Universidad Complutense de Madrid

Facultad de Ciencias Matemáticas

Paralelismo y Geodésicas en Variedades Conformes

Beatriz Salvador Allué

Para el Título de Doctora en Ciencias Matemáticas

Junio 2003

Director de Tesis: Prof. Javier Lafuente López

Agradecimientos

Quiero expresar mi gratitud a Javier Lafuente por su estupenda labor como director de la tesis. La memoria que ahora presento es la culminación de unos años de investigación en los que ha sabido motivarme, orientarme con sus acertados consejos y, en cualquier caso, ofrecerme su entera disponibilidad. El apoyo que me ha mostrado ha sido fundamental para el buen término de esta tesis.

Quisiera mostrar también mi agradecimiento a Eduardo Aguirre e Ignacio Sánchez, cuyos trabajos y charlas han marcado una sólida base en mis inicios en la geometría conforme, y a quienes he podido acudir ante cualquier duda. Así mismo, debo agradecerle a Ángel Miguel Amores la ayuda que me ha brindado con sus generosas sugerencias y correcciones.

Doy también testimonio de mi gratitud hacia Jan Slovak. Gracias a su amable invitación al departamento de Álgebra y Geometría de la Masaryk University en Brno en el invierno de 1999, pude entrar en contacto con las AHS-structures.

Quiero hacer extensivo mi agradecimiento a todo el Departamento de Geometría y Topología de la U.C.M., que me ha acogido durante estos años con tan favorable disposición. En él he podido desarrollar mi labor investigadora y formar parte de los proyectos de investigación PR 157/97 – 7104, y PB98 – 0758.

Finalmente, con especial cariño, quisiera agradecer a mi familia su incondicional apoyo; incluso en las horas difíciles se han mostrado a mi lado. Y a Rodrigo especialmente agradecerle también su infinita paciencia durante este tiempo.

Índice General

Capítulo 1

Introducción

La geometría diferencial conforme forma parte de la teoría clásica de estructuras en variedades diferenciables, y surge con el estudio de aquellas propiedades en geometría Riemanniana que permanecen invariantes bajo las llamadas transformaciones conformes de la métrica. Tiene sus orígenes en los trabajos de H. Weyl, que le llevaron a descubrir un tensor invariante, conocido ahora como el *tensor de curvatura de Weyl*, y cuya anulación caracteriza a las estructuras conformes localmente planas. Una estructura conforme sobre una variedad se entiende así como una familia de métricas conformemente equivalentes, esto es, de métricas proporcionales a través de una función diferenciable de escala. El estudio de la geometría conforme se lleva a cabo mediante la teoría de variedades Riemannianas, donde la conexión de Levi-Civita constituye una herramienta básica.

Los trabajos de E. Cartan son también una referencia fundamental. En ellos se caracteriza la estructura conforme mediante la construcción de un "fibrado esférico" sobre la variedad, cuyas fibras son esferas conformes. Precisamente, las complecciones conformes de los espacios tangentes. El transporte paralelo de estas esferas da origen a la noción ya clásica de *conexión normal conforme de Cartan*. También es necesario fijar en este contexto una elección particular de la métrica en la estructura conforme para obtener un conexión única de Cartan, que variará en función de la métrica elegida.

En esta tesis se aborda el estudio de la geometría de las variedades conformes desde la nueva perspectiva que ofrece el uso de un paralelismo natural unívocamente determinado por la estructura conforme. Este paralelismo se denomina *de Fermi-Walker*, y tiene sus precedentes en la Teoría de la Relatividad, donde sirve para modelizar, por ejemplo, el movimiento de giróscopos. No se trata ya de un paralelismo asociado a una conexión lineal; en su lugar, va ligado a una noción más general que puede interpretarse en cierto sentido como una conexión en el segundo orden.

La naturalidad de la definición de la conexión conforme de Fermi-Walker queda también avalada por el hecho de que puede extenderse sin ambigüedad al modelo de Cartan. Se obtiene entonces una *conexión esférica de Fermi-Walker* que permite transportar de manera canónica las esferas conformes tangentes de la variedad. Este particular punto de vista permite tratar los invariantes conformes de manera extremadamente sencilla.

Ofrecemos a continuación una descripción somera de los contenidos de esta memoria. Un desarrollo más pormenorizado puede encontrarse en las introducciones al inicio de cada capítulo.

El **Capítulo 2** está dedicado a repasar la teoría fundamental de conexiones lineales sobre variedades diferenciables. Los orígenes de la noción de conexión se hallan en la necesidad de ofrecer un criterio que permita comparar vectores tangentes apoyados sobre puntos distintos de una variedad diferenciable; un criterio que reproduzca el paralelismo natural del espacio afín $\mathbb{R}^m$. Con esta intención, Levi-Civita presentó en 1917 la noción de desplazamiento paralelo de vectores a lo largo de curvas sobre superficies (Levi-Civita [32]). Con ella se da sentido geométrico a una operación de derivación covariante sobre el espacio de campos de vectores tangentes. Cartan y Weyl generalizaron estas ideas en su definición de conexiones afines, proyectivas y conformes (Cartan [9], [10], [8] y Weyl [52]), donde el paralelismo asociado preserva además la estructura adicional -afín, proyectiva o conforme- del espacio tangente.

Este primer capítulo pretende repasar las distintas formalizaciones equivalentes de la noción de conexión y paralelismo, que serán utilizadas indistintamente en los siguientes capítulos. Y sobre todo, pretende recuperar las ideas originales que hay tras estos conceptos para revelar mejor su naturaleza geométrica.

Se estudiará en especial el caso de las conexiones lineales sobre variedades con una estructura adicional en su espacio tangente, dada por lo que denominamos una G-estructura. Se define una G-estructura sobre una variedad como una reducción B del fibrado de referencias lineales tangentes LM para un subgrupo $G \subset GL(m, \mathbb{R})$; y una conexión lineal en la G-estructura es aquella que preserva la reducción B en su transporte paralelo de referencias lineales. Un gran número de estructuras geométricas clásicas pueden describirse mediante la noción de G-estructura. En particular nos interesan la geometría métrica Riemanniana, que se obtiene cuando $G = O(m)$, y la geometría conforme (Riemanniana), que se alcanza cuando $G = CO(m)$. Si bien una estructura Riemanniana admite una única conexión simétrica, no ocurre así en el caso conforme.

La aportación original de esta tesis tiene su clave en el descubrimiento de un paralelismo *canónico* definido sobre las curvas de las variedades conformes. Dicho paralelismo busca una operación natural de desplazamiento del espacio conforme tangente. Sin embargo, no va ligado a una conexión lineal como es habitual. De hecho, se verá (en el Capítulo 4) que puede entenderse a través de un tipo de conexión especial asociada al segundo orden.

En el **Capítulo 3** nos centramos ya en el contexto de las variedades conformes Riemannianas. En contraste con la geometría métrica Riemanniana, una estructura conforme distingue toda una familia de conexiones lineales y simétricas, en correspondencia con el espacio de 1-formas de la variedad. Esta ambigüedad implica que a lo largo de cada curva parametrizada $t \mapsto \gamma_t$, las distintas elecciones en la familia de conexiones conformes del ambiente darán lugar a distintos transportes paralelos del tangente. La falta de canonicidad es evitable si se introduce un criterio adicional de *adaptación a la geometría de la curva* γ_t, que consiste en exigir que sea paralelo el campo velocidad $\gamma'_t \in \mathfrak{X}(\gamma)$. Este procedimiento nos lleva a la definición de un paralelismo natural de la estructura conforme, que llamamos paralelismo conforme de Fermi-Walker.

> A lo largo de una curva regular $t \mapsto \gamma_t \in M$ el *paralelismo de Fermi-Walker* coincide localmente con el transporte inducido por las conexiones lineales simétricas y conformes que tienen a γ_t como curva geodésica. El operador asociado $D^\gamma/dt : \mathfrak{X}(\gamma) \to \mathfrak{X}(\gamma)$ es tal que:
>
> $$\left.\frac{D^\gamma}{dt}V\right|_t = \left.\frac{\nabla}{dt}V\right|_t$$
>
> cuando ∇ es conexión conforme verificando $\nabla\gamma'/dt = 0$ en $(t-\varepsilon, t+\varepsilon)$.

Esto permite por ejemplo determinar que para que un difeomorfismo entre variedades sea conforme es condición necesaria que preserve sus correspondientes paralelismos de Fermi-Walker. Si además se sabe que la diferencial respeta en algún punto las estructuras conformes, esta es también una condición suficiente.

El procedimento de doble adaptación, a la geometría conforme del ambiente y a la geometría propia de la curva parametrizada, ofrece una nueva técnica para la definición de invariantes conformes ligados a curvas. Su aplicación a los tensores asociados a la curvatura de una conexión conforme nos permite descubrir un nuevo invariante conforme para curvas, establecido a partir del tensor de Schouten.

> Sobre una curva $t \mapsto \gamma_t \in M$ se define el *tensor conforme de Schouten* $L^\gamma \in \Lambda^1(\gamma)$ como el tensor caracterizado por la condición:
>
> $$L^\gamma(v) = L^\nabla(\gamma'_t, v) \in \mathbb{R} \quad (\forall v \in T_{\gamma_t}M)$$
>
> donde $L^\nabla \in \mathfrak{T}^0_2(M)$ denota el tensor de Schouten de una conexión conforme ∇ adaptada a la curva en t ($\nabla\gamma'/dt = 0$ en $(t-\varepsilon, t+\varepsilon)$).

En el **Capítulo 4** nos planteamos estudiar la naturaleza especial del paralelismo Fermi-Walker asociado a una estructura conforme. Se demuestra que éste puede entenderse como una conexión ligada al segundo orden, esto es, al espacio tangente de segundo orden $\widetilde{T}_x^2 M$ formado por los 2-jets $j_0^2(\gamma)$ de curvas regulares γ_t en M. Obsérvese la siguiente comparativa:

- Una conexión lineal se asocia a una operación de elevación horizontal

$$\kappa_b : T_x M \to T_b LM, \quad \forall b \in LM_x$$

que sumerge el tangente $T_x M$ como un subespacio $\mathcal{H}_b = \kappa_b(T_x M)$ en $T_b LM$. Esta operación describe el transporte paralelo a nivel infinitesimal en el siguiente sentido: el transporte paralelo de una referencia $b \in LM_{\gamma_{t_0}}$ sobre $t \mapsto \gamma_t \in M$ viene dado por una curva $t \mapsto (\mathbb{P}_\gamma b)_t \in LM$ con $(\mathbb{P}_\gamma b)_{t_0} = b$, que verifica:

$$(\mathbb{P}_\gamma b)'_t = \kappa_{(\mathbb{P}_\gamma b)_t}(\gamma'_t), \quad \forall t.$$

- El paralelismo Fermi-Walker se asocia a una operación de elevación horizontal

$$\kappa_b : \widetilde{T}_x^2 M \to T_b LM, \quad \forall b \in LM_x$$

que sumerge el tangente de segundo orden $\widetilde{T}_x^2 M$ en $T_b LM$ como $\widetilde{\mathcal{H}}_b = \kappa_b(\widetilde{T}_x^2 M)$. Esta elevación horizontal se corresponde con el transporte Fermi-Walker paralelo a nivel infinitesimal en el siguiente sentido: el transporte paralelo de una referencia $b \in LM_{\gamma_{t_0}}$ sobre $t \mapsto \gamma_t \in M$ da lugar a una curva $t \mapsto (\mathbb{P}_\gamma b)_t \in LM$ con $(\mathbb{P}_\gamma b)_{t_0} = b$, que verifica:

$$(\mathbb{P}_\gamma b)'_t = \kappa_{(\mathbb{P}_\gamma b)_t}(j_0^2(\gamma_t)), \quad \forall t.$$

Se tiene además que a través de las funciones de elevación Fermi-Walker horizontal, se pueden recuperar las elevaciones horizontales asociadas a cada una de las conexiones lineales y simétricas en la estructura conforme (Proposición 4.3).

El **Capítulo 5** está dedicado a estudiar la geometría conforme diferencial desde el modelo propuesto por E. Cartan, y obtener también en este contexto una conexión de Fermi-Walker unívocamente determinada por la estructura conforme.

Desde este punto de vista, una variedad conforme apoya sobre cada uno de sus puntos $x \in M$ una esfera conforme tangente $\overline{T}_x M$ doblemente punteada. En la esfera se distinguen: un punto origen O_x, que representa el punto de apoyo x de modo que $T_{O_x}(\overline{T}_x M) = T_x M$, y un punto infinito ∞_x que permite considerar la esfera como $\overline{T}_x M = T_x M \cup \{\infty_x\}$ a través de un análogo a la proyección estereográfica.

La noción natural de paralelismo hace referencia aquí a un desplazamiento de las esferas tangentes, y se realiza mediante la introducción de la noción de conexión normal de Cartan. Es un resultado conocido que cada conexión lineal y conforme da lugar a una única conexión normal de Cartan. Es decir, todo paralelismo que desplaza el espacio tangente preservando su estructura conforme se extiende a un paralelismo sobre las esferas conformes tangentes. La ambigüedad en la elección de una conexión lineal conforme conlleva una ambigüedad también en la elección de una conexión normal de Cartan que mueva las esferas.

Se demuestra entonces que el paralelismo Fermi-Walker, canónicamente definido sobre el espacio tangente conforme, se extiende también a un paralelismo canónico sobre las esferas tangentes en el modelos conforme de Cartan. Va ligado a una conexión de tipo Cartan que denominamos *conexión esférica de Fermi-Walker* (Definición 5.12).

Podemos resumir que este criterio adicional de *adaptación a la geometría de la curva*, presentado aquí de manera original, permite alcanzar los siguientes resultados en el contexto de variedades conformes:

- En primer lugar, distinguir de manera unívoca un paralelismo preferente de los espacios tangentes conformes.
- Este mismo criterio distingue también en el modelo esférico de Cartan un paralelismo preferente de las esferas conformes tangentes.

Vemos así que la introducción de este criterio de adaptación es suficientemente natural en el ámbito de las variedades conformes. Esto nos hace pensar en la conexión de Fermi-Walker como el análogo confome de la conexión de Levi-Civita de la geometría Riemanniana, y proporciona una herramienta adecuada para el estudio de la geometría conforme diferencial.

En el **Capítulo 6** estamos en posición de estudiar los invariantes conformes clásicos asociados a curvas, a partir del paralelismo natural de Fermi-Walker. Los invariantes que aquí presentamos son originales del artículo de Cartan [10], en donde aparecen definidos a partir de una elección concreta para la conexión normal. Estas definiciones adquieren un significado conforme que finalmente las hace independientes de la conexión considerada. La conexión esférica de Fermi-Walker permite caracterizar directamente estos invariantes conformes sobre las curvas, con la ventaja de que podemos despreocuparnos directamente de la canonicidad de las construcciones implicadas. Finalmente, ofrece también la ventaja de poder expresar estos invariantes en términos de la conexión de Fermi-Walker D^γ/dt y el tensor de Schouten L^γ de la curva. Demostramos entonces lo siguiente:

(a) Se distingue el *parámetro proyectivo* de una curva Γ, como aquel definido por las parametrizaciones $t \mapsto \gamma_t \in \Gamma$ que verifican:

$$L^\gamma(\gamma_t') = 0.$$

(b) Las curvas $t \mapsto \gamma_t$ tales que su tensor de Schouten es idénticamente nulo,

$$L^\gamma = 0 \in \Lambda^1(\gamma),$$

forman una familia distinguida por la estructura conforme y reciben el nombre de *geodésicas conformes* (Friedrich [18], Bailey-Eastwood [4]).

(c) Con la ayuda de la estructura conforme, el tensor $L^\gamma \in \Lambda^1(\gamma)$ induce un campo ortogonal de Schouten $\mathbb{L}^\gamma \in \mathfrak{X}(\gamma)$. El *arco conforme* s de una curva general está caracterizado por la propiedad de que en todo instante los vectores γ_s' y $\mathbb{L}_s^\gamma$ son de la misma longitud en $T_{\gamma_s}M$. A través de las sucesivas derivadas del campo $\mathbb{L}_s^\gamma$ respecto a la conexión de Fermi-Walker D^γ/ds se constuye un referencia móvil de Frênet $(E_1, ..., E_m)_s \in CO(M)$ con $E_1 = \gamma'$, $E_2 = \mathbb{L}^\gamma$ y

$$span\left\{\tfrac{D^\gamma}{ds}\mathbb{L}^\gamma, ..., (\tfrac{D^\gamma}{ds})^j\mathbb{L}^\gamma\right\} = span\{E_3(s), ..., E_{j+2}(s)\}, \quad \forall j \geq 1.$$

Las funciones $(\lambda_2)_s, ..., (\lambda_{m-1})_s$ que intervienen en las ecuaciones de Frênet asociadas: $\frac{D^\gamma}{ds}E_j{=}-\lambda_{j\text{-}1}E_{j\text{-}1} + \lambda_j E_{j+1}$, definen las *curvaturas conformes* de la curva.

Estas caracterizaciones de los invariantes conformes son totalmente análogas a las caracterizaciones de los bien conocidos invariantes métricos sobre curvas en un ambiente Riemanniano. La conexión de Fermi-Walker ocupa entonces el lugar de la conexión de Levi-Civita sobre la curva, y el tensor de Schouten define un análogo a la noción de aceleración Riemanniana.

El **Capítulo 7** se desmarca ligeramente de los capítulos anteriores con la intención de presentar una nueva noción de holonomía para las variedades conformes. La motivación última de esta holonomía es dar una interpretación más geométrica al tensor de curvatura de Weyl. Este tensor es bien conocido en geometría conforme y tiene la propiedad de ser idénticamente nulo únicamente cuando la estructura conforme es localmente plana (para $m > 3$).

La noción de holonomía de una conexión refleja la dependencia del transporte paralelo en función de la curva considerada. Dicho de otro modo, la holonomía se obtiene a partir del transporte paralelo a lo largo de las curvas cerradas de la variedad. Este transporte da lugar a un grupo de holonomía, que mide lo que dista la estructura conforme de ser plana. El teorema de Ambrose-Singer demuestra que la holonomía de una conexión en un fibrado principal está determinada por los valores que toma la forma de curvatura de la conexión (véase para más precisión el Teorema 7.2).

En una variedad conforme la noción de holonomía que proponemos responde al siguiente procedimiento. En primer lugar, la propiedad en una curva cerrada de que el desplazamiento paralelo de la esfera tangente deje finalmente el origen en su sitio, no depende de la conexión normal de Cartan considerada. Se tiene además que la diferencial en el origen de este movimiento de la esfera tampoco depende de la conexión que elijamos para el transporte. La diferencial en el origen de este tipo de movimientos da lugar finalmente a un isomorfismo conforme del espacio tangente T_xM. La familia de estos isomorfismos conformes forman un grupo que define *la holonomía de la estructura conforme* en el punto $x \in M$. El grupo asociado de holonomía es en este caso un subgrupo de $CO(m)$. Ocurre entonces que en el álgebra asociada de holonomía se encuentran los valores que toma el tensor de curvatura de Weyl. Podemos pensar en un análogo del Teorema de Ambrose-Singer, y preguntarnos si ocurre también que los valores que toma el tensor de Weyl determinan de hecho el álgebra de holonomía en su totalidad. También nos preguntamos si esta holonomía conforme puede construirse mediante el transporte Fermi-Walker paralelo de las esferas tangentes. Estas cuestiones permanecen aún abiertas, pero consideramos importante su inclusión en esta memoria debido a que en nuestra opinión ofrecen prometedoras perspectivas.

Incluimos en este capítulo algunos resultados parciales sobre esta nueva noción de la holonomía. En particular, demostramos que únicamente cuando la estructura es localmente plana, la holonomía conforme resulta ser trivial. Podemos concluir con ello que la holonomía conforme así definida refleja fielmente la presencia de curvatura en la estructura conforme.

Capítulo 2

Desarrollo preliminar: Teoría de conexiones

En este primer capítulo se hace un repaso a la teoría de conexiones lineales sobre variedades difererenciables; los resultados que aquí se presentan son por tanto más o menos bien conocidos. El propósito del capítulo es asentar los conceptos clave que forman la base de la teoría de conexiones ligadas a una estructura geométrica. Es en este contexo en el que, en capítulos posteriores, se definirá una característica conexión (de Fermi-Walker) asociada a la estructura conforme. Se fijan también aquí la notación y la terminología que se emplearán a lo largo de este trabajo.[1]

En la primera sección se trata inicialmente la noción de conexión a lo largo de una curva parametrizada. Esta puede entenderse como una operación de transporte paralelo de vectores que hace identificables los distintos espacios tangentes sobre la curva. Una conexión lineal en una variedad diferenciable se define entonces como una regla de derivación de campos, que permite asociar a cada curva parametrizada de la variedad un transporte paralelo de vectores. Los orígenes de estas ideas se hallan en los trabajos de Levi-Civita [32], Weyl [52] y Cartan [9], [10], [8].

Tras las definiciones naturales previas, que revelan la naturaleza geométrica de las conexiones, damos paso a la definición de conexión en el fibrado de referencias LM como un subfibrado horizontal $\mathcal{H} \subset TLM$ unívocamente asociado a una 1-forma horizontal $\omega \in \Lambda^1(LM, \mathfrak{gl}(m,\mathbb{R}))$. Esta definición, debida a Ehresmann [14], permite

[1] Asumiremos por ejemplo la siguiente notación estándar:

- $\mathbb{R}^m$ es el espacio Euclíeo m-dimensional, formado por vectores columna $V \in \mathbb{R}^m$.
- $\mathbb{R}^{m*}$ es espacio dual de $\mathbb{R}^m$, formado por vectores fila $\eta \in \mathbb{R}^{m*}$.
- $A^\intercal \in \mathcal{M}_{n\times m}$ indica la traspuesta de una matriz $A \in \mathcal{M}_{m\times n}$.
- El producto usual del espacio Euclídeo $\mathbb{R}^m$ es $\langle U, V\rangle = U^\intercal V \in \mathbb{R}$, $\forall U, V \in \mathbb{R}^m$.

generalizar el concepto de conexión para fibrados arbitrarios, en particular, para los fibrados asociados a la noción de G-estructura que se introduce en la sección 2.

Una G-estructura sobre una variedad se define como una reducción de su fibrado de referencias a un subgrupo cerrado G del grupo lineal $GL(m,\mathbb{R})$ (Chern [12], Stenberg [48]). La noción de G-estructura alcanza a describir un gran número de estructuras clásicas de la geometría diferencial, y en particular, las estructuras conformes sobre variedades. Estas ideas tienen sus orígenes en las propuestas por Klein en su *Erlangen Program*, que concibe la geometría como el estudio de propiedades invariantes bajo la acción de un grupo de Lie.

Una conexión en una G-estructura sobre la variedad es una conexión lineal que en su transporte paralelo preserva necesariamente la estructura. Equivalentemente, puede entenderse como una conexión en el fibrado de la G-estructura, en el sentido de Ehresmann, y va asociada a una 1-forma horizontal ω que toma valores en el álgebra de Lie $\mathfrak{g} = T_eG$ del grupo de estructura G. Esto da lugar a un resultado fundamental (Teorema 2.1): el espacio de conexiones simétricas de una G-estructura está controlado por la primera prolongación $\mathfrak{g}_1 = (\mathbb{R}^{m*} \quad \mathfrak{g}) \cap \left(S^2(\mathbb{R}^{m*}) \quad \mathbb{R}^m\right)$ del álgebra de estructura $\mathfrak{g}$.

Finalmente, se incluye también en este capítulo una última sección en la que se tratan una serie de operadores naturales sobre el espacio de tensores de la variedad. Destacamos especialmente los operadores ligados a la presencia de estructura conforme en la variedad, y a los que haremos frecuentes referencias en el siguiente capítulo.

2.1 Generalidades sobre conexiones lineales

La teoría de conexiones surge para dar respuesta al planteamiento básico de cómo pueden ser considerados paralelos vectores tangentes apoyados sobre puntos distintos de una variedad diferenciable. La definición natural de paralelismo que existe en el espacio Euclídeo $\mathbb{R}^m$, en cualquier otra variedad implica necesariamente la idea de un transporte paralelo de vectores tangentes. Formalmente, una conexión en una variedad se presenta a través de una operación de derivación covariante sobre sus campos tangentes que describe el paralelismo a nivel infinitesimal. El transporte paralelo de vectores se puede realizar entonces por integración a lo largo de cualquier curva de la variedad.

"Una vez conocida la ley de acuerdo con la cual uno pasa de un punto a un punto infinitamente cercano, uno está inmediatamente en posición de realizar el transporte de direcciones paralelas a lo largo de cualquier curva C", Levi-Civita [32].

2.1.1 Conexiones a lo largo de curvas

Sea M una variedad diferenciable m-dimensional, y sea $\gamma : I \ni t \mapsto \gamma(t) \in M$ una curva parametrizada que siempre supondremos regular (esto es: γ es una aplicación diferenciable de un intervalo abierto $I \subset \mathbb{R}^1$ en la variedad M, con la condición de regularidad $\gamma'(t) \neq 0$, $\forall t \in I$).

El espacio de campos a lo largo de la curva parametrizada $\gamma(t)$ se define como

$$\mathfrak{X}(\gamma) = \{V : I \to TM \text{ diferenciable } / \ V(t) \in T_{\gamma(t)}M, \ \forall t \in I\}$$

y forma un espacio vectorial real de dimensión infinita.

Definición 2.1 *Una* conexión a lo largo de la curva $\gamma(t)$ *es un operador* $\mathbb{R}$*-lineal*

$$\nabla/dt \, : \, \mathfrak{X}(\gamma) \longrightarrow \mathfrak{X}(\gamma),$$

que satisface las siguientes condiciones para $V, U \in \mathfrak{X}(\gamma)$, $f \in C^\infty(\gamma)$*:*

(i) $\dfrac{\nabla}{dt}(V+U) = \dfrac{\nabla}{dt}V + \dfrac{\nabla}{dt}U;$

(ii) $\dfrac{\nabla}{dt}(f\,V) = \dfrac{df}{dt}\,V + f\,\dfrac{\nabla}{dt}V.$

Un campo $V(t) \in \mathfrak{X}(\gamma)$ *se dice* campo ∇/dt-paralelo *cuando* $\nabla/dt\,(V) = 0 \in \mathfrak{X}(\gamma)$.

Fijando a lo largo de la curva $\gamma(t)$ una referencia móvil $(V_1(t), ..., V_m(t))$ de campos $V_i \in \mathfrak{X}(\gamma)$, la conexión ∇/dt queda unívocamente determinada por la familia de funciones $\Gamma^i_j(t) \in C^\infty(\gamma)$, tales que

$$\frac{\nabla}{dt}V_j(t) = \sum\nolimits_i \Gamma^i_j(t)\,V_i(t), \ \forall j = 1, ..., m.$$

Por las propiedades **(i)** y **(ii)** en la definición de ∇/dt, la acción de la conexión sobre un campo $U(t) = \sum u^i(t)\,V_i(t) \in \mathfrak{X}(\gamma)$, con $u^i \in C^\infty(\gamma)$, puede expresarse en términos de sus componentes $\Gamma^i_j \in C^\infty(\gamma)$ mediante la relación

$$\frac{\nabla}{dt}U(t) = \sum\nolimits_i \left(\frac{du^i}{dt}(t) + \sum\nolimits_j u^j(t)\,\Gamma^i_j(t)\right) V_i(t). \tag{2.1}$$

Los campos paralelos para la conexión ∇/dt se hallan entonces determinados por el sistema lineal de ecuaciones diferenciales

$$(u^i)'(t) = -\sum\nolimits_j u^j(t)\,\Gamma^i_j(t), \quad i = 1, .., m,$$

que se desprende de la identidad $(2.1) = 0$. En consecuencia, el espacio de campos los ∇/dt-paralelos a lo largo de $\gamma(t)$,

$$\mathfrak{X}_{|\,|}(\gamma) = \{V(t) \in \mathfrak{X}(\gamma) : \nabla/dt\,(V) = 0\},$$

constituye un subespacio vectorial $\mathfrak{X}(\gamma)$ cuya dimensión sobre $\mathbb{R}$ es $m = \dim(M)$.

Observación 2.1 *Al declarar paralelos los campos de una referencia móvil $(V_i(t))$ a lo largo de $t \mapsto \gamma(t)$, queda fijada una única conexión lineal ∇/dt sobre la curva. Dos referencias móviles $(V_i(t))$ y $(U_i(t))$ definen la misma conexión sobre $\gamma(t)$ únicamente cuando difieren en funciones constantes $a_j^i \in \mathbb{R}$ tales que*

$$U_j(t) = \sum_i a_j^i V_i(t), \quad \forall t \in I = Dom(\gamma).$$

La evaluación de los campos ∇/dt-paralelos en un instante t_0 del intervalo de definición de la curva, da lugar a una aplicación

$$\begin{array}{rcl} ev_{t_0} \ : \mathfrak{X}_{|\ |}(\gamma) & \longrightarrow & T_{\gamma(t_0)}M \\ V & \longmapsto & V(t_0) \end{array}$$

con estructura de isomorfismo lineal entre los m-espacios vectoriales $\mathfrak{X}_{|\ |}(\gamma)$ y $T_{\gamma(t_0)}M$. El isomorfismo correspondiente a su aplicación inversa,

$$|\ |_{t_0} := (ev_{t_0})^{-1} : \ T_{\gamma(t_0)}M \ \longrightarrow \ \mathfrak{X}_{|\ |}(\gamma),$$

consiste en asignar a un vector $v \in T_{\gamma(t_0)}M$ el único campo ∇/dt-paralelo $V \in \mathfrak{X}_{|\ |}(\gamma)$ unívocamente determinado por el valor que asume en el instante t_0, $V(t_0) = v$.

Para cada par $t_0, t_1 \in I$, la composición

$$|\ |_{t_0,t_1} := |\ |_{t_1}^{-1} \circ |\ |_{t_0} : \ T_{\gamma(t_0)}M \ \longrightarrow \ T_{\gamma(t_1)}M$$

es un isomorfismo lineal que identifica los distintos espacios tangentes a M.

Se llega de este modo a una operación asociada de *transporte paralelo* sobre la curva, formada por la familia de isomorfismos

$$\left\{ |\ |_{t_0,t_1} : T_{\gamma(t_0)}M \longrightarrow T_{\gamma(t_1)}M \right\}_{t_0,t_1 \in I} \tag{2.2}$$

que verifica las propiedades:

(a) $|\ |_{t_0,t_0} = id : T_{\gamma(t_0)}M \longrightarrow T_{\gamma(t_0)}M$;

(b) $|\ |_{t_1,t_0} = (|\ |_{t_0,t_1})^{-1} : T_{\gamma(t_1)}M \longrightarrow T_{\gamma(t_0)}M$;

(c) $|\ |_{t_0,t_2} = |\ |_{t_1,t_2} \circ |\ |_{t_0,t_1} : T_{\gamma(t_0)}M \longrightarrow T_{\gamma(t_2)}M$.

El operador $\nabla/dt : \mathfrak{X}(\gamma) \to \mathfrak{X}(\gamma)$ puede recuperarse a partir del transporte paralelo (2.2) mediante la siguiente operación natural de derivación:

Lema 2.1 *Dado un campo $U(t) \in \mathfrak{X}(\gamma)$ y $t \in I = Dom(\gamma)$, se verifica la identidad*

$$\frac{\nabla}{dt}U(t) = \lim_{h \to 0} \frac{|\ |_{t+h,t} \circ U(t+h) - U(t)}{h} = \left.\frac{d}{dh}\right|_0 \left\{ |\ |_{t+h,t} \circ U(t+h) \right\}.$$

Demostración. Sea $(V_1(t),...,V_m(t))$ una referencia móvil sobre $\gamma(t)$ de campos ∇/dt-paralelos, de modo que $|\ |_{t_1,t_0}(V_i(t_0)) = V_i(t_1)$ y $\Gamma^i_j = 0$, $\forall i,j$. Un campo cualquiera $U(t) = \sum_i u^i(t)\, V_i(t) \in \mathfrak{X}(\gamma)$ definido por las funciones coordenadas $u^i(t) \in C^\infty(\gamma)$, verifica las identidades:

(i) $|\ |_{t+h,t}(U(t+h)) = \sum_i u^i(t+h)\, V_i(t)$;

(ii) $\dfrac{\nabla}{dt}U(t) = \sum_i \dfrac{du^i}{dt}(t)\, V_i(t)$.

De ellas se deriva la siguiente cadena de igualdades

$$\left.\frac{d}{dh}\right|_0 \left\{|\ |_{t+h,t}(U(t+h))\right\} = \left.\frac{d}{dh}\right|_0 \left\{\sum u^i(t+h)\, V_i(t)\right\} = \sum \frac{du^i}{dt}(t)\, V_i(t) = \frac{\nabla}{dt}U(t)$$

que concluye con la fórmula del enunciado. ■

Observación 2.2 *La equivalencia que la conexión ∇/dt define entre los espacios tangentes a través de isomorfismos $|\ |_{t_0,t_1} : T_{\gamma(t_0)}M \to T_{\gamma(t_1)}M$ de (2.2), se extiende de manera natural a sus espacios duales y productos tensoriales. Así, sobre tensores arbitrarios $K \in \gamma^*(\mathfrak{T}^r_s(M))$ existe igualmente una ley de derivación definida por*

$$\frac{\nabla}{dt}K(t) = \lim_{h\to 0} \frac{|\ |_{t+h,t} \circ K(t+h) - K(t)}{h} \in \left(\bigotimes^s T^*_{\gamma(t)}M\right) \quad \left(\bigotimes^r T_{\gamma(t)}M\right).$$

2.1.2 Conexiones lineales en variedades diferenciables

Sea M una variedad diferenciable m-dimensional cuyo espacio de campos tangentes diferenciables denotamos por

$$\mathfrak{X}(M) = \{X : M \to TM \text{ diferenciable } /\ X(x) \in T_xM, \forall x \in M\}.$$

Definición 2.2 *Una* conexión lineal *en la variedad M es una aplicación $\mathbb{R}$-bilineal, $\nabla : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$, con $\nabla(X,Y) = \nabla_X Y$, tal que para todo $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, $f \in C^\infty(M)$, verifica:*

(i) $\nabla_{fX}Y = f\,\nabla_X Y$

(ii) $\nabla_X(fY) = X(f)\,Y + f\,\nabla_X Y$

El campo $\nabla_X Y \in \mathfrak{X}(M)$ recibe el nombre de ∇-derivada de Y con respecto a X.

Una conexión lineal es un operador localizable. Sobre un abierto $\mathcal{U}$ de M la conexión local inducida, que por abuso mantiene la notación $\nabla : \mathfrak{X}(\mathcal{U}) \times \mathfrak{X}(\mathcal{U}) \to \mathfrak{X}(\mathcal{U})$, está perfectamente definida por la propiedad

$$(\nabla_X Y)(x) = (\nabla_{\widetilde{X}}\widetilde{Y})(x),\ \forall x \in \mathcal{U},$$

para $\widetilde{X}, \widetilde{Y} \in \mathfrak{X}(M)$ campos globales extendiendo al par de campos locales $X, Y \in \mathfrak{X}(\mathcal{U})$. Fijada la carta $(\mathcal{U}, \varphi = \{x^1, ..., x^m\})$, los campos coordenados $E_i = \partial/\partial x^i \in \mathfrak{X}(\mathcal{U})$ definen una referencia del espacio $\mathfrak{X}(\mathcal{U})$, en el sentido de que para todo campo $X \in \mathfrak{X}(\mathcal{U})$ existen funciones $X^i \in C^\infty(\mathcal{U})$ tales que

$$X = \sum\nolimits_i X^i E_i.$$

Por las propiedades (**i**) y (**ii**) de la Definición 2.2 una conexión lineal ∇ queda entonces localmente determinada en $\mathcal{U}$ por su acción sobre la referencia $(E_1, ..., E_m)$. A partir de las funciones $\Gamma_{ij}^k \in C^\infty(\mathcal{U})$ $(i, j, k = 1, ..., m)$ definidas por

$$\nabla_{E_i} E_j = \sum\nolimits_{k=1}^m \Gamma_{ij}^k E_k, \quad \forall i, j = 1, ..., m,$$

que reciben el nombre de *símbolos de Christoffel* de ∇ en (E_i), es posible describir la derivada de $Y = \sum_i Y^i E_i$ con respecto a $X = \sum_i X^i E_i$ $(X^i, Y^i \in C^\infty(\mathcal{U}))$ a través de la identidad:

$$\nabla_X Y = \sum\nolimits_{i,j,k} \left(X^i \frac{\partial Y^k}{\partial x^i} + X^i Y^j \Gamma_{ij}^k \right) E_k. \tag{2.3}$$

Tiene sentido definir así la *∇-derivada de un campo $Y \in \mathfrak{X}(M)$ con respecto al vector $v \in T_xM$*, como el vector $\nabla_v Y \in T_xM$ obtenido por la siguiente identidad

$$\nabla_v Y := (\nabla_X Y)(x) \in T_xM, \ \forall X \in \mathfrak{X}(M) \text{ con } X(x) = v.$$

La conexión lineal ∇ ofrece entonces en cada punto $x \in M$ un operador $\mathbb{R}$-bilineal $\nabla_x : T_xM \times \mathfrak{X}(M) \to T_xM$, con $(\nabla_x)(v, Y) = \nabla_v Y$, que para $Y \in \mathfrak{X}(M)$, $f \in C^\infty(M)$, verifica la siguiente identidad:

$$\nabla_v(fY) = df(v)\, Y + f(x)\, \nabla_v Y.$$

Definición 2.3 *Sea ∇ una conexión lineal en la variedad diferenciable M. Se define* la torsión de ∇ *como el tensor $Tor \in \mathfrak{T}_2^1(M)$ antisimétrico ligado a la fórmula*

$$Tor(X, Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y], \ \forall X, Y \in \mathfrak{X}(M). \tag{2.4}$$

Una conexión ∇ se dice simétrica *cuando su torsión es idénticamente nula.*

Obsérvese que en presencia de una carta local $(\mathcal{U}, \varphi = \{x^1, ..., x^m\})$ con campos coordenados $E_i = \partial/\partial x^i \in \mathfrak{X}(\mathcal{U})$, la torsión de la conexión ∇ con símbolos de Christoffel (Γ_{ij}^k) tiene componentes

$$Tor_{ij} = Tor(E_i, E_j) = \sum\nolimits_{k=1}^m (\Gamma_{ij}^k - \Gamma_{ji}^k)\, E_k.$$

La condición de la conexión ∇ sea simétrica equivale a la simetría $\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$ en sus símbolos de Christoffel.

Transporte paralelo inducido a lo largo de curvas

Sea $\gamma : I \ni t \to \gamma(t) \in M$ una curva parametrizada en la variedad diferenciable M. Una conexión lineal ∇ en M da lugar a una *conexión inducida* ∇^γ/dt a lo largo de la curva $\gamma(t)$, caracterizada por la siguiente condición:

" $\forall Y \in \mathfrak{X}(M)$, el campo asociado $Y \circ \gamma \in \mathfrak{X}(\gamma)$ verifica la relación

$$\frac{\nabla^\gamma}{dt}(Y \circ \gamma)(t_0) = \nabla_{\gamma'(t_0)} Y \in T_{\gamma(t_0)}M, \quad \forall t_0 \in I."$$

Mediante el transporte paralelo inherente a las conexiones sobre curvas parametrizadas, la conexión lineal ∇ tiene asociada una familia de isomorfismos lineales de la forma:

$$\left\{ |\ |_{\gamma,t_0,t_1} : T_{\gamma(t_0)}M \xrightarrow{\sim} T_{\gamma(t_1)}M \ / \ \gamma(t) \text{ curva en } M,\ t_0, t_1 \in Dom(\gamma) \right\}, \tag{2.5}$$

siendo $|\ |_{\gamma,t_0,t_1} = |\ |^{\nabla^\gamma}_{t_0,t_1} : T_{\gamma(t_0)}M \to T_{\gamma(t_1)}M$ el isomorfismo asociado a la conexión ∇^γ/dt inducida sobre la curva $\gamma(t)$. (Véase *estructura de paralelismo* en Poor [37]).

Observación 2.3 *El transporte paralelo que la conexión lineal ∇ induce a lo largo de curvas de M es geométrico en el sentido de que no depende de parametrización tomada sobre la curva. Si $\gamma : I \ni t \mapsto \gamma(t) \in M$ se reparametriza mediante el difeomorfismo $\mathbf{t} : J \ni s \mapsto \mathbf{t}(s) \in I$, sobre la curva reparametrizada $s \mapsto \overline{\gamma}(s) = \gamma \circ \mathbf{t}(s)$ se verifica*

$$|\ |_{\gamma\circ\mathbf{t},s_0,s_1} = |\ |_{\gamma,\mathbf{t}(s_0),\mathbf{t}(s_1)} \ : \ T_{\gamma\circ\mathbf{t}(s_0)}M \ \longrightarrow \ T_{\gamma\circ\mathbf{t}(s_1)}M, \quad \forall s_0, s_1 \in J.$$

Partiendo de la familia de isomorfismos (2.5) asociada a una conexión lineal, es posible recuperar la definición del operador ∇ mediante el siguiente procedimiento geométrico:

$$\nabla_v Y = \left.\frac{\nabla^\gamma}{dt}\right|_{t_0} (Y \circ \gamma) = \lim_{h \to 0} \frac{|\ |_{\gamma,t_0+h,t_0} \circ Y(\gamma(t_0+h)) - Y(\gamma(t_0))}{h}$$

para $t \mapsto \gamma(t) \in M$ curva parametrizada con $\gamma'(t_0) = v \in T_{\gamma(t_0)}M$. Esta identidad es consecuencia del Lema 2.1 y de la definición de conexión inducida a lo largo de una curva.

Extendiendo los isomorfismos lineales de (2.5) a los espacios de tensores, se define también la acción del operador ∇ sobre tensores arbitrarios $K \in \mathfrak{T}^r_s(M)$, a través de la fórmula

$$\nabla_v K = \left.\frac{\nabla^\gamma}{dt}\right|_{t_0} (K \circ \gamma) = \lim_{h \to 0} \frac{|\ |_{\gamma,t_0+h,t_0} \circ K(\gamma(t_0+h)) - K(\gamma(t_0))}{h} \tag{2.6}$$

para $t \mapsto \gamma(t) \in M$ curva parametrizada con $\gamma'(t_0) = v \in T_{\gamma(t_0)}M$.

Variedades paralelizables

Definición 2.4 *Una* paralelización *de la variedad diferenciable M es una referencia global* $(X_1, ..., X_m)$ *de su espacio de campos* $\mathfrak{X}(M)$. *Las variedades que admiten alguna paralelización se dicen* variedades paralelizables.

Si $(X_1, ..., X_m)$ denota una paralelización de la variedad M, para cada par de puntos $x,y \in M$ existe un isomorfismo natural entre sus espacios tangentes

$$|\ |_{x,y} : T_xM \longrightarrow T_yM$$

caracterizado por ser $|\ |_{x,y}(X_i(x)) = X_i(y)$, $\forall i = 1, ..., m$. Existe entonces una única conexión lineal ∇ en M cuyo transporte paralelo asociado coincide con la familia de isomorfismos $|\ |_{\gamma,t_0,t_1} = |\ |_{\gamma(t_0),\gamma(t_1)} : T_{\gamma(t_0)}M \to T_{\gamma(t_1)}M$.

En una variedad diferenciable arbitraria existen obstrucciones de tipo topológico para la existencia de paralelizaciones globales. No ocurre así con las conexiones lineales, cuya existencia está siempre asegurada en cualquier variedad diferenciable. La definición de conexión lineal constituye de este modo una generalización del concepto de paralelización, asociada a una identificación -o paralelismo- entre espacios tangentes que a nivel infinitesimal depende (linealmente) de la dirección tomada.

En el caso particular en que una conexión lineal ∇ en M tenga asociado un transporte paralelo a lo largo de curvas que depende exclusivamente de lo extremos de la curva y no del recorrido de ésta, se dice que la conexión ∇ es globalmente plana y la variedad M resulta ser paralelizable. En efecto, obsérvese que cada referencia lineal de vectores tangentes $(v_1, ..., v_m)$ en $T_{x_0}M$ origina la paralelización $(X_1, ..., X_m)$ de M, caracterizada por ser

$$X_i(x) = |\ |_{\gamma,0,1}(v_i) \in T_xM, \ \forall i = 1, ..., m$$

para cualquier curva $\gamma : [0, 1] \to M$ uniendo los puntos $x_0 = \gamma(0)$ y $x = \gamma(1)$.

La dependencia del transporte paralelo de una conexión lineal respecto a la curva tomada sobre M se refleja mediante su tensor de curvatura $R = [\nabla, \nabla] - \nabla_{[\cdot,\cdot]} \in \mathfrak{T}^1_3(M)$, que será tratado en detalle en el siguiente capítulo (véase (3.23) pág. 53). El tensor de curvatura R es idénticamente nulo únicamente cuando la conexión lineal es localmente plana.

2.1.3 Conexiones en el fibrado de referencias

La estructura vectorial propia del tangente de una variedad diferenciable M va ligada a un fibrado $\pi : LM \to M$ de referencias lineales sobre M. Una referencia lineal $b \in LM_x$ consiste en una m-upla ordenada de vectores tangentes $(v_1, ..., v_m)$ linealmente independientes en el espacio tangente T_xM sobre $x \in M$. Equivalentemente, $b \in LM_x$ se puede entender como un isomorfismo $\mathbb{R}^m \xrightarrow{\sim} T_xM$ definido por la aplicación de coordenadas que lleva la base canónica $(e_1, ..., e_m)$ de $\mathbb{R}^m$ a $(v_1, ..., v_m)$ en T_xM.

El grupo $GL(m, \mathbb{R})$ de los automorfismos del espacio $\mathbb{R}^m$, identificado con el grupo de matrices reales $m \times m$ con determinante no nulo, actúa por la derecha en LM,

$$\begin{array}{rcl} LM \times GL(m,\mathbb{R}) & \longrightarrow & LM \\ (\, b \, , \, g \,) & \longmapsto & b \cdot g \end{array}$$

siendo $b \cdot g = (v_1, ..., v_m) \cdot (g^i_j) = (\sum_j v_j g^j_1, ..., \sum_j v_j g^j_m)$, o equivalentemente, $b \cdot g$ es el isomorfismo $b \circ g : \mathbb{R}^m \xrightarrow{g} \mathbb{R}^m \xrightarrow{b} T_xM$. Esta acción es transitiva y libre sobre las fibras de la proyección $\pi : LM \to M$, y dota al fibrado de referencias lineales de estructura de fibrado $GL(m, \mathbb{R})$-principal sobre M.

Se tienen asociadas las siguientes aplicaciones:

$$\forall b \in LM_x, \quad L_b : GL(m, \mathbb{R}) \to LM_x,, \;\; L_b(g) = b \cdot g;$$

$$\forall g \in GL(m, \mathbb{R}), \quad R_g : LM_x \to LM_x,, \;\; R_b(g) = b \cdot g.$$

Sea $\mathfrak{gl}(m, \mathbb{R})$ el álgebra asociada a $GL(m, \mathbb{R})$, formada por los endomorfismos de $\mathbb{R}^m$, identificables con matrices reales $m \times m$. El *fibrado vertical* de $\pi : LM \to M$,

$$\mathcal{V} = \bigcup_{b \in LM} \mathcal{V}_b,, \quad \mathcal{V}_b = T_b(LM_x) \subset T_bLM,$$

admite una "paralelización" natural proporcionada por $\mathfrak{gl}(m, \mathbb{R})$ mediante el siguiente procedimiento:

$\forall A \in \mathfrak{gl}(m, \mathbb{R})$, el *campo fundamental vertical* $A^\# \in \mathfrak{X}(LM)$ se define como

$$A^\#(b) = \tfrac{d}{dt}\big|_0 \{b \cdot \exp tA\} = (L_b)_* (A) \;\; , \forall b \in LM. \qquad (2.7)$$

La aplicación $\mathfrak{gl}(m, \mathbb{R}) \ni A \mapsto A^\#(b) \in \mathcal{V}_b$ define un isomorfismo lineal entre el álgebra de Lie $\mathfrak{gl}(m, \mathbb{R})$ y el subespacio vertical $\mathcal{V}_b \subset T_bLM$, $\forall b \in B$.

Dada una conexión lineal ∇ en la variedad M, se puede definir en el fibrado de referencias $\pi : LM \to M$ una operación de *elevación horizontal de curvas parametrizadas,* basada en el paralelismo naturalmente asociado a la conexión ∇ (véase (2.5), pág. 15).

Definición 2.5 *Sea* $t \mapsto \gamma(t) \in M$ *curva parametrizada en* M. *La* curva elevación ∇-horizontal de $\gamma(t)$ por $b = (v_1, ..., v_m) \in LM_{\gamma(t_0)}$ *es la curva en* LM *definida por*

$$t \mapsto (\mathbb{P}_\gamma b)\,(t) = |\;\;|_{\gamma,t_0,t} \cdot b = \Big(|\;\;|_{\gamma,t_0,t}\,(v_1), ..., |\;\;|_{\gamma,t_0,t}\,(v_m)\Big) \in LM_{\gamma(t)}.$$

Como consecuencia de la Observación 2.3 anterior, la operación de elevación de curvas preserva los cambios por reparametrización: $(\mathbb{P}_{\gamma\circ\mathbf{t}}b)(s) = (\mathbb{P}_\gamma b)(\mathbf{t}(s))$, para $\mathbf{t} : s \mapsto \mathbf{t}(s)$ difeomorfismo. Este hecho permite hablar de una operación de elevación ∇-horizontal de curvas en el fibrado $\pi : LM \to M$.

El concepto de conexión lineal en una variedad diferenciable M, que en la Definición 2.2 se presentó mediante un operador derivada covariante ∇ sobre el espacio de campos $\mathfrak{X}(M)$, se formaliza en el fibrado de referencias lineales $\pi : LM \to M$ a través de las siguientes definiciones alternativas.

Definición 2.6 *Una conexión lineal en la variedad M viene dada por un* fibrado horizontal $\mathcal{H} = \bigcup_{b\in LM} \mathcal{H}_b$, *subfibrado vectorial de $TLM \to LM$, tal que:*

(i) *$\forall b \in LM$, el subespacio $\mathcal{H}_b$ es suplementario al subespacio vertical $\mathcal{V}_b = \ker(\pi_*)$, y da lugar a la descomposición $T_bLM = \mathcal{H}_b \oplus \mathcal{V}_b$;*

(ii) *$\forall g \in GL(m, \mathbb{R})$, $R_{g*}(\mathcal{H}_b) = \mathcal{H}_{b\cdot g}$.*

El isomorfismo $\pi_*|_{\mathcal{H}_b} : \mathcal{H}_b \to T_xM$ define a través de su inversa un monomorfismo

$$\kappa_b \ : \ T_xM \ \hookrightarrow \ T_bLM, \quad \text{con } \kappa_b(T_{\pi(b)}M) = \mathcal{H}_b,$$

de elevación horizontal infinitesimal *del espacio tangente T_xM en T_bLM, $\forall b \in LM_x$.*

Definición 2.7 *Una conexión lineal en M viene dada por una* 1-forma horizontal $\omega \in \Lambda^1(LM, \mathfrak{gl}(m, \mathbb{R}))$, *cumpliendo las siguientes propiedades:*

(i) *$\forall A \in \mathfrak{gl}(m, \mathbb{R})$, $\omega\left(A^{\#}(b)\right) = A$;*

(ii) *$\forall g \in G$, $R_g^*\omega = Ad_{g^{-1}} \circ \omega$.*

Las distintas definiciones de conexión lineal se relacionan del modo que sigue:

Definición 2.2 $\Rightarrow$ Definición 2.6

Dado el operador $\nabla : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$ de la Definición 2.2, es posible definir las aplicaciones de elevación infinitesimal $\kappa_b : T_{\pi(b)}M \to T_bLM$ mediante la caracterización $\kappa_b(\gamma'(t)) = (\mathbb{P}_\gamma b)'(t)$, siendo $(\mathbb{P}_\gamma b)(t)$ la curva elevación ∇-horizontal de $\gamma(t)$ por $b \in LM$ (Definición 2.5). El fibrado horizontal de la conexión se obtiene entonces como $\mathcal{H}_b = \operatorname{Im}(\kappa_b)$, $\forall b \in LM$.

Definición 2.6 $\Rightarrow$ Definición 2.7

Dado el fibrado horizontal $\mathcal{H}$ de la Definición 2.6, la forma horizontal de la conexión $\omega \in \Lambda^1(LM, \mathfrak{gl}(m,\mathbb{R}))$ se caracteriza por la condición de que $\forall \xi_b \in T_bB$, el elemento $\omega(\xi_b) \in \mathfrak{g}$ es el único verificando

$$\omega(\xi_b)^{\#}(b) = l(\xi_b) \in \mathcal{V}_b$$

en donde $l : T_bLM \to \mathcal{V}_b$ denota el proyector vertical de la descomposición $T_bLM = \mathcal{H}_b \oplus \mathcal{V}_b$.

Definición 2.7 $\Rightarrow$ Definición 2.2

Dada la forma horizontal $\omega \in \Lambda^1(LM, \mathfrak{gl}(m,\mathbb{R}))$ de la Definición 2.7, el operador ∇ de la conexión se recupera por la siguiente relación:

Si $t \mapsto b_t = (V_1, ..., V_m)(t) \in LM$ es una curva parametrizada que se proyecta sobre la curva $t \mapsto \gamma(t) = \pi(b_t) \in M$, entonces,

$$\omega(b'_t) = (\omega^i_j(b'_t)) \in \mathfrak{g} \;\Leftrightarrow\; \frac{\nabla}{dt} V_j(t) = \sum\nolimits_i V_i(t)\, \omega^i_j(b'_t).$$

Se tiene así la relación $\left(\frac{\nabla}{dt} V_1(t), ..., \frac{\nabla}{dt} V_m(t)\right) = (V_1(t), ..., V_m(t)) \cdot (\omega^i_j(b'_t))$ que de manera abreviada expresamos como

$$\frac{\nabla}{dt} b(t) = b(t) \cdot \omega(b'(t)). \tag{2.8}$$

Las definiciones 2.6 y 2.7 para la noción de conexión tienen su origen en Ehresmann [14], que introdujo con estas formalizaciones una definición general de conexión sobre fibrados arbitrarios y demostró que su existencia está siempre asegurada sobre cualquier fibrado. En particular, se define una *conexión principal* en un fibrado G-principal $B \to M$, con G grupo de Lie, como un campo de subfibrados horizontales $\mathcal{H} = \bigcup_{b \in B} \mathcal{H}_b \subset TB$ en las condiciones de la Definición 2.6; y tiene unívocamente asociada una forma horizontal $\omega \in \Lambda^1(B, \mathfrak{g})$ en las condiciones de la Definición 2.7, con valores en el álgebra $\mathfrak{g}$ asociada al grupo de Lie G.

2.2 Conexiones en G-estructuras

La idea de estructura geométrica que Klein propone en su *Erlangen Program* -en parte inspirado por los trabajos de Galois y Lie-, va estrechamente ligada a un grupo fundamental de transformaciones. De tal modo que una propiedad en el espacio es geométrica cuando permanece invariante bajo la acción del grupo.

La presencia de estructura en un espacio vectorial $\mathbb{V}$ distingue una familia de referencias lineales en la que el grupo de estructura actúa transitiva y libremente.

Así, una orientación en $\mathbb{V}$ queda determinada por la familia $\mathcal{L}^+(\mathbb{V})$ de sus referencias positivamente orientadas, sobre la que actúa el grupo lineal $GL^+(m,\mathbb{R})$ de matrices reales con determinante positivo; del mismo modo, una métrica (producto escalar) en $\mathbb{V}$ está caracterizada por la familia $\mathcal{O}(\mathbb{V})$ de sus referencias ortonormales, y el grupo $O(m,\mathbb{R})$ de matrices ortonormales actúa en ella transitiva y libremente.

Sobre un variedad diferenciable se introduce la noción de *G-estructura*, que puede verse como una asignación diferenciable de estructuras geométricas equivalentes sobre cada espacio tangente de la variedad. Formalmente, una G-estructura se define como una reducción del fibrado principal de referencias lineales a un subgrupo lineal $G \subset GL(m,\mathbb{R})$.

La teoría de G-estructuras basa su desarrollo en la combinación de propiedades diferenciales y algebraicas. En particular, un resultado fundamental es el hecho de que el espacio de conexiones lineales en la G-estructura venga directamente controlado por la primera prolongación $\mathfrak{g}_1$ del álgebra de estructura $\mathfrak{g} = T_eG$ (véase apartado **2.2.4**).

2.2.1 Estructura en un espacio vectorial.

Sea $\mathbb{V}$ un espacio vectorial de dimensión m, y sea $GL(\mathbb{V})$ el grupo de Lie de los automorfismos del espacio $\mathbb{V}$. El grupo lineal $GL(m,\mathbb{R})$ actúa transitiva y libremente en el espacio $\mathcal{L}(\mathbb{V})$ de referencias lineales de $\mathbb{V}$, a través de la acción por la derecha

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{L}(\mathbb{V}) \times GL(m,\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{L}(\mathbb{V}) \\ (\ b\ ,\ g\ ) & \longmapsto & b \cdot g = (\sum v_i g_1^i, ..., \sum v_i g_m^i) \end{array}$$

siendo $b = (v_1, ..., v_m) \in \mathcal{L}(\mathbb{V})$ y $g = (g_j^i) \in GL(m,\mathbb{R})$.

Definición 2.8 *Sea G un subgrupo cerrado de $GL(m,\mathbb{R})$. Una* estructura lineal en $\mathbb{V}$ de grupo estructural G *viene determinada por una familia distinguida $\mathcal{B}$ en el espacio de referencias lineales $\mathcal{L}(\mathbb{V})$, tal que, si $b_0 \in \mathcal{B}$ y $g \in GL(m,\mathbb{R})$,*

$$b_0 \cdot g \in \mathcal{B} \ \Leftrightarrow \ g \in G.$$

Fijada la referencia en la estructura $b_0 \in \mathcal{B}$, el par (b_0, G) permite recuperar la totalidad de la familia $\mathcal{B}$ por medio de

$$\mathcal{B} = b_0 \cdot G = \{b_0 \cdot g : g \in G\} \subset \mathcal{L}(\mathbb{V}).$$

Se observa así que una estructura en el espacio vectorial $\mathbb{V}$ es equivalente a un par (b_0, G) formado por su grupo estructural $G \subset GL(m,\mathbb{R})$ y por una referencia $b_0 \in \mathcal{L}(\mathbb{V})$ en la familia de referencias distinguidas $\mathcal{B}$.

Cada subgrupo cerrado G de $GL(m,\mathbb{R})$ da lugar a una estructura $\mathcal{B}_{(G)}$ en el espacio vectorial $\mathbb{R}^m$, al asumir como referencia distinguida la referencia canónica $(e_1, ..., e_m)$ del espacio Euclídeo m-dimensional $\mathbb{R}^m$.

Observación 2.4 *Sea* (b_0, G) *una estructura en el espacio vectorial* $\mathbb{V}$*. Mediante la aplicación de coordenadas* $b_0 : \mathbb{R}^m \to \mathbb{V}$*, que lleva la base canónica de* $\mathbb{R}^m$ *a la base* b_0 *de* $\mathbb{V}$*, el dato* $G \subset GL(m, \mathbb{R})$ *resulta equivalente a fijar*

$$\mathbb{G} = \left\{ b_0 \circ g \circ b_0^{-1} : g \in G \right\} \subset Aut(\mathbb{V}),$$

subgrupo cerrado del grupo de Lie de automorfismos de $\mathbb{V}$*.* $\mathbb{G}$ *constituye el* grupo de transformaciones de la estructura $(\mathbb{V}, \mathcal{B})$.

Un *isomorfismo* entre las estructuras $(\mathbb{V}, \mathcal{B})$ y $(\overline{\mathbb{V}}, \overline{\mathcal{B}})$ viene dado por un isomorfismo lineal $\Phi : \mathbb{V} \to \overline{\mathbb{V}}$, tal que $\Phi \cdot \mathcal{B} = \overline{\mathcal{B}}$. Se tiene entonces un isomorfismo asociado entre los correspondientes grupos $\mathbb{G}$ y $\overline{\mathbb{G}}$, dado por la correspondencia

$$\begin{array}{rccl} \Phi_{\circledast} : & \mathbb{G} & \longrightarrow & \overline{\mathbb{G}} \\ & g & \longmapsto & \Phi_{\circledast}(g) = \Phi \circ g \circ \Phi^{-1} \end{array}$$

Fijada una estructura $\mathcal{B}$ en el espacio $\mathbb{V}$, de grupo estructural $G \subset GL(m, \mathbb{R})$, cada referencia distinguida $b \in \mathcal{B}$ define un isomorfismo entre $(\mathbb{R}^m, \mathcal{B}_{(G)})$ y $(\mathbb{V}, \mathcal{B})$, mediante la aplicación de coordenadas $b : \mathbb{R}^m \to \mathbb{V}$. Se tiene entonces la identidad

$$\mathbb{G} = b_{\circledast} G \subset GL(\mathbb{V}). \tag{2.9}$$

2.2.2 G-estructura en un variedad diferenciable

Una *estructura en una variedad diferenciable* M, m-dimensional, consiste en una asignación diferenciable de una estructura en cada espacio tangente $(T_x M, \mathcal{B}_x)$, $x \in M$, con idéntico grupo estructural $G \subset GL(m, \mathbb{R})$. La condición de diferenciabilidad puede expresarse del siguiente modo:

> $\forall x_0 \in M$, existe $\mathcal{U}_0$ entorno de x_0 en M y $\sigma : \mathcal{U}_0 \to LM$ sección local, tal que es $\mathcal{B}_x = \sigma(x) \cdot G$, $\forall x \in \mathcal{U}_0$.

Obsérvese que $B = \bigcup_{x \in M} \mathcal{B}_x \to M$ define una reducción del fibrado de referencias lineales $LM \to M$, para el grupo G. De esta forma, se recupera la noción clásica de G-estructura en M, que puede definirse en términos de fibrados como sigue:

Definición 2.9 *Sea* G *un subgrupo de Lie de* $GL(m, \mathbb{R})$*. Una* G-estructura en una variedad diferenciable *m-dimensional* M *es una* G*-reducción* B *del fibrado de referencias* $\pi : LM \to M$*. Es decir,* $B \subset LM$ *es tal que* $\pi|_B : B \to M$ *define un fibrado principal cuyo grupo de estructura es* $G \subset GL(m, \mathbb{R})$*.*

Dada la G-estructura $\pi : B \to M$, se define *la forma canónica vertical* asociada $\theta \in \Lambda^1(B, \mathbb{R}^m)$, a través de la siguiente identidad: $\forall b \in B$, $\xi_b \in T_b B$,

$$\theta(\xi_b) = b^{-1}\pi_*(\xi_b) \in \mathbb{R}^m \tag{2.10}$$

Si $\mathcal{V}_b = \ker(\pi_*) \subset T_b B$ denota el subespacio vertical del fibrado $\pi : B \to M$, es

$$\ker(\theta_b) = \mathcal{V}_b.$$

Definición 2.10 *Un* isomorfismo *entre dos G-estructuras $B \to M$ y $\overline{B} \to \overline{M}$ viene dado por un difeomorfismo entre las variedades base $\Phi : M \to \overline{M}$ tal que $\Phi_* \overline{B} = B$. Es decir, tal que*

$$b = (v_1, ..., v_m) \in B_x \;\Leftrightarrow\; \Phi_* b = (\Phi_*(v_1), ..., \Phi_*(v_m)) \in \overline{B}_{\Phi(x)}.$$

Ejemplos de G-estructuras sobre variedades diferenciables

1. *Estructura trivial.*

El grupo $GL(m, \mathbb{R})$ de matrices reales $m \times m$ con determinante no nulo está naturalmente identificado con el grupo de los automorfismos del espacio $\mathbb{R}^m$. Su álgebra de Lie asociada $\mathfrak{gl}(m, \mathbb{R})$ es el álgebra de matrices reales $m \times m$ o el álgebra de endomorfismos de $\mathbb{R}^m$. El fibrado de referencias lineales $LM \to M$ es una $GL(m, \mathbb{R})$-estructura, en correspondencia con la estructura trivial de espacio vectorial del tangente.

2. *Orientación.*

Sea $GL^+(m, \mathbb{R}) = \{A \in GL(m, \mathbb{R}) : \det(A) > 0\}$ el grupo de Lie de los automorfismos positivos con álgebra de Lie asociada $\mathfrak{gl}(m, \mathbb{R})$. Una $GL^+(m, \mathbb{R})$-estructura $L^+M \to M$ es equivalente a una orientación en la variedad diferenciable M. El subfibrado L^+M de LM corresponde a la familia de referencias positivamente orientadas de M.

3. *Forma de volumen.*

Sea $SL(m, \mathbb{R}) = \{A \in GL(m, \mathbb{R}) : \det(A) = 1\}$ el grupo especial lineal cuya álgebra de Lie asociada es $\mathfrak{sl}(m, \mathbb{R}) = \{A \in \mathfrak{gl}(m, \mathbb{R}) : tr(A) = 0\}$. Una forma de volumen en la variedad diferenciable M va ligada una única $SL(m, \mathbb{R})$-estructura sobre M, correspondiente a la distinción de aquellas referencias $b = (v_1, ..., v_m) \in LM$ cuyos vectores determinan un paralelepípedo m-dimensional de volumen 1 en el espacio tangente.

4. *Estructura Riemanniana.*

El grupo ortogonal $O(m) = \{A \in GL(m, \mathbb{R}) : A^\intercal A = I_m\}$ distingue aquellos automorfismos que preservan el producto Euclídeo de $\mathbb{R}^m$, $\langle U, V \rangle = \sum U^i V^i = U^\intercal V$.

Su álgebra de Lie asociada es $\mathfrak{o}(m,\mathbb{R}) = \{A \in \mathfrak{gl}(m,\mathbb{R}) : A^\intercal = -A\}$. Una *variedad Riemanniana* es una variedad diferenciable M dotada de una $O(m)$-estructura con fibrado asociado $O(M) \to M$. Una *métrica Riemanniana* en M se define como un tensor $\mathbf{g} \in \mathfrak{T}^0_2(M)$ que $\forall x \in M$ cumple las condiciones:

(**i**) simétrico: $\mathbf{g}(u,v) = \mathbf{g}(v,u)$, $\forall u, v \in T_xM$;

(**ii**) definido positivo: $\mathbf{g}(u,u) \geq 0$, $\forall u \in T_xM$ y $\mathbf{g}(u,u) = 0$ sólo si $u = 0$.

En cada variedad Riemanniana existe una única métrica $\mathbf{g}$ determinada por la estructura, que se caracteriza por verificar $\forall b \in O(M)$

$$\mathbf{g}(u,v) = \quad b^{-1}(u), b^{-1}(v)\big\rangle\,, \ \forall u, v \in T_{\pi(b)}M.$$

Recíprocamente, dada la métrica Riemanniana $\mathbf{g}$ en M, la familia de sus *referencias ortonormales*,

$$\{b = (v_1, .., v_m) \in LM : \mathbf{g}(v_i, v_j) = \delta_{ij}\}\,,$$

forma un subfibrado $O(M)$ en LM, que define una $O(m)$-estructura sobre M.

5. *Estructura conforme Riemanniana.*

El grupo conforme $CO(m) = \{A \in GL(m,\mathbb{R}) : \exists r \in \mathbb{R},, A^\intercal A = e^{2r} I_m\}$, con álgebra asocida $\mathfrak{co}(m,\mathbb{R}) = \{A \in \mathfrak{gl}(m,\mathbb{R}) : A^\intercal = rI_m - A\}$, distingue aquellos automorfismos de $\mathbb{R}^m$ que preservan su estructura conforme usual, determinada por el producto Euclídeo $\langle U, V\rangle = U^\intercal V$. Una *variedad conforme Riemanniana* es una variedad diferenciable M dotada de una $CO(m)$-estructura cuyo fibrado asociado denotamos por $CO(M) \to M$.

Existe en M una única clase de métricas Riemannianas conformemente equivalentes $\mathcal{C} = \{e^{2f}\mathbf{g} : f \in C^\infty(M)\}$ con la propiedad de que $\forall b \in CO(M)$, $\exists r \in \mathbb{R}$ tal que

$$\mathbf{g}(u,v) = e^{2r} \quad b^{-1}(u), b^{-1}(v)\big\rangle\,, \ \forall u, v \in T_{\pi(b)}M.$$

Recíprocamente, la familia de *referencias conformes* asociadas a una métrica Riemanniana $\mathbf{g}$ en M,

$$\left\{b = (v_1, .., v_m) \in LM : \mathbf{g}(v_i, v_j) = e^{2r}\delta_{ij} \text{ para } r \in \mathbb{R}\right\},$$

define un subfibrado $CO(M)$ de LM que da lugar a una $CO(m)$-estructura en M.

2.2.3 Conexiones de una G-estructura

Sea M una variedad diferenciable m-dimensional dotada de una G-estructura con fibrado de referencias $\pi : B \to M$, y grupo estructural $G \subset GL(m,\mathbb{R})$.

Definición 2.11

(**a**) *Una conexión* ∇/dt *a lo largo de la curva parametrizada* $\gamma : t \in I \to \gamma(t) \in M$ *se dice* compatible con la G-estructura *del ambiente* M *cuando el transporte paralelo asociado está formado por isomorfismos entre las* G*-estructuras vectoriales tangentes*

$$| \ |_{\gamma,t_0,t_1} : \ (T_{\gamma(t_0)}M, B_{\gamma(t_0)}) \xrightarrow{\sim} (T_{\gamma(t_1)}M, B_{\gamma(t_1)})$$

(**b**) *Una conexión lineal* ∇ *en la variedad* M *se dice* compatible con la G-estructura *cuando la conexión inducida a lo largo de cualquier curva parametrizada en* M *es compatible en el sentido de la definición* (**a**) *anterior.*

En otras palabras, una conexión lineal ∇ en M es compatible con la G-estructura $B \to M$ cuando la operación asociada de elevación de curvas al fibrado de referencias LM (Definición 2.5, pág. 17), admite ser restringida al subfibrado B. Esto significa que la elevación ∇-horizontal de una curva $t \mapsto \gamma(t) \in M$ por $b \in B_{\gamma(t_0)}$ es una curva $t \mapsto (\mathbb{P}_\gamma b)\,(t) \in LM$ que mantiene todo su recorrido en el subfibrado B,

$$(\mathbb{P}_\gamma b)\,(t) \in B_{\gamma(t)}, \ \forall t \in Dom(\gamma).$$

Recuérdese de la página 18, las distintas formalizaciones de la noción de conexión lineal a través del fibrado de referencias LM, y la relación que las hace equivalentes. Es claro entonces que la condición de compatibilidad con una G-estructura admite las siguientes caracterizaciones alternativas.

Proposición 2.1 *Las conexiones lineales de una* G*-estructura* $B \to M$ *se caracterizan por cualquiera de las siguientes condiciones:*

(**a**) *El fibrado horizontal de la conexión,* $\mathcal{H} \subset TLM$*, cumple la condición de ser*

$$\mathcal{H}_b \subset T_bB, \ \forall b \in B,$$

y da lugar la descomposición $T_bB = \mathcal{H}_b \oplus \mathcal{V}_b$*, siendo* $\mathcal{V}_b = \ker(\pi_*)$ *el subespacio vertical del fibrado* $\pi : B \to M$*. Existen así funciones de elevación infinitesimal*

$$\kappa_b = (\pi_*|_{\mathcal{H}_b})^{-1} : \ T_{\pi(b)}M \longrightarrow \mathcal{H}_b \subset T_bB.$$

(**b**) *La 1-forma horizontal asociada* $\omega \in \Lambda^1(LM, \mathfrak{gl}(m,\mathbb{R}))$ *verifica la condición*

$$\omega(T_bB) \subset \mathfrak{g}, \ \forall b \in B$$

en donde $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}(m,\mathbb{R})$ *denota el álgebra asociada al grupo de Lie* G*. La restricción a* B *de la forma horizontal de la conexión da lugar a una 1-forma* $\omega \in \Lambda^1(B, \mathfrak{g})$.

Esta Proposición 2.1 afirma en definitiva que una conexión lineal es compatible con la G-estructura $B \to M$, cuando su definición admite ser restringida al subfibrado B del fibrado de referencias lineales LM, y da lugar a una conexión en el G-fibrado principal $B \to M$.

Conexiones simétricas

La torsión de una conexión lineal ∇ en M viene dada por un tensor $Tor \in \mathfrak{T}_2^1(M)$, definido por la fórmula (2.4), página 14. En el caso de una conexión en la G-estructura $B \to M$, su torisión puede describirse también a partir del subfibrado horizontal asociado $\mathcal{H} = \bigcup_{b \in B} \mathcal{H}_b \subset TB$. Los resultados que se ofrecen aquí sin demostración forman parte de la teoría clásica de conexiones y pueden encontrarse por ejemplo en Poor [37] y Kobayashi-Nomizu [24].

Sean h^∇ y l^∇ los respectivos proyectores horizontal y vertical de la descomposición $T_bB = \mathcal{H}_b \oplus \mathcal{V}_b$, y sea $\kappa_b : T_xM \to \mathcal{H}_b \subset T_bB$ la elevación horizontal asociada. Considérese la forma canónica vertical $\theta \in \Lambda^1(B, \mathbb{R}^m)$ del fibrado $B \to M$ definida en (2.10), pág. 22. Entonces,

$$Tor(u_x, v_x) = b \circ d\theta\left(\kappa_b(u_x), \kappa_b(v_x)\right), \quad \forall u_x, v_x \in T_xM, b \in B_x$$

Si denotamos por $T \in \Lambda^2(B, \mathbb{R}^m)$ a la parte ∇-horizontal de la diferencial $d\theta$, es decir $T(\xi_b, \zeta_b) = d\theta(h^\nabla \xi_b, h^\nabla \zeta_b)$, T se anula sobre los vectores verticales de B y verifica

$$b \circ T(\xi_b, \zeta_b) = Tor(\pi_*(\xi_b), \pi_*(\zeta_b)), \quad \forall \xi_b, \zeta_b \in T_bB$$

El tensor $T \in \Lambda^2(B, \mathbb{R}^m)$ se conoce con el nombre de *forma de torsión* de la conexión ∇. Si $\omega \in \Lambda^1(B, \mathfrak{g})$ define la 1-forma horizontal de ∇ (Definición 2.7), entonces,[2]

$$d\theta = -\omega \wedge \theta + T, \tag{2.12}$$

Esta identidad recibe el nombre de *primera ecuación de estructura*.

Una conexión es *simétrica* cuando su forma de torsión $T \in \Lambda^2(B, \mathbb{R}^m)$ es idénticamente nula, o de manera equivalente, cuando

$$d\theta = -\omega \wedge \theta.$$

[2] El producto $\omega \wedge \theta \in \Lambda^2(B, \mathbb{R}^m)$ entre la forma de la conexión ω, tomando valores en el álgebra $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}(m, \mathbb{R})$ de matrices reales $m \times m$, y la forma vertical θ, con valores en el espacio $\mathbb{R}^m$ de vectores columna $m \times 1$, se define a través del producto matricial

$$(\omega \wedge \theta)(\xi_b, \zeta_b) = \omega(\xi_b) \cdot \theta(\zeta_b) - \omega(\zeta_b) \cdot \theta(\xi_b), \; \forall \xi_b, \zeta_b \in T_bB.$$

2.2.4 Primera prolongación

Dos conexiones lineales simétricas ∇ y $\overline{\nabla}$ en la variedad diferenciable M, difieren en una aplicación $\Phi^{\nabla\overline{\nabla}} : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$ definida por

$$\Phi^{\nabla\overline{\nabla}}(X, Y) = \overline{\nabla}_X Y - \nabla_X Y$$

que da lugar a un tensor simétrico $\Phi^{\nabla\overline{\nabla}} \in \mathfrak{T}^1_2(M)$, denominado *tensor diferencia entre las conexiones* ∇ y $\overline{\nabla}$.

Supongemos ahora que se tiene una G-estructura B sobre la variedad diferenciable M. La familia de conexiones lineales admisibles con la G-estructura define una subfamilia de tensores diferencia asociada al grupo de estructura G, o más concretamente, a su álgebra de Lie $\mathfrak{g}$.

Definición 2.12 *Sea* $\mathfrak{g}$ *una subálgebra de Lie de* $\mathfrak{gl}(\mathbb{V})$ *el álgebra de endomorfismos de un espacio vectorial* $\mathbb{V}$. *Llamamos* primera prolongación de $\mathfrak{g}$ *al conjunto* $\mathfrak{g}_1$ *de las formas bilineales simétricas*

$$\Phi : \mathbb{V} \times \mathbb{V} \ni (u, v) \to \Phi(u, v) = \Phi(u)(v) \in \mathbb{V}$$

tales que $\Phi(u) \in \mathfrak{g}$ *para* $u \in \mathbb{V}$. *Un elemento* $\Phi \in \mathfrak{g}_1$ *puede interpretarse también como una aplicación lineal*

$$\Phi : \mathbb{V} \ni u \to \Phi(u) \in \mathfrak{g}$$

que verifica $\Phi(u)(v) = \Phi(v)(u)\ \forall u, v \in \mathbb{V}$. *Así, se tiene* $\mathfrak{g}_1 = \left(S^2(\mathbb{V}^*) \quad \mathbb{V}\right) \cap (\mathbb{V}^* \quad \mathfrak{g})$.

Obsérvese que $\mathfrak{g}_1$ constituye un subespacio del espacio vectorial $\mathbb{V}^* \quad \mathfrak{g}$, y está dotado de una estructura natural de espacio vectorial real.

Observación 2.5 *La primera prolongación* $\mathfrak{g}_1$ *es una noción algebraica que va ligada a la cohomología de Spencer de* $\mathfrak{g}$ *como subálgebra de* $\mathfrak{gl}(m, \mathbb{R})$. *Pueden consultarse a este respecto Guillemin [21], o Sánchez* [41] VI.1.2.

Un isomorfismo $\varphi : (\mathbb{V}, \mathbb{G}) \to (\overline{\mathbb{V}}, \overline{\mathbb{G}})$ entre G-estructuras de espacios vectoriales da lugar a un isomorfismo natural $\varphi_{\circledast} : \mathfrak{g}_1 \to \overline{\mathfrak{g}}_1$ entre las primeras prolongaciones de sus álgebras de Lie $\mathfrak{g} = T_e\mathbb{G}$ y $\overline{\mathfrak{g}} = T_e\overline{\mathbb{G}}$. En particular, dada una G-estructura $B \to M$, cada referencia $b \in B_x$ proporciona, mediante la aplicación de coordenadas $b : \mathbb{R} \to T_xM$, un isomorfismo lineal $b_{\circledast} : \mathfrak{g}_1 \to (\mathfrak{g}_x)_1$ definido por la correspondencia

$$\mathfrak{g}_1 \ni \ \Phi \ \longmapsto \ b_{\circledast}\Phi \ := \ b \circ \Phi \circ \left(b^{-1}, b^{-1}\right) \ \in (\mathfrak{g}_x)_1 \tag{2.13}$$

en donde $\mathfrak{g}_x$ denota el álgebra de Lie asociado al grupo de transformaciones G_x de la estructura (T_xM, B_x).

Teorema 2.1 *Sea ∇ una conexión lineal y simétrica de la G-estructura $B \to M$, y sea $\Phi \in \mathfrak{T}^1_2(M)$ un tensor (simétrico) tal que $\Phi_x \in (\mathfrak{g}_x)_1$, $\forall x \in M$. Entonces, la conexión $\overline{\nabla}$ definida en M a través de la identidad*

$$\overline{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + \Phi(X,Y), \quad \forall X, Y \in \mathfrak{X}(M) \tag{2.14}$$

es una conexión de B. Además, todas las conexiones simétricas de B pueden obtenerse por este procedimiento.

Demostración. El operador $\overline{\nabla}$ dado por la ecuación (2.14) del enunciado define una conexión lineal y simétrica en M, veamos que es además compatible con la G-estructura. Para ello bastará con demostrar que la 1-forma horizontal asociada $\overline{\varpi} \in \Lambda^1(LM, \mathfrak{gl}(m,\mathbb{R}))$ verifica $\overline{\varpi}(T_bB) \subset \mathfrak{g}$, $\forall b \in B$ (véase Proposición 2.1).

