:X\mapsto A_n^{\alpha}$ define un isomorfismo afin cuya extensión vectorial es justamente $\hat{\varphi}_{\underset{\sim}{x}}$; $\varphi_{\underset{\sim}{x}}$ es el isomorfismo de cooredenadas, cuya aplicación lineal asociada es $\vec{\varphi}_{\underset{\sim}{x}}/\vec{X}:\vec{X}\mapsto\vec{A}_n^{\alpha}$.

Observese que el modelo cartesiano A_n ó baricéntrico B_n se corresponden respectivamente con los sistemas de coordenadas cartesianos ó baricéntricos.

La identificación de cada punto $p\in X$ con sus coordenadas $\varphi_{\underset{\sim}{x}}(p)\in A_n^{\alpha}$, y de cada vector $v \in \vec{X}$ con $\vec{\varphi}_p(v) \in \vec{A}^{\alpha}_{n}$, permite establecer la idea de que "trabajar" en el espacio afin X con el sistema de referencia $\hat{\mathcal{E}}$, equivale a "trabajar" sobre el m model analítico afin, $\mathcal{A}^{\alpha}_{n}$

Este punto de vista da lugar a una presentación más elemental de la geometría analítica afin que la que aquí hemos expuesto. Ahora las ecuaciones de subespacios y aplicaciones semiafines se plantean directamente sobre los modelos analíticos conservando el mismo aspecto formal, pero las variables x_i ,x_i' son variables numéricas, y no formas lineales.

Así las ecuaciones implicitas de un subespacio afin de A_n se establecen , como el conjunto de puntos $x = \begin{pmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ que verifican ecuaciones del tipo (S) del teorema 2.3.1 , y son válidas las afirmaciones generales contenidas en el mismo.

Las aplicaciones σ-afines de $A_n(K)$ en $A_m(K')$ se denotan entonces por

$A.\sigma : A^{\alpha}_{n}(K) \to A^{\alpha'}_{n}(K')$ donde $A=(a_{ij})$ $a_{ij} \in K'$ $i=0,\dots,m$ $j=0,\dots n$, y $\sum_{i=0}^{m} a_{ij}\,\alpha^{1}_{i} = \alpha^{\sigma}_{j}$

Su actuación viene descrita por la equivalencia:

$$A.\sigma(x)=x' \Leftrightarrow A\, x^{\sigma} = x' \qquad \text{donde} \quad \underset{\sim}{x} = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_n \end{pmatrix} \quad \underset{\sim}{x}' = \begin{pmatrix} x_0' \\ x_m' \end{pmatrix}$$

Observese que la geometría analítica cartesiana afin ha sido desarrollada ya en los ejemplos 1.2.10 , 2.1.8 , y 2.2.3

Concluimos el capítulo con un resultado que relaciona estos dos puntos de vista, y que viene a ser una nueva formulación del teorema 2.4.1

2.5.3 **Teorema**

En las mismas condiciones iniciales de 2.4 , si $f: X \to X'$ es una aplicación σ-afin con $M_{\hat{\mathcal{E}},\hat{\mathcal{E}}}(f) = A$, entonces los siguientes diagramas son conmutativos:

$$\begin{tikzcd}
\hat{X} \arrow[r, "\hat{f}"] \arrow[d, "\hat{\varphi}_{\underset{\sim}{\mathcal{E}}}"'] & \hat{X}' \arrow[d, "\hat{\varphi}_{\underset{\sim}{\mathcal{E}}'}"] \\
\hat{A}_n(K) \arrow[r, "A\cdot\sigma"] & \hat{A}_m(K')
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\varphi_{\underset{\sim}{\mathcal{E}}}"'] & X' \arrow[d, "\varphi_{\underset{\sim}{\mathcal{E}}'}"] \\
A^{\alpha}_{n}(K) \arrow[r, "A\cdot\sigma"] & A^{\alpha'}_{m}(K')
\end{tikzcd}$$

Es decir, $\varphi_{\underset{\sim}{\mathcal{E}}'}(f(p)) = A.\sigma(\varphi_{\underset{\sim}{\mathcal{E}}}(p))$ para todo $p \in X$.

CAPITULO VII

CLASIFICACION AFIN DE ENDOMORFISMOS AFINES.

Este problema de clasificación geométrica se plantea de forma análoga al de clasificación lineal de endomorfismos de un espacio vectorial. El teorema de clasificación de Jordan desarrollado en el Capitulo III, resuelve directamente el problema de clasificación de endomorfismos afines con puntos fijos. La resolución completa del problema, requiere de algunas de las técnicas desarrolladas en el cap III, para aplicarlas a las extensiones vectoriales canónicas de los endomorfismos afines.

$X=(X,X,\ )$ representa un espacio afin de dimensiòn finita n . X es la extensión vectorial canónica de X, y si f $EA(X)$ se denota por f $EL(X)$ a la extensión vectorial correspondiente.

1. APROXIMACION AL PROBLEMA. PRELIMINARES

1.1 <u>Equivalencia afin de endomorfismos afines</u>

1.1.1 Definición

Sean f , $f'\in EA(X)$. Se dice que f es afinmente equivalente a f' (y se escribe $f\sim f'$) si existe $g\in GA(X)$ tal que $f'=g^{-1}f\,g$.

1.1.2 Comentarios

1) El grupo afin $GA(X)$ actua por la derecha sobre $EA(X)$ de la forma:

$GA(X)\times EA(X)\ni(g,f)\longmapsto g^{*}(f)=g^{-1}f\,g$ $EA(X)$ (Véase 1.1.6 Cap III).

La relación de equivalencia afin definida en 1.1.1 , es justamente la inducida por dicha actuación, es decir, f ,$f'\in EA(X)$ son afinmente equivalentes, si y slo si existe $g\in GA(X)$ tal que $g^{*}(f)=f'$. Las clases de equivalencia, son pues las orbitas de la actuación: $Orb(f)=\{g^{*}(f)\ /\ g\in GA(X)\}$.