Dado $\xi_b \in T_bB$, sea $t \mapsto b(t) \in B$ una curva parametizada con $b'(0) = \xi_b$, y sea $t \mapsto \gamma(t) = \pi \circ \gamma(t) \in M$ la curva proyección con $\gamma'(0) = v = \pi_*(\xi_b) \in T_xM$. Haciendo uso de la relación (2.8) de la página 19, se observa que

$$\begin{aligned} b \cdot \overline{\varpi}(\xi_b) &= b \cdot \overline{\varpi}(b'(0)) = \frac{\overline{\nabla}}{dt}\Big|_0 b(t) = \overline{\nabla}_v b(t) = \nabla_v b(t) + \Phi(v) \circ b \\ &= \frac{\nabla}{dt}\Big|_0 b(t) + \Phi(v) \circ b = b \cdot \omega(\xi_b) + \Phi(v) \circ b \end{aligned}$$

$$\overline{\varpi}(\xi_b) = \omega(\xi_b) + b^{-1} \circ \Phi(v) \circ b \tag{2.15}$$

Por hipótesis el tensor simétrico Φ es tal que $\Phi(v) \in \mathfrak{g}_x$ y al ser $b \in B$ una referencia de la G-estructura se tiene que $b^{-1} \circ \Phi(v) \circ b = (b^{-1})_{\circledast}\, \Phi(v) \in \mathfrak{g}$. Por otra parte, dado que ∇ es una conexión de $B \to M$ se tiene también que $\omega(\xi_b) \in \omega(T_bB) = \mathfrak{g}$. Se conluye entonces de la identidad (2.15) que $\overline{\varpi}(\xi_b) = \omega(\xi_b) + b^{-1} \circ \Phi(v) \circ b \in \mathfrak{g}$.

Recíprocamente, sea $\overline{\nabla}$ conexión de la G-estructura $B \to M$ que difiere de ∇ por un tensor diferencia $\Phi = \overline{\nabla} - \nabla \in \mathfrak{T}^1_2(M)$. Para que Φ esté en las condiciones del enunciado debe ser $\Phi_x \in (\mathfrak{g}_x)_1 = \big(S^2(T^*_xM) \quad T_xM\big) \cap (T^*_xM \quad \mathfrak{g}_x)$, $\forall x \in M$. Dado que la condición de simetría es automática para Φ_x, basta demostrar que $\forall u \in T_xM$ se cumple $\Phi(u) \in \mathfrak{g}_x$, o equivalentemente, $b^{-1} \circ \Phi(u) \circ b \in \mathfrak{g}$ para $b \in B_x$.

Haciendo uso de la ecuación (2.15) anterior, obtenemos la relación

$$b^{-1} \circ \Phi(u) \circ b = \overline{\varpi}(\xi_b) - \omega(\xi_b), \quad \forall \xi_b \in T_bM \text{ con } \pi_*(\xi_b) = u \in T_xM.$$

Dado que $\overline{\varpi}$ y ω son las formas horizontales de dos conexiones en la G-estructura B, es $\overline{\varpi}(\xi_b), \omega(\xi_b) \in \mathfrak{g}$ para $\xi_b \in T_bM$. Se concluye entonces que $b^{-1} \circ \Phi(u) \circ b = \overline{\varpi}(\xi_b) - \omega(\xi_b) \in \mathfrak{g}$. ■

Corolario 2.1 *Sean ∇ y $\overline{\nabla}$ conexiones simétricas en la G-estructura $B \to M$. Entonces, existe una aplicación diferenciable $\phi : B \to \mathfrak{g}_1$ con la propiedad $\phi_{b\cdot g} = g_{\circledast}^{-1}\phi_b$, y tal que controla la diferencia entre las conexiones ∇ y $\overline{\nabla}$ en el siguiente sentido:*

(**i**) $\overline{\omega}(\xi_b) - \omega(\xi_b) = \phi_b(\theta(\xi_b)), \forall \xi_b \in T_bB$;

(**ii**) $\kappa_b^{\overline{\nabla}}(v) - \kappa_b^{\nabla}(v) = -\left(\phi_b(b^{-1}(v))\right)^{\#}(b), \forall v \in T_xM, \forall b \in B_x$.

Demostración. Sea $\Phi = \overline{\nabla} - \nabla \in \mathfrak{T}_2^1(M)$ el tensor diferencia entre las conexiones. Se define entonces la aplicación diferenciable $\phi : B \to \mathfrak{g}_1$, $b \mapsto \phi_b = b_{\circledast}^{-1}\Phi_x = b^{-1} \circ \Phi_x \circ (b, b)$ para $x = \pi(b) \in M$.

La identidad (**i**) es consecuencia directa de la relación entre la forma horizontal y la derivada covariante asociadas a una conexión (véase (2.8), pág. 19). Basta tomar una curva $t \mapsto b(t) \in B$ con $b'(0) = \xi_b \in T_bB$, y si $\gamma(t) = \pi \circ b(t)$ denota su proyección en M, entonces,

$$\begin{aligned}(\overline{\omega} - \omega)(\xi_b) = (\overline{\omega} - \omega)(b'(0)) = &\ b^{-1}\left(\frac{\overline{\nabla}}{dt}\Big|_0 b(t) - \frac{\nabla}{dt}\Big|_0 b(t)\right) \\ = &\ b^{-1} \circ (\Phi(\gamma'(0)) \circ b) = b^{-1} \circ \Phi(b \circ \theta(\xi_b)) \circ b = \phi_b(\theta(\xi_b)).\end{aligned}$$

La segunda identidad (**ii**) se deduce trivialmente de (**i**). Para cada $v \in T_xM$ y $b \in B_x$, los respectivos vectores elevación $\kappa_b^{\overline{\nabla}}(v), \kappa_b^{\nabla}(v) \in T_bB$ difieren en un elemento del fibrado vertical $\mathcal{V}_b$, en correspondencia con un único $A \in \mathfrak{g}$ tal que $\kappa_b^{\overline{\nabla}}(v) - \kappa_b^{\nabla}(v) = A^{\#}(b)$. Por otra parte,

$$\begin{aligned}0 &= \overline{\omega}(\kappa_b^{\overline{\nabla}}(v)) = \overline{\omega}(\kappa_b^{\nabla}(v) + A^{\#}(b)) = \overline{\omega}(\kappa_b^{\nabla}(v)) + A \\ &= \omega(\kappa_b^{\nabla}(v)) + \phi_b(\theta(\kappa_b^{\nabla}(v))) + A = \phi_b\left(b^{-1}(v)\right) + A\end{aligned}$$

de lo que se concluye que debe ser $A = -\phi_b\left(b^{-1}(v)\right) \in \mathfrak{g}$, y finalmente se obtiene la relación $\kappa_b^{\overline{\nabla}}(v) - \kappa_b^{\nabla}(v) = -\left(\phi_b(b^{-1}(v))\right)^{\#}(b)$. ■

El Teorema 2.1 hace referencia a las conexiones de una G-estructura que son símetricas, dado que en ellas centraremos en adelante nuestro interés. No obstante, la misma demostración sirve para ofrecer un resultado más general para conexiones con una torsión no necesariamente nula. Si inicialmente fijamos una conexión ∇ en la G-estructura B cuya torsión viene definida por un tensor $T \in \mathfrak{T}_2^1(M)$, entonces, cualquier otra conexión $\overline{\nabla}$ en la G-estructura con la misma torsión T difiere en un tensor diferencia $\Phi = \overline{\nabla} - \nabla$ que continúa siendo igualmente simétrico. De este modo, si en el enunciado del Teorema 2.1 se sustituye "conexión simétrica" por "conexión con torsión T" se obtiene una caracterización de todas aquellas conexiones lineales en la G-estructura $B \to M$ con idéntica torsión $T \in \mathfrak{T}_2^1(M)$.

Conexión de Levi-Civita en una variedad Riemanniana

Una variedad Riemanniana m-dimensional viene definida por una $O(m)$-estructura sobre una variedad diferenciable M, cuyo fibrado $O(M) \to M$ coincide con la familia de referencias ortonormales de una única métrica Riemanniana $\mathbf{g}$ en M.

Lema 2.2 *La primera prolongación del álgebra de Lie $\mathfrak{o}(\mathbb{V})$ asociada una estructura métrica $O(\mathbb{V})$ de un espacio vectorial $\mathbb{V}$, es $\mathfrak{o}(\mathbb{V})_1 = 0$.*

Demostración. Fijemos $b = (v_1, ..., v_m)$ una base ortonormal del espacio $\mathbb{V}$. Un elemento Φ de la primera prolongación $\mathfrak{o}(\mathbb{V})_1 \subset \mathbb{V}^* \quad \mathbb{V}^* \quad \mathbb{V}$ se corresponde a través de $b_{\circledast}$ con un $(t_{ij}^k) \in \mathfrak{o}(m)_1 \subset \mathbb{R}^{m*} \quad \mathbb{R}^{m*} \quad \mathbb{R}^m$, tal que $\Phi(v_i, v_j) = \sum_k t_{ij}^k v_k$. Por definición, debe verificarse la condición de simetría $\Phi(v_i, v_j) = \Phi(v_i, v_j)$, de modo que $t_{ij}^k = t_{ji}^k$. Además, al ser para un i fijo $(t_{ij}^k)_{j,k}$ una matriz en $\mathfrak{o}(m)$ se tiene también que $t_{ij}^k = -t_{ik}^j$. Entonces, $\forall i, j, k$

$$t_{ij}^k = t_{ji}^k = -t_{jk}^i = -t_{kj}^i = t_{ki}^j = t_{ik}^j = -t_{ij}^k \quad \Leftrightarrow \quad t_{ij}^k = 0$$

Se tiene así que $(t_{ij}^k) = 0$ y por lo tanto $\Phi = b_{\circledast}(t_{ij}^k) = 0 \in \mathfrak{o}(\mathbb{V})_1$. Concluimos entonces que $\mathfrak{o}(\mathbb{V})_1 = \{0\}$. ■

El Teorema 2.1 permite relacionar la primera prolongación del álgebra $\mathfrak{o}(m)$ con el espacio de conexiones simétricas de la una $O(m)$-estructura. El resultado que acabamos de probar indica que en una variedad Riemanniana existe una única conexión simétrica compatible con su estructura métrica. Esta conexión se conoce como la *conexión de Levi-Civita* de la variedad Riemanniana y define una herramienta fundamental para el desarrollo de la geometría Riemanniana.

A partir de la métrica Riemanniana $\mathbf{g}$ en la variedad M, la conexión de Levi-Civita ∇ se describe como la única que verifica simultáneamente las condiciones:

(**i**) simetría: $\nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y] = 0$;

(**ii**) compatibilidad con la métrica $\mathbf{g}$ ($\Leftrightarrow \nabla\mathbf{g} = 0$):

$$0 = (\nabla_X \mathbf{g})(Y, Z) = X(\mathbf{g}(Y, Z)) - \mathbf{g}(\nabla_X Y, Z) - \mathbf{g}(Y, \nabla_X Z).$$

De la combinación de estas condiciones se deduce la fórmula de Koszul

$$\begin{aligned} 2\mathbf{g}(\nabla_X Y, Z) = {} & X(\mathbf{g}(Y, Z)) + Y(\mathbf{g}(X, Z)) - Z(\mathbf{g}(X, Y)) \\ & + \mathbf{g}([X, Y], Z) - \mathbf{g}([Y, Z], X) + \mathbf{g}([Z, X], Y) \end{aligned} \tag{2.16}$$

En la carta local $\big(\mathcal{U}, \varphi = (x^1, ..., x^m)\big)$, la métrica $\mathbf{g}$ tiene asociadas unas componentes $\mathbf{g}_{ij} = \mathbf{g}(\partial/\partial x^i, \partial/\partial x^j) \in C^\infty(\mathcal{U})$. Asumiendo la notación $(\mathbf{g}^{ij}) = (\mathbf{g}_{ij})^{-1}$ para la matriz inversa, se tiene que la fórmula de Koszul determina los símbolos de Christoffel Γ_{ij}^k de la conexión de Levi-Civita ∇, asociados a la carta $(\mathcal{U},\varphi)$:

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2}\mathbf{g}^{kh}\left(\frac{\partial \mathbf{g}_{jh}}{\partial x^i}+\frac{\partial \mathbf{g}_{ih}}{\partial x^j}-\frac{\partial \mathbf{g}_{ij}}{\partial x^h}\right).$$

2.3 Operaciones sobre el espacio de tensores

Una variedad diferenciable M admite sobre su espacio de tensores $\mathfrak{T}(M)$ una serie de operadores naturales como son, entre otros, el producto tensorial , la contracción de índices $\mathfrak{C}$, la diferencial exterior d sobre el espacio de formas $\Lambda(M)$, la derivada de Lie $\mathcal{L}$,... Estos operadores forman parte de la geometría diferencial clásica y se tratan en numerosos trabajos, sirva como ejemplo el libro de Gallot-Hulin-Lafontaine [19]. En el posterior desarrollo haremos uso de algunas de estas operaciones clásicas, así como de otros operadores que basan su definición en la presencia de una estructura adicional sobre la variedad.

Recuérdese que en una variedad diferenciable general M, la operación de contracción de índices se define para $k,l \geq 1$ como un operador

$$\mathfrak{C}_l^k : \mathfrak{T}_s^r(M) \to \mathfrak{T}_{s-1}^{r-1}(M)$$

bien definido para todo par (r,s) con $r \geq k$ y $s \geq l$. En términos de componentes, la contracción de $K \in \mathfrak{T}_s^r(M)$ es el tensor $\mathfrak{C}_l^k K \in \mathfrak{T}_{s-1}^{r-1}(M)$ obtenido mediante la siguiente expresión entre componentes

$$(\mathfrak{C}_l^k K)_{j_1,\dots,j_{s-1}}^{i_1,\dots,i_{r-1}} = \sum_h K_{j_1,\dots,j_{l-1},h,j_l,\dots,j_{s-1}}^{i_1,\dots,i_{k-1},h,i_k,\dots,i_{r-1}}$$

Obsérvese que en el espacio de tensores de tipo $\mathfrak{T}_s^1(M)$ con $s \geq 1$, el tensor contracción $\mathfrak{C}_l^1 K \in \mathfrak{T}_{s-1}^0(M)$ se define también a través de la siguiente traza

$$(\mathfrak{C}_l^1 K)(X_1,\dots,X_{s-1}) = tr\{Y \mapsto K(X_1,\dots,X_{l-1},Y,\dots,X_{s-1})\},\quad X_{s-1} \in \mathfrak{X}(M).$$

La presencia de estructura adicional sobre la variedad diferenciable permite definir nuevos operadores sobre su espacio de tensores. Mostramos a continuación los casos particulares en que sobre la variedad M se tiene una estructura métrica Riemanniana, y una estructura conforme Riemanniana.

2.3.1 Operadores asociados a una métrica

Una variedad Riemanniana tiene asociado un tensor métrica $\mathbf{g} \in \mathfrak{T}_2^0(M)$ que da lugar a las operaciones de subida y bajada de índices en el espacio de tensores. Consideramos en particular el siguiente par de operaciones bien conocidas, inversas la una de la otra, y cuya notación mantenemos a lo largo de este trabajo:

1. Subida del último sub-índice, para $r \geq 0$, $s \geq 1$:

$$\uparrow_{\mathbf{g}}\colon \mathfrak{T}^r_s(M) \to \mathfrak{T}^{r+1}_{s-1}(M).$$

   En términos de componentes, el tensor $\uparrow_{\mathbf{g}}(K) = K_{\uparrow\mathbf{g}}$ se caracteriza por

$$(K_{\uparrow\mathbf{g}})^{1,\ldots,r,r+1}_{1,\ldots,s-1} = \sum\nolimits_i K^{1,\ldots,r}_{1,\ldots,s-1,i}\mathbf{g}^{i,r+1}.$$

   Obsérvese que para $f \in C^\infty(M) = \mathfrak{T}^0_0(M)$ se tiene $(df)_{\uparrow\mathbf{g}} = grad_{\mathbf{g}}f \in \mathfrak{T}^2_0(M)$.

2. Bajada del último super-índice, para $r \geq 1$, $s \geq 0$:

$$\downarrow_{\mathbf{g}}\colon \mathfrak{T}^r_s(M) \to \mathfrak{T}^{r-1}_{s+1}(M).$$

   En términos de componentes, el tensor $\downarrow_{\mathbf{g}}(K) = K_{\downarrow\mathbf{g}}$ está caracterizado por:

$$(K_{\downarrow\mathbf{g}})^{1,\ldots,r-1}_{1,\ldots,s,s+1} = \sum\nolimits_r K^{1,\ldots,r-1,i}_{1,\ldots,s}\mathbf{g}_{i,s+1}.$$

   Obsérvese que para $K \in \mathfrak{T}^r_s(M)$, es $K_{\downarrow\mathbf{g}} = \mathfrak{C}^r_{s+1}(K \quad \mathbf{g}) \in \mathfrak{T}^{r-1}_{s+1}(M)$.

2.3.2 Operadores con carácter conforme

El caso en que la variedad M está dotada de una estructura conforme $CO(M) \to M$ será de especial interés en este trabajo. Existe una única clase $\mathcal{C} = \{e^{2f}\mathbf{g} : f \in C^\infty(M)\}$ de métricas conformemente equivalentes asociadas a la estructura conforme de la variedad M, y es por medio de esta familia de métricas que se hace posible la introducción de nuevos operadores en $\mathfrak{T}(M)$ propios de la estructura conforme.

En primer lugar, para $r \geq 0$, $s \geq 1$, se define el operador

$$\begin{aligned} \tilde{} \ : \mathfrak{T}^r_s(M) &\longrightarrow \mathfrak{T}^{r+1}_{s+1}(M) \\ K &\longmapsto \tilde{}K = (K_{\uparrow\mathbf{g}}) \quad \mathbf{g} \end{aligned} \tag{2.17}$$

siendo $\mathbf{g}$ una métricaconforme en $\mathcal{C}$, y $K_{\uparrow\mathbf{g}} \in \mathfrak{T}^{r+1}_{s-1}(M)$ el tensor asociado a la subida de índices $\uparrow\mathbf{g}$. Obsérvse que para un cambio conforme de la métrica , $\overline{\mathbf{g}} = e^{2f}\mathbf{g}$, es

$$(K_{\uparrow\overline{\mathbf{g}}}) \quad \overline{\mathbf{g}} = (e^{-2f}K_{\uparrow\mathbf{g}}) \quad e^{2f}\mathbf{g} = (K_{\uparrow\mathbf{g}}) \quad \mathbf{g}.$$

El operador $\tilde{}$ está perfectamente definido por la estructura conforme $\mathcal{C}$, y la definición (2.17) es independiente de la métrica conforme que se tome.

Para una función diferenciable $f \in C^\infty(M) = \mathfrak{T}^0_0(M)$, se observa que el tensor conforme $\tilde{}\,(df) \in \mathfrak{T}^1_2(M)$ actúa del siguiente modo:

$$\tilde{}\,(df)\,(X,Y) = (grad_{\mathbf{g}}f \quad \mathbf{g})\,(X,Y) = \mathbf{g}(X,Y)grad_{\mathbf{g}}f \quad \forall X,Y \in \mathfrak{X}(M) \tag{2.18}$$

Observación 2.6 *La composición* $\mathfrak{C}_s^1 \circ \,\widetilde{}\, : \mathfrak{T}_s^0(M) \to \mathfrak{T}_s^0(M)$ *da lugar al operador identidad en* $\mathfrak{T}_s^0(M)$*. En efecto,* $\forall K \in \mathfrak{T}_s^0(M)$ *se da la identidad entre componentes:*

$$\left(\mathfrak{C}_s^1(\widetilde{\ }K)\right)_{j_1,\ldots,j_s} = \left(\mathfrak{C}_s^1\,(K_{\uparrow\mathbf{g}} \quad \mathbf{g})\right)_{j_1,\ldots,j_s} = K_{j_1,\ldots,j_{s-1},h}\,\mathbf{g}^{hi}\,\mathbf{g}_{ij_s} = K_{j_1,\ldots,j_{s-1},j_s}\ .$$

El mismo razonamiento demuestra la identidad $\mathfrak{C}_{s+1}^1 \circ \,\widetilde{}\, = id : \mathfrak{T}_s^0(M) \to \mathfrak{T}_s^0(M)$.

Nos interesa también asociar a la estructura conforme el siguiente operador,

$$\begin{array}{rccl} \widehat{\ } \ : \mathfrak{T}_s^r(M) & \longrightarrow & \mathfrak{T}_s^r(M) & \qquad (s \geq 1). \\ K & \longmapsto & \widehat{\ }K = \mathfrak{C}_1^1(\widetilde{\ }K) & \end{array} \tag{2.19}$$

Destacamos aquí las siguientes propiedades del operador $\widehat{\ }$, que serán utilizadas en capítulos posteriores:

(**a**) Para $\mathbf{g}$ métrica conforme en $\mathcal{C}$, es $\widehat{\ }\mathbf{g} = m\mathbf{g}$.

(**b**) Para $K \in \mathfrak{T}_2^0(M)$ y $\mathbf{g} \in \mathcal{C}$ métrica conforme,

$$\widehat{\ }K = \mathfrak{C}_1^1\,(\widetilde{\ }K) = \mathfrak{C}_1^1\,(K_{\uparrow\mathbf{g}} \quad \mathbf{g}) = \mathfrak{C}_1^1(K_{\uparrow\mathbf{g}}) \quad \mathbf{g} = \mathfrak{C}_1^1(K_{\uparrow\mathbf{g}})\,\mathbf{g}$$

siendo $K_{\uparrow\mathbf{g}} \in \mathfrak{T}_1^1(M)$ y $\mathfrak{C}_1^1(K_{\uparrow\mathbf{g}}) = tr\{K_{\uparrow\mathbf{g}}\} \in C^\infty(M)$.

(**c**) Sobre el espacio $\mathfrak{T}_2^0(M)$ se cumple la identidad $(\widehat{\ })^2 = m\,\widehat{\ } : \mathfrak{T}_2^0(M) \to \mathfrak{T}_2^0(M)$, como consecuencia directa de la siguiente cadena de igualdades

$$\begin{aligned} (\widehat{\ })^2\,(K) &= \widehat{\ }\left(\mathfrak{C}_1^1(K_{\uparrow\mathbf{g}})\,\mathbf{g}\right) = \mathfrak{C}_1^1(K_{\uparrow\mathbf{g}})\,\widehat{\ }\mathbf{g} \\ &= \left(\mathfrak{C}_1^1(K_{\uparrow\mathbf{g}})\right)\ m\mathbf{g} = m\left(\mathfrak{C}_1^1(K_{\uparrow\mathbf{g}})\,\mathbf{g}\right) = m(\widehat{\ }K). \end{aligned}$$

Capítulo 3

Variedades conformes. Invariantes

Esta memoria centra su interés en el contexto de las variedades conformes Riemannianas, que se identifican con las G-estructuras asociadas al grupo lineal conforme $G = CO(m) \subset GL(m, \mathbb{R})$.

En una primera sección se estudia el espacio de las conexiones lineales y simétricas de una $CO(m)$-estructura. Por el Teorema 2.1 sabemos que está directamente relacionado con la primera prolongación del álgebra. Veremos que en el caso conforme es $\mathfrak{co}(m)_1 \cong \mathbb{R}^{m*}$ (Proposición 3.1), y una $CO(m)$-estructura $CO(M) \to M$ admite toda una familia de conexiones lineales conformes,

$$CCO(M) = \left\{ \overline{\nabla} = \nabla + \Phi_\alpha : \alpha \in \Lambda^1(M) \right\},$$

en correspondencia con el espacio $\Lambda^1(M)$ de 1-formas de M (Teorema 3.1).

Sin embargo, es posible distinguir una conexión canónica sobre las curvas parametrizadas de una variedad conforme. Esta conexión, que denominamos *de Fermi-Walker* (Definición 3.1) basa su definición en la introducción de un *criterio de adaptación a la curva* en la familia de conexiones simétricas y conformes. Una conexión ∇ está adaptada a la curva en el instante t_0 si tiene como geodésica a la restricción de la curva en un entorno de t_0. Demostramos que la existencia de conexiones adaptadas está siempre asegurada (Proposición 3.2). Además, este criterio resulta determinante: toda conexión conforme adaptada induce sobre la curva una misma conexión (Proposición 3.3). Por definición, ésta coincide con la conexión de Fermi-Walker. (Véase también Lafuente-Salvador [28] y Salvador [39]).

En la sección 2 repasamos brevemente el concepto de invariante geométrico, estrechamente ligado a la noción de G-estructura. En este sentido, mostramos que la conexión de Fermi-Walker define un invariante en la geometría conforme Riemanniana que comparte propiedades características de la conexión de Levi-Civita en la geometría Riemanniana.

En la última sección se tratan los invariantes conformes a nivel de curvatura. Damos un rápido repaso a las nociones de curvatura ligadas a una conexión lineal general (apartado **3.3.1**), a una conexión métrica Riemanniana, y a una conexión conforme (apartado **3.3.2**). Destacamos en este último, la introducción de algunas novedosas definiciones asociadas a la curvatura de las conexiones conformes. En el apartado **3.3.3** se trata el tensor de curvatura de Weyl $W \in \mathfrak{T}_3^1(M)$ (Weyl [53]), que da lugar a un conocido invariante conforme. Damos aquí una definición más general que permite definir W a partir de cualquier conexión conforme, no necesariamente métrica.

Finalmente (apartado **3.3.4**), se muestra que el criterio de adaptación a la curva permite definir un nuevo invariante conforme a partir del tensor de Schouten L de las conexiones conformes. Sobre una curva parametrizada γ la estructura conforme ambiente determina un tensor $L^\gamma \in \Lambda^1(\gamma)$ que denominamos *tensor conforme de Schouten*.

3.1 Conexiones asociadas a una estructura conforme

Las conexiones lineales y simétricas coherentes con la estructura de una variedad conforme forman una amplia familia de conexiones. Con el propósito de definir un desplazamiento natural y único en las variedades conformes, se introduce un criterio de adaptación más restrictivo que el usual para G-estructuras. Con ello logramos distinguir a lo largo de cada curva parametrizada un único transporte paralelo preferente, doblemente adaptado: a la geometría del ambiente conforme, y en cierto sentido también adaptado a la geometría de la curva. Se llega de este modo a la definición del transporte conforme de *Fermi-Walker* sobre curvas parametrizadas, que debe su nombre a los precedentes que hallamos en la Teoría clásica de la Relatividad.

3.1.1 $CO(m)$-estructuras: variedades conformes Riemannianas

La teoría de G-estructuras se ocupa de las variedades conformes Riemannianas cuandoel grupo de estructura es $G = CO(m)$, el grupo lineal conforme, que puede entenderse como el grupo de matrices reales $m \times m$,

$$CO(m) = \{A \in GL(m, \mathbb{R}) : \exists r \in \mathbb{R} \text{ con } A^{\intercal} A = e^{2r} I_m\}.$$

O equivalentemente, como el grupo de automorfismos de $\mathbb{R}^m$ que preservan su estructura conforme lineal canónica, ligada al producto Euclídeo $\langle U, V\rangle = U^\intercal V, \forall U, V \in \mathbb{R}^m$,

$$g \in CO(m) \Leftrightarrow \exists r \in \mathbb{R}, \text{ tal que } g(U)^\intercal g(V) \ = e^{2r} U^\intercal V,\ \forall U, V \in \mathbb{R}^m.$$

(**1**) Un espacio vectorial arbitrario $\mathbb{V}$ con estructura conforme lineal $\mathcal{CO}(\mathbb{V}) \subset \mathcal{L}(\mathbb{V})$, tiene unívocamente asociada un familia $\mathcal{C}$ de productos escalares (métricas) conformemente equivalentes en $\mathbb{V}$,

$$\mathcal{C} = \left\{ e^{2r} \langle ., .\rangle : r \in \mathbb{R} \right\},$$

que viene determinada por la estructura conforme de $\mathbb{V}$ a través de la propiedad

$$\langle ., .\rangle \in \mathcal{C} \Leftrightarrow \forall b \in \mathcal{CO}(\mathbb{V}), \exists r \in \mathbb{R} \text{ t.q. } \langle b(U), b(V)\rangle \ = e^{2r} U^\intercal V,\ \forall U, V \in \mathbb{R}^m.$$

Se dice entonces que $\mathcal{CO}(\mathbb{V})$ es la familia de *referencias conformes* de $\mathcal{C}$.

Sobre el espacio $\mathbb{V}$ existen otros invariantes bien definidos por su estructura conforme. Por una parte, tiene sentido considerar la *medida del ángulo* formado por pares de vectores de $\mathbb{V}$:

$$\measuredangle(U, V) = \arccos \frac{\langle U, V\rangle}{\langle U, U\rangle^{\frac{1}{2}} \langle V, V\rangle^{\frac{1}{2}}} \in [-\pi, \pi] \ \text{ para } \ \langle ., .\rangle \in \mathcal{C},$$

en cuanto a que este valor no depende de la métrica $\langle ., .\rangle$ que se tome en $\mathcal{C}$. Del mismo modo, está bien definida en $\mathbb{V}$ la noción de *equidistancia*, y tiene sentido hablar de una *esfera* en el espacio conforme $\mathbb{V}$ como aquellos conjuntos de puntos que equidistan de un centro dado:

$$\mathbb{S} \text{ esfera en } \mathbb{V} \Leftrightarrow \exists v_0 \in \mathbb{V}, \text{ t.q. } \forall u, v \in \mathbb{S},\ |u - v_0| = |v - v_0| \ \text{ para } \ \langle ., .\rangle \in \mathcal{C}$$

Obsérvese que, tal y como ocurre en el espacio métrico Euclídeo, tiene sentido hablar de un centro de la esfera v_0, pero no ya de un radio.

Estos invariantes son determinantes para la estructura conforme $\mathcal{CO}(\mathbb{V})$, en el sentido de que un automorfismo de $\mathbb{V}$ es conforme únicamente cuando se preserva la medida de ángulos, o únicamente cuando se preserva la familia de esferas conformes.

Veremos más adelante que, en particular, la familia de esferas conformes de la $CO(m)$-estructura juega un papel fundamental en el mmodelo que Cartan propone para los espacios conformes. Este modelo se trata es detalle en el Capítulo **5**.

(**2**) Sea M una variedad diferenciable dotada de una $CO(m)$-estructura de fibrado $CO(M) \to M$. Sobre cada uno de sus espacios tangentes T_xM, $x \in M$, existen los invariantes conformes de (1) propios de un espacio vectorial conforme, a saber: una familia $\mathcal{C}_x$ de métricas conformes en T_xM, una medida de ángulos entre vectores tangentes $\measuredangle_x$, y una noción de esfera tangente $S_x \subset T_xM$.

Sobre la variedad pueden construirse métricas Riemannianas $\mathbf{g} \in \mathfrak{T}_2^0(M)$ tales que

$$\mathbf{g}_x \in \mathcal{C}_x, \quad \forall x \in M. \tag{3.1}$$

La construcción de métricas en tales condiciones es trivial a nivel local, y haciendo uso de particiones de la unidad, es posible construir también métricas globalmente definidas (véase Kulkarni [26]). Ocurre entonces que la $CO(m)$-estructura tiene unívocamente asociada una familia de métricas conformemente equivalentes

$$\mathcal{C} = \{e^{2f}\mathbf{g} : f \in C^\infty(M)\}$$

caracterizadas por verificar la condición (3.1).

Una variedad conforme Riemanniana puede entenderse entonces como un par $(M, \mathcal{C})$ en donde $\mathcal{C}$ denota una clase de métricas conformemente equivalentes (tal y como Weyl plantea las variedades conformes), o igualmente, puede entenderse como una $CO(m)$-estructura en donde la familia de referencias conformes de $\mathcal{C}$ define el fibrado de estructura $CO(M) \to M$ (en el contexto de G-estructuras sobre variedades).

3.1.2 Espacio de conexiones en una variedad conforme

Sabemos (Teorema 2.1) que la familia de conexiones lineales y simétricas admisibles para una G-estructura viene controlada por la primera prolongación $\mathfrak{g}_1$ del álgebra de estructura $\mathfrak{g} = T_eG$. Con el próposito de estudiar las conexiones simétricas de una variedad conforme Riemanniana, esto es, de una variedad dotada de una $CO(m)$-estructura $CO(M) \to M$, vamos a determinar la primera prolongación del álgebra conforme.

Sea $\mathbb{V}$ un espacio vectorial con estructura conforme lineal $\mathcal{CO}(\mathbb{V})$. El subgrupo de Lie de los automorfismos de $\mathbb{V}$ que preservan su estructura conforme viene dado por

$$CO(\mathbb{V}) = \left\{A \in Aut(\mathbb{V}) : \exists r \in \mathbb{R},, \ \langle A(u), A(v)\rangle = e^{2r}\langle u, v\rangle\right\}$$

para cualquier métrica (producto escalar) conforme $\langle ., . \rangle \in \mathcal{C}$. Su álgebra de Lie asociada coincide entonces con la subálgebra

$$\mathfrak{co}(\mathbb{V}) = \{a \in End(\mathbb{V}) : \exists r \in \mathbb{R},, \ \langle a(u), v\rangle + \langle u, a(v)\rangle = r\langle u, v\rangle\}.$$

Un elemento φ en la primera prolongación conforme $\mathfrak{co}(\mathbb{V})_1$ es una aplicación lineal $\varphi : \mathbb{V} \to \mathfrak{co}(\mathbb{V})_1$ tal que

$$\varphi(u)(v) = \varphi(v)(u), \quad \forall u, v \in \mathbb{V}. \tag{3.2}$$

Dado $u \in \mathbb{V}$, debe existir un $r_u \in \mathbb{R}$ tal que $\langle \varphi(u)(v), w\rangle + \langle v, \varphi(u)(w)\rangle = 2r_u \langle v, w\rangle$, para cualquier métrica conforme $\langle .,. \rangle \in \mathcal{C}$. La asignación $\mathbb{V} \ni u \mapsto r_u \in \mathbb{R}$ es lineal, y concluimos que $\varphi \in \mathfrak{co}(\mathbb{V})_1$ tiene asociada una forma lineal $\eta \in \mathbb{V}^*$ de modo que

$$\langle \varphi(u)(v), w\rangle + \langle v, \varphi(u)(w)\rangle = 2\eta(u) \langle v, w\rangle , \quad \forall u, v, w \in \mathbb{V}. \tag{3.3}$$

Es posible determinar la relación entre $\varphi \in \mathfrak{o}(\mathbb{V})_1$ y $\eta \in \mathbb{V}^*$ considerando las identidades resultantes de (3.3) por permutación circular:

$$\langle \varphi(v)(w), u\rangle + \langle w, \varphi(v)(u)\rangle = 2\eta(v) \langle w, u\rangle \tag{3.4}$$

$$\langle \varphi(w)(u), v\rangle + \langle u, \varphi(w)(v)\rangle = 2\eta(w) \langle u, v\rangle . \tag{3.5}$$

Teniendo en cuenta la propiedad de simetría (3.2), al sumar (3.3) y (3.4) y restar (3.5) se obtiene la relación:

$$2 \langle \varphi(u)(v), w\rangle = 2\eta(u) \langle v, w\rangle + 2\eta(v) \langle w, u\rangle - 2\eta(w) \langle u, v\rangle .$$

Es decir, si $^\sim : \mathbb{V}^* \quad S^2(\mathbb{V}) \longrightarrow \mathbb{V}$ es el operador ligado a la estructura conforme de $\mathbb{V}$, tal que $^\sim\eta(u, v) = \langle u, v\rangle \ \eta_{\uparrow_{\langle .,. \rangle}}$ para cualquier $\langle .,. \rangle \in \mathcal{C}$ (compárese con (2.17) pág. 31), entonces,

$$\varphi(u)(v) = \eta(u)v + \eta(v)u - {}^\sim\eta(u, v), \quad \forall u, v \in \mathbb{V}.$$

Proposición 3.1 *La primera prolongación $\mathfrak{co}(\mathbb{V})_1$ del álgebra conforme está en correspondencia con el espacio dual $\mathbb{V}^*$ a través del isomorfismo*

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{V}^* & \longrightarrow & \mathfrak{co}(\mathbb{V})_1 \\ \eta & \longmapsto & \Phi_\eta \end{array} \tag{3.6}$$

$$\Phi_\eta(u, v) = \eta(u)v + \eta(v)u - {}^\sim\eta(u, v) \in \mathbb{V}, \forall (u, v) \in \mathbb{V} \times \mathbb{V}.$$

Demostración. En primer lugar, es trivial comprobar que efectivamente Φ_η define un elemento de $\mathfrak{co}(\mathbb{V})_1$. La linealidad y suprayectividad se deducen directamente de lo anteriormente desarrollado. Para ver la inyectividad basta observar que si existe $v \in \mathbb{V}$ tal que $\Phi_\eta(v, v) = 0$ y $v \neq 0$, entonces

$$\begin{aligned} 0 = \Phi_\eta(v, v) = 2\eta(v)\, v - {}^\sim\eta(v, v) \ &\Leftrightarrow \ {}^\sim\eta(v, v) = 2\eta(v)\, v \\ &\Leftrightarrow \ \langle v, v\rangle \ \eta_{\uparrow_{\langle .,. \rangle}} = 2 \left\langle \eta_{\uparrow_{\langle .,. \rangle}}, v \right\rangle \, v \quad (\text{para } \langle .,. \rangle \in \mathcal{C}) \\ &\Leftrightarrow \ \eta_{\uparrow_{\langle .,. \rangle}} = 0 \ \Leftrightarrow \ \eta = 0 \end{aligned}$$

De este modo queda probado que (3.6) define efectivamente un isomorfismo. ■

Corolario 3.1 *Los elementos de la primera prolongación* $\mathfrak{co}(m)_1$ *son aplicaciones* Φ_η*, en correspondencia con las formas* $\eta \in \mathbb{R}^{m*}$*, a través de la fórmula:*

$$\Phi_\eta(U,V) = \eta(U)V + \eta(V)U - (U^\intercal V)\eta^\intercal \in \mathbb{R}^m,\ \forall U, V \in \mathbb{R}^m.$$

(Véase también este resultado en Kobayashi [23]).

Una referencia conforme $b \in \mathcal{CO}(\mathbb{V})$ define la equivalencia entre grupos de Lie:

$$CO(\mathbb{V}) = b_{\circledast}\, CO(m) = \left\{ b \circ g \circ b^{-1} : g \in CO(m) \right\}$$

(véase (2.9), pág. 21), que llevada al nivel de las álgebras da lugar a las identificaciones:

$$\begin{aligned} \mathfrak{co}(\mathbb{V}) &= b_{\circledast}\, \mathfrak{co}(m) = \left\{ b \circ A \circ b^{-1} : A \in \mathfrak{co}(m) \right\}, \\ \mathfrak{co}(\mathbb{V})_1 &= b_{\circledast}\, \mathfrak{co}(m)_1 = \left\{ b \circ \varphi \circ (b^{-1}, b^{-1}) : \varphi \in \mathfrak{co}(m)_1 \right\}. \end{aligned}$$

Observación 3.1 *De las demostraciones anteriores se deducen los siguientes hechos:*

(**a**) *Dada* b *referencia conforme de* $\mathbb{V}$*, se verifica la relación:*

$$\Phi_\eta = b_{\circledast}\, (\Phi_{\eta \circ b}) \in \mathfrak{co}(\mathbb{V})_1,$$

para $\eta \in \mathbb{V}^*$*,* $\eta \circ b \in \mathbb{R}^{m*}$*, y* $\Phi_{\eta\circ b} \in \mathfrak{co}(m)_1$*.*

(**b**) *La primera prolongación conforme tiene la siguiente propiedad:*

$$\text{si } \varphi \in \mathfrak{co}(\mathbb{V})_1 \text{ y } \exists v \in \mathbb{V} - \{0\},, \varphi(v,v) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \varphi = 0.$$

La primera prolongación $\mathfrak{g}_1$ del álgebra asociada a un grupo de Lie $G \subset GL(m, \mathbb{R})$ está directamente relacionada con el espacio de conexiones lineales y simétricas compatibles con una G-estructura $B \to M$. El Teorema 2.1 del capítulo anterior hace explícita esta relación: la diferencia entre dos conexiones distintas de una misma G-estructura viene dada por un tensor $\Phi = \overline{\nabla} - \nabla \in \mathfrak{T}^1_2(M)$ que toma valores en la primera prolongación, esto es: $\Phi(x) \in \mathfrak{g}(T_xM)_1$, $\forall x \in M$. En el caso particular de una estructura conforme Riemanniana, en el que es $G = CO(m)$ y la primera prolongación $\mathfrak{co}(T_xM)_1$ está en correspondencia con el dual T^*_xM (Proposición 3.1), se tiene el siguiente resultado..

Teorema 3.1 *Sea* ∇ *una conexión lineal y simétrica en* M *compatible con la estructura conforme* $CO(M) \to M$*. Entonces, para cualquier otra conexión conforme* $\overline{\nabla}$*, existe una 1-forma* $\alpha \in \Lambda^1(M)$ *tal que* $\forall X, Y \in \mathfrak{X}(M)$

$$\overline{\nabla}_X Y - \nabla_X Y = \Phi_\alpha(X,Y) = \alpha(X)Y + \alpha(Y)X - \tilde{}\alpha(X,Y), \tag{3.7}$$

siendo $\tilde{\ } : \mathfrak{T}^0_1(M) \to \mathfrak{T}^1_2(M)$ *el operador conforme definido en (2.17) pág. 31, tal que* $\tilde{\ }\alpha(X,Y) = \mathbf{g}(X,Y)\,\alpha_{\uparrow\mathbf{g}}$, $\forall\mathbf{g}$ *métrica conforme. La familia de conexiones simétricas y conformes de* M *coincide entonces con el espacio*

$$CCO(M) = \left\{\nabla + \Phi_\alpha : \alpha \in \Lambda^1(M)\right\},$$

en correspondencia biunívoca con el espacio de 1-formas $\Lambda^1(M)$.

Demostración. Consecuencia del Teorema 2.1 y de la Proposición 3.1. ■

Si ∇ es la conexión de Levi-Civita de una métrica conforme $\mathbf{g}$ de $CO(M) \to M$, y $\alpha \in \Lambda^1(M)$ es una 1-forma exacta, con $\alpha = df$ para cierta función $f \in C^\infty(M)$, entonces la conexión conforme $\overline{\nabla} = \nabla + \Phi_{df}$, definida por

$$\overline{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + df(X)Y + df(Y)X - \tilde{\ }df(X,Y), \ \ \forall X, Y \in \mathfrak{X}(M), \tag{3.8}$$

es la conexión de Levi-Civita de la métrica conforme $\overline{\mathbf{g}} = e^{2f}$, dado que verifica

$$X\left(\overline{\mathbf{g}}\,(Y,Z)\right) = \overline{\mathbf{g}}\left(\overline{\nabla}_X Y, Z\right) + \overline{\mathbf{g}}\left(Y, \overline{\nabla}_X Z\right).$$

Se recupera así la conocida fórmula que relaciona las conexiones de Levi-Civita de dos métricas conformemente equivalentes.

3.1.3 Paralelismo Fermi-Walker a lo largo de curvas

Sea $\gamma : I \ni t \mapsto \gamma(t) \in M$ una curva parametrizada en una variedad conforme Riemanniana con fibrado de estructura $CO(M) \to M$. Se entiende siempre que la parametrización de la curva es regular, de modo que su velocidad define un campo que en ningún punto de la curva se hace nulo, $\gamma'_t \neq 0 \in T_{\gamma(t)}M$, $\forall t \in I$.

Obsérvese que las métricas conformes de M forman una familia $\{e^{2f}\mathbf{g}\}$ cuyo grado de libertad viene dado por $f \in C^\infty(M)$; la introducción de la condición $\mathbf{g}(\gamma'_t, \gamma'_t) = 1$ permite fijar un factor de escala f sobre la curva $t \mapsto \gamma_t$. Es decir, el hecho de declarar unitario el campo velocidad determina sobre la curva una única métrica compatible con la estructura conforme.

La idea consiste en introducir en criterio igual de determinante en el espacio de las conexiones conformes. Por el Teorema 3.1, las conexiones lineales y conformes de M forman una familia en correspondencia con el espacio de 1-formas $\Lambda^1(M)$. A lo largo de la curva $t \mapsto \gamma(t)$, la diferencia entre las conexiones inducidas viene controlada por una forma $\alpha \in \Lambda^1(\gamma)$ tal que:

$$\frac{\overline{\nabla}}{dt}V - \frac{\nabla}{dt}V = \alpha(\gamma')\,V + \alpha(V)\,\gamma' - \tilde{\ }\alpha(\gamma', V), \ \ (\forall V \in \mathfrak{X}(\gamma)).$$

Veremos que el hecho de declarar paralelo el campo velocidad $\gamma'_t \in \mathfrak{X}(\gamma)$ permite fijar el grado de libertad $\alpha \in \Lambda^1(\gamma)$ y definir de este modo una única conexión conforme a lo largo de la curva $t \mapsto \gamma_t$.

Proposición 3.2 *Sea $\gamma : I \ni t \mapsto \gamma(t) \in M$ una curva parametrizada en la variedad conforme $(M, \mathcal{C})$. Para cada $t_0 \in I$ existe una conexión conforme ∇ y un entorno abierto I_0 de t_0 en I, tales que la restricción $\gamma_{t_o} = \gamma|_{I_0} : I_0 \to M$ es curva ∇-geodésica,*

$$\frac{\nabla}{dt}\gamma'(t) = 0, \quad \forall t \in I_0.$$

Demostración. Sea $\overline{\mathbf{g}} \in \mathcal{C}$ una métrica conforme auxiliar en M, y sea $\overline{\nabla}$ la conexión simétrica y conforme correspondiente a su conexión de Levi-Civita.

Cada conexión lineal ∇ compatible con la estructura conforme queda determinada por una 1-forma $\alpha \in \Lambda^1(M)$ controlando su tensor diferencia con la $\overline{\nabla}$ inicial,

$$\nabla_X Y = \overline{\nabla}_X Y + \Phi_\alpha(X, Y) = \overline{\nabla}_X Y + \alpha(X)Y + \alpha(Y)X - \overline{\mathbf{g}}(X, Y)\alpha_{\uparrow\overline{\mathbf{g}}}. \tag{3.9}$$

El problema de hallar una conexión conforme ∇ en las condiciones del enunciado se reduce a encontrar la adecuada 1-forma α.

A lo largo de la curva $\gamma(t)$ la ecuación (3.9) da lugar a la siguiente relación

$$\frac{\nabla}{dt}V - \frac{\overline{\nabla}}{dt}V = \alpha(\gamma')\, V + \alpha(V)\, \gamma' - \overline{\mathbf{g}}(\gamma', V)\, (\alpha_{\uparrow\overline{\mathbf{g}}} \circ \gamma), \quad (\forall V \in \mathfrak{X}(\gamma))\,. \tag{3.10}$$

En particular, para el campo velocidad $\gamma'(t) \in \mathfrak{X}(\gamma)$ es

$$\frac{\nabla}{dt}\gamma' - \frac{\overline{\nabla}}{dt}\gamma' = 2\alpha(\gamma')\, \gamma' - \overline{\mathbf{g}}(\gamma', \gamma')\, (\alpha_{\uparrow\overline{\mathbf{g}}} \circ \gamma).$$

La condición de que $\gamma(t)$ sea curva geodésica para la conexión ∇, esto es $\nabla\gamma'/dt = 0$, resulta entonces equivalente a la siguiente identidad:

$$-\frac{\overline{\nabla}}{dt}\gamma' = 2\alpha(\gamma')\, \gamma' - \overline{\mathbf{g}}(\gamma', \gamma')\, (\alpha_{\uparrow\overline{\mathbf{g}}} \circ \gamma). \tag{3.11}$$

Aplicando $\overline{\mathbf{g}}(\gamma', .)$ a esta ecuación, permite determinar $\alpha(\gamma') = -\overline{\mathbf{g}}(\frac{\overline{\nabla}}{dt}\gamma', \gamma')\overline{\mathbf{g}}\,(\gamma', \gamma')^{-1}$. Al substuir este valor en (3.11) se obtiene la siguiente ecuación para $\alpha_{\uparrow\overline{\mathbf{g}}} \circ \gamma \in \mathfrak{X}(\gamma)$:

$$\alpha_{\uparrow\overline{\mathbf{g}}} \circ \gamma = \frac{1}{\overline{\mathbf{g}}(\gamma', \gamma')}\ \frac{\overline{\nabla}}{dt}\gamma' - 2\frac{\overline{\mathbf{g}}(\frac{\overline{\nabla}}{dt}\gamma', \gamma')}{\overline{\mathbf{g}}(\gamma', \gamma')^2}\ \gamma',$$

equivalente a la identidad $\alpha_{\gamma(t)} = A(t) \in \Lambda^1(\gamma)$, para

$$A = \frac{1}{\overline{\mathbf{g}}(\gamma', \gamma')}\ \left(\frac{\overline{\nabla}}{dt}\gamma'\right)_{\downarrow\overline{\mathbf{g}}} - 2\frac{\overline{\mathbf{g}}(\frac{\overline{\nabla}}{dt}\gamma', \gamma')}{\overline{\mathbf{g}}(\gamma', \gamma')^2}\ (\gamma')_{\downarrow\overline{\mathbf{g}}}. \tag{3.12}$$

En conclusión, una conexión $\nabla = \overline{\nabla} + \Phi_\alpha$ que tenga a $\gamma|_{I_0}(t)$ como curva geodésica está en correspondencia con una 1-forma α cuyo valor sobre los puntos de la curva está determinado por la 1-forma $A \in \Lambda^1(\gamma)$ de (3.12).

Por el Lema 3.1 a continuación, fijado $t_0 \in I$ puede construirse $\alpha \in \Lambda^1(\mathcal{U})$, una 1-forma en un entorno abierto $\mathcal{U} \subset M$ de $\gamma(t_0)$, tal que extiende a la 1-forma $A \in \Lambda^1(\gamma)$ definida en (3.12), esto es:

$$\alpha_{\gamma(t)} = A(t), \quad \forall t \in I_0 = (\varepsilon, t_0 + \varepsilon).$$

La conexión ∇ que $\alpha \in \Lambda^1(\mathcal{U})$ define en $\mathcal{U}$ a través de $\nabla = \overline{\nabla} + \Phi_\alpha$ tiene a $\gamma|_{I_0}(t)$ como curva geodésica. ■

Una conexión lineal y conforme de $CO(M) \to M$ se dice *adaptada en* t_0 *a la curva parametrizada* $t \mapsto \gamma(t) \in M$, cuando existe un $\varepsilon > 0$ tal que

$$\frac{\nabla}{dt}\gamma'(t) = 0, \quad \forall t \in (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon).$$

La Proposición 3.2 afirma que existen siempre conexiones adaptadas a un instante t_0 en el intervalo de definición de la curva $t \mapsto \gamma(t)$.

Lema 3.1 *Sea* $A(t) \in \Lambda^1(\gamma)$ *una 1-forma sobre la curva* $\gamma : I \ni t \mapsto \gamma(t) \in M$. *Entonces, dados* $t_0 \in I$ *y* $c_0 \in \mathbb{R}$ *existe una función local* $f \in C^\infty(\mathcal{U}_0)$ *definida en un entorno abierto* $\mathcal{U}_0$ *de* $\gamma(t_0)$ *en* M*, tal que:*

$$\begin{cases} f \circ \gamma(t_0) = c_0 \\ (df)_{\gamma(t)} = A(t), \quad \forall t \in (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon) \end{cases}$$

Demostración. Sea $(\mathcal{U}, \varphi = \{x^1, ..., x^m\})$ una carta local en torno al punto $\gamma(t_0) \in M$ tal que $\varphi \circ \gamma(t) = (t, 0, ..., 0)$, $\forall t \in (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon)$. La 1-forma $A \in \Lambda^1(\gamma)$ viene dada por unas funciones de coordenadas $A_i(t)$ tales que

$$A(t) = \sum\nolimits_{i=1}^{m} A(t)\ (dx^i)_{\gamma(t)}$$

La función $A_1(t)$ puede integrarse a una función $f_1(t)$ tal que $f_1' = A_1$ y $f_1(t_0) = c_0$. Sea $f \in C^\infty(\mathcal{U}_0)$ la función definida en un entorno abierto $\mathcal{U}_0$ de $\gamma(t_0) \in M$ por

$$f(x^1, ..., x^m) = f_1(x^1) + \sum\nolimits_{i>1} A_i(x^1)\, x^i \in \mathbb{R}.$$

Entonces, f es una función diferenciable que verifica

$$df(x^1, .., x^m) = \left(\sum\nolimits_{i>1} A_i'(x^1)\ x^i\right) dx^1 + \sum\nolimits_{i=1}^{m} A_i(x^1)\ dx^i.$$

Sobre la restricción de la curva $t \mapsto \gamma(t)$ al abierto $(t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon)$ se dan las identidades:

$$f \circ \gamma(t_0) = f(t_0, 0, ..., 0) = f_1(t_0) = c_0$$
$$(df)_{\gamma(t)} = df(t, 0, ..., 0) = \textstyle\sum_{i=1}^m A_i(t)\ (dx^i)_{\gamma(t)} = \alpha(t).$$

y concluimos que $f \in C^\infty(\mathcal{U}_0)$ define una función en las condiciones del enunciado. ■

Se observa entonces que al aplicar este Lema 3.1 a la demostración de la Proposición 3.2, la forma $\alpha \in \Lambda^1(\mathcal{U})$ que extiende a $A \in \Lambda^1(\gamma)$ puede suponerse cerrada, de modo que existe una función $f \in C^\infty(\mathcal{U})$ con $df = \alpha$. En tal caso, la conexión $\nabla = \overline{\nabla} + \Phi_\alpha$ a la que da lugar coincide con la conexión de Levi-Civita de la métrica conforme $\mathbf{g} = e^{2f}\overline{\mathbf{g}}$.

Corolario 3.2 *Dada una curva $t \mapsto \gamma(t) \in M$ en la variedad conforme M, puede exigirse que la conexión adaptada a γ en t_0 sea la conexión de Levi-Civita de una métrica conforme $\mathbf{g}$ que tenga a $\gamma|_{(t_0-\varepsilon, t_0+\varepsilon)}$ como geodésica unitaria.*

Demostración. Es suficiente asumir en la demostración de la Proposición 3.2 que $\nabla = \overline{\nabla} + \Phi_\alpha$ viene dada por una un forma cerrada $\alpha = df \in \Lambda^1(\mathcal{U})$ para cierta función $f \in C^\infty(\mathcal{U})$ verificando $df \circ \gamma(t) = A(t) =$(3.12) y $f(\gamma(t_0)) = -\frac{1}{2} \ln \overline{\mathbf{g}}(\gamma'(t_0), \gamma'(t_0))$, construida según el Lema 3.1. ■

Este resultado se encuentra también en Schouten [44], en donde se afirma que toda curva (regularmente) parametrizada puede verse localmente como una curva geodésica respecto de alguna de las métricas en una estructura conforme dada.

Proposición 3.3 *Sean $\overset{1}{\nabla}$ y $\overset{2}{\nabla}$ dos conexiones simétricas compatibles con la estructura conforme $CO(M) \to M$. Si la curva parametrizada $t \mapsto \gamma(t)$ es curva geodésica de ambas, entonces, las conexiones inducidas sobre $\gamma(t)$ coinciden, esto es:*

$$\frac{\overset{1}{\nabla}}{dt}\gamma' = \frac{\overset{2}{\nabla}}{dt}\gamma' = 0 \ \Leftrightarrow \ \frac{\overset{1}{\nabla}}{dt}V = \frac{\overset{2}{\nabla}}{dt}V, \ \forall V \in \mathfrak{X}(\gamma).$$

Demostración. Por el desarrollo en la demostración de la Proposición 3.2, se observa que el hecho de que las conexiones conformes $\overset{1}{\nabla}$ y $\overset{2}{\nabla}$ tengan ambas a la curva $t \mapsto \gamma(t)$ como geodésica implica que su tensor diferencia $\Phi_\alpha = \overset{2}{\nabla} - \overset{1}{\nabla} \in T_2^1(M)$ viene dado por una 1-forma $\alpha \in \Lambda^1(M)$ que se anula sobre los puntos de la curva:

$$\alpha_{\gamma(t)} = 0 \in T^*_{\gamma(t)}M, \ \forall t.$$

Así, por la relación (3.7), pág. 38, se tiene que

$$(\overset{2}{\nabla}_X Y)(\gamma(t)) = (\overset{1}{\nabla}_X Y)(\gamma(t)), \quad \forall X, Y \in \mathfrak{X}(M)$$

En particular, $\overset{1}{\nabla}$ y $\overset{2}{\nabla}$ inducen a lo largo de la curva $t \mapsto \gamma(t)$ la misma conexión $\overset{1}{\nabla}/dt = \overset{2}{\nabla}/dt : \mathfrak{X}(\gamma) \to \mathfrak{X}(\gamma)$. ■

Estos resultados de existencia y unicidad demuestran que el criterio de adaptación a la curva distingue a lo largo de las curvas parametrizadas de una variedad conforme una conexión única y perfectamente definida.

Teorema 3.2 *Sea $\gamma : I \ni t \mapsto \gamma(t) \in M$ una curva parametrizada en la variedad conforme Riemanniana M. Entonces, a lo largo de $\gamma(t)$ existe una única conexión D^γ/dt verificando la siguiente propiedad que la caracteriza localmente:*

> *"Si ∇ es una conexión conforme de M adaptada a la curva $\gamma(t)$, esto es, tal que tiene como geodésica a la restricción de la curva $\gamma|_{I_0}$, para $I_0 \subset I$, entonces,*
>
> $$\frac{D^\gamma}{dt}V(t) = \frac{\nabla}{dt}V(t), \quad \forall t \in I_0,\, V \in \mathfrak{X}(\gamma)."$$

Definición 3.1 *La conexión del Teorema anterior recibe el nombre de* conexión de Fermi-Walker *a lo largo de la curva parametrizada $t \mapsto \gamma(t) \in M$,*

$$\frac{D^\gamma}{dt} : \mathfrak{X}(\gamma) \to \mathfrak{X}(\gamma),$$

y está canónicamente asociada a la estructura conforme $CO(M) \to M$.

Obsérvese que la conexión de Fermi-Walker D^γ/dt da lugar a una conexión a lo largo de $t \mapsto \gamma(t)$ que respeta la estructura conforme del tangente, y que por definición se anula sobre el campo velocidad de la curva:

$$\frac{D^\gamma}{dt}\gamma'(t) = 0 \in T_{\gamma(t)}M, \quad \forall t.$$

Lema 3.2 *Sea $\mathbf{g}$ una métrica Riemanniana en M, y sea $\mathcal{C} = \{e^{2f}\mathbf{g}\}$ la estructura conforme inducida por $\mathbf{g}$. Para una curva parametrizada $t \mapsto \gamma(t) \in M$, $\mathbf{g}$-unitaria, la conexión de Fermi-Walker D^γ/dt definida por la estructura conforme $\mathcal{C}$, verifica:*

$$\tfrac{d}{dt}\{\mathbf{g}(V,W)\} = \mathbf{g}\left(\tfrac{D^\gamma}{dt}V, W\right) + \mathbf{g}\left(V, \tfrac{D^\gamma}{dt}W\right), \qquad \forall V, W \in \mathfrak{X}(\gamma). \tag{3.13}$$

Además, $D^\gamma/dt : \mathfrak{X}(\gamma) \to \mathfrak{X}(\gamma)$ queda caracterizada por las condiciones:

$$\begin{cases} \tfrac{D^\gamma}{dt}\gamma' = 0 \\ \tfrac{D^\gamma}{dt}V = nor\left(\tfrac{\nabla}{dt}V\right), \ \forall V \in \mathfrak{X}(\gamma) \text{ con } \mathbf{g}(\gamma', V) = 0 \end{cases} \tag{3.14}$$

siendo ∇ la conexión de Levi-Civita de $\mathbf{g}$, y $nor(V) = V - \mathbf{g}(V,\gamma')\gamma' \in (\gamma')^\perp$ la proyección ortogonal a la curva. La conexión conforme de Fermi-Walker D^γ/dt y la conexión métrica de Levi-Civita ∇/dt sobre la curva $\gamma(t)$, se relacionan entonces por

$$\frac{D^\gamma}{dt}V = \frac{d}{dt}\{\mathbf{g}(V,\gamma')\}\gamma' + nor \circ \frac{\nabla}{dt}(norV), \ \forall V \in \mathfrak{X}(\gamma). \tag{3.15}$$

Demostración. Por definición, el operador D^γ/dt viene caracterizado por coincidir localmente con la conexión de Levi-Civita $\overline{\nabla}$ de una métrica adaptada $\overline{\mathbf{g}} = e^{2f}\mathbf{g} \in \mathcal{C}$, donde el factor de escala f es tal que su diferencial $df = \alpha$ verifica la condición (3.12) de la Proposición 3.2. En este caso, por ser $\mathbf{g}(\gamma', \gamma') = 1$ y $\mathbf{g}(\gamma', \nabla/dt|_t(\gamma')) = 0$, la ecuación diferencial queda reducida a

$$(grad_{\mathbf{g}} f) \circ \gamma(t) = \frac{\nabla}{dt}\gamma'(t) \tag{3.16}$$

En primer lugar, esta identidad implica

$$df\left(\gamma'(t)\right) = \mathbf{g}(\gamma', \frac{\nabla}{dt}\gamma') = 0,$$

o equivalentemente, $f \circ \gamma(t) = c$ constante. Las métricas $\mathbf{g}$ y $\overline{\mathbf{g}}$ difieren, por tanto, en un factor de escala constante a lo largo de la curva $\gamma(t)$. Dado que el operador D^γ/dt coincide con $\overline{\nabla}/dt$, la fórmula (3.13) es consecuencia inmediata de la compatibilidad de $\overline{\nabla}$ con la métrica $\overline{\mathbf{g}}$, y por ser constantemente proporcionales, también con la métrica inicial $\mathbf{g} = e^{-2r}\overline{\mathbf{g}}$ a lo largo de la curva $\gamma(t)$.

Por otra parte, partiendo de la ecuación (3.8) que relaciona las conexiones de Levi-Civita de las métricas conformes $\mathbf{g}$ y $\overline{\mathbf{g}} = e^{2f}\mathbf{g}$, y de la identidad (3.16), se observa que la conexión de Fermi-Walker D^γ/dt se define sobre $V \in \mathfrak{X}(\gamma)$ como:

$$\begin{aligned}\tfrac{D^\gamma}{dt}V &= \tfrac{\overline{\nabla}}{dt}V = \tfrac{\nabla}{dt}V + df(V)\gamma' - \mathbf{g}(V,\gamma')(grad_{\mathbf{g}} f)\circ\gamma \\ &= \tfrac{\nabla}{dt}V + \mathbf{g}(\tfrac{\nabla}{dt}\gamma', V)\gamma' - \mathbf{g}(V,\gamma')\tfrac{\nabla}{dt}\gamma'.\end{aligned}$$

La identidad $D^\gamma\gamma'/dt = 0$ en el sistema (3.14) es trivial. Supongamos ahora que el campo $V(t)$ es en todo momento ortogonal a la dirección de la curva (i.e. $\mathbf{g}(\gamma', V) \equiv 0$), entonces, por la fórmula que acadamos de obtener se tiene

$$\begin{aligned}\tfrac{D^\gamma}{dt}V &= \tfrac{\nabla}{dt}V + \mathbf{g}\left(\tfrac{\nabla}{dt}\gamma', V\right)\gamma' \\ &= \tfrac{\nabla}{dt}V + \left(\tfrac{d}{dt}\{\mathbf{g}(\gamma', V)\} - \mathbf{g}(\gamma', \tfrac{\nabla}{dt}V)\right)\gamma' \\ &= \tfrac{\nabla}{dt}V - \mathbf{g}(\gamma', \tfrac{\nabla}{dt}V)\gamma' = nor(\tfrac{\nabla}{dt}V).\end{aligned}$$

Concluimos así que efectivamente el sistema (3.14) del enunciado caracteriza a la conexión de Fermi-Walker a lo largo de la curva.

La fórmula final (3.15) es entonces consecuencia de que todo campo $V(t) \in \mathfrak{X}(\gamma)$ puede descomponerse ortogonalmente en $V = \mathbf{g}(V,\gamma')\gamma' + nor\,(V)$, y al ser D^γ/dt un operador lineal se tiene la siguiente cadena de igualdades

$$\begin{aligned}\tfrac{D^\gamma}{dt}V &= \tfrac{D^\gamma}{dt}\left(\mathbf{g}(V,\gamma')\gamma'\right) + \tfrac{D^\gamma}{dt}\left(nor\,(V)\right) \\ &= \tfrac{d}{dt}\{\mathbf{g}(V,\gamma')\}\gamma' + \mathbf{g}(V,\gamma')\tfrac{D^\gamma}{dt}\gamma' + nor\circ\tfrac{\nabla}{dt}(norV) \\ &= \tfrac{d}{dt}\{\mathbf{g}(V,\gamma')\}\gamma' + nor\circ\tfrac{\nabla}{dt}(norV)\end{aligned}$$

para cualquier campo $V \in \mathfrak{X}(\gamma)$. ■

La conexión de Fermi-Walker ofrece la posibilidad de dar una noción de paralelismo canónico a lo largo de curvas parametrizadas en una variedad conforme Riemanniana.

En el espacio $\mathfrak{X}(\gamma)$ de campos definidos sobre la curva parametrizada $t \mapsto \gamma(t) \in M$, la conexión conforme de Fermi-Walker $D^\gamma/dt : \mathfrak{X}(\gamma) \to \mathfrak{X}(\gamma)$ distingue un subespacio m-dimensional de *campos paralelos*

$$\mathfrak{X}_{|\,|}(\gamma) = \{V(t) \in \mathfrak{X}(\gamma) : D^\gamma/dt(V) = 0\}$$

que depende exclusivamente de la estructura conforme del ambiente. Se tienen además los siguientes hechos:

(a) $\gamma' \in \mathfrak{X}_{|\,|}(\gamma)$.

(b) La estructura conforme induce en cada espacio tangente T_xM una medida de ángulos entre vectores que denotamos $\measuredangle_x$. Los campos Fermi-Walker paralelos tienen la propiedad de que el ángulo que forman un par de campos $U, V \in \mathfrak{X}_{|\,|}(\gamma)$ premanece constante a lo largo de la curva:

$$\measuredangle_{\gamma(t_0)}(U(t_0), V(t_0)) = \measuredangle_{\gamma(t_1)}(U(t_1), V(t_1)), \quad \forall t_0, t_1 \in I.$$

Por esta última propiedad, tiene sentido introducir en el espacio $\mathfrak{X}_{|\,|}(\gamma)$ la definición de una *medida de ángulos* $\measuredangle$ entre campos paralelos $U, V \in \mathfrak{X}_{|\,|}(\gamma)$, de modo que:

$$\measuredangle\,(U, V) = \measuredangle_{\gamma(t)}(U(t), V(t)) \in [-\pi, \pi], \quad \forall t \in I.$$

Entonces, la aplicación asociada al transporte Fermi-Walker paralelo en cada $t_0 \in I$,

$$\begin{array}{rccl} |\ |_{t_0} : & T_{\gamma(t_0)}M & \longrightarrow & \mathfrak{X}_{|\,|}(\gamma) \\ & v & \longmapsto & V,, \ V(t_0) = v \end{array}$$

da lugar a un isomorfismo lineal que preserva las medidas de ángulos en los espacios vectoriales $\mathfrak{X}_{|\,|}(\gamma)$ y $T_{\gamma(t_0)}M$, naturalmente definidas por la estructura conforme.

A lo largo de la curva $t \mapsto \gamma(t)$, el transporte Fermi-Walker paralelo de vectores entre dos instantes $t_0, t_1 \in I$ va asociado a un isomorfismo lineal

$$|\ |_{t_0,t_1} = |\ |_{t_1}^{-1} \circ |\ |_{t_0} : T_{\gamma(t_0)}M \longrightarrow T_{\gamma(t_1)}M, \tag{3.17}$$

que preserva las estructuras conformes de los espacios tangentes:

$$\measuredangle_{\gamma(t_0)}(u, v) = \measuredangle_{\gamma(t_1)}(\,|\ |_{t_0,t_1}(u), |\ |_{t_0,t_1}(v)\,), \quad \forall u, v. \in T_{\gamma(t_0)}M.$$

3.1.4 Paralelismo Fermi-Walker bajo reparametrizaciones

En este apartado se estudia en qué modo depende el paralelismo conforme de Fermi-Walker de la parametrización tomada sobre la curva.

En el caso de una conexión lineal, es conocido que el paralelismo asociado permanece invariante por reparametrizaciones de la curva (Observación (2.3), pág. 15), y da lugar a un transporte geométrico sobre las curvas de la variedad. Veremos que no ocurre así con la conexión de Fermi-Walker de una variedad conforme. El hecho de que la conexión de Fermi-Walker tenga como campo paralelo a la velocidad de curva parametrizada implica que el transporte paralelo se altera por reparametrizaciones en la medida en que el campo tangente vea alterada su longitud. Se tiene entonces que los isomorfismos asociados al transporte Fermi-Walker paralelo sobre la curva respecto a distintas parametrizaciones difieren por homotecias de los espacios tangentes (Corolario 3.4).

Una reparametrización de una curva $\gamma : I \ni t \mapsto \gamma(t) \in M$ viene definida a partir de un difeomorfismo $\mathbf{t} : J \ni s \mapsto \mathbf{t}(s) \in I$ que da lugar a la curva parametrizada $\overline{\gamma} = \gamma \circ \mathbf{t} : J \ni s \mapsto \overline{\gamma}(s) = \gamma(\mathbf{t}(s)) \in M$.

Lema 3.3 *Sean $\mathbf{g}$ y $\overline{\mathbf{g}} = e^{2f}\mathbf{g}$ dos métricas Riemannianas conformemente equivalentes, que tienen como geodésica unitaria a $t \mapsto \gamma(t)$ y a su reparametrización $s \mapsto \overline{\gamma}(s) = \gamma \circ \mathbf{t}(s)$, respectivamente. Entonces, la función de escala $f \in C^\infty(M)$ verifica:*

$$(grad_{\mathbf{g}} f)_{\overline{\gamma}(s)} = -\frac{\mathbf{t}''(s)}{\mathbf{t}'(s)^2}\, \gamma'(\mathbf{t}(s)) \tag{3.18}$$

Demostración. Recordemos de (3.8) que las conexiones de Levi-Civita ∇ y $\overline{\nabla}$, respectivamente asociadas al par de métricas conformes $\mathbf{g}$ y $\overline{\mathbf{g}} = e^{2f}\mathbf{g}$, cumplen la siguiente relación:

$$\overline{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + X(f)Y + Y(f)X - \mathbf{g}(X,Y) grad_{\mathbf{g}} f,\ \forall X, Y \in \mathfrak{X}(M).$$

En particular, dado que $\nabla\gamma'/dt = 0$, se tiene

$$\left.\frac{\overline{\nabla}}{dt}\gamma'\right|_t = 2\, df(\gamma'_t)\, \gamma'_t - (grad_{\mathbf{g}} f)_{\gamma(t)}\,. \tag{3.19}$$

Por otra parte, de $0 = \left(\overline{\nabla}\overline{\gamma}'/ds\right)_s = \mathbf{t}''(s)\, \gamma'_{\mathbf{t}(s)} + \mathbf{t}'(s)^2 \left(\overline{\nabla}\gamma'/dt\right)_{\mathbf{t}(s)}$, se deduce la identidad

$$\left.\frac{\overline{\nabla}}{dt}\gamma'\right|_{\mathbf{t}(s)} = -\frac{\mathbf{t}''(s)}{\mathbf{t}'(s)^2}\, \gamma'_{\mathbf{t}(s)} \tag{3.20}$$

Al sustituir (3.20) en la relación (3.19) anterior, se concluye:

$$(grad_{\mathbf{g}} f)_{\gamma(\mathbf{t}(s))} = \left(\frac{\mathbf{t}''(s)}{\mathbf{t}'(s)^2} + 2\, df(\gamma'_{\mathbf{t}(s)}) \right) \gamma'_{\mathbf{t}(s)} \tag{3.21}$$

Aplicando $\mathbf{g}(\gamma'_{\mathbf{t}(s)}, .)$ a esta ecuación, es posible determinar $df(\gamma'_{\mathbf{t}(s)}) = -\mathbf{t}''(s)/\mathbf{t}'(s)^2$, de manera que (3.21) adquiere finalmente la expresión

$$(grad_{\mathbf{g}} f)_{\gamma(\mathbf{t}(s))} = \left(\frac{\mathbf{t}''(s)}{\mathbf{t}'(s)^2} - 2\frac{\mathbf{t}''(s)}{\mathbf{t}'(s)^2} \right) \gamma'_{\mathbf{t}(s)} = -\frac{\mathbf{t}''(s)}{\mathbf{t}'(s)^2}\, \gamma'_{\mathbf{t}(s)},$$

tal y como se afirma en el enunciado. ■

Proposición 3.4 *Sean D^{γ}/dt y $D^{\overline{\gamma}}/ds$ las conexiones de Fermi-Walker respectivamente asociadas a una curva $t \mapsto \gamma(t)$ y a su reparametrización $s \mapsto \overline{\gamma}(s) = \gamma(\mathbf{t}(s))$. Entonces, si $\forall V \in \mathfrak{X}(\gamma)$ dentamos $\overline{V} = V \circ \mathbf{t} \in \mathfrak{X}(\overline{\gamma})$, se verifica:*

$$\left. \frac{D^{\overline{\gamma}}}{ds}\overline{V} \right|_s = \mathbf{t}'(s) \left. \frac{D^{\gamma}}{dt} V \right|_{\mathbf{t}(s)} - \frac{\mathbf{t}''(s)}{\mathbf{t}'(s)} \overline{V}(s) \tag{3.22}$$

Demostración. Por la propia definición de la conexión de Fermi-Walker, fijado un $s_0 \in J$ existe un $\varepsilon > 0$ tal que $\forall s \in J_0 = (s_0 - \varepsilon, s_0 + \varepsilon)$ se tiene

$$\left. \frac{D^{\gamma}}{dt} \right|_{\mathbf{t}(s)} = \left. \frac{\nabla}{dt} \right|_{\mathbf{t}(s)} \quad \text{y} \quad \left. \frac{D^{\overline{\gamma}}}{ds} \right|_s = \left. \frac{\overline{\nabla}}{ds} \right|_s ,$$

siendo ∇ y $\overline{\nabla}$ las conexiónes de Levi-Civita de dos métricas conformes $\mathbf{g}$ y $\overline{\mathbf{g}} = e^{2f}\mathbf{g}$ que tienen como geodésicas unitarias a las restricciones de las curvas $\gamma|_{\mathbf{t}(J_0)}$ y $\overline{\gamma}|_{J_0}$, respectivamente.

Por el Lema 3.3 anterior, conocemos el valor sobre la curva del gradiente $grad_{\mathbf{g}} f$ de la función de escala f. Las conexiones que ∇ y $\overline{\nabla}$ inducen a lo largo de la curva se relacionan entonces mediante la ecuación (3.8) que en este caso adquiere la siguiente expresión, al contar con la identidad (3.18) para $grad_{\mathbf{g}} f$:

$$\left. \frac{\overline{\nabla}}{dt} V \right|_{\mathbf{t}(s)} = \left. \frac{\nabla}{dt} V \right|_{\mathbf{t}(s)} - \frac{\mathbf{t}''(s)}{\mathbf{t}'(s)^2} V_{\mathbf{t}(s)}, \ \ \forall s \in J_0.$$

Por lo tanto, $\forall s \in J_0$ se tiene la identidad

$$\left. \frac{\overline{\nabla}}{ds}\overline{V} \right|_s = \left. \frac{\overline{\nabla}}{ds}(V \circ \mathbf{t}) \right|_s = \mathbf{t}'(s) \left. \frac{\overline{\nabla}}{dt} V \right|_{\mathbf{t}(s)} = \mathbf{t}'(s) \left. \frac{\nabla}{dt} V \right|_{\mathbf{t}(s)} - \frac{\mathbf{t}''(s)}{\mathbf{t}'(s)} \overline{V}(s),$$

cque da lugar a la siguiente relación entre las conexiones de Fermi-Walker:

$$\left. \frac{D^{\overline{\gamma}}}{ds}\overline{V} \right|_{s_0} = \mathbf{t}'(s_0) \left. \frac{D^{\gamma}}{dt} V \right|_{\mathbf{t}(s_0)} - \frac{\mathbf{t}''(s_0)}{\mathbf{t}'(s_0)} \overline{V}(s_0).$$

Este razonamiento puede reproducirse para cualquier instante s_0, y la identidad (3.22) se cumple de manera global a lo largo de todo el intervalo de definición la curva. ■

Corolario 3.3 *Si $V(t) \in \mathfrak{X}_{|\ |}(\gamma)$ es un campo Fermi–Walker paralelo a lo largo de la curva parametrizada $t \mapsto \gamma(t)$, entonces, el campo*

$$\widehat{V}(s) = \mathbf{t}'(s)\, V(\mathbf{t}(s)) \in \mathfrak{X}(\overline{\gamma})$$

es un campo Fermi-Walker-paralelo a lo largo de la reparametrización $\overline{\gamma}(s) = \gamma \circ \mathbf{t}(s)$.

Demostración. Sea $V \in \mathfrak{X}_{|\ |}(\gamma)$ campo Fermi-Walker paralelo ($D^{\gamma}V/dt = 0$). Con la notación $\overline{V} = V \circ \mathbf{t} \in \mathfrak{X}(\overline{\gamma})$ de la Proposición 3.4 anterior, y la fórmula (3.22) se deduce la siguiente cadena de identidades:

$$\begin{aligned} \tfrac{D^{\overline{\gamma}}}{ds}\widehat{V}\Big|_s &= \tfrac{D^{\overline{\gamma}}}{ds}\Big|_s \left(\mathbf{t}'(s)\overline{V}(s)\right) = \mathbf{t}''(s)\overline{V}(s) + \mathbf{t}'(s)\, \tfrac{D^{\overline{\gamma}}}{ds}\overline{V}\Big|_s \\ &= \mathbf{t}''(s)\overline{V}(s) + \mathbf{t}'(s)\left(\mathbf{t}'(s)\, \tfrac{D^{\gamma}}{dt}V\big|_{\mathbf{t}(s)} - \tfrac{\mathbf{t}''(s)}{\mathbf{t}'(s)}\overline{V}(s)\right) \\ &= \mathbf{t}''(s)\overline{V}(s) - \mathbf{t}''(s)\overline{V}(s) = 0. \end{aligned}$$

Concluimos así que $\widehat{V} = \mathbf{t}'\,(V \circ \mathbf{t})$ es un campo Fermi-Walker paralelo en $\mathfrak{X}_{|\ |}(\overline{\gamma})$. ∎

Este resultado permite relacionar los isomorfismos entre espacios tangentes (3.17) definidos por el transporte Fermi-Walker paralelo de vectores a lo largo de dos parametrizaciones distintas de una misma curva.

Corolario 3.4 *El transporte Fermi-Walker paralelo a lo largo de las parametrizaciones $t \mapsto \gamma(t)$ y $s \mapsto \overline{\gamma}(s) = \gamma \circ \mathbf{t}(s)$ da lugar a dos isomorfismos tangentes entre los espacios tangentes $T_{\gamma(\mathbf{t}(s_0))}M$ y $T_{\gamma(\mathbf{t}(s_1))}M$, que se relacionan por la identidad:*

$$|\ |_{s_0,s_1}^{\gamma\circ\mathbf{t}} = h_{\frac{\mathbf{t}'(s_1)}{\mathbf{t}'(s_0)}} \circ |\ |_{\mathbf{t}(s_0),\mathbf{t}(s_1)}^{\gamma} : T_{\gamma(\mathbf{t}(s_0))}M \longrightarrow T_{\gamma(\mathbf{t}(s_1))}M$$

para $h_{\frac{\mathbf{t}'(s_1)}{\mathbf{t}'(s_0)}}$ la homotecia en $T_{\gamma(t_1)}M$ de razón $\frac{\mathbf{t}'(s_1)}{\mathbf{t}'(s_0)} \in \mathbb{R}$ y centro $0 \in T_{\gamma(t_1)}M$.

En conclusión, la operación de transporte Fermi-Walker paralelo sobre curvas adquiere un sentido geométrico, independiente de la parametrización tomada, cuando se aplica sobre el espacio de direcciones (rectas vectoriales) del tangente:

$$\mathbb{P}|\ |_{s_0,s_1}^{\gamma\circ\mathbf{t}} = \mathbb{P}|\ |_{\mathbf{t}(s_0),\mathbf{t}(s_1)}^{\gamma}\ :\ \mathbb{P}_{\gamma(\mathbf{t}(s_0))}M \longrightarrow \mathbb{P}_{\gamma(\mathbf{t}(s_1))}M.$$

Precedentes en la conexión de Fermi-Walker

El interés de este trabajo se centra en las estructuras conformes exclusivamente Riemannianas. No obstante, el procedimiento que se ha seguido para la definición de esta nueva conexión conforme sobre las curvas parametrizadas, puede desarrollarse de manera análoga también para los casos semi-Riemannianos. En particular, en el caso de las estructuras conformes Lorentzianas, es posible definir igualmente una conexión canónica a lo largo de cada curva parametrizada cuya velocidad no caiga en ningún momento en una dirección luz. Esta restricción sobre el carácter del campo velocidad es consecuencia natural de los siguientes hechos conocidos: en primer lugar, una geodésica preserva su carácter temporal o espacial a lo largo de toda su trayectoria; por otra parte, es también bien conocida la rigidez de la familia de curvas geodésicas luz de una estructura conforme, cuyas trayectorias son invariantes y tienen como única libertad la posibilidad de reparametrización.

Es precisamente en el caso Lorentziano en donde la Teoría clásica de Relatividad proporciona los precedentes que dan nombre a la conexión conforme aquí presentada. En el contexto relativista, se define a lo largo de las curvas observador (esto es, a lo largo de las curvas temporales unitarias en la variedad Lorentziana del espacio-tiempo) una noción de conexión especial midiendo la variación rotacional en el desplazamiento de la curva. Esta conexión se define a partir de la conexión de Levi-Civita del ambiente métrico mediante la fórmula (3.15) del Lema 3.2, y recibe el nombre de conexión de Fermi-Walker. Su interpretación física es utilizada, por ejemplo, para modelizar el movimiento de giróscopos, o para el estudio del spin del electrón (véase por ejemplo: Misner-Thorne-Wheeler [35], Sachs [38]).

Los precedentes en la definición de la conexión conforme de Fermi-Walker aparecen por tanto en ambientes exclusivamente métricos. Sin embargo, los resultados que aquí hemos expuesto nos hacen pensar en el transporte Fermi-Walker paralelo como un transporte de naturaleza propiamente conforme; precisamente, como el naturalmente definido por la condición de preservar simultáneamente el campo velocidad de la curva y la estructura conforme del ambiente. Su definición en términos de operadores métricos (tal y como se expresa en (3.15)) es consecuencia de la relación que de manera obvia existe entre la estructura métrica y la estructura conforme asociada.

3.2 Invariantes conformes

El concepto de invariante hace alusión a una propiedad u objeto geométrico que se preserva inalterado bajo cierta clase de transformaciones. Su definición se apoya por tanto en la existencia de un grupo fundamental de transformaciones actuando sobre el espacio.

Así, en un espacio Euclídeo la distancia y la medida de ángulos entre vectores (la congruencia de triángulos) tienen calidad de invariantes en cuanto que éstas son preservadas por las isometrías del espacio; mientras que en un espacio conforme Euclídeo únicamente la medida de ángulos entre vectores (semejanza de triángulos) tiene sentido como invariante. Utilizando la terminología de **2.2.1**, para una estructura lineal arbitraria sobre un espacio vectorial, se entiende como invariante aquel objeto geométrico cuya definición es preservada por los automorfismos de la estructura.

En la teoría de G-estructuras sobre variedades diferenciables el concepto de invariante es fundamental. Fijado el subgrupo lineal $G \subset GL(m, \mathbb{R})$, un invariante (localizable) es una propiedad u objeto geométrico que se preserva por isomorfismos locales entre G-estructuras. Fieles a las ideas de Klein, podemos entender que la geometría de G-estructuras trata precisamente del estudio de sus invariantes.

Invariantes Riemannianos

En el caso $G = O(m)$, una G-estructura no es más que una variedad Riemanniana $(M, \mathbf{g})$ cuya familia de referencias ortonormales coincide con el fibrado de estructura $O(M) \to M$. Es claro que la métrica asociada $\mathbf{g} \in \mathfrak{T}^0_2(M)$ define un invariante característico de la estructura Riemanniana. Otro invariante bien conocido es el dado por la conexión de Levi-Civita ∇, cuya definición está canónicamente ligada a la $O(m)$-estructura. En este caso, la conexión de Levi-Civita llega a convertirse en un invariante caracterizador de la estructura Riemanniana mediante el siguiente resultado:

Teorema 3.3 *Sea $\varphi : M \to \overline{M}$ un difeomorfismo local entre variedades Riemannianas. Entonces, si M es conexa las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(i) *$\varphi : M \to \overline{M}$ es una isometría;*

(ii) *Existe un $b_0 \in O(M)$ tal que $\varphi_* b_0 \in O(\overline{M})$, y además φ preserva la conexión de Levi-Civita, esto es:*

$$\varphi_* (\nabla_X Y) = \overline{\nabla}_{\varphi_*(X)} \varphi_*(Y) \in \mathfrak{X}(\overline{M}), \quad \forall X, Y \in \mathfrak{X}(M).$$

Demostración. La demostración se basa en el hecho de que si φ preserva la conexión de Levi-Civita, preserva también el transporte de referencias ortonormales y el conjunto $\{x \in M : \varphi_* b \in O(\overline{M})_{\varphi(x)}$ para $b \in O(M)_x\}$ es abierto y cerrado en M. Luego, al ser M conexa este conjunto debe ser el total (dado que no puede ser el conjunto vacío porque por hipótesis contiene al menos el punto $\pi(b_0) \in M$). ■

Es claro que todo tensor definido en términos de $\mathbf{g}$ y de ∇ dará lugar a un nuevo invariante de la estructura Riemanniana. Este es el caso de los tensores clásicamente asociados a la curvatura: $R \in \mathfrak{T}^1_3(M)$, $Ric \in \mathfrak{T}^0_2(M)$, $Sc \in C^\infty(M)$ (véase su definición en el apartado **3.3.1**).

Invariantes conformes

Este trabajo se centra especialemente en el contexto de las variedades dotadas de una $CO(m)$-estructura $CO(M) \to M$; que se corresponden con las variedades conformes Riemannianas $(M, \mathcal{C})$ por la existencia de una clase de métricas conformemente equivalentes $\mathcal{C} = \{e^{2f}\mathbf{g} : f \in C^\infty(M)\}$ unívocamente asociada a la $CO(m)$-estructura.

Clásicamente, los invariantes conformes se obtienen a partir de aquellos tensores $T_{(\mathbf{g})} \in \mathfrak{T}(M)$ definidos en términos de un métrica $\mathbf{g}$ en la estructura conforme $\mathcal{C}$ tales que a través de un cambio conforme de la métrica $\overline{\mathbf{g}} = e^{2f}\mathbf{g}$ permanecen invariantes,

$$T_{(\mathbf{g})} = T_{(e^{2f}\mathbf{g})} \in \mathfrak{T}(M).$$

Este es el caso del clásico tensor de curvatura de Weyl $W \in \mathfrak{T}_3^1(M)$ que define un importante invariante de la geometría conforme Riemanniana.

La familia de conexiones lineales simétricas y conformes define un espacio

$$CCO(M) = \{\nabla + \Phi_\alpha : \alpha \in \Lambda^1(M)\} \quad \text{(Teorema 3.1)}$$

unívocamente asociado a la $CO(m)$-estructura. Igualmente, pueden obtenerse invariantes conformes mediante aquellos tensores $T_{(\nabla)} \in \mathfrak{T}(M)$ definidos en términos de una conexión conforme $\nabla \in CCO(M)$, tales que a través de un cambio de métrica conforme $\overline{\nabla} = \nabla + \Phi_\alpha$ permanecen invariantes,

$$T_{(\nabla)} = T_{(\nabla + \Phi_\alpha)} \in \mathfrak{T}(M).$$

En el apartado **3.3.3** se presenta una definición más general de tensor de curvatura de Weyl $W \in \mathfrak{T}_3^1(M)$ asociado a una conexión conforme no necesariamente métrica. Su definición se mantiene inalterada por los cambios de conexión conforme, y de este modo la curvatura de Weyl puede verse también como un invariante conforme ligado a la invarianza en el espacio de conexiones conformes.

En el capítulo anterior se ha demostrado la existencia de una conexión canónicamente asociada a la estructura conforme $CO(M) \to M$, que llamamos conexión de Fermi-Walker D^γ/dt, y que se define de manera natural a lo largo de cada curva parametrizada $t \mapsto \gamma(t) \in M$ de la variedad (Definición 3.1). Su definición está basada en el hecho de que es posible introducir en el espacio de conexiones conformes un criterio determinante de *adaptación a la curva*, en el sentido de la velocidad de la parametrización define un campo paralelo.

Se obtiene además el siguiente resultado:

Teorema 3.4 *Sea $\varphi : M \to \overline{M}$ un difeomorfismo local entre variedades Riemannianas conformes. Entonces, si M es conexa las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(i) $\varphi : M \to \overline{M}$ *es un difeomorfismo conforme.*

(ii) *Existe un* $b_0 \in CO(M)$ *tal que* $\varphi_* b_0 \in CO(\overline{M})$, *y admás* φ *preserva la conexión de Fermi-Walker, esto es: para una curva* $t \mapsto \gamma(t) \in M$, *se tiene que*

$$\varphi_* \left(\frac{D^\gamma}{dt} V \right) = \frac{\overline{D}^{\varphi \circ \gamma}}{dt} (\varphi_* \circ V) \in \mathfrak{X}(\varphi \circ \gamma), \quad \forall V \in \mathfrak{X}(\gamma).$$

Demostración. Su demostración es análoga a la del Teorema anterior, correspondiente la conexión de Levi-Civita de la geometría Riemanniana. ∎

La conexión de Fermi-Walker define por tanto un nuevo invariante conforme que mantiene claras similitudes con la conexión de Levi-Civita de la geometría Riemanniana. En particular, ofrece igualmente un invariante caracterizador de la estructura.

El procedimiento seguido para la definición de la conexión de Fermi-Walker puede generalizarse para obtener nuevos invariantes sobre las curvas parametrizadas de una $CO(m)$-estructura. De este modo, aquellos tensores $T_{\gamma,\nabla} \in \mathfrak{T}(\gamma)$ definidos (localmente) sobre la curva parametrizada $t \mapsto \gamma(t) \in M$ en términos de una conexión conforme $\nabla \in CCO(M)$ *adaptada a la curva* (i.e. que la tenga localmente como geodésica), y tales que a través de un cambio de conexión conforme $\overline{\nabla}$ igualmente adaptada a la curva, permanezca inalterado,

$$T_{\gamma,\nabla} = T_{\gamma,\overline{\nabla}},$$

darán lugar a la definición de invariantes conformes a lo largo de curvas parametrizadas.

3.3 Curvaturas en una variedad conforme

En esta sección se discute la posibilidad de que el criterio de adaptación a curvas parametrizadas en una variedad conforme Riemanniana, definido sobre las conexiones lineales y simétricas compatibles con al $CO(m)$-estructura, de lugar a un nuevo invariante conforme, de segundo orden, procedente de los tensores de curvatura asociados a las conexiones conformes.

En primer lugar, es necesario partir de los diferentes tensores que pueden asociarse al nivel de curvatura de las conexiones lineales en una variedad conforme. Se toma como referencia bien conocida el caso de las variedades Riemanianas, en el que las conexiones métricas (de Levi-Civita) tienen asociados los tensores de curvatura $R \in \mathfrak{T}^1_3(M)$, de Ricci $Ric \in \mathfrak{T}^0_2(M)$, y de curvatura escalar $Sc \in \mathfrak{T}^0_0(M) = C^\infty(M)$, tensores clásicos de la geometría Riemanniana (véase Aubin [3], Lafontaine-Gallot-Hullin [19], Haperlin-Grueb [20]).

En el caso en que la variedad conforme tenga dimensión $m > 2$, la teoría clásica de variedades conformes Riemannianas nos da ya a conocer la existencia de un tensor de curvatura de Weyl $W \in \mathfrak{T}_3^1(M)$ con carácter conforme. En su definición interviene un tensor $L \in \mathfrak{T}_2^0(M)$, asociado a la curvatura de las conexiones conformes, que se conoce con el nombre de tensor de Schouten. Este tensor L no es ya un invariante conforme, pero mediante el criterio de adaptación a la curva permite llegar a definir un nuevo invariante sobre las curvas parametrizadas.

3.3.1 Curvatura de una conexión lineal

Sea ∇ una conexión lineal en M compatible con la G-estructura $\pi : B \to M$, para $G \subset GL(m, \mathbb{R})$. Sea $\omega \in \Lambda^1(B, \mathfrak{g})$ la 1-forma horizontal de la conexión ∇, con valores en el álgebra $\mathfrak{g}$ del grupo de Lie G, y tal que $\ker \omega_b = \mathcal{H}_b \subset T_b B$, $\forall b \in B$.

Definición 3.2 *La* forma de curvatura $\in \Lambda^2(B, \mathfrak{g})$ *de la conexión* ∇ *es el tensor*

$$(\xi_b, \zeta_b) = d\omega(h^\nabla \xi_b, h^\nabla \zeta_b), \quad \forall \xi_b, \zeta_b \in T_b B, \tag{3.23}$$

siendo $h^\nabla : T_b B \to \mathcal{H}_b$ *el proyector horizontal de la descomposición* $T_b B = \mathcal{V}_b \oplus \mathcal{H}_b$.

La forma de curvatura verifica la siguiente identidad: [1]

$$= d\omega - \tfrac{1}{2} [\omega, \omega] \in \Lambda^2(B, \mathfrak{g}) \tag{3.24}$$

que recibe el nombre de *la segunda ecuación de estructura* para la conexión lineal ∇. La definición de la forma de curvatura $\in \Lambda^2(B, \mathfrak{g})$ viene dada a menudo mediante la ecuación de estructura (3.24).

Definición 3.3 *El* tensor de curvatura $R \in \mathfrak{T}_3^1(M)$ *de la conexión lineal* ∇ *se define*

$$R(X,Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z, \quad \forall X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M).$$

La relación de R con la forma de curvatura es entonces la siguiente: $\forall u, v \in T_x M$ el tensor de curvatura define la función lineal $R(u,v) : T_x M \ni w \to R(u,v) w \in T_x M$, y para toda referencia $b \in B_x$ se tiene que

$$(\xi_b, \zeta_b) = (b^{-1})_{\circledast}\ R(u,v) = b^{-1} \circ R(u,v) \circ b \in \mathfrak{g}$$

cuando $\pi_*(\xi_b) = u, \pi_*(\zeta_b) = v \in T_x M$.

Estas equivalencias que aquí damos sin demostración son resultados bien conocidos de la teoría de conexiones lineales. Pueden consultarse a este respecto Poor 9.17 [37] o Kobayashi-Nomizu [24] III.5.

[1] Se entiende que para todo par de 1-formas $\alpha, \beta \in \Lambda^1(B, \mathfrak{g})$ el corchete $[\ ,\ ]$ del álgebra $\mathfrak{g}$ permite definir su producto $[\alpha, \beta] \in \Lambda^2(B, \mathfrak{g})$, tal que

$$[\alpha, \beta]\,(\xi_b, \zeta_b) = [\alpha(\xi_b), \beta(\zeta_b)] - [\alpha(\zeta_b), \beta(\xi_b)] \in \mathfrak{g}, \quad \forall \xi_b, \zeta_b \in T_b B.$$

Curvaturas de una variedad Riemanniana

El caso en que el grupo de la G-estructura se corresponde con el grupo ortonormal lineal $O(m) \subset GL(m, \mathbb{R})$, describe las variedades Riemannianas.

Una variedad Riemanniana tiene unívocamente asociada una métrica $\mathbf{g}$ para la cual el fibrado asociado $O(M) \to M$ coincide con la familia de referencias $\mathbf{g}$-ortonormales. Es conocido que en M existe una única conexión simétrica compatible con la estructura $O(M) \to M$, que recibe el nombre de conexión de Levi-Civita y puede expresarse en términos de la métrica $\mathbf{g}$ (fórmula de Koszul (2.16), pág. 29).

El tensor de curvatura $R \in \mathfrak{T}_3^1(M)$ de la conexión de Levi-Civita ∇ permite definir una noción de curvatura propia de la variedad Riemanniana M. Así mismo, a partir del tensor $R \in \mathfrak{T}_3^1(M)$ se definen sobre M un *tensor de Ricci* $Ric \in \mathfrak{T}_2^0(M)$ (simétrico) y una *función curvatura escalar* $Sc \in C^\infty(M)$ tales que:

- $Ric(Y, Z) = \mathfrak{C}_2^1 R(Y, Z) = tr\{X \mapsto R(X, Y)Z\} \in C^\infty(M), \quad \forall Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$;
- $Sc(x) = \mathfrak{C}_2^1(Ric_{\uparrow \mathbf{g}})(x) = \sum_i Ric(v_i, v_i), \quad \forall (v_1, ..., v_m) \in O(M)_x \ \ (x \in M)$.

Estos tensores dan lugar a invariantes clásicos de la geometría Riemanniana, que han sido ampliamente estudiados (véase por ejemplo Aubin [3])

3.3.2 Curvaturas de una conexión conforme

Las variedades conformes Riemannianas pueden entenderse con esta terminología como las G-estructuras asociadas al grupo lineal conforme $G = CO(m) \subset GL(m, \mathbb{R})$.

Sea ∇ una conexión lineal y simétrica compatible con la estructura conforme $CO(M) \to M$, y sea $R \in \mathfrak{T}_3^1(M)$ el tensor de curvatura de ∇. Al igual que en el caso métrico Riemanniano, al aplicar sobre $R \in \mathfrak{T}_3^1(M)$ operadores definidos sobre el espacio de tensores de la variedad conforme M (véase **1.3.2**), se pueden asociar nuevos tensores al nivel de curvatura de ∇.

Mediante una operación de contracción de índices, similar a la del tensor de Ricci de una conexión métrica Riemanniana, se define un tensor $\mathfrak{Ric} \in \mathfrak{T}_2^0(M)$ asociado a la conexión conforme ∇ mediante la fórmula:

$$\mathfrak{Ric} = \mathfrak{C}_2^1 R + \frac{1}{m} \mathfrak{C}_1^1 R \in \mathfrak{T}_2^0(M) \quad . \tag{3.25}$$

Obsérvese que en el caso en que la conexión ∇ resulta ser también una conexión compatible con alguna métrica $\mathbf{g}$ de la estructura conforme, se tiene que $\mathfrak{C}_1^1 R = 0$, y el tensor (3.25) coincide con el tensor de Ricci usual de la geometría Riemanniana:

$$\mathfrak{Ric} = \mathfrak{C}_2^1 R = Ric \in \mathfrak{T}_2^0(M).$$

Por medio del operador conforme $\widehat{\ } = \mathfrak{C}_1^1 \circ \widetilde{\ } : \mathfrak{T}_2^0(M) \to \mathfrak{T}_2^0(M)$ (definido en 2.19, pág. 32), se asocia a la conexión conforme ∇ un tensor $SC \in \mathfrak{T}_2^0(M)$ definido por :

$$SC = \widehat{\ }\,\mathfrak{Ric} \in \mathfrak{T}_2^0(M). \tag{3.26}$$

De nuevo se observa que en el caso de que la conexión conforme ∇ sea además compatible con alguna métrica conforme $\mathbf{g}$, el tensor (3.26) permite recuperar la noción clásica de curvatura escalar de ∇ respecto a la métrica Riemanniana $\mathbf{g}$, esto es, la función $Sc = \mathfrak{C}_2^1(Ric_{\uparrow\mathbf{g}}) \in C^\infty(M)$. En particular, se da la identidad:

$$SC = \widehat{\ }\,Ric = \mathfrak{C}_2^1(Ric_{\uparrow\mathbf{g}} \quad \mathbf{g}) = \mathfrak{C}_2^1(Ric_{\uparrow\mathbf{g}}) \quad \mathbf{g} = Sc \quad \mathbf{g}.$$

Diferencia de tensores de curvatura de conexiones conformes

De la expresión para el tensor diferencia entre las distintas conexiones lineales compatibles con una misma $CO(m)$-estructura, fórmula (3.7) del Teorema 3.1, se derivan las relaciones que existen entre los correspondientes tensores asociados al nivel de curvatura.

Sean ∇ y $\overline{\nabla}$ dos conexiones lineales y simétricas compatibles con la estructura conforme $CO(M) \to M$. Por el Teorema 3.1, su tensor diferencia $\Phi_\alpha = \overline{\nabla} - \nabla \in \mathfrak{T}_2^0(M)$ viene dado por una 1-forma $\alpha \in \Lambda^1(M)$ tal que

$$\overline{\nabla}_X Y - \nabla_X Y = \Phi_\alpha(X,Y) = \alpha(X)Y + \alpha(Y)X - \widetilde{\ }\alpha(X,Y). \tag{3.27}$$

Los tensores de curvatura R y $\overline{R}$ en $\mathfrak{T}_3^1(M)$ respectivamente asociados a las conexiones conformes ∇ y $\overline{\nabla}$ se relacionan mediante una expresión derivada de (3.27). Para simplificar dicha expresión, introducimos la definición de un tensor $Q \in \mathfrak{T}_2^0(M)$, ligado a la 1-forma $\alpha \in \Lambda^1(M)$ por la fórmula:

$$Q(X,Y) = X(\alpha(Y)) - \alpha(\nabla_X Y) - \alpha(X)\alpha(Y), \ \forall X,Y \in \mathfrak{X}(M). \tag{3.28}$$

Obsérvese que se cumple la identidad $Q(X,Y) - Q(Y,X) = d\alpha(X,Y)$, y el tensor $Q \in \mathfrak{T}_2^0(M)$ es simétrico únicamente cuando la 1-forma α es cerrada, $\alpha = df$.

Entonces, a partir de la relación (3.27) se deduce que la diferencia entre las curvaturas de las conexiones conformes ∇ y $\overline{\nabla}$ viene dada por la siguiente ecuación

$$\begin{aligned} \left(\overline{R} - R\right)(X,Y)Z &= \{Q(X,Z) + \alpha(\widetilde{\ }\alpha(X,Z))\}Y \\ &\quad - \{Q(Y,Z) + \alpha(\widetilde{\ }\alpha(Y,Z))\}X \\ &\quad + \widetilde{\ }Q(Y,X,Z) - \widetilde{\ }Q(X,Y,Z) + d\alpha(X,Y)\,Z. \end{aligned} \tag{3.29}$$

Lema 3.4 *Para las conexiones conformes ∇ y $\overline{\nabla} = \nabla + \Phi_\alpha$, $\alpha \in \Lambda^1(M)$, se verifican las siguientes relaciones $\forall Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$:*

(a) $\left(\overline{\mathfrak{Ric}}-\mathfrak{Ric}\right)(Y,Z)=(2-\mathrm{m})Q(Y,Z)+(1-\mathrm{m})\alpha\,(\tilde{}\,\alpha(Y,Z))-\hat{}\,Q(Y,Z);$

(b) $\left(\overline{SC}-SC\right)(Y,Z)=(1-\mathrm{m})\,(2\ \hat{}\,Q(Y,Z)+\mathrm{m}\ \alpha\,(\tilde{}\,\alpha(Y,Z)))\,.$

Demostración. Partimos de la expresión (3.29) que relaciona los correspondientes tensores curvatura.

(a) Dado que $\mathfrak{Ric}=\mathfrak{C}^1_2R+\frac{1}{m}\mathfrak{C}^1_1R\in\mathfrak{T}^0_2(M)$ (3.25), se define a través de operaciones de contracción de índices que se reducen al cáculo de trazas, conviene recordar las siguientes propiedades de la traza de automorfismos en un espacio $\mathbb{V}$:

· $\forall r\in\mathbb{R}$ constante, $tr\{X\mapsto rX\}=r\dim\mathbb{V}$

· $\forall Y\in\mathbb{V}$, $\forall f\in\mathbb{V}^*$, $tr\{X\mapsto f(X)Y\}=f(Y)$

Teniendo en cuenta estas propiedades, el hecho de que $\mathfrak{C}^1_1\circ\tilde{}=\hat{}$ y la identidad

$$\mathfrak{C}^1_3\circ\tilde{}\,Q=\mathfrak{C}^1_2\circ\tilde{}\,Q=Q\in\mathfrak{T}^0_2(M)\quad\text{(Observación 2.6)},$$

se llega a las siguientes identidades, derivadas de (3.29):

$$\begin{aligned}(\mathfrak{C}^1_2\overline{R}-\mathfrak{C}^1_2R)(Y,Z)&=(1-\mathrm{m})\,\{Q(Y,Z)+\alpha\,(\tilde{}\,\alpha(Y,Z))\}\\&\quad+Q(Y,Z)-\hat{}\,Q(Y,Z)+d\alpha(Z,Y)\\(\mathfrak{C}^1_1\overline{R}-\mathfrak{C}^1_1R)(X,Y)&=\mathrm{m}\ d\alpha(X,Y).\end{aligned}$$

De ellas se concluye la relación del enunciado:

$$\left(\overline{\mathfrak{Ric}}-\mathfrak{Ric}\right)(Y,Z)=(2-\mathrm{m})Q(Y,Z)+(1-\mathrm{m})\alpha\,(\tilde{}\,\alpha(Y,Z))-\hat{}\,Q(Y,Z).$$

(b) Dado que se define $SC=\hat{}\,\mathfrak{Ric}\in\mathfrak{T}^0_2(M)$ (3.26), haremos uso de alguna de las propiedades del operador $\hat{}:\mathfrak{T}^0_2(M)\to\mathfrak{T}^0_2(M)$ demostradas en el apartado **2.3.2** del capítulo anterior. Así, por ejemplo, se tiene la identidad $\hat{}(\hat{}\,Q)=\mathrm{m}\hat{}\,Q\in\mathfrak{T}^0_2(M)$, consecuencia de la propiedad (**c**), pág. 32. Por otra parte, el tensor $(\alpha\circ\tilde{}\,\alpha)\in\mathfrak{T}^0_2(M)$ es proporcional a cualquier métrica conforme $\mathbf{g}$, dado que

$$(\alpha\circ\tilde{}\,\alpha)\,(Y,Z)=\alpha\,(\tilde{}\,\alpha(Y,Z))=\alpha(\alpha_{\uparrow\mathbf{g}})\,\mathbf{g}(Y,Z),\ \ \forall Y,Z\in\mathfrak{X}(M),$$

y en consecuencia verifica $\hat{}\,(\alpha\circ\tilde{}\,\alpha)=\mathrm{m}\,(\alpha\circ\tilde{}\,\alpha)$, por la propiedad (**a**) del operador $\hat{}$ dada en la página 32.

En estas condiciones, se deduce de la fórmula que se acaba de demostrar en **(a)** para la diferencia $\overline{\mathfrak{Ric}}-\mathfrak{Ric}$, la siguiente ecuación:

$$\begin{aligned}\left(\overline{SC}-SC\right)(Y,Z)&=(2-\mathrm{m})\hat{}\,Q(Y,Z)+(1-\mathrm{m})\hat{}\,(\alpha\circ\tilde{}\,\alpha)\,(Y,Z)-(\hat{})^2Q(Y,Z)\\&=(2-\mathrm{m})\hat{}\,Q(Y,Z)+(1-\mathrm{m})\mathrm{m}\ (\alpha\circ\tilde{}\,\alpha)\,(Y,Z)-\mathrm{m}\hat{}\,Q(Y,Z)\\&=(1-\mathrm{m})\,(2\ \hat{}\,Q(Y,Z)+\mathrm{m}\ \alpha\,(\tilde{}\,\alpha(Y,Z)))\end{aligned}$$

que concluyen con la identidad del enunciado. ■

El cálculo para estas relaciones puede encontrarse también en Kulkarni [25], y para un cálculo en coordenadas véase Eisenhart [15].

3.3.3 El tensor de curvatura de Weyl

Los resultados obtenidos en el apartado anterior (Lema 3.4) indican que los tensores que se han asociado a la curvatura de una conexión lineal lineal ∇ en una estructura conforme $CO(M) \to M$ mediante las definiciones (3.25) $\mathfrak{Ric} \in \mathfrak{T}_2^0(M)$ y (3.26) $SC \in \mathfrak{T}_2^0(M)$, no permanecen invariantes por cambios conformes de la conexión.

Del Lema 3.4 se deduce que un par de conexiones conformes ∇ y $\overline{\nabla} = \Phi_\alpha$, con $\alpha \in \Lambda^1(M)$, en una misma estructura conforme $CO(M) \to M$ con $\dim(M) = m > 2$, tienen asociados a su curvatura tensores que verifican la identidad

$$\left(\overline{\mathfrak{Ric}} - \tfrac{1}{2(\mathrm{m}-1)}\overline{SC}\right) - \left(\mathfrak{Ric} - \tfrac{1}{2(\mathrm{m}-1)}SC\right) = (2-\mathrm{m})\left(Q + \tfrac{1}{2}\,\alpha \circ {}^{\sim}\alpha\right),$$

en donde $Q \in \mathfrak{T}_2^0(M)$ es el tensor asociado a la 1-forma $\alpha \in \Lambda^1(M)$ a través de la fórmula (3.28) de la página 55 .

Por lo tanto, si definimos el *tensor de Schouten* $L \in \mathfrak{T}_2^0(M)$ asociado a una conexión conforme ∇ como el definido por la identidad

$$L = \tfrac{1}{\mathrm{m}-2}\left(Ric - \tfrac{1}{2(\mathrm{m}-1)}SC\right) \in \mathfrak{T}_2^0(M), \tag{3.30}$$

entonces, las conexiones conformes ∇ y $\overline{\nabla}$ verifican la siguiente relación entre sus correspondientes tensores de Schouten L y $\bar{L}$:

$$\bar{L} - L = Q + \tfrac{1}{2}\,\alpha \circ {}^{\sim}\alpha \in \mathfrak{T}_2^0(M). \tag{3.31}$$

Al aplicar el operador conforme $^{\sim} : \mathfrak{T}_2^0(M) \to \mathfrak{T}_3^1(M)$ sobre (3.31), obtenemos:

$$\left({}^{\sim}\bar{L} - {}^{\sim}L\right)(X,Y,Z) = {}^{\sim}Q(X,Y,Z) + \tfrac{1}{2}\,(\alpha \circ {}^{\sim}\alpha)(Y,Z)\,X. \tag{3.32}$$

La deseada condición de invarianza respecto a cambios conformes de conexion, llega con la definición de la siguiente noción tensor de curvatura conforme.

Definición 3.4 *El* tensor de curvatura de Weyl *de una conexión conforme* ∇ *es el tensor* $W \in \mathfrak{T}_3^1(M)$ *que sobre campos* $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ *actúa del siguiente modo:*

$$\begin{aligned} W(X,Y)Z = {} & R(X,Y)Z + L(Y,Z)X + {}^{\sim}L(X,Y,Z) \\ & - L(X,Z)Y - {}^{\sim}L(Y,X,Z) \\ & - \{L(X,Y) - L(Y,X)\}\,Z. \end{aligned} \tag{3.33}$$

En el caso en que la conexión conforme ∇ sea además compatible con una métrica conforme $\mathbf{g}$, el tensor de curvatura de Weyl definido por (3.33) adquiere su expresión clásica para conexiones Riemannianas:

$$W(X,Y)Z = R(X,Y)Z + L(Y,Z)X - L(X,Z)Y + \mathbf{g}(Y,Z)L_{\uparrow\mathbf{g}}(X) - \mathbf{g}(X,Z)L_{\uparrow\mathbf{g}}(Y)$$

donde $L \in \mathfrak{T}_2^0(M)$ es el tensor de Schouten con su definición usual

$$L = -\tfrac{1}{m-2}\left(Ric - \tfrac{Sc}{2(m-1)}\,\mathbf{g}\right) \tag{3.34}$$

que únicamente en el caso de las conexiones métricas da lugar a un tensor simétrico.

Proposición 3.5 *Para dos conexiones conformes ∇ y $\overline{\nabla} = \nabla + \Phi_\alpha$, $\alpha \in \Lambda^1(M)$, de una misma estructura conforme $CO(M) \to M$, los respectivos tensores de curvatura de Weyl definen el mismo tensor en $\mathfrak{T}_3^1(M)$,*

$$\overline{W}(X,Y)Z = W(X,Y)Z, \quad \forall X,Y,Z \in \mathfrak{X}(M).$$

Demostración. De la identidad (3.31) aplicada a los tensores de Schouten L y $\bar{L}$ respectivamente asociados a las conexiones ∇ y $\overline{\nabla}$, se deduce que

$$\left(\bar{L} - L\right)(X,Y) - \left(\bar{L} - L\right)(Y,X) = Q\,(X,Y) - Q(Y,X) = d\alpha(X,Y)$$

Por otra parte, una combinación de las relaciones (3.31) y (3.32) implica que:

$$\left(\bar{L} - L\right)(Y,Z)X + \left(\tilde{\bar{L}} - \tilde{L}\right)(X,Y,Z) = \{Q(Y,Z) + \alpha(\tilde{\alpha}(Y,Z))\}\,X + \tilde{Q}(X,Y,Z)$$

A la vista de estas identidades, y de la ecuación (3.29) de la página 55 que relaciona los tensores de curvatura de las conexiones ∇ y $\overline{\nabla}$, se observa que las diferencias quedan compensadas en la definición de la curvatura de Weyl, dando lugar a la identidad : $\overline{W}(X,Y)Z - W(X,Y)Z = 0$. ∎

El tensor de curvatura de Weyl $W \in \mathfrak{T}_3^1(M)$ es por tanto un invariante conforme y permite definir una noción de curvatura para la $CO(m)$-estructura. Se tiene así que la curvatura de Weyl es un importante referente que mide el alejamiento de la estructura conforme de ser localmente plana. En este sentido, es un resultado bien conocido de la geometría conforme (véase Lafontaine [27], Aubin [3] o Yano [54]) que una variedad conforme $CO(M) \to M$ con $\dim(M) > 3$ es localmente plana únicamente cuando su tensor curvatura de Weyl es idénticamente nulo, $W \equiv 0$. En el caso $\dim(M) = 3$, en que la variedad conforme es tridimensional, el tensor de Weyl es siempre idénticamente nulo, y la condición de ser localmente plana equivale entonces a la condición $\nabla_X L(Y,.) - \nabla_Y L(X,.) \equiv 0$, para cualquier conexión métrica ∇ de la estructura conforme.

Se observa así que el tensor $L \in \mathfrak{T}_2^0(M)$ juega también un significativo papel en la curvatura de las variedades conformes. La trascendencia del tensor de Schouten se verá consolidada en resultados posteriores que lo relacionan con la conexión de Fermi-Walker y con la geometría de curvas parametrizadas en una variedad conforme Riemanniana.

3.3.4 El tensor de Schouten a lo largo de curvas

Una conexión lineal y simétrica ∇ en la estructura conforme $CO(M) \to M$, con $\dim(M) = m > 2$, tiene asociado a su curvatura un tensor de Schouten $L \in \mathfrak{T}_2^0(M)$ definido por la fórmula (3.30) de la página 57,

$$L = \tfrac{1}{(2-\mathrm{m})}\left(\mathfrak{Ric} - \tfrac{1}{2(\mathrm{m}-1)}SC\right) \in \mathfrak{T}_2^0(M)\ .$$

Proposición 3.6 *Sean ∇ y $\overline{\nabla} = \nabla + \Phi_\alpha$, dos conexiones conformes en M relacionadas por la 1-forma $\alpha \in \Lambda^1(M)$. Si tienen como geodésica común de ambas a una curva $t \mapsto \gamma(t) \in M$, entonces, sus tensores de Schouten L y $\overline{L}$ en $\mathfrak{T}_2^0(M)$ verifican:*

$$\overline{L}\left(\gamma'(t), V(t)\right) = L(\gamma'(t), V(t)), \quad \forall V(t) \in \mathfrak{X}(\gamma).$$

Demostración. Por la Proposición 3.3, sabemos que en las condiciones del enunciado la 1-forma $\alpha \in \Lambda^1(M)$ tiene la propiedad de ser idénticamente nula sobre los puntos de la curva: $\alpha_{\gamma(t)} = 0$, $\forall t$. Por lo tanto, el tensor $Q \in \mathfrak{T}_2^0(M)$ asociado a α por la fórmula (3.28), pág.55, que regula la diferencia a nivel de curvatura, es tal que sobre los puntos de la curva verifica:

$$Q(X,Y)_{\gamma(t)} = X_{\gamma(t)}(\alpha(Y)), \quad \forall X, Y \in \mathfrak{X}(M).$$

En particular, para el campo velocidad $\gamma'(t) \in \mathfrak{X}(\gamma)$, la condición $\alpha \circ \gamma = 0$ implica además que $\forall V(t) \in \mathfrak{X}(\gamma)$ es

$$Q(\gamma'(t), V(t)) = \gamma'(t)\,(\alpha(V)) = 0. \tag{3.35}$$

En estas condiciones, las ecuaciones obtenidas anteriormente para la relación entre los tensores de tipo curvatura de dos conexiones conformes (Lema 3.4 y fórmula (3.31)), quedan reducidas a las siguientes expresiones sobre campos $V, W \in \mathfrak{X}(\gamma)$:

- $(\overline{\mathfrak{Ric}} - \mathfrak{Ric})(V,W) = (2-\mathrm{m})Q(V,W) - \hat{}Q(V,W)$;
- $\left(\overline{SC} - SC\right)(V,W) = -2(\mathrm{m}-1)\hat{}Q(V,W)$;
- $\left(\overline{L} - L\right)(V,W) = Q(V,W)$

Dado que el tensor $Q \in \mathfrak{T}_2^0(M)$ puede hacerse idénticamente nulo a través de (3.35), concluimos que $\forall V \in \mathfrak{X}(\gamma)$ se verfica

$$\left(\overline{L} - L\right)(\gamma', V) = Q(\gamma', V) = 0,$$

equivalente a la condición $\overline{L}(\gamma', V) = L(\gamma', V)$ del enunciado. ■

El resultado de unicidad para el tensor de Schouten que ofrece esta proposición, puede aplicarse entonces a la familia de conexiones conformes adaptadas a una curva arbitraria $t \mapsto \gamma(t) \in M$.

Se tiene así que, por un razonamiento análogo al empleado para la conexión de Fermi-Walker, existe sobre cada curva parametrizada $t \mapsto \gamma(t) \in M$ de una variedad conforme Riemanniana, con $dim(M) > 2$, un tensor $L^\gamma \in \Lambda^1(\gamma)$ perfectamente definido por la condición:

> "*si* $L \in \mathfrak{T}_2^0(M)$ *es el tensor de Schouten de una conexión conforme* ∇ *adaptada a* $\gamma(t)$, *esto es, tal que tiene como geodésica a la restricción de la curva* $\gamma|_{I_0}$ *para un intervalo* I_0, *entonces,* $\forall t \in I_0$ *se verifica*:
>
> $$L^\gamma(v) = L\left(\gamma'(t), v\right), \quad \forall v \in T_{\gamma(t)}M." \tag{3.36}$$

La Proposición 3.6 asegura que no hay ambigüedad alguna en la definición (3.36) de $L^\gamma \in \Lambda^1(\gamma)$, que depende exclusivamente de la estructura conforme $CO(M) \to M$.

Definición 3.5 *El tensor* $L^\gamma \in \Lambda^1(\gamma)$ *definido por* (3.36) *recibe el nombre de* tensor de Schouten *de la estructura conforme* $CO(M) \to M$ *a lo largo de la curva parametrizada* $t \mapsto \gamma(t) \in M$.

3.3.5 El tensor de Schouten bajo reparametrizaciones

La estructura conforme Riemanniana $CO(M) \to M$ de una variedad con $\dim(M) > 2$, va ligada a un tensor de Schouten conforme que define sobre cada curva parametrizada $t \mapsto \gamma(t) \in M$ un tensor $L^\gamma \in \Lambda^1(\gamma)$. En este apartado se estudia en qué modo depende la definición del tensor de Schouten conforme de la parametización tomada sobre la curva.

Lema 3.5 *Sean* $\mathbf{g}$ *y* $\overline{\mathbf{g}} = e^{2f}\mathbf{g}$ *dos métricas conformes que tienen como geodésica unitaria a una curva* $t \mapsto \gamma(t)$ *y a su reparametrización* $s \mapsto \overline{\gamma}(s) = \gamma \circ \mathbf{t}(s)$, *respectivamente. Si* L *y* $\overline{L}$ *denotan los tensores de Schouten asociados a* $\mathbf{g}$ *y* $\overline{\mathbf{g}}$, *entonces,*

$$(\overline{L} - L)(\gamma'_{\mathbf{t}(s)}, V_{\mathbf{t}(s)}) = -\left(\frac{\mathbf{t}'''(s)}{\mathbf{t}'(s)^3} - \frac{3}{2}\frac{\mathbf{t}''(s)^2}{\mathbf{t}'(s)^4}\right) \mathbf{g}(\gamma'_{\mathbf{t}(s)}, V_{\mathbf{t}(s)}), \quad \forall V \in \mathfrak{X}(\gamma).$$

Demostración. Por el Lema 3.3 de la página 46, la función de escala $f \in C^\infty(M)$ entre las métricas conformes $\mathbf{g}$ y $\overline{\mathbf{g}}$, verifica en tales condiciones la ecuación (3.18). Es decir, si denotamos $F = (grad_{\mathbf{g}} f) \circ \gamma \in \mathfrak{X}(\gamma)$, entonces,

$$F(t) = -c(t)\,\gamma'(t) \tag{3.37}$$

para $c(t) \in C^\infty(\gamma)$ la función definida por $c_{\mathbf{t}(s)} = \mathbf{t}''(s)\mathbf{t}'(s)^{-2}$, para $\mathbf{t}(s)$ difeomorfismo.

Por otra parte, la fórmula (3.31), pág. 3.31, aplicada a los tensores de Schouten de las métricas $\mathbf{g}$ y $\overline{\mathbf{g}}$ da lugar a la relación

$$\overline{L}\,(\gamma', V) - L\,(\gamma', V) = Q(\gamma', V) + \tfrac{1}{2} df\,(\tilde{\ } df(\gamma', V)), \quad \forall V \in \mathfrak{X}(\gamma).$$

De la identidad (3.37) para $F = df_{\uparrow\mathbf{g}} \in \mathfrak{X}(\gamma)$, se deducen las ecuaciones:

$$\begin{aligned}
Q(\gamma'_t, V_t) &= \gamma'_t\,(df(V)) - df(\nabla_{\gamma'_t} V) - df(\gamma'_t)\,df(V_t)\\
&= \mathbf{g}(\nabla_{\gamma'_t} F, V_t) - \mathbf{g}(F_t, \gamma'_t)\mathbf{g}(F_t, V_t)\\
&= \mathbf{g}(-c'_t\,\gamma'_t, V_t) - \mathbf{g}(-c_t\,\gamma'_t, \gamma'_t)\mathbf{g}(-c_t\,\gamma'_t, V_t) = -(c'_t + c_t^2)\,\mathbf{g}(\gamma'_t, V_t)
\end{aligned}$$

$$df\,\big(\tilde{\ } df(\gamma'_t, V_t)\big) = df\,\big(\mathbf{g}(\gamma'_t, V_t)\,F_t\big) = \mathbf{g}(\gamma'_t, V_t)\,\mathbf{g}(F_t, F_t) = c_t^2\,\mathbf{g}(\gamma'_t, V_t).$$

De modo que se cumple la siguiente igualdad

$$(\overline{L} - L)\,(\gamma'_t, V_t) = -(c'_t + \tfrac{1}{2}c_t^2)\,\mathbf{g}(\gamma'_t, V_t). \tag{3.38}$$

La función $c_t \in C^\infty(\gamma)$ viene definida por $c_{\mathbf{t}(s)} = \mathbf{t}''_s(\mathbf{t}'_s)^{-2}$, y su derivada $c'_t \in C^\infty(\gamma)$ verifica $c'_{\mathbf{t}(s)} = \big(\mathbf{t}'''_s\mathbf{t}'_s - 2(\mathbf{t}''_s)^2\big)\,(\mathbf{t}'_s)^{-4}$. Entonces,

$$c'_{\mathbf{t}(s)} + \frac{1}{2}c^2_{\mathbf{t}(s)} = \frac{\mathbf{t}'''_s\mathbf{t}'_s - 2(\mathbf{t}''_s)^2}{(\mathbf{t}'_s)^4} + \frac{1}{2}\frac{(\mathbf{t}''_s)^2}{(\mathbf{t}'_s)^4} = \frac{\mathbf{t}'''_s}{(\mathbf{t}'_s)^3} - \frac{3}{2}\frac{\mathbf{t}''_s)^2}{(\mathbf{t}'_s)^4},$$

y de (3.38) se concluye que efectivamente es

$$(\overline{L} - L)(\gamma'_{\mathbf{t}(s)}, V_{\mathbf{t}(s)}) = -\left(\frac{\mathbf{t}'''_s}{(\mathbf{t}'_s)^3} - \frac{3}{2}\frac{\mathbf{t}''_s)^2}{(\mathbf{t}'_s)^4}\right)\mathbf{g}(\gamma'_{\mathbf{t}(s)}, V_{\mathbf{t}(s)}).$$

■

Un difeomorfismo real $s \mapsto \mathbf{t}(s)$ tiene asociada, a través de la estructura proyectiva inherente a $\mathbb{R}^1$ como abierto de la recta proyectiva $\mathbb{P}^1 \approx \mathbb{R}^1 \cup \{\infty\}$, una función *derivada de Schwarz* $s \mapsto \mathcal{S}(\mathbf{t})_s$ (definida originalmente por Schwarz [45]) tal que

$$\mathcal{S}(\mathbf{t})_s = \frac{\mathbf{t}'''(s)}{\mathbf{t}'(s)} - \frac{3}{2}\frac{\mathbf{t}''(s)^2}{\mathbf{t}'(s)^2}. \tag{3.39}$$

La derivada de Schwarz define una operación natural de derivación en $\mathbb{P}^1$, compatible con su estructura proyectiva, con las siguientes propiedades (véase Lehto [30]):

(a) $\mathcal{S}(\overline{\mathbf{t}}\circ\mathbf{t})_s = (\mathbf{t}'_s)^2\,\mathcal{S}(\overline{\mathbf{t}})_{\mathbf{t}(s)} + \mathcal{S}(\mathbf{t})_s$;

(b) $\mathcal{S}(\mathbf{t})_s = 0 \;\Leftrightarrow\; \mathbf{t}\in Hom(\mathbb{P}^1) \;\Leftrightarrow\; \mathbf{t}_s = \frac{as+b}{cs+d},, \quad \begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix}\in SL(2,\mathbb{R})$;

(c) $\mathcal{S}(h\circ\mathbf{t})_s = \mathcal{S}(\mathbf{t})_s,\ \forall h\in Hom(\mathbb{P}^1)$.

Esta derivada será retomada más adelante en el capítulo 5, en donde se muestra su importante papel en el tratamiento de los invariantes asociados a curvas en un ambiente conforme Riemanniano.

Se observa entonces que en el Lema 3.5 que se acaba de demostrar, la variación entre los tensores de Schouten L y $\overline{L}$ viene controlada por la derivada de Schwarz de la reparametrización $\mathbf{t}(s)$. Al aplicar este resultado al tensor de Schouten conforme sobre curvas parametrizadas de una variedad conforme M, se obtiene la siguiente relación entre los tensores de Schouten de dos parametrizaciones distintas de una misma curva.

Proposición 3.7 *El tensor de Schouten ligado a una variedad conforme M, con $\dim(M) > 2$, verifica que si $s\mapsto\mathbf{t}(s)$ define un cambio de parámetro para la curva parametrizada $t\mapsto\gamma(t)\in M$, entonces,*

$$L^{\gamma\circ\mathbf{t}}(\widehat{V}_s) = (\mathbf{t}'_s)^2\,L^{\gamma}\left(V_{\mathbf{t}(s)}\right) - \mathcal{S}(\mathbf{t})_s\,\mathbf{g}(\gamma'_{\mathbf{t}(s)}, V_{\mathbf{t}(s)})$$

para $V_t\in\mathfrak{X}(\gamma)$ y $\widehat{V}_s = \mathbf{t}'_s\,V_{\mathbf{t}(s)}\in\mathfrak{X}(\gamma\circ\mathbf{t})$.

Demostración. Por el Corolario 3.2, para cada instante s_0 existen métricas conformes $\mathbf{g}$ y $\overline{\mathbf{g}}$ tales que tienen como curva geodésica unitaria a las restricciones de $\gamma|_{\mathbf{t}(J_0)}$ y $\gamma\circ\mathbf{t}|_{J_0}$, respectivamente, para un entorno abierto J_0 de s_0. En consecuencia el tensor de Schouten conforme, viene definido por los tensores L y $\overline{L}$ asociados a las métricas $\mathbf{g}$ y $\overline{\mathbf{g}}$:

$$L^{\gamma}(v) = L(\gamma'_t, v),\ \forall t\in\mathbf{t}(J_0) \quad \text{y} \quad L^{\gamma\circ\mathbf{t}}(v) = \overline{L}((\gamma\circ\mathbf{t})'_s, v),\ \forall s\in J_0.$$

Se tiene así que para $V_t\in\mathfrak{X}(\gamma)$ y $\widehat{V}_t = \mathbf{t}'(s)\,V_{\mathbf{t}(s)}\in\mathfrak{X}(\gamma\circ\mathbf{t})$, es

$$\begin{aligned} L^{\gamma\circ\mathbf{t}}(\widehat{V}_s) &= \overline{L}((\gamma\circ\mathbf{t})'_s, \mathbf{t}'_s\,V_{\mathbf{t}(s)}) = \mathbf{t}'(s)^2\overline{L}(\gamma'_{\mathbf{t}(s)}, V_{\mathbf{t}(s)})\\ &= \mathbf{t}'(s)^2 L(\gamma'_{\mathbf{t}(s)}, V_{\mathbf{t}(s)}) - \mathcal{S}(\mathbf{t})_s\,\mathbf{g}(\gamma'_{\mathbf{t}(s)}, V_{\mathbf{t}(s)})\\ &= \mathbf{t}'(s)^2 L^{\gamma}(V_{\mathbf{t}(s)}) - \mathcal{S}(\mathbf{t})_s\,\mathbf{g}(\gamma'_{\mathbf{t}(s)}, V_{\mathbf{t}(s)}), \qquad \forall s\in J_0 \end{aligned}$$

como consecuencia de la relación dada por el Lema 3.5 para L y $\overline{L}$. ■

En capítulos posteriores se hará hincapié en la transcendencia de esta relación entre el tensor de Schouten y la derivada de Schwarz, y su importancia a la hora de dotar a las curvas en una variedad conforme Riemanniana de una $\mathbb{P}^1$-estructura heredada del ambiente.

Capítulo 4

La conexión de Fermi-Walker en el fibrado $CO(M)$

En este capítulo se estudian con detalle la naturaleza y propiedades de la conexión de Fermi-Walker unívocamente asociada a las variedades conformes Riemannianas.

En una variedad conforme, el paralelismo de Fermi-Walker que hemos introducido en el capítulo anterior, define un transporte paralelo preferente sobre cada curva parametrizada de la variedad. El transporte de las referencias lineales da lugar a una operación de elevación de curvas parametrizadas en el fibrado $LM \to M$, igualmente canónica (recuérdense del Capítulo **2** las distintas definiciones asociadas a la noción de conexión). Así, para una curva parametrizada $t \mapsto \gamma(t) \in M$, cada referencia $b \in LM_{\gamma(t_0)}$ define una única *curva elevación Fermi-Walker horizontal* $t \mapsto (\mathbb{P}_\gamma b)_t \in LM$ tal que $(\mathbb{P}_\gamma b)_{t_0} = b \in LM_{\gamma(t_0)}$ y $\pi\,(\mathbb{P}_\gamma b)_t = \gamma(t)$ (sección **4.2.1**)

En el caso de las conexiones lineales ∇ la operación de elevación de curvas cumple la propiedad de que la dependencia entre la curva base $t \mapsto \gamma(t)$ y la curva elevación en el fibrado $t \mapsto \left(\mathbb{P}_\gamma^\nabla b\right)_t$ puede reducirse a nivel infinitesimal a una relación de primer orden entre sus tangentes. De este modo, tiene sentido la operación de elevación horizontal infinitesimal definida sin ambigüedad como:

$$\begin{array}{rcccl} \kappa_b^\nabla & : & T_xM & \longrightarrow & T_bLM \qquad (\forall b \in LM_x), \\ & & \gamma'(0) & \longmapsto & \left(\mathbb{P}_\gamma^\nabla b\right)'(0) \end{array}$$

y el espacio tangente T_xM está en correspondencia con un subespacio ∇-horizontal $\mathcal{H}_b^\lambda = \kappa_b^\lambda(T_xM) \subset T_bLM$, $\forall b \in LM$.

En la sección **4.2.2**, se discute qué dependencia existe a nivel infinitesimal (tangente) en la operación de elevación de curvas parametrizadas de la conexión conforme de Fermi-Walker. Mediante la introducción del concepto de espacio tangente de segundo orden $T^2M \to M$, que se trata previamente en la sección 1, el Teorema 4.1 resuelve que la operación de elevación infinitesimal asociada a la conexión de Fermi-Walker va ligada a funciones que esencialmente se definen como

$$\begin{array}{rcll} \kappa_b \; : \; T_x^2 M & \longrightarrow & T_b LM & \qquad (\forall b \in LM_x). \\ j_0^2(\gamma) & \longmapsto & (\mathbb{P}_\gamma b)'(0) = j_0^1(\mathbb{P}_\gamma b) & \end{array}$$

y el fibrado horizontal asociado tiene como fibras las copias $\mathcal{H}_b = \kappa_b(T_x^2 M) \subset T_b LM$ de los tangentes de segundo orden $T_x^2 M$ de la variedad M.

Además, la relación que por definición existe entre la conexión de Fermi-Walker y la familia $CCO(M)$ de conexiones lineales y simétricas de la estructura conforme $CO(M) \to M$, queda manifiesta también a nivel de sus funciones de elevación en el fibrado conforme. En definitiva, se puede afirmar que la función de elevación Fermi-Walker horizontal $\kappa_b : \widetilde{T}_x^2 M \to T_b LM$, es el resultado de "ensamblar" las distintas funciones de elevación $\kappa_b^\nabla : T_x M \to T_b LM$ (monomorfismos) ligadas a las conexiones conformes $\nabla \in CCO(M)$, en el siguiente sentido:

(a) $\widetilde{T}_x^2 M = \bigcup_{\nabla \in CCO(M)} \left\{ \sigma^\nabla (T_x M\text{-}\{0_x\}) \right\}$ (Proposición 4.2);

(b) $\kappa_b \circ \sigma^\nabla = \kappa_b^\nabla$ (Proposición 4.3).

4.1 El fibrado tangente de segundo orden de M

Fijado un punto x en una variedad diferenciable M, se denota por $C(x, M)$ al conjunto de curvas diferenciables por x, esto es, de curvas parametrizadas $t \mapsto \gamma(t) \in M$, no necesariamente regulares, tales que estando definidas en un entorno abierto del origen $0 \in \mathbb{R}$ verifican $\gamma(0) = x \in M$.

En el espacio $C(x, M)$ se introduce la siguiente relación de equivalencia $\sim$:

$\gamma \sim \overline{\gamma} \;\; \Leftrightarrow \;\; \exists$ *carta* $(\mathcal{U}, \varphi = \{x^1, ..., x^m\})$ *con* $x \in \mathcal{U}$*, tal que* $\forall k = 1, ..., m$ *es:*

$$\begin{array}{lccc} [\,\mathbf{i}\,]: & \left.\frac{d(x^k \circ \gamma)}{dt}\right|_{t=0} & = & \left.\frac{d(x^k \circ \bar{\gamma})}{dt}\right|_{t=0} \\ [\,\mathbf{ii}\,]: & \left.\frac{d^2(x^k \circ \gamma)}{dt^2}\right|_{t=0} & = & \left.\frac{d^2(x^k \circ \bar{\gamma})}{dt^2}\right|_{t=0} \end{array} \tag{4.1}$$

El sistema de condiciones $[\,\mathbf{i}\,], [\,\mathbf{ii}\,]$ es independiente de la eleccción de la carta $(\mathcal{U}, \varphi)$ en un entorno de $x \in M$, como puede demostrarse operando con el difeomorfismo asociado a un cambio de carta. Nótese además que la condición $[\,\mathbf{i}\,]$ expresa la identidad entre las velocidades iniciales de las curvas, $\gamma_0' = \bar{\gamma}_0' \in T_x M$, cuya independencia de la carta tomada es bien conocida.

Definición 4.1 *El* 2-jet $j_0^2(\gamma)$ *de una curva parametrizada* $\gamma(t)$ *por* $x \in M$ *es la clase de equivalencia que esta define en* $C(x,M)_{/\sim}$*, y*

$$T_x^2 M = \left\{ j_0^2(\gamma) \in C(x,M)_{/\sim} : \gamma \in C(x,M) \right\},$$

denota el espacio de 2-jets en $x \in M$ *(Cordero-Dodson-de Leon [13] o Liberman [33]).*

Dado que la condición $[\,\mathbf{i}\,]$ equivale a la identidad en las velocidades iniciales de las curvas, tiene sentido definir la siguiente proyección, $\forall x \in M$:

$$\begin{array}{rccc} \mathrm{p}_x: & T_x^2 M & \longrightarrow & T_x M \\ & j_0^2(\gamma) & \longmapsto & j_0^1(\gamma) = \gamma'(0) \end{array} \tag{4.2}$$

Proposición 4.1 *Una conexión lineal* ∇ *en la variedad* M *define una biyección*

$$\begin{array}{rcccc} \nabla_x: & T_x^2 M & \longrightarrow & T_x M \times T_x M & \qquad (\forall x \in M) \\ & j_0^2(\gamma) & \longmapsto & (\gamma_0', \frac{\nabla}{dt}\gamma'|_0) & \end{array} \tag{4.3}$$

que identifica a la proyección p_x *de* (4.2) *con la proyección natural* $T_x M \times T_x M \to T_x M$ *en la primera componente del producto.*

Demostración. La demostración es inmediata al observar que la relación de equivalencia $\sim$ definida en $C(x,M)$ por (4.1) admite ser expresada de manera alternativa mediante el par de condiciones

$$\begin{array}{rcl} [\,\mathbf{i}\,]: & \gamma_0' & = \bar{\gamma}_0' \in T_x M \\ [\,\mathbf{ii}\,]': & \frac{\nabla}{dt}\gamma'|_0 & = \frac{\nabla}{dt}\bar{\gamma}'|_0 \in T_x M \end{array}$$

Esto es consecuencia de que para una carta $(\mathcal{U}, \varphi = \{x^1, ..., x^m\})$ se tiene

$$\frac{\nabla}{dt}\gamma'|_0 = \left(\frac{d^2(x^k \circ \gamma)}{dt}\Big|_{t=0} + \Gamma_{ij}^k(x)\, \frac{d(x^i \circ \gamma)}{dt}\Big|_{t=0} \frac{d(x^j \circ \gamma)}{dt}\Big|_{t=0} \right) \left(\frac{\partial}{\partial x^k}\right)_x$$

con $\Gamma_{ij}^k \in C^\infty(\mathcal{U})$ los símblolos de Christoffel de ∇ respecto de la carta $(\mathcal{U}, \varphi)$. ∎

Para dos conexiones lineales distintas ∇ y $\overline{\nabla}$ en M, la variación entre las biyecciones respectivamente asociadas ∇_x y $\overline{\nabla}_x$ por (4.3) entre $T_x^2 M$ y $T_x M \times T_x M$, viene dada por la relación

$$(\overline{\nabla}_x) \circ (\nabla_x)^{-1}\, (\gamma_0', \tfrac{\nabla}{dt}\gamma'|_0) = (\gamma_0', \tfrac{\nabla}{dt}\gamma'|_0 + \Phi(\gamma_0', \gamma_0')),$$

siendo $\Phi = \overline{\nabla} - \nabla \in \mathfrak{T}_2^0(M)$ su tensor diferencia. O de manera equivalente,

$$(\nabla_x)^{-1}\,(u,v) = (\overline{\nabla}_x)^{-1}(u, v + \Phi(u,u)), \quad \forall u,v \in T_x M \tag{4.4}$$

que define un isomorfismo del fibrado afín $T_xM \times T_xM \to T_xM$.

Existe en $\mathrm{p}_x : T_x^2M \to T_xM$ una única estructura de *fibrado afín* tal que para cualquier conexión ∇ de M el difeomorfismo $\nabla_x : T_x^2M \to T_xM \times T_xM$ de (4.3) define un isomorfismo entre fibrados afines. De este modo,

$$\mathrm{p} : T^2M = \bigcup\nolimits_{x\in M} T_x^2M \longrightarrow TM$$

tiene una estructura canónica de fibrado afín con fibra m-dimensional sobre TM. Se define el *fibrado tangente de segundo orden*

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{q} \ : \ T^2M & \longrightarrow & M \\ j_0^2(\gamma) & \longmapsto & \gamma(0) \end{array}$$

La relación de equivalencia $\sim$ definida por (4.1) es cerrada en la subfamilia $\widetilde{C}(x, M)$ de curvas por x regularmente parametrizadas, y su espacio de 2-jets asociados se denota

$$\widetilde{T}_x^2M = \left\{ j_0^2(\gamma) : \gamma \in \widetilde{C}(x, M) \right\} \subset T_x^2M. \tag{4.5}$$

A través de la proyección $\mathrm{p}_x : \widetilde{T}_x^2M \to T_xM\text{-}\{0\}$, el espacio de 2-jets de curvas regulares $\widetilde{T}_x^2M$ define un fibrado afín sobre $T_xM\text{-}\{0\}$ con fibra m-dimensional.

Definición 4.2 *Una conexión lineal ∇ en M define canónicamente una* sección global *para el fibrado* $\mathrm{q} : T^2M \to TM$ *tal que*

$$\begin{array}{rcl} \sigma^\nabla : \ TM & \longrightarrow & T^2M \\ v & \longmapsto & \sigma^\nabla(v) = j_0^2(\gamma_v^\nabla) \end{array} \tag{4.6}$$

siendo $\gamma_v^\nabla(t)$ la única curva ∇-geodésica con velocidad inicial $(\gamma_v^\nabla)'_0 = v \in T_xM$.

Obsérvese que a través del isomorfismo asociado ∇_x definido en (4.3), pág. 65, es $\sigma^\nabla(v) = \nabla_x^{-1}(v, 0)$, y la sección σ^∇ se corresponde con la sección cero del fibrado afín $\bigcup_{x\in M}(T_xM \times T_xM) \to TM$.

Proposición 4.2 *Sea M una variedad diferenciable con estructura conforme Riemaniana $CO(M) \to M$. Si $CCO(M)$ denota el espacio de conexiones lineales y simétricas ∇ compatibles con la estructura conforme de M, entonces, el espacio $\widetilde{T}_x^2M$ de (4.5) se obtiene como:*

$$\bigcup\nolimits_{\nabla\in CCO(M)} \{\sigma^\nabla(T_xM\text{-}\{0_x\})\} \ = \ \widetilde{T}_x^2M,$$

y esta unión es de espacios disjuntos o coincidentes.

Para toda conexión ∇ es $\sigma^\nabla(0_x) = j_0^2(\gamma_x)$, con $\gamma_x(t) = x$ la curva con posición constante en $x \in M$.

Demostración. Cada 2-jet $j_0^2(\gamma) \in \widetilde{T}_x^2 M$ está representado por una curva parametrizada regular $\gamma \in \widetilde{C}(x, M)$, con $j_0^1(\gamma) = v \in T_x M\text{-}\{0_x\}$. Por la Proposición 3.2 en el capítulo anterior, existe una conexión simétrica y conforme ∇ adaptada a la curva $\gamma(t)$ en $t = 0$, que tiene como geodésica a $\gamma(t)$ en un entorno de 0. Para dicha conexión es $\sigma^\nabla(v) = j_0^2(\gamma)$. Concluimos así que

$$\widetilde{T}_x^2 M = \bigcup\nolimits_{\nabla \in CCO(M)} \left\{ \sigma^\nabla (T_x M\text{-}\{0_x\}) \right\}.$$

Veamos ahora que se trata de una unión de espacios disjuntos o coincidentes. Por el Teorema 3.1, dos conexiones conformes difieren en un tensor $\overline{\nabla} - \nabla = \Phi_\alpha$, con $\alpha \in \Lambda^1(M)$. Si existe un vector $v \in T_x M\text{-}\{0_x\}$ tal que $\sigma^{\overline{\nabla}}(v) = \sigma^\nabla(v)$, se tiene entonces que por la relación (4.4) debe verificarse la igualdad

$$\overline{\nabla}_x^{-1}(v, 0) = \sigma^{\overline{\nabla}}(v) = \sigma^\nabla(v) = \nabla_x^{-1}(v, 0) = \overline{\nabla}_x^{-1}(v, \Phi_\alpha(v, v)).$$

De ella se deduce que $\Phi_\alpha(v, v) = 0$ con $v \neq 0$, y por la propiedad (**b**) de la Observación 3.1, esto implica necesariamente que $\alpha_x = 0$. Queda entonces probado que en tales condiciones los espacios $\sigma^\nabla(T_x M\text{-}\{0_x\})$ y $\sigma^{\overline{\nabla}}(T_x M\text{-}\{0_x\})$ coinciden. ■

4.2 Funciones elevación de la conexión de Fermi-Walker

La conexión de Fermi-Walker canónicamente asociada a luna variedad conforme proporciona una operación natural de elevación de curvas parametrizadas en la variedad M al fibrado de referencias lineales LM.

En contraste con lo que ocurre con las conexiones lineales, al pasar a la definición de una elevación horizontal *infinitesimal*, las funciones que obtenemos en el caso de la conexión de Fermi-Walker se aplican sobre el tangente de segundo orden de la variedad. Este hecho puede interpretarse diciendo que el criterio de adaptación a la curva $t \mapsto \gamma(t)$ puede reducirse en cada instante a un criterio de adaptación al correspondiente 2-jet $j_0^2(\gamma)$ en $\widetilde{T}^2 M$.

4.2.1 Elevación Fermi-Walker horizontal de curvas parametrizadas

Sea M una variedad conforme cuya $CO(m)$-estructura viene dada por el fibrado principal $CO(M) \to M$ de referencias conformes.

A lo largo de cada curva parametrizada $t \mapsto \gamma(t) \in M$, la conexión conforme de Fermi-Walker define una ley de derivación $D^\gamma/dt : \mathfrak{X}(\gamma) \to \mathfrak{X}(\gamma)$, ligada a una noción canónica de paralelismo entre los espacios tangentes (sección **3.1.3** del capítulo anterior). El espacio de los campos Fermi-Walker paralelos sobre la curva $t \mapsto \gamma(t)$ recibe entonces la notación

$$\mathfrak{X}_{|\,|}(\gamma) = \{V(t) \in \mathfrak{X}(\gamma) : D^{\gamma}V/dt = 0\}\,.$$

En el fibrado de referencias lineales $\pi : LM \to M$, el paralelismo definido por la conexión de Fermi-Walker da lugar a una operación de elevación horizontal de curvas parametrizadas en M:

> $\forall b = (v_1, .., v_m) \in LM_{\gamma(t_0)}$ se define la *elevación Fermi-Walker horizontal de $t \mapsto \gamma(t) \in M$ por b* como la curva $t \mapsto (\mathbb{P}_{\gamma}b)_t \in LM$ definida por:
>
> $$(\mathbb{P}_{\gamma}b)_t = (V_1, ..., V_m)_t \in LM_{\gamma(t)}, \quad \forall t \in I,$$
>
> para $V_i(t) \in \mathfrak{X}_{|\,|}(\gamma)$ el único campo Fermi-Walker paralelo verificando $V_i(t_0) = v_i$.

La operación de elevación de curvas definida a lo conexión de Fermi-Walker satisface la condición de *compatibilidad con la acción del grupo* $GL(m, \mathbb{R})$:

$$(\mathbb{P}_{\gamma}(b \cdot g))_t = (\mathbb{P}_{\gamma}b)_t \cdot g \in LM, \quad \forall g \in GL(m, \mathbb{R}),$$

tal y como ocurre con las conexiones lineales usuales.

Teorema 4.1 *Sean $\gamma, \overline{\gamma} \in \widetilde{C}(x, M)$ dos curvas regularmente parametrizadas en una variedad conforme Riemanniana M, y sean $\mathbb{P}_{\gamma}b_0$ y $\mathbb{P}_{\bar{\gamma}}b_0$ sus elevaciones Fermi-Walker horizontales por una misma referencia $b_0 \in L_xM$. Entonces,*

$$j_0^1(\mathbb{P}_{\gamma}b_0) = j_0^1(\mathbb{P}_{\bar{\gamma}}b_0) \in T_{b_0}LM \;\;\Leftrightarrow\;\; j_0^2(\gamma) = j_0^2(\bar{\gamma}) \in \widetilde{T}_x^2 M$$

Demostración. Supongamos que la referencia inicial está formada por vectores $(v_1, ..., v_m) = b_0 \in L_xM$.

La estructura conforme cuenta con conexiones admisibles ∇ y $\overline{\nabla}$ tales que tienen como geodésica a las respectivas restricciones de las curvas $\gamma(t)$ y $\overline{\gamma}(t)$ en un entorno de $t = 0$ (Proposición 3.2). Entonces, las elevaciones Fermi-Walker horizontales se corresponden, por definición, con las curvas

$$(\mathbb{P}_{\gamma}b_0)_t = (\mathbb{P}_{\gamma}^{\nabla}b_0)_t = (V_1, ..., V_m)(t) \in LM_{\gamma(t)}$$
$$(\mathbb{P}_{\bar{\gamma}}b_0)_t = (\mathbb{P}_{\bar{\gamma}}b_0)_t = (\overline{V}_1, ..., \overline{V}_m)(t) \in LM_{\overline{\gamma}(t)}$$

siendo $V_i \in \mathfrak{X}^{\nabla}_{|\,|}(\gamma)$ (respect. $\overline{V}_i \in \mathfrak{X}^{\overline{\nabla}}_{|\,|}(\overline{\gamma})$) el campo ∇-paralelo (respect. $\overline{\nabla}$-paralelo) con $V_i(0) = \overline{V}_i(0) = v_i \in T_xM$.

Fijando una carta $(\mathcal{U}, \varphi = \{x^1, ..., x^m\})$ en un entorno $\mathcal{U}$ de $x \in M$, se obtiene también una carta inducida[1] $\varphi_* = \{x^i; x^i_j\}$ para el fibrado LM en un entorno de b_0. La condición de igualdad para el 1-jet definido en $b_0 \in LM$ por las curvas $(\mathbb{P}_\gamma b_0)_t = (\gamma^i(t); V_i^j(t))$ y $(\mathbb{P}_{\bar\gamma} b_0)_t = (\overline{\gamma}^i(t); \overline{V}_i^j(t))$ se expresa entonces mediante las siguientes identidades entre componentes:

$$\left\{ \begin{array}{l} (\gamma^i)'(0) = (\overline{\gamma}^i)'(0) \\ (V_i^j)'(0) = (\overline{V}_i^j)'(0) \end{array} \right. \tag{4.7}$$

La condición de paralelismo verificada por los campos $V_i, \overline{V}_i$ permite desarrollar las igualdades del sistema. Si Γ^k_{ij} y $\overline{\Gamma}^k_{ij}$ denotan los símbolos de Christoffel asociados a las conexiones ∇ y $\overline{\nabla}$ para la carta φ, sus respectivos campos paralelos deben verificar la siguiente relación en coordenadas:

$$\begin{array}{rcl} (V_i^j)'(t) & = & -\sum\limits_{r,s} (\gamma^s)'(t)\ V_i^r(t)\ \Gamma^j_{rs}(\gamma(t)) \\ (\overline{V}_i^j)'(t) & = & -\sum\limits_{r,s} (\overline{\gamma}^s)'(t)\ \overline{V}_i^r(t)\ \overline{\Gamma}^j_{rs}(\overline{\gamma}(t)) \end{array}$$

Fijando $t = 0$ en estas ecuaciones, y teniendo en cuenta que $V_i(0) = \overline{V}_i(0) = v_i \in T_xM$, el sistema anterior (4.7) resulta equivalente al sistema de ecuaciones:

$$\left\{ \begin{array}{l} (\gamma^i)'_0 = (\overline{\gamma}^i)'_0 \\ \sum_{r,s} (\gamma^s)'_0\ v_i^r\ (\overline{\Gamma}^j_{rs} - \Gamma^j_{rs})_x = 0 \end{array} \right. \tag{4.8}$$

Por otra parte, el hecho de que ∇ y $\overline{\nabla}$ sean conexiones simétricas y conformes en M permite controlar su tensor diferencia mediante una 1-forma $\alpha \in \Lambda^1(M)$ tal que $\overline{\nabla} - \nabla = \Phi_\alpha$ (Teorema 3.1). De este modo, la segunda ecuación del sistema da lugar a la cadena de equivalencias siguiente

$$\begin{array}{l} 0 = \sum_{r,s} (\gamma^s)'_0\ v_i^r\ \ (\Phi_\alpha)^j_{rs} = \Phi_\alpha(\gamma'_0, v_i)^j \quad (\forall i, j) \\ \quad \Leftrightarrow\ \ 0 = \Phi_\alpha(\gamma'_0, v_i) \quad (\forall i) \\ \quad \Leftrightarrow\ \ 0 = \Phi_\alpha(\gamma'_0) \in \mathfrak{co}(T_xM) \\ \quad \Leftrightarrow\ \ \alpha(x) = 0 \in T_x^*M \quad \text{(véase Obs.-3.1, pág. 38)} \end{array}$$

Concluimos entonces que la igualdad entre los 1-jets $j^1_0(\mathbb{P}_\gamma b_0) = j^1_0(\mathbb{P}_{\bar\gamma} b_0)$ definidos en $b_0 \in LM$ por las respectivas elevaciones Fermi-Walker horizontales de las curvas parametrizadas $\gamma(t), \overline{\gamma}(t) \subset M$, rompe en el siguiente par de condiciones:

[1] La carta φ_* asigna las coordenadas $(x^i; x^i_j)$ a una referencia $b = (v_1, ..., v_m) \in LM_x$ tal que

$$\left\{ \begin{array}{l} \varphi(x) = (x^1, ..., x^m) \\ d\varphi(v_j) = (x^1_j, ..., x^m_j) \Leftrightarrow v_j = \sum_i x^i_j\ \frac{\partial}{\partial x^i} \end{array} \right.$$

(i) $\gamma'(0) = \overline{\gamma}'(0) \in T_xM$,

(ii) $(\overline{\nabla} - \nabla)_x = \Phi_{\alpha(x)} \equiv 0$ (coincidencia en x para las conexiones haciendo geodésicas a las respectivas restricciones de las curvas $\gamma(t)$ y $\overline{\gamma}(t)$).

Obsérvese que partiendo de la doble implicación $\Phi_{\alpha(x)}(\gamma'(0), \gamma'(0)) = 0 \Leftrightarrow \alpha(x) = 0$ (Obs.-3.1), y de la cadena de identidades siguiente:

$$\frac{\overline{\nabla}}{dt}\gamma'\Big|_0 - \frac{\overline{\nabla}}{dt}\Big|_0 \overline{\gamma}'(t) = \frac{\overline{\nabla}}{dt}\gamma'\Big|_0 = \frac{\overline{\nabla}}{dt}\gamma'\Big|_0 - \frac{\nabla}{dt}\gamma'\big|_0 = \Phi_{\alpha(x)}(\gamma'(0), \gamma'(0)),$$

resulta obvio que la condición **(ii)** admite también la expresión alternativa:

(ii)' $\frac{\overline{\nabla}}{dt}\gamma'\Big|_0 = \frac{\overline{\nabla}}{dt}\Big|_0 \overline{\gamma}'(t)$.

Llegados a este punto, hemos logrado expresar la condición $j_0^1(\mathbb{P}_\gamma b_0) = j_0^1(\mathbb{P}_{\bar{\gamma}} b_0)$ mediante el sistema de ecuaciones **(i)**, **(ii)'**; y este sistema es precisamente el que describe la identidad $j_0^2(\gamma) = j_0^2(\overline{\gamma})$ (véase la definición alternativa de $\sim$). Es clara entonces la equivalencia del enunciado. ■

4.2.2 Elevación infinitesimal de Fermi-Walker

Del Teorema 4.1 se desprende que la operación de elevación Fermi-Walker horizontal de curvas parametrizadas da lugar a una operación de elevación horizontal a nivel infinitesimal ligada al tangente de segundo orden.

Definición 4.3 *Para $b \in LM_x$, $x \in M$, la* función de elevación Fermi-Walker horizontal *se define como*

$$\begin{array}{rccc} \kappa_b : & \widetilde{T}_x^2 M & \to & T_b LM \\ & j_0^2(\gamma) & \mapsto & j_0^1(\mathbb{P}_\gamma b) \end{array} \tag{4.9}$$

Obsérvese que el Teorema 4.1 anterior asegura que no existe ambigüedad en la expresión $\kappa_b(j_0^2(\gamma)) = j_0^1(\mathbb{P}_\gamma b)$, y la función κ_b está perfectamente definida.

La noción clásica de función de elevación asociada a las conexiones lineales (Definición 2.6), da paso a una noción más general, asociada a la nueva familia de funciones de elevación $\kappa_b : \widetilde{T}_x^2 M \to T_b LM$, de segundo orden, verificando:

1. Compatibilidad con la acción del grupo de estructura $GL(m, \mathbb{R})$ en el fibrado de referencias lineales LM:

$$\kappa_{b \cdot g} = (R_g)_* \circ \kappa_b, \quad \forall g \in GL(m, \mathbb{R}).$$

2. Relación inversa respecto a la proyección del fibrado $\pi : LM \to M$:

$$\pi_* \circ \kappa_b(j_0^2(\gamma)) = j_0^1(\gamma) \in T_xM.$$

3. Correspondencia con la operación de elevación de curvas a nivel infinitesimal:

"Dada una curva $t \mapsto \gamma(t) \in M$ y una referencia lineal $b_0 \in LM_{\gamma(t_0)}$, la elevación horizontal $t \mapsto (\mathbb{P}_\gamma b_0)_t$ en LM es una curva integrando la ecuación diferencial

$$(\mathbb{P}_\gamma b_0)'_t = \kappa_{(\mathbb{P}_\gamma b_0)_t}(j_0^2(\gamma \circ \tau_t))$$

para el valor inicial $(\mathbb{P}_\gamma b_0)_{t_0} = b_0$."

La función de elevación κ_b de Fermi-Walker

La relación que por definición existe entre la conexión de Fermi-Walker y la familia $CCO(M)$ de conexiones lineales y simétricas compatibles con la estructura conforme, queda manifiesta también a nivel de las correspondientes funciones de elevación en el fibrado conforme. Mostramos en la Proposición 4.3, que la función de elevación natural $\kappa_b : \widetilde{T}_x^2M \to T_bLM$ arriba definida es el resultado de "ensamblar" las distintas funciones de elevación $\kappa_b^\nabla : T_xM \to T_bLM$ de conexiones conformes ∇ a través del espacio $\widetilde{T}_x^2M$ en el sentido que veremos a continuación.

En la Proposición 4.2 de la página 66 se afirma que la presencia de una estructura conforme en M provoca que el espacio de 2-jets $\widetilde{T}_x^2M$ rompa en la unión

$$\bigcup_{\nabla \in CCO(M)} \left\{\sigma^\nabla(T_xM\text{-}\{0_x\})\right\} = \widetilde{T}_x^2M$$

de copias disjuntas de T_xM-$\{0_x\}$, indexadas por las distintas conexiones lineales de la estructura conforme en $x \in M$. Recuérdese que $\sigma^\nabla : T_xM \to T_x^2M$ es la sección de (4.6) tal que $\sigma^\nabla(v) = j_0^2(\gamma_v^\nabla)$, para $\gamma_v^\nabla(t)$ la ∇-geodésica con velocidad inicial v.