2) Tomando $X=A_n(K)$ la relacion de equivalencia afin en $EA(n)=EA(A_n)$ se expresa en la forma: Si A , $A'\in EA(n)$, A es afinmente equivalente a A' si y solo si existe $P\in GA(n)$ tal que $A'=P^{-1}A\,P$ (véase notación en 2.1.8 Cap IV)

3) De forma análoga a 1.1.4 Cap III , se vé que dos endomorfismos f,f' $EA(X)$ son afinmente equivalentes, si y solo si existen $\mathcal{E}$, $\mathcal{E}'$ sistemas de referencia cartesianos en X , tales que $M_{\mathcal{E}}(f)=M_{\mathcal{E}'}(f')$

4) Fijado el sistema de referencia cartesiano $\mathcal{E}$ de X, la aplicación $M_{\mathcal{E}}:EA(X)\longmapsto EA(n)$ verifica la propiedad: $f\sim f'\Leftrightarrow M_{\mathcal{E}}(f)\sim M_{\mathcal{E}'}(f')$, y la aplicación $M: EA(X)/_{\sim}\to EA(n)/_{\sim}$ que hace conmutativo el diagrama

$$\begin{array}{ccc} EA(X) & \longrightarrow & EA(n) \\ \downarrow & & \downarrow \\ EA(X)/_{\sim} & \longrightarrow & EA(n)/_{\sim} \end{array}$$

es una aplicación biyectiva independiente del sistema cartesiano elegido (Véase 1.1.6 2) Cap III)

1.1.3 Definición

Sea L un conjunto. Una aplicación $\Phi: EA(X) \longrightarrow L$ se llama invariante afin (en EA(X)), si es compatible con la relación de equivalencia afin de endomorfismos, es decir , si verifica la propiedad:

$f \sim f' \Rightarrow \Phi(f) = \Phi(f')$ para $f, f' \in EA(X)$

Un sistema ($\Phi_1, \ldots, \Phi_r$) de invariantes afines de EA(X) se dice completo, si verifica : $\Phi_i(f) = \Phi_i(f')$ para todo $i=1,\ldots,r \Rightarrow f \sim f'$.

1.1.4 Comentarios

1) A partir de un invariante afin $\Phi : EA(X) \longrightarrow L$, y un sitema de referencia cartesiano $\mathcal{E}$ de X, se construye un invariante afin en EA(n), $\overline{\Phi} : EA(n) \longrightarrow L$ por la condición $\overline{\Phi} . M_{\mathcal{E}} = \Phi$. El invariante $\overline{\Phi}$ es independiente del sistema de referencia cartesiano .

Recíprocamente, a partir de un invariante afin $\overline{\Phi}$ en EA(n) se reconstruye el invariante afin Φ . En la practica se denotan por el mismo nombre y simbolo, a los invariantes Φ y $\overline{\Phi}$ así relacionados (Véase 1.2.2 Cap III).

2) Resolver el problema de clasificación afin de endomorfismos, significa, igual que en el caso vectorial,por una parte, determinar matrices afines reducidas (de Jordan) en EA(n) que represesenten los tipos posibles de endomorfismos afines y dar un criterio práctico para reconocer cuando dos matrices reducidas corresponden a la misma clase. Por otra parte, se debe determinar un sistema completo de invariantes que permitan obtener , a partir de un endomorfismo afin f su representación matricial reducida respecto a cierto sistema de referencia cartesiano,(denominado , de Jordan)

1.1.4 Teorema

Sean $f, f' \in EA(X)$ dos endomorfismos afinmente equivalentes. Entonces:

1) Los endomorfismos lineales $\vec{f}$, $\vec{f'} \in EL(X)$ son linealmente equivalentes

2) Las extensiones vectorilaes $\hat{f}$, $\hat{f'} \in EL(\hat{X})$ son linealmente equivalentes.

Demostración:

Por hipótesis existe $g \in GA(X)$ tal que $f' = g^{-1} f g$. Entonces:

$\vec{f'} = \overrightarrow{g^{-1} f g} = \vec{g}^{-1} \vec{f} \vec{g}$, y $\vec{g} \in GL(\vec{X})$ Analogamente, $\hat{f'} = \widehat{g^{-1} f g} = \hat{g}^{-1} \hat{f} \hat{g}$ y $\hat{g} \in GL(\hat{X})$.

Esto côncluye la demostración.

1.1.5 Corolario

a) Si $\Phi : EL(\vec{X}) \mapsto L$ es un invariante lineal en EL(X), entonces la aplicación $\vec{\underline{\Phi}} : EA(X) \ni f \mapsto \Phi(\vec{f}) \in L$ es un invariante afin

b) Si $\Phi : EL(\hat{X}) \to L$ es un invariante lineal, entoncesla aplicación $\hat{\underline{\Phi}} : EA(X) \ni f \mapsto \Phi(\hat{f}) \in L$ es un invariante afin

1.1.6 Notación

Los invariantes afines que proceden de invariantes lineales en EL(X) se denotan por el mismo simbolo. Asi $\chi_f(t)$ denota a $\chi_{\hat{f}}(t)$ polinomio caracteristico de $\hat{f}$, $\phi_f = \phi_{\hat{f}}$ ...etc

Los invariantes affines de EA(X) que proceden de invariantes lineales de $EL(\vec{X})$, se denotarán por el mismo símbolo afectado de una flecha, así $\vec{\chi}_f(t) = \chi_{\vec{f}}(t)$, $\vec{\phi}_f(t) = \phi_{\vec{f}}(t)$ ... etc.

1.2 Subespacios afines invariantes

1.2.1 Definición

Sea $f \in EA(X)$. Un subespacio afin A de X se dice f-invariante (ó simplemente, invariante, si se sobrentiende f), si $f(A) \subset A$. La aplicación $f_A : A \ni x \mapsto f(x) \in A$, es un endomorfismo afin en A que se denomina, restricción de f a A.

1.2.2 Teorema

Sea $f \in EA(X)$ y A subespacio afin de X. Las afirmaciones que siguen son equivalentes:

i) A es f-invariante

ii) $\vec{A}$ es $\vec{f}$-invariante, y para todo $a \in A$ es $\overrightarrow{af(a)} \in \vec{A}$

iii) $\vec{A}$ es $\vec{f}$-invariante, y existe $a \in A$ tal que $\overrightarrow{af(a)} \in \vec{A}$

iv) $\hat{A}$ es $\hat{f}$-invariante

Demostración:

i) $\Rightarrow$ ii)

Fijado $a \in A$, si $v \in \vec{A}$ y $b = a + v$ A se verifica: $\vec{f}(v) = \vec{f}(\vec{ab}) = \overrightarrow{f(a)f(b)} \in \vec{A}$, pues $f(a), f(b) \in A$, por análogo motivo se verifica $\overrightarrow{af(a)} \in \vec{A}$.

ii) $\Rightarrow$ iii) es trivial

iii) $\Rightarrow$ iv)

Podemos escribir $\hat{A} = \langle a \rangle_L \oplus \vec{A}$, y así para $\hat{a} = \lambda a + v$, $\lambda \in K$, $v \in \vec{A}$ se verifica: $\hat{f}(\hat{a}) = \lambda f(a) + \vec{f}(v) = \lambda(a + \overrightarrow{af(a)}) + \vec{f}(v) = \lambda a + (\lambda\overrightarrow{af(a)} + \vec{f}(v))$ $\langle a \rangle_L \oplus \vec{A} = \hat{A}$

iv) $\Rightarrow$ i)

Si $a \in A \subset \hat{A}$, por hipótesis, $\hat{f}(a) = f(a) \in \hat{A} \cap X = A$.