Proposición 4.3 *Al componer la función $\kappa_b : \widetilde{T}_x^2M \to T_bLM$ de elevación Fermi-Walker horizontal, con la sección $\sigma^\nabla : T_xM$-$\{0_x\} \to \widetilde{T}_x^2M$ de (4.6) ligada a la conexión conforme $\nabla \in CCO(M)$, se obtiene la función de elevación ∇-horizontal κ_b^∇,*

$$\begin{array}{rcl} \kappa_b \circ \sigma^\nabla = \kappa_b^\nabla \ : \ T_xM\text{-}\{0_x\} & \longrightarrow & T_bLM \\ v & \longmapsto & \kappa_b^\nabla(v) = (\mathbb{P}_\gamma^\nabla b)'_0,, \ \gamma'_0 = v \end{array} \tag{4.10}$$

Demostración. Sea $v \in T_xM$-$\{0_x\}$ y sea $\gamma_v^\nabla \in \widetilde{C}(x, M)$ la curva ∇-geodésica con velocidad inicial v, entonces,

$$\kappa_b \circ \sigma^\nabla(v) = \kappa_b(j_0^2(\gamma_v^\nabla)) = j_0^1(\mathbb{P}_{(\gamma_v^\nabla)}b) = j_0^1(\mathbb{P}^\nabla_{(\gamma_v^\nabla)}b) = (\mathbb{P}^\nabla_{(\gamma_v^\nabla)}b)'_0 = \kappa_b^\nabla(v).$$

Se ha utilizado que al ser γ_v^∇ una curva ∇-geodésica, es $\mathbb{P}_{(\gamma_v^\nabla)}b = \mathbb{P}^\nabla_{(\gamma_v^\nabla)}b$. ■

Es claro que esta propiedad, junto con la descomposición

$$\bigcup_{\nabla \in CCO(M)} \{\sigma^\nabla(T_xM\text{-}\{0_x\})\} = \widetilde{T}_x^2 M$$

determina totalmente la función $\kappa_b : \widetilde{T}_x^2 M \to T_bLM$ de elevación Fermi-Walker horizontal, para cada $b \in LM$.

La Proposición 4.3 indica también que la definición de la función de elevación κ_b puede extenderse de manera coherente al 2-jet de la curva constante $\gamma_x(t) = x \in M$, mediante el siguiente procedimiento

$$\kappa_b(j_0^2(\gamma_x)) = \kappa_b \circ \sigma^\nabla(j_0^1(\gamma_x)) = \kappa_b^\nabla(0_x) = 0_b \in T_bLM.$$

De este modo es posible definir una función de elevación extendida,

$$\kappa_b : \widetilde{T}_x^2 M \cup \{j_0^2(\gamma_x)\} \to T_bLM$$

conservando aun la propiedad $\kappa_b \circ \sigma^\nabla = \kappa_b^\nabla : T_xM \to T_bLM$ para toda conexión lineal ∇ compatible con la estructura conforme.

Vamos a ver ahora una serie de Lemas previos, que serán utilizados posteriormente en la demostración de que κ_b tiene estructura de monomorfismo entre fibrados afines.

Lema 4.1 *Sean $\nabla, \overline{\nabla}$ dos conexiones lineales y conformes en la variedad M, tales que $\overline{\nabla} - \nabla = \Phi_\alpha \in \mathfrak{T}_2^0(M)$ para la 1-forma $\alpha \in \Lambda^1(M)$ (véase Teorema 3.1). Entonces, $\forall v \in T_xM$ y $b \in CO(M)$ es:*

$$\kappa_b(\sigma^{\overline{\nabla}}(v)) - \kappa_b(\sigma^\nabla(v)) = -(\Phi_\eta(V))^\#(b)$$

con: $V = b^{-1}(v) \in \mathbb{R}^m$,

$\eta = \alpha \circ b \in \mathbb{R}^{m*}$,

$(\Phi_\eta V)^\#$ *el campo fundamental dado por* $\Phi_\eta V = (\eta V)I_m + V\eta - \eta^\intercal V^\intercal \in \mathfrak{co}(m)$.

Demostración. Este resultado es consecuencia de la Proposición 4.3 y del Corolario 2.1 (**ii**) del Capítulo **2**. De la combinación de estos resultados se deduce

$$\kappa_b(\sigma^{\overline{\nabla}}(v)) - \kappa_b(\sigma^\nabla(v)) = \kappa_b^{\overline{\nabla}}(v) - \kappa_b^\nabla(v) = -(\phi_b(V))^\#(b),$$

en donde la aplicación ϕ_b está definida por $\phi_b = b^{-1} \circ \Phi_{\alpha(x)} \circ (b, b) = b_{\circledast}^{-1}\Phi_{\alpha(x)}$. Por la Observación 3.1 (**a**), se tiene que $\phi_b = b_{\circledast}^{-1}\Phi_{\alpha(x)} = \Phi_{\alpha(x)\circ b}$, y queda así demostrada la relación del enunciado. ■

Recuérdese que cada conexión ∇ permite ver T^2_xM como $T_xM \times T_xM$ a través de la equivalencia dada por ∇_x de (4.3), pág. 65. En particular, se tiene el isomorfismo de fibrados afines (sobre T_xM-$\{0_x\}$)

$$\nabla_x : \widetilde{T}^2_xM \longrightarrow T_xM\text{-}\{0_x\} \times T_xM\,,, \qquad \nabla_x\left(j^2_0(\gamma)\right) = (\gamma'_0, \tfrac{\nabla}{dt}\gamma'\big|_0).$$

Lema 4.2 *La conexión lineal y conforme ∇ en M define también el siguiente isomorfismo entre fibrados afines (sobre T_xM-$\{0_x\}$):*

$$\begin{array}{rcl} s^\nabla \ : \ T_xM\text{-}\{0_x\} \times T^*_xM & \longrightarrow & \widetilde{T}^2_xM \\ (v,\alpha) & \longmapsto & s^\nabla(v,\alpha) = \nabla_x^{-1}(v, -\Phi_\alpha(v,v)) \end{array}$$

Demostración. Veamos que $\nabla_x \circ s^\nabla : T_xM$-$\{0_x\} \times T^*_xM \to T_xM$-$\{0_x\} \times T_xM$ es isomorfismo de fibrados afines.

Fijado $v \in T_xM$-$\{0_x\}$ es: $\nabla_x \circ s^\nabla(v,\alpha) = (v, -\Phi_\alpha(v,v))$, $\forall \alpha \in T^*_xM$. Esta transformación respeta la estructura de espacio afín de las fibras y además es inyectiva:

$$-\Phi_\alpha(v,v) = 0 \in T_xM \ \Leftrightarrow \ \alpha = 0 \in T^*_xM \quad \text{(Obs.- 3.1, pág. 38).}$$

Por cuestión de dimensiones, obtenemos que es isomorfismo afín entre las fibras. ■

Si $\overline{\nabla}$ es otra conexión conforme tal que $\overline{\nabla} = \nabla + \Phi_\alpha$, para $\alpha \in \Lambda^1(M)$, entonces, $(\nabla_x)^{-1}(v,u) = (\overline{\nabla}_x)^{-1}(v, u + \Phi_\alpha(v,v))$ (véase (4.4), pág.65). Por lo tanto, es

$$\sigma^{\overline{\nabla}}(v) = (\overline{\nabla})^{-1}_x(v,0) = (\nabla_x)^{-1}(v, -\Phi_\alpha(v,v)) = s^\nabla(v,\alpha).$$

Teorema 4.2 *La aplicación de elevación $\kappa_b : \widetilde{T}^2_xM \to T_bLM$, con $b \in CO(M)$, define un monomorfismo entre fibrados afines sobre T_xM-$\{0_x\}$.*

$$\begin{array}{ccc} \widetilde{T}^2_xM & \xrightarrow{\kappa_b} & T_bLM\text{-}\{0_b\} \\ {\scriptstyle p_x}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \pi_*} \\ T_xM\text{-}\{0_x\} & \xrightarrow{id} & T_xM\text{-}\{0_x\} \end{array}$$

Demostración. Fijamos la presencia auxiliar de una conexión lineal y simétrica ∇ compatible con la estructura conforme.

Por el Lema 4.2, la conexión define un isomorfismo $s^\nabla : (T_xM\text{-}\{0_x\}) \times T^*_xM \to \widetilde{T}^2_xM$ entre fibrados afines. Mediante la referencia conforme $b \in CO(M)_x$ se identifican los espacios T_xM-$\{0_x\}$ con $\mathbb{R}^m$-$\{0\}$ y de T^*_xM con $\mathbb{R}^{m*}$, dando lugar a la parametrización

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R}^m\text{-}\{0\} \times \mathbb{R}^{m*} & \longrightarrow & \widetilde{T}^2_xM \\ (V,\eta) & \longmapsto & s^\nabla(b(V), \eta \circ b^{-1}) \end{array} \tag{4.11}$$

Por otra parte, la conexión ∇ da lugar a la descomposición

$$T_bLM = \mathcal{H}_b^{\nabla} \oplus \mathcal{V}_b = \sigma^{\nabla}(T_xM) \oplus (L_b)_* (\mathfrak{gl}(m,\mathbb{R})),$$

que permite definir la siguiente identificación

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^m\text{-}\{0\} \times \mathfrak{gl}(m,\mathbb{R}) & \longrightarrow & T_bLM\text{-}\{0_b\} \\ (V,\alpha) & \longmapsto & \kappa_b^{\nabla}(b(V)) + \alpha^{\#}(b) \end{array} \tag{4.12}$$

La función $\kappa_b : \widetilde{T}_x^2M \to T_bLM$ actúa entonces del siguiente modo

$$\begin{aligned} \kappa_b \circ s^{\nabla}(b(V), \eta \circ b^{-1}) &= \kappa_b \circ \sigma^{\overline{\nabla}}(v) = \kappa_b \circ \sigma^{\nabla}(b(V)) + (\Phi_\eta(V))^{\#}(b) \\ &= \kappa_b^{\nabla}(b(V)) + (\Phi_\eta(V))^{\#}(b) \end{aligned}$$

siendo $\overline{\nabla} = \nabla + \Phi_\alpha$, con $\alpha \in \Lambda^1(M)$ tal que $\alpha(x) = \eta \circ b^{-1} \in T_x^*M$. En esta cadena de igualdades hemos utilizado el Lema 4.1

De este modo, a través de las equivalencias (4.11) y (4.12), la función κ_b se corresponde con la asignación

$$\mathbb{R}^m\text{-}\{0\} \times \mathbb{R}^{m*} \ni (V,\eta) \longmapsto (V, \Phi_\eta(V)) \in \mathbb{R}^m\text{-}\{0\} \times \mathfrak{gl}(m,\mathbb{R}) \tag{4.13}$$

que define un monomorfismo entre fibrados. ■

Corolario 4.1 *La elevación horizontal $\kappa_b : \widetilde{T}_x^2M \to T_bLM\text{-}\{0_b\}$ define un monomorfismo entre fibrados afines (sobre $T_xM\text{-}\{0_x\}$) en cualquier referencia $b \in LM$.*

Demostración. Es consecuencia del Teorema 4.2 anterior y de la propiedad $\kappa_{b\cdot g} = (R_g)_* \circ \kappa_b$, $\forall g \in GL(m,\mathbb{R})$. ■

El fibrado horizontal $\mathcal{H}_b$ de Fermi-Walker

La conexión conforme de Fermi-Walker canónicamente definida sobre las curvas parametrizadas de M, se caracteriza a través de una operación asociada de elevación del tangente de segundo orden de$M$, al tangente del fibrado de referencias LM.

Para $b \in LM_x$, el espacio $\widetilde{T}_x^2M \cup \{j_0^2(\gamma_x)\}$ de segundo orden en $x \in M$ se eleva canónicamente a un espacio horizontal $\mathcal{H}_b = \mathrm{Im}(\kappa_b) \subset T_bLM$.

Partiendo ahora de la siguiente cadena de igualdades

$$\mathcal{H}_b = \kappa_b\left(\widetilde{T}_x^2M \cup \{j_0^2(\gamma_x)\}\right) = \bigcup_{\nabla \in CCO(M)} \kappa_b \circ \sigma^{\nabla}(T_xM) = \bigcup_{\nabla \in CCO(M)} \mathcal{H}_b^{\nabla},$$

se observa que el espacio horizontal $\mathcal{H}_b \subset T_bLM$ coincide con la unión de los espacios horizontales $\mathcal{H}_b^{\nabla} = \mathrm{Im}(\kappa_b^{\nabla})$ disjuntos[2], dados por las distintas conexiones lineales y conformes ∇. Cada $\mathcal{H}_b^{\nabla}$ es una copia de T_xM en T_bLM. Podemos decir que la *"laminación"* natural de $\widetilde{T}_x^2M \cup \{j_0^2(\gamma_x)\}$ en copias de T_xM (de la Proposición 4.2), se corresponde con una *"laminación"* natural también del horizontal $\mathcal{H}_b \subset T_bLM$ por copias de T_xM. Precisamente, la dada por los distintos subespacios horizontales de las conexiones simétricas y conformes.

El horizontal $\mathcal{H}_b \subset T_bLM$ de la conexión conforme de Fermi-Walker verifica

$$\mathcal{H}_b \cap \mathcal{V}_b = \{0_b\}.$$

Por otra parte, por el Teorema 4.2, el espacio $\widetilde{\mathcal{H}}_b = \kappa_b(\widetilde{T}_x^2M) = \mathcal{H}_b\text{-}\{0_b\}$ define un subfibrado del fibrado afín $T_bLM\text{-}\{0_b\} \to T_xM\text{-}\{0_x\}$, que es una copia del fibrado $\widetilde{T}_x^2M \to T_xM\text{-}\{0_x\}$, obtenida por la elevación natural de Fermi-Walker κ_b.

Lema 4.3 *Dado $\xi_b \in \widetilde{\mathcal{H}}_b$, con $b \in CO(M)$, existe un único subespacio vectorial suplementario a $\mathcal{V}_b$ en $T_bCO(M)$, contenido en $\mathcal{H}_b$, y tal que contiene al vector ξ_b.*

Demostración. Dado $\xi_b \in \widetilde{\mathcal{H}}_b = \bigcup_{\nabla \in CCO(M)} \mathcal{H}_b^{\nabla}\text{-}\{0_x\}$, existirá una conexión conforme ∇ en M tal que $\xi_b \in \mathcal{H}_b^{\nabla}\text{-}\{0_b\}$. Veamos ahora que $\mathcal{H}_b^{\nabla}$ es el único subespacio en las condiciones del enunciado.

Supongamos ahora que existe un subespacio vectorial distinto $\mathcal{K}_b \neq \mathcal{H}_b^{\nabla}$ contenidoen $\mathcal{H}_b$ y tal que: $\xi_b \in \mathcal{K}_b$ y $\mathcal{K}_b \oplus \mathcal{V}_b = T_bCO(M)$. Estos subespacios definen por su horizontalidad, unas funciones lineales de elevación:

$$\kappa_b^{\nabla} = (\pi_*|_{\mathcal{H}_b^{\nabla}})^{-1} : T_xM \to \mathcal{H}_b^{\nabla} \qquad \text{y} \qquad \kappa_b^{\mathcal{K}} = (\pi_*|_{\mathcal{K}_b})^{-1} : T_xM \to \mathcal{K}_b.$$

Por hipótesis existe un $v \in T_xM\text{-}\{0_x\}$ tal que $\kappa_b^{\mathcal{K}}(v) - \kappa_b^{\nabla}(v) = \alpha_0^{\#}(b) \in \mathcal{V}_b$ para cierto $\alpha_0 \in \mathfrak{gl}(m,\mathbb{R})$ no nulo. Obsérvese que para $u = \pi_*(\xi_b) \in T_xM$, es $\kappa_b^{\nabla}(u) = \xi_b = \kappa_b^{\mathcal{K}}(u)$.

Se considera entonces la aplicación lineal

$$\alpha : \mathbb{R}^2 \ni (r,s) \to \alpha_{(r,s)} \in \mathfrak{gl}(m,\mathbb{R}),, \quad (\kappa_b^{\mathcal{K}} - \kappa_b^{\nabla})(ru+sv) = \alpha_{(r,s)}^{\#}(b)$$

que verifica $\alpha_{(r,s)} = r\alpha_{(1,0)} + s\alpha_{(0,1)} = s\alpha_0$. Por la demostración del Teorema 4.2 (véase (4.13)), sabemos que $\alpha_{(r,s)} = \Phi_{\eta_{r,s}}(b^{-1}(ru+sv))$ para un $\eta_{r,s} \in \mathbb{R}^{m*}$. Se obtiene así una función diferenciable

$$\eta : \mathbb{R}^2\text{-}\{0\} \ni (r,s) \longmapsto \eta(r,s) \in \mathbb{R}^{m*}$$

[2] Entendiéndose con ello que para conexiones conformes ∇ y $\overline{\nabla}$ distintas en $x \in M$ se tiene que $\mathcal{H}_b^{\overline{\nabla}} \cap \mathcal{H}_b^{\nabla} = \{0_b\}$.

cumpliendo la siguiente identidad para $U = b^{-1}(u), V = b^{-1}(v) \in \mathbb{R}^m$-$\{0\}$:

$$\Phi_{\eta_{r,s}}(rU + sV) = \alpha_{(r,s)} = s\alpha_0. \tag{4.14}$$

Veremos que esta última identidad implica $\alpha_0 = 0$, llegando así a una contradicción con lo inicialmente establecido. No puede existir por tanto el subespacio $\mathcal{K}_b \neq \mathcal{H}_b^\nabla$.

Queda por deducir la anulación de $\alpha_0 \in \mathfrak{gl}(m, \mathbb{R})$ de la identidad última (4.14). Obsérvese que mediante su derivación se obtienen las siguientes ecuaciones para la diferencial de la función $\eta : \mathbb{R}^2$-$\{0\} \to \mathbb{R}^{m*}$:

$$\begin{aligned} &\textbf{(i)} \quad \Phi_{\frac{\partial \eta}{\partial r}(r,s)}(rU + sV) + \Phi_{\eta(r,s)}(U) = 0 \\ &\textbf{(ii)} \quad \Phi_{\frac{\partial \eta}{\partial s}(r,s)}(rU + sV) + \Phi_{\eta(r,s)}(V) = \alpha_0 \end{aligned}$$

Por otra parte, es claro que $\forall t$ se mantiene $\eta(tr, ts) = \eta(r, s)$ y en consecuencia, $\partial\eta/\partial r = -\partial\eta/\partial s$. En particular, estudiando el caso $(r, s) = (0, 1)$ se tiene que:

$$\begin{aligned} &\textbf{(i)} \Rightarrow \Phi_{\frac{\partial \eta}{\partial r}(1,0)}(U) = 0 \text{ con } U \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial \eta}{\partial r}(1,0) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial \eta}{\partial s}(1,0) = 0 \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \textbf{(ii)} \Rightarrow \Phi_{\frac{\partial \eta}{\partial s}(1,0)}(U) = \alpha_0 \end{aligned}$$

de manera que finalmente se obtiene $\alpha_0 = \Phi_{\frac{\partial \eta}{\partial s}(1,0)}(U) = 0 \in \mathfrak{gl}(m, \mathbb{R})$. ■

Corolario 4.2 *Dado $\xi_b \in \widetilde{\mathcal{H}}_b$, con $b \in LM$, existe un único subespacio vectorial suplementario a $\mathcal{V}_b$ en $T_bCO(M)$, contenido en $\mathcal{H}_b$, y tal que contiene al vector ξ_b.*

Demostración. Es consecuencia de la Proposición que acabamos de probar y de igualdad $\mathcal{H}_{b\cdot g} = (R_g)_*(\mathcal{H}_b)$ para el isomorfismo $(R_g)_* : T_bLM \to T_{b\cdot g}LM$. ■

Este resultado significa que todo vector $\xi_b \in \mathcal{H}_b$ no nulo, esto es, todo $\xi_b \in \widetilde{\mathcal{H}}_b$, determina un único subespacio horizontal $\mathcal{H}_b^\nabla$ en T_bLM, para alguna conexión lineal ∇ compatible con la estructura conforme de M, mediante las condiciones de contenido

$$\xi_b \in \mathcal{H}_b^\nabla \quad \text{y} \quad \mathcal{H}_b^\nabla \subset \widetilde{\mathcal{H}}_b.$$

Corolario 4.3 *Cada sección σ del fibrado $\widetilde{\mathcal{H}} = \bigcup_{b \in LM)} \widetilde{\mathcal{H}}_b \to M$ determina un única conexión lineal y simétrica ∇ compatible con la estructura, tal que si $\mathcal{H}_b^\nabla$ denota el subespacio horizontal de ∇ en T_bLM, entonces, $\forall x$ es*

$$\sigma(x) \in \mathcal{H}_b^\nabla, \ \textit{para } b = \pi(\sigma(x)) \in LM.$$

Capítulo 5

Geometría conforme según el modelo de Cartan

En este capítulo se aborda el estudio de la geometría conforme desde el punto de vista propuesto por Cartan, en *"Les espaces à connexion conforme"* [9].

En una primera sección comenzamos analizando el modelo conforme sobre un espacio vectorial estándar $\mathbb{V}$. Mediante un procedimiento canónico que involucra las esferas conformes del espacio, se define la *complección esférica* $\overline{\mathbb{V}} = \mathbb{V} \cup \{\infty\}$, como una compactificación del espacio inicial $\mathbb{V}$ que extiende también su estructura conforme al punto ∞. Esta construcción toma como modelo la esfera m-dimensional conforme $\mathbb{S}^m$, canónicamente identificada con $\mathbb{S}^m = \mathbb{R}^m \cup \{\infty\}$ a través de su proyección estereográfica sobre $\mathbb{R}^m$ (visto como el espacio tangente en $O \in \mathbb{S}^m$).

Esta nueva modelización nos lleva a reformular el concepto de referencia conforme (apartado **5.1.4**), que ahora hace alusión a transformaciones $\mathbf{b} : \mathbb{S}^m \to \overline{\mathbb{V}}$ que esencialmente vienen definidas como difeomorfismos conformes entre las esferas (para $m > 1$). Los grupos asociados a la estructura conforme (apartado **5.1.3**) están formados por transformaciones en el grupo de Möbius $M\ddot{o}b(\mathbb{S}^m) = G^m$ de la esfera $\mathbb{S}^m$, en donde se incluyen como subgrupos de isotropía: el grupo lineal conforme $CO(m) \approx (G^m)_{O,\infty}$, como el subgupo de transformaciones que fijan los puntos origen O e infinito ∞; el conforme afinizado $ACO(m) = \mathbb{R}^m \rtimes CO(m) \approx (G^m)_\infty$ que a través de $\mathbb{R}^m$ incluye también las traslaciones del origen O; y un subgrupo $(G^m)_O = H^m \approx CO(m) \rtimes \mathbb{R}^{m*}$, conjugado de $ACO(m)$, que contempla a través de $\mathbb{R}^{m*}$ las traslaciones del infinito ∞. El caso unidimensional conforme, $m = 1$, tiene una naturaleza distinta y se trata en una sección a parte (apartado **5.1.6**) en la que se establece su equivalencia con la estructura proyectiva de la recta unidimensional $\mathbb{P}^1 = \mathbb{R}^1 \cup \{\infty\} = \mathbb{S}^1$.

En la sección 2 se presentan las variedades conformes Riemannianas bajo el modelo de Cartan, que sustituye el espacio tangente conforme por su complección esférica.

Cada uno de los puntos $x \in M$ de la variedad conforme tiene apoyada una esfera tangente $\overline{T}_x M$ doblemente punteada, en donde se distinguen:

(a) un punto origen $O_x \in \overline{T}_x M$, identificado con el punto de apoyo x, de modo que la esfera $\overline{T}_x M$ es tangente a la variedad en el sentido de que en el punto $O_x \equiv x$ sus espacios tangentes coinciden: $T_{O_x}(\overline{T}_x M) = T_x M$;

(b) un punto infinito $\infty_x \in \overline{T}_x M$, que permite proyectar dicha esfera sobre el tangente $T_x M$, y se tiene la identificación canónica $\overline{T}_x M = T_x M \cup \{\infty_x\}$.

La correspondiente operación de transporte paralelo de esferas tangentes sobre M va ligada a la noción de conexión conforme (de Cartan) en un fibrado especial de referencias esféricas $Q(M) \to M$, con grupo estructural $H^m \subset M\ddot{o}b(\mathbb{S}^m)$.

Comenzamos la sección 3 introduciendo brevemente los conceptos más significativos de la teoría de conexiones de Cartan sobre fibrados principales. Para H subgrupo cerrado del grupo de Lie G, el espacio homogéneo $G \to G/H$ define lo que llamamos una geometría de Klein. Una geometría de Cartan (Definición 5.7) generaliza esta definición a través de un H-fibrado principal $Q \to M$ dotado de una 1-forma $\omega \in \Lambda^1(Q, \mathfrak{g})$ que da lugar a las equivalencias: $T_q Q \overset{\omega}{\approx} \mathfrak{g} = T_e G$ y $T_q(Q_x) \overset{\omega}{\approx} \mathfrak{h} = T_e H$.

A continuación presentamos el resultado conocido (Cartan [9], Poor [37]) de que en el contexto de las variedades conformes Riemannianas una conexión lineal y simétrica en el fibrado de referencias conformes lineales $CO(M)$ tiene asociada una conexión de Cartan ω en el fibrado de referencias esféricas especiales $Q(M)$, unívocamente determinada por una condición natural de normalización (5.5). Geométricamente, este resultado significa que el transporte paralelo de fibrado tangente asociado a una conexión lineal conforme ∇, se extiende a un transporte paralelo de esferas tangentes que se formaliza en la conexión normal de Cartan ω.

La geometría normal de Cartan $(Q(M), \omega)$ así obtenida, adolece de la falta de canonicidad propia de la noción de conexión lineal y simétrica de una estructura conforme (que conocemos del Teorema 3.1). En capítulos anteriores la original introducción del criterio de adaptación a la curva, permitió la definición canónica de la conexión de Fermi-Walker y del tensor de Schouten sobre curvas parametrizadas. Mostramos entonces que este mismo criterio permite determinar también en el modelo conforme de Cartan una *conexión esférica de Fermi-Walker*, tipo conexión normal de Cartan, canónicamente definida sobre las curvas parmetrizadas (Definición 5.12). Este resultado indica que existe un movimiento natural preferente de las esferas conformes tangentes a lo largo las curvas parametrizadas de una variedad conforme.

5.1 Estructura conforme vectorial de Cartan

La proyección estereográfica de la esfera m-dimensional $\mathbb{S}^m = \{y \in \mathbb{R}^{m+1} : \|y\|^2 = 1\}$ sobre el espacio $\mathbb{R}^m$, identificado con el tangente a la esfera en $O = (1, 0, ..., 0) \in \mathbb{S}^m$, desde el punto $\infty = (-1, 0, ..., 0) \in \mathbb{S}^m$, define un difeomorfismo conforme

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{S}^m\text{-}\{\infty\} & \longrightarrow & \mathbb{R}^m \\ y & \longmapsto & \left(\frac{2y_1}{1+y_0}, ..., \frac{2y_m}{1+y_0}\right) \end{array}$$

que da lugar a la identificación canónica $\mathbb{S}^m = \mathbb{R}^m \cup \{\infty\}$.

El modelo de Cartan generaliza esta construcción para un espacio conforme arbitrario $\mathbb{V}$, y permite definir su *compleccción esférica* $\overline{\overline{\mathbb{V}}} = \mathbb{V} \cup \{\infty\}$ equivalente a la esfera conforme $\mathbb{S}^m$. La idea consiste esencialmente en lo siguiente:

(a) Se construye el espacio proyectivo de las hiperesferas generalizadas $\mathbb{P}(\widehat{\mathbb{V}})$ que depende exclusivamente de la estructura conforme de $\mathbb{V}$, y que recibe una estructura conforme heredada de tipo Lorentziano $\widehat{\mathcal{C}}$. Este espacio incluye a las esferas conformes (definidas en la sección **3.1.1** del Capítulo **3**) y a los hiperplanos afines como esferas por el infinito ∞.

(b) Los propios puntos de $\mathbb{V}$ pueden ser considerados como esferas de radio cero, y la cuádrica proyectiva definida por el cono de luz de $\widehat{\mathcal{C}}$ resulta ser $\overline{\overline{\mathbb{V}}} = \mathbb{V} \cup \{\infty\}$, la compleccción esférica de $\mathbb{V}$, con una estructura conforme que la hace equivalente a la esfera $\mathbb{S}^m$.

5.1.1 Compleccción esférica

Formas cuadráticas esféricas

La familia de formas cuadráticas afines de un espacio vectorial $\mathbb{V}$ constituye un espacio vectorial real $QA(\mathbb{V})$, en donde cada uno de sus elementos $\hat{q}$ se descompone en

$$\hat{q}\,(v) = q_2(v) - 2q_1(v) - 2q_0$$

con q_2 forma cuadrática en $\mathbb{V}$, $q_1 \in \mathbb{V}^*$ forma lineal, y $q_0 \in \mathbb{R}$. Cada $\hat{q} \in QA(\mathbb{V})$ induce una cuádrica afín en $\mathbb{V}$ a través de su *imagen*

$$\hat{q}^{-1}(0) = \{v \in \mathbb{V} : \hat{q}(v) = 0\} \subset \mathbb{V}$$

y el espacio proyectivo $\mathbb{P}(QA(\mathbb{V}))$ corresponde al espacio de cuádricas afines de $\mathbb{V}$.

La presencia en el espacio vectorial $\mathbb{V}$ de una estructura lineal conforme $\mathcal{CO}(\mathbb{V})$ va unívocamente ligada a una familia de métricas conformemente equivalentes

$$\mathcal{C} = \{e^{2r}\,\langle .,. \rangle : r \in \mathbb{R}\}$$

y a la definición de una noción de esfera conforme en $\mathbb{V}$, como se recordará de la sección **3.1.1** del Capítulo **3**. En el espacio de cuádricas afines $QA(\mathbb{V})$ esto da lugar a un subespacio distinguido $\widehat{\mathbb{V}}$ de *formas cuadráticas esféricas* de $\mathcal{C}$, definido por

$$\widehat{\mathbb{V}} = \left\{ \hat{q} \in QA(\mathbb{V}) : q_2 = k\,|\,.\,|^2 \text{ para } k \in \mathbb{R} \text{ y } |\,.\,|^2 \text{ la norma de } \langle .,. \rangle \in \mathcal{C} \right\} \tag{5.1}$$

y que tiene dimensión $m+2$ ($m = \dim \mathbb{V}$). El espacio proyectivo $\mathbb{P}(\widehat{\mathbb{V}})$, de las cuádricas afines inducidas por $\widehat{\mathbb{V}}$ recibe el nombre de *espacio de hiperesferas o* $(m-1)$*-esferas generalizadas* de la estructura conforme.

Observación 5.1 *El dual $\mathbb{V}^*$ está naturalmente sumergido en $\widehat{\mathbb{V}}$ como subespacio vectorial m-dimensional. Cada 1-forma $q_1 \in \mathbb{V}^*$ puede identificarse con la forma cuadrática esférica $\hat{q} = 0.\,|\,.\,|^2 - 2q_1 - 2.0 \in \widehat{\mathbb{V}}$.*

Imágenes de cuádricas esféricas.

Sea $b = (v_1, ..., v_m) \in \mathcal{CO}(\mathbb{V})$ una referencia conforme de coordenadas asociadas $(X_1, ..., X_m)$. Existe en $\mathbb{V}$ una única métrica conforme $\langle .,. \rangle \in \mathcal{C}$ con norma $|\,.\,|^2 = \sum_i X_i^2$. Cada forma esférica $\hat{q} = q_2 - 2q_1 - 2q_0 \in \widehat{\mathbb{V}}$ admite entonces una expresión en coordenadas $(x_0, x_1, ..., x_{m+1}) \in \mathbb{R}^{m+2}$ tales que

$$\hat{q} = x_0 \sum\nolimits_{i=1}^{m} X_i^2 - 2\sum\nolimits_{i=1}^{m} x_i X_i - 2x_{m+1}, \tag{5.2}$$

con $q_2 = x_0\,|\,.\,|^2$, $q_0 = x_{m+1}$, y $q_1(v_i) = x_i, \forall i = 1, ..., m$.

Si $q_2 \neq 0$, la ecuación de la imagen de q se escribe

$$\sum\nolimits_i \left(X_i - \frac{x_i}{x_0} \right)^2 - \left[\sum\nolimits_i (\frac{x_i}{x_0})^2 + 2\frac{x_{m+1}}{x_0} \right] = 0$$

que representa en general una $(m-1)$-esfera afín en $\mathbb{V}$ de centro el punto de coordenadas $(x_1/x_0, ..., x_m/x_0)$ respecto a b, y cuyo radio R respecto a la métrica $\langle .,. \rangle$ viene dado por la expresión

$$R^2 = x_0^{-2} \left(\sum\nolimits_i x_i^2 + 2x_0 x_{m+1} \right).$$

R tiene carácter real, imaginario o nulo según el valor de $\sum_i x_i^2 + 2x_0 x_{m+1} \in \mathbb{R}$ sea mayor, menor o igual a 0.

Si $q_2 = 0$, la ecuación de la imagen de q se escribe

$$\sum\nolimits_{i=1}^{m} x_i X_i + x_{m+1} = 0$$

que representa el conjunto vacío (si $q_1 = 0$, $x_{m+1} \neq 0$), el total (si $q_1 = 0$, $q_0 = 0$), o un hiperplano afín (vectorial si $q_0 = 0$) cuya dirección vectorial viene dada por la forma lineal $q_1 = \sum_i x_i X_i \in \mathbb{V}^*$.

Obsérvese que la expresión en coordenadas $\rho^2 = \sum_i x_i^2 + 2x_0 x_{m+1}$ define en el espacio vectorial $\widehat{\mathbb{V}}$ una forma cuadrática fundamental asociada a la métrica conforme inicial $\langle .,. \rangle \in \mathcal{C}$ de $\mathbb{V}$.

Estructura conforme en el espacio de esferas

Cada métrica $\langle .,. \rangle$ compatible con la estructura conforme Euclídea $\mathcal{C}$ de $\mathbb{V}$, dota de estructura canónica de espacio Euclídeo al dual $\mathbb{V}^*$ al imponer que el isomorfismo canónico asociado $\downarrow_{\langle .,. \rangle}\colon \mathbb{V} \to \mathbb{V}^*$, $v \mapsto \downarrow_{\langle .,. \rangle}(v) = \langle v, . \rangle$, sea isometría. Por este procedimiento, la estructura conforme de $\mathbb{V}$ pasa a su espacio dual $\mathbb{V}^*$ de manera tal que quedan invertidas las relaciones de proporcionalidad entre las métricas conformes:

$$\overline{\langle .,. \rangle} = e^{2r} \langle .,. \rangle \;\Rightarrow\; \overline{\langle .,. \rangle}_{\mathbb{V}^*} = e^{-2r} \langle .,. \rangle_{\mathbb{V}^*} .$$

La estructura conforme Euclídea $\mathcal{C}$ en $\mathbb{V}$ permite definir un espacio asociado de formas cuadráticas esféricas $\widehat{\mathbb{V}} =$ (5.1), en el que se halla naturalmente sumergido el espacio dual $\mathbb{V}^*$ de formas lineales (Observación 5.1). Cada métrica conforme $\langle .,. \rangle \in \mathcal{C}$ induce también en $\widehat{\mathbb{V}}$ una métrica lineal $\rho(.,.)$ de tipo Lorentz, en base al isomorfismo asociado

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} \times \mathbb{V} \times \mathbb{R} & \longrightarrow & \widehat{\mathbb{V}} \\ (x_0, v, x_{m+1}) & \longmapsto & \hat{q} = x_0 \, |\,.\,|^2 - 2 \langle v, . \rangle - 2x_{m+1} \end{array} \tag{5.3}$$

que la identifica con la métrica Lorentziana de $\mathbb{R} \times \mathbb{V} \times \mathbb{R}$ dada por

$$\rho^2(x_0, v, x_{m+1}) = |v|^2 + 2x_0 x_{m+1} = \rho^2(\hat{q}). \tag{5.4}$$

Observación 5.2 *La restricción de la métrica Lorentziana $\rho(.,.)$ al dual $\mathbb{V}^*$, sumergido en $\widehat{\mathbb{V}}$ como subespacio m-dimensional (Observación 5.1), coincide con la métrica dual usual (Euclídea).*

La sustitución de la métrica conforme $\langle .,. \rangle$ en $\mathcal{C}$ por otra $\overline{\langle .,. \rangle} = e^{2r} \langle .,. \rangle$, produce sobre el isomorfismo (5.3) la siguiente variación

$$\hat{q} = x_0 \, |\,.\,|^2 - 2 \langle v, . \rangle - 2x_{m+1} = x_0 e^{-2r} \overline{|\,.\,|}^2 - 2e^{-2r} \overline{\langle v, . \rangle} - 2x_{m+1}, \quad \forall \hat{q} \in \widehat{\mathbb{V}},$$

y la forma cuadrática definida por (5.4) en el espacio $\widehat{\mathbb{V}}$ experimenta también un cambio conforme inverso:

$$\begin{aligned} \overline{\rho}(q) &= \overline{\rho}(e^{-2r} x_0, e^{-2r} v, x_{m+1}) = \overline{|e^{-2r} v|}^2 + 2(e^{-2r} x_0) x_{m+1} \\ &= e^{2r} \left|e^{-2r} v\right|^2 + 2e^{-2r} x_0 x_{m+1} = e^{-2r}(|v|^2 + 2x_0 x_{m+1}) = e^{-2r} \rho(q). \end{aligned}$$

En conclusión, el espacio $\widehat{\mathbb{V}}$ de formas cuadráticas esféricas de $(\mathbb{V}, \mathcal{C})$, está dotado de una estructura conforme canónica de tipo Lorentziano

$$\widehat{\mathcal{C}} = \{e^{-2r}\rho(.,.) : r \in \mathbb{R}\},$$

heredada de la estructura conforme Euclídea de $\mathbb{V}$ por medio de la correspondencia $\mathcal{C} \ni \langle .,. \rangle \mapsto \rho(.,.) \in \widehat{\mathcal{C}}$ definida en (5.4).

Complección esférica

El *cono de luz* $\hat{\mathbf{C}}$ asociado a la estructura conforme Lorentziana $\widehat{\mathcal{C}}$ de $\widehat{\mathbb{V}}$ define en el espacio proyectivo $\mathbb{P}(\widehat{\mathbb{V}})$ de hiperesferas, una cuádrica regular

$$\overline{\mathbb{V}} = \left\{[\hat{q}] \in \mathbb{P}(\widehat{\mathbb{V}}) : q \in \hat{\mathbf{C}}\right\} = \left\{[\hat{q}] \in \mathbb{P}(\widehat{\mathbb{V}}) : \rho^2(\hat{q}) = 0, \text{ para } \rho \in \widehat{\mathcal{C}}\right\} \tag{5.5}$$

que llamamos *complección esférica del espacio conforme* $(\mathbb{V}, \mathcal{C})$, y que hereda del ambiente una estructura conforme Riemanniana $\overline{\mathcal{C}}$.

Fijada la referencia conforme $b \in \mathcal{CO}(\mathbb{V})$, de coordenadas ortonormales $(X_1, ..., X_m)$ para la métrica $\langle .,. \rangle \in \mathcal{C}$, existe en el espacio $\widehat{\mathbb{V}}$ de formas esféricas un sistema de coordenadas lineales $(x_0, ..., x_{m+1})$, inducido por la ecuación (5.2), pág. 80, que permite identificar cada punto de $\mathbb{P}(\widehat{\mathbb{V}})$ con sus coordenadas homogéneas $[x_0 : ... : x_{m+1}]$.

Para cada $\hat{q} = q_2 - 2q_1 - 2q_0 \in \widehat{\mathbb{V}}$, de coordenadas $(x_0, \dots, x_{m+1}) \in \mathbb{R}^{m+2}$, la métrica de Lorentz asociada $\rho(.,.)$ verifica entonces la identidad

$$\rho^2(\hat{q}) = \sum\nolimits_{i=1}^{m} x_i^2 + 2x_0 x_{m+1}. \tag{5.6}$$

De este modo, si $q_2 = 0$, la cuádrica inducida corresponde en general a un hiperplano afín de $\mathbb{V}$ con dirección vectorial $q_1 \in \mathbb{V}^*$ y $\rho^2(\hat{q}) = |q_1|^2$. En caso contrario ($q_2 \neq 0$), la cuádrica inducida corresponde a una hiperesfera de centro $u_0 = \uparrow_{\langle .,. \rangle} (x_0^{-1} q_1) \in \mathbb{V}$ y cuyo radio al cuadrado respecto a $\langle .,. \rangle$ viene dado por $R^2 = x_0^{-2} \rho^2(\hat{q})$.

Obsérvese que el centro de la hiperesfera conforme $[\hat{q}]$ definida por $\hat{q} \in \widehat{\mathbb{V}}$,

$$u_0 = \uparrow_{\langle .,. \rangle} (x_0^{-1} q_1) \in \mathbb{V}, \quad (\text{con } q_2 = x_0 \,|\,.\,|^2\,) \tag{5.7}$$

permanece invariante por los cambios de métrica conforme $\langle .,. \rangle \mapsto e^{2r} \langle .,. \rangle$, y por los cambios de representante $\hat{q} \mapsto e^{2r}\hat{q}$. Por lo tanto, tiene sentido definir el *centro de la esfera* $[\hat{q}]$ como el punto $u_0 \in \mathbb{V}$ dado por (5.7).

Inclusión natural de $\mathbb{V}$ en $\overline{\mathbb{V}}$

Cada $[\hat{q}] \in \overline{\mathbb{V}}$, con $q_2 \neq 0$, es una $(m-1)$-esfera en $\mathbb{V}$ de radio nulo que identificamos con su centro $u_0 \in \mathbb{V}$ definido como en (5.7), y recíprocamente, un vector $v \in \mathbb{V}$ puede ser considerado como una esfera de radio nulo en $\overline{\mathbb{V}}$. De este modo, el espacio conforme Euclídeo $\mathbb{V}$ se encuentra naturalmente sumergido en su complección esférica $\overline{\mathbb{V}} \subset \mathbb{P}(\widehat{\mathbb{V}})$, mediante la inclusión

$$\begin{array}{rcl} \iota : \mathbb{V} & \hookrightarrow & \overline{\mathbb{V}} \\ v & \longmapsto & \iota(v) = [|\,.\,|^2 - 2\,\langle v, . \rangle + |v|^2] \end{array} \tag{5.8}$$

siendo $\langle ., . \rangle$ cualquier métrica conforme en $\mathcal{C}$ y $|\,.\,|^2$ su norma asociada. Esta inclusión respeta además las estructuras conformes de los espacios $(\mathbb{V}, \mathcal{C})$ y $(\overline{\mathbb{V}}, \overline{\mathcal{C}})$ (veremos este resultado en la Proposición 5.1).

Únicamente el punto de $\overline{\mathbb{V}}$ correspondiente a la recta de formas cuadráticas afines $\{\hat{q} = -2q_0 \in \widehat{\mathbb{V}} : q_0 \in \mathbb{R}\}$ no representa un punto de $\mathbb{V}$, y recibe el nombre de *punto del infinito* ∞ de la complección esférica $\overline{\mathbb{V}}$. A través de la inclusión natural $\iota : \mathbb{V} \hookrightarrow \overline{\mathbb{V}}$ (5.8), se tiene la identificación canónica

$$\overline{\mathbb{V}} = \mathbb{V} \cup \{\infty\}. \tag{5.9}$$

Topológicamente, $\overline{\mathbb{V}}$ coincide con la compactificación de $\mathbb{V}$ por un punto.

Existe otro punto distinguido por su naturaleza especial en la complección esférica: el dado por la recta de formas cuadráticas $\{\hat{q} = q_2 \in \widehat{\mathbb{V}} : q_2 = k|\,.\,|^2\}$. Éste recibe el nombre de *punto origen* O de la complección esférica $\overline{\mathbb{V}}$, y se corresponde con el origen vectorial de $\mathbb{V}$ mediante la inclusión $\iota : \mathbb{V} \hookrightarrow \overline{\mathbb{V}}$. La diferencial en $0 \in \mathbb{V}$, $\iota_* : \mathbb{V} = T_0\mathbb{V} \xrightarrow{\sim} T_O\overline{\mathbb{V}}$, define entonces un isomorfismo que permite identificar canónicamente el espacio $\mathbb{V}$ con el tangente en el origen O de su complección esférica $\overline{\mathbb{V}}$,

$$\mathbb{V} \xleftrightarrow{\iota_*} T_O\overline{\mathbb{V}}. \tag{5.10}$$

Obsérvese que esta identificación respetará también sus correspondientes estructuras conformes.

Ortogonalidad

La métrica Lorentziana $\rho(.,.)$ inducida por una métrica conforme $\langle ., . \rangle \in \mathcal{C}$ tiene una clara significación geométrica en el espacio $\widehat{\mathbb{V}}$ de hiperesferas del espacio conforme $\mathbb{V}$. Un estudio en detalle puede verse en Berger [5].

A continuación presentamos una serie de resultados que damos sin demostración por deducirse esta de forma directa de un cálculo basado en la identidad (5.6) que expresa $\rho(.,.)$ en coordenadas y su relación con las características de las hiperesferas asociadas.

En el espacio de formas esféricas positivas $\{\hat{q} \in \widehat{\mathbb{V}} : \rho^2(\hat{q}) > 0\}$ se tiene que si

$$\frac{\rho\,(q, q')}{\rho^2(\hat{q})^{\frac{1}{2}}\rho^2(\hat{q}')^{\frac{1}{2}}} = r \in [-1, 1],$$

entonces, las formas q y q' definen dos hiperesferas del espacio conforme $\mathbb{V}$ que se cortan con un ángulo $\varphi = \arccos r \in [0, \pi]$, respecto a la medida de ángulos en $\mathbb{V}$ inducida por la estructura conforme $\mathcal{C}$ (véase sección **3.1.1** del Capítulo **3**).

Así mismo, para dos formas esféricas reales $q, q' \in \widehat{\mathbb{V}}$, $\rho^2(\hat{q}), \rho^2(\hat{q}') \geq 0$, la condición de ortogonalidad $\rho\,(q, q') = 0$ resulta equivalente a las siguientes condiciones sobre sus cuádricas imagen en $\mathbb{V}$:

1. Si $[\,\hat{q}\,]$, $[\hat{q}']$ son hiperesferas reales o hiperplanos: se cortan ortogonalmente[1];
2. Si $[\hat{q}']$ corresponde a un punto de $\mathbb{V}$: el punto $[\hat{q}']$ está contenido en $[\,\hat{q}\,]$;
3. Si $[\hat{q}']$ es el punto infinito de $\overline{\mathbb{V}}$: $[\,\hat{q}\,]$ es hiperplano afín de $\mathbb{V}$.

La imagen en $\mathbb{V}$ de una hiperesfera real $[\,\hat{q}\,] \in \mathbb{P}(\widehat{\mathbb{V}})$ coincide entonces con el conjunto de puntos $v \in \mathbb{V}$ tales que en su identificación con esferas de radio nulo $\iota(v) = [\hat{q}'] \in \overline{\mathbb{V}}$ (véase (5.8)) cumplen $\rho(\hat{q}, \hat{q}') = 0$. Así, la imagen de la hiperesfera $[\,\hat{q}\,] \in \mathbb{P}(\widehat{\mathbb{V}})$ puede definirse en a la complección esférica $\overline{\mathbb{V}} = \mathbb{V} \cup \{\infty\}$ como el conjunto de puntos

$$\left\{ [\,\hat{q}'] \in \overline{\mathbb{V}} \subset \mathbb{P}(\widehat{\mathbb{V}}) : \rho(\hat{q}, \hat{q}') = 0 \right\},$$

esto es, como la intersección en $\mathbb{P}(\widehat{\mathbb{V}})$ de la cuádrica $\overline{\mathbb{V}}$ con el hiperplano ortogonal

$$[\,\hat{q}\,]^{\perp} = \left\{ [\,\hat{q}'] \in \mathbb{P}(\widehat{\mathbb{V}}) : \rho(\hat{q}, \hat{q}') = 0 \right\}.$$

De este modo, el punto infinito $\infty \in \overline{\mathbb{V}}$ se incorpora de manera natural a la imagen de los hiperplanos afines de $\mathbb{V}$ a su paso a la complección esférica $\overline{\mathbb{V}}$. Hiperplanos y esferas conformes de $\mathbb{V}$ comparten una misma naturaleza (de hiperesfera real) en la complección esférica $\overline{\mathbb{V}} = \mathbb{V} \cup \{\infty\}$.

5.1.2 Modelo analítico

Recuérdese (pág. 80) que la referencia $b \in \mathcal{CO}(\mathbb{V})$, con coordenadas $(X_1, ..., X_m)$ ortonormales para la métrica conforme $\langle .,. \rangle \in \mathcal{C}$, inducide en $\widehat{\mathbb{V}}$ un sistema de *coordenadas lineales* $(x_0, x_1, ..., x_{m+1})$ ligado a la referencia $\widehat{\mathbf{b}} = (\hat{A}_0, \hat{A}_1, ..., \hat{A}_m, \hat{A}_{m+1})$ de $\widehat{\mathbb{V}}$,

$$\hat{A}_0 = \sum\nolimits_{i=1}^{m} X_i^2, \quad \hat{A}_i = -2X_i \;\; (i = 1, ..., m), \quad \hat{A}_{m+1} = -2. \tag{5.11}$$

El espacio $\mathbb{P}(\widehat{\mathbb{V}})$ hereda un sistema de *coordenadas homogéneas* $[x_0 : ... : x_{m+1}]$ que lo identifica con $\mathbb{P}^{m+1}$. Los objetos geométricos inherentes a la estructura conforme de $\mathbb{V}$ adquieren entonces expresiones analíticas que resumimos a continuación:

[1] Dos hiperesferas reales se dicen *ortogonales* si la intersección de sus imágenes como subconjuntos de $\mathbb{V}$ es no vacía, y en cada/algún punto de su intersección los respectivos espacios tangentes son ortogonales respecto a la estructura conforme $\mathcal{C}$.

(**1**) La métrica Lorentziana $\rho(.,.) \in \widehat{\mathcal{C}}$ inducida en $\widehat{\mathbb{V}}$ por $\langle .,. \rangle \in \mathcal{C}$ se corresponde con la forma cuadrática cuya expresión en coordenadas $\rho^2 = \sum_1^m x_i^2 + 2x_0x_{m+1}$ está ligada a la matriz

$$S_{m+1,1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & I_m & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(**2**) Mediante las coordenadas homogéneas $[x_0 : ... : x_{m+1}]$ de $\mathbb{P}(\widehat{\mathbb{V}})$, la inclusión natural $\iota : \mathbb{V} \hookrightarrow \overline{\mathbb{V}} \subset \mathbb{P}(\widehat{\mathbb{V}})$ (definida en (5.8), pág. 83) tiene la expresión

$$(X_1, ..., X_m) \longmapsto \left[1 : X_1 : ... : X_m : -\tfrac{1}{2}\textstyle\sum_i X_i^2\right]. \tag{5.12}$$

Además, los puntos destacados de $\overline{\mathbb{V}}$ son $O = [1 : 0 : ... : 0]$ y $\infty = [0 : ... : 0 : 1]$.

(**3**) La complección esférica $\overline{\mathbb{V}}$ es una cuádrica regular en el espacio $\mathbb{P}(\widehat{\mathbb{V}})$ que puede identificarse con la intersección en $\widehat{\mathbb{V}}$ del cono de luz $\hat{\mathbf{C}}$ y el hiperplano afín

$$\Pi \ : \ x_0 - \tfrac{1}{2}x_{m+1} = 1 \ .$$

A través del cambio de variables $(x_0, ..., x_{m+1}) \mapsto (y_0, ..., y_{m+1})$ en $\widehat{\mathbb{V}}$ definido por

$$\begin{cases} y_0 = x_0 + \frac{1}{2}x_{m+1} \\ y_i = x_i, \quad 1 \le i \le m \\ y_{m+1} = x_0 - \frac{1}{2}x_{m+1} \end{cases}$$

la forma cuadrática ρ^2 adquiere la expresión $\sum_i y_i^2 + y_0^2 - y_{m+1}^2$, y el hiperplano Π tiene ecuación $y_{m+1} = 1$. Es claro así que Π es un hiperplano espacial y hereda de ρ una métrica Euclídea, en la cual $(y_0, y_1, \dots, y_m) \equiv (y_0, y_1, \dots, y_m, 1)$ constituye un sistema de coordenadas ortonormales de Π.

La complección esférica $\overline{\mathbb{V}}$, al estar identificada con la intersección del hiperplano $\Pi : y_{m+1} = 1$ con el cono $\hat{\mathbf{C}} : \sum_i y_i^2 + y_0^2 - y_{m+1}^2 = 1$, se corresponde con la m-esfera de ecuación

$$y_0^2 + \sum_{i=1}^m y_i^2 = 1, \quad (y_{m+1} = 1).$$

El isomorfismo $\mathbb{R}^m \to \Pi$ ligado al sistema de coordenadas $(y_0, ..., y_m)$ induce por restricción una correspondencia conforme

$$\begin{aligned} \mathbf{b} \ : \ \mathbb{S}^m \subset \mathbb{R}^{m+1} \ &\longrightarrow \ \overline{\mathbb{V}} \equiv \hat{\mathbf{C}} \cap \Pi \\ (y_0, y_1, ..., y_m) \ &\longmapsto \ \left[\tfrac{y_0+1}{2}\hat{A}_0 + y_1\hat{A}_1 + \ldots + y_m\hat{A}_m + (y_0\text{-}1)\hat{A}_{m+1}\right] \end{aligned} \tag{5.13}$$

que denominamos sistema de *coordenadas esféricas* de $\overline{\mathbb{V}}$. Obsérvese que esta identificación respeta la estructura conforme usual de la esfera $\mathbb{S}^m$ y la estructura conforme $\overline{\mathcal{C}}$ inducida en $\overline{\mathbb{V}}$ por $\rho \in \widehat{\mathcal{C}}$. Los puntos origen e infinito de $\overline{\mathbb{V}}$ están identificados con los puntos antipodales de $\mathbb{S}^m$

$$O = (1, 0, ..., 0) \in \mathbb{S}^m$$
$$\infty = (-1, 0, ..., 0) \in \mathbb{S}^m$$

(4) La inclusión natural $\iota : \mathbb{V} \hookrightarrow \overline{\mathbb{V}}$, expresada en términos del sistema coordenado $(X_1, ..., X_m)$ que hace $\mathbb{R}^m \overset{b}{\leftrightarrow} \mathbb{V}$ y del sistema de coordenadas esféricas $(y_0, ..., y_m)$ que hace $\mathbb{S}^m \overset{\mathbf{b}}{\leftrightarrow} \overline{\mathbb{V}}$ (5.13), coincide con la inclusión de $\mathbb{R}^m$ en $\mathbb{S}^m$, definida por

$$X = (X_1, ..., X_m) \longmapsto \left(\frac{1 - \frac{1}{4} \|X\|^2}{1 + \frac{1}{4} \|X\|^2}, \frac{X_1}{1 + \frac{1}{4} \|X\|^2}, ..., \frac{X_m}{1 + \frac{1}{4} \|X\|^2} \right) \tag{5.14}$$

siendo $\|X\|^2 = \sum_i X_i^2$. La función (5.14) es la inversa de la *proyección estereográfica* de $\mathbb{S}^m$-$\{\infty\}$ sobre $\mathbb{R}^m$, proyectando desde el punto $\infty = (-1, 0, ..., 0) \in \mathbb{R}^{m+1}$ sobre el hiperplano $\mathbb{R}^m \cong \{(1, y_1, ..., y_m) \in \mathbb{R}^{m+1}\}$ tangente a $\mathbb{S}^m$ en $O = (1, 0, ..., 0)$. Dado que la proyección estereográfica define una aplicación conforme (véase Poor [37] o Apanasov [2]), hemos demostrado el siguiente resultado.

Proposición 5.1 *La estructura conforme* $\overline{\mathcal{C}}$ *en la complección esférica* $\overline{\mathbb{V}}$ *de* $(\mathbb{V}, \mathcal{C})$*, se caracteriza por hacer que la inclusión* $\iota : (\mathbb{V}, \mathcal{C}) \hookrightarrow (\overline{\mathbb{V}}, \overline{\mathcal{C}})$ *sea una aplicación conforme.*

Obsérvese además que la diferencial de la inclusión (5.14) en el origen es la identidad en el espacio $\mathbb{R}^m$, doblemente identificado con $T_O\mathbb{R}^m$ y con $T_O\mathbb{S}^m$. Se tiene así que el difeomorfismo de coordenadas esféricas $\mathbf{b} : \mathbb{S}^m \to \overline{\mathbb{V}}$ de (5.13) recupera la referencia conforme inicial $b : \mathbb{R}^m \to \mathbb{V}$ a través de la diferencial en el origen, tal y como muestra el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} T_O\mathbb{S}^m & \xrightarrow{\mathbf{b}_*} & T_O\overline{\mathbb{V}} \\ \| & & \uparrow \iota_* \text{ de (5.10)} \\ \mathbb{R}^m & \xrightarrow{b} & \mathbb{V} \end{array}$$

Observación 5.3 *En el espacio* $\mathbb{R}^m$ *con su estructura conforme Euclídea usual, las construcciones precedentes son canónicas. En particular, el difeomorfisno* (5.13) *identifica canónicamente la complección esférica* $\overline{\mathbb{R}^m}$ *con la esfera m-dimensional* $\mathbb{S}^m$*,*

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{S}^m & \longleftrightarrow & \overline{\mathbb{R}^m} \\ (y_0, y_1, ..., y_m) & \longleftrightarrow & \left[\frac{1}{2}(y_0 + 1) : y_1 : ... : y_m : y_0 - 1\right] \end{array}$$

La inclusión natural del espacio $\mathbb{R}^m$ *en su complección esférica* $\overline{\mathbb{R}^m} \equiv \mathbb{S}^m$ *es la aplicación* $\iota : \mathbb{R}^m \hookrightarrow \mathbb{S}^m$ *de (5.14) definida por la inversa de la proyección estereográfica.*

5.1.3 Grupo de Möbius

Sea $\widehat{O}(m+1,1) = \{\widehat{g} \in GL(m,\mathbb{R}) : \widehat{g}^{\intercal} S_{m+1,1}\widehat{g} = S_{m+1,1}\}$ el grupo lineal de automorfismos de $\mathbb{R}^{m+2}$ que dejan invariante la forma cuadrática

$$S_{m+1,1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & I_m & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(1) Cada $\widehat{g} \in \widehat{O}(m+1,1)$ induce una transformación conforme g de la cuádrica $\mathbb{P}(\hat{\mathbf{C}}) \subset \mathbb{P}^{m+1}$, esto es, de la complección esférica $\overline{\mathbb{R}^m}$

$$\begin{aligned} g\ : \overline{\mathbb{R}^m} &\longrightarrow \overline{\mathbb{R}^m} \\ [\,\hat{q}\,] &\longmapsto [\,\widehat{g}(\hat{q})\,] \end{aligned}$$

A través de la identificación canónica de $\overline{\mathbb{R}^m}$ con la esfera $\mathbb{S}^m$ (Observación 5.3), g puede verse como una transformación conforme de la esfera

$$g\ :\ \mathbb{S}^m \longrightarrow \mathbb{S}^m.$$

Obsérvese que dados $\widehat{g}_1, \widehat{g}_2 \in \widehat{O}(m+1,1)$ se tiene la equivalencia: $g_1 = g_2 \Leftrightarrow \widehat{g}_2 = \pm\widehat{g}_1$. Así, un elemento $g = \widehat{g} \cdot \{\pm I_{m+2}\}$ en el cociente $G^m = \widehat{O}(m+1,1)/\{\pm I_{m+2}\}$ puede entenderse como el difeomorfismo conforme asociado $g : \mathbb{S}^m \xrightarrow{\sim} \mathbb{S}^m$. El grupo G^m en su acción sobre la esfera $\mathbb{S}^m$ se conoce clásicamente con el nombre de *grupo de Möbius*,

$$M\ddot{o}b(\mathbb{S}^m) = \Big\{ g : \mathbb{S}^m \to \mathbb{S}^m \ / \ g \in G^m = \widehat{O}(m+1,1)/\{\pm I_{m+2}\} \Big\}.$$

Por el Teorema ya clásico de Lioville[2], el grupo $M\ddot{o}b(\mathbb{S}^m)$ representa la totalidad de las transformaciones conformes de la esfera $\mathbb{S}^m$ cuando $m > 1$.

Observación 5.4 *El grupo $\widehat{O}(m+1,1)$ tiene 4 componentes conexas, según se preserven o no la orientación temporal del cono de luz $\hat{\mathbf{C}} \subset \mathbb{R}^{m+2}$ y la orientación de la cuádrica $\mathbb{S}^m = \mathbb{P}(\hat{\mathbf{C}}) \subset \mathbb{P}^{m+1}$.*

El grupo $G^m = \widehat{O}(m+1,1)/\{\pm I_{m+2}\}$ tiene 2 componentes conexas y puede verse sumergido en $\widehat{O}(m+1,1)$ como el subgrupo de matrices que preservan la orientación temporal del cono, $g(\hat{\mathbf{C}}^+) = \hat{\mathbf{C}}^+$.

[2] **Teorema de Lioville**.- *Todo difeomorfismo conforme entre dos abiertos conexos de $\mathbb{S}^m$, con $m \geq 3$, proviene de la restricción de una transformación de Möbius. Para $m = 2$, este resultado es cierto únicamente para transformaciones conformes globales.*

Véase Kulkarni [26], Epstein [16], Gallot-Hulin-Lafontaine [19] o Schoen [43].

(2) Los elementos $g \in G^m$ que dejan fijos los puntos distinguidos origen O e infinito ∞ de la complección esférica $\overline{\mathbb{R}^m} = \mathbb{S}^m$, tienen asociada una representación matricial en $\widehat{O}(m{+}1{,}1)$ de la forma

$$g = \begin{pmatrix} r^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & R & 0 \\ 0 & 0 & r \end{pmatrix}, \quad (R \in O(m), r \in \mathbb{R}^+).$$

En el espacio $\mathbb{R}^m$, naturalmente sumergido en su complección esférica por la inclusión $\iota : \mathbb{R}^m \hookrightarrow \overline{\mathbb{R}^m} = \mathbb{S}^m$, $X \mapsto [1 : X : -\frac{1}{2}\|X\|^2]$ (5.12), g induce por restricción una transformación que actúa como la transformación lineal conforme

$$\mathbb{R}^m \ni X \mapsto g \circ \iota(X) = \iota\,(rRX) \leftrightarrow rRX \in \mathbb{R}^m.$$

De este modo, el subgrupo de isotropía $(G^m)_{O,\infty}$ formado por los elementos de G^m que fijan simultáneamente los puntos O y ∞, se encuentra identificado con el grupo lineal conforme $CO(m) \subset GL(m, \mathbb{R})$:

$$(G^m)_{O,\infty} \ni \begin{pmatrix} r^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & R & 0 \\ 0 & 0 & r \end{pmatrix} \longleftrightarrow rR \in CO(m).$$

(3) Los elementos $g \in G^m$ que dejan fijo el punto infinito ∞ de la complección esférica $\overline{\mathbb{R}^m} = \mathbb{S}^m$, tienen asociada una matriz del tipo

$$\begin{pmatrix} r^{-1} & 0 & 0 \\ V & R & 0 \\ -\frac{\|V\|^2}{2}r & -V^\intercal rR & r \end{pmatrix}, \quad (R \in O(m), r \in \mathbb{R}^+, V \in \mathbb{R}^m).$$

Nuevamente, su restricción al espacio $\mathbb{R}^m$, sumergido en su complección esférica por la inclusión ι de (5.12), da lugar a una transformación que actúa como la transformación afín conforme

$$\mathbb{R}^m \ni X \mapsto g \circ \iota(X) = \iota\,(rRX + rV) \leftrightarrow rRX + rV \in \mathbb{R}^m.$$

El subgrupo de isotropía $(G^m)_\infty = \{g \in G^m : g(\infty) = \infty\}$ está identificado con el grupo afín conforme $ACO(m) = \mathbb{R}^m \rtimes CO(m)$, composición de automorfismos conformes en $CO(m)$ con traslaciones del origen por vectores en $\mathbb{R}^m$ ([3]):

$$(G^m)_\infty \ni \begin{pmatrix} r^{-1} & 0 & 0 \\ V & R & 0 \\ -\frac{\|V\|^2}{2}r & -V^\intercal rR & r \end{pmatrix} \longleftrightarrow (rV, rR) \in ACO(m).$$

[3] Para más detalles sobre la estructura del afinizado de un grupo lineal véase el apartado: **Geometrías de Cartan en G-estructuras. Conexiones afines**, en la sección **5.3.1**.

(4) Los elementos de G^m que dejan fijo el origen O de la complección esférica $\overline{\mathbb{R}^m} = \mathbb{S}^m$ se corresponden con matrices del tipo

$$\begin{pmatrix} r^{-1} & \eta & -\frac{\|\eta\|^2}{2}r \\ 0 & R & -rR\eta^\intercal \\ 0 & 0 & r \end{pmatrix} \quad (R \in O(m), r \in \mathbb{R}^+, \eta \in \mathbb{R}^{m*}),$$

y al asignarles la representación simbólica $(rR, r\eta) \in CO(m) \times \mathbb{R}^{m*}$, el subgrupo de isotropía $H^m = (G^m)_O$ se identifica con el producto semidirecto[4] $CO(m) \ltimes \mathbb{R}^{m*}$:

$$H^m \ni \begin{pmatrix} r^{-1} & \eta & -\frac{\|\eta\|^2}{2}r \\ 0 & R & -rR\eta^\intercal \\ 0 & 0 & r \end{pmatrix} \longleftrightarrow (rR, r\eta) \in CO(m) \ltimes \mathbb{R}^{m*}.$$

Cada $h \in H^m$ corresponde a una transformación de Möbius $h : \mathbb{S}^m \to \mathbb{S}^m$ tal que $h(O) = O$, y su diferencial en el origen $O \in \mathbb{S}^m$ define un isomorfismo conforme de $T_O\mathbb{S}^m = \mathbb{R}^m$, que denotamos por $h_* : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$. Para $h = (rR, r\eta) \in CO(m) \ltimes \mathbb{R}^{m*}$, se comprueba que la acciónn de h sobre la esfera $\mathbb{S}^m$ verifica

$$\mathbb{R}^m \ni X \mapsto h \circ \iota(X) = \iota\left(\frac{rRX + \frac{1}{2}r^2 \|X\|^2 R\eta^\intercal}{1 + r\eta(X) + \frac{1}{4}r^2 \|\eta\|^2 \|X\|^2}\right) \in \iota(\mathbb{R}^m)$$

si $r^{-1}+\eta(X)+\frac{1}{4}r \|\eta\|^2 \|X\|^2 \neq 0$, y su diferencial en el origen $O = \iota(0)$ es

$$h_* = d_O h = d_0(h \circ \iota) = rR \in CO(m). \tag{5.15}$$

La asignación $H^m \ni h \mapsto d_O h = h_* \in CO(m)$ define un homomorfismo de grupos de Lie que coincide con la proyección natural

$$CO(m) \ltimes \mathbb{R}^{m*} \ni (rR, r\eta) \longmapsto rR \in CO(m).$$

Observación 5.5 *El par $(rR, r\eta) \in CO(m) \ltimes \mathbb{R}^{m*}$ en correspondencia con un $h \in H^m$ viene determinado por la diferencial $d_O h = h_*$ y por el punto $h^{-1}(\infty) \in \mathbb{S}^m$:*

- $h_* = rR \in CO(m)$
- $r\eta = \begin{cases} \frac{-2}{\|V\|^2}V^\intercal & si\ h^{-1}(\infty) = \iota(V) \in \iota(\mathbb{R}^m) \\ 0 & si\ h^{-1}(\infty) = \infty \end{cases}$

[4] La operación de grupo en el producto semidirecto $CO(m) \ltimes \mathbb{R}^{m*}$ se define como

$$(A, \eta) \cdot (A', \eta') = (A \circ A', \eta A' + \eta').$$

El grupo $H^m \approx CO(m) \ltimes \mathbb{R}^{m*}$ es el grupo de isotropía $(G^m)_O$, que sabemos conjugado de $(G^m)_\infty = ACO(m)$, y puede verse como un grupo afín en donde los elementos de $\mathbb{R}^{m*}$ definen las traslaciones del punto ∞ en $\mathbb{S}^m$-$\{O\} \approx \mathbb{R}^{m*}$ (con estructura de espacio afín).

(5) El cociente G^m/H^m es equivalente a la esfera $\mathbb{S}^m$, mediante la evaluación en el origen de cada clase $gH^m \in G^m/H^m$,

$$\begin{array}{rcl} ev_O \ : \ G^m/H^m & \longrightarrow & \mathbb{S}^m \\ gH^m & \longmapsto & g(O) \end{array}$$

y recibe el nombre de *espacio de Möbius*.

5.1.4 Referencias conformes del modelo de Cartan

La modelización de Cartan para un espacio conforme Euclídeo $(\mathbb{V},\mathcal{C})$ se realiza a través de su complección esférica $\overline{\overline{\mathbb{V}}} = \mathbb{V} \cup \{\infty\}$, igualmente dotada de una estructura conforme como extensión natural de $\mathcal{C}$. Análogamente al caso de las estructuras lineales (sección **2.2.1**), la estructura conforme inherente al espacio $\overline{\overline{\mathbb{V}}}$ se manifiesta por medio de la distinción de una familia de referencias adaptadas a la geometría de $\overline{\overline{\mathbb{V}}}$, por la cual resulta equivalente al modelo analítico $\mathbb{S}^m = \mathbb{R}^m \cup \{\infty\}$. Esta familia está igualmente controlada por un grupo asociado de estructura G^m. La definición de referencia conforme esférica en este modelo extiende a la noción de referencia lineal y conforme de $\mathbb{V}$, y el grupo estructural asociado G^m contiene al grupo lineal conforme $CO(m)$ como subgrupo natural.

En secciones anteriores se muestra cómo una referencia (lineal) conforme $b \in \mathcal{CO}(\mathbb{V})$ induce en el espacio de formas esféricas $\widehat{\mathbb{V}}$ una referencia asociada $\widehat{\mathbf{b}}$ (5.11), en cuyas coordenadas la matriz

$$S_{m+1,1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & I_m & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{5.16}$$

representa una métrica Lorentziana de la estructura conforme $\widehat{\mathcal{C}}$ inherente a $\widehat{\mathbb{V}}$. Para el espacio de formas esféricas $\widehat{\mathbb{V}}$ la noción de referencia viene dada por la siguiente definición más general.

Definición 5.1 *Una referencia* $\widehat{\mathbf{b}} \in \mathcal{CO}(\widehat{\mathbb{V}})$ adaptada a la geometría conforme del espacio $\widehat{\mathbb{V}}$ *es la formada por formas esféricas* $(\hat{A}_0, \hat{A}_1, ..., \hat{A}_{m+1})$, *tales que la estructura conforme* $\widehat{\mathcal{C}}$ *está representada por la métrica definida en coordenadas por la matriz* $S_{m+1,1}$ *de* (5.16).

Una referencia $\widehat{\mathbf{b}} \in \mathcal{CO}(\widehat{\mathbb{V}})$ consiste en fijar dos puntos distintos $[\hat{A}_0], [\hat{A}_{m+1}]$ en la compleción esférica $\overline{\mathbb{V}} \subset \mathbb{P}(\widehat{\mathbb{V}})$ y m hiperesferas reales mutuamente ortogonales $[\hat{A}_1], ..., [\hat{A}_m]$ pasando por ambos puntos, y tomar representates en $\widehat{\mathbb{V}}$ tales que

$$\rho(\hat{A}_0, \hat{A}_{m+1}) = \rho(\hat{A}_i, \hat{A}_i), \ 1 \leq i \leq m \quad (\forall \rho \in \widehat{\mathcal{C}}).$$

El isomorfismo coordenado asociado $\widehat{\mathbf{b}} : \mathbb{R}^{m+2} \to \widehat{\mathbb{V}}$ induce una correspondencia entre las cuádricas luz subyacentes, esto es entre la compleción esférica $\overline{\mathbb{R}^m} = \mathbb{S}^m$ (Observación 5.3) y la compleción esférica $\overline{\mathbb{V}}$, mediante el difemorfismo conforme (compárese con (5.13), pág. 85)

$$\begin{array}{rccc} \mathbf{b}: & \mathbb{S}^m & \longrightarrow & \overline{\mathbb{V}} \\ & (y_0, ..., y_m) & \longmapsto & \left[\frac{1}{2}(y_0+1)\hat{A}_0 + \sum_1^m y_i \hat{A}_i + (y_0\text{-}1)\, \hat{A}_{m+1}\right] \end{array} \tag{5.17}$$

Para dos referencias lineales $\widehat{\mathbf{b}}$ y $\widehat{\mathbf{b}}'$ adaptadas al espacio conforme $(\widehat{\mathbb{V}}, \widehat{\mathcal{C}})$, se verifica

$$\mathbf{b} = \mathbf{b}' : \ \mathbb{S}^m \to \overline{\mathbb{V}} \quad \Leftrightarrow \quad \exists r \in \mathbb{R}\text{-}\{0\},, \ \widehat{\mathbf{b}}' = r\widehat{\mathbf{b}}.$$

Definición 5.2 *Llamamos* referencia esférica *de la compleción* $\overline{\mathbb{V}}$ *al difeomorfismo conforme* $\mathbf{b} : \mathbb{S}^m \to \overline{\mathbb{V}}$ *definido por* $\widehat{\mathbf{b}} \in \mathcal{CO}(\widehat{\mathbb{V}})$, *que se identifica con la clase proyectiva*

$$\mathbf{b} \equiv [\,\widehat{\mathbf{b}}\,] = \left\{ r\widehat{\mathbf{b}} \in \mathcal{CO}(\widehat{\mathbb{V}}) : r \in \mathbb{R}\text{-}\{0\} \right\}.$$

El grupo $\widehat{O}(m+1,1)$ actúa por la derecha en el espacio de referencias esféricas de $\overline{\mathbb{V}}$ por la acción natural:

$$\mathbf{b} \cdot \widehat{g} = [\widehat{\mathbf{b}}] \cdot \widehat{g} = [\widehat{\mathbf{b}} \circ \widehat{g}], \quad \forall \widehat{g} \in \widehat{O}(m+1,1).$$

Esta actuación está perfectamente definida, $[\widehat{r\mathbf{b}} \circ \widehat{g}] = [r(\widehat{\mathbf{b}} \circ \widehat{g})] = [\widehat{\mathbf{b}} \circ \widehat{g}]$, $\forall r \in \mathbb{R}\text{-}\{0\}$, es transitiva y verifica:

$$\mathbf{b} \cdot \widehat{g} = \mathbf{b} \quad \Leftrightarrow \quad \widehat{g} = \pm I_{m+2} \in \widehat{O}(m+1,1).$$

El cociente $G^m = \widehat{O}(m+1,1)/\{\pm I_{m+2}\}$, que coincide con el grupo de Möbius estándar de la esfera $\mathbb{S}^m$, actúa ya de manera libre y transitiva sobre el espacio de referencias esféricas de la compleción $\overline{\mathbb{V}}$, y representa por tanto su *grupo de estructura*.

Proposición 5.2 *Una referencia esférica* $\mathbf{b} : \mathbb{S}^m \to \overline{\mathbb{V}}$ *se caracteriza por los datos:*

(a) *la imagen de los polos origen e infinito de* $\mathbb{S}^m$*:* $\mathbf{b}(O), \mathbf{b}(\infty) \in \overline{\mathbb{V}}$*,*

(b) *su diferencial en el origen:* $d_O\mathbf{b} : \mathbb{R}^m = T_O\mathbb{S}^m \to T_{\mathbf{b}(O)}\overline{\mathbb{V}}$.

Demostración. Basta observar que dos referencias esféricas $\mathbf{b}_1$ y $\mathbf{b}_2$ de $\overline{\mathbb{V}}$ difieren en una transformación de Möbius $g = \mathbf{b}_2 \circ \mathbf{b}_1^{-1} : \mathbb{S}^m \to \mathbb{S}^m$ en el grupo G^m. Si las referencias $\mathbf{b}_1$ y $\mathbf{b}_2$ coinciden en las imágenes de los puntos origen e infinito así como en su diferencial en el origen, entonces, $g \in G^m$ fijará los puntos O y ∞ de la esfera $\mathbb{S}^m$ y tendrá como diferencial en el origen a la identidad. Por el apartado **5.1.3** anterior esto implica que $g = id$, y por lo tanto $\mathbf{b}_1 = \mathbf{b}_2$. ■

Proposición 5.3 *Si* $\dim \mathbb{V} = m > 1$, *la familia de referencias esféricas de la complección esférica* $\overline{\mathbb{V}}$ *representan la totalidad de los difeomorfismos conformes entre* $\mathbb{S}^m$ *y* $\overline{\mathbb{V}}$. *En tal caso, una referencia esférica puede definirse alternativamente como un difeomorfismo conforme* $\mathbf{b} : \mathbb{S}^m \to \overline{\mathbb{V}}$.

Demostración. Consecuencia del Teorema de Lioville cuya demostración para un espacio conforme general $\mathbb{V}$ puede consultarse en Epstein [16]. ■

Los espacios conformes unidimensionales constituyen un caso excepcional que se trata en una sección a parte (sección **5.1.5**). La noción de referencia esférica se hace entonces equivalente a la noción de referencia proyectiva para el espacio $\mathbb{V} \cup \{\infty\}$, doblemente identificado con la complección esférica $\overline{\mathbb{V}}$ y con el espacio proyectivo $\mathbb{P}(\mathbb{V})$.

Referencias especiales

El hecho de que la complección esférica de un espacio conforme Euclídeo cuente con la presencia de puntos destacados, origen O e infinito ∞, dota de naturaleza especial a la familia de referencias esféricas de $\overline{\mathbb{V}}$ que los preservan.

Con la identificación natural de la esfera $\mathbb{S}^m$ con la complección esférica $\overline{\mathbb{R}^m}$ (Observación 5.3), los puntos distinguidos son los polos $O = (1, 0, ..., 0)$ y $\infty = (-1, 0, ..., 0)$ de la esfera $\mathbb{S}^m$.

Definición 5.3 *Una referencia esférica* $\mathbf{b} : \mathbb{S}^m \to \overline{\mathbb{V}}$ *es* referencia especial de $\overline{\mathbb{V}}$ *si*

$$\mathbf{b}(1, 0, ..., 0) = O_{\mathbb{V}} \quad \textit{punto origen de } \overline{\mathbb{V}}$$

o de manera equivalente, cuando $\mathbf{b}$ *proviene de la clase proyectiva de una referencia adaptada* $\widehat{\mathbf{b}} = (\hat{A}_0, ..., \hat{A}_{m+1}) \in \mathcal{CO}(\widehat{\mathbb{V}})$ *tal que* $[\hat{A}_0] = O_{\mathbb{V}} \in \overline{\mathbb{V}}$.

El grupo $H^m = (G^m)_O \approx CO(m) \ltimes \mathbb{R}^{m*}$ actúa de manera transitiva y libre sobre la familia de referencias especiales de $\overline{\mathbb{V}}$ y define por tanto su grupo asociado de estructura.

Recuérdese que el tangente en el punto origen de la complección esférica, se identifica con el espcio conforme Euclídeo de partida (véase (5.10), pág. 83), y en particular se tienen las equivalencias $\mathbb{R}^m = T_O\mathbb{S}^m$ y $\mathbb{V} = T_O\overline{\mathbb{V}}$. Cada referencia especial $\mathbf{b} : \mathbb{S}^m \to \overline{\mathbb{V}}$ tiene la propiedad de inducir un isomorfismo conforme

$$\mathbf{b}_* \ : \ \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{V}$$

identificado con su diferencial en el origen $d_O\mathbf{b} : T_O\mathbb{S}^m \longrightarrow T_O\overline{\mathbb{V}}$.

Proposición 5.4 *Una referencia especial* $\mathbf{b}$ *de* $\overline{\mathbb{V}}$ *equivale a un par*

$$(\mathbf{b}_*, \mathbf{b}(\infty)) \in \mathcal{CO}(\mathbb{V}) \times \left(\overline{\mathbb{V}}\text{-}\{O\}\right),$$

formado por $\mathbf{b}_*$ *una referencia conforme del espacio vectorial* $\mathbb{V}$*, y* $\mathbf{b}(\infty)$ *un punto en la complección esférica* $\overline{\mathbb{V}}$ *distinto al origen.*

Demostración. Es consecuencia de la Proposición 5.2 anterior. Dado que $\mathbf{b}(O) \in \overline{\mathbb{V}}$ es necesariamente el origen O, la referencia especial $\mathbf{b}$ queda determinada por el punto $\mathbf{b}(\infty) \in \overline{\mathbb{V}}$, que es $\mathbf{b}(\infty) \neq \mathbf{b}(O) = O$, y por su diferencial en el origen $d_O\mathbf{b}$ que identificamos con $\mathbf{b}_* \in \mathcal{CO}(\mathbb{V})$. ∎

Referencias conformes lineales

La familia de referencias lineales $\mathcal{CO}(\mathbb{V})$ puede considerarse naturalmente sumergida en el espacio de referencias esféricas de la complección esférica $\overline{\mathbb{V}}$, como

$$\mathcal{CO}(\mathbb{V}) \equiv \left\{\mathbf{b} : \mathbb{S}^m \longrightarrow \overline{\mathbb{V}} \ / \ \mathbf{b}(O_{\mathbb{S}^m}) = O_{\mathbb{V}},\, \mathbf{b}(\infty_{\mathbb{S}^m}) = \infty_{\mathbb{V}}\right\}.$$

Cada $b = (v_1, ..., v_m) \in \mathcal{CO}(\mathbb{V})$ puede identificarse con una referencia especial de $\overline{\mathbb{V}}$,

$$i(b) : \mathbb{S}^m \longrightarrow \overline{\mathbb{V}} \tag{5.18}$$

definida por el par $(b, \infty_{\mathbb{V}}) \in \mathcal{CO}(\mathbb{V}) \times \overline{\mathbb{V}}$ en la Proposición 5.4, es decir, $i(b)$ es la única referencia esférica de $\overline{\mathbb{V}}$ que preserva simultáneamente los puntos origen e infinito y tiene como diferencial en el origen a $i(b)_* = b \in \mathcal{CO}(\mathbb{V})$.

Se observa así que $i(b)$ coincide con el difeomorfismo conforme $\mathbf{b} : \mathbb{S}^m \to \overline{\mathbb{V}}$ de (5.13), pág. 85, asociado a la referencia conforme b por el procedimiento analítico de la sección **5.1.2**, y verifica por tanto la identidad: $i(b) \circ \iota_{\mathbb{R}^m} = \iota_{\mathbb{V}} \circ b$.

$$\begin{array}{ccc}
\mathbb{R}^m & \xrightarrow{b} & \mathbb{V} \\
\iota_{\mathbb{R}^m} \downarrow & \searrow & \downarrow \iota_{\mathbb{V}} \\
\mathbb{S}^m & \xrightarrow{i(b)} & \overline{\mathbb{V}}
\end{array}$$

5.1.5 Estructura general de Möbius

En el espacio $\widehat{\mathbb{V}}$ de las formas esféricas, un automorfismo $\widehat{\varphi} : \widehat{\mathbb{V}} \to \widehat{\mathbb{V}}$ que preserve la estructura conforme Lorentziana $\widehat{\mathcal{C}}$ en $\widehat{\mathbb{V}}$, define sobre la compleción esférica $\overline{\mathbb{V}} = \mathbb{P}(\widehat{\mathbf{C}}) \subset \mathbb{P}(\widehat{\mathbb{V}})$ una transformación inducida:

$$\begin{array}{rcl} \varphi : \overline{\mathbb{V}} & \longrightarrow & \overline{\mathbb{V}} \\ [\,\hat{q}\,] & \longmapsto & [\widehat{\varphi}(\hat{q})] \in \overline{\mathbb{V}}. \end{array}$$

La transformaciones así obtenidas reciben el nombre de *transformaciones de Möbius de la compleción esférica* $\overline{\mathbb{V}}$, y forman un grupo que denotamos por $M\ddot{o}b(\overline{\mathbb{V}})$. Este grupo se entiende como el grupo que rige la estructura (de Möbius) de la compleción esférica $\overline{\mathbb{V}}$, tal y como vimos en **2.2.1** con los grupos asociados a las estructuras lineales sobre espacios vectoriales.

Fijada una referencia esférica $b : \mathbb{S}^m \to \overline{\mathbb{V}}$ (Definición 5.2), el grupo $M\ddot{o}b(\overline{\mathbb{V}})$ se hace equivalente al grupo de Möbius general $M\ddot{o}b(\mathbb{S}^m)$ a través de la correspondencia

$$M\ddot{o}b(\overline{\mathbb{V}}) = b_{\circledast}\left(M\ddot{o}b(\mathbb{S}^m)\right) = \left\{b \circ g \circ b^{-1} : g \in M\ddot{o}b(\mathbb{S}^m)\right\}.$$

En general, si $\varphi : \mathbb{S}^m \to \mathbb{Y}$ es un difeomorfismo, la variedad $\mathbb{Y}$ recibe de $\mathbb{S}^m$ una estructura de *espacio de Möbius*, en correspondencia con la familia de difeomorfismos $M\ddot{o}b(\mathbb{S}^m)$-equivalentes:

$$\{\psi : \mathbb{S}^m \to \mathbb{Y} \;/\; \exists g \in M\ddot{o}b(\mathbb{S}^m) \text{ con } \psi = \varphi \circ g\}.$$

El grupo de transformaciones de Möbius de $\mathbb{Y}$ está formado por los difeomorfismos

$$M\ddot{o}b(\mathbb{Y}) = \varphi_{\circledast}\left(M\ddot{o}b(\mathbb{Y})\right) = \left\{\varphi \circ g \circ \varphi^{-1} : \mathbb{Y} \to \mathbb{Y} \;/\; g \in M\ddot{o}b(\mathbb{S}^m)\right\}.$$

Subespacios de la compleción esférica

La definición natural de subespacios n-dimensionales en la compleción esférica $\overline{\mathbb{V}}$, como subvariedades coherentes con su estructura Möbius, se introduce a través del concepto de n-esfera en $\overline{\mathbb{V}}$.

Definición 5.4 *Para $n \leq m$, una n-*esfera generalizada (real) $\mathbb{Y}_n$ *en la compleción esférica $\overline{\mathbb{V}}$ viene dada por la intersección de la cuárdica $\overline{\mathbb{V}} = \mathbb{P}(\hat{\mathbf{C}})$ con un subespacio proyectivo $(n+1)$-dimensional $\mathbb{P}(\mathbb{V}_{n+2})$ en $\mathbb{P}(\widehat{\mathbb{V}})$, esto es,*

$$\mathbb{Y}_n = \overline{\mathbb{V}} \cap \mathbb{P}(\mathbb{V}_{n+2}) = \left\{[\,\hat{q}\,] \in \mathbb{P}(\widehat{\mathbb{V}}) : \hat{q} \in \mathbb{V}_{n+2},\ \rho(q,q) = 0\right\}.$$

Hemos visto que en el caso $n = m - 1$, la intersección de un hiperplano proyectivo con $\overline{\mathbb{V}}$ en $\mathbb{P}(\widehat{\mathbb{V}})$ da lugar a una hiperesfera o $(m-1)$-esfera real en $\overline{\mathbb{V}}$, que se correponde o bien con un hiperplano afín, o bien con una esfera conforme del espacio conforme Euclídeo $\mathbb{V}$. En general, una n-esfera en $\overline{\mathbb{V}}$ puede verse también como la intersección transversa de $m - n$ hiperesferas reales en $\overline{\mathbb{V}}$.

Observación 5.6 *La familia de n-esferas de la complección esféricas $\overline{\mathbb{V}}$ permanece invariante por sus transformaciones de Möbius,*

$$\varphi(\mathbb{Y}_n) = \mathbb{Y}'_n, \quad \forall \varphi \in M\ddot{o}b(\overline{\mathbb{V}})$$

Para $n \leq m$, la esfera $\mathbb{S}^n$ se asume naturalmente sumergida como n-esfera de $\mathbb{S}^m$ mediante la inclusión

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{S}^n & \hookrightarrow & \mathbb{S}^m \\ (y_0, y_1, ..., y_n) & \longmapsto & (y_0, y_1, ..., y_n, 0, ..., 0) \end{array}$$

que tiene como diferencial en el origen a la inclusión natural del espacio $\mathbb{R}^n = T_O\mathbb{S}^n$ como subespacio vectorial de $\mathbb{R}^m = T_O\mathbb{S}^m$:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n & \hookrightarrow & \mathbb{R}^m \\ (x_1, ..., x_n) & \longmapsto & (x_1, ..., x_n, 0, ..., 0) \end{array}$$

Con la inclusión $\mathbb{S}^n \subset \mathbb{S}^m$ se tiene que:

$$M\ddot{o}b(\mathbb{S}^n) = \left\{ g' : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n : \exists g \in M\ddot{o}b(\mathbb{S}^m) \text{ con } g(\mathbb{S}^m) = \mathbb{S}^n \text{ y } g' = g|_{\mathbb{S}^n} \right\}.$$

Fijada una n-esfera $\mathbb{Y}_n$ en $\overline{\mathbb{V}}$, las referencias esféricas $\mathbf{b} : \mathbb{S}^m \to \overline{\mathbb{V}}$ tales que la n-esfera $\mathbb{Y}_n$ en $\overline{\mathbb{V}}$ se corresponde con $\mathbb{S}^n = \mathbf{b}^{-1}(\mathbb{Y}_n)$ en $\mathbb{S}^m$, dan lugar a la siguiente familia de difeomorfismos $M\ddot{o}b(\mathbb{S}^m)$-equivalentes:

$$\left\{ \mathbf{b}|_{\mathbb{S}^n} : \mathbb{S}^n \to \mathbb{Y}_n \ / \ \mathbf{b} \text{ referencia esférica de } \overline{\mathbb{V}} \text{ con } \mathbf{b}(\mathbb{S}^n){=}\mathbb{Y}_n \right\}.$$

De este modo, la n-esfera $\mathbb{Y}_n$ está dotado de una estructura de espacio de Möbius heredada del ambiente $\overline{\mathbb{V}}$. El grupo de transformciones de Möbius de $\mathbb{Y}_n \subset \overline{\mathbb{V}}$ es

$$M\ddot{o}b(\mathbb{Y}_n) = \left\{ \varphi|_{\mathbb{Y}_n} : \mathbb{Y}_n \to \mathbb{Y}_n : \varphi \in M\ddot{o}b(\overline{\mathbb{V}}) \text{ con } \varphi(\mathbb{Y}_n) = \mathbb{Y}_n \right\}.$$

Especial interés tiene el caso $n = 1$, que hace referencia a la familia de círculos (o esferas n-dimensionales) de la compección esférica $\overline{\mathbb{V}}$ en correspondencia con las rectas afines y círculos conformes del espacio conforme Euclídeo $\mathbb{V}$. Por lo que aquí hemos visto, los círculos en $\overline{\mathbb{V}}$ están dotados de una estructura heredada de espacio de Möbius de dimensión 1; veremos a continuación que dicha estructura resulta equivalente a la estructura proyectiva en dimensión 1.

5.1.6 La recta de Möbius. Razón doble

Un espacio vectorial unidimensional $\mathbb{V}$ admite una única estructura conforme, $\mathcal{CO}(\mathbb{V}) = \mathcal{L}(\mathbb{V})$, cuyo grupo de estructura $CO(1)$ coincide con el de isomorfismos de $\mathbb{R}^1$ (equivalente al grupo multiplicativo $(\mathbb{R}, \cdot)$).

La estructura conforme unidimensional se modeliza en este contexto mediante el grupo de transformaciones de Möbius unidimensional

$$G^1 = \{g \in GL(3, \mathbb{R}) : g^\intercal\, S_{2,1}\, g = S_{2,1},\ g(\hat{\mathbf{C}}^+) = \hat{\mathbf{C}}^+\}$$

(siendo $S_{2,1}$ la matriz definida en (5.16) pág. 90 para $m = 1$) que actúa en la esfera $\mathbb{S}^1 = \mathbb{R}^1 \cup \{\infty\}$.

Por el apartado anterior, sabemos que al fijar un punto en la esfera $\mathbb{S}^1 = \mathbb{R}^1 \cup \{\infty\}$ la estructura de Möbius coincide con el grupo $ACO(1) = A(1)$ de transformaciones afines de $\mathbb{R}^1$, y esto mismo ocurre con la estructura proyectiva del espacio $\mathbb{P}^1 = \mathbb{R}^1 \cup \{\infty\}$. Se tiene así que la esfera de Möbius unidimensional no es más que la recta proyectiva $\mathbb{P}^1 = \mathbb{R}^1 \cup \{\infty\} = \mathbb{S}^1$, y el grupo $M\ddot{o}b(\mathbb{S}^1)$ se identifica con el gupo de homografías $Hom(\mathbb{P}^1)$. La correspondencia entre espacios viene dada por

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{P}^1 & \longleftrightarrow & \mathbb{S}^1 & \longleftrightarrow & \overline{\mathbb{R}^1} \\ [x_1 : x_2] & \longleftrightarrow & \left(\frac{x_2^2 - \frac{1}{4}x_1^2}{x_2^2 + \frac{1}{4}x_1^2}, \frac{x_1 x_2}{x_2^2 + \frac{1}{4}x_1^2}\right) & \longleftrightarrow & [x_2^2 : x_1 x_2 : -\frac{1}{2}x_1^2] \end{array}$$

de manera que la inclusión natural del espacio $\mathbb{R}^1$ corresponde a las expresiones

$$\iota(t) \;=\; [t : 1] \longleftrightarrow \left(\frac{1 - \frac{1}{4}t^2}{1 + \frac{1}{4}t^2}, \frac{t}{1 + \frac{1}{4}t^2}\right) \longleftrightarrow [1 : t : -\tfrac{1}{2}t^2].$$

La equivalencia entre la estructura de Möbius de $\mathbb{S}^1$ y la estructura proyectiva de $\mathbb{P}^1$, va ligada al isomorfismo de grupos

$$\begin{array}{ccc} Hom(\mathbb{P}^1) & \longleftrightarrow & G^1 \\ \underset{con\ ad-bc=1}{\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}} & \longleftrightarrow & \begin{pmatrix} d^2 & 2cd & \text{-}2c^2 \\ bd & ad{+}bc & \text{-}2ac \\ \text{-}\frac{1}{2}b^2 & \text{-}ab & a^2 \end{pmatrix} \end{array} \tag{5.19}$$

Es sabido que en el espacio $\mathbb{P}^1$ (identificado con la recta de Möbius $\mathbb{S}^1$) cada cuádrupla ordenada de puntos distintos tiene asociada una razón doble $[x_1 : x_2 : x_3 : x_4] \in \mathbb{P}^1$. El valor de $[x_1 : x_2 : x_3 : x_4]$ está definido como la imagen del punto x_4 a través de la única homografía de $\mathbb{P}^1$ que lleva x_0 a $0 \in \mathbb{R}^1 \subset \mathbb{P}^1$, x_2 a $1 \in \mathbb{R}^1 \subset \mathbb{P}^1$ y x_3 a

$\infty = [1:0] \in \mathbb{P}^1$ ([5]). Así, cuando $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R}^1 \subset \mathbb{P}^1$ se tiene

$$[x_1 : x_2 : x_3 : x_4] = \frac{(x_1 - x_2)\,(x_1 - x_4)}{(x_3 - x_4)\,(x_3 - x_2)} \in \mathbb{R}.$$

La razón doble proporciona un conocido invariante proyectivo unidimensional, que no varía bajo la acción de transfomraciones en el grupo $Hom(\mathbb{P}^1)$ (identificado con el grupo de Möbius $G^1 = M\ddot{o}b(\mathbb{S}^1)$),

$$[x_1 : x_2 : x_3 : x_4] = [\tau(x_1) : \tau(x_2) : \tau(x_3) : \tau(x_4)], \quad \forall \tau \in Hom(\mathbb{P}^1) \equiv M\ddot{o}b(\mathbb{S}^1).$$

Del mismo modo, para un espacio vectorial unidimensional $\mathbb{V}$, con estructura conforme trivial $\mathcal{CO}(\mathbb{V}) = \mathcal{L}(\mathbb{V})$, la complección esférica $\overline{\mathbb{V}}$ tiene igualmente asociada una noción de razón doble para cuádruplas ordenadas de puntos distintos de $\overline{\mathbb{V}}$.

Definición 5.5 *Dados $\overline{q}_1, \overline{q}_2, \overline{q}_3, \overline{q}_4 \in \overline{\mathbb{V}}$ puntos distintos en la complección esférica de $\mathbb{V}$ unidimensional, se define su* razón doble $[\overline{q}_1 : \overline{q}_2 : \overline{q}_3 : \overline{q}_4]_{\overline{\mathbb{V}}} \in \mathbb{P}^1$ *como*

$$[\overline{q}_1 : \overline{q}_2 : \overline{q}_3 : \overline{q}_4]_{\overline{\mathbb{V}}} = [\mathbf{b}^{-1}(\overline{q}_1) : \mathbf{b}^{-1}(\overline{q}_2) : \mathbf{b}^{-1}(\overline{q}_3) : \mathbf{b}^{-1}(\overline{q}_4)] \in \mathbb{P}^1 \tag{5.20}$$

para cualquier referencia esférica $\mathbf{b} : \mathbb{P}^1 = \mathbb{S}^1 \to \overline{\mathbb{V}}$.

El hecho de que la razon doble de $\mathbb{P}^1$ permanezca invariante por transformaciones en $Hom(\mathbb{P}^1) \equiv M\ddot{o}b(\mathbb{S}^1)$ asegura que el valor de $[\overline{q}_1 : \overline{q}_2 : \overline{q}_3 : \overline{q}_4]_{\overline{\mathbb{V}}} \in \mathbb{P}^1$ no depende de la elección particular de la referencia $\mathbf{b}$ y está perfectamente definido.

Se observa así que la razón doble de la complección esférica unidimensional $\overline{\mathbb{V}}$ define un invariante propio de su estructura de Möbius (estructura proyectiva) que permanece inalterada a través del grupo de transformaciones de Möbius de $\overline{\mathbb{V}}$,

$$[\overline{q}_1 : \overline{q}_2 : \overline{q}_3 : \overline{q}_4]_{\overline{\mathbb{V}}} = [\tau(\overline{q}_1) : \tau(\overline{q}_2) : \tau(\overline{q}_3) : \tau(\overline{q}_4)]_{\overline{\mathbb{V}}}, \quad \forall \tau \in M\ddot{o}b(\overline{\mathbb{V}}).$$

Observación 5.7 *Cada círculo en la complección esférica $\overline{\mathbb{V}}$ de un m-espacio conforme Euclídeo $\mathbb{V}$ tiene una estructura natural de espacio de Möbius unidimensional, esto es, de recta proyectiva, y tiene definida una razón doble sobre sus puntos. Además, las transformaciones de Möbius de $\overline{\mathbb{V}}$ preservan la razón doble de sus círculos.*

[5] La razón doble puede definirse igualmente para cuádruplas (x_1, x_2, x_3, x_4) en que únicamente los tres primeros puntos deben ser distintos entre ellos, y se tiene:

$$\begin{aligned} [x_1 : x_2 : x_3 : x_1] &= 0 \\ [x_1 : x_2 : x_3 : x_2] &= 1 \\ [x_1 : x_2 : x_3 : x_3] &= \infty \end{aligned}$$

5.1.7 Algebras de Lie asociadas

La equivalencia local de $G^m = \widehat{O}(m+1,1)/\{\pm I_{m+2}\}$ con el grupo lineal $\widehat{O}(m+1,1)$ implica que el álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ asociada a G^m coincide con el álgebra $\widehat{\mathfrak{o}}(m+1,1)$ de matrices reales $(m+2)\times(m+2)$ de la forma

$$\begin{pmatrix} -r & \eta & 0 \\ V & R & -\eta^{\intercal} \\ 0 & -V^{\intercal} & r \end{pmatrix}, \tag{5.21}$$

donde $V \in \mathbb{R}^m$ es vector columna, $\eta \in \mathbb{R}^{m*}$ vector fila, $A = R + rI_m \in \mathfrak{co}(m)$ para $R \in \mathfrak{o}(m)$ (matriz antisimétrica) y $r \in \mathbb{R}$. Asignando al elemento (5.21) de $\mathfrak{g} = \widehat{\mathfrak{o}}(m+1,1)$ la representación $(V, R+rI_m, \eta) \in \mathbb{R}^m \times \mathfrak{co}(m) \times \mathbb{R}^{m*}$, $\mathfrak{g}$ se descompone como la suma directa $\mathbb{R}^m \oplus \mathfrak{co}(m) \oplus \mathbb{R}^{m*}$, y el corchete de Lie $[.,.]$ -conmutador de matrices en $\widehat{\mathfrak{o}}(m+1,1)$- se comporta como sigue para $V, V' \in \mathbb{R}^m$, $A, A' \in \mathfrak{co}(m)$ y $\eta, \eta' \in \mathbb{R}^{m*}$:

$$[V,V'] = 0\,; \quad [\eta,\eta'] = 0\,; \quad [A,A'] = AA' - A'A \in \mathfrak{co}(m)\,;$$

$$[A,V] = AV \in \mathbb{R}^m\,; \quad [\eta, A] = \eta A \in \mathbb{R}^{m*}\,;$$

$$[V,\eta] = V\eta - \eta^{\intercal}V^{\intercal} + \eta(V)I_m \in \mathfrak{co}(m).$$

Observación 5.8 *Para $\eta \in \mathfrak{g}_1 = \mathbb{R}^{m*}$ y $V \in \mathfrak{g}_{-1} = \mathbb{R}^m$ se verifica*

$$[V,\eta] = \Phi_\eta(V) \in \mathfrak{co}(m)$$

siendo $\Phi : \mathbb{R}^{m*} \to \mathfrak{co}(m)_1$ el isomorfismo canónico que identifica la primera prolongación $\mathfrak{co}(m)_1$ del álgebra conforme con el dual $\mathbb{R}^{m*}$ (Corolario 3.1 del Capítulo 3).

El álgebra $\mathfrak{g}$ tiene estructura de álgebra graduada que rompe en $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{-1} \oplus \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1$:

$$\mathfrak{g}_{-1} = \{(V,0,0) : V \in \mathbb{R}^m\} = \mathbb{R}^m;$$

$$\mathfrak{g}_0 = \{(0, R+rI_m, 0) : (R+rI) \in \mathfrak{co}\,(m)\} = \mathfrak{co}\,(m)\,;$$

$$\mathfrak{g}_1 = \{(0,0,\eta) : \eta \in \mathbb{R}^{m*}\} = \mathbb{R}^{m*}.$$

Además,

$$\mathfrak{h} = \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1 = \left\{ \begin{pmatrix} -r & \eta & 0 \\ 0 & R & -\eta^{\intercal} \\ 0 & 0 & r \end{pmatrix} : (R + rI_m) \in \mathfrak{co}(m),\ \eta \in \mathbb{R}^{m*} \right\}$$

es el álgebra asociada al grupo de Lie $H^m = CO(m) \ltimes \mathbb{R}^{m*}$ de transformaciones de G^m que dejan invariante el origen $O \in \mathbb{S}^m$, y se tiene

$$\mathfrak{g} = \mathbb{R}^m \oplus \mathfrak{h}.$$

El grupo $CO(m)$, identificado con el subgrupo de transformaciones en G^m que dejan invariantes el origen O y el infinito ∞ en $\mathbb{S}^m$, tiene asociada del modo usual el álgebra de Lie

$$\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{co}(m).$$

El homomorfismo de grupos $H^m \ni h \to h_* \in CO(m)$ va asociado a la proyección de álgebras $\mathfrak{h} \ni (R + rI_m) \oplus \eta \xrightarrow{pr_0} R + rI_m \in \mathfrak{co}(m)$.

La exponencial

El grupo de Lie de G^m tiene asociada una aplicación exponencial $\exp : \mathfrak{g} \to G^m$, que por las equivalencias precedentes coincide con la exponencial matricial

$$\exp : \widehat{\mathfrak{o}}(m+1,1) \longrightarrow \widehat{O}(m+1,1).$$

Así, para $R + rI_m \in \mathfrak{g}_0 = \mathfrak{co}(m)$, $\eta \in \mathfrak{g}_1 = \mathbb{R}^{m*}$, $V \in \mathfrak{g}_{-1} = \mathbb{R}^m$ se tiene:

$$\exp(R + rI_m) = \begin{pmatrix} e^{-r} & 0 & 0 \\ 0 & \exp R & 0 \\ 0 & 0 & e^r \end{pmatrix} = (e^r \exp R, 0) \in CO(m) \subset H^m;$$

$$\exp(\eta) = \begin{pmatrix} 1 & \eta & -\frac{\|\eta\|^2}{2} \\ 0 & I_m & -\eta^{\intercal} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = (I_m, \eta) \equiv \eta \in \mathbb{R}^{m*} \subset H^m;$$

$$\exp(V) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ V & I_m & 0 \\ -\frac{\|V\|^2}{2} & -V^{\intercal} & 1 \end{pmatrix}.$$

Observación 5.9 *La composición $ev_O \circ \exp : \mathbb{R}^m \to \mathbb{S}^m$, de la exponencial sobre $\mathfrak{g}_{-1} = \mathbb{R}^m$ con la evaluación de $G^m = Möb(\mathbb{S}^m)$ en el origen $O \in \mathbb{S}^m$,*

$$ev_O(\exp V) = (\exp V)(O) = [1 : V : -\tfrac{1}{2}\|V\|^2] = \iota(V) \ , \quad \forall V \in \mathbb{R}^m,$$

coincide con la inclusión natural de $\iota : \mathbb{R}^m \hookrightarrow \mathbb{S}^m$ (inversa de la proyección estrereográfica).

5.2 Variedades conformes

El procedimiento desarrollado en la sección anterior para el estudio de los espacios conformes Euclídeos se extiende al ámbito de las variedades conformes Riemannianas.

Se tiene así que la presencia de una estructura conforme sobre la variedad diferenciable M permite completar el fibrado tangente TM para dar lugar a un nuevo fibrado $\overline{T}M$ que llamamos *fibrado tangente esférico*, y que apoya sobre cada punto de M una "esfera tangente" $\overline{T}_xM$. El espacio tangente original T_xM se relaciona con la esfera tangente $\overline{T}_xM$ mediante su doble identificación con el espacio $\overline{T}_xM$-$\{\infty_x\}$ (vía la inclusión natural $\iota : T_xM \hookrightarrow \overline{T}_xM$), y con el tangente a la esfera $\overline{T}_xM$ en su origen $O_x \in \overline{T}_xM$ (vía la diferencial $\iota_* : T_xM \to T_{O_x}(\overline{T}_xM)$).

La introducción de la complección esférica conlleva una definición más general para la noción de referencia en la estructura conforme. Veremos así que la estructura conforme Riemanniana sobre una variedad M va ligada a un G^m-fibrado principal $P(M) \to M$ de referencias que identifican cada esfera tangente $\overline{T}_xM$ con la esfera conforme estándar $\mathbb{S}^m$, y a un H^m-subfibrado $Q(M) \to M$ especialmente interesante de referencias que preservan la posición destacada del origen de la esfera. El fibrado usual de referencias conformes lineales $CO(M) \to M$ queda entonces identificado con la $CO(m)$-reducción de las referencias esféricas que fijan simultáneamente la posición de punto origen e infinto en la esfera.

5.2.1 Fibrado tangente esférico

Una estructura conforme Riemanniana en la variedad M asigna de manera diferenciable una estructura conforme Euclídea sobre cada espacio tangente T_xM, $x \in M$ Según el modelo de Cartan, la estructura conforme de T_xM tiene asociado un espacio de formas cuadráticas esféricas $\widehat{T}_xM \subset QA(T_xM)$ (definido en (5.1), pág. 80), y un espacio de $(m-1)$-esferas de radio nulo que da lugar a la complección esférica $\overline{T}_xM = T_xM \cup \{\infty\}$ (definido en (5.5), pág. 82) como ambiente natural para la estructura conforme tangente de T_xM.

De este modo, la variedad diferenciable M tiene naturalmente asociados a su estructura conforme los siguientes fibrados diferenciables:

- $\widehat{T}M = \bigcup_{x\in M} \widehat{T}_xM \to M$, fibrado de formas cuadráticas esféricas;
- $\overline{T}M = \bigcup_{x\in M} \overline{T}_xM \to M$, *fibrado tangente esférico* de la variedad conforme.

La complección esférica de un espacio conforme Euclídeo es una esfera doblemente punteada, en el sentido de que en ella se hallan distinguidos dos puntos de naturaleza especial: el punto origen O y el punto del infinito ∞. En la variedad conforme Riemanniana M, este resultado se manifiesta a través de dos secciones naturalmente distinguidas en su fibrado esférico $\overline{T}M \to M$:

- $\sigma_O : M \to \overline{T}M$, tal que $\sigma_O(x) = O_x \in \overline{T}_xM$, $\forall x \in M$;

- $\sigma_\infty : M \to \overline{T}M$, tal que $\sigma_\infty(x) = \infty_x \in \overline{T}_x M$, $\forall x \in M$.

Por otra parte, al considerar cada punto del espacio vectorial como una esfera de radio nulo en su complección esférica, existe una inclusión canónica $\iota_x : T_x M \to \overline{T}_x M$, $\forall x \in M$, (definida en (5.8), pág. 83) Esto da lugar a un homomorfismo de fibrados

$$\iota \ : \ TM \ \hookrightarrow \ \overline{T}M$$

que sumerge el tangente usual TM en el tangente esférico $\overline{T}M$. En relación a las secciones distinguidas σ_O y σ_∞, se verifica:

- $\iota_x(T_x M) = \overline{T}_x M - \{\sigma_\infty(x)\}$ $\quad (T_x M \cup \{\infty_x\} \overset{\iota_x}{\equiv} \overline{T}_x M)$;
- $\iota_x(0_x) = O_x = \sigma_O(x) \in \overline{T}_x M$ (siendo 0_x el origen vectorial de $T_x M$).

La diferencial en el origen de la inclusión ι_x es un difeomorfismo

$$(\iota_x)_* \ : \ T_x M \ \longrightarrow \ T_{O_x}(\overline{T}_x M),$$

que permite identificar estos espacios tangentes (véase (5.10), pág. 83) y considerar al espacio $T_x M$ como espacio tangente común de la esfera $\overline{T}_x M$ y de la variedad M en su punto de contacto $O_x \equiv x$.

El fibrado esférico $\overline{T}M$ apoya sobre cada $x \in M$ una esfera tangente a la variedad, en donde el punto de apoyo x se identifica con el origen O_x en la esfera $\overline{T}_x M$. El punto ∞_x también distinguido en $\overline{T}_x M$, permite proyectar la esfera estereográficamente sobre el espacio tangente $T_x M$, a través de $\iota^{-1} : \overline{T}_x M$-$\{\infty\} \to T_x M$.

5.2.2 Fibrados de referencias de la estructura en $\overline{T}M$

Mediante la introducción de la complección esférica, la estructura conforme Euclídea de un espacio vectorial $\mathbb{V}$ da lugar a una compactificación $\overline{\mathbb{V}} = \mathbb{V} \cup \{\infty\}$, equivalente a la esfera conforme $\mathbb{S}^m$ en el sentido de que $\overline{\mathbb{V}}$ está dotada de una estructura de espacio de Möbius. En una variedad conforme Riemanniana M, la estructura de Möbius presente en el fibrado tangente esférico $\overline{T}M \to M$ se manifiesta mediante fibrados principales de referencias sobre M, formados por referencias que equiparan las fibras de $\overline{T}M$ con la esfera m-dimensional de Möbius $\mathbb{S}^m$.

(1) En primer lugar, la noción de *referencia esférica general* (Definición 5.2) va asociada a la definición de un fibrado principal de referencias esféricas $P(M)$ sobre la variedad conforme M, tal que

$$P(M) = \{p : \mathbb{S}^m \to \overline{T}_x M \ / \ p \text{ referencia esférica de } \overline{T}_x M, \ x \in M\}, \tag{5.22}$$

y cuyo grupo asociado de estructura es $G^m = \widehat{O}(m+1,1)/\{\pm I_{m+2}\}$, en correspondencia con el grupo de transformaciones de Möbius $M\ddot{o}b(\mathbb{S}^m)$. Recuérdese (apartado **5.1.3** (1)) que cuando la dimensión de M es $m > 2$, el grupo de Möbius coincide con el grupo de difeomorfismos conformes de $\mathbb{S}^m$.

(2) La posición destacada del punto origen O_x en cada esfera tangente $\overline{T}_xM$, da lugar a la distinción de un subfibrado $Q(M)$ de *referencias especiales* (Definición 5.2)

$$Q(M) = \{q : \mathbb{S}^m \longrightarrow \overline{T}_xM \ / \ q \in P(M) \text{ y } q(O) = O_x\}, \tag{5.23}$$

que define una H^m-reducción de $P(M)$, para el subgrupo de $H^m = (G^m)_O$ de transformaciones que fijan el origen O de la esfera $\mathbb{S}^m$. El grupo H^m se identifica con el producto semidirecto $CO(m) \ltimes \mathbb{R}^{m*}$, y tiene como subgrupos a $CO(m)$ y $\mathbb{R}^{m*}$ (apartado **5.1.3** (4)).

La diferencial en el origen de una referencia especial $q \in Q(M)_x$ define un isomorfismo conforme $q_* : \mathbb{R}^m \to T_xM$, esto es, una referencia lineal y conforme $q_* \in CO(M)_x$. Obsérvese que para $q \in Q(M)_x$ y $h = (rR, r\eta) \in H^m = CO(m) \ltimes \mathbb{R}^{m*}$ es:

$$(q \cdot h)_* = q_* \cdot h_* = q_* \cdot (rR) \in CO(M)_x.$$

Proposición 5.5 *Mediante la acción de $\mathbb{R}^{m*} \subset H^m$ en $Q(M)$, la proyección*

$$\begin{array}{rcl} \pi : Q(M) & \longrightarrow & CO(M) \\ q & \longmapsto & q_* \end{array}$$

define un $\mathbb{R}^{m*}$-fibrado principal sobre $CO(M)$.

Demostración. Las referencias especiales $q, \overline{q} \in Q(M)$ definen la misma proyección $q_* = \overline{q}_*$ en $CO(M)$, cuando $\overline{q} = q \cdot h$ para cierto $h = (rR, r\eta) \in H^m = CO(m) \ltimes \mathbb{R}^{m*}$, con $h_* = rR = I_m \in CO(m)$. Por lo tanto,

$$q_* = \overline{q}_* \in CO(M) \ \Leftrightarrow\ \exists \eta \in \mathbb{R}^{m*},, \overline{q} = q \cdot (I_m, \eta) \equiv q \cdot \exp\eta \in Q(M),$$

y concluimos que $Q(M) \to CO(M)$ es fibrado principal por la acción diferenciable del grupo $\mathbb{R}^{m*} \subset H^m$ en $Q(M)$. ■

(3) Una referencia lineal y conforme $b \in CO(M)_x$ se identifica con una referencia especial $i(b) \in Q(M)_x$, caracterizada por ser $i(b)_* = b \in CO(M)_x$ y preservar los puntos origen e infinito de la complección esférica (véase (5.18), pág. 93). Se tiene así una sección canónica

$$\begin{array}{rcl} i : CO(M) & \longrightarrow & Q(M) \\ b & \longmapsto & i(b) \end{array} \tag{5.24}$$

que sumerge a $CO(M)$ como reducción de fibrado $Q(M) \to M$ al grupo $CO(m)$. Además, la sección i trivializa el fibrado $Q(M) \to CO(M)$ mediante la correspondencia

$$\begin{array}{ccc} Q(M) & \longrightarrow & CO(M) \times \mathbb{R}^{m*} \\ q & \longmapsto & \left(q_*, \eta_q\right) \text{ „ } q = q_* \cdot \exp \eta_q \end{array} \tag{5.25}$$

en donde $\eta_q \in \mathbb{R}^{m*}$ viene determinado por $q^{-1}(\infty_x) \in \mathbb{S}^m$-$\{O\}$ a través de:

$$\eta_q = \begin{cases} \frac{-2}{\|V\|^2} V^\intercal & \text{si } q^{-1}(\infty_x) = \iota(V) \in \iota(\mathbb{R}^m) \\ 0 & \text{si } q^{-1}(\infty_x) = \infty \end{cases}$$

(compárese con la Observación 5.5, pág. 89).

(4) El par de grupos estructurales (G^m, H^m) define un espacio homogéneo G^m/H^m de Möbius, identificable con la esfera m-dimensional $\mathbb{S}^m$ por la correspondencia

$$G^m/H^m \ni gH \leftrightarrow g(O) \in \mathbb{S}^m.$$

Asociado al fibrado $P(M)$ se puede considerar el fibrado $P(M) \times_{G^m} (G^m/H^m)$, cuyas fibras sobre M son difeomorfas a $\mathbb{S}^m$, y que resulta canónicamente isomorfo al fibrado $\overline{T}M$ por la correspondencia

$$\begin{array}{ccc} P(M) \times_{G^m} (G^m/H^m) & \longrightarrow & \overline{T}M \\ p \times_{G^m} (gH^m) & \longmapsto & p \circ g(O). \end{array} \tag{5.26}$$

El subfibrado $Q(M)$ de $P(M) \to M$ define en el fibrado cociente $P(M)/H^m = P(M) \times_{G^m} (G^m/H^m)$, una sección natural

$$M \ni x \mapsto q \times_{G^m} (eH^m) \in P(M) \times_{G^m} (G^m/H^m)\,, \text{ para } q \in Q(M)_x$$

que coincide con la sección $\sigma_O : M \to \overline{T}M$ que en cada $x \in M$ indica el origen $O_x \in \overline{T}_x M$ de la complección esférica.

5.3 Conexiones de Cartan en una variedad conforme

La presentación de la estructura conforme Riemanniana sobre una variedad diferenciable por medio del fibrado tangente esférico $\overline{T}M$ y de sus fibrados asociados de referencias conformes esféricas ($P(M) \stackrel{G^m}{\to} M$ y $Q(M) \stackrel{H^m}{\to} M$), ofrece otro modelo clásico para el estudio de la geometría conforme, originalmente presentado por Cartan en su artículo Cartan [9].

En este contexto, la estructura conforme va ligada al par de grupos de Möbius (G^m, H^m), y es un caso particular de las denominadas *geometrías de Cartan*, o “espaces généralises” en términos de propio Cartan. Su noción de geometría tiene origen en un espacio homogéneo modelo $G \to G/H$, para H subgrupo cerrado de G (geometría de Klein). A través de un H-fibrado $Q \to M$ y una conexión $\omega \in \Lambda^1(Q, \mathfrak{g})$, una geometría de Cartan comparte con el modelo G/H aspectos propiamente homogéneos (las equivalencias $T_qQ \overset{\omega}{\approx} \mathfrak{g} = T_eG$ y $T_q(Q_x) \overset{\omega}{\approx} \mathfrak{h} = T_eH$), combinando a su vez aspectos propiamente inhomogéneos que se derivan de la presencia de curvatura en la conexión ω. Para profundizar en los distintos planteamientos clásicos de geometría véase el libro Sharpe [46].

En el contexto de una variedad conforme Riemanniana M, la noción de conexión de Cartan sobre el fibrado de referencias esféricas especiales $Q(M)$ formaliza la idea geométrica de un transporte palalelo de las esferas tangentes $\overline{T}_xM$ respetando la estructura conforme de la variedad. Esta correspondencia reproduce la ya conocida (Capítulo **2**) entre la noción de conexión lineal y transporte paralelo de espacios tangentes.

Es un resultado conocido (Cartan [9], Poor [37]) que toda conexión lineal y conforme en M, ligada a un transporte paralelo de los espacios tangentes conformes, se extiende a una conexión de Cartan normalizada en $Q(M) \to M$, que permite desplazar paralelamente las esferas conformes tangentes sobre M. En el apartado **5.3.3** se muestra con detalle el modo en que se extiende la conexión lineal conforme, para construir explícitamente la conexión normal de Cartan asociada $\omega \in \Lambda^1(Q(M), \mathfrak{g})$. Esta conexión normal de Cartan variará en la medida en que varíe la conexión lineal y conforme considerada.

En el apartado siguiente, estamos ya en posición de afirmar que el paralelismo Fermi-Walker definido de manera original en el Capítulo **3** (y que recordemos permite definir canónicamente un transporte natural del espacio tangente sobre las curvas parametrizadas), se extiende de igual modo en este contexto a un paralelismo natural y canónico que desplaza las esferas tangentes sobre curvas de M. Este desplazamiento de esferas se realiza sobre cada curva $t \mapsto \gamma(t) \in M$ a través de una conexión de tipo Cartan $\omega^\gamma \in \Lambda^1(\gamma^* Q(M), \mathfrak{g})$ que llamamos *conexión esférica de Fermi-Walker.*

5.3.1 Geometrías de Cartan

Definición 5.6 *Una* geometría de Klein *es un par (G, H), donde G es un grupo de Lie y H un subgrupo cerrado de G.*

La proyección $G \to G/H$ define un H-fibrado principal sobre el espacio homogéneo G/H, que tiene estructura de variedad (este resultado es bien conocido y puede hallarse en Warner [51] o Steenrod [47]).

Ejemplo 5.1 *Si $A(m)$ denota al grupo de los movimientos afines del espacio $\mathbb{R}^m$, el par $(A(m), GL(m,\mathbb{R}))$ modeliza la estructura afín de $\mathbb{R}^m = A(m)/GL(m,\mathbb{R})$. En general, un subgrupo $G \subset GL(m,\mathbb{R})$ tiene asociado un grupo afinizado $AG \subset A(m)$, definido por*

$$AG = \left\{ (V,R) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ V & R \end{pmatrix} : V \in \mathbb{R}^m, R \in G \right\} = \mathbb{R}^m \leftthreetimes G,$$

*que contiene a $G \equiv \{0\} \leftthreetimes G$ como subgrupo de isotropía para el origen $0 \in \mathbb{R}^m$. El par (AG, G) define una geometría de Klein sobre el espacio afín $\mathbb{R}^m$, en correspondencia con la estructura lineal que el grupo G define en $\mathbb{R}^m$ como espacio vectorial (en el sentido del Capítulo primero, sección **2.2.1**).*

Una geometría de Cartan sobre una variedad diferenciable M está modelizada en una geometría de Klein (G,H) tal que $\dim M = \dim(G/H)$. Denotamos por $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ a las álgebras asociadas al par de grupos de Lie (G,H).

Definición 5.7 *Sea $Q \to M$ un fibrado principal sobre M con grupo estructural H. Una 1-forma $\omega \in \Lambda^1(Q, \mathfrak{g})$ verificando:*

(**i**) $\forall q \in Q$, $\omega_q : T_qQ \to \mathfrak{g}$ *es un isomorfismo lineal;*

(**ii**) $\forall A \in \mathfrak{h}$, $\omega(A^\#) = A$, *donde $A^\#$ es el campo vertical*[6] *definido por $A \in \mathfrak{h}$;*

(**iii**) $\forall h \in H$, $(R_h)^*\omega = Ad_{h^{-1}} \circ \omega$ *(ω es Ad_H-equivariante);*

recibe el nombre de conexión de Cartan de tipo (G,H). *El par (Q,ω) constituye lo que llamamos una* geometría de Cartan sobre M.

La condición (**i**) implica que $\dim Q = \dim G$ y que la variedad Q es paralelizable. Para $A \in \mathfrak{g}$ denotamos por $\tilde{A} \in \mathfrak{X}(Q)$ al único campo en Q que verifica

$$\omega(\tilde{A}_q) = A, \ \forall q \in Q. \tag{5.27}$$

La condición (**ii**) indica que para $A \in \mathfrak{h}$ el campo $\tilde{A} \in \mathfrak{X}(Q)$ coincide con el campo vertical fundamental $A^\# \in \mathfrak{X}(Q)$. Y en cada $q \in Q_x$, la 1-forma $\omega \in \Lambda^1(Q, \mathfrak{g})$ induce sobre el espacio vertical $\mathcal{V}_q = T_q(Q_x) \subset T_qQ$ un isomorfismo $\omega_q|_{\mathcal{V}_q} : \mathcal{V}_q \longrightarrow \mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$.

[6] Véase su definición en (2.7), pággina 17:

$$A^\#(q) = (L_q)_*(A) \in T_qQ, \ \forall q \in Q.$$

Ejemplo 5.2 *En una geometría de Klein (G, H) la proyección $G \to G/H$ define un H-fibrado principal sobre G/H. La forma de Maurer-Cartan $\omega_G \in \Lambda^1(G, \mathfrak{g})$ de G,*

$$\omega_G(\xi_g) = (L_g^{-1})_*(\xi_g) \in T_eG = \mathfrak{g}, \quad \forall \xi_g \in T_gG,$$

define una geometría de Cartan (G, ω_G) canónica sobre el espacio homogéneo G/H.

Cada conexión de Cartan va ligada a una conexión usual (conexión principal) en un fibrado principal ampliado. Sea (Q, ω) una geometría de Cartan de tipo (G, H). El H-fibrado principal $Q \to M$, con $H \subset G$, se extiende a un fibrado asociado

$$P = Q \times_H G \to M \tag{5.28}$$

con estructura de G-fibrado principal, entendiendo que $(q \times_H g) \cdot g' = q \times_H (gg') \in P$. Q es subfibrado principal de P, por la inclusión canónica $i_Q : Q \ni q \hookrightarrow \hat{q} = q \times_H e \in P$.

Teorema 5.1 *La conexión de Cartan $\omega \in \Lambda^1(Q, \mathfrak{g})$ se extiende unívocamente a una conexión principal $\varpi \in \Lambda^1(P, \mathfrak{g})$ en el fibrado ampliado $P = Q \times_H G$.*

Demostración. Nótese primero que si $q \in Q$, al ser $T_qQ \cap T_q(P_x) = T_q(Q_x)$, se concluye por razón de dimensiones que:

$$T_qP = T_qQ + T_q(P_x)$$

Por otra parte, T_qQ y $T_q(P_x)$ están canónicamente identificados con $\mathfrak{g}$ vía:

$$\mathfrak{g} \ni A \to \tilde{A}_q \in T_qQ \quad \text{(paralelismo (5.27) dado por } \omega)$$
$$\mathfrak{g} \ni B \to B_q^{\#} \in T_q(P_x) \quad \text{(campo vertical de } P\text{)}$$

de forma que si $\xi_q \in T_qP$ existen $A, B \in \mathfrak{g}$ tales que $\xi_q = \tilde{A}_q + B_q^{\#}$. Así, si existe $\varpi \in \Lambda^1(P, \mathfrak{g})$ conexión en P tal que $(i_Q)^*\varpi = \omega$, debe ser

$$\varpi(\xi_q) = \varpi(\tilde{A}_q) + \varpi(B_q^{\#}) = \omega(\tilde{A}_q) + B = A + B,$$

y no depende de los $A, B \in \mathfrak{g}$ tomados, pues si $\xi_q = \tilde{C}_q + D_q^{\#}$ con $C, D \in \mathfrak{g}$, entonces,

$$(\tilde{A} - \tilde{C})(q) = (D - B)^{\#}(q) \in T_qQ \cap T_q(P_x) = T_q(Q_x)$$

por lo tanto es $(D - B)_q^{\#} = \widetilde{(D - B)}_q = \widetilde{(A - C)}_q$ de donde $D - B = A - C$, es decir $A + B = C + D$. Se toma así para $\varpi_q : T_qP \to \mathfrak{g}$ la definición

$$\varpi(\xi_q) = A + B, \quad \text{si } \xi_q = \tilde{A}(q) + B^{\#}(q) \text{ con } A, B \in \mathfrak{g}.$$

Y es claro que se verifican las siguientes propiedades sobre Q:

- $\varpi(\xi_q) = \omega(\xi_q)$ para todo $\xi_q \in T_qQ \subset T_qP$;
- $\varpi(A^{\#}(q)) = A$ para todo $A \in \mathfrak{g}$;
- $\varpi_{qh} \circ (R_h)_* = Ad_{h^{-1}}(\varpi_q)$.

El *valor* de ϖ_p en otro punto $p = qg \in P$ queda determinado por la condición de equivarianza $\varpi_p = Ad_{g^{-1}}(\varpi_q \circ (R_g)_*^{-1})$, que define sin ambigüedad una única conexión $\varpi \in \Lambda^1(P, \mathfrak{g})$ extendiendo a ω. ∎

Lema 5.1 *Sea $t \mapsto q_t \in Q$ una curva parametrizada sobre $t \mapsto \gamma(t) \in M$. La elevación ϖ-horizontal de $\gamma(t)$ por q_{t_0} es la curva $t \mapsto p_t = q_t \cdot g_t^{-1} \in P$ definida por la solución $t \mapsto g_t \in G$ de la ecuación diferencial*

$$\begin{cases} g_t^{-1} g_t' = \omega(q_t') \in \mathfrak{g} \\ g_{t_0} = e \in G \end{cases} \tag{5.29}$$

Demostración. La curva $p_t = q_t \cdot g_t^{-1}$, $g_t \in G$, define la elevación ϖ-horizontal a P de la curva $t \mapsto \gamma(t) \in M$ por $q_{t_0} \in Q$, si se cumplen:

(**a**) $p_{t_0} = q_{t_0} \;\Leftrightarrow\; g_{t_0} = e \in G$,

(**b**) $0 = \varpi(p_t') = \varpi\left((R_{g_t^{-1}})_* \, q_t' + (L_{q_t})_* \, (g_t^{-1})'\right) = Ad_{g_t}\omega(q_t') - g_t' g_t^{-1}$
$\Leftrightarrow\; \omega(q_t') = Ad_{g_t^{-1}}(g_t' g_t^{-1}) = g_t^{-1} g_t'$.

Se observa así que $\omega(q_t')$ describe la variación infinitesimal de la curva q_t con respecto a la noción de ϖ-horizontalidad. ∎

La conexión de Cartan $\omega \in \Lambda^1(Q, \mathfrak{g})$ induce un transporte paralelo en un fibrado tangente homogéneo, de fibras $\approx G/H$. La acción por la izquierda del grupo G en G/H define un fibrado asociado

$$E = P \times_G (G/H) \longrightarrow M \tag{5.30}$$

cuyas fibras están en correspondencia con el espacio homogéneo G/H, y en donde el subfibrado Q de P distingue una sección natural

$$\sigma : M \longrightarrow E,, \quad \sigma(x) = q \times_G (eH), \forall q \in Q_x. \tag{5.31}$$

Para una curva parametrizada $t \mapsto \gamma(t) \in M$ en la variedad base, se define el *transporte paralelo* de un elemento $e_0 = p_0 \times_G \xi \in E_{\gamma(t_0)}$ como la curva

$$t \longmapsto e_t = p_t \times_G \xi \in E_{\gamma(t)}$$

donde $t \mapsto p_t \in P$ es la elevación ϖ-horizontal de la curva $\gamma(t)$ por $p_0 \in P_{\gamma(t_0)}$.

Si escribimos $e_t = |\ |_{\gamma,t_0,t}(e_0)$, se define así una correspondencia

$$|\ |_{\gamma,t_0,t} : E_{\gamma(t_0)} \to E_{\gamma(t)} \tag{5.32}$$

entre los espacios homogéneos tangentes, que preserva la geometría heredada del modelo G/H, y cuya inversa viene dada por $|\ |_{\gamma,t,t_0} : E_{\gamma(t)} \to E_{\gamma(t_0)}$.

Definición 5.8 *El* desarrollo *de la curva $t \mapsto \gamma(t) \in M$ en el espacio homogéneo $E_{\gamma(t_0)}$, es la curva parametrizada $t \mapsto c(t) \in E_{\gamma(t_0)}$ definida por*

$$c(t) = |\ |_{\gamma,t,t_0} \circ \sigma(\gamma(t)) \in E_{\gamma(t_0)}, \quad \forall t.$$

Para dos instantes distintos $t_0, \overline{t}_0 \in I$, los respectivos desarrollos $c(t) \subset E_{\gamma(t_0)}$ y $\overline{c}(t) \subset E_{\gamma(\overline{t}_0)}$ de la curva parametrizada $\gamma(t) \subset M$ resultan equivalentes a través de la correspondencia paralela $|\ |_{\gamma,t_0,\overline{t}_0} : E_{\gamma(t_0)} \to E_{\gamma(\overline{t}_0)}$, dado que

$$\overline{c}(t) = |\ |_{\gamma,t,\overline{t}_0} \circ \sigma(\gamma(t)) = |\ |_{\gamma,t_0,\overline{t}_0} \circ |\ |_{\gamma,t,t_0} \circ \sigma(\gamma(t)) = |\ |_{\gamma,t_0,\overline{t}_0} \circ c(t).$$

Lema 5.2 *Dada $t \mapsto q_t \in Q$ sobre la curva parametrizada $t \mapsto \gamma(t) \in M$, el desarrollo en el espacio homogéneo $E_{\gamma(t_0)}$ coincide con la curva*

$$c(t) = q_{t_0} \times_G (g_t H) \in E_{\gamma(t_0)}$$

para $g_t \in G$ solución de la ecuación (5.29) $g_t^{-1} g_t' = \omega(q_t') \in \mathfrak{g}$, *con* $g_{t_0} = e$.

Demostración. Por el Lema 5.1 la elevación ϖ-horizontal de $\gamma(t)$ por q_{t_0} es la curva $p_t = q_t \cdot g_t^{-1}$ definida por $g_t \in G$ integrando la ecuación (5.29): $g_t^{-1} g_t' = \omega(q_t') \in \mathfrak{g}$, $g_{t_0} = e$. Entonces, el desarrollo de la curva $\gamma(t)$ en $E_{\gamma(t_0)}$ verifica

$$\begin{aligned} c(t) &= |\ |_{\gamma,t,t_0} \circ \sigma(\gamma(t)) = |\ |_{\gamma,t,t_0} (q_t \times_G (eH)) \\ &= |\ |_{\gamma,t,t_0} ((p_t \cdot g_t) \times_G (eH))) = (q_{t_0} \cdot g_t) \times_G (eH) \\ &= q_{t_0} \times_G (g_t H) \subset E_{\gamma(t_0)}. \end{aligned}$$

Y concluimos con la demostración. ■

El desarrollo de curvas en el tangente homogéneo es geométrico en el sentido de que respeta las reparametrizaciones. Bajo un cambio de parámetro $s \mapsto \mathbf{t}(s)$ para la curva $t \mapsto \gamma(t) \in M$, el desarrollo $s \mapsto \overline{c}(s) \in E_{\overline{\gamma}(s_0)}$ de la curva reparametrizada $\overline{\gamma} = \gamma \circ \mathbf{t}$ viene dado por

$$\overline{c}(s) = c \circ \mathbf{t}(s) \in E_{\overline{\gamma}(s_0)},$$

siendo $t \mapsto c(t)$ la curva desarrollo de $\gamma(t)$ en E_{t_0} para $t_0 = \mathbf{t}(s_0)$. Esto es consecuencia del Lema 5.2 y del hecho de que para las curvas $s \mapsto \overline{q}_s = q_{\mathbf{t}(s)} \in Q$ y $s \mapsto \overline{g}_s = g_{\mathbf{t}(s)} \in G$ se verifica

$$\omega(q_t') = g_t^{-1} g_t' \;\Leftrightarrow\; \omega(\overline{q}_s') = \mathbf{t}'(s)\,\omega(q_{\mathbf{t}(s)}') = \mathbf{t}'(s) g_{\mathbf{t}(s)}^{-1} (\mathbf{t}'(s) g_{\mathbf{t}(s)}') = \overline{g}_s^{-1} \overline{g}_s'.$$

Curvatura

Sea (Q,ω) una geometría de Cartan de tipo (G,H) sobre M, con conexión $\omega : TQ \to \mathfrak{g}$. La *curvatura de* ω es la 2-forma $\Theta \in \Lambda^2(Q,\mathfrak{g})$ definida por la ecuación de estructura

$$d\omega = -\tfrac{1}{2}[\omega,\omega] + \Theta \ .$$

La *torsión de* ω se define como la imagen de Θ bajo la aplicación cociente $\mathfrak{g} \to \mathfrak{g}/\mathfrak{h}$.

Observación 5.10 *Si* $\varpi \in \Lambda^1(P,\mathfrak{g})$ *es la extensión de la conexión* ω *al* G*-fibrado principal* P *del* Teorema 5.1, *y* $i_Q : Q \to P$ *su inclusión natural, entonces, la forma de curvatura* $\quad \in \Lambda^2(P,\mathfrak{g})$ *asociada a la conexión principal* ϖ*, cumple*

$$(i_Q)^* \quad = \Theta.$$

Como en el caso de las conexiones lineales tratadas en el primer capítulo, se demuestra igualmente que la curvatura Θ define una 2-forma horizontal en Q, es decir, si $\xi_q \in \mathcal{V}_q$ es un vector vertical entonces $\Theta(\xi_q,\zeta_q) = 0$, $\forall \zeta_q \in T_qQ$.

Si $\Theta \in \Lambda^2(Q,\mathfrak{g})$ es idénticamente nula, se dice que *la geometría de Cartan* (Q,ω) *es plana*. En tal caso, también la curvatura $\quad \in \Lambda^2(P,\mathfrak{g})$ es idénticamente nula,[7] y la geometría de Cartan $(Q,\omega) \to M$ resulta localmente isomorfa a $(G,\omega_G) \to G/H$, esto es, al espacio de Klein (G,H) que la modeliza.

Una geometría de Cartan (Q,ω) *puede interpretarse como una deformación del grupo de Lie* G *que trata a cada coset del subgrupo cerrado* H *como un cuerpo rígido. Así, la conexión de Cartan* ω *define la deformación de* G *y su curvatura mide el tamaño de la deformación sobre cada fibra.*

Geometrías de Cartan en G-estructuras. Conexiones afines

Una G-estructura sobre M es una reducción $B \to M$ del fibrado de referencias lineales LM para un subgrupo estructural G de $GL(m,\mathbb{R})$ (Definición 2.9). Al componer G con la familia de traslaciones de $\mathbb{R}^m$, se obtiene su grupo afinizado

$$AG = \left\{ (V,R) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ V & R \end{pmatrix} : V \in \mathbb{R}^m, R \in G \right\} = \mathbb{R}^m \leftthreetimes G,$$

que contiene a $G \equiv \{0\} \leftthreetimes G$ como subgrupo de isotropía para el origen $0 \in \mathbb{R}^m$, y cuya álgebra de Lie asociada es $\mathbb{R}^m \oplus \mathfrak{g}$.

[7] Consecuencia de la horizontalidad de la curvatura $\quad \in \Lambda^2(P,\mathfrak{g})$ y de la propiedad $(R_g)^* \quad_{qg} = Ad_{g^{-1}}(\quad_q)$, $\forall g \in G$.

El fibrado principal ampliado $P = B \times_G AG$ de (5.28), está formado por las referencias afines de la G-estructura, y el fibrado homogéneo $E = P \times_{AG} (AG/G)$ de (5.30) coincide con el fibrado tangente afín TM, mediante la equivalencia

$$E_x \ni p \times_{AG} (gG) \;\longleftrightarrow\; p \circ g(0) = p(V) \in T_xM, \text{ si } g = (V, R) \in AG. \tag{5.33}$$

La sección natural $\sigma : M \to E = TM$ definida por (5.31) consiste en la asignación

$$x \;\mapsto\; \sigma(x) = b \times_{AG} (eG) \equiv b(0) = 0_x \in T_xM$$

indicando el origen vectorial en cada espacio tangente afín T_xM.

Cada conexión lineal ∇ en M admisible para la G-estructura $B \to M$, define a través de su forma horizontal asociada $\mu \in \Lambda^1(B, \mathfrak{g})$ (Definición 2.7) y de la forma canónica vertical $\theta \in \Lambda^1(B, \mathbb{R}^m)$ (definida en (2.10), pág. 22), una *conexión afín*

$$\omega = (\theta, \mu) \in \Lambda^1(B, \mathbb{R}^m \oplus \mathfrak{g}) \tag{5.34}$$

que cumple las propiedades de conexión de Cartan en B (véase Poor [37], Kobayashi-Nomizu [24]).

Se tiene así que el par (B, ω) constituye una geometría de Cartan sobre M, con curvatura dada por la 2-forma $\Theta = d\omega + \frac{1}{2}[\omega, \omega] \in \Lambda^2(B, \mathbb{R}^m \oplus \mathfrak{g})$ de componentes:

$$\begin{aligned} d\theta + [\mu, \theta] &= T \in \Lambda^2(B, \mathbb{R}^m), \\ d\mu + \tfrac{1}{2}[\mu, \mu] &= \quad \in \Lambda^2(B, \mathfrak{g}). \end{aligned}$$

Por las ecuaciones de estructura asociadas a una conexión lineal, (2.12) en la pág. 25 y (3.24) en la pág.53, se observa que la componente de la curvatura Θ en $\mathbb{R}^m$ corresponde a la *forma de torsión* $T \in \Lambda^2(B, \mathbb{R}^m)$ de la conexión μ, y la componente de Θ en $\mathfrak{g}$ corresponde a la *forma de curvatura* $\in \Lambda^2(B, \mathfrak{g})$ de a conexión μ.

Observación 5.11 *Fijada una sección $\sigma = (E_1, ..., E_m) \in B$ en (un abierto de) M, la conexión de Cartan ω (5.34) queda determinada por su pullback $\sigma^*\omega = w$, que define en la variedad una 1-forma (w^i, w^i_j), con (w^i) la base dual de σ, y (w^i_j) las componentes de la conexión ∇ respecto a σ caracterizas por:*

$$\nabla_v E_j = w^i_j(v)\; E_i, \quad \forall v \in T_xM.$$

Igualmente, la forma de curvatura Θ de (5.34) queda determinada por su pullback (Tor^i, R^i_j), en correspodencia con los tensores de torsión y curvatura de ∇, que verifican las ecuaciones de estructura:

$$\begin{aligned} Tor^i &= dw^i + w^i_j \wedge w^j, \\ R^i_j &= dw^i_j - w^i_k \wedge w^k_j. \end{aligned}$$

En el caso en que la estructura sobre M sea Riemanniana, la conexión de Levi-Civita se caracteriza por ser la única que define en el fibrado de referencias ortonormales $O(M) \to M$, una conexión de Cartan ω de tipo (5.34) con torsión idénticamente nula. En el contexto de las geometrías de Cartan la conexión de Levi-Civita puede caracterizarse a través del siguiente resultado.

Teorema 5.2 *La conexión de Levi-Civita de la estructura Riemanniana $O(M) \to M$ corresponde a la única forma de conexión $\mu \in \Lambda^1(O(M), \mathfrak{o}(m))$ que define una geometría de Cartan $(O(M), \theta \oplus \mu)$ libre de torsión, siendo $\theta \in \Lambda^1(O(M), \mathbb{R}^m)$ la forma vertical de $O(M) \to M$.*

5.3.2 Conexiones normales de Cartan

Sea (G, H) una geometría de Klein tal que el grupo de Lie G tiene asociada un álgebra $|1|$-graduada $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{-1} \oplus \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1$ (suma directa de subespacios con $[\mathfrak{g}_i, \mathfrak{g}_j] \subset \mathfrak{g}_{i+j}$, $i, j \in \{-1, 0, 1\}$), y H es el subgrupo cerrado con álgebra $\mathfrak{h} = \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1$. El par (G, H) recibe el nombre de *espacio Hermitiano simétrico* (en la terminología de Cap-Slovak-Kolar [7], Leitner [31]).

En tales condiciones, la aplicación $\mathfrak{g}_0 \to \mathfrak{gl}(\mathfrak{g}_{-1})$ inducida por la representación adjunta es la inclusión de una subálgebra, y la forma de Killing de $\mathfrak{g}$ identifica a $\mathfrak{g}_{-1}$ como $\mathfrak{g}_0$-módulo con el dual de $\mathfrak{g}_1$. La restricción de la aplicación exponencial a la subálgebra $\mathfrak{g}_1$ define un difeomorfismo sobre el subgrupo cerrado $G_1 = \exp(\mathfrak{g}_1) \subset H$ (grupo vectorial), y existe además un subgrupo $G_0 \subset H$, con álgebra asociada $\mathfrak{g}_0$, tal que $H = G_0 \ltimes G_1$ producto semidirecto.[8]

Definición 5.9 *Sea (G, H) un espacio Hermitiano simétrico, M una variedad diferenciable con $\dim M = \dim(\mathfrak{g}_{-1}) = \dim(G/H)$, y sea $Q \to M$ un H-fibrado principal provisto de una 1-forma $\theta = \theta_{-1} \oplus \theta_0 \in \Lambda^1(Q, \mathfrak{g}_{-1} \oplus \mathfrak{g}_0)$, tal que:*

(i) $\theta_{-1}(\xi_q) = 0$ *sii $\xi_q \in T_qQ$ es vertical ($\xi_q \in \mathcal{V}_q$);*

(ii) $\theta_0(A^\#) = A_0$, $\forall A = A_0 + A_1 \in \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1$;

(iii) $(R_h)^*\theta = Ad_{h^{-1}}(\theta)$, *siendo Ad la restricción de la acción adjunta al espacio $\mathfrak{g}_{-1} \oplus \mathfrak{g}_0$*

El par (Q, θ) recibe el nombre de AHS-estructura[9] *sobre M de tipo (G, H).*

[8] Como G_1 es un grupo vectorial, $G_1 = \mathfrak{g}_1$ vía la exponencial, el producto semidirecto $G_0 \ltimes G_1 = G_0 \ltimes \mathfrak{g}_1$ proviene de la acción (por la izquiera) de G_0 en $G_1 = \mathfrak{g}_1$:

$$h \cdot \exp A = \exp(Ad_h A) \in G_1 \quad (h \in G_0,\ \exp A \in G_1).$$

[9] *"Almost Hermitian Symmetric Structure"* en la terminología de Cap-Slovak-Kolar [7].

Definición 5.10 *Una conexión de Cartan* $\omega = \omega_{-1} + \omega_0 + \omega_1 \in \Lambda^1(Q, \mathfrak{g}_{-1} \oplus \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1)$ *se dice adaptada a la AHS-estructura cuando* $\omega_{-1} = \theta_{-1}$ *y* $\omega_0 = \theta_0$.

Teorema 5.3 *Siempre existe* $\omega_1 \in \Lambda^1(TQ, \mathfrak{g}_1)$ *tal que* $\omega = \theta_{-1} + \theta_0 + \omega_1$ *es conexión adaptada de Cartan para la AHS-estructura* (Q, θ)*. Toda posible* $\overline{\omega}_1$ *es de la forma*

$$\overline{\omega}_1 = \omega_1 + \Gamma \circ \theta_{-1}$$

para $\Gamma \in C^\infty(Q, \mathfrak{g}_{-1}^* \quad \mathfrak{g}_1)$*, pullback de un tensor en la variedad base* M*.*

(Véase su demostración en Cap-Slovak-Kolar [7]).

Dado que la conexión de Cartan $\omega \in \Lambda^1(TQ, \mathfrak{g})$ define una paralelización en Q, al fijar una base para $\mathfrak{g}$, el álgebra de formas diferenciales en Q estará generada por las 1-formas componentes de ω (en la base de $\mathfrak{g}$) con coeficientes en $C^\infty(Q)$.

Lema 5.3 *La curvatura* $\Theta \in \Lambda^2(Q, \mathfrak{g})$ *de una conexión adaptada no depende de las componentes* ω_0, ω_1*. Por lo tanto, su expresión será una combinación de productos de las 1-formas componentes de* ω_{-1}*.*

Demostración. Recordemos que $\forall q \in Q$, $\ker(\omega_{-1})_q = \ker(\theta_{-1})_q = \mathcal{V}_q$. Además, sabemos que $\omega_0 + \omega_1$, restringida a la fibra Q_x actúa de la forma

$$(\omega_0 + \omega_1)(A^\#) = A \in \mathfrak{h} = \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1$$

y por lo tanto define un paralelismo absoluto vertical. Es claro entonces que al ser Θ horizontal no puede tener en su expresión en la base generada por $\omega_{-1} + \omega_0 + \omega_1$ más que 1-formas que provengan de ω_{-1}. ■

Sea $(e_1, ..., e_m)$ una base de $\mathfrak{g}_{-1}$ ($m = \dim \mathfrak{g}_{-1} = \dim M$), de manera que se tiene la descomposición $\omega_{-1} = e_1\omega^1 + ... + e_m\omega^m$ para $\omega^i \in \Lambda^1(Q, \mathbb{R})$, y sea $(e^1, ..., e^m)$ la base dual de $\mathfrak{g}_1$. Entonces, se puede expresar

$$\Theta = \sum_{kl} \tfrac{1}{2} K_{kl}\, \omega^k \wedge \omega^l \quad \text{para } K_{kl} \in C^\infty(Q, \mathfrak{g})$$

La forma de curvatura Θ tiene una componente $\Theta_0 \in \Lambda^2(Q, \mathfrak{g}_0)$ asociada a funciones $(K_{kl})_0$ que toman valores en $\mathfrak{g}_0$, subálgebra de $\mathfrak{gl}(\mathfrak{g}_{-1}) = \mathfrak{g}_{-1}^* \quad \mathfrak{g}_1^*$. Si denotamos $K^i_{jkl} = (K_{kl})_0\,(e_j \quad e^i) \in C^\infty(Q)$, entonces,

$$\Theta_0 = \sum K^i_{jkl}\, \omega^k \wedge \omega^l \in C^\infty(Q, \mathfrak{g}_0)\ . \tag{5.35}$$

Definición 5.11 *La conexión* ω *se dice* conexión normal de Cartan *cuando su forma de curvatura* $\Theta \in \Lambda^2(Q, \mathfrak{g}_{-1} \oplus \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1)$ *cumple* $\forall j, k = 1, ..., m,$

$$\sum_i K^i_{jil} = 0 \tag{5.36}$$

siendo $\Theta_0 = \sum K^i_{jkl}\omega^k \wedge \omega^l$.

Teorema 5.4 *Dada una AHS-estructura* (Q, θ) *sobre* M *con la propiedad*

$$d\theta_{-1} + \theta_0 \wedge \theta_{-1} = 0,$$

existe una única $\omega_1 \in \Lambda^1(Q, \mathfrak{g}_1)$ *tal que la conexión admisible* $\omega = \theta_{-1} \oplus \theta_0 \oplus \omega_1$ *es conexión normal de Cartan en* Q. *Además, la conexión* ω *es libre de torsión.*

(Véase su demostración en Cap-Slovak-Kolar [7], o en Kobayashi [23] IV.4.2, para los casos particulares proyectivo y conforme).

5.3.3 Conexiones conformes normales de Cartan

Los resultados generales que se acaban de presentar para conexiones normales de Cartan, se aplican en particular a la geometría conforme de dimensión $m > 2$ que aquí nos interesa.

Recuédese que el modelo conforme propuesto por Cartan va ligado al par de grupos de Möbius (G^m, H^m) con $G^m/H^m = \mathbb{S}^m$ (apartado **5.1.3** (4)). A nivel de álgebras es $\mathfrak{g} = \mathbb{R}^m \oplus \mathfrak{co}(m) \oplus \mathbb{R}^{m*}$, álgebra $|1|$-graduada, y $\mathfrak{h} = \mathfrak{co}(m) \oplus \mathbb{R}^{m*}$. Una variedad conforme Riemanniana M va asociada a un H^m-fibrado $Q(M) \to M$, de referencias conformes esfericas especiales, con grupo de estructura $H^m \approx CO(m) \ltimes \mathbb{R}^{m*}$.

Sea ∇ una conexión lineal y simétrica admisible para la variedad conforme M, que en adelante asumimos de dimensión $m > 2$. Sabemos que en el fibrado de referencias lineales conformes $CO(M)$, la conexión ∇ da lugar a una conexión afín de Cartan

$$(\theta, \mu) \in \Lambda^1(CO(M), \mathbb{R}^m \oplus \mathfrak{co}(m)) \tag{5.37}$$

definida como un caso particular de (5.34), pág. 110, por su forma horizontal μ y por la forma canónica vertical θ de $CO(M)$.

La inclusión canónica $i : CO(M) \hookrightarrow Q(M)$ (pág. 102) permite definir una 1-forma

$$\theta_{-1} \oplus \theta_0 \in \Lambda^1(Q(M), \mathbb{R}^m \oplus \mathfrak{co}(m))$$

como extensión Ad_{H^m}-equivariante de (5.37), esto es, tal que $\theta = i^*\theta_{-1}$, $\mu = i^*\theta_0$. Obsérvese que si π denota la proyección natural de $Q(M)$ sobre $CO(M)$, cada referencia $q \in Q(M)$ se descompone en $q = q_* \cdot \exp\eta \in Q(M)$ con $q_* = \pi(q) \in CO(M)$ y

$\eta \in \mathbb{R}^{m*}$ (véase (5.25), pág. 103), y entonces es

$$(\theta_{-1}, \theta_0)(\xi_q) = Ad_{\exp -\eta}(\theta \circ \pi_*(\xi_q), \mu \circ \pi_*(\xi_q)), \quad \forall \xi_q \in T_q Q(M).$$

Se tiene así que $(Q(M), \theta_{-1} \oplus \theta_0)$ define una AHS-estructura que, por la simetría de la conexión ∇, verifica la siguiente ecuación de estructura (derivada de (2.12), pág. 25),

$$d\theta_{-1} + \theta_0 \wedge \theta_{-1} = 0. \tag{5.38}$$

En estas condiciones, el Teorema 5.4 asegura la existencia de una única conexión normal de Cartan $\omega \in \Lambda^1(Q(M), \mathfrak{g})$ admisible para $(Q(M), \theta_{-1} \oplus \theta_0)$, y libre de torsión: $\Theta_{-1} = 0$.

Proposición 5.6 *Sea $\sigma = (E_1, ..., E_m)$ una sección del fibrado conforme lineal $CO(M)$, y sea $i \circ \sigma$ la sección inducida en $Q(M)$. Entonces, el tensor de Schouten $L \in \mathfrak{T}_2^0(M)$ de la conexión conforme ∇ (definido en (3.30), pág. 57) se corresponde con el pullback de la componente $\omega_1 \in \Lambda^1(Q(M), \mathbb{R}^{m*})$ de la conexión normal de Cartan ω:*

$$(i \circ \sigma)^*(\omega_1) = (w_j) \in \Lambda^1(\mathcal{U}, \mathbb{R}^{m*}), \text{ con } w_j(E_i) = L(E_i, E_j).$$

Demostración. Por la propia construcción de $\omega \in \Lambda^1(Q(M), \mathfrak{g})$, sabemos que su pullback $(i \circ \sigma)^*\omega = (i \circ \sigma)^*(\theta_{-1}, \theta_0, \omega_1)$ tiene componentes:

- $(i \circ \sigma)^*(\theta_{-1}) = \sigma^*(\theta) = (w^i) \in \Lambda^1(\mathcal{U}, \mathbb{R}^m)$ corresponde a la base dual de σ;
- $(i \circ \sigma)^*(\theta_0) = \sigma^*\mu = (w^i_j) \in \Lambda^1(\mathcal{U}, \mathfrak{co}(m))$ caracterizada por la condición

$$w^i_j(v) = w^i(\nabla_v E_j), \, \forall u \in T_x M$$

- $(i \circ \sigma)^*(\omega_1) = (w_j) \in \Lambda^1(\mathcal{U}, \mathbb{R}^{m*})$.

Dado que (w^i) generan el espacio de 1-formas en $\mathcal{U}$ existirán $L_{ij} \in C^\infty(\mathcal{U})$ tales que

$$w_j = \textstyle\sum_j L_{ij} w^i \Leftrightarrow w_j(E_i) = L_{ij}.$$

La curvatura $\Theta = d\omega + \frac{1}{2}[\omega, \omega]$ define por pullback una 2-forma en $\mathcal{U}$ con componentes

$$\begin{aligned}
&\Theta^i = dw^i + w^i_j \wedge w^j = T^i = 0 \\
&\Theta^i_j = R^i_j + \textstyle\sum_h L_{jh} w^i \wedge w^h - \sum_h L_{hi} w^j \wedge w^h + \delta^i_j \sum_{kh} L_{hk} w^k \wedge w^h \\
&\Theta_j = d(L_{kj} w^k) + w^i_j \wedge (L_{hi} w^h)
\end{aligned}$$

De este modo, teniendo en cuenta que $R^i_j = \sum R^i_{jkl}(w^k \wedge w^l)$, se observa que las funciones K^i_{jkl} tales que $\Theta^i_j = \sum R^i_{jkl}(w^k \wedge w^l)$, son

$$K^i_{jkl} = R^i_{jkl} + L_{lj}\delta^i_k - L_{kj}\delta^i_l - L_{li}\delta^j_k + L_{ki}\delta^j_l + \delta^i_j(L_{lk} - L_{kl}) \tag{5.39}$$

y la condición de normalidad es equivalente a

$$\begin{aligned} 0 = \sum_i K^i_{jil} &= \sum_i R^i_{jil} + mL_{lj} - L_{lj} - L_{lj} + \delta_{jl} \sum_i L_{ii} + (L_{lj} - L_{jl}) \\ &= \sum_i R^i_{jil} + (m-2)L_{lj} + \delta_{jl} \sum_i L_{ii} + (L_{lj} - L_{jl}). \end{aligned} \tag{5.40}$$

En el Lema 5.4 a continuación, se demuetra que la condición de normalidad implica que la curvatura verifica $K^i_i = 0 \ \forall i$. Aplicando esta condición a la ecuación (5.39) se obtiene la identidad

$$0 = \sum_i K^i_{ilj} = \sum_i R^i_{ilj} + m(L_{jl} - L_{lj}) \ \Leftrightarrow \ \tfrac{1}{m} \sum_i R^i_{ilj} = (L_{lj} - L_{jl}). \tag{5.41}$$

La conexión conforme ∇ tiene asociado un tensor $\mathfrak{Ric} = \mathfrak{C}^1_2 R + \frac{1}{m}\mathfrak{C}^1_1 R \in \mathfrak{T}^0_2(M)$ (definido en (3.25) pág. 54) y cuyas componentes son

$$\mathfrak{Ric}_{lj} = \sum_i R^i_{jil} + \tfrac{1}{m} \sum_i R^i_{ilj} \ .$$

La condición de normalidad va ligada a las identidades (5.40) y (5.41) que implican

$$\mathfrak{Ric}_{lj} = -(m-2)L_{lj} - \delta_{lj} \sum_i L_{ii}.$$

Obsérvese que si denotamos $a = \sum_i L_{ii}$, entonces, $L_{jl} = \frac{-1}{m-2}\left(\mathfrak{Ric}_{jl} + a\delta_{lj}\right)$ y

$$a\delta_{jl} = \sum_i L_{ii}\delta_{jl} = \tfrac{-1}{m-2}\left(\sum_i \mathfrak{Ric}_{ii}\delta_{jl} + m\,a\delta_{jl}\right) = \tfrac{-1}{m-2}(SC_{jl} + m\,a\delta_{jl})$$

$$2(m-1)a\delta_{jl} = -SC_{jl} \quad \Leftrightarrow \quad a\delta_{jl} = \tfrac{-1}{2(m-1)} SC_{jl}$$

y podemos concluir con

$$L_{jl} = \frac{-1}{m-2}\left(\mathfrak{Ric}_{jl} - \frac{1}{2(m-1)} SC_{jl}\right)$$

que coincide con las componentes del tensor de Schouten $L \in \mathfrak{T}^0_2(M)$ de la conexión conforme ∇. ■

Lema 5.4 *La conexión normal de Cartan $\omega \in \Lambda^1(Q(M), \mathfrak{g})$ tiene asociada una forma de curvatura $\Theta = (0, \Theta_0, \Theta_1) \in \Lambda^2(Q(M), \mathfrak{g})$ tal que su componente Θ_0, inicialmente con valores en el álgebra $\mathfrak{co}(m) = \mathfrak{o}(m) \oplus \mathbb{R}$, sólo toma valores en $\mathfrak{o}(m)$, es decir,*

$$\Theta^0_0 = pr_{\mathbb{R}}\Theta_0 = 0.$$

Demostración. La curvatura verifica la identidad de Bianchi $d\Theta = [\Theta, \omega]$ (véase Poor [37]), y dado que $\Theta_{-1} = 0$, de ella se desprende que debe ser

$$0 = d\Theta_{-1} = [\omega_0, \Theta_{-1}] + [\Theta_0, \omega_{-1}] = [\Theta_0, \omega_{-1}]$$

La componente Θ_0, que toma valores en el álgebra $\mathfrak{co}(m)$, admite la descomposición $K^i_j = \Theta^i_j + \Theta^0_0 \delta^i_j$ para $\Theta^i_j \in \mathfrak{o}(m)$ y $\Theta^0_0 \in \mathbb{R}$. La identidad anterior se expresa en componentes por la ecuación: $\forall i = 1, ..., m$,

$$0 = [\Theta_0, \omega_{-1}]^i = \textstyle\sum_j K^i_j \wedge \omega^j = \sum_j \Theta^i_j \wedge \omega^j + \Theta^0_0 \wedge \omega^i$$

$$\textstyle\sum_j \Theta^i_j \wedge \omega^j = \Theta^0_0 \wedge \omega^i$$

Sea $\Theta^i_j = \Theta^i_{jkl}\, \omega^k \wedge \omega^l$ y $\Theta^0_0 = \Theta^0_{0kl}\, \omega^k \wedge \omega^l$, entonces debe verificarse

$$\textstyle\sum_{jkl} \Theta^i_{jkl}\, \omega^k \wedge \omega^l \wedge \omega^j = \sum_{kl} \Theta^0_{0kl}\, \omega^k \wedge \omega^l \wedge \omega^i$$

$$\Theta^0_{0kl} = \Theta^i_{lik} + \Theta^i_{kli} = \Theta^i_{lik} - \Theta^i_{kil}$$

Haciendo uso de la condición de normalidad, se observa que

$$0 = \textstyle\sum_i \left(K^i_{lik} - K^i_{kil}\right) = \sum_i \left(\Theta^i_{lik} - \Theta^i_{kil}\right) + \Theta^0_{0lk} - \Theta^0_{0kl} = (m-2)\Theta^0_{0kl} \ .$$

Por lo tanto, como $m > 2$, es $m - 2 \neq 0$ y $\Theta^0_{0kl} = 0$ para todo $k, l = 1, ..., m$. ■

En definitiva, podemos concluir con el siguiente resultado:

Teorema 5.5 *La conexión conforme ∇ de M induce en el fibrado de referencias especiales una única conexión normal de Cartan $\omega \in \Lambda^1(Q(M), \mathfrak{g})$, caracterizada por el hecho de que para la inclusión $i : CO(M) \to Q(M)$ se verifica:*

(i) $\omega_{-1} \circ i_* = \theta \in \Lambda^1(CO(M), \mathbb{R}^m)$, *la forma vertical canónica de $CO(M)$;*

(ii) $\omega_0 \circ i_* \in \Lambda^1(CO(M), \mathfrak{co}(m))$ *es la forma horizontal μ de la conexión ∇ en $CO(M)$.*

Su componente en $\mathbb{R}^{m*}$ verifica entonces la condición:

(iii) $\omega_1 \circ i_* \in \Lambda^1(CO(M), \mathbb{R}^{m*})$ *viene dada por el tensor de Schouten $L \in \mathfrak{T}^0_2(M)$ de la conexión conforme ∇ en el siguiente sentido:*

$$\omega_{-1} \circ i_*(\xi_b) = L(\xi_b, b(.)) \in \mathbb{R}^{m*}, \forall \xi_b \in T_b CO(M).$$

Demostración. Consecuencia de la Proposición 5.6. ■

Corolario 5.1 *El tensor curvatura de Weyl $W \in \mathfrak{T}^1_3(M)$ de la estructura conforme (Definición 3.4) se corresponde con la componente de la curvatura $\Theta_0 \in \Lambda^1(Q(M), \mathfrak{co}(m))$ de la conexión normal de Cartan $\omega \in \Lambda^1(Q(M), \mathfrak{co}(m))$, en el siguiente sentido:*

$$W(u, v)w = b\left(\Theta_0(\xi_b, \zeta_b)(b^{-1}w)\right), \quad \forall u, v, w \in T_x M,$$

siendo $b \in CO(M) \subset Q(M)$, y $\xi_b, \zeta_b \in T_b Q(M)$ tales que $\pi_*(\xi_b) = u$ y $\pi_*(\zeta_b) = v$.