1.2.3 Corolario

Sea $f\in EA(X)$ y A subespacio afin f-invariante. Entonces para todo $r\in N^*$ se verifica $(\hat{f}-\widehat{id})^r(A)\subset\vec{A}$.

Demostración:

Por inducción sobre r:

para r=1, si $a\in A$ es $(\hat{f}-\widehat{id})(a)=f(a)-a=\overrightarrow{af(a)}\in\vec{A}$.

Supuesto que $(\hat{f}-\hat{id})^{r-1}(A)\subset\vec{A}$ $(r\geqslant 2)$, como $\vec{A}$ es $\vec{f}$-invariante (y por tanto $\hat{f}$-invariante) se verifica: $(\hat{f}-\hat{id})^r(A)=(\hat{f}-\hat{id})(\hat{f}-\hat{id})^{r-1}(A)\subset f(f-id)(\vec{A})\subset\vec{A}$.

1.2.4 Corolario

La familia $\varsigma A(X_f)$ de subespacios afines invariantes por el endomorfismo $f\in EA(X)$ es un subretículo de $\varsigma A(X)$.

Demostración:

Nótese que si A y $B\in\varsigma A(X_f)$, entonces $\hat{A}$, $\hat{B}\in\varsigma L(\hat{X}_{\hat{f}})$, y se verifica: $\widehat{A+B}=\hat{A}+\hat{B}\in\varsigma L(\hat{X}_{\hat{f}})$. Por 1.2.2 es $A+B\in\varsigma A(X_f)$.

Además $f(A\cap B)\subset f(A)\cap f(B)\subset A\cap B$.

1.2.5 Definición

Sea $f\in EA(X)$. Una descomposición de $\hat{X}$ en la forma $\hat{X}=\hat{A}\oplus\vec{Y}$, donde $\hat{A}$ y $\vec{Y}$ son subespacios $\hat{f}$-invariantes y $\vec{Y}<\vec{X}$, se denomina descomposición de f, y se escribe $\hat{X}_{\hat{f}}=\hat{A}\oplus\vec{Y}$. La descomposición se dice no trivial, si $\vec{Y}\neq 0$.

Nótese que $A=\hat{A}\cap X$ es un subespacio afin f-invariante, no vacío.

2. ENDOMORFISMOS CON PUNTOS FIJOS

El problema de clasificación afin de endomorfismos con puntos fijos, se resuelve de forma inmediata a partir del teorema de Jordan. Centraremos después la atención en el estudio geométrico de cierto tipo de endomorfismos, denominados deformaciones afines, que incluyen como casos particulares, a las proyecciones simetrías, y homotecias afines.

2.1 Clasificación de endomorfismos afines con puntos fijos.

2.1.1 Teorema

Sean f, $f'\in EA(X)$ dos endomorfismos con puntos fijos. Entonces, f y f' son afinmente equivalentes, si y solo si $\vec{f}$ y $\vec{f'}$ son linealmente equivalentes.

Demostración:

Sean $e_o, e_o'\in X$ tales que $f(e_o)=e_o$ y $f'(e_o')=e_o'$. Supóngase $\vec{f}$ y $\vec{f'}$ linealmente equivlentes. Existe entonces $\vec{g}\in GL(\vec{X})$ con $\vec{f'}=\vec{g}^{-1}\vec{f}\,\vec{g}$. Sea $g\in GA(X)$ la transformación afin que tiene a $\vec{g}$ por transformación lineal asociada, y que aplica el punto e_o' en e_o $(g(e_o')=e_o)$. Entonces $g^{-1}f\,g=f'$, ya que:

$(g^{-1}f\,g)(e_o')=g^{-1}f(e_o)=g^{-1}(e_o)=e_o'=f'(e_o')$, y $\overrightarrow{g^{-1}f\,g}=\vec{g}^{-1}\vec{f}\,\vec{g}=\vec{f'}$.

2.1.2 Corolario

Si $f \in EA(X)$, existe un sistema de referencia cartesiano , que denominamos de Jordan, $\mathcal{E}=(e_0;\vec{\mathcal{E}})$, respecto al cual la matriz de f es de la forma:

$\begin{pmatrix} 1 & 0^t \\ 0 & J \end{pmatrix}$ donde J es una matriz de Jordan n-dimensional (véase 4.4.3, 4.4.4 del capitulo III)

Por otra parte, el invariante afin $\vec{\emptyset}: EA(X) \ni f \mapsto \emptyset_{\vec{f}} \in K[t]$, junto con los invariantes de rango inducidos en $EA(X)$ por los correspondientes invariantes lineales en $EL(\vec{X})$ (Véase 4.3.2 Cap III) constituyen un sistema completo de invariantes para la clasificación afin de endomorfismos con puntos fijos.

Demostración:

La construcción del sistema de referencia cartesiano $\mathcal{E}=(e_0;\vec{\mathcal{E}})$ se obtiene tomando como origen e_0 un punto fijo para f, y $\vec{\mathcal{E}}$ una base de jordan para $\vec{f}$.

2.1.3 Comentario

El criterio de equivalencia entre matrices de Jordan establecido en 4.3.6 del Cap. III , se aplica de manera obvia a éste caso afin.

2.2 Proyecciones afines

2.2.1 Definición

Un endomorfismo $\Pi \in EA(X)$ se denomina proyección afin, si existe un sistema de referencia afin(de Jordan) $\mathcal{E}=(e_0;\vec{\mathcal{E}})$ tal que $M_{\mathcal{E}}(\Pi) = \Lambda(r) = \mathrm{diag}(I(r+1),0)$, donde $I(r+1) \in EA(r)$ es la matriz identidad , y 0 es la matriz cuadrada nula de orden $n-r$.

Proposición

2.2.2 $\Pi \in EA(X)$ es proyección afin, si y solo si es idempotente, es decir, $\Pi^2 = \Pi$. El conjunto $B = \mathrm{im}\,\Pi$ se denomina base de la proyección, y es el subespacio de puntos fijos para Π . Dos proyecciones afines Π y Π' son afinmente equivalentes, si y solo si sus bases tienen la misma dimensión.

Demostración:

Como $\Lambda(r)^2 = \Lambda(r)$, se deduce que si Π es proyección afin, entonces $\Pi^2 = \Pi$. Recíprocamente, si $\Pi^2 = \Pi$, entonces para $x' \in \mathrm{im}\,\Pi$ se verifica $x' = \Pi(x)$ para cierto $x \in X$, y $\Pi(x') = \Pi^2(x) = \Pi(x) = x'$, asi, $B = \mathrm{im}\,\Pi$ es el subespacio (no vacío de puntos fijos).