Demostración. Es consecuencia inmediata de la Proposición 5.6 anterior. La identidad K^i_{jkl} = (5.39) en su demostración, para R^i_{jkl} y L_{jk} las componentes del tensor de curvatura $R \in \mathfrak{T}^1_3(M)$ y del tensor de Schouten $L \in \mathfrak{T}^0_2(M)$, respectivamente, asociados a la conexión conforme ∇, implica que $K^i_{jkl} = W^i_{jkl}$ coincide efectivamente con el tensor de curvatura de Weyl. ■

El tangente esférico $\overline{T}M$, identificado con el fibrado homogéneo $P(M)/Q(M)$ (véase (5.26), pág. 103), hereda de la conexión de Cartan $\omega \in \Lambda^1(Q(M), \mathfrak{g})$ un *transporte paralelo* a lo largo de curvas que permite trasladar las esferas tangentes conformes preservando su estructura de Möbius.

En el artículo original de Cartan *"Les espaces à connexion conforme"* [9] la conexión ω es presentada como el vehículo natural para la definición, tan "visual" e intuitiva, como es el transporte paralelo de las esferas tangentes sobre la variedad conforme. Un estudio en detalle sobre el significado geométrico de la definición de la conexión normal de Cartan asociada a la conexión de Levi-Civita ∇ de una métrica conforme $\mathbf{g} \in \mathcal{C}$ puede hallarse en Salvador [40]. La definición de esta conexión es el resultado de exigir al transporte paralelo inducido sobre las esferas tangentes unas condiciones geométricamente naturales: de no deslizamiento (equivalente a (**i**) en el Teorema 5.5), de coherencia con la métrica $\mathbf{g}$ y de minimización de curvatura en el sentido de no tener torsión (la combinación de estas dos condiciones es equivale a (**ii**) en el Teorema 5.5), y finalmente una última condición normalizadora que busca también minimizar la curvatura y que hace única a la conexión (equivalente a (**iii**) en el Teorema 5.5).

Diferencia entre conexiones normales de Cartan

En adelante, haremos uso de la fórmula de Baker-Campbell-Hausdorff (véase Varadarajan [50], sección 2.1.5)

$$Ad_{\exp Y}X = X + [X,Y] + \tfrac{1}{2}[X,[X,Y]] + \tfrac{1}{6}[X,[X,[X,Y]]] + ... \tag{5.42}$$

aplicada al álgebra de Lie graduada $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{-1} \oplus \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1$. Obsérvese que en el caso en que $V \in \mathbb{R}^m = \mathfrak{g}_{-1}$, $A \in \mathfrak{co}(m) = \mathfrak{g}_0$, $\eta \in \mathbb{R}^{m*} = \mathfrak{g}_1$, esta fórmula da lugar a las identidades:

$$Ad_{\exp\eta}V = \big(V\,,\,[\eta,V]\,,\,\tfrac{1}{2}[\eta,[\eta,V]]\,\big) \in \mathfrak{g}$$
$$Ad_{\exp\eta}A = (0\,,\,A\,,\,[\eta,A]\,) \in \mathfrak{h} = \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1.$$

La variedad conforme Riemanniana M tiene asociada toda una familia de conexiones compatibles con su $CO(m)$-estructura, en correspondencia biunívoca con el espacio de 1-formas $\Lambda^1(M)$, tal y como se demuestra en el Capítulo **3**. Por el Teorema 3.1, dos conexiones ∇ y $\overline{\nabla}$ lineales y conformes en M tienen asociado un tensor diferencia $\overline{\nabla} - \nabla = \Phi_\alpha \in \mathfrak{T}_2^0(M)$ definido por la 1-forma $\alpha \in \Lambda^1(M)$ en el siguiente sentido:

$$\overline{\nabla} - \nabla_X Y = \Phi_\alpha(X,Y) = \alpha(X)Y + \alpha(Y)X - \tilde{\ }\alpha(X,Y), \ \ \forall X, Y \in \mathfrak{X}(M).$$

La 1-forma $\alpha \in \Lambda^1(M)$ da lugar a una función diferenciable asociada

$$\begin{array}{rcl} \eta_\alpha : Q(M) & \longrightarrow & \mathbb{R}^{m*} \\ q & \longmapsto & \eta_\alpha(q) = \alpha_x \circ q_* \end{array} \tag{5.43}$$

en donde $q_* = d_O q \in CO(M)$, $\alpha_x \in T_x^* M \to \mathbb{R}$ y $(\alpha_x \circ q_*) \in \mathbb{R}^{m*}$.

Proposición 5.7 *Las conexiones normales de Cartan $\omega, \overline{\omega} \in \Lambda^1(Q(M), \mathfrak{g})$ asociadas a las conexiones conformes ∇ y $\overline{\nabla} = \nabla + \Phi_\alpha$, para $\alpha \in \Lambda^1(M)$, resultan equivalentes a través del automorfismo del fibrado*

$$\begin{array}{rcl} R_{\exp \eta_\alpha} : Q(M) & \longrightarrow & Q(M) \\ q & \longmapsto & q \cdot \exp \eta_\alpha(q),, \ \eta_\alpha(q) = \alpha_x \circ q_* \in \mathbb{R}^{m*} \end{array} \tag{5.44}$$

en el siguiente sentido:

$$\overline{\omega} = (R_{\exp \eta_\alpha})^* \omega = Ad_{\exp -\eta_\alpha} \circ \omega.$$

Demostración. Veamos en primer lugar que la aplicación (5.44) define efectivamente un automorfismo del fibrado $Q(M)$. Partiendo de la siguiente identidad para el producto semidirecto $CO(m) \ltimes \mathbb{R}^{m*}$

$$(A, \eta)(I_m, \eta') = (A, \eta + \eta') = (I_m, \eta' A^{-1})(A, \eta)$$

se observa que $\forall h \in H^m \approx CO(m) \ltimes \mathbb{R}^{m*}$ es $h \cdot \exp \eta_\alpha = \exp(\eta_\alpha \cdot h_*^{-1}) \cdot h$, y entonces

$$\begin{aligned} R_{\exp \eta_\alpha}(q \cdot h) &= (q \cdot h) \cdot \exp \eta_\alpha(q \cdot h) = q \cdot h \cdot \exp\left(\eta_\alpha(q) \cdot h_*\right) \\ &= q \cdot \exp \eta_\alpha(q) \cdot h = R_{\exp \eta_\alpha}(q) \cdot h. \end{aligned}$$

Mediante el pullback $w = (R_{\exp \eta})^* \omega \in \Lambda^1(Q(M), \mathfrak{g})$ se define una nueva conexión normal de Cartan en $Q(M)$. Por el Teorema 5.5, para demostrar la coincidencia de w con la conexión normal de Cartan $\overline{\omega} \in \Lambda^1(Q(M), \mathfrak{g})$ asociada a $\overline{\nabla}$, basta estudiar sus primeras componentes w_{-1} y w_0. Estas viene dadas por:

$$\begin{aligned} w_{-1} &= \omega_{-1} \in \Lambda^1(Q(M), \mathfrak{g}_{-1}) \\ w_0 &= \omega_0 - [\eta_\alpha, \omega_{-1}] \in \Lambda^1(Q(M), \mathfrak{g}_0) \end{aligned}$$

como consecuencia de aplicar a $w = (R_{\exp \eta})^* \omega = Ad_{\exp -\eta_\alpha} \omega$ la fórmula de B-C-H (5.42), pág. 117.

(**i**) $w_{-1} = \omega_{-1} = \theta \circ \pi_* = \overline{\omega}_{-1}$.

(**ii**) Si μ y $\overline{\mu}$ denotan las formas horizontales de las conexiones conformes ∇ y $\overline{\nabla}$, se tiene la siguiente relación deducida del Corolario 2.1 y de la Observación 3.1 (**a**):

$$\overline{\mu}_b(\xi_b) = \mu_b(\xi_b) + (b_{\circledast}^{-1}\Phi_\alpha)(\theta(\xi_b)) = \mu_b(\xi_b) + (\Phi_{\alpha\circ b})\,(\theta(\xi_b))\,,\ \forall \xi_b \in T_bCO(M)$$

Por la Observación 5.8 es $\Phi_\eta(V) = [V,\eta] = -[\eta, V]$, y por lo tanto,

$$\overline{\mu}_b = \mu_b + \Phi_{\eta_\alpha(b)} \circ \theta = \mu_b - [\eta_\alpha(b), \theta(.)] \in \Lambda^1(CO(M), \mathfrak{co}(m)).$$

De este modo, $\forall \xi_b \in T_bCO(M)$ es

$$w_0(\xi_b) = (\omega_0 - [\eta_\alpha, \omega_{-1}])\,(\xi_b) = \mu(\xi_b) - [\eta_\alpha(b), \theta(\xi_b)] = \overline{\mu}(\xi_b) = \overline{\omega}_0(\xi_b).$$

Así, las conexiones normales de Cartan $\overline{\omega}$ y $w = (R_{\exp \eta})^* \omega$ son ambas admisibles para $(\theta, \overline{\mu})$ y por el Teorema 5.5 conlcuimos $\overline{\omega} = w = (R_{\exp \eta})^*\, \omega$. ■

El automorfismo $R_{\exp \eta_\alpha} : Q(M) \to Q(M)$ asociado a la 1-forma $\alpha \in \Lambda^1(M)$, induce en el fibrado tangente esférico $\overline{T}M$ un automorfismo

$$\tau_\alpha : \overline{T}M \longrightarrow \overline{T}M. \tag{5.45}$$

Sobre cada $x \in M$, $(\tau_\alpha)_x : \overline{T}_xM \to \overline{T}_xM$ es la transformación conforme de la esfera tangente $\overline{T}_xM$ definida por:

$$(\tau_\alpha)_x = R_{\exp \eta_\alpha}(q) \circ q^{-1} = q \circ \exp \eta_\alpha(q) \circ q^{-1}, \quad \forall q \in Q(M)_x.$$

Es decir, $(\tau_\alpha)_x$ consiste en una *traslación* del punto infinito $\infty_x \in \overline{T}_xM$, verificando:

- $(\tau_\alpha)_x\,(O_x) = O_x \in \overline{T}_xM$;
- $d_O\,(\tau_\alpha)_x = id_{T_xM} : T_xM \;\to\; T_xM$;
- $(\tau_\alpha)_x\,(\infty_x) = \begin{cases} \infty_x & \text{si } \alpha_x = 0 \\ \iota \circ b\left(\frac{-\eta_\alpha(b)^\intercal}{2\|\eta_\alpha(b)\|^2}\right) & \text{si } \alpha_x \neq 0, \quad (\forall b \in CO(m)_x). \end{cases}$

Corolario 5.2 *Las conexiones principales ϖ y $\overline{\varpi} \in \Lambda^1(P(M),)$ extendiendo de manera natural a las conexiones normales de Cartan de las conexiones conformes ∇ y $\overline{\nabla} = \nabla + \Phi_\alpha$, $\alpha \in \Lambda^1(M)$, resultan equivalentes a través de un automorfismo del fibrado $P(M)$,*

$$F_\alpha : (P(M), \overline{\varpi}) \longrightarrow (P(M), \varpi) \quad (\overline{\varpi} = F_\alpha^* \varpi)$$

tal que $F_\alpha(q) = q \cdot \exp \eta_\alpha(q) = q \cdot \exp(\alpha \circ q_*)$, $\forall q \in Q(M)$.

5.3.4 Conexión esférica de Fermi-Walker

En capítulos anteriores hemos demostrado que sobre una variedad conforme Riemanniana M existe una noción natural de transporte paralelo de Fermi-Walker, que permite desplazar canónicamente el espacio tangente a lo largo de las curvas parametrizadas de la variedad, preservando su estructura conforme lineal.

Acabamos de ver que en el modelo de Cartan, que apoya sobre cada punto $x \in M$ de la variedad conforme una esfera tangente $\overline{T}_xM$ como complección del espacio tangente conforme T_xM, toda conexión conforme lineal, originalmente asociada al transporte de espacios tangentes, puede extenderse de manera natural para definir un transporte de esferas tangentes. El paso de una conexión conforme lineal ∇ a su correspondiente conexión esférica $\omega \in \Lambda^1(Q(M), \mathfrak{g})$ se hace a través del tensor de Schouten asociado a ∇ (Proposición 5.6). Esto nos pemirte operar de manera análoga con el transporte Fermi-Walker.

A continuación se demuestra que el transporte "lineal" de Fermi-Walker admite su extensión al fibrado esférico tangente, y da lugar a un transporte paralelo canónico de las esferas conformes tangentes sobre curvas parametrizadas. Éste transporte va ligado a una conexión de tipo Cartan que denominamos *conexión esférica de Fermi-Walker* ω^γ.

Sea $\gamma : I \ni t \to \gamma(t)$ una curva parametrizada en la variedad conforme M. El transporte Fermi-Walker basa su definición en la existencia de conexiones conformes lineales ∇ adaptadas para cada instante $t \in I$, en el sentido de que la restricción de $\gamma(t)$ a un entorno de $t \in I$ es curva ∇-geodésica. Cada conexión adaptada ∇ se extiende a una conexión normal de Cartan $\omega \in \Lambda^1(Q(M), \mathfrak{g})$, que define un transporte paralelo de la esfera tangente y de sus referencias esféricas sobre la curva.

$$\forall q_t \in \gamma^*Q(M), \;\; \omega(q_t') \in \mathfrak{g} = \mathbb{R}^m \oplus \mathfrak{co}(m) \oplus \mathbb{R}^{m*}$$

A través de la inclusión natural $i : CO(M) \hookrightarrow Q(M)$ se puede tomar sobre la curva $\gamma(t)$ una elección de referencias $q_t = i \circ \sigma(\gamma(t))$ para una sección $\sigma = (E_1, ..., E_m) \in CO(M)$ tal que $E_1(\gamma(t)) = \gamma'(t)$. La conexión de Cartan ω queda entonces determinada por su pullback $w = (i \circ \sigma)^*\omega$, cuyas componentes adquieren una expresión sencilla para esta elección de referencias q_t sobre la curva (Teorema 5.5):

- $w_{-1} = (w^i) \in \mathbb{R}^m$ es la base dual de $\sigma = (E_i)$, de modo que

$$w^i\left(\gamma'(t)\right) = w^i\left(E_1\left(\gamma(t)\right)\right) = \delta^i_1$$

- $w_0 = (w^i_j) \in \mathfrak{co}(m)$ es la forma horizontal de ∇, de manera que

$$\textstyle\sum_i w^i_j\left(\gamma'(t)\right) E_i\left(\gamma(t)\right) = \nabla_{\gamma'(t)} E_j = \dfrac{\nabla}{dt}\left(E_j \circ \gamma\right) = \dfrac{D^\gamma}{dt}\left(E_j \circ \gamma\right)$$

con D^γ/dt *la conexión de Fermi-Walker* sobre la curva $\gamma(t)$.

- $w_1 = (w_j) = (L_{ij}w^i) \in \mathbb{R}^{m*}$, siendo $L \in \mathfrak{T}_2^0(M)$ el tensor de Schouten de la conexión conforme ∇, de manera que $\forall j$

$$w_j(\gamma'(t)) = \sum_i L_{ij}w^i(\gamma'(t)) = \sum_i L_{ij}\delta_1^i = L_{1j} = L_j^\gamma$$

con L^γ *el tensor de Schouten* sobre la curva $\gamma(t)$.

Es claro que el transporte de esferas tangentes inducido a lo largo de la curva es independiente de la elección de la conexión conforme ∇ adaptada a $\gamma(t)$. Podemos afirmar entonces que existe sobre la curva parametrizada $\gamma(t)$ una conexión canónica de Cartan, perfectamente definida por la estructura conforme del ambiente, y susceptible de ser descrita a través de invariantes conformes característicos de la curva $\gamma(t)$, a saber: la *forma fundamental* (para la componente en $\mathfrak{g}_{-1} = \mathbb{R}^m$), la *conexión de Fermi-Walker* D^γ/dt (para la componente en $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{co}(m)$), y el *tensor de Schouten* de la curva L^γ (para la componente en $\mathfrak{g}_1 = \mathbb{R}^{m*}$).

Definición 5.12 *A lo largo de cada curva parametrizada $\gamma(t)$ de la variedad conforme Riemanniana M está perfectamente definida* la conexión esférica de Fermi-Walker,

$$\omega^\gamma \in \Lambda^1(\gamma^*Q(M), \mathfrak{g}),$$

caracterizada por la condición de coincidir con la conexión normal de Cartan inducida sobre la curva por cualquier conexión conforme ∇ adaptada a $\gamma(t)$ ($\nabla/dt(\gamma') = 0$).

A través de la elección de una referencia móvil $\sigma_t = (E_1, ..., E_m)_t$ sobre la curva $\gamma(t)$, la conexión esférica de Fermi-Walker ω^γ queda determinada por su pullback $w^\gamma = (i \circ \sigma)^*\omega^\gamma \in \Lambda^1(I, \mathfrak{g})$. Si tomamos $\sigma_t = (E_i)_t$ de modo que $E_1 = \gamma'$, el desarrollo anterior demuestra el siguiente resultado.

Proposición 5.8 *Sean (Γ_j^i) y (L_j^γ) las componentes de la conexión de Fermi-Walker D^γ/dt y del tensor de Schouten L^γ, respecto a la referencia móvil $\sigma_t = (E_i) \in CO(M)_{\gamma(t)}$. Entonces se verifica*

$$w^\gamma = \left(\delta_1^i\,,\, \Gamma_j^i(t)\,,\, L_j^\gamma(t)\right) dt \in \Lambda^1(I, \mathbb{R}^m \oplus \mathfrak{co}(m) \oplus \mathbb{R}^{m*}).$$

La canonicidad de la conexión esférica de Fermi-Walker de una variedad conforme M permite asociar a cada curva parametrizada $\gamma(t)$ y a cada $t_0 \in I = Dom(\gamma)$ una única *curva desarrollo* $c(t)$ en el espacio homogéneo $E_{\gamma(t_0)} \equiv \overline{T}_{\gamma(t_0)}M$ (equivalencia (5.26), pág. 103), que describe el movimiento del origen $O_{\gamma(t)}$ en el transporte ω^γ-paralelo de las esferas tangentes (véase Definición 5.8).

Por el Lema 5.2 la elección de una sección $q_t \in \gamma^* Q(M)$ de referencias especiales sobre la curva $\gamma(t)$ permite describir su desarrollo $c(t) \subset \overline{T}_{\gamma(t_0)}M$, a través de:

$$c(t) = q_{t_0} \times_G (g_t H) \in E_{\gamma(t_0)} \;\Leftrightarrow\; c(t) = q_{t_0} \circ g_t(O) \in \overline{T}_{\gamma(t_0)}M \tag{5.46}$$

siendo g_t la curva en G^m determinada por las condiciones:

$$\left\{ \begin{array}{l} g_t^{-1} g_t' = \omega^\gamma(q_t'),\ \forall t \\ g_{t_0} = e \end{array} \right. .$$

Capítulo 6

Invariantes conformes asociados a curvas

En este capítulo estudiamos los aspectos más relevantes de la teoría de invariantes conformes asociados a curvas sumergidas en una variedad conforme Riemanniana. El planteamiento original que dio lugar a la definición de los invariantes que aquí analizamos se halla en el artículo Cartan [9]. En los artículos posteriores Sulanke [49] y Schiemangk-Sulanke [42] puede verse una descripción de las construcciones de Cartan desde una perspectiva más cercana a teoría actual de fibrados principales.

Inciamos el capítulo presentando en la sección 1 el caso de un ambiente Riemanianno. El propósito de esta sección previa es ofrecer una referencia bien conocida que avale la naturalidad de las posteriores construcciones para el caso conforme. Se resumen aquí los principales invariantes métricos asociados a curvas y se reformula su definición en base a la noción de *curva desarrollo*, propia de las conexiones de Cartan.

En la sección 2 centramos ya nuestro interés en el ambiente conforme Riemanniano, ligado a un fibrado de esferas conformes tangentes en el modelo de Cartan. La inclusión natural del espacio tangente a una curva curva Γ en M como recta vectorial del tangente al ambiente M, en el contexto conforme da paso a una inclusión a nivel de esferas tangentes. Se define en la esfera tangente del ambiente $\overline{T}_x M$ la noción de círculo $\bar{C}_x$ *tangente a la curva* en $x \in \Gamma$ (apartado **6.2.1**); cada $\bar{C}_x$ admite ser identificado con $\overline{T}_x\Gamma$ y da lugar a una inclusión asociada $i_{\bar{C}_x} : \overline{T}_x\Gamma \hookrightarrow \overline{T}_x M$ (6.9). Se define también una noción de referencia esférica del ambiente adaptada al círculo tangente a la curva $\bar{C}_x \subset \overline{T}_x M$.

Un círculo tangente a la curva queda unívocamente destacado por su relevancia geométrica en cada esfera tangente $\overline{T}_x M$, $x \in \Gamma$, cuando se cuenta con la presencia de una conexión normal de Cartan ω en el ambiente conforme M. En la sección 3 partimos de una variedad conforme M provista de una geometría normal de Cartan $(Q(M), \omega)$.

La condición de normalización (6.20) permite definir un procedimento estándar que identifica la esfera tangente de una curva en M con un único círculo tangente en la esfera tangente del ambiente, y cuyo significado geométrico se corresponde con la noción de círculo osculador clásicamente asociada a ambientes Riemannianos. Bajo este planteamiento, se hace patente además que la noción de círculo osculador es de naturaleza conforme: su definición tiene sentido en referencia a una conexión conforme arbitraria, y en el caso particular en que la conexión provenga de una métrica coincide con la definición estándar.

El apartado **6.3.3** presenta una construcción por la cual la acción de la conexión de Cartan ω a lo largo de una curva puede equipararse con la acción de una conexión lineal en el fibrado vectorial de las formas esféricas $\hat{T}M$. Esta "linealización" de la conexión permite tratar las construcciones de Cartan desde la teoría, más habitual, de conexiónes lineales.

Mediante la inclusión normalizada de $\overline{T}_x\Gamma$ en $\overline{T}_xM$ ofrecida por la geometría conforme de Cartan de ambiente, se está en posición de inducir sobre la curva Γ un transporte de su círculo tangente, heredado del transporte de las esferas tangentes del ambiente. Este transporte se realiza por medio de una conexión inducida $\omega^\Gamma \in (Q(\Gamma), \widehat{\mathfrak{o}}(2,1))$ (Definición 6.4) que se obtiene de la conexión normal de Cartan ambiente $\omega \in \Lambda^1(Q(M), \widehat{\mathfrak{o}}(m+1,1))$.

En la sección 4 se abordan ya los invariantes conformes asociados a curvas. Ofrecemos inicialmente la construcción habitual para estos invariantes, que consiste en dar su definición en términos de alguna de las conexiones normales de Cartan ω asociadas a la estructura conforme, y demostrar posteriormente que esta definición no depende de la conexión conforme elegida. Presentamos así los siguientes invariantes:

· Parámetro proyectivo (**6.4.2**): Su definición se basa en la existencia de una estructura proyectiva natural sobre la curva heredada del ambiente por la conexión inducida ω^Γ. Se tiene así una razón doble definida de modo natural sobre los puntos de la curva Γ.

· Arco y curvaturas conformes (**6.4.3**): Por un procedimiento análogo al propuesto para curvas en un ambiente Euclídeo por Frênet [17] y Jordan [22], y extendido a curvas en un ambiente Riemanniano (véase Eisenhart [15]), también la estructura conforme del ambiente induce sobre la curva un arco conforme $\mathbf{s}$ (Definición 6.6) y funciones de curvatura $\lambda_i(\mathbf{s})$, verificando fórmulas análogas a las de Frênet. En el caso conforme, en que la estructura va ligada al segundo orden, se obtienen únicamente $m-2$ funciones de curvatura, dado que es necesario hacer uso de las dos primeras derivadas de la curva (el 2-jet) para determinar el arco y el primer vector de la referencia móvil de Frênet.

· Geodésicas y círculos conformes (**6.4.4**): La noción de curva geodésica asociada a una conexión lineal, tiene su análogo en las geodésicas conformes asociadas a una conexión normal de Cartan conforme. De nuevo el hecho de que la estructura conforme sea de segundo orden implica que en cada punto de la variedad las geodésicas conformes están en correspondencia con el espacio de 2-jets $\widetilde{T}^2_x M = \{j^2_0(\gamma) \in T^2_x M : \gamma'_0 \neq 0\}$.

Posteriormente (apartado **6.4.5**) se observa que la condición de invarianza de estas definiciones respecto a la conexión conforme considerada y el hecho de que definan invariantes localizables sobre la curva, permite dar su definición en términos de la conexión esférica de Fermi-Walker. Esta conexión natural ofrece, además de su canonicidad, la ventaja de sumergir a la esfera tangente a la curva $\overline{T}_x\Gamma$ en la esfera tangente del ambiente $\overline{T}_x M$ mediante la inclusión

$$\begin{array}{rcl} \overline{T}_x\Gamma = T_x\Gamma \cup \{\infty\} & \hookrightarrow & T_x M \cup \{\infty\} = \overline{T}_x M \\ T_x\Gamma & \hookrightarrow & T_x M \\ \infty_\Gamma & \longmapsto & \infty_M \end{array}$$

que consiste en extender el monomorfismo natural entre espacios conformes $T_x\Gamma \hookrightarrow T_x M$ a sus respectivas complecciones del modo más sencillo: identificando los puntos del infinito $\infty_\Gamma \leftrightarrow \infty_M$.

A través de la conexión esférica de Fermi-Walker, obtenemos una descripción de los invariantes conformes sobre la curva que puede expresarse, en último caso, en función exclusivamente de la derivada de Fermi-Walker ∇^γ/dt y del tensor de Schouten L^γ del Capítulo 3. La caracterización en estos términos resulta extremadamente sencilla, y permite equiparar el tratamiento de las curvas en ambientes conformes con el de las curvas en ambientes métricos Riemannianos. La conexión de Fermi-Walker D^γ/dt ocupa entonces un lugar equivalente al de la conexión de Levi-Civita sobre la curva, y el tensor conforme de Schouten L^γ se interpreta como un análogo a la aceleración de la curva Riemanniana.

6.1 Referentes: Curvas en un ambiente Riemanniano

Una variedad Riemanniana M, con fibrado de referencias ortonormales $O(M) \to M$, tiene unívocamente asociada una conexión afín de Cartan, sin torsión,

$$\omega = (\theta, \mu) \in \Lambda^1(O(M), \mathbb{R}^m \oplus \mathfrak{o}(m)),$$

definida por la forma canónica vertical θ y la forma horizontal μ de la conexión de Levi-Civita (Teorema 5.2).

La noción de *desarrollo de curvas* (Definición 5.8) permite pasar de curvas parametrizadas en la variedad M a curvas en el espacio tangente (afín) $T_{\gamma(t_0)}M$, preservándose las propiedades geométricas de las curvas por la naturalidad de la definición de la conexión $\omega = (\theta, \mu)$. En particular, los invariantes clásicamente asociados a $t \mapsto \gamma(t) \in M$ como curva en un ambiente Riemanniano (longitud de arco, curvaturas, condición de geodésica,...), se expresan en el contexto de la geometría de Cartan $(O(M), \omega)$ en términos de las propiedades geométricas de su desarrollo $t \mapsto c(t) \in T_{\gamma(t_0)}M$ como curva en un espacio afín Euclídeo.

Sea $t \mapsto \gamma(t) \in M$ una curva parametrizada en la variedad Riemanniana. El movimiento del origen $0_{\gamma(t)} \in T_{\gamma(t)}M$ en el transporte ω-paralelo a lo largo de $\gamma(t)$, describe una curva en $T_{\gamma(t_0)}M$ que llamamos curva desarrollo (Definición 5.8):

$$t \mapsto c(t) = |\ \ |_{\gamma,t,t_0}(0_{\gamma(t)}) \in T_{\gamma(t_0)}M.$$

Fijada la curva de referencias ortonormales $t \mapsto b_t \in O(M)$ sobre $\gamma(t)$, el transporte ω-paralelo $|\ \ |_{t,t_0} = |\ \ |_{\gamma,t,t_0} : T_{\gamma(t)}M \to T_{\gamma(t_0)}M$ es la isometría afín caracterizada por la identidad $|\ \ |_{t,t_0} \circ b_t = b_{t_0} \circ g_t$, para $t \mapsto g_t \subset AO(m)$ curva solución de la ecuación $g'_t = g_t\, \omega(b'_t)$ con $g_{t_0} = e$. La curva desarrollo viene entonces definida por:

$$c(t) = |\ \ |_{t,t_0}(0_{\gamma(t)}) = |\ \ |_{t,t_0} \circ b_t(0) = b_{t_0} \circ g_t(0) \in T_{\gamma(t_0)}M$$

(resultado análogo al Lema 5.2 por la equivalencia (5.33) de la página 110). A través de la identificación del grupo afinizado $AO(m)$ con el producto semidirecto $\mathbb{R}^m \leftthreetimes O(m)$, $g_t \subset AO(m)$ se corresponde con una curva $(V_t, R_t) \in \mathbb{R}^m \leftthreetimes O(m)$ solución del sistema

$$\begin{cases} V'_t = R_t\, \theta(b'_t) \\ R'_t = R_t\, \mu(b'_t) \end{cases} \qquad \begin{cases} V_{t_0} = 0 \\ R_{t_0} = I_m \end{cases} \tag{6.1}$$

y el desarrollo de $\gamma(t)$ en $T_{\gamma(t_0)}M$ se corresponde con la curva

$$c(t) = b_{t_0} \circ g_t(0) = b_{t_0}(V_t) \in T_{\gamma(t_0)}M. \tag{6.2}$$

Observación 6.1 *Fijada la referencia móvil $b_t = (E_1, ..., E_m)_t \in O(M)$ sobre la curva $t \mapsto \gamma(t)$, la isometría afín ligada al transporte paralelo es*

$$|\ \ |_{t,t_0} = b_{t_0} \circ g_t \circ b_t^{-1} = (c(t)\,,\, b_{t_0} \circ R_t \circ b_t^{-1}) : T_{\gamma(t)}M \longrightarrow T_{\gamma(t_0)}M$$

con $c(t) \subset T_{\gamma(t_0)}M$ la curva desarrollo y $R_t \subset O(m)$ tal que $R_t^{-1}R'_t = \mu(b'_t)$, $R_{t_0} = I_m$. La parte vectorial de esta transformación afín, identificada con su diferencial en el punto origen $0 \in T_{\gamma(t)}M$, viene dada por

$$\begin{array}{ccccc} d_0 |\ \ |_{t,t_0} & : & T_0\left(T_{\gamma(t)}M\right) & \longrightarrow & T_{c(t)}\left(T_{\gamma(t_0)}M\right) \\ \| & & \| & & \| \\ b_{t_0} \circ R_t \circ b_t^{-1} : & & T_{\gamma(t)}M & \longrightarrow & T_{\gamma(t_0)}M \end{array}$$

Para cada t*, la referencia transportada* $|\ |_{t,t_0}(b_t) = (c(t)\,,\, b_{t_0} \circ R_t) \in AO(M)_{\gamma(t_0)}$ *define una referencia ortogonal afín sobre* $c(t)$*, formada por vectores*

$$\begin{aligned} v_j(t) &= d_0 |\ |_{t,t_0}(E_j(t)) \in T_{c(t)}(T_{\gamma(t_0)}M) \\ &= b_{t_0} \circ R_t \circ b_t^{-1}(E_j(t)) = b_{t_0} \circ R_t\,(e_j) \in T_{\gamma(t_0)}M \end{aligned} \tag{6.3}$$

es decir, $(v_1, ..., v_m)_t = b_{t_0} \circ R_t\ \forall t$*, y se cumple la identidad*

$$\begin{aligned} (v_1, ..., v_m)'_t &= b_{t_0} \circ R'_t = (v_1, ..., v_m)_t \circ R_t^{-1} \circ R'_t \\ &= (v_1, ..., v_m)_t \circ \mu(b'_t) \quad \forall t. \end{aligned} \tag{6.4}$$

El hecho de que la componente de la conexión ω que toma valores en $\mathbb{R}^m$ provenga de la forma canónica vertical θ es equivalente al siguiente resultado.

Proposición 6.1 *La velocidad inicial de la curva desarrollo* $c(t) \subset T_{\gamma(t_0)}M$ *coincide con la inicial de la curva* $\gamma(t) \subset M$ *en* $t_0 \in I$*, es decir,*

$$\gamma'(t_0) = c'(t_0) \in T_0(T_{\gamma(t_0)}M) \equiv T_{\gamma(t_0)}M.$$

Demostración. Sea $b_t \subset O(M)$ una referencia móvil ortonormal sobre $\gamma(t)$. Por la identidad (6.2) es $c'(t_0) = b_{t_0}(V'_{t_0}) \in T_{\gamma(t_0)}M$, y el sistema de ecuaciones (6.1) evaluado en t_0 da lugar a la siguiente identidad

$$V'_{t_0} = R_{t_0}^{-1} V'_{t_0} = \theta(b'_{t_0}) = b_{t_0}^{-1}(\gamma'(t_0)).$$

Se concluye así que $c'(t_0) = b_{t_0}(V'_{t_0}) = \gamma'(t_0) \in T_{\gamma(t_0)}M$. ■

Corolario 6.1 *El desarrollo* $c(t) \subset T_{\gamma(t_0)}M$ *de la curva parametrizada* $\gamma(t) \subset M$ *cumple las siguientes propiedades:*

(**a**) $c'(t) = d_0 |\ |_{t,t_0}(\gamma'(t)) \in T_{c(t)}(T_{\gamma(t_0)}M) \equiv T_{\gamma(t_0)}M, \quad \forall t \in I.$

(**b**) $\mathbf{g}_{\gamma(t_0)}(c'(t), c'(t)) = \mathbf{g}(\gamma'(t), \gamma'(t)), \quad \forall t \in I.$

Demostración.

(**a**) Fijado un $\overline{t}_0 \in I$, se tiene que el desarrollo $\overline{c}(t)$ de $\gamma(t)$ en $T_{\gamma(\overline{t}_0)}M$ cumple $c(t) = |\ |_{\overline{t}_0,t_0} \circ \overline{c}(t)$, y de la Proposición anterior se deduce

$$c'(\overline{t}_0) = (d_0 |\ |_{\overline{t}_0,t_0}) \circ \overline{c}'(\overline{t}_0) = (d_0 |\ |_{\overline{t}_0,t_0})\left(\gamma(\overline{t}_0)\right).$$

(**b**) Se deduce directamente de (**a**) y del hecho que $d_0 |\ |_{t,t_0} : T_{\gamma(t)}M \to T_{\gamma(t_0)}M$ sea isometría $\forall t$. ■

Arco y curvaturas Riemannianas

Cada curva en la variedad Riemanniana puede reparametrizarse por su *longitud de arco* de modo que $t \mapsto \gamma(t) \in M$ cumpla $\mathbf{g}(\gamma_t', \gamma_t') = 1$, $\forall t$. Es conocido también que para una curva general[1] puede construirse una referencia móvil $b_t = (E_1, ..., E_m)_t \in O(M)$ sobre la curva, llamada referencia de Frênet, caracterizada por verificar $E_1(t) = \gamma_t'$ y

$$\frac{\nabla}{dt} E_j = -\lambda_{j-1} E_{j-1} + \lambda_j E_{j+1}, \qquad (\lambda_0 = \lambda_m = 0)$$

para ciertas funciones $\lambda_j(t) \in C^\infty(\gamma)$, que definen las *curvaturas de la curva* $\gamma(t)$ *en la variedad Riemanniana* M (véase Eisenhart [15], Laugwitz [29]). Se tiene así que

$$\mu\left(b_t'\right) = \begin{pmatrix} 0 & -\lambda_1 & 0 & ... & 0 \\ \lambda_1 & 0 & -\lambda_2 & & \vdots \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \ddots & \\ \vdots & & \ddots & 0 & -\lambda_{m-1} \\ 0 & ... & & \lambda_{m-1} & 0 \end{pmatrix} (t) \in \mathfrak{o}(m).$$

Proposición 6.2 *En estas condiciones, el desarrollo de* $t \mapsto \gamma(t) \in M$ *define una curva* $t \mapsto c(t) \in T_{\gamma(t_0)}M$ *igualmente parametrizada por su longitud de arco y con idénticas curvaturas* $\lambda_j(t)$ *en el espacio afín Euclídeo* $T_{\gamma(t_0)}M$.

Demostración. Por el Corolario 6.1 sabemos que la curva $c(t)$ está igualmente parametrizada por su longitud de arco. Para la referencia móvil de Frênet $b_t \in O(M)_t$, la referencia transportada $|\ |_{t,t_0}(b_t) \in AO(M)_{\gamma(t_0)}$ define entonces una referencia móvil ortogonal sobre la curva $c(t)$ formada por vectores $v_j(t) =$ (6.3) tales que:

- $v_1(t) = d_0 |\ |_{t,t_0}(E_1(t)) = d_0 |\ |_{t,t_0}(\gamma'(t)) = c'(t)$ (Corolario 6.1 (**a**))
- $(v_1, ..., v_m)_t' = (v_1, ..., v_m)_t \circ \mu(b_t')$ (6.4) $\Leftrightarrow$ $v_j' = -\lambda_{j-1} v_{j-1} + \lambda_j v_{j+1}$.

Esto significa que $|\ |_{t,t_0}(b_t)$ define la referencia móvil de Frênet y $\lambda_1(t), .., \lambda_{m-1}(t)$ son las curvaturas de $t \mapsto c(t)$ como curva en el espacio afín Euclídeo $T_{\gamma(t_0)}M$. ■

Obsérvese que dado que las curvaturas $\lambda_j(t)$ forman un sistema completo de clasificación de curvas en un espacio Euclídeo, concluimos que si $\gamma(t)$ es una curva en la variedad Riemanniana M con curvaturas $\lambda_1(t), ..., \lambda_m(t)$ y cuya referencia móvil de Frênet viene dada por $b_t \in O(M)_{\gamma(t)}$, entonces, su desarrollo en el espacio afín $T_{\gamma(t_0)}M$ es la curva determinada por tener curvaturas $\lambda_1(t), ..., \lambda_m(t)$ y por tener a $b_{t_0} \in O(M)_{\gamma(t_0)}$ como referencia de Frênet en el origen $0_{\gamma(t_0)} = c(t_0)$.

[1] Se dice que $\gamma(t)$ es *curva general* en M cuando las derivadas $\gamma_t', \frac{\nabla}{dt}\gamma_t', ..., (\frac{\nabla}{dt})^{m-1}\gamma_t'$ son linealmente independientes en $T_{\gamma(t)}M$ en cualquier instante t.

Geodésicas Riemannianas

Existe una correspondencia similar entre la curva en M y su desarrollo en el espacio tangente Euclídeo en relación con la propiedad de ser curva geodésica, como se demuestra en el siguiente resultado (véase también en Kobayashi-Nomizu [24], III.6).

Proposición 6.3 *La curva $t \mapsto \gamma(t)$ es curva geodésica en la variedad Riemanniana M $(\nabla/dt(\gamma')=0)$ si y sólo si su desarrollo $t \mapsto c(t)$ define una recta $c(t)=tv$ en el espacio afín $T_{\gamma(t_0)}M$ $(c'(t)=0)$.*

Demostración. Sea $b_t=(E_1,...,E_m)_t \in O(M)$ una referencia móvil sobre $\gamma(t)$ adaptada a la curva en el siguiente sentido: $\exists\, r_t \in C^\infty(\gamma)$ tal que $\gamma'_t = r_t E_1(t)$, $\forall t$.

El desarrollo en $T_{\gamma(t_0)}M$ es $c(t)=b_{t_0}(V_t)$, determinado por $(V_t,R_t)\subset \mathbb{R}^m \rtimes O(m)$ tal que $(V_t,R_t)=(0,I_m)$ y

$$\left\{\begin{array}{l} R_t^{-1}V_t' = \theta(b_t') = r_t\, e_1 \in \mathbb{R}^m \\ R_t^{-1}R_t' = \mu(b_t') = (\Gamma^i_j)_t \in \mathfrak{o}(m),\, ,\ \frac{\nabla}{dt}E_j = \Gamma^i_j E_i \end{array}\right. \tag{6.5}$$

Supongamos que $c(t)=tv \in T_{\gamma(t_0)}M$ para $v \in T_{\gamma(t_0)}M$, es decir,

$$V_t = b_{t_0}^{-1}\circ c(t) = b_{t_0}^{-1}(tv) \in \mathbb{R}^m \ \Rightarrow\ V_t' = b_{t_0}^{-1}(v).$$

Por el Corolario 6.1 es $\gamma'(t_0)=c'(t_0)=v$, y $r_t^2 = \mathbf{g}(\gamma'_t,\gamma'_t)=\mathbf{g}_{\gamma(t_0)}(v,v)$ de modo que $r_t = r \in \mathbb{R}$ (cte). Así, de la primera ecuación del sistema (6.5) se deduce que $\forall t$

$$R_t(re_1) = V_t' = b_{t_0}^{-1}(v) = b_{t_0}^{-1}(\gamma'(t_0)) = re_1 \ \Leftrightarrow\ R_t(e_1)=e_1.$$

Existe entonces una matriz $S_t \in O(m-1)$ tal que $R_t \in O(m)$ viene dada por

$$R_t = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & S_t \end{pmatrix} \ \Rightarrow\ R_t^{-1}R_t' = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & S_t^{-1}S_t' \end{pmatrix} = (\Gamma^i_j)_t$$

de modo que debe ser $\Gamma^i_1 = -\Gamma^1_i = 0$, $\forall i$, y concluimos

$$\tfrac{\nabla}{dt}\gamma' = \tfrac{\nabla}{dt}(rE_1) = r\textstyle\sum_i \Gamma^i_1 E_i = 0 \ \Leftrightarrow\ \gamma(t) \text{ curva geodésica.}$$

Recíprocamente, si la curva $\gamma(t)$ es geodésica en M se puede tomar la referencia móvil adaptada $b_t=(r\gamma',E_2,...,E_m)\subset O(M)$ de modo que $r=\mathbf{g}(\gamma',\gamma')^{-\frac{1}{2}}$ y E_i sean campos ∇-paralelos sobre $\gamma(t)$. El sistema de ecuaciones (6.5) pasa a ser

$$\left\{\begin{array}{l} R_t^{-1}V_t' = re_1 \in \mathbb{R}^m \\ R_t^{-1}R_t' = 0 \in \mathfrak{o}(m) \ \Leftrightarrow\ R_t'=0 \end{array}\right.$$

y debe ser $(V_t,R_t)=(t(re_1),I_m)$, concluyendo con $c(t)=b_{t_0}(V_t)=tb_{t_0}(re_1)=tv.$ ■

La geometría de Klein que modeliza la variedad Riemanniana M tiene asociado el par de álgebras $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ tal que $\mathfrak{g} = \mathbb{R}^m \oplus \mathfrak{o}(m)$ y $\mathfrak{h} = \mathfrak{o}(m)$. Cada $V \in \mathbb{R}^m = \mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ da lugar un subgrupo uniparamétrico

$$\{\exp(tV) = (tV, I_m) : t \in \mathbb{R}\} \leq AO(m) = \mathbb{R}^m \leftthreetimes O(m) \tag{6.6}$$

que al evaluarlo sobre el origen $0 \in \mathbb{R}^m$ define la recta $t \mapsto \exp(tV)(0) = tV \in \mathbb{R}^m$.

El espacio tangente afín Euclídeo $T_xM = AO(M)_x/O(M)_x$ hereda de los subgrupos uniparamétricos (6.6) la siguiente familia de curvas parametrizadas en T_xM:

$$\{c(t) = b \circ \exp(tV)(0) = b(tV) : b \in CO(M)_x, V \in \mathbb{R}^m\},$$

que se corresponde con la familia de rectas por el origen parametrizadas a velocidad constante. La Proposición 6.3 afirma que esta familia caracteriza a las curvas geodésicas de la estructura Riemanniana mediante su desarrollo en el tangente. A nivel infinitesimal esta relación de lugar al siguiente resultado:

Proposición 6.4 *Las curvas geodésicas de una variedad Riemanniana M coinciden con las proyecciones sobre M de curvas integrales en el fibrado ortonormal $O(M)$ para campos de la forma $\tilde{V} : b \mapsto \omega_b^{-1}(V) \in T_bO(M)$ con $V \in \mathbb{R}^m = \mathfrak{g}/\mathfrak{h}$.*

Demostración. Para $V \in \mathbb{R}^m$, las curvas integrales del campo $\tilde{V} = \omega^{-1}V$ inducido por la paralelización que ω define en $O(M)$, son curvas $t \mapsto b_t \subset O(M)$ tales que:

$$\omega(b_t') = V \;\Leftrightarrow\; \left\{ \begin{array}{l} \theta(b_t') = V \in \mathbb{R}^m \\ \mu(b_t') = 0 \in \mathfrak{o}(m) \end{array} \right.$$

Si $\gamma(t)$ denota la curva proyección en M, su desarrollo en $T_{\gamma(t_0)}M$ es $c(t) = b_{t_0}(V_t)$, para $(V_t, R_t) \in \mathbb{R}^m \leftthreetimes O(m)$ determinado por el sistema:

$$\left\{ \begin{array}{l} (V_{t_0}, R_{t_0}) = (0, I_m) \\ (R_t^{-1}V_t', R_t^{-1}R_t') = \omega(b_t') = (V, 0) \end{array} \right. \;\Leftrightarrow\; (V_t, R_t) = (tV, 0).$$

Entonces, $c(t) = b_{t_0}(tV) = t\, b_{t_0}(V)$, y por la Proposición 6.3 $\gamma(t)$ es curva geodésica.

El recíproco se ha probado ya en la anterior demostración, en donde se ha construido sobre la geodésica $\gamma(t)$ una curva de referencias $b_t = (r\gamma', E_2, ..., E_m)_t$, con $E_i(t)$ campo paralelo a lo largo de $\gamma(t)$ y $r = \mathbf{g}^{-\frac{1}{2}}(\gamma', \gamma')$, de modo que b_t es curva integral del campo $\tilde{V} = \omega^{-1}V \in \mathfrak{X}(O(M))$ para $V = re_1 \in \mathbb{R}^m$. ■

(Véase también este resultado en Kobayashi-Nomizu [24], III.6)

6.2 Curvas en un ambiente conforme

Una *curva (regular)* en una variedad diferenciable M se entiende como una variedad unidimensional conexa Γ junto con una inmersión

$$\Gamma \longrightarrow M, \tag{6.7}$$

esto es, una aplicación diferenciable (no necesariamente inyectiva) cuya diferencial define siempre un monomorfismo entre los espacios tangentes. Esta inmersión permite considerar cada punto de la curva $x \in \Gamma$ como un punto en la variedad y denotamos por abuso $x \in M$. Admás permite ver el espacio tangente a la curva $T_x\Gamma$ como una recta vectorial sumergida en el espacio tangente ambiente T_xM,

$$T_x\Gamma \hookrightarrow T_xM \quad (\forall x \in \Gamma).$$

Una *parametrización local* para la curva es un difeomorfismo entre un abierto de Γ y un intervalo abierto I de $\mathbb{R}^1$, de modo que (6.7) resulta equivalente a la inmersión

$$\begin{array}{rcl} \gamma \,:\, I & \longrightarrow & M \\ t & \longmapsto & \gamma(t) \end{array} \qquad (\text{con } \gamma'(t) \neq 0, \forall t \in I).$$

Es así como decimos que una curva parametrizada (regular) es una aplicación diferenciable $t \mapsto \gamma(t) \in M$ con $\gamma'(t) \neq 0$, $\forall t$, tal y como hasta ahora se ha entendido.

Dos curvas en la variedad M, $\Gamma \to M$ y $\widetilde{\Gamma} \to M$, resultan equivalentes cuando existe un difeomorfismo $\varphi : \Gamma \to \widetilde{\Gamma}$ que hace conmutativo el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc} \Gamma & \to & M \\ {}^{\varphi}\downarrow & \nearrow & \\ \widetilde{\Gamma} & & \end{array}$$

Como variedad unidimensional, una curva Γ está dotada de una única estructura conforme trivialmente asociada al fibrado $L\Gamma = CO(\Gamma)$ como fibrado de referencias conformes. A través del modelo conforme de Cartan (Capítulo **5**), Γ es la base de un fibrado tangente esférico canónico $\overline{\overline{T}}\Gamma \to \Gamma$ con fibras modeladas en $\mathbb{S}^1$, y de un fibrado de referencias esféricas especiales $Q(\Gamma) \to \Gamma$ de grupo estructural $H^1 = \mathbb{R} \rtimes \mathbb{R}^*$, que incluye como subfibrado a $CO(\Gamma) = L\Gamma$. Obsérvese que la falta de relevancia geométrica de esta estructura conforme impide asociar a Γ una conexión de Cartan geométricamente preferente; la inmersión de Γ en un ambiente conforme M permitirá inducir sobre la curva la noción conexión de Cartan heredada del ambiente (sección 3), así como la definición sobre la curva de distintos invariantes conformes (sección 4).

Si Γ es una curva en la variedad M el espacio tangente a la curva $T_x\Gamma$ está naturalmente sumergido como recta vectorial de T_xM $(x \in \Gamma)$. Al trabajar en el ámbito de las variedades conformes de Cartan, la correspondiente inclusión debe darse a nivel de las esferas tangentes $\overline{T}_x\Gamma \hookrightarrow \overline{T}_xM$. Por coherencia con las propiedades geométricas de la esfera tangente como complección esférica del espacio tangente usual, $\overline{T}_x\Gamma$ debe sumergirse en $\overline{T}_xM$ como un círculo $\bar{C}_x$ que pase por el punto origen $O_x \in \overline{T}_xM$ con dirección tangente a la curva, esto es:

$$\begin{array}{ccc} T_{O_x}\bar{C}_x & \hookrightarrow & T_{O_x}\left(\overline{T}_xM\right) \\ \shortparallel & & \shortparallel \\ T_x\Gamma & \hookrightarrow & T_xM \end{array}$$

6.2.1 Círculos del ambiente tangentes a la curva

Sea Γ una curva en la variedad conforme Riemanniana M de dimensión m.

Definición 6.1 *Se dice que un círculo $\bar{C}_x$ en la esfera tangente $\overline{T}_xM$, es* círculo tangente a la curva *en $x \in \Gamma$ si pasa por el origen $O_x \in \overline{T}_xM$ con dirección tangente a la recta vectorial $T_x\Gamma \subset T_xM \equiv T_{O_x}\left(\overline{T}_xM\right)$.*

Los círculos tangentes a la curva en $x \in \Gamma$ son los círculos susceptibles de ser identificados con la esfera tangente unidimensional $\overline{T}_x\Gamma$ de la curva Γ. Cada elección de un círculo tangente $\bar{C}_x$ en $\overline{T}_xM$ va asociada a una identificación

$$\overline{T}_x\Gamma \equiv \bar{C}_x \subset \overline{T}_xM \tag{6.8}$$

definida como la única transformación de Möbius $\overline{T}_x\Gamma \to \bar{C}_x$ verificando las condiciones:

(a) Identifica los respectivos puntos origen:

$$\overline{T}_x\Gamma \ni O_{x,\Gamma} \longmapsto O_{x,M} \in \bar{C}_x.$$

(b) Su diferencial en el origen es la identidad en el espacio $T_x\Gamma$, doblemente identificado con los tangentes $T_{O_{x,\Gamma}}(\overline{T}_x\Gamma)$ y $T_{O_{x,M}}\left(\bar{C}_x\right)$.

(c) El hiperplano ortogonal a $T_x\Gamma$ en T_xM se identifica con una hiperesfera pasando por el infinito $\infty_{x,M}$ en $\overline{T}_xM$ (sección **5.1.1**). Esta hiperesfera interseca al círculo $\bar{C}_x$ en el punto origen $O_{x,M}$ y en otro punto distinto que denotamos $\infty(\bar{C}x)$. Entonces:

$$\overline{T}_x\Gamma \ni \infty_{x,\Gamma} \longmapsto \infty(\bar{C}x) \in \bar{C}_x.$$

La identificación (6.8) que permite ver $\overline{T}_x\Gamma$ como el círculo tangente $\bar{C}_x \subset \overline{T}_xM$, da lugar a una inclusión asociada de $\overline{T}_x\Gamma$ en $\overline{T}_xM$, que denotamos

$$i_{\bar{C}_x} : \overline{T}_x\Gamma \hookrightarrow \overline{T}_xM \tag{6.9}$$

y que respeta las estructuras de Möbius de las complecciones esféricas.

6.2.2 Referencias especiales de M adaptadas a la curva

Definición 6.2 *Una referencia especial $q \in Q(M)_x$ se dice* adaptada a la curva Γ *cuando su diferencial $q_* \in CO(M)$ es un isomorfismo conforme $q_* : \mathbb{R}^m \to T_xM$ tal que la recta $q_*^{-1}(T_x\Gamma)$ coincide con $\mathbb{R}^1 = \{(x_1, 0, ..., 0) \in \mathbb{R}^m : x_1 \in \mathbb{R}\}$.*

Interpretando la referencia q como el par $(q_*, q(\infty)) \in CO(M)_x \times \overline{T}_xM\text{-}\{O_x\}$ (Proposición 5.4, pág. 93), la condición de que esté adaptada a la curva Γ resulta equivalente a que $q_* = (v_1, ..., v_m) \in CO(M)_x$ sea una referencia conforme de T_xM con v_1 en la dirección de $T_x\Gamma$, y $(v_2, ..., v_m)$ base del subespacio ortogonal $(T_x\Gamma)^\perp \subset T_xM$.

Por la inclusión natural $\mathbb{S}^1 \ni (y_0, y_1) \hookrightarrow (y_0, y_1, 0..., 0) \in \mathbb{S}^m$, cada referencia especial $q : \mathbb{S}^m \to \overline{T}_xM$ adaptada a Γ define en $\overline{T}_xM$ un *círculo tangente* a la curva,

$$\bar{C}_x = q(\mathbb{S}^1) \subset \overline{T}_xM.$$

Observación 6.2 *Si la referencia adaptada es $q = [\hat{A}_0, \hat{A}_1, ..., \hat{A}_{m+1}]$, para $\hat{A}_i \in \widehat{T}_xM$, el círculo tangente $\bar{C}_x = q(\mathbb{S}^1) \subset \overline{T}_xM$ viene dado por la intersección en $\mathbb{P}(\widehat{T}_xM)$*

$$\bar{C}_x = \mathbb{P}(span\{\hat{A}_0, \hat{A}_1, \hat{A}_{m+1}\}) \cap \overline{T}_xM,$$

y en el sistema de coordenadas homogéneas asociado (pág. 84) tiene ecuaciones

$$x_1^2 + 2x_0x_{m+1} = 0; \quad x_2 = ... = x_m = 0.$$

Fijar un círculo tangente $\bar{C}_x$ en $\overline{T}_xM$ equivale a fijar el espacio $\hat{\Pi} = span\{\hat{A}_0, \hat{A}_1, \hat{A}_{m+1}\}$ en $\widehat{T}_xM$.

La restricción $q|_{\mathbb{S}^1} = [\hat{A}_0, \hat{A}_1, \hat{A}_{m+1}] : \mathbb{S}^1 \to \bar{C}_x$ define una correspondencia entre la esfera de Möbius $\mathbb{S}^1$ y el círculo $\bar{C}_x$, de modo que al identificar $\overline{T}_x\Gamma$ con $\bar{C}_x$ por (6.8) se obtiene una *referencia especial inducida* $q^\Gamma \in Q(\Gamma)_x$ sobre la curva Γ. Obsérvese que q^Γ está caracterizada por la condición de hacer conmutativo el siguiente diagrama, para $i_{\bar{C}_x}$ la inclusión de (6.9):

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{S}^1 & \hookrightarrow & \mathbb{S}^m \\ {\scriptstyle q^\Gamma}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle q} \\ \overline{T}_x\Gamma & \overset{i_{\bar{C}_x}}{\hookrightarrow} & \overline{T}_xM \end{array} \tag{6.10}$$

Aplicando a (6.10) la diferencial en el origen, se obtiene el siguiente diagrama conmutativo para los isomorfismos conformes asociados $q_* \in CO(M)_x$ y $q_*^\Gamma \in L\Gamma_x$,

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^1 & \hookrightarrow & \mathbb{R}^m \\ {\scriptstyle q_*^\Gamma}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle q_*} \\ T_x\Gamma & \hookrightarrow & T_xM \end{array}$$

Observación 6.3 *Por la Proposición* 5.4, *la referencia especial inducida* $q^{\Gamma} \in Q(\Gamma)$ *puede verse como el par* $(q_*^{\Gamma}, q^{\Gamma}(\infty)) \in CO(\Gamma)_x \times T_x\Gamma\text{-}\{O_x\}$, *dado por:*

(i) $q_*^{\Gamma} = (v_1) \in CO(\Gamma)_x$, *para* $v_1 \in T_x\Gamma$ *tal que* $q_* = (v_1, ..., v_m) \in CO(M)_x$,

(ii) $q^{\Gamma}(\infty) = q(\infty) \in \bar{C}_x \overset{i_{\bar{C}_x}}{\hookrightarrow} \overline{T}_x\Gamma$.

6.2.3 Grupo estructural de las referencias adaptadas

Recordemos que el grupo de estructura asociado a las referencias esféricas especiales de la variedad conforme M es el grupo H^m (del apartado **5.1.3** (3)), isomorfo a $CO(m) \ltimes \mathbb{R}^{m*}$, y cuyos elementos admiten una representación matricial en $\widehat{O}(m+1,1)$.

Dos referencias q y $\overline{q} = q \cdot h$ adaptadas a la curva Γ sobre un mismo punto $x \in \Gamma$, se relacionan a través un $h \in H^m \cong CO(m) \ltimes \mathbb{R}^{m*}$ tal que la diferencial $h_* \in CO(m)$ verifica $h_*(1, 0, ..., 0) = (\varepsilon r, 0, ..., 0)$ para $r \in \mathbb{R}^+$ y $\varepsilon = \pm 1$. Es decir, $h \in H^m$ debe estar dado por $R \in O(m-1)$, $r \in \mathbb{R}^+$, $(\eta_1, \eta) \in \mathbb{R}^{m*}$ tales que:

$$h = \begin{pmatrix} r^{-1} & \boxed{\begin{matrix} \eta_1 & \eta \end{matrix}} & \text{-}r\frac{\eta_1^2 + \|\eta\|^2}{2} \\ \boxed{\begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix} \varepsilon & 0 \\ 0 & R \end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix} \text{-}\varepsilon r \eta_1 \\ \text{-}rR\eta^{\intercal} \end{matrix}} \\ 0 & \boxed{\begin{matrix} 0 & 0 \end{matrix}} & r \end{pmatrix} \in H^m \tag{6.11}$$

$$h = \left(r \begin{pmatrix} \varepsilon & 0 \\ 0 & R \end{pmatrix}, r(\eta_1, \eta) \right) \in CO(m) \ltimes \mathbb{R}^{m*}.$$

La condición de que las referencias vayan ligadas a un mismo círculo tangente a la curva $\bar{C}_x \subset \overline{T}_x M$ es equivalente a que el elemento $h \in H^m$ que las relaciona verifique $h(e_{m+1}) \in span\{e_0, e_1, e_{m+1}\}$, siendo $(e_0, e_1, ..., e_{m+1})$ la base canónica de $\mathbb{R}^{m+2}$. Es decir, la expresión matricial de h viene dada por $R \in O(m-1)$, $r \in \mathbb{R}^+$ y $\eta_1 \in \mathbb{R}^*$ tales que:

$$h = \begin{pmatrix} r^{-1} & \boxed{\begin{matrix} \eta_1 & 0 \end{matrix}} & \text{-}r\frac{\eta_1^2}{2} \\ \boxed{\begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix} \varepsilon & 0 \\ 0 & R \end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix} \text{-}\varepsilon r \eta_1 \\ 0 \end{matrix}} \\ 0 & \boxed{\begin{matrix} 0 & 0 \end{matrix}} & r \end{pmatrix} \in H^m \tag{6.12}$$

$$h = \left(r \begin{pmatrix} \varepsilon & 0 \\ 0 & R \end{pmatrix}, r(\eta_1, 0, ..., 0) \right) \in CO(m) \ltimes \mathbb{R}^{m*}$$

En tal caso, las respectivas referencias inducidas q^Γ y $\overline{q}^\Gamma = q^\Gamma \cdot h^1$ de $\overline{T}_x\Gamma$ que se definen mediante el diagrama (6.10), difieren en un $h^1 \in H^1 = CO(1) \ltimes \mathbb{R}$ dado por la expresión

$$h^1 = \begin{pmatrix} r^{-1} & \eta_1 & -r\frac{\eta_1^2}{2} \\ 0 & \varepsilon & -\varepsilon r\eta_1 \\ 0 & 0 & r \end{pmatrix} = (r\varepsilon, r\eta_1) \in CO(1) \ltimes \mathbb{R}. \tag{6.13}$$

Observación 6.4 *Una orientación sobre la curva Γ, permite distinguir las referencias especiales q* positivamente adaptadas *a la curva Γ, en el sentido de que la referencia conforme asociada q_* tiene su primer vector en la dirección tangente y positiva de Γ. Las matrices dadas en* (6.11) *y* (6.12) *quedan entonces restringidas al caso $\varepsilon = 1$. En particular, cada parametrización $\gamma : I \ni t \mapsto \gamma(t) \in M$ de la curva fija una única orientación en Γ tal que $\gamma'(t)$ está siempre positivamente orientado.*

Conclusión

Partiendo de la inmersión $\Gamma \hookrightarrow M$ que sumerge la curva en el ambiente conforme M, se obtiene por pullback un H^m-fibrado $\Gamma^*Q(M) \to \Gamma$ de las referencias especiales de M sobre puntos de la curva Γ. La introducción de la noción de referencia adaptada a la curva da lugar a las siguientes reducciones del fibrado $\Gamma^*Q(M) \to \Gamma$:

(a) Las referencias adaptadas a la curva Γ forman un subfibrado

$$Q^\Gamma(M) \longrightarrow \Gamma$$

de $\Gamma^*Q(M) \to \Gamma$, para el siguiente subgrupo de $H^m = CO(m) \ltimes \mathbb{R}^{m*}$:

$$C\left(O(1) \times O(m-1)\right) \ltimes \mathbb{R}^{m*} = \left\{ \left(r \begin{pmatrix} \varepsilon & 0 \\ 0 & R \end{pmatrix}, r(\eta_1, \eta) \right) \text{ de } (6.11) \right\}.$$

(b) Una elección de círculos tangentes a la curva, $\Gamma \ni x \mapsto \bar{C}_x \subset \overline{T}_x M$, puede verse como una reducción

$$Q^\Gamma(M, \bar{C}) \longrightarrow \Gamma$$

para el subgrupo de $H^m = CO(m) \ltimes \mathbb{R}^{m*}$ dado por:

$$C\left(O(1) \times O(m-1)\right) \ltimes \mathbb{R}^{*} = \left\{ \left(r \begin{pmatrix} \varepsilon & 0 \\ 0 & R \end{pmatrix}, r(\eta_1, 0) \right) \text{ de } (6.12) \right\}.$$

Entonces, la asignación de la referencia inducida para la curva,

$$\begin{array}{rcl} Q^\Gamma(M, \bar{C}) & \longrightarrow & Q(\Gamma) \\ q & \longmapsto & q^\Gamma \text{ como en } (6.10) \end{array}$$

define un homomorfismo entre los fibrados, asociado al homomorfismo de grupos

$$\begin{array}{ccc} C\left(O(1)\times O(m-1)\right)\rtimes\mathbb{R}^* & \longrightarrow & H^1 = CO(1)\rtimes\mathbb{R} \\ h = \left(r\begin{pmatrix}\varepsilon & 0\\ 0 & R\end{pmatrix}, r(\eta_1, 0)\right) & \longmapsto & h^1 = (r\varepsilon, r\eta_1) \end{array}$$

6.3 Ambiente conforme normal de Cartan $(Q(M), \omega)$

Fijada una conexión normal de Cartan $\omega\in\Lambda^1(Q(M),\mathfrak{g})$ sobre la variedad conforme M, la elección del círculo tangente $\bar{C}_x\subset\overline{T}_xM$ a una curva Γ puede normalizarse para distinguir un único círculo tangente preferente en cada $x\in\Gamma$.

La definición de recta tangente a una curva Γ en M puede entenderse como aquella recta $T_x\Gamma$ en T_xM $(x\in\Gamma)$ que tiene un contacto de orden 1 con la curva. Obsérvese que en el modelo conforme de Cartan, las rectas pasan a formar parte de una familia más general, en la que se confunden con los círculos. En este caso, el contacto de orden 1 con la curva caracteriza a toda una familia de círculos tangentes $\bar{C}_x$ en $\overline{T}_xM$ $(x\in\Gamma)$; y al imponer un contacto de orden 2 se logra distinguir un único círculo tangente a la curva (normalizado) en cada esfera $\overline{T}_xM$, $x\in\Gamma$. Este mayor orden de contacto requiere la presencia de la conexión en el ambiente.

El círculo conforme normalizado depende de la elección particular de la conexión conforme, y coincidirá con la noción clásica de *círculo osculador* en el caso en que la conexión provenga de una métrica conforme (Proposición 6.6).

6.3.1 Desplazamiento de referencias sobre Γ

Sea ∇ una conexión lineal y conforme en la variedad conforme M. Sobre el fibrado $Q(M)$ de referencias esféricas especiales existe una conexión normal de Cartan $\omega\in\Lambda^1(Q(M),\mathfrak{g})$ canónicamente asociada a ∇, y tal que el par $(Q(M),\omega)$ define sobre M una geometría de Cartan sin torsión de tipo Möbius (G^m, H^m) (véase sección **5.3.3**).

Considérese una curva de referencias $t\mapsto q(t)\in Q(M)$ adaptadas a la curva Γ de M, sobre la parametrización $I\ni t\mapsto\gamma(t)\in\Gamma$.

La evaluación de la conexión de Cartan ω sobre el campo velocidad $q'_t\in T_{q_t}Q(M)$ describe infinitesimalmente la variación de la curva de referencias especiales q_t con respecto a una curva horizontal de referencias en $P(M)$ (Lema 5.1). Así, si $t\mapsto p_t\in P(M)$ es la curva ω-horizontal con valor inicial $p_{t_0}=q_{t_0}$, entonces, es $q_t=p_t\cdot g_t$, para la curva $t\mapsto g_t\subset G^m$ solución de la ecuación diferencial

$$\omega\left(q'_t\right) = (R_{g_t}^{-1})_* g'_t = g_t^{-1}g'_t. \tag{6.14}$$

para el valor inicial $g_{t_0}=e\in G^m$.

Recuérdese de **5.1.7** que el álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ asociada al grupo de estructura G puede verse de manera equivalente como el álgebra de matrices $\widehat{\mathfrak{o}}(m+1,1)$, o como el álgebra graduada $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{-1} \oplus \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1 = \mathbb{R}^m \oplus \mathfrak{co}(m) \oplus \mathbb{R}^{m*}$. La conexión normal de Cartan $\omega \in \Lambda^1(Q(M), \mathfrak{g})$ admite así una doble descomposición en componentes:

$$\omega = \begin{pmatrix} \omega_0^0 & \omega_j^0 & 0 \\ \omega^i & \omega_j^i & -\omega_j^0 \\ 0 & -\omega^i & -\omega_0^0 \end{pmatrix} \in \widehat{\mathfrak{o}}(m+1,1) \tag{6.15}$$

y $\omega = (\omega_{-1}, \omega_0, \omega_1) \in \mathbb{R}^m \oplus \mathfrak{co}(m) \oplus \mathbb{R}^{m*}$, relacionadas por el sistema de identidades:

$$\begin{cases} \omega_{-1} = \left(\omega^1, ..., \omega^m\right)^\intercal \in \mathbb{R}^m \\ \omega_0 = (\omega_j^i) - \omega_0^0 I_m \in \mathfrak{co}(m) \\ \omega_1 = (\omega_1^0, ..., \omega_m^0) \in \mathbb{R}^{m*}. \end{cases}$$

Recuérdese además que la conexión normal de Cartan ω está caracterizada por tener su componente ω_{-1} en correspondencia con la forma vertical θ del fibrado $CO(M)$, y su componente ω_0 en correspondencia con la forma horizontal μ de la conexión ∇ en $CO(M)$ (Teorema 5.5 del Capítulo 4).

El hecho de que $q_t \in Q(M)_{\gamma(t)}$ sea una referencia adaptada a la curva Γ es equivalente a que el isomorfismo conforme $q_*(t) : \mathbb{R}^m \to T_{\gamma(t)}M$ cumpla $q_*(t)(e_1) \in T_{\gamma(t)}\Gamma$, equivalente a su vez a las condiciones:

$$\begin{aligned} \omega_{-1}(q_t') = \theta(\pi_*(q_t')) = (q(t)_*)^{-1}(\gamma'(t)) \in span\{e_1\} \\ \Leftrightarrow \;\; \omega_{-1}(q_t') = (\omega^1(q_t'), 0, ..., 0)^\intercal \in \mathbb{R}^m. \end{aligned}$$

Concluimos así que la *condición de adaptación a la curva* Γ para $t \mapsto q_t$ puede expresarse en términos de las componentes de la conexión normal de Cartan del ambiente $\omega \in \Lambda^1(Q(M), \mathfrak{g})$ a través de la ecuación:

$$\boxed{\omega^i(q_t') = 0, \quad 2 \leq i \leq m} \tag{6.16}$$

6.3.2 Condición de normalización

Sean $t \mapsto q_t$ y $t \mapsto \overline{q}_t = q_t \cdot h_t$ dos curvas de referencias positivamente adaptadas sobre una misma parametrización $t \mapsto \gamma(t)$ de la curva Γ. Las curvas $\omega_t = \omega(q_t')$ y $\overline{\omega}_t = \omega(\overline{q}_t')$ en el álgebra $\mathfrak{g}$ definidas por la conexión conforme de Cartan $\omega \in \Lambda^1(Q(M), \mathfrak{g})$, se relacionan mediante la ecuación

$$\overline{\omega}_t = Ad_{h_t^{-1}}(\omega_t) + h_t^{-1} h_t'. \tag{6.17}$$

En efecto,

$$\begin{aligned}\overline{\omega}_t &= \omega(\overline{q}'_t) = \omega_{\overline{q}_t}\left((R_{h_t})_* q'_t + (L_{q_t})_* h'_t\right) = \omega_{\overline{q}_t}\left((R_{h_t})_* q'_t\right) + \omega_{\overline{q}_t}\left((L_{\overline{q}_t})_*(L_{h_t^{-1}})_* h'_t\right) \\ &= Ad_{h_t^{-1}}\left(\omega_{q_t}(q'_t)\right) + (L_{h_t^{-1}})_* h'_t = Ad_{h_t^{-1}}\left(\omega_{q_t}(q'_t)\right) + h_t^{-1} h'_t.\end{aligned}$$

La curva $t \mapsto h_t$ toma valores en el subgrupo $CO(m-1) \leftthreetimes \mathbb{R}^{m*}$ de H^m asociado a las referencias adaptadas, y existen $r_t \in \mathbb{R}^+$, $R_t \in O(m-1)$, $(\eta_1, \eta)_t \in \mathbb{R}^{m*}$ tales que

$$h_t = \begin{pmatrix} r^{-1} & \eta_1 \quad \eta & -r\frac{\eta_1^2 + \|\eta\|^2}{2} \\ \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} & \begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & R \end{matrix} & \begin{matrix} -r\eta_1 \\ -rR\eta^{\intercal} \end{matrix} \\ 0 & 0 \quad 0 & r \end{pmatrix} (t) \tag{6.18}$$

Con la identificación $\mathfrak{g} = \widehat{\mathfrak{o}}(m+1,1)$, ω_t y $\overline{\omega}_t$ tienen expresiones matriciales del tipo (6.15), y la relación anterior (6.17) resulta equivalente al sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} \overline{\omega}_0^0 = \omega_0^0 - \eta_1\omega^1 - r^{-1}\frac{dr}{dt} \\ \overline{\omega}^1 = r^{-1}\omega^1 \\ \overline{\omega}_1^0 = r\left[\omega_1^0 + \eta_1\omega_0^0 + \eta_j R_j^i \omega_i^1 + \frac{|\eta|^2 - \eta_1^2}{2}\omega^1 + \frac{d\eta_1}{dt}\right] \\ \overline{\omega}_j^0 = r\left[(\omega_0^0 - \eta_1\omega^1)\eta_j + (\omega_i^0 - \eta_1\omega_i^1)R_j^i - (\eta_i R_i^k \omega_h^k R_j^h + R_i^k \frac{dR_j^k}{dt}) + \frac{d\eta_j}{dt}\right] \\ \overline{\omega}_j^1 = \omega_i^1 R_j^i + \omega^1 \eta_j \\ \overline{\omega}_j^i = R_i^k \omega_h^k R_j^h + R_i^k \frac{dR_j^k}{dt} \qquad {\scriptstyle (2 \le i,j \le m)}. \end{cases} \tag{6.19}$$

Si q_t es una elección arbitraria de referencias adaptadas a la curva, entonces, toda nueva referencia $\overline{q}_t = q_t \cdot h_t$ obtenida por una matriz de cambio $h_t = (6.18)$ verificando

$$\eta_j(t) = -\omega^1(q'_t)^{-1}\,\omega_i^1(q'_t)\,R_j^i(t), \quad \forall j = 2, ..., m$$

define una curva de referencias adaptadas con $\omega_j^1(\overline{q}'_t) = \omega_i^1(q'_t)\,R_j^i(t) + \omega^1(q'_t)\,\eta_j(t) = 0$. Se concluye así que es posible optimizar la elección de referencias adaptadas de modo que en su desplazamiento a lo largo de $\gamma(t)$ se verifique la *condición de normalización*:

$$\boxed{\omega_j^1 = 0, \quad 2 \le j \le m} \tag{6.20}$$

Un par q_t y $\overline{q}_t$ de referencias adaptadas y normalizadas ($\omega_j^1 = \overline{\omega}_j^1 = 0$) sobre $\gamma(t)$, difieren en elementos h_t de la forma (6.18) con $\eta(t) = 0$, esto es,

$$h_t = \begin{pmatrix} r^{-1} & \boxed{\eta_1 \quad 0} & -r\frac{\eta_1^2}{2} \\ \boxed{\begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & R \end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix} -r\eta_1 \\ 0 \end{matrix}} \\ 0 & \boxed{0 \quad 0} & r \end{pmatrix}(t) \tag{6.21}$$

para $r_t \in \mathbb{R}^+$, $R_t \in O(m-1)$, $(\eta_1)_t \in \mathbb{R}^*$. Las relaciones entre las componentes de la conexión de Cartan ω sobre q_t' y $\overline{q}_t'$, controladas por el sistema (6.19), quedan reducidas al contar con la condición de normalización ($\overline{\omega}_j^0 = \omega_j^0 = 0, \forall j \geq 2$) a las ecuaciones:

$$\left\{ \begin{array}{l} \overline{\omega}_0^0 = \omega_0^0 - \eta_1\omega^1 - r^{-1}\frac{dr}{dt} \\ \overline{\omega}^1 = r^{-1}\omega^1 \\ \overline{\omega}_1^0 = r\left[\omega_1^0 + \eta_1\omega_0^0 - \frac{\eta_1^2}{2}\omega^1 + \frac{d\eta_1}{dt}\right] \\ \overline{\omega}_j^0 = r\omega_i^0 R_j^i \quad {\scriptstyle (2\leq i,j\leq m)} \\ \overline{\omega}_j^i = R_i^k\omega_h^k R_j^h + R_i^k\frac{dR_j^k}{dt} \quad {\scriptstyle (2\leq i,j,k,h\leq m)} \end{array} \right. \tag{6.22}$$

Observación 6.5 *Sean $t \mapsto \gamma(t)$ y $s \mapsto \overline{\gamma}(s) = \gamma \circ \mathbf{t}(s)$ dos parametrizaciones de la curva. Una elección de referencias adaptadas sobre Γ da lugar a las curvas: $t \mapsto q_t$ sobre $\gamma(t)$ y $s \mapsto \overline{q}_s = q_{\mathbf{t}(s)}$ sobre $\overline{\gamma}(s)$, verificando la relación*

$$\omega(\overline{q}_s') = \mathbf{t}'(s)\,\omega(q_{t(s)}') \quad (\textit{con } \mathbf{t}'(s) \neq 0)$$

que mantiene invariante la condición de normalización (6.20). Así, la normalización es una condición geométrica*, en el sentido de que no depende de la parametrización tomada.*

La conexión normal de Cartan $\omega \in \Lambda^1(Q(M),)$ puede verse por pullback como una 1-forma actuando sobre el fibrado $\Gamma^*Q(M) \to \Gamma$. Entonces, hemos demostrado los siguientes resultados:

(**1**) La condición sobre las componentes de ω

$$\omega^i = 0, \quad \forall i = 2, ..., m \quad \text{(condición (6.16) de adaptación);}$$

caracteriza al subfibrado $Q^\Gamma(M)$ en $\Gamma^*Q(M)$ de las referencias adaptadas a la curva Γ.