Pir otra parte, se verifica $\vec{\Pi}^2 = \vec{\Pi}$, por lo que $\vec{\Pi}$ es proyección vectorial en X con base $\vec{B} = \mathrm{im}\,\vec{\Pi}$ (véase 4.7 Cap II). Tomando $e_0 \in B$, y $\vec{\mathcal{E}}$ base de jordan para $\vec{\Pi}$, con $M_{\vec{\mathcal{E}}}(\vec{\Pi}) = \mathrm{diag}(I(r),0)$, si $\mathcal{E} = (e_0;\vec{\mathcal{E}})$, es $M_{\mathcal{E}}(\Pi) = \Lambda(r)$, y Π es proyección afin.

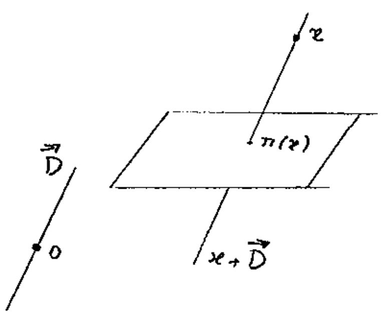
El resto de la demostración es trivial.

2.2.3 **Teorema**

Sea $\pi \in EA(X)$ proyección afin con base B. Existe entonces un único subespacio vectorial $\vec{D}$ denominado dirección de la proyección π, tal que para cada punto $x \in X$, es $(x+\vec{D}) \cap B = \pi(x)$. Por otra parte, se verifica $\vec{X}=\vec{B}\oplus\vec{D}$, y $\vec{\pi}$ es la proyección vectorial de base $\vec{B}$ y dirección $\vec{D}$.

Recíprocamente, fijado un subespacio afin B de X, y $\vec{D}<\vec{X}$ tal que $\vec{B}\oplus\vec{D}=\vec{X}$, existe una única proyección afin con base B y direcóión $\vec{D}$.

Demostración:



Como $\vec{\pi}^{\,2}=\vec{\pi}$, $\vec{\pi}$ es proyección vectorial con base $\vec{B}$. Sea $\vec{D}=\ker\vec{\pi}$ su dirección. Si $x \in X$, entonces $\vec{\pi}\,(\overrightarrow{x\pi(x)})=\overrightarrow{\pi(x)\pi^2(x)}=\overrightarrow{\pi(x)\pi(x)}=0$, y por tanto $\overrightarrow{x\pi(x)} \in \vec{D}$, y $\pi(x) \in (x+\vec{D})\cap B$. Por la fórmula de dimensiones se deduce que $\dim((x+\vec{D})\cap B)=0$, y así $\pi(x)=(x+\vec{D})\cap B$.

Si $\vec{D}'$ es subespacio vectorial de $\vec{X}$, verificando $\pi(x)=(x+\vec{D}')\cap B$ para todo $x \in X$, entonces necesáriamente $\vec{D} < \vec{D}'$: si $\vec{d} \in \vec{D}$ (b B) entonces para $x=b+\vec{d}$ es $\pi(x)=b$ y $\overrightarrow{x\pi(x)}=\vec{d} \in D'$. Por otra parte como $(x+\vec{D}')\cap B$ es un punto, se deduce que $\dim \vec{D}'= n-\dim B = \dim \vec{D}$, y se verifica la igualdad $\vec{D}=\vec{D}'$.

El resto de la demostración es trivial.

2.3 __Deformaciones afines__

Demostraremos como cuestión previa, el siguiente resultado:

2.3.1 **Proposición**

Si f_1, $f_2 \in EA(X)$, y $k \in K$, la aplicación,

$kf_1+(1-k)f_2 : X \ni x \mapsto kf_1(x)+(1-k)f_2(x) \in X$ es una aplicación afin, con aplicación lineal asociada $\overrightarrow{kf_1+(1-k)f_2}= k\vec{f}_1+(1-k)\vec{f}_2$.

Demostración:

La aplicación $\hat{f}=k\hat{f}_1+(1-k)\hat{f}_2$ es justamente la extensión vectorial de la aplicación $f= kf_1+(1-k)f_2$ y por tanto f es afin. Además $\hat{f}_{\vec{X}} = k(\hat{f}_1)_{\vec{X}}+(1-k)(\hat{f}_2)_{\vec{X}}= k\,\vec{f}_1+(1-k)\,\vec{f}_2$.

2.3.2 **Comentario**

De hecho, el conjunto EA(X) admite una única estructura afin que proporciona la combinación afin de puntos indicada en 2.3.1.

2.3.3 **Definición**

Sea B subespacio afin de X, $\vec{D}<\vec{X}$ tal que $\vec{B}\oplus\vec{D}=\vec{X}$, y sea $k \in K$.

Se denomina deformación afin de base B, dirección D y razón k, al endomorfismo afin $\delta = k\,\mathrm{id}+(1-k)\pi$, siendo π la proyección afin de base B y dirección $\vec{D}$.

2.3.4 Proposición

Sea $\delta = k\ id + (1-k)\Pi$ una deformación afin como en 2.3.3. Si $k \neq 1$, su base B constituye el subespacio de puntos fijos, y para cada $x \in B$, $\delta(x)$ es el punto de la recta $\langle x, \Pi(x) \rangle$ que verifica $(\Pi(x); \delta(x); x) = k$.

Demostración:

Si $k \neq 1$ entonces $\delta(x) = kx + (1-k)\Pi(x) = x$ si y solo si $\Pi(x) = x$, es decir, si y solo si $x \in B$. La segunda parte es consecuencia inmediata de la definición de razón simple (4.1.5 Cap IV)

2.3.5 Proposición

Una deformación afin δ de razón k admite una representación matricial reducida respecto a cierto sistema de referencia cartesiano, de la forma: $\mathrm{diag}(I(r+1), kI(n-r))$, donde r es la dimensión de la base.

En particular dos deformaciones afines son equivalentes si y solo si tienen la misma razón, y la misma dimensión para sus bases.

Demostración:

La segunda parte, es consecuencia de la primera que se prueba inmediatamente tomando un sistema de referencia cartesiano $\mathcal{E} = (e_0; \vec{\mathcal{E}})$ donde e_0 es un punto fijo para $\delta = k\ id + (1-k)\Pi$, y $\vec{\mathcal{E}}$ es una base de Jordan para Π. Los detalles quedan como ejercicio.

2.3.6 Observación

Nótese que una homotecia afin, es una deformacion afin con base un punto.

2.3.7 Definición

Una simetría σ es una deformación afin de razón igual a -1

2.3.8 Proposición (supongase K de caracteristica distinta de dos)

Un Endomorfismo $\sigma \in EA(X)$, es simetría afin si y solo si es involutiva, es decir: $\sigma^2 = id$.

Demostración

Tomando para la simetría σ su representación matricial reducida dada en 2.3.5, $\mathrm{diag}(I(r+1), -I(n-r))$ se comprueba que $\sigma^2 = id$.

Recíprocamente, si $\sigma^2 = id$, entonces $\vec{\sigma}^2 = \vec{id}$ y $\vec{\sigma} \in GL(\vec{X})$ es una simetría vectorial. Sea $e_0 \in X$ un punto fijo para σ (por ejemplo $(1/2)\,x + (1/2)\,\sigma(x)$, $x \in X$), y sea $\vec{\mathcal{E}}$ una base de Jordan para $\vec{\sigma}$. Respecto a $\mathcal{E} = (e_0; \vec{\mathcal{E}})$ admite una representación matricial $\mathrm{diag}(I(r+1), -I(n-r))$, y por tanto σ es deformación afin de razón igual a -1.

2.3.9 Observación.

Una simetria de base $B < X$ y dirección $\vec{D} < \vec{X}$ ($\vec{B} \oplus \vec{D} = \vec{X}$) se escribe de la forma $\sigma = -id + 2\pi$ siendo π la proyección de base B y dirección $\vec{D}$. Observese que para $x \in X-B$, $\pi(x)$ es justamente el punto medio del segmento definido por x y $\sigma(x)$ $\vec{\sigma}$ es la simetria vectorial de base B y dirección $\vec{D}$.

3.TEOREMA DE CLASIFICACION.

f denota un endomorfismo fijo del espacio afin X, y $\hat{f}$ es su extensión vectorial en X. La aplicación ms: $\hat{X} \dashrightarrow K$ es la forma lineal masa y $X = \{ x \in \hat{X} / ms(x) = 1 \}$.

3.1 <u>Primer teorema de descomposición: Subespacio afin caracteristico.</u>

3.1.1 Teorema.

$1 \in K$ es autovalor de $\hat{f}$. Si $p(t) \neq t-1$ es un divisor primo del polinomio mínimo $\phi_{\hat{f}} = \phi_f$, el subespacio caracteristico $\hat{X}_p$ está contenido en $\vec{X}$.

Demostración:

Para cada $\hat{x} \in \hat{X}$ se verifica $ms((\hat{f}-\hat{id})(\hat{x})) = ms(\hat{f}(\hat{x})) - ms(\hat{x}) = ms(\hat{x}) - ms(\hat{x}) = 0$ y por tanto $im(\hat{f} - \hat{id}) \subset \vec{X}$. Así $\hat{f} - \hat{id}$ no es isomorfismo lineal y por tanto $1 \in K$ es autovalor de $\hat{f}$.

Por otra parte, si $p \neq t-1$ es divisor primo de ϕ_f, para cada $k \in N$ se verifica: $p(\hat{f})^k(\hat{x}) = 0 \Rightarrow \hat{x} \in \vec{X}$, y en consecuencia $\hat{X}_p = \bigcup_{k \in N} \ker p^k(\hat{f}) \subset \vec{X}$. En efecto:

Sea $p^k(t) = \varphi(t) = a_o + a_1 t + \ldots + a_s t^s$. Entonces

$ms(\varphi(\hat{f})(\hat{x})) = ms(a_o \hat{x} + a_1 \hat{f}(\hat{x}) + \ldots + a_s \hat{f}^s(\hat{x})) = (a_o + \ldots + a_s) ms(\hat{x}) = \varphi(1) ms(\hat{x})$.

Como $1 \in K$ NO es raiz de φ se tiene: $\varphi(\hat{f})(\hat{x}) = 0 \Rightarrow ms(\varphi(\hat{f})(\hat{x})) = \varphi(1) ms(\hat{x}) = 0 \Rightarrow$ $\Rightarrow ms(\hat{x}) = 0 \Rightarrow \hat{x} \in \vec{X}$.

3.1.2 Corolario (Definición).

Sea $\hat{X}_1$ el subespacio caracteristico de f asociado a (t-1). Existe entonces un subespacio invariante $\vec{Y}$ de $\vec{X}$ de forma que $X_f = \hat{X}_1 \oplus \vec{Y}$.

En particular $\hat{X}_1 \cap X = X_1$ es un subespacio afin invariante no vacio de X y $f_1 = f_{X_1} \in$ $\in EA(X_1)$ tiene polinomio mínimo ϕ_{f_1} de la forma $(t-1)^m$.

Se denomina a X_1 subespacio afin caracteristico de f.

Demostración:

Sea $\phi_f(t) = \phi_{\hat{f}}(t) = (t-1)^m p_2^{m_2} \ldots p_r^{m_r}$, la descomposición en factores primos de f. Por el teorema 3.2.3 (Cap III) es $\hat{X} = \hat{X}_1 \oplus \hat{X}_{p_2} \oplus \ldots \oplus \hat{X}_{p_r}$, y por 3.1.1 $\vec{Y} = \hat{X}_{p_2} \oplus \ldots \oplus \hat{X}_{p_r} < \vec{X}$ y es subespacio invariante de $\vec{X}$. Se tiene así $\hat{X} = \hat{X}_1 \oplus \vec{Y}$.

El resto de las afirmaciones son consecuencia de 3.2.3 (Cap III).

3.1.3 Definición.

El endomorfismo afin f se dice primario si $\phi_f(t) = (t-1)^m$.

3.1.4 Observación.

Observese que con la notación de 3.1.2, el endomorfismo afin f_1, restricción de f al subespacio afin caracteristico X_1 es primario. Además f es primario si y solo si $X = X_1$.

3.2 Segundo teorema de descomposición.

f es un endomorfismo afin (primario) de X con polinomio mínimo $\phi_f = (t-1)^m$

3.2.1 Notaciones.

Si $a \in \hat{X}$ se escribe ϕ_a para denotar al polimomio mínimo de a respecto a f (vease 3.1.8 Cap III). Por la proposición 4.1.1 (Cap III) se deduce que $\phi_a(t) = (t-1)^k$ con $0 \leq k \leq m$, y el número k representa el mínimo entero positivo tal que $(\hat{f}-\hat{id})^k(a)=0$. El subespacio $\hat{N}_a = K[t]\ a = \{\varphi(\hat{f})(a)\ /\ \varphi \in K[t]\}$ es la recta modular generada por a (Véase 4.1.2 Cap III) y es por tanto un subespacio $\hat{f}$-invariante. Se denota por $N_a = \hat{N}_a \cap X$; si N_a es distinto del vacío, entonces es subespacio afín f-invariante con dirección $\vec{N}_a = \hat{N}_a \cap \vec{X}$ (véase 1.2.2).
Observese que si $a \in \vec{X}$ entonces $\hat{N}_a = \vec{N}_a < \vec{X}$. Por otra parte, si $a \in X$, entonces N_a es subespacio afin invariante.

3.2.2 Proposición

Sea $a \in X$ y $a' = f(a)$. Entonces N_a es el subespacio afin mínimo que contiene al punto a. Si $\phi_a(t) = (t-1)^k$ $(k \geq 2)$, entonces el sistema : $(\vec{aa'}; (\vec{f}-\vec{id})(\vec{aa'}), \ldots (\vec{f}-\vec{id})^{k-2}(\vec{aa'}))$ es linealmente independiente, y el subespacio vectorial por ellos generado es $\vec{N}_{\vec{aa'}}$, que coincide con $\vec{N}_a$. Así $N_a = a + \vec{N}_{\vec{aa'}}$ y $N_a = K\,a \oplus \hat{N}_{\vec{aa'}}$.