(**2**) Las condiciones sobre las componentes de ω

$$\omega^j = 0, \quad \forall j = 2, ..., m \quad \text{(condición (6.16) de adaptación);}$$
$$\omega_j^1 = 0, \quad \forall j = 2, ..., m \quad \text{(condición (6.20) de normalización).}$$

caracterizan a un subfibrado $Q^\Gamma(M,\omega)$ en $\Gamma^*Q(M)$ de las referencias adaptadas y normalizadas respecto a ω. El grupo de estructura $H^m = CO(m) \ltimes \mathbb{R}^{m*}$ se ve entonces reducido al subgrupo de matrices de la forma

$$h = \begin{pmatrix} r^{-1} & \boxed{\begin{matrix}\eta_1 & 0\end{matrix}} & -r\frac{\eta_1^2}{2} \\ \boxed{\begin{matrix}0\\0\end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix}\varepsilon & 0\\ 0 & R\end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix}-\varepsilon r\eta_1\\0\end{matrix}} \\ 0 & \boxed{\begin{matrix}0 & 0\end{matrix}} & r \end{pmatrix}.$$

(**3**) Las referencias adaptadas y normalizadas respecto a la conexión ω coinciden con la familia de referencias adaptadas a una determinada elección de círculo tangente $\bar{C}_x \subset \overline{T}_xM$ a la curva en cada punto $x \in \Gamma$ (véase (6.12), pág. 134). Concluimos así que la condición de normalización conlleva la elección de *un único* círculo tangente a la curva $\bar{C}_x \subset \overline{T}_xM$, que coincide con $q(\mathbb{S}^1) = \bar{C}_x$ para cualquier referencia normalizada normalizada $q \in Q^\Gamma(M,\omega)_x$.

Fijada la geometría normal de Cartan $(Q(M),\omega)$ sobre la variedad conforme M, en cada punto de la curva Γ se puede hablar sin ambigüedad del círculo tangente $\bar{C}_x \subset \overline{T}_xM$ tangente a la curva Γ (ω-normalizado), y de una inclusión natural

$$i^\omega_{x,\Gamma} : \overline{T}_x\Gamma \hookrightarrow \overline{T}_xM, \tag{6.23}$$

canónicamente asociada a $\bar{C}_x$ por (6.9), pág. 132.

6.3.3 Conexión vectorial ligada a la conexión de Cartan sobre $\gamma(t)$

La geometría normal de Cartan $(Q(M),\omega)$ va ligada a una conexión lineal y conforme ∇ en la variedad M. A lo largo de la curva parametrizada $\gamma : I \ni t \mapsto \gamma(t) \in M$, la conexión inducida $\nabla/dt : \mathfrak{X}(\gamma) \to \mathfrak{X}(\gamma)$ describe un transporte paralelo del fibrado de referencias conformes.

El transporte paralelo de una referencia conforme $b \in CO(M)_{\gamma(t_0)}$ define una curva ∇-horizontal $t \mapsto (\mathbb{P}_\gamma b)_t \in CO(M)_{\gamma(t)}$, y al declararla curva de referencias ortonormales queda determinada una métrica conforme $\mathbf{g}_t \in \gamma^*\mathcal{C}$ sobre la curva. Una elección distinta para la referencia conforme b provoca en la métrica inducida un cambio del tipo $\overline{\mathbf{g}}_t = e^{2r}\mathbf{g}_t$, con $r \in \mathbb{R}$ constante. Se observa así que la conexión ∇ define una *estructura métrica sobre* $t \mapsto \gamma(t)$, determinada salvo constante de escala, que es compatible con la estructura conforme del ambiente.

Por el capítulo anterior (véase (5.4), pág. 81) sabemos que la métrica conforme $\mathbf{g}_t \in \gamma^*\mathcal{C}$ en $T_{\gamma(t)}M$ produce una métrica de Lorentz $\rho_{\mathbf{g}_t} \in \gamma^*\widehat{\mathcal{C}}$ en el espacio asociado de formas esféricas $\widehat{T}_{\gamma(t)}M$. Por este procedimiento, el fibrado vectorial $\gamma^*\widehat{T}M$ sobre la curva hereda de la conexión ambiente ∇ una *estructura métrica de Lorentz*, igualmente determinada salvo constante de escala.

Para las secciones del fibrado vectorial $\gamma^*\widehat{T}M \to I$, asumimos la notación

$$\widehat{\mathfrak{X}}(\gamma) = \left\{ \hat{A} : I \to \gamma^*\widehat{T}M,\, t \mapsto \hat{A}_t \in \widehat{T}_{\gamma(t)}M \right\}.$$

Una conexión vectorial en $\gamma^*\widehat{T}M$ es un operador $\widehat{\nabla}/dt : \widehat{\mathfrak{X}}(\gamma) \to \widehat{\mathfrak{X}}(\gamma)$ verificando:

(**i**) $\frac{\widehat{\nabla}}{dt}(\hat{A}_t + \hat{B}_t) = \frac{\widehat{\nabla}}{dt}\hat{A}_t + \frac{\widehat{\nabla}}{dt}\hat{B}_t, \quad \forall \hat{A}, \hat{B} \in \widehat{\mathfrak{X}}(\gamma),$

(**ii**) $\frac{\widehat{\nabla}}{dt}(f_t\, \hat{A}_t) = \frac{d}{dt}f_t\, \hat{A}_t + f_t \frac{\widehat{\nabla}}{dt}\hat{A}_t, \quad \forall \hat{A} \in \widehat{\mathfrak{X}}(\gamma),\, \forall f \in C^\infty(\gamma);$

y se dice compatible con la métrica $\rho_{\mathbf{g}_t}$ de $\gamma^*\widehat{T}M$ cuando además cumple la propiedad

$$\frac{d}{dt}\{\rho_{\mathbf{g}_t}(\hat{A}_t, \hat{B}_t)\} = \rho_{\mathbf{g}_t}(\frac{\widehat{\nabla}}{dt}\hat{A}_t, \hat{B}_t) + \rho_{\mathbf{g}_t}(\hat{A}_t, \frac{\widehat{\nabla}}{dt}\hat{B}_t).$$

Cada referencia esférica de $\widehat{T}_{\gamma(t)}M$ coincide con la clase proyectiva de una referencia lineal de $\widehat{T}_{\gamma(t)}M$ (Definición 5.2), y el grupo G^m se identifica con el subgrupo de matrices de $\widehat{O}(m+1,1)$ que preservan la orientación temporal del cono de luz en $\widehat{\mathbb{R}^m} = \mathbb{R}^{m+2}$ (Observación 5.4, pág. 87), dando lugar la equivalencia $\mathfrak{g} = \widehat{\mathfrak{o}}(m+1,1)$. Así, una curva de referencias especiales $t \mapsto q_t \in \gamma^*Q(M)$ admite ser respresentada por una curva de referencias lineales $t \mapsto (\hat{A}_0, ..., \hat{A}_{m+1})_t$, $\hat{A}_i(t) \in \widehat{\mathfrak{X}}(\gamma)$, verificando

$$\rho_{\mathbf{g}_t}(\hat{A}_i, \hat{A}_j)(t) = e^{2r} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & I_m & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = e^{2r}\, S_{m+1,1} \quad (\text{para } r \in \mathbb{R}). \tag{6.24}$$

Obsérvese que la condición (6.24) determina la referencia lineal $(\hat{A}_0, ..., \hat{A}_{m+1})_t$ salvo constante multiplicativa $r \in \mathbb{R}$.

Proposición 6.5 *La conexión de Cartan $\omega \in \Lambda^1(Q(M), \mathfrak{g})$ va ligada a una conexión vectorial $\widehat{\nabla}/dt : \widehat{\mathfrak{X}}(\gamma) \to \widehat{\mathfrak{X}}(\gamma)$, caracterizada por la condición:*

$$\frac{\widehat{\nabla}}{dt}\hat{A}_j(t) = \sum\nolimits_{i=0}^{m+1} \hat{A}_i(t)\, \omega^i_j(q'_t), \quad \forall j = 0, ..., m+1 \tag{6.25}$$

para $q_t = [\hat{A}_0, ..., \hat{A}_{m+1}]_t$, con $\hat{A}_i \in \widehat{\mathfrak{X}}(\gamma)$ verificando (6.24) : $\rho_{\mathbf{g}_t}(\hat{A}_i, \hat{A}_j) = e^{2r}\, S_{m+1,1}$, y en donde $\omega^i_j(q'_t) \in C^\infty(\gamma)$ denotan las componentes de $\omega(q'_t)$ al tomar valores en el álgebra $\mathfrak{g} = \widehat{\mathfrak{o}}(m+1,1)$.

Demostración. La fórmula (6.25) cumple las condiciones de compatibilidad:

(**a**) $\forall r \in \mathbb{R}$ constante,

$$\frac{\widehat{\nabla}}{dt}(e^r\hat{A}_j)(t) = \sum\nolimits_i (e^r\hat{A}_i)(t)\, \omega^i_j(q'_t) = e^r \sum\nolimits_i \hat{A}_i(t)\, \omega^i_j(q'_t) = e^r \frac{\widehat{\nabla}}{dt}\hat{A}_j(t)$$

(**b**) Si $\overline{q}_t = q_t \cdot g_t$ para $g_t = (g_t)^i_j \in G^m \subset \widehat{O}(m+1,1)$ entonces $\overline{q}_t = [\hat{B}_0, ..., \hat{B}_{m+1}]$ con $\hat{B}_j(t) = \hat{A}_i(t)\,(g_t)^i_j \in \widehat{\mathfrak{X}}(\gamma)$ y se cumple

$$\begin{aligned}\tfrac{\widehat{\nabla}}{dt}\hat{B}_j(t) &= \textstyle\sum \hat{B}_i(t)\,\omega^i_j(\overline{q}'_t) = \sum \hat{B}_i(t)\ \left((g_t^{-1})^i_h \omega^h_k(q'_t)(g_t)^k_j + (g_t^{-1})^i_h (g'_t)^h_j\right)\\ &= \textstyle\sum \left(\hat{A}_h(t)\,\omega^h_k(q'_t)\,(g_t)^k_j + \hat{A}_h(t)\,(g'_t)^h_j\right)\\ &= \tfrac{\widehat{\nabla}}{dt}\hat{A}_k(t)\,(g_t)^k_j + \hat{A}_h(t)\,(g'_t)^h_j.\end{aligned}$$

En consecuencia, la fórmula (6.26) del enunciado define sin ambigüedad una conexión $\widehat{\nabla}/dt : \widehat{\mathfrak{X}}(\gamma) \to \widehat{\mathfrak{X}}(\gamma)$ sobre el fibrado vectorial $\gamma^*\widehat{T}M$. ■

La conexión vectorial $\widehat{\nabla}/dt : \widehat{\mathfrak{X}}(\gamma) \to \widehat{\mathfrak{X}}(\gamma)$ ligada a la conexión de Cartan $\omega \in \Lambda^1(Q(M), \mathfrak{g})$ es compatible con la estructura métrica de Lorentz $\rho_{\mathbf{g}_t}$ que el fibrado vectorial $\gamma^*\widehat{T}M$ hereda de ∇.

Observación 6.6 *Una conexión vectorial $\widehat{\nabla}/dt : \widehat{\mathfrak{X}}(\gamma) \to \widehat{\mathfrak{X}}(\gamma)$ compatible con la estructura métrica $\rho_{\mathbf{g}_t}$ de la fibrado vectorial $\gamma^*\widehat{T}M$ sobre la curva $\gamma(t)$, va ligada a una única 1-forma $\omega \in \Lambda^1(\gamma^*Q(M), \widehat{\mathfrak{o}}(m+1,1)$, Ad_{H^m}-equivariante, verificando*

$$\frac{\widehat{\nabla}}{dt}\hat{A}_j(t) = \sum\nolimits_{i=0}^{m+1} \hat{A}_i(t)\,\omega^i_j(q'_t),\ \forall j = 0, ..., m+1$$

para toda curva de referencias especiales $t \mapsto q_t = [\hat{A}_0, ..., \hat{A}_{m+1}]_t \in Q(M)$ sobre $t \mapsto \gamma(t)$, con $\hat{A}_i(t) \in \widehat{\mathfrak{X}}(\gamma)$ tales que $\rho_{\mathbf{g}_t}(\hat{A}_i, \hat{A}_j) = e^{2r}\, S_{m+1,1}$ (6.24).

Sobre la curva $\gamma(t)$ la conexión conforme de Cartan $\gamma^*\omega \in \Lambda^1(\gamma^*Q(M), \mathfrak{g})$ adquiere de este modo la naturaleza de una conexión vectorial asociada al transporte paralelo de formas esféricas ambiente sobre $\gamma(t)$. Por coherencia con el trabajo de Cartan [9], utilizaremos la notación $d_\omega \hat{A}_j(t) = \frac{\widehat{\nabla}}{dt}\hat{A}_j(t) \in \widehat{T}_{\gamma(t)}M$, y la fórmula derivacional (6.25) viene dada por la expresión

$$d_\omega \hat{A}_j(t) = \sum\nolimits_{i=0}^{m+1} \hat{A}_i(t)\ \omega^i_j(q'_t). \tag{6.26}$$

Círculo osculador respecto a una conexión conforme

Definición 6.3 *El* parámetro afín *de la curva Γ respecto a la conexión conforme ∇ viene dado por aquellas parametrizaciones $s \mapsto \gamma(s) \in \Gamma$ que tienen asociado un campo aceleración $\frac{\nabla}{ds}\overline{\gamma}'_s \in \mathfrak{X}(\gamma)$ ortogonal a la dirección tangente de la curva. Este parámetro está determinado salvo transformaciones afines del tipo $\overline{s} = as + b$, $a, b \in \mathbb{R}$ con $a \neq 0$.*

Si $t \mapsto \gamma(t)$ es una parametrización arbitraria, el parámetro afín de la curva respecto a ∇ viene dado por aquellos cambios $t \mapsto s(t)$ que son solución de la ecuación

$$\frac{d}{dt}\{\ln s'_t\} = \frac{s''_t}{s'_t} = \frac{\mathbf{g}(\frac{\nabla}{dt}\gamma'_t, \gamma'_t)}{\mathbf{g}\,(\gamma'_t, \gamma'_t)} \quad \text{(para cualquier } \mathbf{g} \in \mathcal{C}).$$

Supongamos la curva $s \mapsto \gamma(s) \in \Gamma$ parametrizada por su parámetro afín. Para curvas suficientemente generales, las sucesivas derivadas del campo $\gamma'_s \in \mathfrak{X}(\gamma)$ respecto a la conexión ∇/ds definen campos linealmente independientes $(\frac{\nabla}{ds})^j \gamma'_s \in \mathfrak{X}(\gamma)$. Por el proceso de ortonormalización de Gram-Schmidt, se puede construir entonces una referencia móvil $b_s = (E_1, ..., E_m)_s \in CO(M)_{\gamma(s)}$ sobre la curva, determinada por las condiciones

$$\begin{cases} E_1(s) = \gamma'_s \\ span\,\{\gamma'_s, \frac{\nabla}{ds}\gamma'_s, .., (\frac{\nabla}{ds})^{j-1}\gamma'_s\} = span\,\{E_1(s), .., E_j(s)\} \quad {}_{j=1,\dots,m} \end{cases} \tag{6.27}$$

que da lugar a unas funciones de curvatura $\lambda_1(s), ..., \lambda_{m-1}(s) \in C^\infty(\gamma)$ definidas por las ecuaciones, $\forall j = 1, ..., m-1$,

$$\frac{\nabla}{ds} E_j(s) = -\lambda_{j-1}(s)\, E_{j-1}(s) + \lambda_j(s)\, E_{j+1}(s), \quad (\text{con } \lambda_0 = \lambda_m = 0).$$

Si se considera otra parametrización definiendo el parámetro afín sobre la curva, $\overline{s} \mapsto \overline{\gamma}(\overline{s}) = \gamma(a\overline{s} + b) \in \Gamma$, entonces $\overline{\gamma}(\overline{s}) = a\,\gamma'(a\overline{s} + b)$ y $\frac{\nabla}{ds}|_{\overline{s}} = a\,\frac{\nabla}{ds}|_{a\overline{s}+b}$. En tal caso la referencia conforme verificando (6.27) pasa a ser

$$(\overline{E}_1, ..., \overline{E}_m)_{\overline{s}} = (a\overline{E}_1, ..., a\overline{E}_m)_{a\overline{s}+b} \in CO(M)_{\overline{\gamma}(\overline{s})},$$

y las funciones asociadas de curvatura

$$\overline{\lambda}_j(\overline{s}) = a\,\lambda_j(a\overline{s} + b) \in C^\infty(\overline{\gamma}).$$

Se observa así que, en particular, permanecen invariantes las siguientes definiciones con un significado geométrico para la curva Γ, cuando $\lambda_1 \neq 0$, y dependen únicamente de la conexión conforme ∇:

(i) El *plano osculador* Π_x de la curva en $x \in \Gamma$, definido por

$$\Pi_{\gamma(s)} = span\{E_1(s), E_2(s)\} = span\{\gamma'_s, \tfrac{\nabla}{ds}\gamma'_s\} \subset T_{\gamma(s)}M.$$

(ii) El vector $N_x \in T_xM$, $x \in \Gamma$, definido por

$$N_{\gamma(s)} = \frac{E_2(s)}{\lambda_1(s)} \in T_{\gamma(s)}M.$$

(iii) El *círculo osculador* C_x de la curva en $x \in \Gamma$, definido como el único círculo en el plano Π_x que pasa por el origen $0 \in T_xM$, es tangente a la recta $T_x\Gamma$, y tiene su centro en el vector $N_x \in T_xM$. Si $\mathbf{g} \in \mathcal{C}$ es métrica conforme con $\mathbf{g}\,(\gamma'_s, \gamma'_s) = 1$ entonces $C_{\gamma(s)}$ está fomado los vectores $v \in \Pi_{\gamma(s)}$ que verifican la ecuación

$$\mathbf{g}\left(\frac{\nabla\gamma'/ds}{\lambda_1^2(s)} - v, \frac{\nabla\gamma'/ds}{\lambda_1^2(s)} - v\right) = \frac{1}{\lambda_1^2(s)^2}. \tag{6.28}$$

Cuando $\lambda_1(x) = 0$, el círculo osculador C_x se identifica con la recta vectorial $T_x\Gamma$ en T_xM (con centro en $N_x = \infty_x$ el punto infinito).

Observación 6.7 *En el caso en que la conexión ∇ es además la conexión de Levi-Civita de una métrica conforme $\mathbf{g} \in \mathcal{C}$ las definiciones que aquí hemos dado coinciden con las nociones bien conocidas de curvaturas (véase sección* ***6.1****), y de plano y círculo osculador de la curva Γ en el ambiente Riemanniano $(M, \mathbf{g})$.*

Proposición 6.6 *El círculo osculador C_x en T_xM a una curva Γ, para $x \in \Gamma$, respecto a la conexión conforme ∇ en M, se identifica con el círculo tangente $\bar{C}_x$ en $\overline{\overline{T}}_{\gamma(t)}M$ respecto a la conexión normal de Cartan $\omega \in \Lambda^1(Q(M), \mathfrak{g})$ asociada a ∇, a través de la inclusión natural*

$$\begin{array}{rcl} \iota : T_{\gamma(t)}M & \hookrightarrow & \overline{\overline{T}}_{\gamma(t)}M \\ C_{\gamma(t)} & \hookrightarrow & \bar{C}_{\gamma(t)} = \iota(C_{\gamma(t)}). \end{array}$$

Demostración. Sea $t \mapsto \gamma(t)$ una parametrización definiendo el parámetro afín de Γ. Recuérdese (Observación 6.2) que si $t \mapsto q_t = [\hat{A}_0, \hat{A}_1, ..., \hat{A}_m, \hat{A}_{m+1}]_t$ es una curva de referencias normalizadas sobre $t \mapsto \gamma(t)$, el círculo tangente a la curva es

$$\bar{C}_{\gamma(t)} = q_t(\mathbb{S}^1) = \mathbb{P}(span\{\hat{A}_0, \hat{A}_1, \hat{A}_{m+1}\}) \cap \overline{\overline{T}}_{\gamma(t)}M.$$

$\bar{C}_{\gamma(t)}$ es el único círculo en $\overline{\overline{T}}_{\gamma(t)}M$ tangente a la recta $T_{\gamma(t)}\Gamma$ en el punto origen $O_{\gamma(t)}$ y que pasa también por el punto $q_t(\infty)$, así que basta determinar $q_t(\infty) \in \overline{\overline{T}}_{\gamma(t)}M$ para conocer $\bar{C}_{\gamma(t)}$. Sabemos del capítulo anterior (véase (5.25) pág. 103) que $q_t \in Q(M)$ se descompone de manera única en

$$q_t = b_t \cdot \exp \eta_t$$

siendo $b_t = (q_t)_* \in CO(M)$ la referencia conforme lineal identificada con la diferencial en el origen de q_t, y $\eta_t \in \mathbb{R}^{m*}$ relacionado con $q_t(\infty)$ a través de

$$q_t(\infty) = \begin{cases} \iota \circ b_t \left(\frac{2\eta_t^\intercal}{\|\eta_t\|^2} \right) & \text{si } \eta_t \neq 0 \\ \infty_{\gamma(t)} & \text{si } \eta_t = 0 \end{cases} \tag{6.29}$$

Determinemos $\eta_t = (\eta_1(t), ..., \eta_1(t)) \in \mathbb{R}^{m*}$ y particularmente $b_t(\eta_t^\intercal)$.

1) Dado que $t \mapsto q_t \in Q(M)_{\gamma(t)}$ está adaptada a la curva $\gamma(t)$, la referencia conforme $b_t = (q_t)_* \in CO(M)_{\gamma(t)}$ está formada por vectores $(v_1, v_2, ..., v_m)_t$ de $T_{\gamma(t)}M$ tales que $\gamma'(t) = f_t\, v_1(t)$ con $f_t = \omega^1(q_t') \neq 0$, $\forall t$.

Por la condición de normalización (6.20) es $\omega_j^1(q_t') = 0$, $2 \leq j \leq m$, y teniendo en cuenta las fórmulas (6.19) asociadas a la relación $q_t = b_t \cdot \exp \eta_t$, se tiene:

$$0 = \omega_j^1\,(q_t') = \omega_j^1\,(b_t') + f_t\eta_j \;\Leftrightarrow\; \eta_j(t) = -f_t^{-1}\omega_j^1(b_t'),\;\; 2 \leq j \tag{6.30}$$

$$\omega_0^0\,(q_t') = \omega_0^0\,(b_t') - \eta_1\;\omega^1\,(b_t') \;\Leftrightarrow\; \eta_1(t) = f_t^{-1}\left(\omega_0^0\,(b_t') - \omega_0^0\,(q_t')\right)$$

2) La componente ω_0 de la conexión de Cartan $\omega \in \Lambda^1(Q(M), \mathfrak{g})$ actuando sobre $b_t \subset CO(M)$ coincide por definición con la forma horizontal μ de la conexión conforme ∇, es decir,

$$\tfrac{\nabla}{dt} v_j(t) = \textstyle\sum_i \mu^i_j(t)\, v_i(t) = \sum_{i\neq j} \omega^i_j\,(b'_t)\; v_i(t) - \omega^0_0(b'_t)\, v_j(t)$$

$$\tfrac{\nabla}{dt}\gamma' = \tfrac{\nabla}{dt}\left(f_t\, v_1(t)\right) = \left(f'_t - f_t\, \omega^0_0(b'_t)\right)\; v_1(t) - f_t \textstyle\sum_{i\geq 2} \omega^1_j(b'_t)\, v_j(t)$$

El hecho de que la curva $t \mapsto \gamma(t)$ esté parametrizada por su parámetro afín implica que $\frac{\nabla}{dt}\gamma'(t) \in \gamma'(t)^{\perp} = span\{v_2, ..., v_m\}_t$, y concluimos

$$\frac{\nabla}{dt}\gamma'(t) = -f_t \sum\nolimits_{i\geq 2} \omega^1_j(b'_t)\, v_j(t) \quad \text{y} \quad \omega^0_0(b'_t) = -f_t^{-1} f'_t.$$

Las igualdades anteriores (6.30), dan lugar entonces a las siguientes ecuaciones

$$\eta_1(t) = f_t^{-1}\left(\omega^0_0\,(b'_t) - \omega^0_0\,(q'_t)\right) = -f_t^{-2}\left(f'_t - f_t\, \omega^0_0\,(q'_t)\right)$$

$$f_t^{-2}\tfrac{\nabla}{dt}\gamma'(t) = -\textstyle\sum_{i\geq 2}\left(f_t^{-1}\omega^1_j(b'_t)\right)\, v_j(t) = \sum_{j\geq 2} \eta_j(t)\, v_j(t)$$

Con la notación $r_t = f'_t - f_t\, \omega^0_0\,(q'_t)$ concluimos que

$$b_t(\eta_t^{\intercal}) = \textstyle\sum_{j=1}^{m} \eta_j(t)\, v_j(t) = f_t^{-2}\left(r(t)\, \gamma'(t) + \tfrac{\nabla}{dt}\gamma'(t)\right) \in T_{\gamma(t)}M$$

3) Veamos que $b_t(\eta_t^{\intercal})$ está en el círculo osculador $C_{\gamma(t)}$.

- $\frac{\nabla}{dt}\gamma'(t) \neq 0 \in T_{\gamma(t)}M \Leftrightarrow (\eta_2, ..., \eta_m)(t) \neq 0$:

  Por (6.29) es $\bar{A}_{m+1}(t) = \iota(v_t) \in \overline{T}_{\gamma(t)}M$ para $v_t \in T_{\gamma(t)}M$ el vector tangente definido por

  $$v_t = b_t\left(\frac{2\eta_t^{\intercal}}{\|\eta_t\|^2}\right) = \frac{2r_t\gamma'_t + 2\frac{\nabla}{dt}\gamma'}{\mathbf{g}\left(r_t\gamma'_t + \frac{\nabla}{dt}\gamma', r_t\gamma'_t + \frac{\nabla}{dt}\gamma'\right)} = \frac{2r_t\, \gamma'_t + 2\frac{\nabla}{dt}\gamma'}{r_t^2 + \mathbf{g}\left(\frac{\nabla}{dt}\gamma', \frac{\nabla}{dt}\gamma'\right)} \in T_{\gamma(t)}M$$

  para $\mathbf{g} \in \mathcal{C}$ métrica conforme con $\mathbf{g}(\gamma'(t), \gamma'(t)) = 1$ ($\Leftrightarrow \mathbf{g}(v_i, v_j) = f_t^{-2}$). Obsérvese que $\lambda_1(t) = \mathbf{g}(\frac{\nabla}{dt}\gamma', \frac{\nabla}{dt}\gamma')^{\frac{1}{2}}$ define la primera curvatura de γ respecto de la conexión conforme ∇, y se comprueba entonces que el vector $v_t \in span\{\gamma'_t, \frac{\nabla}{dt}\gamma'\}$ verifica la ecuación

  $$\mathbf{g}\left(\frac{\nabla\gamma'/dt}{\lambda_1(t)^2} - v_t, \frac{\nabla\gamma'/dt}{\lambda_1(t)^2} - v_t\right) = \frac{1}{\lambda_1(t)^2}$$

  correspondiente al *círculo osculador* $C_{\gamma(t)}$ de la curva en $T_{\gamma(t)}M$ respecto a la conexión ∇ (véase 6.28)). Se concluye entonces que al ser ambos círculos tangentes a la curva en el origen que pasan por $\iota(v_t)$, el círculo tangente en $\overline{T}_{\gamma(t)}M$ coincide con el círculo osculador en $T_{\gamma(t)}M$, mediante

  $$\bar{C}_{\gamma(t)} = \iota(C_{\gamma(t)}).$$

- $\frac{\nabla}{dt}\gamma' = 0 \in T_{\gamma(t)}M \Leftrightarrow (\eta_2, ..., \eta_m)(t) = 0$

  En este caso el círculo osculador de la curva respecto a ∇ es la recta vectorial $T_{\gamma(t)}\Gamma$. Por (6.29), se observa que el elemento $\bar{A}_{m+1} \in \overline{T}_{\gamma(t)}M$ es

$$\bar{A}_{m+1} = \begin{cases} \iota(2r_t^{-1}\gamma_t') & \text{si } r_t \neq 0 \\ \infty_{\gamma(t)} & \text{si } r_t = 0 \end{cases}$$

  de modo que es un punto contenido en $\iota(T_{\gamma(t)}\Gamma) \cup \{\infty_{\gamma(t)}\}$, y por el mismo razonamiento anterior se concluye que el círculo tangente corresponde nuevamente a la noción del círculo osculador, al ser $\bar{C}_{\gamma(t)} = \iota(T_{\gamma(t)}\Gamma) \cup \{\infty_{\gamma(t)}\}$.

■

6.3.4 Conexión conforme inducida en la curva

Sea Γ una curva en la variedad conforme M y sea $i^{\omega}_{x,\Gamma} : \overline{T}_x\Gamma \hookrightarrow \overline{T}_xM$ la inclusión inherente a la geometría normal de Cartan $(Q(M), \omega)$ (véase (6.23) pág. 140). La familia de referencias adaptadas y normalizadas a la curva define una reducción $Q^{\Gamma}(M, \omega)$ del fibrado $\Gamma^*Q(M)$ (véase (6.21), pág. 139), y tal que la acción de la conexión $\Gamma^*\omega \in \Lambda^1(\gamma^*Q(M), \mathfrak{g})$ tiene una expresión matricial de la forma

$$\begin{pmatrix} \omega_0^0 & \boxed{\begin{matrix} \omega_1^0 & \omega_2^0 & \dots & \omega_m^0 \end{matrix}} & 0 \\ \boxed{\begin{matrix} \omega^1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & \omega_j^i & \\ 0 & & & \end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix} -\omega_1^0 \\ -\omega_2^0 \\ \vdots \\ -\omega_m^0 \end{matrix}} \\ 0 & \boxed{\begin{matrix} -\omega^1 & 0 & \dots & 0 \end{matrix}} & -\omega_0^0 \end{pmatrix}$$

Sea $t \mapsto q_t \in Q(M)$ una curva de referencias normalizadas sobre $t \mapsto \gamma(t)$. En el apartado anterior hemos descrito un procedimiento por el cual es posible tratar las referencias esféricas q_t a través de formas esféricas $\hat{A}_i(t) \in \widehat{T}_{\gamma(t)}M$ tales que $q_t = [\hat{A}_0, \hat{A}_1, ..., \hat{A}_{m+1}]_t$ y que verifiquen las ecuaciones (6.24). La conexión de Cartan puede interpretarse entonces como una conexión de tipo vectorial ligada a las fórmulas derivacionales $d_{\omega}\hat{A}_j = \sum \omega_j^i(q_t')\,\hat{A}_i$ (6.26), pág. 142. En particular, se tienen las siguientes ecuaciones para $t \mapsto q_t = [\hat{A}_0, \hat{A}_1, ..., \hat{A}_{m+1}]_t$:

- $d_{\omega}\hat{A}_0 = \omega_0^0(q_t')\,\hat{A}_0 + \omega^1(q_t')\,\hat{A}_1$ (condición (6.16) de adaptación);
- $d_{\omega}\hat{A}_1 = \omega_1^0(q_t')\,\hat{A}_0 - \omega^1(q_t')\,\hat{A}_{m+1}$ (condición (6.20) de normalización);
- $d_{\omega}\hat{A}_{m+1} = -\omega_1^0(q_t')\,\hat{A}_1 - \omega_0^0(q_t')\,\hat{A}_{m+1} - \sum_{i\geq 2}\omega_i^0(q_t')\,\hat{A}_i$.

Recuérdese de la Observación 6.2 que el círculo tangente $\bar{C}_{\gamma(t)} \subset \overline{T}_{\gamma(t)}M$ va ligado al subespacio $\hat{\Pi}_{\gamma(t)} = span\{\hat{A}_0, \hat{A}_1, \hat{A}_{m+1}\}_t$ en $\widehat{T}_{\gamma(t)}M$. Por construcción, $\hat{\Pi}_{\gamma(t)}$ contiene las direcciones en que se desplazan $\hat{A}_0$ y $\hat{A}_1$. O lo que es lo mismo, puede decirse que el desplazamiento infinitesimal de $\hat{A}_0$ (indicando el origen) se mantiene en $\hat{\Pi}_{\gamma(t)}$ hasta su segundo orden. La condición especial de que se verifique además

$$\textstyle\sum_{i\geq 2}\omega_i^0(q_t')\hat{A}_i = 0 \;\Leftrightarrow\; d_\omega \hat{A}_{m+1}(t) \in span\{\hat{A}_0, \hat{A}_1, \hat{A}_{m+1}\}_t \subset \widehat{T}_{\gamma(t)}M \tag{6.31}$$

corresponde a una propiedad geométrica de la curva. En tal caso el desplazamiento sobre la curva deja invariante el espacio $\hat{\Pi}_{\gamma(t)}$, y en particular el círculo tangente $\bar{C}_{\gamma(t)}$. En secciones posteriores veremos que esta propiedad distingue a una familia especial de curvas en M, llamadas *círculos conformes*.

En el caso general, no podemos alcanzar la condición (6.31). Sin embargo, a través de la proyección ortogonal $pr : \widehat{T}_{\gamma(t)}M \to \hat{\Pi}_{\gamma(t)}$ se puede forzar la invarianza de $\hat{\Pi}_{\gamma(t)}$ definiendo una nueva ley de derivación $d_\omega^\Gamma = pr \circ d_\omega$ que actúa del siguiente modo:

$$\begin{cases} d_\omega^\Gamma \hat{A}_0 = \omega_0^0(q_t')\,\hat{A}_0 + \omega^1(q_t')\,\hat{A}_1 \\ d_\omega^\Gamma \hat{A}_1 = \omega_1^0(q_t')\,\hat{A}_0 - \omega^1(q_t')\,\hat{A}_{m+1} \\ d_\omega^\Gamma \hat{A}_{m+1} = -\omega_1^0(q_t')\,\hat{A}_1 - \omega_0^0(q_t')\,\hat{A}_{m+1} \end{cases}$$

Obsérvese que d_ω^Γ da lugar a un *desplazamiento inducido* del círculo tangente $\bar{C}_{\gamma(t)}$, que se identifica con la esfera tangente a la curva $\overline{T}_{\gamma(t)}\Gamma$.

Proposición 6.7 *La conexión normal de Cartan $\omega = (\omega_j^i) \in \Lambda^1(Q(M), \hat{\mathfrak{o}}(m+1,1))$ define sobre la curva Γ una única conexión de Cartan $\omega^\Gamma \in \Lambda^1(Q(\Gamma), \hat{\mathfrak{o}}(2,1))$ única con la propiedad:*

"Si $t \mapsto q_t \in Q(M)$ es una curva de referencias ω-normalizadas sobre $t \mapsto \gamma(t) \in \Gamma$, y $t \mapsto q_t^\Gamma \in Q(\Gamma)$ es la curva de referencias inducidas, entonces,

$$\omega^\Gamma\left((q_t^\Gamma)'\right) = \begin{pmatrix} \omega_0^0 & \omega_1^0 & 0 \\ \omega^1 & 0 & -\omega_1^0 \\ 0 & -\omega^1 & -\omega_0^0 \end{pmatrix}(q_t') \in \hat{\mathfrak{o}}(2,1) = \mathbb{R}\oplus\mathbb{R}\oplus\mathbb{R}^*.\text{''}$$

Demostración. Obsérvese en primer lugar que las curvas de referencias normalizadas $t \mapsto q_t$ y $t \mapsto \bar{q}_t \cdot h_t$ para $h_t \in CO(m\text{-}1) \ltimes \mathbb{R}^*$ de la forma (6.21), inducen curvas de referencias en $Q(\Gamma)$ que se relacionan a través de $\bar{q}_t^\Gamma = q_t^\Gamma \cdot h_t^1$ para

$$h_t^1 = \begin{pmatrix} r^{-1} & \eta_1 & -r\frac{\eta_1^2}{2} \\ 0 & 1 & -r\eta_1 \\ 0 & 0 & r \end{pmatrix}(t) \in \mathbb{R}^+ \ltimes \mathbb{R}^{1*}$$

(véase (6.13), pág. 135). Las componentes de la conexión $\omega \in \Lambda^1(Q(M), \mathfrak{g})$ implicadas en la definición de ω^Γ mantienen entonces la siguiente relación: (véase (6.22), pág. 139)

$$\begin{cases} \omega_0^0(\overline{q}_t') = \omega_0^0(q_t') - (\eta_1)_t\, \omega^1(q_t') - r_t^{-1} r_t' \\ \omega^1(\overline{q}_t') = r_t^{-1} \omega^1(q_t') \\ \omega_1^0(\overline{q}_t') = r_t \left(\omega_1^0(q_t') + (\eta_1)_t\, \omega_0^0(q_t') - \frac{(\eta_1)_t^2}{2} \omega^1(q_t') + (\eta_1)_t' \right) \end{cases}$$

que equivale a la relación: (véase (6.19) para $m = 1$)

$$\omega^\Gamma\left((\overline{q}_t^\Gamma)' \right) = Ad_{(h_t^1)^{-1}} \omega^\Gamma\left((q_t^\Gamma)' \right) + (h_t^1)^{-1} (h_t^1)'.$$

Se obtiene así la coherencia necesaria para que la condición del enunciado defina sin ambigüedad una 1-forma $\omega^\Gamma \in \Lambda^1(Q(\Gamma), \widehat{\mathfrak{o}}(2,1))$. Se obtiene también que dicha 1-forma verifica las propiedades de conexión de Cartan sobre $Q(\Gamma)$. ■

Definición 6.4 *La conexión* $\omega^\Gamma \in \Lambda^1(Q(\Gamma), \widehat{\mathfrak{o}}(2,1))$ *de la Proposición anterior recibe el nombre de* conexión de Cartan inducida *sobre la curva* Γ *por la conexión normal de Cartan conforme* $\omega \in \Lambda^1(Q(M), \widehat{\mathfrak{o}}(m+1,1))$.

6.4 Invariantes sobre curvas en un ambiente conforme

En la sección anterior se ha demostrado que fijada sobre la variedad conforme M una conexión lineal y conforme ∇, la geometría normal de Cartan asociada $(Q(M), \omega)$ define para cada curva Γ sumergida en M los siguientes elementos:

(i) una inclusión normalizada de la esfera tangente a la una curva $\overline{T}_x\Gamma$ en la esfera tangente del ambiente $\overline{T}_x M$,

$$i_{x,\Gamma}^\omega : \overline{T}_x\Gamma_x \hookrightarrow \overline{T}_x M, \quad (\text{ véase } (6.23), \text{ pág. } 6.23))$$

que identifica $\overline{T}_x\Gamma$ con el círculo *osculador* a la curva $\overline{C}_x \subset \overline{T}_x M$.

(ii) una conexión de Cartan inducida $\omega^\Gamma \in \Lambda^1(Q(\Gamma), \widehat{\mathfrak{o}}(2,1))$, que permite transportar el fibrado tangente esférico $\overline{T}\Gamma \to \Gamma$ a lo largo de la curva.

La aleatoriedad en la elección de la conexión conforme se traduce en una falta de canonicidad para la definición del círculo osculador y de la conexión inducida sobre la curva Γ de M. No obstante, las distintas conexiones normales de Cartan ω resultan equivalentes a través de automorfismos del fibrado esférico tangente $\overline{T}M \to M$ y se tiene un control sobre la alteración sufrida por cambios de conexión. Esto permite la definición sobre la curva Γ de invariantes conformes que, pese a estar definidos en términos de ω^Γ, dependen exclusivamente de la estructura conforme del ambiente M.

6.4.1 Cambio de conexión conforme en $(Q(M), \omega)$

Por un resultado anterior (Corolario 5.2), sabemos que las geometrías de Cartan asociadas a dos conexiones lineales y conformes ∇ y $\overline{\nabla}$, resultan equivalentes a través de un automorfismo del fibrado $Q(M)$. En particular, si el tensor diferencia entre las conexiones viene dado por $\Phi_\alpha = \overline{\nabla} - \nabla \in \mathfrak{T}_2^0(M)$ para $\alpha \in \Lambda^1(M)$, entonces,

$$\overline{\omega} = (R_{\exp \eta_\alpha})^* \omega \in \Lambda^1(Q(M), \mathfrak{g}) \tag{6.32}$$

para el automorfismo $R_{\exp \eta_\alpha} : Q(M) \to Q(M)$ tal que $R_{\exp \eta_\alpha}(q) = q \cdot \exp(\alpha \circ q_*)$ $(\alpha \circ q_* \in \mathbb{R}^{m*})$.

Sea $t \mapsto \gamma(t) \in \Gamma$ una curva parametrizada en la variedad conforme M.

(1) La relación (6.32) implica que la curva $q_t \in Q(M)_{\gamma(t)}$ de referencias adaptadas sobre $\gamma(t)$ está normalizada respecto a la conexión de Cartan $\omega \in \Lambda^1(Q(M), \mathfrak{g})$ si y sólo si la curva de referencias

$$\bar{q}_t = R^{-1}_{\exp \eta_\alpha}(q_t) = q_t \cdot \exp(-\alpha_{\gamma(t)} \circ q_{t*}) \tag{6.33}$$

está normalizada respecto a la conexión de Cartan $\overline{\omega} \in \Lambda^1(Q(M), \mathfrak{g})$. Además, se tiene

$$\omega(q_t') = \overline{\omega}(\bar{q}_t'), \quad \forall t. \tag{6.34}$$

El cambio de conexión produce así una *traslación* (6.33) en la familia de referencias normalizadas, que va ligada a un cambio en el círculo osculador (o círculo tangente normalizado) de la curva respecto a la conexión.

(2) El automorfismo $R_{\exp \eta_\alpha} : Q(M) \to Q(M)$, del fibrado de referencias especiales, induce un automorfismo asociado en el fibrado tangente esférico $\tau_\alpha : \overline{T}M \to \overline{T}M$,

$$(\tau_\alpha)_x \circ q = R_{\exp \eta_\alpha}(q) = q \circ \exp \eta_\alpha(q), \forall q \in Q(M)_x,$$

que consiste en una *traslación* del infinito ∞_x en cada $\overline{T}_x M$ (véase (5.45), pág. 119). Si $\bar{C}^\omega_{\gamma(t)}$ y $\bar{C}^{\overline{\omega}}_{\gamma(t)}$ denotan los círculos tangentes a la curva en $\overline{T}_{\gamma(t)}M$, respectivamente normalizados para las conexiones ω y $\overline{\omega}$, entonces,

$$\bar{C}^\omega_{\gamma(t)} = q_t(\mathbb{S}^1) = (R_{\exp \eta_\alpha}(\bar{q}_t))(\mathbb{S}^1) = (\tau_\alpha)_{\gamma(t)} \circ \bar{q}_t(\mathbb{S}^1) = (\tau_\alpha)_{\gamma(t)} \left(\bar{C}^{\overline{\omega}}_{\gamma(t)} \right)$$

al tomar q_t referencia normalizada sobre $\gamma(t)$ respecto a la conexión ω.

6.4.2 Parámetro proyectivo de la curva

Sea $(Q(M),\omega)$ la geometría normal de Cartan asociada a una conexión lineal y conforme ∇ de M. Dada la curva orientada Γ en M se tiene una conexión inducida $\omega^\Gamma \in (Q(\Gamma),\widehat{\mathfrak{o}}(2,1))$ heredada del ambiente (véase sección **6.3.4**).

El par $(Q(\Gamma),\omega^\Gamma)$ define una geometría de Cartan que por la unidimensionalidad de Γ resulta ser plana; esto significa que localmente es equivalente a la geometría de Klein (G^1,H^1) que la modeliza. La curva Γ comparte así propiedades geométricas con la recta de Möbius $\mathbb{S}^1 = G^1/H^1$, es decir, con el espacio proyectivo $\mathbb{P}^1$ (véase **5.1.5**). En particular Γ hereda una *razón doble*, que permite distinguir entre sus parametrizaciones una familia preferente, invariante por homografías, que define su *parámetro proyectivo*. Veremos además que la definición de este parámetro no depende de la conexión normal de Cartan ω tomada, y constituye por tanto un invariante ligado exclusivamente a la estructura conforme.

En base a la equivalencia entre la estructura proyectiva y de Möbius en dimensión $m=1$ (detallada en la sección **5.1.6)**, el fibrado tangente esférico sobre la curva Γ tiene una estructura natural de recta proyectiva en cada $\overline{T}_x\Gamma$, $x\in\Gamma$. Esto permite definir para cuádruplas $(\bar{A}_1,\bar{A}_2,\bar{A}_3,\bar{A}_4)$ de puntos distintos en $\overline{T}_x\Gamma$ una *razón doble* que denotamos por

$$[\bar{A}_1 : \bar{A}_2 : \bar{A}_3 : \bar{A}_4]_{\overline{T}_x\Gamma} \in \mathbb{P}^1$$

(véase Definición 5.5, pág. 97).

A través de la conexión de Cartan ω^Γ, la parametrización $t\mapsto\gamma(t)\in\Gamma$ tiene asociada una curva desarrollo $t\mapsto c(t)$ en la esfera tangente $\overline{T}_{x_0}\Gamma$, para $x_0=\gamma(t_0)\in\Gamma$. Para otro punto $\overline{x}_0=\gamma(\overline{t}_0)\in\Gamma$ el desarrollo de $t\mapsto\gamma(t)$ en la esfera $\overline{T}_{\overline{x}_0}\Gamma$ es la curva

$$t\mapsto \overline{c}(t) = |\ |_{\gamma,t_0,\overline{t}_0}\circ c(t)\in \overline{T}_{\overline{x}_0}\Gamma,$$

siendo $|\ |_{\gamma,t_0,\overline{t}_0} : \overline{T}_{x_0}\Gamma \to \overline{T}_{\overline{x}_0}\Gamma$ la equivalencia dada por el transporte ω^Γ-paralelo sobre $\gamma(t)$, que respeta la estructura de Möbius (proyectiva) del tangente esférico y por tanto su razón doble. Tiene sentido entonces la siguiente definición.

Definición 6.5 *Una parametrización $t\mapsto\gamma(t)\in\Gamma$* define el parámetro proyectivo *de Γ cuando su desarrollo es una curva $t\mapsto c(t)\subset\overline{T}_x\Gamma$ que preserva la razón doble*

$$[t_1 : t_2 : t_3 : t_4] = [c(t_1) : c(t_2) : c(t_3) : c(t_4)]_{\overline{T}_x\Gamma}$$

para cuádruplas de puntos $t_i\in I\subset\mathbb{R}^1\subset\mathbb{P}^1$.

Veremos más adelante cómo es posible alcanzar el parámetro proyectivo a partir de una parametrización arbitraria de la curva Γ.

Al tomar sobre la curva $\gamma(t)$ una elección de referencias especiales $t \mapsto q_t \in Q(\Gamma)$, sabemos (Lema 5.2) que el desarrollo $t \mapsto c(t) \in \overline{T}_{x_0}\Gamma$ viene dado por

$$c(t) = q_{t_0} \circ g_t(O) \in \overline{T}_{x_0}\Gamma,$$

para $t \mapsto g_t \in G^1$ solución de la ecuación diferencial $g_t^{-1}g_t' = \omega^\Gamma(q_t')$ con valor inicial $g_{t_0} = e$. Así, a través de la referencia especial $q_{t_0} : \mathbb{S}^1 \to \overline{T}_{x_0}\Gamma$, el desarrollo de $\gamma(t)$ en $\overline{T}_{x_0}\Gamma$ resulta equivalente a una curva $C = q_{t_0}^{-1} \circ c$ en $\mathbb{S}^1$, tal que

$$C : I \ni t \longmapsto C(t) = g_t(O) \in \mathbb{S}^1 \equiv \mathbb{P}^1 \tag{6.35}$$

Lema 6.1 *Una parametrización $t \mapsto \gamma(t) \in \Gamma$ define el parámetro proyectivo de Γ cuando la curva $C(t) \subset \mathbb{S}^1 \equiv \mathbb{P}^1$ de (6.35) tiene la expresión*

$$t \longmapsto C(t) = [a + bt : c + dt] \in \mathbb{P}^1,, \; ad - bc = 1.$$

Demostración. Basta observar que al ser $q_{t_0} : \mathbb{S}^1 \to \overline{T}_{x_0}\Gamma$ referencia especial para $\overline{T}_{x_0}\Gamma$ preserva la estructura de Möbius y así la razón doble asociada. Por lo tanto, $\gamma(t)$ define el parámetro proyectivo únicamente cuando

$$\mathbb{R}^1 \supset I \ni t \longmapsto C(t) = q_{t_0}^{-1} \circ c(t) \in \mathbb{S}^1 \equiv \mathbb{P}^1$$

preserva la razón doble, es decir, únicamente cuando es (restricción de) una homografía de $\mathbb{P}^1$: $t \mapsto [a + bt : c + dt]$ para $ad - bc = 1$. ■

En conclusión, el ambiente normal y conforme $(Q(M), \omega)$ distingue un *paramétro proyectivo* τ sobre cada curva $\Gamma \subset M$, definido por una familia de parametrizaciones equivalentes por homografías de $\mathbb{P}^1$

$$\tau = \left\{ t \mapsto \gamma\left(\tfrac{at+b}{ct+d}\right) \in \Gamma : \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in SL(2, \mathbb{R}) \right\} .$$

Elección preferente de referencias sobre la curva: derivada de Schwarz

Sobre cada parametrización $t \mapsto \gamma(t) \in \Gamma$ de la curva, existe una elección preferente de referencias $q_t \subset Q(\Gamma)$ que simplifican la expresión del transporte paralelo definido por la geometría de Cartan inducida $(Q(\Gamma), \omega^\Gamma)$. En particular, permite evaluar la proximidad de la parametrización $\gamma(t)$ al parámetro proyectivo de la curva, mediante la derivada de Schwarz.

Un cambio de referencias especiales en $Q(\Gamma)$ sobre la parametrización $t \mapsto \gamma(t)$ de la curva Γ, viene dado por $\overline{q}_t = q_t \cdot h_t$ siendo

$$h_t = \begin{pmatrix} r^{-1} & \eta & -r\frac{\eta^2}{2} \\ 0 & 1 & -r\eta^{\intercal} \\ 0 & 0 & r \end{pmatrix}(t) \in H^1 \tag{6.36}$$

y la conexión de Cartan $\omega^\Gamma \in \Lambda^1(Q(\Gamma), \mathbb{R} \oplus \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}^*)$ verifica el siguiente sistema de ecuaciones para la relación entre $\omega^\Gamma(q_t') = (\omega^1, -\omega_0^0, \omega_1^0)_t$ y $\omega^\Gamma(\overline{q}_t') = (\overline{\omega}^1, -\overline{\omega}_0^0, \overline{\omega}_1^0)_t$

$$\omega^\Gamma(\overline{q}_t') = Ad_{h_t^{-1}}\omega^\Gamma(q_t') + h_t^{-1}h_t' \Leftrightarrow \begin{cases} \overline{\omega}_0^0 = \omega_0^0 - \eta_t\,\omega^1 - r_t^{-1}r_t' \\ \overline{\omega}^1 = r_t^{-1}\omega^1 \\ \overline{\omega}_1^0 = r_t\left(\omega_1^0 + \eta_t\,\omega_0^0 - \frac{\eta_t^2}{2}\omega^1 + \eta_t'\right) \end{cases} \tag{6.37}$$

(véase el sistema (6.19), pág. 138, para $m = 1$).

Dado que la componente ω^1 no se anula nunca ($\omega^1(q_t') = (q_t)_*^{-1}(\gamma_t') \neq 0$), se pueden tomar sobre la curva parametrizada $t \mapsto \gamma(t)$ curvas de referencias especiales $t \mapsto q_t \in Q(\Gamma)$ verificando

$$\omega^1(q_t') = 1, \quad \forall t.$$

Geométricamente, esta condición equivale a que la referencia lineal (y conforme) asociada $(q_t)_*$ de $T_{\gamma(t)}\Gamma$, es la formada por el vector $v_1 = \gamma'(t)$ velocidad de la parametrización.

Proposición 6.8 *Sobre cada parametrizada $t \mapsto \gamma(t)$ de la curva Γ existe una única curva de referencias especiales $t \mapsto \overline{q}_t \in Q(\Gamma)$, verificando simultáneamente las condiciones: $\omega^1(\overline{q}_t') = 1$ y $\omega_0^0(q_t') = 0$. Existe entonces una función $f_t \in C^\infty(\gamma)$, característica de la parametrización $\gamma(t)$, tal que*

$$\omega^\Gamma(\overline{q}_t') = \begin{pmatrix} 0 & f_t & 0 \\ 1 & 0 & -f_t \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{g}. \tag{6.38}$$

Demostración. Sea $t \mapsto q_t \in Q(\Gamma)$ una curva de referencias especiales sobre $\gamma(t)$ cumpliendo la condición $\omega^1(q_t') = 1$. A la vista del sistema de ecuaciones (6.37), una curva de referencias $t \mapsto \overline{q}_t = q_t \cdot h_t$ cumple las condiciones del enunciado cuando $h_t = (6.36) \in H^1$ es tal que:

$$1 = \omega^1(\overline{q}_t') = r_t^{-1}\omega^1(q_t') \Leftrightarrow r_t = 1$$

$$0 = \omega_0^0(\overline{q}_t') = \omega_0^0(q_t') - \eta_t \Leftrightarrow \eta_t = \omega_0^0(q_t').$$

Queda así demostrada la existencia y unicidad de la referencia $t \mapsto \overline{q}_t$, y la canonicidad de la definición de la función $f_t = \omega_1^0(\overline{q}_t')$ asociada a la parametrización $\gamma(t)$. ■

Recuérdese que el desarrollo de la curva $\gamma(t)$ en la esfera tangente $T_{\gamma(t_0)}\Gamma$ viene dado por $C_t = g_t(O) \subset \mathbb{S}^1$ (6.35), para $g_t \subset G^1$ integrando la ecuación $g_t^{-1}g_t' = \omega^\Gamma(q_t')$, $g_{t_0} = e$. Dado que $C_{t_0} = O \in \iota(\mathbb{R}^1)$ abierto de $\mathbb{S}^1$, para t cercanos al instante t_0 se tiene que

$$C_t = \iota(V_t), \quad \text{para } V_t \in \mathbb{R}^1$$

y existe una curva $h_t \subset H^1$, única, tal que $g_t = \exp V_t \circ h_t \in G^1$.

La ecuación diferencial $\omega^\Gamma(q_t') = g_t^{-1}g_t'$ adquiere entonces la expresión

$$\omega^\Gamma(q_t') = h_t^{-1}h_t' + Ad_{h_t^{-1}}(V_t'), \qquad (h_{t_0} = e \in H^1,\, V_{t_0} = 0 \in \mathbb{R}^1)$$

Al desarrollar esta igualdad matricial para $\omega^\Gamma(q_t')$ =(6.38) y $h_t =$ (6.36), se obtiene el sistema de ecuaciones diferenciables

$$\left\{\begin{array}{l} 1 = r_t^{-1}V_t' \\ 0 = r_t'r_t^{-1} + \eta_t V_t' \\ f_t = r_t\eta_t' - \frac{1}{2}\eta_t^2 r_t V_t' \end{array}\right. \quad \text{con} \quad \left\{\begin{array}{l} r_{t_0} = 1 \in \mathbb{R}^+ \\ \eta_{t_0} = 0 \in \mathbb{R}^* \\ V_{t_0} = 0 \in \mathbb{R}^1 \end{array}\right.$$

que resulta equivalente al siguiente sistema

$$\left\{\begin{array}{l} r_t = V_t' \\ \eta_t = -\left(V_t'\right)^{-2} V_t'' \\ f_t = -\left(V_t'\right)^{-1} V_t''' + \frac{3}{2}\left(V_t'\right)^{-2}\left(V_t''\right)^2 \end{array}\right.$$

Se observa entonces que la función $f_t \in C^\infty(\gamma)$ se relaciona con la curva desarrollo $C_t = \iota(V_t)$ a través de la ecuación

$$f_t = -\mathcal{S}(V)_t,$$

en donde $\mathcal{S}(V)_t$ denota la *derivada de Schwarz* de la función V respecto a t

$$\mathcal{S}(V)_t = \frac{V_t'''}{V_t'} - \frac{3}{2}\left(\frac{V_t''}{V_t'}\right)^2$$

propia de la estructura proyectiva de $\mathbb{R}^1 \subset \mathbb{P}^1$. (La derivada de Schwarz se ha tratado en (3.39), pág. 61 y puede verse en detalle en Lehto [30]).

Por las propiedades de la derivada de Schwarz, la función $f_t = -\mathcal{S}(V)_t$ es idénticamente nula únicamente cuando es $V_t = \frac{at+b}{ct+d}$ (homografía), es decir, únicamente cuando $C_t = \iota(V_t) = [at+b : ct+d] \subset \mathbb{S}^1$ y $t \mapsto \gamma(t)$ define el parámetro proyectivo τ. Se tiene así el siguiente resultado.

Teorema 6.1 *El parámetro proyectivo τ de la curva Γ está definido por las parametrizaciones $t \mapsto \gamma(t) \in \Gamma$ que admiten una elección de referencias especiales q_t verificando*

$$\omega^\Gamma(q_t') = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Proposición 6.9 *Dada la parametrización arbitraria $t \mapsto \gamma(t) \in \Gamma$, con $f_t \in C^\infty(\gamma)$ la función asociada de la Proposición 6.8. Entonces, el parámetro proyectivo de la curva está definido por $s \mapsto \overline{\gamma}(s) = \gamma \circ \mathbf{t}(s)$, para aquellos cambios de parámetro $\mathbf{t}(s)$ cuyo difeomorfismo inverso $s(t)$ es solución de la ecuación:*

$$\mathcal{S}(s)_t = -f_t.$$

Demostración. Sea $t \mapsto q_t$ la elección preferente de referencias sobre $\gamma(t)$ de la Proposición 6.8 que define la función $f_t = \omega_1^0(q_t') \in C^\infty(\gamma)$. Para la reparametrización $\overline{\gamma}(s) = \gamma \circ \mathbf{t}(s)$ la curva de referencias definida por

$$\overline{q}_s = q_{\mathbf{t}(s)} \cdot \begin{pmatrix} 1/\mathbf{t}_s' & \text{-}\mathbf{t}_s''/\mathbf{t}_s'^{\,2} & \text{-}\mathbf{t}_s''^2/2\mathbf{t}_s'^{\,3} \\ 0 & 0 & \mathbf{t}_s''/\mathbf{t}_s'^{\,2} \\ 0 & 0 & \mathbf{t}_s' \end{pmatrix}$$

ofrece la correspondiente elección preferente de referencias sobre $\overline{\gamma}(s)$. Veámoslo, partiendo del sistema de ecuaciones (6.37) pág. 152 que relaciona $\omega(\overline{q}_s')$ y $\omega(\mathbf{t}_s' q_{\mathbf{t}(s)}') = \mathbf{t}_s'\, \omega(q_{\mathbf{t}(s)}')$,

$$\begin{aligned} \omega_0^0(\overline{q}_s') &= \mathbf{t}_s'\, \omega_0^0(q_{\mathbf{t}(s)}') + \tfrac{\mathbf{t}_s''}{\mathbf{t}_s'^{\,2}}\, \mathbf{t}_s'\, \omega^1(q_{\mathbf{t}(s)}') - \tfrac{\mathbf{t}_s''}{\mathbf{t}_s'} = \tfrac{\mathbf{t}_s''}{\mathbf{t}_s'^{\,2}}\, \mathbf{t}_s' - \tfrac{\mathbf{t}_s''}{\mathbf{t}_s'} = 0 \\ \omega^1(\overline{q}_s') &= (\mathbf{t}_s')^{-1}\, \mathbf{t}_s'\, \omega^1(q_{\mathbf{t}(s)}') = (\mathbf{t}_s')^{-1}\, \mathbf{t}_s' = 1 \end{aligned}$$

En consecuencia, la función $\bar{f}_s \in C^\infty(\overline{\gamma})$ ligada a $\overline{\gamma}(s)$ coincide con $\omega_1^0(\overline{q}_s')$ y es

$$\begin{aligned} \bar{f}_s &= \mathbf{t}_s' \left(\mathbf{t}_s'\, \omega_1^0(q_{\mathbf{t}(s)}') - \tfrac{\mathbf{t}_s''}{\mathbf{t}_s'^{\,2}}\, \mathbf{t}_s'\, \omega_0^0(q_{\mathbf{t}(s)}') - \tfrac{\mathbf{t}_s''^2}{2\mathbf{t}_s'^{\,4}}\, \mathbf{t}_s'\, \omega^1(q_{\mathbf{t}(s)}') - \left(\tfrac{\mathbf{t}_s''}{\mathbf{t}_s'^{\,2}} \right)' \right) \\ &= \mathbf{t}_s' \left(\mathbf{t}_s'\, f_{\mathbf{t}(s)} - \tfrac{\mathbf{t}_s''^2}{2\mathbf{t}_s'^{\,3}} - \tfrac{\mathbf{t}_s'''}{\mathbf{t}_s'^{\,2}} + \tfrac{3\mathbf{t}_s''^2}{\mathbf{t}_s'^{\,3}} \right) = \mathbf{t}_s'^2\, f_{\mathbf{t}(s)} - \mathcal{S}(\mathbf{t})_s \end{aligned}$$

Si $s(t)$ denota el difeomorfismo inverso del cambio $\mathbf{t}(s)$ se tiene $\mathcal{S}(\mathbf{t})_s = -\mathbf{t}_s'^2 \mathcal{S}(s)_{\mathbf{t}(s)}$, y la anterior relación es equivalente a

$$\bar{f}_s = \mathbf{t}_s'^2 \left(f_{\mathbf{t}(s)} + \mathcal{S}(s)_{\mathbf{t}(s)} \right).$$

Así, los cambios de parametrización $\mathbf{t}(s)$ cuyo difeomorfismo inverso $s(t)$ es solución de la ecuación

$$0 = f_t + \mathcal{S}(s)_t \;\Leftrightarrow\; \mathcal{S}(s)_t = -f_t$$

corresponden a reparametrizaciones $s \mapsto \overline{\gamma}(s) = \gamma \circ \mathbf{t}(s)$ que cumplen $\bar{f}_s = \mathbf{t}_s'^2(0) = 0$, y que por el Teorema anterior definen el parámetro proyectivo de la curva. ■

Invarianza conforme del parámetro proyectivo

Por el Teorema 6.1 el parámetro proyectivo τ de una curva Γ respecto a la conexión ω viene dado por toda parametrización $t \mapsto \gamma(t) \in \Gamma$ que admita una curva de referencias ω-normalizadas $t \mapsto q_t \in Q(M)_{\gamma(t)}$ verificando

$$\omega_0^0(q_t') = 0; \qquad \omega_1^0(q_t') = 0; \qquad \omega^1(q_t') = 1.$$

Sea $\overline{\omega} \in \Lambda^1(Q(M), \mathfrak{g})$ otra conexión normal de Cartan sobre M, que por el Teorema 3.1 se relaciona con $\omega \in \Lambda^1(Q(M), \mathfrak{g})$ a través de

$$\overline{\omega} = (R_{\exp \eta_\alpha})^* \omega \in \Lambda^1(Q(M), \mathfrak{g})$$

para $\alpha \in \Lambda^1(M)$ y $\eta_\alpha(q) = \alpha \circ q_* \in \mathbb{R}^{m*}$. El cambio $\bar{q}_t = R^{-1}_{\exp \eta_\alpha}(q_t)$ (6.33) de la página 149 define sobre $\gamma(t)$ un curva de referencias normalizadas respecto a $\overline{\omega}$ con $\omega(q_t') = \overline{\omega}(\bar{q}_t')$ y en particular

$$\overline{\omega}_0^0(\bar{q}_t') = \omega_0^0(q_t') = 0; \quad \overline{\omega}_1^0(\bar{q}_t') = \omega_1^0(q_t') = 0; \quad \overline{\omega}^1(\bar{q}_t') = \omega^1(q_t') = 1.$$

Se observa así que la parametrización $t \mapsto \gamma(t)$ también define el parámetro proyectivo de la curva respecto a la conexión $\overline{\omega}$, y concluimos:

Proposición 6.10 *El parámetro proyectivo de una curva $\Gamma \subset M$ definido por la geometría normal de Cartan $(Q(M), \omega)$ del ambiente conforme M, permanece invariante por cambios de conexión normal de Cartan $\overline{\omega} \in \Lambda^1(Q(M), \mathfrak{g})$.*

6.4.3 Curvaturas conformes. Fórmulas de Frênet

A través de una proceso anólogo al desarrollado por Frênet para curvas en un espacio Euclídeo, es posible fijar sobre Γ una elección de referencias esféricas especiales de M que se adapten a la geometría de la curva. Esta adaptación se hace en base al desplazamiento a lo largo de la curva de las esferas tangentes, descrito por la geometría normal de Cartan $(Q(M), \omega)$ del ambiente conforme M. Se llega de este modo a la definición de unas *curvaturas conformes* $\lambda_2(s), ..., \lambda_{m-1}(s)$ verificando una análogo a las fórmulas de Frenet, que son características de la curva Γ, y que en último caso dependen únicamente de la estructura conforme de M, y no de la conexión normal de Cartan $\omega \in \Lambda^1(Q(M), \mathfrak{g})$ considerada.

Resumimos aquí el proceso que permite definir las curvaturas conformes, y remitimos al lector a los artículos Cartan [9] y Sulanke [49] para más detalle.

Un cambio en la elección de referencias positivamente adaptadas y normalizadas sobre $t \mapsto \gamma(t)$ viene dado por $\overline{q}_t = q_t \cdot h_t$ tal que $h_t \in H^m$ es de la forma (6.21), pág. 139. Las funciones $\omega(t) = \omega(q_t')$ y $\overline{\omega}(t) = \omega(\overline{q}_t')$ tienen componentes matriciales que se relacionan a través del sistema (6.22), pág. 139. En particular, se tiene que para $j = 2, ..., m$

$$\overline{\omega}_j^0(t) = r_t\, \omega_i^0(t)\, R_j^i(t), \quad \text{siendo} \begin{cases} (R_j^i(t))_{i,j=2,..,m} = R_t \in O(m-1) \\ r_t \in \mathbb{R}^+ \end{cases} .$$

La condición $\omega_2^0 = ... = \omega_m^0 = 0$ se mantiene invariante por cambios de referencias normalizadas a la curva, y define una propiedad característica de los *círculos conformes*. Veremos en secciones posteriores que los círculos conformes forman una significativa familia de curvas en la variedad conforme M, y definen para la conexión de Cartan ω una noción análoga a la de (pre)geodésica para una conexión lineal.

En el caso general en que la curva $\gamma(t)$ no define un círculo conforme, se puede forzar la elección de las referencias normalizadas de manera que

$$\omega_2^0 = \omega^1 \quad \text{y} \quad \omega_3^0 = ... = \omega_m^0 = 0. \tag{6.39}$$

Se obtiene así una reducción de la familia de referencias normalizadas sobre $\gamma(t)$ controlada por el subgrupo $O(m-2) \rtimes \mathbb{R}^* \subset H^m$ cuyos elementos son de la forma

$$h(R, \eta_1) = \begin{pmatrix} 1 & \boxed{\begin{matrix} \eta_1 & 0 & 0 \end{matrix}} & -\frac{\eta_1^2}{2} \\ \boxed{\begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & R \end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix} -\eta_1 \\ 0 \\ 0 \end{matrix}} \\ 0 & \boxed{\begin{matrix} 0 & 0 & 0 \end{matrix}} & 1 \end{pmatrix} \quad {\scriptstyle (R \in O(m-2),\ \eta_1 \in \mathbb{R}^*)} \tag{6.40}$$

y el sistema de ecuaciones asociado a un cambio de referencias es: (véase (6.22))

$$\begin{cases} \overline{\omega}_0^0 = \omega_0^0 - \eta_1 \omega^1 \\ \overline{\omega}^1 = \overline{\omega}_2^0 = \omega^1 = \omega_2^0 \\ \overline{\omega}_1^0 = \omega_1^0 + \eta_1 \omega_0^0 - \frac{\eta_1^2}{2}\omega^1 + \frac{d\eta_1}{dt} \\ \overline{\omega}_j^2 = \omega_h^2 R_j^h \quad {\scriptstyle (h,j=3,..,m)} \\ \overline{\omega}_j^i = R_i^k \omega_h^k R_j^h + R_i^k \frac{dR_j^k}{dt} \quad {\scriptstyle (h,i,j,k=3,...,m)} \end{cases} \tag{6.41}$$

Se observa así que la componente ω^1 de $\gamma^*\omega \in \Lambda^1(\gamma^* Q(M), \mathfrak{g})$ da lugar al *invariante*

$$\omega^1(t) = \omega^1(q_t') \in C^\infty(\gamma), \quad \forall q_t \text{ normalizada cumpliendo (6.39)} \tag{6.42}$$

característico de la curva parametrizada $\gamma(t)$. Además, si $s \mapsto \mathbf{t}(s)$ define una reparametrización $\overline{\gamma}(s) = \gamma \circ \mathbf{t}(s)$ de la curva, se tiene que si q_t es una elección de referencias normalizadas sobre $\gamma(t)$ cumpliendo (6.39) entonces $q_s = q_{\mathbf{t}(s)}$ define también para $\overline{\gamma}(s)$ una elección normalizada cumpliendo (6.39), de manera que la función $\overline{\omega}^1(s) \in C^\infty(\overline{\gamma})$ asociada a $\overline{\gamma}(s)$ verifica:

$$\overline{\omega}^1(s) = \omega^1\left(\tfrac{d}{ds}\big|_s q_{\mathbf{t}(s)}\right) = \mathbf{t}'(s)\,\omega^1\left(\tfrac{d}{dt}\big|_{\mathbf{t}(s)} q_t\right) = \mathbf{t}'(s)\,\omega^1(\mathbf{t}(s)).$$

Definición 6.6 *Sobre la curva Γ de M, la conexión de Cartan $\omega \in \Lambda^1(Q(M), \mathfrak{g})$ induce un* arco conforme $\mathbf{s}$ *definido por $\omega^1(t) \in C^\infty(\gamma)$ de* (6.42) *mediante la expresión*

$$d\mathbf{s} = \omega^1(t)\,dt, \quad (\forall t \mapsto \gamma(t) \in \Gamma).$$

Al tomar sobre la curva Γ la parametrización $\mathbf{s} \mapsto \gamma(\mathbf{s})$ que define su arco conforme, es $\omega^1(\mathbf{s}) = 1$. En el sistema de ecuaciones (6.41), asociado al cambio de referencias, se tiene entonces la relación $\overline{\omega}_0^0(\mathbf{s}) = \omega_0^0(\mathbf{s}) - \eta_1(\mathbf{s})$, que permite imponer la restricción

$$\omega_0^0 = 0.$$

La subfamilia de referencias normalizadas que se obtiene tiene como grupo de estructura asociado al subgrupo $O(m-2) \subset H^m$, formado por elementos $h(R, 0) = (6.40)$ para $R \in O(m-2)$. El sistema de ecuaciones ligado a un cambio de referencias es

$$\begin{cases} \overline{\omega}_1^0 = \omega_1^0 \\ \overline{\omega}_j^2 = \omega_h^2 R_j^h \quad {\scriptstyle (h,j=3,\dots,m)} \\ \overline{\omega}_j^i = R_i^k \omega_h^k R_j^h + R_i^k \frac{dR_j^k}{d\mathbf{s}} \quad {\scriptstyle (h,i,j,k=3,\dots,m)} \end{cases}$$

para $R_t = (R_j^i)_{i,j=3,\dots,m} \in O(m-2)$. Por un procedimiento análogo al de Frênet es posible construir a partir de este sistema una curva de referencias totalmente adaptadas a la geometría de la curva Γ, que alcanza el máximo de ceros en las componentes ω_j^i de la conexión normal de Cartan.

Teorema 6.2 *Para Γ curva general en la variedad conforme M, la conexión de Cartan ω define canónicamente una referencia móvil de Frênet $q_\mathbf{s} \in Q(M)_{\gamma(\mathbf{s})}$, sobre la curva $\mathbf{s} \mapsto \gamma(\mathbf{s}) \in \Gamma$ parametrizada por el arco conforme, que se caracteriza por ser*

$$\omega(q'_{\mathbf{s}}) = \left(\begin{array}{c|cccccc|c} 0 & \omega_1^0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 & & \dots & 0 & 0 & -\omega_1^0 \\ 0 & 0 & 0 & -\lambda_2 & 0 & & & -1 \\ 0 & & \lambda_2 & 0 & -\lambda_3 & & \vdots & 0 \\ \vdots & \vdots & 0 & \lambda_3 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ 0 & & & & \ddots & 0 & -\lambda_{m\text{-}1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & & \lambda_{m\text{-}1} & 0 & 0 \\ \hline 0 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)(\mathbf{s})$$

para ciertas funciones $\lambda_2(\mathbf{s}), ..., \lambda_{m\text{-}1}(\mathbf{s}) \in C^\infty(\gamma)$ *que definen las* curvaturas conformes *de la curva* Γ *de orden* $2, ..., m-1$*, respectivamente.*

Véase para más detalle Sulanke [49], Cartan [9].

Invarianza conforme del arco y curvaturas conformes

La curva $\mathbf{s} \mapsto \gamma(\mathbf{s}) \in \Gamma$ está parametrizada por su arco conforme y tiene curvaturas conformes $\lambda_2(\mathbf{s}), \dots, \lambda_{m-1}(\mathbf{s})$ respecto a la conexión de Cartan ω cuando puede tomarse una curva de referencias ω-adaptadas $q_{\mathbf{s}} \in Q(M)$ sobre $\gamma(\mathbf{s})$ tal que verifica:

$$\begin{aligned} &\omega^1(q'_{\mathbf{s}}) = \omega_2^0(q'_{\mathbf{s}}) = 1 \\ &\omega_j^0(q'_{\mathbf{s}}) = 0, \quad j = 3, ..., m \\ &\omega_0^0(q'_{\mathbf{s}}) = 0 \\ &\omega_j^i(q'_{\mathbf{s}}) = -\lambda_{j-1}(\mathbf{s})\delta_{j-1}^i + \lambda_j(\mathbf{s})\delta_{j+1}^i, \quad i, j = 3, ..., m \end{aligned} \tag{6.43}$$

(véase Definición 6.6 y Teorema 6.2).

Sea $\overline{\omega} \in \Lambda^1(Q(M), \mathfrak{g})$ otra conexión normal de Cartan sobre M, que por el Teorema 3.1 se relaciona con $\omega \in \Lambda^1(Q(M), \mathfrak{g})$ a través de

$$\overline{\omega} = (R_{\exp \eta_\alpha})^* \omega \in \Lambda^1(Q(M), \mathfrak{g})$$

para $\alpha \in \Lambda^1(M)$ y $\eta_\alpha(q) = \alpha \circ q_* \in \mathbb{R}^{m*}$.

De nuevo el cambio $\bar{q}_{\mathbf{s}} = R^{-1}_{\exp \eta_\alpha}(q_{\mathbf{s}})$ (6.33) de la página 149 define sobre $\mathbf{s} \mapsto \gamma(\mathbf{s}) \in \Gamma$ un curva de referencias normalizadas respecto a $\overline{\omega}$ que está en análogas condiciones (6.43) para la conexión de Cartan $\overline{\omega}$ (se tiene $\omega(q'_t) = \overline{\omega}(\bar{q}'_t)$ (6.34)), de modo que $\mathbf{s} \mapsto \gamma(\mathbf{s})$ y $\lambda_2(\mathbf{s}), ..., \lambda_{m-1}(\mathbf{s})$ definen también el arco y las curvaturas de la curva respecto a la conexión $\overline{\omega}$.

Proposición 6.11 *El arco y las curvaturas conformes de una curva $\Gamma \subset M$ definido por la geometría normal de Cartan $(Q(M), \omega)$ del ambiente conforme, permanecen invariantes por cambios de conexión normal de Cartan $\overline{\omega} \in \Lambda^1(Q(M), \mathfrak{g})$.*

6.4.4 Geodésicas conformes

Definición 6.7 *Una curva $\Gamma \subset M$ es* círculo conforme *de la geometría normal de Cartan $(Q(M), \omega)$ sobre M variedad conforme, si tiene la propiedad (geométrica) de que la restricción de la conexión de Cartan ω al fibrado de referencias normalizadas sobre Γ anula también sus componentes ω_j^0, $j = 2, ..., m$, y es*

$$\omega = \begin{pmatrix} \omega_0^0 & \boxed{\omega_1^0 \quad 0 \ \ldots \ 0} & 0 \\ \boxed{\begin{matrix} \omega^1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix} 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & \omega_j^i & \\ 0 & & & \end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix} -\omega_1^0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix}} \\ 0 & \boxed{-\omega^1 \quad 0 \ \ldots \ 0} & -\omega_0^0 \end{pmatrix}$$

Tomando una parametrización $t \mapsto \gamma(t) \in \Gamma$ que defina el parámetro proyectivo del círculo conforme Γ, el Teorema 6.1 asegura que puede tomarse $t \mapsto q_t \in Q(M)$ curva de referencias normalizadas sobre $\gamma(t)$ de tal modo que además se verifique

$$\omega_0^0(q_t') = 0; \qquad \omega_1^0(q_t') = 0; \qquad \omega^1(q_t') = 1.$$

Estas condiciones determinan completamente $q^\Gamma = [\hat{A}_0, \hat{A}_1, \hat{A}_{m+1}]_t$ para la referencia $q_t = [\hat{A}_0, \hat{A}_1, ..., \hat{A}_{m+1}]_t$. Pero a la vista del sistema de ecuaciones (6.22) asociado a un cambio en la elección de referencias normalizadas, se observa que la ecuación

$$\omega_j^i(\overline{q}_t') = R_t^{-1}\left(\omega_j^i(q_t')\right) R_t + R_t^{-1}\frac{dR_t}{dt} \quad (R_t \in O(m-1))$$

permite ajustar la elección del resto de elementos $\hat{A}_2(t), ..., \hat{A}_m(t)$ de manera que se verifique también la condición $\omega_j^i(q_t') = 0$, $\forall i, j = 2, ..., m$. En efecto, si $\omega_j^i(q_t') \neq 0$ se toma $R_t \in O(m-1)$ tal que integre la ecuación $R_t' = (\omega_j^i(q_t'))R_t$, y se tiene $\omega_j^i(\overline{q}_t') = 0$ para la curva de referencias $\overline{q}_t = q_t \cdot h_t$ siendo

$$h_t = \begin{pmatrix} 1 & \boxed{0 \quad 0} & 0 \\ \boxed{\begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & R_t \end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix}} \\ 0 & \boxed{0 \quad 0} & 1 \end{pmatrix} \in H^m$$

De este modo, se llega a que el círculo conforme Γ admite una elección de referencias adaptadas q_t sobre la parametrización $\gamma(t)$ tal que

$$\omega(q_t') = \begin{pmatrix} 0 & \boxed{0 \;\; \dots \;\; 0} & 0 \\ \boxed{\begin{matrix} 1 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix}} \\ 0 & \boxed{-1 \;\; 0 \dots \;\; 0} & 0 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m$$

Para el elemento $e_1 = (1, 0, ..., 0)^\intercal \in \mathbb{R}^m = \mathfrak{g}_{-1} \leq \mathfrak{g}$, la conexión normal de Cartan $\omega \in \Lambda^1(Q(M), \mathfrak{g})$ define un campo $E = \widetilde{e}_1$ en $Q(M)$ tal que

$$E(q) = (\omega_q)^{-1}(e_1) \in T_q Q(M)$$

La curva $t \mapsto q_t \in Q(M)$ resulta ser entonces curva integral del campo E.

Definición 6.8 *Una curva parametrizada $\gamma(t)$ en la variedad conforme M se dice que es una* geodésica conforme *de la conexión normal de Cartan $\omega \in \Lambda^1(Q(M), \mathfrak{g})$, si es la proyección sobre M de una curva integral del campo*

$$\tilde{V}(q) = (\omega_q)^{-1}(V) \in T_q Q(M),$$

para algún $V \in \mathbb{R}^m = \mathfrak{g}_{-1}$, no nulo.

Compárese esta definición con la Proposición 6.4, para curvas geodésicas en un ambiente Riemanniano.

Proposición 6.12 *Las geodésicas conformes de $(Q(M), \omega)$ coinciden con los círculos conformes parametrizados por su parámetro proyectivo.*

Demostración. Por el desarrollo anterior hemos visto ya que si $t \mapsto \gamma(t)$ define el parámetro proyectivo de un círculo conforme Γ entonces existe $q_t \in Q(M)$ tal que $\pi(q_t) = \gamma(t)$ y q_t es curva integral del campo $E = \widetilde{e}_1$ para $e_1 = (1, 0, ..., 0)^\intercal \in \mathbb{R}^m$.