Demostración:

$\hat{N}_a$ es por 4.1.3 (capIII) el subespacio vectorial $\hat{f}$-invariante minimo que contiene a l punto a, y así se justifica la primera afirmación.
Si $\phi_a(t) = (t-1)^k$, por 4.1.3 (cap III) la aplicación $K_k[t] \ni \varphi \longmapsto \varphi(\hat{f})a \in \hat{N}_a$, es isomorfismo lineal. Como $(1, t-1, \ldots, (t-1)^{k-1})$ es base de $K_k[t]$, se deduce que que $(a, (\hat{f}-\hat{id})a, \ldots, (\hat{f}-\hat{id})^{k-1}a)$ es base para $\hat{N}_a$, pero $(\hat{f}-\hat{id})(a) = f(a) - a = \vec{aa'}$

y $\emptyset_{\vec{aa'}}(t)=(t-1)^{k-1}$. Ademas $(\hat{f}-\hat{id})^{j}(a)=(\vec{f}-\vec{id})^{j-1}(\vec{aa'})$, por tanto: $N_a = K\, a \oplus \langle \vec{aa'}, (\vec{f}-\vec{id})(\vec{aa'}),\dots, (\vec{f}-\vec{id})^{k-2}(\vec{aa'})\rangle = K\, a \oplus \vec{N}_{\vec{aa'}}$. Esto concluye la demostración.

3.2.3 Observación:

Si en la proposición anterior es k=1, esto significa que $\emptyset_a(t)=t-1$ y $f(a)=a=a'$ Por tanto $N_a=\{a\}$ es el subespacio invariante mínimo que contiene al punto a , y tiene dirección $\vec{N}_a=\{\vec{0}\}$.

Si $k=2$, entonces $\vec{N}_a=\hat{N}_{\vec{aa'}}=\langle\vec{aa'}\rangle$, y N_a es por tanto una recta afin.

3.2.4 Teorema (de descomposición)

Existe $a\in X$, y existe $\vec{Y}$ subespacio vectorial invariante de $\vec{X}$ tales que: $\hat{X} = \hat{N}_a \oplus \vec{Y}$.

Demostración:

Si f tiene un punto fijo $a\in X$, se verifica $N_a=\{a\}$, y $\hat{N}_a = K\, a$. Por tanto $X = K\, a\oplus\vec{X}$ es la descomposición pedida.

Supóngase pues que f no tiene puntos fijos:

Si $n=\dim X = 1$, entonces f es necesáriamente traslación (compruébese). Si $a\in X$, es $N_a=a+\langle\overrightarrow{af(a)}\rangle =X$, y $\hat{N}_a=\hat{X}$. Por tanto $\hat{X}=\hat{N}_a\oplus\{0\}$.

Supóngase cierto el resultado para dimensión estrictamente menor que n $(n>1)$, y sea $n=\dim X$. Hay dos posibilidades excluyentes:

a) Existe $v\in\vec{X}$ con $\emptyset_v(t)=(t-1)^m$

En éste caso por 4.2.4 (cap III), $\hat{N}_v=\vec{N}_v<\vec{X}$ admite en $\hat{X}$ un complementario $\hat{X}'$ $\hat{f}$-invariante: $\hat{X} = \hat{X}'\oplus\vec{N}_v$. Sea $X'=\hat{X}'\cap X$; X' es subespacio afin no vacío f-invariante, y $f'= f_{X'}\in EA(X')$. Como $\dim X'<n$, por la hipótesis de inducción, existe $a\in X'$ y existe $\vec{Y}'$ subespacio invariante de $\vec{X}'$ tal que $\hat{X}'=\hat{N}_a\oplus\vec{Y}'$, como $\hat{X}=\hat{X}'\oplus\vec{N}_v$, se tiene $\hat{X}=\hat{N}_a\oplus\vec{Y}$ donde $\vec{Y} = \vec{Y}'\oplus\vec{N}_v$ es subespacio invariante de $\vec{X}$.

b) No existe $v\in\vec{X}$ tal que $\emptyset_v(t)=(t-1)^m$

Si $\emptyset_{\vec{f}}(t)=(t-1)^r$, por 4.1.1 (cap III) es $r<m$. Veamos que $r=m-1$.En efecto: nuevamente por 4.1.1 (cap III) existe $\hat{a}\in\hat{X}-\vec{X}$ con $\emptyset_{\hat{a}}(t)=(t-1)^m$. tomando $\lambda\in K$ tal que $a=\lambda\,\hat{a}\in X$, es $\emptyset_a(t)=\emptyset_{\hat{a}}(t)=(t-1)^m$. Si $a'=f(a)$, se verifica $(t-1)^{m-2}\vec{aa'}=(t-1)^{m-2}(\hat{f}-\hat{id})(a)=(t-1)^{m-1}(a)\neq 0$, y $r>m-2$. Por tanto $r=m-1$, y $\emptyset_{\vec{aa'}}(t)=(t-1)^{m-1}=\emptyset_{\vec{f}}(t)$. Por el teorema 4.2.2 (cap III) aplicado a $\vec{f}$ y al vector $\vec{aa'}$, se concluye que $\vec{N}_{\vec{aa'}}$ admite en $\vec{X}$ un complementario invariante $\vec{Y}$: $\vec{X}=\vec{N}_{\vec{aa'}}\oplus\vec{Y}$, y por tanto es $\hat{X}= K\, a\oplus\vec{X} =K\, a\oplus\vec{N}_{\vec{aa'}}\oplus\vec{Y} = \hat{N}_a\oplus\vec{Y}$ como queríamos demostrar.

3.2.5 Corolario

Si f no tiene puntos fijos, existe un sistema de referencia cartesiano (de Jordan) $\mathcal{E}=(e_o;\vec{\mathcal{E}})$ respecto al cual la representación matricial de f es de la forma:

$\mathrm{Diag}(C(k),C(k_2),\dots,C(k,r))$ con $k+k_2+\dots+k_r=n$, $k\geq 2$, y en donde

$$C(j)=\begin{pmatrix} 1 & 0 \dots 0 & 0 \\ 1 & 1 \dots 0 & 0 \\ 0 & 0 \dots 1 & 1 \end{pmatrix}$$ es una matriz cuadrada de orden j.

Demostración

Basta tomar como origen e_o el punto $a\in X$ construído en el teorema 3.2.4, tal que $\hat{X}=\hat{N}_a\oplus\vec{Y}$, donde $\vec{Y}$ es subespacio invariante de $\vec{X}$, y tomar vectores $e_1=\vec{aa'}$ $e_2=(\vec{f}-\vec{id})(\vec{aa'})\dots$ $e_{k-1}=(\vec{f}-\vec{id})^{k-2}(\vec{aa'})$, siendo $a'=f(a)$. Los demás vectores de $\mathcal{E}$, $e_k,\dots,e_n$ se toman de forma que constituyan una base de jordan para el endomorfismo lineal f_Y . El entero positivo $k\geq 2$ viene definido en la proposición 3.2.2 (véase observación 3.2.3)

3.3 Teorema de clasificación de endomorfismos afines

3.3.1 Hipótesis generales y notaciones

Sea $f\in EA(X)$ un endomorfismo afin sin puntos fijos del espacio afin X, y sea $\phi_f(t)=(t-1)^m p_2^{m_2}\dots p_r^{m_r}$ la descomposición irreducible del polinómio mínimo $\phi_f=\phi_{\hat{f}}$ de f.

Se denota por $\hat{X}_1$ el subespacio característico asociado al divisor primo (t-1) de ϕ_f . Por el corolario 3.2.1 es:

(1): $\hat{X}_f=\hat{X}_1\oplus\vec{Y}$, donde $\vec{Y}=\hat{X}_{p_2}\oplus\dots\oplus X_{p_r}<\vec{X}$

siendo $\hat{X}_{p_i}$ el subespacio caracteristico asociado al divisor primo p_i de ϕ_f .

$X_1=\hat{X}_1\cap X\neq\emptyset$ es el subespacio afin caracteristico de f.

3.3.2 Proposición

Con las hipótesis de 3.3.1, existe un punto $a\in X_1$ tal que $\hat{X}_f=\hat{N}_a\oplus\vec{Z}$, para cierto subespacio vectorial $\vec{Z}$ invariante de $\vec{X}$.

Demostración:

Aplicando el teorema 3.2.4 a $f_1=f_{X_1}\in EA(X_1)$ con polinomio mínimo $\phi_{f_1}(t)=(t-1)^m$, se concluye que existe $a\in X_1$ y $\vec{Y}_1$ subespacio vectorial invariante de $\vec{X}_1$ tal que $\hat{X}_1=\hat{N}_a\oplus\vec{Y}_1$. Teniendo en cuenta la descomposición (1) de 3.3.1 , y tomando $\vec{Z}=\vec{Y}_1\oplus\vec{Y}$, se deduce $\hat{X}=\hat{X}_1\oplus\vec{Y}=\hat{N}_a\oplus(\vec{Y}_1\oplus\vec{Y})=\hat{N}_a\oplus\vec{Z}$, como queriamos demostrar.

Por 3.3.2 , $N_a=\hat{N}_a\cap X$ es el subespacio invariante mínimo que contiene al punto a. Se probará que N_a es subespacio mínimo absoluto en el siguiente sentido: $\dim N_a=\min\{\dim A \;/\; A<X_f \;,\; A\neq\emptyset\}$.

3.3.3 Teorema

Sea $a\in X_1$ un punto que verifica la propiedad $\hat{X}=\hat{N}_a\oplus\vec{Z}$ donde $\vec{Z}<\vec{X}$ es un subespacio vectorial invariante. Entonces , para todo subespacio afin invariante no vacío B de X, se verifica $\dim N_a \leq \dim B$.

Demostración:

Si $\phi_a(t)=(t-1)^{k+1}$, entonces por 3.3.2 el sistema $(a,\vec{a}_1,\dots,\vec{a}_k)$ con $\vec{a}_1=\overrightarrow{af(a)}=(\hat{f}-\hat{id})(a)$, y $\vec{a}_{i+1}=(\vec{f}-\vec{id})(\vec{a}_i)=(\hat{f}-\hat{id})^{i+1}(a)$ (nótese que $\vec{a}_{k+1}=0$), es una base para $\hat{N}_a$ y un sistema de referencia cartesiano para N_a.

Como $\hat{X}=\hat{N}_a\oplus\vec{Z}$, se deduce inmediatamente que $\vec{X}=\vec{N}_a\oplus\vec{Z}=\langle\vec{a}_1,\dots,\vec{a}_k\rangle\oplus\vec{Z}$.

Si $b\in B$, entonces $\vec{ba}=\sum_{i=1}^{k}\lambda_i a_i+\vec{z}_o$ para ciertos $\lambda_i\in K$ y $\vec{z}_o\in\vec{Z}$.

Sea $\vec{b}_i=(\hat{f}-\hat{id})^i(b)$ $i=1,\dots,k$. Por 1.2.3 , y ser B invariante, se deduce que $(\vec{b}_1,\dots,\vec{b}_k)<\vec{B}$. La demostración se concluye probando que el sistema $(\vec{b}_1,\dots,\vec{b}_k)$ es linealmente independiente, pues así $\dim B=\dim\vec{B}\geqslant k=\dim N_a$.

En efecto, se tiene:

$$
\begin{aligned}
b &= a+\lambda_1 a_1+\lambda_2 a_2+\dots+\lambda_k a_k+\vec{z}_o\\
b_1 &= \qquad a_1+\lambda_1 a_2+\dots+\lambda_{k-1}a_k+\vec{z}_1\\
&\vdots\\
b_k &= \qquad\qquad\qquad a_k+\vec{z}_k
\end{aligned}
$$

donde $z_i=(\hat{f}-\hat{id})^i(\vec{z}_o)=(\vec{f}-\vec{id})^i(\vec{z}_o)\in\vec{Z}$.

Si $\pi:\vec{X}\longrightarrow\vec{X}$ es la proyección vectorial con base $\vec{N}_a$ y dirección $\vec{Z}$, se verifica:

$\pi(b_j)=a_j+\sum_{i=1}^{k-j}\lambda_i a_{i+j}$, $j=1,\dots,k$, es decir:

$$
(\pi(\vec{b}_1),\dots,\pi(\vec{b}_k))=(\vec{a}_1,\dots,\vec{a}_k)\begin{pmatrix}1 & \lambda_1, & \dots & \lambda_k\\ 0 & 1, & \dots & \lambda_{k-1}\\ \vdots & \vdots & & \\ 0 & 0, & \dots & 1\end{pmatrix}
$$

Como $(\vec{a}_1,\dots,\vec{a}_k)$ es linealmente independiente, $(\pi(\vec{b}_1),\dots,\pi(\vec{b}_k))$ también lo es, lo mismo que $(\vec{b}_1,\dots,\vec{b}_k)<\vec{B}$.

3.3.4 Definición

Si $f\in EA(X)$ se define $d(f)=\min\{\dim A \;/\; A<X_f,\; A\neq\emptyset\}$.

Nótese que f tiene puntos fijos si y solo si $d(f)=0$.

3.3.5 Proposición

La aplicación $d:EA(X)\ni f\mapsto d(f)\in\mathbb{N}$ es un invariante lineal

Demostración:

Si $f\in EA(X)$, $g\in GA(X)$ y $f'=g^{-1}f\,g$, entonces para cada $A'<X_{f'}$ se verifica que $g(A')<X_f$, y la aplicación $A'\longmapsto g(A')$ es un isomorfismo entre los retículos de subespacios invariantes de f' y de f que conserva la dimensión.

Así si $N'<X'$ verifica $\dim N'=d(f')$, entonces $g(N')$ verifica $\dim g(N')=d(f)$, y $d(f)=d(f')$.

3.3.6 Observación

El teorema 3.3.3 asegura que $d(f)=\dim N_a = k$, cuando a X verifica $X = N_a \quad Z$, donde Z es subespacio vectorial invariante de X.

3.3.7 Corolario

Si $f \in EA(X)$ y $d(f)=k$, existe un sistema de referencia cartesiano (de Jordan) $\mathcal{E}=(e_o;\vec{\mathcal{E}})$ respecto al cual la matriz de f es de la forma $\mathrm{diag}(C(k+1),J)$, donde J es una matriz de Jordan. (Véase notación de 3.2.5)

Demostración:

Si $d(f)=k=0$, el resultado es consecuencia de 2.1.2

Si $k \geq 1$, tómese $e_o \in X_1$, tal que $\hat{X} = \hat{N}_{e_o} \oplus \vec{Z}$ con $\vec{Z}$ subespacio vectorial invariante de $\vec{X}$. Por 3.3.6 , $\dim N_{e_o} = k$, y $\phi_{e_o}(t)=(t-1)^{k+1}$. Por 3.2.2 , el sistema $(e_o;\vec{e}_1,\dots,\vec{e}_k)$ con $\vec{e}_i = (\hat{f}-\hat{id})^i(e_o)$, es sistema de referencia afin para N_{e_o};

Tomando $(\vec{e}_{k+1},\dots,\vec{e}_n)$ base de Jordan para $\vec{f}_{\vec{Z}}$, se concluye por 3.2.5 que la matriz de f respecto a $\mathcal{E}$ es de la forma indicada.

3.3.8 Corolario

El invariante afin d de 3.3.4, junto con el polinomio mínimo $\vec{\phi} = \phi_{\vec{f}}$, y los invariantes de rango en EA(X) inducidos por los invariantes de rango en EL(X) (véase 4.3.2 Cap.III) constituyen un sistema completo de invariantes para la clasificación afin de endomorfismos afines.

Demostración:

Sea $f \in EA(X)$. Si $d(f)=0$ el resultado se obtiene de 2.1.2

Si $k=d(f)>0$, por 3.3.7 , f admite una representación matricial del tipo $\mathrm{diag}(C(k+1),J)$,(donde J es una matriz de Jordan) respecto a cierto sistema de referencia cartesiano $\mathcal{E}=(e_o;\vec{\mathcal{E}})$, y la matriz $\vec{J} = \mathrm{diag}(C(k),J)$ que es representación matricial (reducida) de $\vec{f}$ respecto a $\vec{\mathcal{E}}$, puede reconstruirse a partir de los invariantes lineales de $\vec{f}$.

Si f y f´ son dos endomorfismos afines de X sobre los cuales , el sistema de invariantes afines del enunciado toman el mismo valor,etonces, por lo anterior, admiten la misma representación matricial cartesiana reducida respecto a sistemas de referencia cartesianos convenientemente elegidos, y f, y f´son por tanto afinmente equivalentes.

3.3.9 Corolario

Dos matrices reducidas afines, $\Lambda = \mathrm{diag}(C(k+1),J)$ y $\Lambda' = \mathrm{diag}(C(k'+1),J')$ de EA(n) son afinmente equivalentes, si y solo si $k=k'$ y las matrices de Jordan J y J´son linealmente equivalentes (es decir, se pasa de una a otra por permutación de cajas)

Demostración:

Es suficiente comprobar, que si se interpreta la matriz $\mathcal{A}$ como un endomorfismo afín de A_n, entonces $d(\mathcal{A})$ coincide con el entero k. En efecto:

Si denotamos por $(e_o;\vec{e}_1,\dots,\vec{e}_n)$ el sistema de referencia canónico de A_n, entonces $\hat{N}_{e_o} = \langle e_o,\vec{e}_1,\dots,\vec{e}_k\rangle$ y admite un complementario invariante $\vec{Z}=\langle\vec{e}_{k+1},\dots,\vec{e}_n\rangle < \vec{A}_n$, es decir, $\hat{A}_n = \hat{N}_{e_o}\oplus\vec{Z}$. La conclusión se obtiene por 3.3.6.

3.3.10 Teorema

Si $f\in EA(X)$, entonces $d(f)+1 = \min\{ j\in N \mid \ker(\hat{f}-\hat{id})^j\cap X \neq \emptyset \}$

Demostración:

Para $d(f)=0$ el resultado es cierto, pues entonces existe e_o punto fijo para f, y $e_o\in\ker(\hat{f}-\hat{id})\cap X$ que es por tanto no vacío.

Supóngase $k=d(f)>0$, y $\mathcal{E}=(e_o;\vec{\mathcal{E}})$ un sistema de referencia cartesiano de Jordan para f (Corolario 3.3.7) con coordenadas cartesianas $\underset{\sim}{x} = \begin{pmatrix}1\\x_1\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}$ respecto al cual la representación matricial de f es de la forma $\mathcal{A} = \mathrm{diag}(C(k+1),J)$. LLamando $H=C(k+1)-I(k+1)$ ($I(k+1)$ matriz identidad), debe observarse que:

$$H=\begin{pmatrix}0&&&\\1&0&&\\&\ddots&\ddots&\\&&1&0\end{pmatrix};\ H^2=\begin{pmatrix}0&&&&\\0&0&&&\\1&\ddots&\ddots&&\\&\ddots&1&0&0\end{pmatrix};\ H^k=\begin{pmatrix}0&,\dots,&0\\&&\\1&\dots&0\end{pmatrix};\ \text{y}\ H^{k+1}=\begin{pmatrix}0&\dots&0\\&&\\0&\dots&0\end{pmatrix}$$

Como consecuencia, en las ecuaciones implícitas de $\ker(\hat{f}-\hat{id})^j$: $(\mathcal{A}-I(n+1))^j\begin{pmatrix}x_o\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\\vdots\\0\end{pmatrix}$ aparece para $j<k+1$, la ecuación $x_o=0$, y $\mathrm{Ker}(\hat{f}-\hat{id})^j\cap X=\emptyset$. Justamente cuando $j=k+1$, la primera columna de $(\mathcal{A}-I(n+1))^j$ es idénticamente nula, y en las ecuaciones implícitas de dicho núcleo no interviene la variable x_o. Dichas ecuaciones, son por tanto compatibles con $x_o=1$, que es la ecuación de X.