Veámos el recíproco. Sea $V \in \mathbb{R}^m$-$\{0\}$ y $t \mapsto q_t \in Q(M)$ una curva cumpliendo

$$q_t' = \tilde{V}(q_t) \;\Leftrightarrow\; \omega(q_t') = V, \forall t$$

Se pueden tomar vectores $V_2, ..., V_m \in \mathbb{R}^m$ tales que $R = (V, V_2, ..., V_m) \in CO(m)$. Consideramos entonces $\overline{q}_t = q_t \cdot h$ para $h = (R^{-1}, 0) \in CO(m) \ltimes \mathbb{R}^{m*}$, que verifica

$$\omega(\overline{q}_t') = Ad_h(\omega(q_t')) = Ad_{(R^{-1},0)}V = R^{-1}V = e_1 \in \mathbb{R}^m.$$

Se observa que $\overline{q}_t$ define una curva de referencias adaptadas ($\omega^i(\overline{q}_t') = 0$, $i \geq 2$) y normalizadas ($\omega_j^1(\overline{q}_t') = 0$, $j \geq 2$) sobre $\gamma(t) = \pi(\overline{q}_t) \subset M$, tal que:

- $\omega^0_j(\overline{q}'_t) = 0,\ j \geq 2 \Rightarrow \gamma(t)$ define un círculo conforme
- $\omega^0_0(\overline{q}'_t) = 0,\ \omega^0_1(\overline{q}'_t) = 0,\ \omega^1(\overline{q}'_t) = 1 \overset{(\mathrm{T}^a 6.1)}{\Rightarrow} \gamma(t)$ define el parámetro pruectivo .

Y se concluye que $\gamma(t) = \pi(\overline{q}_t) = \pi(q_t)$ es geodésica conforme en M. ■

Corolario 6.2 *Los círculos conformes son curvas de M cuyo desarrollo en el tangente esférico define un círculo de la esfera tangente.*

Demostración. Sea $t \mapsto \gamma(t) \in \Gamma$ una geodésica conforme en M. Existe entonces $V \in \mathbb{R}^m$ y $t \mapsto \gamma q_t \in Q(M)$ curva de referencias sobre $\gamma(t)$ tal que $\omega(q'_t) = V$. El desarrollo de $\gamma(t)$ en $\overline{T}_{\gamma(t_0)}M$ viene dado por la curva

$$c(t) = q_{t_0} \cdot g_t(O) \in \overline{T}_{\gamma(t_0)}M$$

para $g_t \in G^m$ integrando la ecuación $g_t^{-1} g'_t = V$ con $g_{t_0} = e$. Es claro que debe ser $g_t = \exp\left((t - t_0)V\right)$, de modo que

$$c(t) = q_{t_0} \cdot g_t(O) = q_{t_0}\left(\left(\exp(t - t_0)V\right)(O)\right) = q_{t_0} \circ \iota((t - t_0)V)$$

(véase Observación 5.9). La curva $t \mapsto \iota((t - t_0)V) \in \mathbb{S}^m$ tiene su trayectoria en un círculo de $\mathbb{S}^m$ (pasando por ∞) de modo que $c(t) = q_{t_0} \circ \iota((t - t_0)V)$ define también un círculo en la esfera tangente $\overline{T}_{\gamma(t_0)}M$. ■

Compárese este resultado con la Proposición 6.3 que hemos dado en la primera sección de este capítulo para el caso de curvas en un ambiente Riemanniano.

Invarianza conforme de los círculos y geodésicas conformes

Por la Definición 6.8, la curva $t \mapsto \gamma(t)$ define una geodésica conforme en M para la conexión normal de Cartan $\omega \in \Lambda^1(Q(M), \mathfrak{g})$ cuando existe una curva de referencias $t \mapsto q_t \in Q(M)$ sobre $t \mapsto \gamma(t)$ tal que

$$\omega(q_t) = V \in \mathbb{R}^m \subset \mathfrak{g}, \quad \forall t.$$

Para otra conexión normal de Cartan $\overline{\omega} = (R_{\exp \eta_\alpha})^* \omega \in \Lambda^1(Q(M), \mathfrak{g})$, con $\alpha \in \Lambda^1(M)$, el cambio $\bar{q}_t = R^{-1}_{\exp \eta_\alpha}(q_t)$ (6.33) de la página 149 define sobre $t \mapsto \gamma(t)$ un curva de referencias normalizadas respecto a $\overline{\omega}$ con

$$\overline{\omega}(\bar{q}'_t) = \omega(q'_t) = V \in \mathbb{R}^m$$

de manera que la curva $\gamma(t)$ resulta ser también geodésica conforme de la conexión de Cartan $\overline{\omega}$.

Proposición 6.13 *Las geodésicas conformes asociadas a la geometría normal de Cartan* $(Q(M), \omega)$ *del ambiente conforme, permanecen invariantes por cambios de conexión normal de Cartan* $\overline{\omega} \in \Lambda^1(Q(M), \mathfrak{g})$.

Dado que las trayectorias de la familia de geodésicas conformes definen los círculo conformes de la conexión conforme de Cartan ω se tiene el siguiente Corolario.

Corolario 6.3 *Los círculos conformes asociados a la geometría normal de Cartan* $(Q(M), \omega)$ *del ambiente conforme, permanecen invariantes por cambios de conexión normal de Cartan* $\overline{\omega} \in \Lambda^1(Q(M), \mathfrak{g})$.

Observación

Hemos visto que es posible formalizar la noción de curva geodésica conforme por medio de distintas definiciones equivalentes; la definición que hemos tomado aquí (Definición 6.8) coincide con la dada en Friedrich [18].

El artículo Bailey-Eastwood [4], ofrece otra caracterización equivalente de las geodésicas conformes de una variedad conforme Riemanniana al contar con la presencia auxiliar de una métrica conforme $\mathbf{g}$ en la variedad. Aplicando el Teorema 5.5 a este caso particular, sabemos que la conexión normal de Cartan $\omega \in \Lambda^1(Q(M), \mathfrak{g})$ definida por la conexión de Levi-Civita de $\mathbf{g}$ se relaciona con operadores asociados a la métrica $\mathbf{g}$ que incluyen tensores a nivel de curvatura como el de Schouten. El parámetro proyectivo de una curva y la condición de ser geodésicas en un ambiente conforme métrico se expresan en este artículo a través de ecuaciones diferenciales en términos de la métrica $\mathbf{g}$. Se demuestra entonces que el espacio de soluciones permanece invariante a través de cambios conformes de la métrica, y de este modo se concluye también que estos invariantes definidos sobre curvas son propios de la estructura conforme.

6.4.5 Caracterización por la conexión esférica de Fermi-Walker

En el capítulo anterior se vio que cada curva parametrizada $\gamma(t)$ recibe del ambiente conforme una conexión natural $\omega^\gamma \in \Lambda^1(\gamma^* Q(M), \mathfrak{g})$, canónicamente definida, que conocemos con el nombre de conexión esférica de Fermi-Walker (Definición 5.12, pág. 121). Localmente esta conexión coincide con la inducida por una conexión normal y conforme de Cartan del ambiente M. Se observa entonces que el hecho de que los invariantes sobre curvas aquí definidos sean localizables (dependan de un entorno abierto de cada punto) y permanezcan invariantes por cambios de conexión conforme del ambiente, permite hacer uso de la conexión de esférica de Fermi-Walker sobre la curva para su definición. De este modo, se logra una caracterización canónica de los invariantes conformes mediante la conexión natural ω^γ, que en último caso puede expresarse en términos de operadores naturales asociados a la estructura conforme, como son: la conexión de Fermi-Walker D^γ/dt y el tensor de Schouten L^γ.

Sea $t \mapsto \gamma(t) \in \Gamma$ una curva parametrizada en la variedad conforme M. Por un procedimiento análogo al desarrollado anteriormente para $\gamma^*\omega \in \Lambda^1(\gamma^*Q(M), \mathfrak{g})$ conexión heredada de la geometría de Cartan $(Q(M), \omega)$ en M, la conexión esférica de Fermi-Walker $\omega^\gamma \in \Lambda^1(\gamma^*Q(M), \mathfrak{g})$ distingue igualmente un subfibrado en $\gamma^*Q(M)$ de referencias especiales $q : \mathbb{S}^m \to \overline{T}_x M$ *adaptadas y normalizadas*, caracterizado por la condición de que la acción de la conexión ω^γ es de la forma

$$\omega^\gamma = \left(\begin{array}{c|cccc|c} \omega^0_0 & \omega^0_1 & \omega^0_2 & \dots & \omega^0_m & 0 \\ \hline \omega^1 & 0 & 0 & \dots & 0 & -\omega^0_1 \\ 0 & 0 & & & & -\omega^0_2 \\ \vdots & \vdots & & \omega^i_j & & \vdots \\ 0 & 0 & & & & -\omega^0_m \\ \hline 0 & -\omega^1 & 0 & \dots & 0 & -\omega^0_0 \end{array}\right) \in \mathfrak{g}$$

Observación 6.8 *Sea $t \mapsto b_t = (v_1, ..., v_m)_t \in CO(M)_{\gamma(t)}$ una referencia conforme sobre la curva $\gamma(t)$ con $v_1(t) = \gamma'(t)$. La curva inducida de referencias especiales $q_t = i \circ b_t \in Q(M)_{\gamma(t)}$ da lugar a $\omega(q_t') \in \mathfrak{g}$ con componentes (véase 4.3.4):*

- $\omega_{-1}(q_t') = b_t^{-1}(\gamma'(t)) \in \mathbb{R}^m$, *de modo que*
$$\omega^1 = 1; \qquad \omega^i = 0,\ \forall i = 2, ..., m$$
- $\omega_0(q_t')) = (\omega^i_j - \omega^0_0 \delta^i_j) \in \mathfrak{co}(m)$ *corresponde a las componentes de la conexión de Fermi-Walker, y dado que* $\frac{D^\gamma}{dt} v_1 = \frac{D^\gamma}{dt}(\gamma') = 0$, *se tiene*
$$\omega^0_0 = 0; \qquad \omega^i_1 = 0,\ \forall i$$
- $\omega_{-1}(q_t') = (\omega^0_j) = (L^\gamma_j)$ *con* $L^\gamma_j = L^\gamma(v_j)$ *las componentes del tensor de Schouten.*

Por lo tanto, $b_t \subset CO(M)$ define una curva de referencias adaptadas y normalizadas sobre $\gamma(t)$ para la conexión esférica de Fermi-Walker ω^γ, que además verifica

$$\omega^1 = 1; \qquad \omega^0_0 = 0.$$

En consecuencia el *círculo osculador* de la curva $\gamma(t)$ respecto a la conexión esférica de Fermi-Walker ω^γ, esto es, el círculo $\bar{C}_{\gamma(t)} = q(\mathbb{S}^1) \subset \overline{T}_{\gamma(t)} M$ definido por toda referencia ω^γ-normalizada $q \in Q(M)_{\gamma(t)}$, coincide con el círculo

$$\bar{C}_{\gamma(t)} = \iota(T_{\gamma(t)}\Gamma) \cup \{\infty_{\gamma(t)}\} \subset \overline{T}_{\gamma(t)} M.$$

Y la identificación de $\overline{T}_{\gamma(t)}\Gamma$ con $\bar{C}_{\gamma(t)} \subset \overline{T}_{\gamma(t)}M$ canónicamente definida por (6.8) es la correspondencia natural

$$\begin{array}{rcl} \overline{T}_{\gamma(t)}\Gamma = \iota(T_{\gamma(t)}\Gamma) \cup \{\infty_{\gamma(t),\Gamma}\} & \longleftrightarrow & \iota(T_{\gamma(t)}\Gamma) \cup \{\infty_{\gamma(t),M}\} = \bar{C}_{\gamma(t)} \\ \infty_{\gamma(t),\Gamma} & \longleftrightarrow & \infty_{\gamma(t),M} \end{array}$$

Pasemos a estudiar los invariantes conformes asociados a la curva $\gamma(t)$ en términos de la conexión esférica de Fermi-Walker $\omega^\gamma \in \Lambda^1(\gamma^* Q(M), \mathfrak{g})$.

Parámetro proyectivo de una curva

Se dice que una parametrización $t \mapsto \gamma(t) \in \Gamma$ define el *parámetro proyectivo* de la curva Γ cuando admite una elección de referencias (normalizadas) $t \mapsto q_t \in Q(M)_{\gamma(t)}$ tal que

$$\omega^\gamma(q'_t) = \left(\begin{array}{ccc} 0 & \boxed{\begin{array}{cccc} 0 & \omega^0_2 & \dots & \omega^0_m \end{array}} & 0 \\ \boxed{\begin{array}{c} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{array}} & \boxed{\begin{array}{cccc} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & \omega^i_j & \\ 0 & & & \end{array}} & \boxed{\begin{array}{c} 0 \\ -\omega^0_2 \\ \vdots \\ -\omega^0_m \end{array}} \\ 0 & \boxed{\begin{array}{cccc} -1 & 0 & \dots & 0 \end{array}} & 0 \end{array} \right)(t)$$

Recuérdese de **5.2.4** que toda parametrización $t \mapsto \gamma(t)$ de la curva Γ tiene asociada una función característica $f_t \in C^\infty(\gamma)$ que viene definida por

$$f_t = \omega^0_1(q'_t)$$

para toda referencia normalizada $q_t \in Q(M)$ sobre $\gamma(t)$ verificando $\omega^1(q'_t) = 1$ y $\omega^0_0(q'_t) = 0$ (Proposición 6.8). El parámetro proyectivo de la curva viene definido por aquellas parametrizaciones cuya función asociada es $f_t \equiv 0$.

La referencia $b_t = (v_1, ..., v_m) \in CO(M)$ de la Observación 6.8 (tal que $v_1(t) = \gamma'(t)$) define una curva de referencias normalizadas $q_t = i \circ b_t \in Q(M)$ sobre $\gamma(t)$ que hace $\omega^1(q'_t) = 1$ y $\omega^0_0(q'_t) = 0$, de manera que la función asociada a la parametrización $\gamma(t)$ viene dada por

$$f_t = \omega^0_1(q'_t) = L^\gamma(v_1 t)) = L^\gamma(\gamma'(t)).$$

Concluimos entonces con los siguientes resultados, consecuencia del Teorema 6.1 y de la Proposición 6.9.

Proposición 6.14 *La parametrización $t \mapsto \gamma(t)$ define el parámetro proyectivo cuando su tensor de Schouten L^γ se anula en la dirección tangente a la curva, esto es*

$$L^\gamma(\gamma'(t)) = 0, \quad \forall t.$$

Corolario 6.4 *Si $t \mapsto \gamma(t)$ es una parametrización arbitraria, el parámetro proyectivo de la curva viene definido por aquellos cambios de parámetro $t \mapsto s(t)$ que son solución de la ecuación*

$$\mathcal{S}(s)_t = -L^\gamma(\gamma'(t)), \tag{6.44}$$

en donde L^γ denota el tensor de Schouten de $\gamma(t)$ y $\mathcal{S}(s)_t$ la derivada de Schwarz de $s(t)$ respecto de t.

Obsérvese que por las propiedades de la derivada de Schwarz (que hemos enunciado en el Capítulo 2, página 61) las soluciones de la ecuación (6.44) forman una familia de transformaciones equivalentes bajo homografías de la recta proyectiva.

Arco y curvaturas conforme de una curva

El *arco conforme* $\mathbf{s}$ de una curva general Γ se define a partir de una parametrización $t \mapsto \gamma(t)$ mediante un cambio de parámetro $\mathbf{s}(t)$ solución de la ecuación

$$d\mathbf{s} = \omega^1(q_t')\, dt$$

para toda curva $t \mapsto q_t$ de referencias normalizadas sobre $\gamma(t)$ que verifique $\omega_2^0(q_t') = \omega^1(q_t')$ y $\omega_j^0(q_t') = 0$, $\forall j \geq 3$ (Definición 6.6).

A partir del tensor de Schouten $L^\gamma \in \Lambda^1(\gamma)$ de la parametrización $t \mapsto \gamma(t)$, se define un campo asociado $\mathbb{L}^\gamma \in \mathfrak{X}(\gamma)$, ortogonal a $\gamma'(t)$, caracterizado por ser

$$\mathbb{L}^\gamma = \left(L^\gamma \circ pr^\perp\right)_{\uparrow \mathbf{g}} \tag{6.45}$$

para $\mathbf{g}$ métrica conforme que hace a $\gamma(t)$ curva unitaria, y $pr^\perp$ la proyección ortogonal de $T_{\gamma(t)}M$ en el espacio ortogonal a la curva. Obsérvese que es

$$L^\gamma\left(\mathbb{L}^\gamma\right) = \left(L^\gamma \circ pr^\perp\right)\left(\mathbb{L}^\gamma\right) = \mathbf{g}\left(\mathbb{L}^\gamma, \mathbb{L}^\gamma\right).$$

Si $\gamma(t)$ define una curva general, el campo asociado $\mathbb{L}^\gamma \in \mathfrak{X}(\gamma)$ es no nulo (véanse más detalles en la siguiente sección), y da lugar a una función $r_t > 0$ definida por $r_t^2 = L^\gamma\left(\mathbb{L}^\gamma\right) > 0$. Considérese entonces la referencia móvil $t \mapsto b_t = (v_1, ..., v_m) \in$

$CO(M)_{\gamma(t)}$ sobre $\gamma(t)$ tal que $v_1(t) = r_t\,\gamma'(t)$, $v_2(t) = r_t^{-2}\,\mathbb{L}^\gamma(t)$. Se tiene entonces que para $q_t = i \circ b_t$, la curva $\omega^\gamma(q_t') \in \mathfrak{g}$ tiene componentes

$$\begin{aligned}
&\omega^1(q_t') = r_t,\\
&\omega_2^0(q_t') = r_t\,L^\gamma(v_2) = r_t\,L^\gamma(r_t^{-2}\,\mathbb{L}^\gamma(t)) = r_t^{-1}\,L^\gamma(\mathbb{L}^\gamma(t)) = r_t^{-1}r_t^2 = r_t\\
&\omega_j^0(q_t') = r_t\,L^\gamma(v_j) = r_t\,\left(L^\gamma \circ pr^\perp\right)(v_j) = r_t\,\mathbf{g}\,(\mathbb{L}^\gamma, v_j) = 0,\ \forall j \geq 3
\end{aligned}$$

Es claro así que el arco conforme de la curva viene dado por

$$d\mathbf{s} = \omega^1(q_t')\,dt = r_t\,dt$$

siendo $r_t = (L^\gamma(\mathbb{L}^\gamma))^{\frac{1}{2}} = \mathbf{g}\,(\mathbb{L}^\gamma, \mathbb{L}^\gamma)^{\frac{1}{2}}\,\mathbf{g}\,(\gamma', \gamma')^{-\frac{1}{2}}$, para cualquier métrica conforme $\mathbf{g} \in \mathcal{C}$. Se tiene así el siguiente resultado

Proposición 6.15 *La curva $\mathbf{s} \mapsto \gamma(\mathbf{s})$ está parametrizada por su arco conforme cuando el tensor de Schouten $L^\gamma \in \Lambda^1(\gamma)$ de la parametrización tiene asociado una campo ortogonal $\mathbb{L}^\gamma \in \mathfrak{X}(\gamma)$ (6.45) tal que $\forall t$ el vector ortogonal $\mathbb{L}^\gamma(t)$ es de igual longitud que $\gamma'(t)$.*

Para curvas suficientemente generales, las curvaturas conformes $\lambda_2(\mathbf{s}), ..., \lambda_m(\mathbf{s})$ se obtienen a través de una determinada referencia $q_\mathbf{s} \in Q(M)$ (Teorema 6.2 pág. 157). A través de la conexión de Fermi-Walker $D^\gamma/d\mathbf{s}$, esta referencia se puede ir construyendo a partir de las sucesivas derivadas del campo $\mathbb{L}^\gamma$. Así, puede tomarse sobre $\gamma(\mathbf{s})$ una referencia conforme $b_t = (V_1, ..., V_m)$, con $V_1 = \gamma'$, $V_2 = \mathbb{L}^\gamma$ y $V_3, .., V_m$ determinados por las condiciones

$$span\{V_3(\mathbf{s}), ..., V_j(\mathbf{s})\} = span\left\{\tfrac{D\gamma}{d\mathbf{s}}\mathbb{L}^\gamma, ..., \left(\tfrac{D\gamma}{d\mathbf{s}}\right)^{j-2}\mathbb{L}^\gamma\right\}\ ,\ \forall j \geq 3 \quad (\forall \mathbf{s})$$

de manera que existen funciones $\lambda_2, ..., \lambda_m$ tales que

$$\begin{aligned}
&\tfrac{D\gamma}{d\mathbf{s}}\mathbb{L}^\gamma = \lambda_2\,V_3\\
&\tfrac{D\gamma}{d\mathbf{s}}v_j = -\lambda_{j-1}\,V_{j-1} + \lambda_j\,V_{j+1},\ \forall j \geq 3
\end{aligned}$$

La curva $\mathbf{s} \mapsto q_\mathbf{s} = i \circ b_\mathbf{s} \in Q(M)$ de referencias normalizadas cumple

$$\begin{aligned}
\omega^1(q_\mathbf{s}') &= \omega_2^0(q_\mathbf{s}') = 1\\
\omega_j^0(q_\mathbf{s}') &= 0, \quad j = 3, ..., m\\
\omega_0^0(q_\mathbf{s}') &= 0\\
\omega_j^i(q_\mathbf{s}') &= -\lambda_{j-1}(\mathbf{s})\delta_{j-1}^i + \lambda_j(\mathbf{s})\delta_{j+1}^i, \quad i, j = 3, ..., m
\end{aligned}$$

de manera que las funciones $\lambda_2(\mathbf{s}), ..., \lambda_m(\mathbf{s})$ coinciden con las curvaturas conformes de la curva Γ.

Proposición 6.16 *Las curvaturas conformes de $\mathbf{s} \mapsto \gamma(\mathbf{s})$ se obtienen aplicando el procedimiento de Frênet a las sucesivas derivadas del campo ortogonal de Schouten $\mathbb{L}^\gamma \in \mathfrak{X}(\gamma)$ definido en (6.45) respecto a la conexión de Fermi-Walker $D^\gamma/d\mathbf{s}$.*

Geodésicas conformes

Un *círculo conforme* en la variedad M es una curva Γ tal que al imponer la condición de ω^γ-normalización sobre una/cualquier curva de las referencias adaptadas q_t sobre $\gamma(t)$ (i.e. $\omega^1_j(q'_t) = 0$, $\forall j$) se obtienen de manera gratuita las anulaciones $\omega^0_j(q'_t) = 0$, $\forall j \geq 2$.

Proposición 6.17 *La curva parametrizada $t \mapsto \gamma(t) \in \Gamma$ define un círculo conforme de M cuando el campo ortogonal de Schouten $\mathbb{L}^\gamma \in \mathfrak{X}(\gamma)$ de (6.45) es idénticamente nulo, es decir, cuando el tensor de Schouten $L^\gamma \in \Lambda^1(\gamma)$ se anula sobre el subespacio ortogonal a la curva.*

Demostración. Dada la curva parametrizada $t \mapsto \gamma(t) \in \Gamma$, cada referencia conforme $b_t = (v_1, ..., v_m) \in CO(M)$ sobre $\gamma(t)$ con $v_1 = \gamma'(t)$, define una referencia especial $q_t = i \circ b_t \in Q(M)$ normalizada respecto a ω^γ (Observación 6.8), y $\omega^\gamma(q'_t) \in g$ tiene componentes

$$\omega^0_j(q'_t) = L^\gamma(v_j), \quad \text{para } L^\gamma \in \Lambda^1(\gamma) \text{ tensor de Schouten de } \gamma(t)$$

Así, Γ es círculo conforme cuando

$$L^\gamma(v_j) = 0, \forall j \geq 2 \tag{6.46}$$

Dado que los vectores $v_2, ..., v_m$ son ortogonales a $v_1 = \gamma'$, forman una base del espacio ortogonal a la curva $\gamma^\perp$, y la condición (6.46) es equivalente a

$$L^\gamma(\gamma^\perp) = 0$$

De otro modo, $L^\gamma(\gamma^\perp) = 0 \Leftrightarrow L^\gamma \circ pr^\perp \equiv 0 \Leftrightarrow \mathbb{L}^\gamma \equiv 0$ (véase (6.45)). ■

Proposición 6.18 *Las geodésicas conformes de la variedad M coinciden con aquellas curvas parametrizadas $\gamma(t)$ tales que tienen su tensor de Schouten asociado $L^\gamma \in \Lambda^1(\gamma)$ idénticamente nulo.*

Demostración. Por la Proposición 6.12 anterior, la curva parametrizada $t \mapsto \gamma(t)$ es una geodésica conforme si cumple simultáneamente las condiciones:

(a) la parametrización define el parámetro conforme de la curva, que por la Proposición 6.14 es equivalente a verificar: $L^\gamma(\gamma'(t)) = 0$, $\forall t$;

(b) su trayectoria es un círculo conforme, que por la Proposición anterior equivale a: $L^\gamma(\gamma^\perp) = 0$.

Se concluye así que la curva $\gamma(t)$ es geodésica conforme si y sólo si su tensor de Schouten L^γ es idénticamente nulo. ■

Reflexión final

Los resultados que aquí hemos obtenido en relación a los invariantes ligados a curvas, muestran que es posible estudiar la geometría propia de una variedad conforme por medio de la conexión de Fermi-Walker y del tensor de Schouten asociados. Se observa además que desde la perspectiva que ofrecen la conexión Fermi-Walker y el tensor de Schouten, se definen de un modo muy natural los invariantes conformes clásicos asociados a curvas (originales del artículo de Cartan [9]). Bajo tales definiciones, coinciden con el análogo conforme a los habituales invariantes métricos sobre curvas.

Recordemos estos invariantes bien conocidos de la geometría Riemanniana (véase por ejemplo Eisenhart [15]).

La conexión de Levi-Civita ∇ de la estructura Riemanniana ambiente permite asociar a cada curva parametrizada $t \mapsto \gamma(t) \in M$ una aceleración $a^\gamma = \frac{\nabla}{dt}\gamma' \in \mathfrak{X}(\gamma)$, equivalente a la *1-forma de aceleración*

$$\alpha^\gamma = \left(\tfrac{\nabla}{dt}\gamma'\right)_{\downarrow \mathbf{g}} \in \Lambda^1(\gamma)$$

(a) Sobre la curva se distingue una familia de parametrizaciones $t \mapsto \gamma(t)$ a velocidad constante, que pueden caracterizarse a través de la condición

$$\alpha^\gamma(\gamma') = 0 \;\Leftrightarrow\; \mathbf{g}(a^\gamma, \gamma') = 0.$$

(b) Las geodésicas de la variedad Riemanniana son aquellas curvas parametrizadas que tienen asociada una aceleración idénticamente nula

$$\alpha^\gamma = 0 \in \Lambda^1(\gamma) \;\Leftrightarrow\; a^\gamma = 0 \in \mathfrak{X}(\gamma).$$

(c) Para una curva general, se define el parámetro arco s como el dado por aquellas parametrizaciones $s \mapsto \gamma(s)$ que verifican

$$\mathbf{g}(\gamma'(s), \gamma'(s)) = 1.$$

Las sucesivas derivadas del campo $\gamma'(s)$ respecto a la conexión ∇/dt definen la referencia móvil de Frênet $(E_1, ..., E_m)_s \in O(M)_{\gamma(s)}$ caracterizada por ser $E_1 = \gamma'$ y

$$span\left\{\tfrac{\nabla}{ds}\gamma', ..., (\tfrac{\nabla}{ds})^j\gamma'\right\} = span\{E_2(s), ..., E_{j+1}(s)\}, \quad \forall j \geq 1.$$

Entonces se tiene que $a^\gamma = \lambda_1 E_2$, y $\frac{\nabla}{ds}E_j = -\lambda_{j-1}E_{j-1} + \lambda_j E_{j+1}$ $\forall j \geq 2$ para ciertas funciones $\lambda_1(s), ..., \lambda_{m-1}(s)$ que definen las curvaturas de $\gamma(s)$.

Análogamente, hemos demostrado que la estructura conforme del ambiente induce sobre cada curva parametrizada $t \mapsto \gamma(t) \in M$ una conexión de Fermi-Walker D^γ/dt, y un tensor de Schouten

$$L^\gamma \in \Lambda^1(\gamma).$$

Se tienen entonces los siguientes hechos:

(a) Sobre la curva se distingue el parámetro proyectivo a través de la familia de parametrizaciones que verifican

$$L^\gamma(\gamma') = 0.$$

(b) Las geodésicas de la variedad conforme son aquellas curvas parametrizadas que tienen asociada un tensor de Schouten idénticamente nulo

$$L^\gamma = 0 \in \Lambda^1(\gamma).$$

(c) Para una curva general, se define el arco conforme s a través de parametrizaciones $s \mapsto \gamma(s)$ verificando

$$\frac{\mathbf{g}(\mathbb{L}^\gamma(s), \mathbb{L}^\gamma(s))}{\mathbf{g}(\gamma'(s), \gamma'(s))} = 1$$

para $\mathbb{L}^\gamma \in \mathfrak{X}(\gamma)$ el campo ortogonal de Schouten asociado de (6.45). Las sucesivas derivadas del campo $\mathbb{L}^\gamma(s)$ respecto a la conexión de Fermi-Walker D^γ/ds definen un referencia móvil (de Frênet) conforme $(E_1, ..., E_m)_s \in CO(M)_{\gamma(s)}$ caracterizada por ser $E_1 = \gamma'$, $E_2 = \mathbb{L}^\gamma$ y

$$span\left\{\tfrac{D^\gamma}{ds}\mathbb{L}^\gamma, ..., (\tfrac{D^\gamma}{ds})^j\mathbb{L}^\gamma\right\} = span\{E_3(s), ..., E_{j+2}(s)\}, \quad \forall j \geq 1.$$

Entonces se tiene que $\mathbb{L}^\gamma = \lambda_2 E_3$, y $\frac{D^\gamma}{ds}E_j = -\lambda_{j-1}E_{j-1} + \lambda_j E_{j+1}$ $\forall j \geq 3$ para ciertas funciones $\lambda_2(s), ..., \lambda_{m-1}(s)$ que definen las curvaturas conformes de $\gamma(s)$.

Capítulo 7

Holonomía conforme

Este capítulo es hasta cierto punto independiente del resto y su objetivo es presentar una teoría para una nueva noción de holonomía asociada a las variedades conformes Riemannianas.

Parte de las cuestiones que nos planteamos aquí permanecen aun abiertas. Sin embargo consideramos adecuada la inclusión de este último capítulo porque propone un planteamiento con interesantes perspectivas. Se pretende relacionar el tensor de curvatura de Weyl con una noción de holonomía conforme, basada en el desplazamiento natural de las esferas tangentes a lo largo de curvas cerradas en la variedad. Se busca una relación análoga a la que existe en geometría Riemanniana entre el tensor de curvatura de la conexión de Levi-Civita y el grupo de holonomía asociado al transporte paralelo sobre curvas cerradas.

La noción de holonomía asociada a una conexión tiene sus orígenes en Cartan [11], y esencialmente mide la dependencia del transporte paralelo en función de la curva parametrizada que se tome como base (se aprecia así que la holonomía debe estar relacionada con la noción de curvatura y esa relación se formaliza en el Teorema de Ambrose-Singer). En la primera sección se repasa la noción de holonomía de una conexión principal, y se enuncian sin demostración los resultados más relevantes, a saber: que el grupo de holonomía de una conexión principal sobre una variedad es un subgrupo de Lie del grupo de estructura G (formalmente demostrado por Borel-Lichnerowicz [6]), que la conexión puede reducirse al fibrado de holonomía (Teorema de reducción), y muy especialmente, que el álgebra de holonomía esta generada por los valores que toma la forma de curvatura de la conexión (Teorema de Ambrose-Singer, publicado en el artículo Ambrose-Singer [1]).

A continuación (sección 2) se estudia el caso de una geometría normal de Cartan $(Q(M), \omega)$ asociada a la estructura conforme de una variedad M. La conexión que rige esta estructura es una conexión de Cartan $\omega \in \Lambda^1(Q(M), \mathfrak{g})$, que va ligada a una conexión principal ϖ únicamente cuando se considera el fibrado extendido $P(M)$. Presentamos aquí una definición original de holonomía para el par $(Q(M), \omega)$ mediante un procedimiento que esencialmente consiste en lo siguiente:

(**a**) Se toman en M únicamente aquellas curvas cerradas (diferenciables a trozos) que tienen la propiedad de dejar el origen de la esfera tangente en su posición inicial tras ser transportada ω-paralelamente a lo largo de todo el lazo. Se obtiene así una familia más restringida de lazos en M, que depende no ya de la conexión normal de Cartan ω tomada sinó únicamente de la estructura conforme del ambiente. Denotamos a esta familia por $C(x, M, \mathcal{C})$.

(**b**) El desplazamiento ω-paralelo de la esfera tangente a lo largo de una curva $\gamma \in C(x, M, \mathcal{C})$ conlleva un movimiento de la esfera tangente que deja fijo el origen y respeta así el fibrado de referencias especiales $Q(M)$. Es en este sentido que podemos hablar de una holonomía asociada a $(Q(M), \omega)$. En cada $q_0 \in Q(M)$ se obtiene un grupo de holonomía $H^\omega(q_0)$ subgrupo de Lie de H^m, y un fibrado de holonomía $Q(q_0)$ con grupo de estructura $H^\omega(q_0)$. En este caso, $Q(q_0)$ es un subfibrado de $Q(M)$ que se proyecta sobre una subvariedad $N^\omega(x_0) \subset M$ que en general no cubre todo M. Veremos que las subvariedades $N^\omega(x_0)$ dependen sólo de la estructura conforme del ambiente y pueden denotarse por $N(x_0)$.

En la sección 3 demostramos que a partir de esta definición de holonomía, que variará en función de la conexión normal de Cartan considerada sobre M, es posible definir una holonomía propia de la estructura conforme del ambiente. El procedimiento es el siguiente:

Partimos de la identificación natural del espacio T_xM con el tangente de esfera $\overline{T}_xM$ en el origen, $T_{O_x}\left(\overline{T}_xM\right) \equiv T_xM$. Cada lazo en $C(x, M, \mathcal{C})$ define a través del transporte ω-paralelo una transformación que fija el origen O_x en la esfera tangente $\overline{T}_xM$, y que tiene como diferencial en el origen un isomorfismo conforme de T_xM. Un cambio en la conexión ω altera la transformación $\overline{T}_xM$ pero no su diferencial en el origen, y se obtiene así una noción de holonomía infinitesimal formada por automorfismos conformes del tangente T_xM, ligada exclusivamente a la estructura conforme.

Esta definición de holonomía conforme va asociada a un grupo de Lie $\Phi(q) \subset CO(m)$ con álgebra $\mathfrak{h}_*(q) \subset \mathfrak{co}(m)$. Ocurre que la subálgebra $\mathfrak{h}_*(q)$ contiene a la familia de los valores que toma el tensor de curvatura de Weyl, que como sabemos (Corolario 5.1) está en correspondencia con la componente en $\mathfrak{co}(m)$ de la forma de curvatura de la conexión de Cartan ω. Tal y como anunciamos al principio, su busca obtener un resultado de tipo Ambrose-Singer, que afirme que el álgebra de holonomía conforme $\mathfrak{h}_*(q)$ *esté genereda* por dicha familia de valores dada por el tensor de Weyl.

Weyl demostró que el tensor W definía un invariante conforme que se anulaba necesariamente en caso de que la estructura conforme fuera localmente plana; que esto era también una condición suficiente fue demostrado por Schouten (para $m > 3$). Estas propiedades consagran al tensor de Weyl como un importante invariante de la geometría conforme. La introducción de la noción de holonomía para la estructura conforme, ofrece además la posibilidad de dar al tensor de curvatura de Weyl una interpretación más geométrica asociada al transporte a lo largo de lazos de la variedad, tal y como es habitual para las curvaturas,.

A estas alturas, los resultados obtenidos sobre la relación entre el álgebra conforme $\mathfrak{h}_*(q)$ y la curvatura de Weyl son todavía parciales. Sin embargo, el resultado que ofrecemos en el Teorema 7.6, indica que el álgebra conforme mide fielmente la presencia de curvatura en la estructura dado que de su trivialidad ($\mathfrak{h}_*(q) = 0$) se deduce que la estructura es localmente plana.

7.1 Precedentes: holonomía de una conexión principal

Sea $P \to M$ un fibrado principal cuyo grupo estructural viene dado por G grupo de Lie con álgebra asociada $\mathfrak{g}$. Una conexión principal en $P \to M$ va ligada a una 1-forma horizontal $\varpi \in \Lambda^1(P, \mathfrak{g})$ que induce una noción de transporte paralelo sobre las curvas de M. En particular, el transporte paralelo a lo largo de los lazos de M (curvas cerradas y diferenciables a trozos) da lugar a la definición del grupo de holonomía de la conexión. Los resultados que brevemente se presentan a continuación son ya conocidos y sus demostraciones, que aquí omitimos, pueden encontrarse en Kobayashi-Nomizu [24], Poor [37], o Lichnerowicz [34].

Para cada punto x en una variedad M denotamos por $C_\circ(x, M)$ al espacio de curvas cerradas diferenciables a trozos, con origen y final en el punto $x \in M$, es decir, el espacio de lazos $\gamma : I = [t_0, t_1] \to M$ con $\gamma_{t_0} = \gamma_{t_1} = x$.

Sea $\varpi \in \Lambda^1(P, \mathfrak{g})$ la forma horizontal de una conexión en $P \to M$, G-fibrado principal sobre la variedad M. Fijado un elemento $p \in P_x$, cada lazo $t \mapsto \gamma_t \in M$ en $C_\circ(x, M)$ da lugar a una curva $t \mapsto (\mathbb{P}_p\gamma)_t \in P$ como elevación ϖ-horizontal de γ_t por $p = (\mathbb{P}_\gamma p)_{t_0} \in P_x$. La curva $(\mathbb{P}_p\gamma)_t$ ya no es necesariamente una curva cerrada en el fibrado P, y la variación entre sus extremos $(\mathbb{P}_\gamma p)_{t_0} = p$ y $(\mathbb{P}_\gamma p)_{t_1}$, ambos en la fibra P_x, viene dada por un elemento $g \in G$ tal que $(\mathbb{P}_\gamma p)_{t_1} = p \cdot g$.

Definición 7.1 *Para una conexión $\varpi \in \Lambda^1(P, \mathfrak{g})$ en un G-fibrado principal $P \to M$, el* grupo de holonomía con base $p \in P$ *es el subgrupo de G definido por*

$$\Phi(p) = \left\{ g \in G : (\mathbb{P}_\gamma p)_{t_1} = p \cdot g, \ \textit{para} \ \gamma \in C_\circ(x, M) \ \textit{con} \ \gamma_{t_0} = \gamma_{t_1} = x \right\}.$$

El hecho de que $\Phi(p)$ sea efectivamente un subgrupo abstracto de G es consecuencia de las siguientes propiedades:

(a) si $\gamma_t^- \in C_\circ(x, M)$ denota el lazo γ_t recorrido en sentido inverso, se tiene que

$$(\mathbb{P}_{\gamma^-} p)_{t_1} = p \cdot g^{-1}, \text{ para } (\mathbb{P}_\gamma p)_{t_1} = p \cdot g;$$

(b) dados $\gamma, \bar{\gamma} \in C_\circ(x, M)$ su composición forma un lazo $\gamma \circ \bar{\gamma} \in C_\circ(x, M)$ tal que

$$\left(\mathbb{P}_{\gamma\circ\bar{\gamma}} p\right)_{t_1} = p \cdot (g \circ \bar{g}), \text{ para } (\mathbb{P}_\gamma p)_{t_1} = p \cdot g \text{ y } (\mathbb{P}_{\bar{\gamma}} p)_{t_1} = p \cdot \bar{g}.$$

Se demuestra también que el grupo de holonomía $\Phi(p)$ de una conexión principal $\varpi \in \Lambda^1(P, \mathfrak{g})$ es un subgrupo de Lie de G cuya álgebra asociada denotamos por $\mathfrak{g}(p)$ y define una subálgebra de $\mathfrak{g}$. La componente conexa de $\Phi(p)$ es $\Phi^0(p)$, el *grupo de holonomía restringido*, asociado al transporte paralelo sobre los lazos de $C_\circ(x, M)$ que son homótopos a cero. Para una demostración completa de estos resultados puede consultarse Kobayashi-Nomizu [24], capítulo II.4.

Para una misma curva $\gamma_t \in C_\circ(x, M)$ las elevaciones ϖ-horizontales por dos elementos distintos en la fibra P_x, p y $p \cdot h$ con $h \in G$, se relacionan mediante la identidad $\left(\mathbb{P}_\gamma(p \cdot h)\right)_t = \left(\mathbb{P}_\gamma p\right)_t \cdot h$, de modo que si $\left(\mathbb{P}_\gamma p\right)_{t_1} = p \cdot g$, entonces,

$$\left(\mathbb{P}_\gamma(p \cdot h)\right)_{t_1} = \left(\mathbb{P}_\gamma p\right)_{t_1} \cdot h = (p \cdot g) \cdot h = (p \cdot h) \cdot \left(h^{-1} \cdot g \cdot h\right).$$

Es claro que los grupos de holonomía con base los puntos p y $p \cdot h$ asociados a la conexión ϖ son conjugados el uno respecto del otro,

$$\Phi(p \cdot h) = C_{h^{-1}}\left(\Phi(p)\right) = h^{-1} \cdot \Phi(p) \cdot h,$$

y sus respectivas álgebras de holonomía resultan adjuntas,

$$\mathfrak{g}(p \cdot h) = Ad_{h^{-1}}\left(\mathfrak{g}(p)\right).$$

Si la variedad M es conexa, cualquier punto $\overline{x} \in M$ puede unirse al punto x por una curva $\tau : [0, 1] \ni t \mapsto \tau_t \in M$, con $\tau_0 = x$ y $\tau_1 = \overline{x}$. Se observa entonces que la correspondencia $C_\circ(\overline{x}, M) \ni \gamma \mapsto \tau^{-1} \circ \gamma \circ \tau \in C_\circ(x, M)$ da lugar a una equivalencia entre los transportes ϖ-paralelos a lo largo de lazos con base los puntos $\overline{x}$ y x. En particular, fijando $p \in P_x$ y $\overline{p} = \left(\mathbb{P}_p \tau\right)_{t_1} \in P_{\overline{x}}$, se tiene

$$\left(\mathbb{P}_\gamma \overline{p}\right)_{t_1} = \overline{p} \cdot g \;\Leftrightarrow\; \left(\mathbb{P}_{\tau^{-1}\circ\gamma\circ\tau} p\right)_{t_1} = p \cdot g \quad (\forall \gamma \in C_\circ(\overline{x}, M))$$

y los grupos de holonomía asociados son idénticos: $\Phi(p) = \Phi(\overline{p})$.

Podemos concluir entonces que la holonomía de una conexión principal $\varpi \in \Lambda^1(P, \mathfrak{g})$ en el G-fibrado $P \to M$, sobre una variedad conexa M, define una familia de subgrupos de Lie del grupo de estructura G equivalentes por conjugación.

A continuación ofrecemos un par de resultados clásicos para la holonomía en fibrados principales. Se han omitido las demostraciones de estos teoremas que pueden encontrarse en Kobayashi-Nomizu [24] (cap. II.7 y II.8), Poor [37] (pág. 281 y 287).

Teorema 7.1 (de reducción) *Sea $\varpi \in \Lambda^1(P, \mathfrak{g})$ una conexión en un G-fibrado principal $P \to M$, con M variedad conexa. Fijado $p \in P$, el conjunto $P(p)$ de puntos de P que se unen a p por una curva ϖ-horizontal, es subfibrado principal de grupo $\Phi(p)$. Además, la restricción de la 1-forma $\varpi|_{TP(p_0)} \in \Lambda^1(P(p), \mathfrak{g}(p))$ define una conexión principal en $P(p)$.*

El subfibrado $P(p) \to M$ recibe el nombre de *fibrado de holonomía* de la conexión $\varpi \in \Lambda^1(P, \mathfrak{g})$ con base el punto $p \in M$.

La relación que intuitivamente se entiende que ha de existir entre la noción de grupo de holonomía y la noción de curvatura para la conexión ϖ en P viene formalizada a través del siguiente resultado originalmente presentado en el artículo de Ambrose-Singer [1].

Teorema 7.2 (Ambrose-Singer) *Dada la conexión principal $\varpi \in \Lambda^1(P, \mathfrak{g})$ en el fibrado $P \to M$ sobre una variedad diferenciable conexa M, y dado $p \in P$, el álgebra de holonomía $\mathfrak{g}(p_0) \leq \mathfrak{g}$ coincide con el subespacio generado por*

$$\{\ {}_{\overline{p}}(X, Y) \in \mathfrak{g} : X, Y \in \mathfrak{X}(P) \ \text{y}\ \overline{p} \in P(p)\} \tag{7.1}$$

siendo $\ = d\varpi - \frac{1}{2}[\varpi, \varpi] \in \Lambda^2(P, \mathfrak{g})$ *la forma de curvatura de la conexión ϖ.*

7.2 Holonomía de una geometría conforme de Cartan

Sea M una variedad conforme conexa, de dimensión $m > 2$. Como se vio en el Capítulo **5**, la estructura conforme define sobre la variedad M un fibrado tangente esférico $\overline{T}M \to M$, cuyas fibras son $\overline{T}_xM = T_xM \cup \{\infty_x\}$, la complección esférica del espacio tangente conforme. La familia de referencias esféricas, esto es, de difeomorfismos conformes $p : \mathbb{S}^m \xrightarrow{\sim} \overline{T}_xM$, $x \in M$, forma un fibrado principal $P(M) \to M$ con grupo estructural G^m. Aquellas referencias esféricas que preservan la posición del origen, $\mathbb{S}^m \ni O \mapsto O_x \in T_xM \subset \overline{T}_xM$, constituyen una reducción $Q(M) \to M$ del fibrado $P(M)$ para el subgrupo $H^m \subset G^m$.

A continuación vamos a introducir en el fibrado $P(M)$ la definición de un par de funciones directamente relacionadas con la posición distinguida del subfibrado $Q(M)$ en $P(M)$ (léase también: la posición distinguida del punto origen O_x en $\overline{T}_x M$).

Obsérvese que dada la referencia esférica $p : \mathbb{S}^m \to \overline{T}_x M$ en $P(M)_x$, verificando $p^{-1}(O_x) \neq \infty \in \mathbb{S}^m$ (i.e. $p^{-1}(O_x) \in \iota(\mathbb{R}^m)$), existe un único $\mathbf{V}_p \in \mathbb{R}^m$ tal que

$$p^{-1}(O_x) = \iota(-\mathbf{V}_p) = \exp(-\mathbf{V}_p)(O) \in \iota(\mathbb{R}^m) \qquad \text{(véase Observación 5.9)}$$

La referencia $p \cdot \exp(-\mathbf{V}_p) \in P(M)$, para $\exp(-\mathbf{V}_p) \in H^m$, es tal que

$$(p \cdot \exp(-\mathbf{V}_p))(O) = p(\exp(-\mathbf{V}_p)(O)) = p(\iota(-\mathbf{V}_p)) = O_x$$

y por lo tanto define una referencia especial $\mathbf{q}(p) = p \cdot \exp(-\mathbf{V}_p) \in Q(M)_x$.

El conjunto $\mathring{P}(M) = \{p \in P(M) : p^{-1}(O_x) \neq \infty \in \mathbb{S}^m\}$ contiene al subfibrado $Q(M)$ y define un abierto denso en $P(M)$ (i.e. el cierre de $\mathring{P}(M)$ cubre la totalidad de $P(M)$). Sobre el entorno abierto $\mathring{P}(M)$ de $Q(M)$ se definen las siguientes aplicaciones diferenciables:

$$\begin{array}{rcl} \mathbf{V} : \mathring{P}(M) & \longrightarrow & \mathbb{R}^m \\ p & \longmapsto & \mathbf{V}_p,, p^{-1}(O_x) = \iota(-\mathbf{V}_p) \end{array} \tag{7.2}$$

$$\begin{array}{rcl} \mathbf{q} : \mathring{P}(M) & \longrightarrow & Q(M) \\ p & \longmapsto & \mathbf{q}(p) = p \cdot \exp(-\mathbf{V}_p) \end{array} \tag{7.3}$$

caracterizadas a través de la siguiente identidad: $\forall p \in \mathring{P}(M)$,

$$p = \mathbf{q}(p) \cdot \exp \mathbf{V}_p, \text{ con } \mathbf{q}(p) \in Q(M), \mathbf{V}_p \in \mathbb{R}^m. \tag{7.4}$$

Observación 7.1 *Fijada una referencia $p \in \mathring{P}(M)$ se tienen las equivalencias*

$$p \in Q(M) \Leftrightarrow \mathbf{q}(p) = p \Leftrightarrow \mathbf{V}_p = 0,$$

y concluimos que para todo $q \in Q(M)$ se verifica la igualdad

$$\ker(d_q V) = T_q Q(M) \subset T_q P(M),$$

dado que $V_{q \cdot \exp W} = W$, $\forall W \in \mathbb{R}^m$.

Proposición 7.1 *Las funciones $\mathbf{q} : \mathring{P}(M) \to Q(M)$ y $\mathbf{V} : \mathring{P}(M) \to \mathbb{R}^m$ verifican las siguientes propiedades $\forall p \in \mathring{P}(M)$:*

(a) $\forall W \in \mathbb{R}^m = \mathfrak{g}_{-1}$, $\mathbf{q}(p \cdot \exp W) = \mathbf{q}(p)$ y $\mathbf{V}_{p \cdot \exp W} = \mathbf{V}_p + W$.

(*b*) $\forall h \in CO(m) \subset H^m$, $\mathbf{q}(p \cdot h) = \mathbf{q}(p) \cdot h$ *y* $\mathbf{V}_{p \cdot h} = h_*^{-1}(\mathbf{V}_p)$

(*c*) $\forall \eta \in \mathbb{R}^{m*} = \mathfrak{g}_1$, $\mathbf{V}_{p \cdot \exp \eta} = F_\eta(\mathbf{V}_p)$, *siendo*

$$F_\eta(V) = \frac{V + \frac{1}{2}\|V\|^2 \eta^\intercal}{1 + \alpha V + \frac{1}{4}\|\eta\|^2 \|V\|^2}$$

Demostración.

(**a**) Obsérvese que si $p = \mathbf{q}(p) \cdot \exp \mathbf{V}_p$, con $\mathbf{q}(p) \in Q(M)$ y $\mathbf{V}_p \in \mathbb{R}^m$, entonces

$$p \cdot \exp W = \mathbf{q}(p) \cdot \exp \mathbf{V}_p \cdot \exp W = \mathbf{q}(p) \cdot \exp (\mathbf{V}_p + W)$$

y es $\mathbf{q}(p \cdot \exp W) = \mathbf{q}(p)$ y $\mathbf{V}_{p \cdot \exp W} = \mathbf{V}_p + W$.

(**b**) Teniendo en cuenta que para $V \in \mathbb{R}^m$y $h \in CO(m)$ es

$$h^{-1} (\exp V)\, h = \exp \left(h_*^{-1} V\right) \tag{7.5}$$

se tiene que

$$p \cdot h = \mathbf{q}(p) \cdot \exp \mathbf{V}_p \cdot h = \mathbf{q}(p) \cdot h \cdot \exp \left(h_*^{-1} \mathbf{V}_p\right)$$

de modo que $\mathbf{q}(p \cdot h) = \mathbf{q}(p) \cdot h$ y $\mathbf{V}_{p \cdot h} = h_*^{-1}(\mathbf{V}_p)$. Para probar la igualdad (7.5), basta tener en cuenta la fórmula $h_* = rR \in CO(m)$ (véase (5.15), pág. 89) y observar que $h^{-1} (\exp V)\, h =$

$$= \begin{pmatrix} r & 0 & 0 \\ 0 & R^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & r^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ V & I & 0 \\ -\frac{\|V\|^2}{2} & -V^\intercal & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & R & 0 \\ 0 & 0 & r \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ (rR)^{-1} V & I & 0 \\ -\frac{\|V\|^2}{2r^2} & -V^\intercal r^{-1} R & 1 \end{pmatrix} = \exp \left((rR)^{-1} V\right) = \exp \left(h_*^{-1} V\right)$$

(**c**) Por la definición (7.2), determinar $\mathbf{V}_{p \cdot \exp \eta}$ consiste en determinar un vector $W \in \mathbb{R}^m$, tal que $(\exp -W)\,(O) = \iota(-W) = (p \cdot \exp \eta)^{-1}(O_x)$, es decir, tal que

$$(\exp -W)\,(O) = \exp(-\eta) \cdot p^{-1}(O_x) = \exp(-\eta) \exp(-V_p)\,(O)$$

pero $\exp(-\eta) \exp(-V)\,(O) =$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -\eta & -\frac{\|\eta\|^2}{2} \\ 0 & I & \eta^\intercal \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -V \\ -\frac{\|V\|^2}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + \eta V + \frac{\|\eta\|^2 \|V\|^2}{4} \\ -V - \frac{1}{2}\|V\|^2 \eta^\intercal \\ -\frac{\|V\|^2}{2} \end{pmatrix}$$

de modo que

$$W = \frac{V + \frac{1}{2}\|V\|^2 \eta^\intercal}{1 + \alpha V + \frac{1}{4}\|\eta\|^2 \|V\|^2}.$$

■

7.2.1 Holonomía de una conexión de Cartan $\omega \in \Lambda^1(Q(M), \mathfrak{g})$

La elección de una conexión lineal ∇ compatible con la estructura conforme de la variedad M, va unívocamente ligada a una conexión normal de Cartan $\omega \in \Lambda^1(Q(M), \mathfrak{g})$ que da lugar a la *geometría conforme de Cartan* $(Q(M), \omega)$ (Teorema 5.5, pág. 116). La 1-forma $\omega \in \Lambda^1(Q(M), \mathfrak{g})$ puede extenderse de manera única a una 1-forma $\varpi \in \Lambda^1(P(M), \mathfrak{g})$ que define una conexión principal en el fibrado de referencias esféricas generales $P(M)$, y verifica

$$\varpi_q|_{T_qQ} = \omega_q : T_qQ \to \mathfrak{g}, \forall q \in Q(M).$$

Cada referencia especial $q : \mathbb{S}^m \to \overline{T}_xM$ da lugar a un subgrupo $\Phi^\varpi(q) \subset G^m$ como grupo de holonomía con base $q \in P(M)$ de la conexión principal $\varpi \in \Lambda^1(P(M), \mathfrak{g})$. Obsérvese que si un lazo $\gamma \in C_\circ(x, M)$, con $\gamma_{t_0} = \gamma_{t_1} = x$, es tal que $(\mathbb{P}_\gamma q)_{t_1} = q \cdot g$ para $g \in G^m$, entonces, el transporte paralelo de la esfera $\overline{T}_xM$ a lo largo de la curva $\gamma : [t_0, t_1] \to M$ es el difeomorfismo conforme

$$|\ |_{\gamma, t_0, t_1} = q \cdot g \cdot q^{-1} : \overline{T}_xM \to \overline{T}_xM.$$

El grupo de holonomía $\Phi^\varpi(q)$ refleja, en definitiva, el grupo de movimientos de la esfera tangente $\overline{T}_xM$ obtenidos como resultado de su transporte paralelo a lo largo de lazos de $C_\circ(x, M)$,

$$\Phi_x^\varpi = \left\{|\ |_{\gamma, t_0, t_1} : \overline{T}_xM \to \overline{T}_xM \ / \ \gamma \in C_\circ(x, M) \text{ con } \gamma_{t_0} = \gamma_{t_1} = x\right\}.$$

Restringiéndonos a los movimientos de la esfera tangente $\overline{T}_xM$ que dejan fijo su punto origen O_x, es posible asociar a la holonomía de la conexión ω un nuevo grupo $H^\omega(q) = \Phi^\varpi(q) \cap H^m$, i.e.

$$H^\omega(q) = \left\{h \in H^m : (\mathbb{P}_\gamma p)_{t_1} = p \cdot h, \text{ para } \gamma \in C_\circ(x, M) \text{ con } \gamma_{t_0} = \gamma_{t_1} = x\right\},$$

que define un subgrupo de Lie de H^m. El subgrupo $H^\omega(q)$ recibe el nombre de *grupo de holonomía de la conexión de Cartan* $\omega \in \Lambda^1(Q(M), \mathfrak{g})$ con base $q \in Q(M)$.

Observación 7.2 *La conexión de Cartan $\omega \in \Lambda^1(Q, \mathfrak{g})$ distingue para cada $x \in M$ una subfamilia $C(x, M, \omega)$ formada por los lazos $t \mapsto \gamma_t \in C_\circ(x, M)$ cuyo desarrollo*[1] *en $\overline{T}_xM$, $t \mapsto c_t = |\ |_{\gamma, t, t_0}(O_{\gamma_t}) \in \overline{T}_xM$, da lugar a una curva igualmente cerrada, i.e. $t \mapsto c_t \in C_\circ(O_x, \overline{T}_xM)$. El grupo de holonomía $H^\omega(q)$ corresponde entonces al transporte ω-paralelo a lo largo de lazos en $C(x, M, \omega)$,*

$$H_x^\omega = \left\{|\ |_{\gamma, t_0, t_1} : \overline{T}_xM \to \overline{T}_xM \ / \ \gamma \in C(x, M, \omega) \text{ con } \gamma_{t_0} = \gamma_{t_1} = x\right\}. \qquad (7.6)$$

[1] Véase la Definición 5.8 en la página 108.

Para dos referencias especiales q y $q \cdot h$, $h \in H^m$, los respectivos grupos asociados a la holonomía de $\omega \in \Lambda^1(Q(M), \mathfrak{g})$ mantienen nuevamente una relación de conjugación:

$$\begin{aligned} H^\omega(q \cdot h) &= \Phi(q \cdot h) \cap H^m = C_{h^{-1}}\left(\Phi(q)\right) \cap H^m \\ &= C_{h^{-1}}\left(\Phi(q) \cap H^m\right) = C_{h^{-1}}\left(H^\omega(q)\right). \end{aligned}$$

Si $\mathfrak{h}^\omega(q)$ denota la subálgebra de holonomía asociada al grupo de Lie $H^\omega(q)$, se tiene que $\mathfrak{h}^\omega(q) = \mathfrak{g}(q) \cap \mathfrak{h}$, y por la relación anterior $\forall h \in H^m$ es

$$\mathfrak{h}^\omega(q \cdot h) = Ad_{h^{-1}} \mathfrak{h}^\omega(q).$$

Holonomía infinitesimal

Existe una identificación natural entre el espacio vectorial conforme de partida y el espacio tangente a su complección esférica en el punto origen (véase (5.10), pág. 83). En particular, se tienen las identificaciones $\mathbb{R}^m \equiv T_O\mathbb{S}^m$ y $T_xM \equiv T_{O_x}\left(\overline{T}_xM\right)$. Así, la asignación que a cada referencia esférica $q : \mathbb{S}^m \to \overline{T}_xM$ le hace corresponder su diferencial en el origen $q_* = d_O\, q : \mathbb{R}^m \to T_xM$ define una proyección entre fibrados

$$\begin{array}{rcl} \pi : Q(M) & \longrightarrow & CO(M) \qquad \text{(véase Proposición 5.5)} \\ q & \longmapsto & q_* \end{array}$$

que a nivel de grupos estructurales va asociada a la proyección

$$\begin{array}{rcl} pr_{CO(m)} : H^m & \longrightarrow & CO(m) \\ h & \longmapsto & h_* = d_O\, h \end{array}$$

Cada elemento del grupo de holonomía $H^\omega_x = (7.6)$ asociado a la conexión normal de Cartan $\omega \in \Lambda^1(Q(M), \mathfrak{g})$, define un movimiento de la esfera tangente $\overline{T}_xM$ deja fijo el punto origen $O_x \in \overline{T}_xM$. Su diferencial en O_x da lugar a un isomorfismo conforme del espacio tangente $T_xM \equiv T_{O_x}\left(\overline{T}_xM\right)$. De este modo, es posible asociar a la conexión de Cartan ω un *grupo de holonomía infinitesimal* en $x \in M$, formado los por isomorfismos conformes de T_xM asociados a los movimientos de la esfera $\overline{T}_xM$ que se obtienen por transporte paralelo a lo largo de lazos de $C(x, M, \omega)$.

Fijada una referencia especial $q \in Q(M)_x$ la *holonomía infinitesimal* de la conexión de Cartan $\omega \in \Lambda^1(Q(M), \mathfrak{g})$ con base q es el subgrupo $H^\omega_*(q) = pr_{CO(m)}\left(H^\omega(q)\right)$ de $CO(m)$ obtenido por proyección del grupo de holonomía $H^\omega(q)$,

$$H^\omega_*(q) = \left\{ h_* \in CO(m) : (\mathbb{P}_\gamma p)_{t_1} = p \cdot h, \text{ para } \gamma \in C(x, M, \omega) \text{ con } \gamma_{t_0} = \gamma_{t_1} = x \right\}.$$

Para dos referencias esféricas especiales de $\overline{T}_xM$, q y $q \cdot h$ con $h \in H^m$, los correspondientes grupos de holonomía infinitesimal mantienen la siguiente relación

$$\begin{aligned} H_*^\omega(q \cdot h) &= pr_{CO(m)}\left(H^\omega(q \cdot h)\right) = pr_{CO(m)}\left(C_{h^{-1}} H^\omega(q)\right) \\ &= pr_{CO(m)}\left(h^{-1} \cdot H^\omega(q) \cdot h\right) = h_*^{-1} \cdot pr_{CO(m)}\left(H^\omega(q)\right) \cdot h_* \\ &= C_{h_*^{-1}}\left(H^\omega(q)\right) \end{aligned}$$

siendo $h_* = pr_{CO(m)}(h) \in CO(m)$ la diferencial en el origen de $h \in H^m$.

En conclusión, dada la conexión conforme normal de Cartan ω sobre $Q(M)$, la noción de holonomía que se acaba de definir para ω permite asociar a cada referencia $q_0 \in Q(M)$: un grupo de holonomía $H^\omega(q) = \Phi^\omega(q) \cap H^m$ subgrupo de Lie de H^m; y un grupo asociado, de holonomía a nivel de las diferenciales, $H_*^\omega(q) = pr_{CO(m)} H^\omega(q)$ subgrupo de Lie de $CO(m)$.

7.2.2 Fibrado de holonomía

Tal y como ocurre en el caso de conexiones en fibrados principales, la holonomía de la conexión conforme de Cartan $\omega \in \Lambda^1(Q(M), \mathfrak{g})$ va ligada a la definición de un fibrado de holonomía $Q(q)$, en cada $q \in Q(M)$. Se cumple además que la restricción de la 1-forma $\omega|_{TQ(q)} \in \Lambda^1(Q(q), \mathfrak{g}(q))$ define nuevamente una conexión de Cartan. $Q(q)$ está formado por aquellas referencias especiales en $Q(M)$ relacionadas con la referencia inicial q en el sentido de que existe una curva horizontal en $P(M)$ que las une.

A través de la conexión principal $\varpi \in \Lambda^1(P(M), \mathfrak{g})$ que extiende a la conexión de Cartan $\omega \in \Lambda^1(Q(M), \mathfrak{g})$, es posible definir en el fibrado de referencias especiales $Q(M)$ la relación de equivalencia:

$q \sim \overline{q} \Leftrightarrow$ "las referencias q y $\overline{q}$ pueden unirse por un curva ϖ-horizontal en $P(M)$".

Si $P(q)$ denota el fibrado de holonomía de la conexión principal ϖ en $q \in P(M)$, entonces la clase de equivalencia asociada a una referencia $q \in Q(M)$ es

$$Q(q) = \{\overline{q} \in Q(M) : q \sim \overline{q}\} = Q(M) \cap P(q).$$

Observación 7.3

(a) *Dadas las referencias especiales q y $q \cdot h$ en $Q(M)$, con $h \in H^m$, se tiene que*

$$q \sim \overline{q} \;\Leftrightarrow\; q \cdot h \sim \overline{q} \cdot h$$

de modo que $Q(q \cdot h) = R_h\left(Q(q)\right) = \{\overline{q} \cdot h : \overline{q} \in Q(q)\}$

(b) *Para dos referencias especiales relacionadas, $q, \overline{q} \in Q(M)$ con $q \sim \overline{q}$, los respectivos grupos de holonomía asociados a la conexión de Cartan ω coinciden, $H^\omega(q) = H^\omega(\overline{q})$.*

(c) *Dadas la referencia especial $q \in Q(M)$ y $h \in H^m$, entonces,*

$$q \sim q \cdot h \;\Leftrightarrow\; h \in H^\omega(q).$$

Nos interesa estudiar la intersección $Q(M) \cap P(q_0)$, formada por referencias especiales en el fibrado de holonomía por $q_0 \in Q(M)$ asociado a la conexión principal ϖ en $P(M) \to M$. Para ello, empezamos determinando, la intersección en $T_qP(M)$ de los subespacios vectoriales $T_qQ(M)$ y $T_qP(q_0)$, para $q \in Q(q_0) = Q(M) \cap P(q_0)$.

Proposición 7.2 *Sea $P(q_0)$ el fibrado de holonomía asociado a la conexión principal $\varpi \in \Lambda^1(P(M), \mathfrak{g})$ con base la referencia especial q_0. Entonces, $\forall q \in Q(M) \cap P(q_0)$ es*

$$T_qQ(M) \cap T_qP(q_0) = \left\{ \widetilde{q_*(pr_{-1}B)} + (L_q)_*B \in T_qP(M) : B \in \mathfrak{g}(q_0) \right\} \tag{7.7}$$

siendo $\widetilde{q_*(pr_{-1}B)} \in T_qP(M)$ la elevación ϖ-horizontal del vector $q_*(pr_{-1}B) \in T_xM$ ($pr_{-1}B \in \mathbb{R}^m$, $q_* \in CO(M)_x$).

Demostración. Sea $\sigma : \mathcal{U}_x \to Q(M)$ una sección auxiliar definida en un entorno $\mathcal{U}_x$ de $x = \pi(q) \in M$, con $\sigma(x) = q$. El subespacio tangente de $Q(M)$ en q se describe entonces como la suma directa $T_qQ(M) = \sigma_*(T_xM) \oplus (L_q)_*\,\mathfrak{h}$. Si $\widetilde{v} \in T_qP(M)$ denota la elevación horizontal de $v \in T_xM$ en q, el vector $\sigma_*(v) - \widetilde{v}$ define un vector vertical en $\mathcal{V}_q = (L_q)_*(\mathfrak{g})$ caracterizado por

$$\omega(\sigma_*(v) - \widetilde{v}) = \omega(\sigma_*(v)) \in \mathfrak{g} \;\Leftrightarrow\; \sigma_*(v) - \widetilde{v} = (L_q)_*(\omega(\sigma_*(v)),$$

de lo que se concluye la identidad

$$\sigma_*(v) = \widetilde{v} + (L_q)_*(\omega(\sigma_*(v)) \in T_qQ(M).$$

Así, cada $\xi_q \in T_qQ(M)$ se corresponde con un par $v \in T_xM$, $A \in \mathfrak{h}$ tal que

$$\xi_q = \widetilde{v} \oplus (L_q)_*(\omega(\sigma_*(v)) + A) \in \mathcal{H}_q \oplus \mathcal{V}_q. \tag{7.8}$$

Por otra parte, el espacio tangente a $P(q_0)$ en q es $T_qP(q_0) = \mathcal{H}_q \oplus (L_q)_*\,\mathfrak{g}(q_0)$ y cada uno de sus elementos ξ_q viene dado por un par $u \in T_xM$, $B \in \mathfrak{g}(q_0)$ tal que

$$\xi_q = \widetilde{u} \oplus (L_q)_*(B) \in \mathcal{H}_q \oplus \mathcal{V}_q. \tag{7.9}$$

Un vector en la intersección $\xi_q \in T_qQ(M) \cap T_qP(q_0)$ se corresponde con la existencia de $u, v \in T_xM$, $A \in \mathfrak{h}$, $B \in \mathfrak{g}(q_0)$ tales que

$$\xi_q = \widetilde{u} \oplus (L_q)_*(B) = \widetilde{v} \oplus (L_q)_*(\omega(\sigma_*(v)) + A) \in \mathcal{H}_q \oplus \mathcal{V}_q$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \widetilde{u} = \widetilde{v} \in \mathcal{H}_q \\ (L_q)_*(B) = (L_q)_*(\omega(\sigma_*(v)) + A) \in \mathcal{V}_q \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u = v \in T_xM \\ B = \omega(\sigma_*(v)) + A \in \mathfrak{g} \end{cases}$$

Recuérdese que la descomposición del álgebra $\mathfrak{g} = \mathbb{R}^m \oplus \mathfrak{h}$, da lugar a la descomposición de la conexión normal de Cartan en $\omega = \omega_{-1} \oplus \omega_{\mathfrak{h}}$, siendo $\omega_{-1} \in \Lambda^1(Q(M), \mathbb{R}^m)$ tal que $\omega_{-1}(\sigma_*(v)) = q_*^{-1}(v) \in \mathbb{R}^m$, $\forall v \in T_xM$. Así, la igualdad

$$B = \omega(\sigma_*(v)) + A = q_*^{-1}(v) \oplus (\omega_{\mathfrak{h}}(\sigma_*(v)) + A) \in \mathfrak{g} = \mathbb{R}^m \oplus \mathfrak{h}$$

(para $A \in \mathfrak{h}$, $B \in \mathfrak{g}(q_0)$ y $v \in T_xM$) rompe en el sistema

$$\begin{cases} pr_{-1}B = q_*^{-1}(v) \in \mathbb{R}^m \Leftrightarrow v = q_*(pr_{-1}B) \in T_xM \\ pr_{\mathfrak{h}}B = \omega_{\mathfrak{h}}(\sigma_*(v)) + A \Leftrightarrow A = pr_{\mathfrak{h}}B - \omega_{\mathfrak{h}}(\sigma_*(v)) \in \mathfrak{h} \end{cases}$$

Así, cada $\xi_q \in T_qQ(M) \cap T_qP(q_0)$ está en correspondencia con un $B \in \mathfrak{g}(q_0)$ tal que

$$\xi_q = \widetilde{q_*(pr_{-1}B)} + (L_q)_*(B). \tag{7.10}$$

Para $B \in \mathfrak{g}(q_0)$ el vector definido en $T_qP(M)$ por $\xi_q =$ (7.10) está simultáneamente contenido en $T_qP(q_0)$ (aplicando (7.9) a $u = q_*(pr_{-1}B) \in T_xM$, $B \in \mathfrak{g}(q_0)$), y en $T_qQ(M)$ (aplicando (7.8) a $v = q_*(pr_{-1}B) \in T_xM$, $A = pr_{\mathfrak{h}}B - \omega_{\mathfrak{h}}(\sigma_*(v)) \in \mathfrak{h}$). Concluimos entonces con la identidad (7.7) del enunciado. ■

Corolario 7.1 *Para $q \in Q(M) \cap P(q_0)$ se verifican las siguientes igualdades:*

(i) $\dim(T_qQ(M) \cap T_qP(q_0)) = \dim \mathfrak{g}(q_0)$;

(ii) Si $\pi_* : T_qP(M) \to T_xM$ denota la diferencial en q de la proyección del fibrado $\pi : P(M) \to M$ y $x = \pi(q) \in M$, entonces:

- $\pi_*(T_qQ(M) \cap T_qP(q_0)) = q_*(pr_{-1}\mathfrak{g}(q_0)) \subset T_xM$,
- $\ker(\pi_*) \cap (T_qQ(M) \cap T_qP(q_0)) = (L_q)_*^{-1}(\mathfrak{g}(q_0) \cap \mathfrak{h})$.

Teorema 7.3 *La intersección en $P(M)$ del subfibrado $Q(M)$ con el subfibrado de holonomía $P(q_0)$ de $\varpi \in \Lambda^1(P(M), \mathfrak{g})$ define una subvariedad regular*

$$Q(q_0) = Q(M) \cap P(q_0)$$

cuya dimensión es $\dim Q(q_0) = \dim \mathfrak{g}(q_0)$.

Demostración. Por el Corolario anterior sabemos que en cada punto de la intersección $q \in Q(M) \cap P(q_0)$, se cumple:

$$\begin{aligned}
&\dim(T_q Q(M) \cap T_q P(q_0)) = \dim \mathfrak{g}(q_0),\\
&\dim T_q Q(M) = m + \dim \mathfrak{h} = \dim \mathfrak{g},\\
&\dim T_q P(q_0) = m + \dim \mathfrak{g}(q_0),\\
&\dim T_q P(M) = m + \dim \mathfrak{g}.
\end{aligned}$$

De modo que se da la igualdad

$$\dim(T_q Q(M) \cap T_q P(q_0)) = \dim T_q Q(M) + \dim T_q P(q_0) - \dim T_q P(q_0)$$

y concluimos que $\dim(T_q Q(M) + T_q P(q_0)) = \dim T_q P(q_0)$, es decir, las subvariedades $Q(M)$ y $P(q_0)$ se cortan transversalmente en $P(M)$. Es conocido que en el tal caso su intersección (que sabemos no vacía por ser $q_0 \in Q(M) \cap P(q_0)$) define una subvariedad regular de $P(M)$, cuya dimensión coincide con $\dim \mathfrak{g}(q_0)$ (este resultado de topología diferencial puede consultarse en Outerelo-Ruiz [36]). ■

Por la Observación 7.3 (**c**), sobre la variedad $Q(q_0)$ existe una acción diferenciable por la derecha del subgrupo de holonomía $H^\omega(q_0) = H^m \cap \Phi^\varpi(q_0)$,

$$\begin{array}{ccc}
Q(q_0) \times H^\omega(q_0) & \longrightarrow & Q(q_0)\\
(q, h) & \longmapsto & q \cdot h
\end{array} \tag{7.11}$$

que es efectiva y transitiva sobre las fibras $\pi|_{Q(q)}^{-1}(x) = Q(q_0)_x$, $x \in M$, del fibrado $\pi : Q(M) \to M$.

Variedad de holonomía $N^\omega(x_0)$

A través de la proyección del fibrado $\pi : Q(M) \to M$, la referencia esférica $q \in Q(M)$ define una proyección $\pi(Q(q)) \subseteq M$ del fibrado de holonomía $Q(q_0) = Q(M) \cap P(q_0)$. Por la Observación 7.3 (**a**) , $\forall h \in H^m$ es

$$\pi\left(Q(q \cdot h)\right) = \pi\left(R_h\left(Q(q)\right)\right) = \pi\left(Q(q)\right).$$

de modo que la proyección es independiente de la referencia especial que se tome sobre el punto $x = \pi(q) \in M$. A cada punto x_0 de la variedad conforme M se le puede asociar, por tanto, un subconjunto

$$N^{\omega}(x_0) := \pi(Q(q)) \subset M, \ \forall q \in Q(M)_{x_0}, \tag{7.12}$$

perfectamente definido por la conexión normal Cartan $\omega \in \Lambda^1(Q(M), \mathfrak{g})$. El conjunto $N(x_0)$ puede definirse mediante las siguientes definiciones equivalentes:

(a) $N^{\omega}(x_0) = \Big\{ x \in M : \exists t \mapsto \gamma_t \text{ con } \gamma_{t_0} = x_0,\ \gamma_{t_1} = x \text{ y } \mid\ |_{\gamma, t_0, t_1}(O_{x_0}) = O_x \Big\}$

(b) $N^{\omega}(x_0)$ está formado por aquellos puntos $x \in M$ relacionados con x_0 en el sentido de que existe una curva diferenciable a trozos que los une con $x_0 \in M$ y cuya curva desarrollo en $\overline{T}_{x_0}M$ respecto a la conexión ω define un lazo cerrado con base el origen $O_x \in \overline{T}_{x_0}M$.

Observación 7.4 *Dado que $H^{\omega}(q_0) = H^m \cap \Phi^{\varpi}(q_0)$ es subgrupo cerrado de $\Phi^{\varpi}(q_0)$, el espacio homogéneo $\Phi^{\varpi}(q_0)/H^{\omega}(q_0)$ tiene una estructura natural de variedad diferenciable y la proyección $\Phi^{\varpi}(q_0) \to \Phi^{\varpi}(q_0)/H^{\omega}(q_0)$ define un $H^{\omega}(q_0)$-fibrado principal (véase* Warner [51]*). Obsérvese entonces que la inclusión*

$$\begin{array}{rcl} \Phi^{\varpi}(q_0)/H^{\omega}(q_0) & \longrightarrow & \mathbb{S}^m \\ g \cdot H^{\omega}(q_0) & \longmapsto & g(O) \end{array}$$

sumerge el espacio homogéneo $\Phi^{\varpi}(q_0)/H^{\omega}(q_0)$ como una subvariedad en $\mathbb{S}^m$, no necesariamente regular, cuyos puntos se obtienen a través la evaluación en el $O \in \mathbb{S}^m$ de las transformaciones en $\Phi^{\omega}(q_0)$:

$$\Phi^{\varpi}(q_0)/H^{\omega}(q_0) \ \longleftrightarrow \ ev_O(\Phi^{\varpi}(q_0)) = \{g(O) \in \mathbb{S}^m : g \in \Phi^{\omega}(q_0)\}\,.$$

Proposición 7.3 *Para cada $x_0 \in M$, el espacio $N^{\omega}(x_0)$ está dotado de una estructura de variedad diferenciable tal que:*

(a) *La inclusión natural $N(x_0) \hookrightarrow M$ sumerge a $N(x_0)$ como subvariedad de M, no necesariamente regular;*

(b) *Para $q_0 \in Q(M)_{x_0}$, la proyección $\pi : Q(q_0) \to N^{\omega}(x_0)$ tiene estructura de $H^{\omega}(q_0)$-fibrado principal sobre la variedad $N^{\omega}(x_0)$.*

Demostración. Para $x_1 \in N^{\omega}(x_0)$ y $q_1 \in Q(q_0)_{x_1} = (Q(M) \cap P(q_0))_{x_1}$ ocurre que es $N^{\omega}(x_0) = N^{\omega}(x_1)$ y $Q(q_0) = Q(q_1)$.

(**1**) En primer lugar, obsérvese que si sobre el entorno abierto $\mathcal{U}$ de x_1 en M se tienen las secciones

$$\sigma : \mathcal{U} \to P(q_1) \quad \text{y} \quad \overline{\sigma} : \mathcal{U} \to Q(M)$$

existe una función $g : \mathcal{U} \to G^m$ tal que $\overline{\sigma}(x) = \sigma(x) \cdot g(x)$, $\forall x \in \mathcal{U}$. Entonces, para $x \in \mathcal{U}$ se tienen las siguientes equivalencias:

$$\begin{aligned} x \in N(x_0) &\Leftrightarrow \exists q \in Q(M)_x \cap P(q_0)_x \\ &\Leftrightarrow \exists q,, \begin{cases} q = \sigma(x) \cdot g & \text{para } g \in \Phi^{\varpi}(q_0) \\ q = \overline{\sigma}(x) \cdot h = \sigma(x) \cdot g(x) \cdot h & \text{para } h \in H^m \end{cases} \\ &\Leftrightarrow g(x) = g \cdot h^{-1} \quad \text{para } h \in H^m, g \in \Phi^{\varpi}(q_0) \\ &\Leftrightarrow g(x) \in \Phi^{\varpi}(q_0) \cdot H^m. \end{aligned}$$

(**2**) Sea $\sigma : \mathcal{U} \to \overset{\circ}{P}(q_0)$ sección local tal que $\sigma(x_1) = q_1$ y $d_{x_1}\sigma\left(T_{x_1}M\right) = \mathcal{H}_{q_1}$. A través de la proyección $\mathbf{q} : \overset{\circ}{P}(M) \to \mathbb{R}^m$ de (7.3) pág. 176, se construye una sección asociada $\overline{\sigma} = q \circ \sigma : \mathcal{U} \to Q(M)$, que verifica

$$\overline{\sigma}(x) = \sigma(x) \cdot \exp\left(-\mathbf{V}_{\sigma(x)}\right)$$

para $\mathbf{V} : \overset{\circ}{P}(M) \to \mathbb{R}^m$ la aplicación definida en (7.2) por $p^{-1}(O_x) = \iota(-\mathbf{V}_p) \in \mathbb{S}^m$.

Los puntos x en el abierto $\mathcal{U}$ cumplen la siguiente equivalencia demostrada en (1): $x \in N(x_0) \Leftrightarrow \exp\left(-\left(\mathbf{V} \circ \sigma\right)(x)\right) \in \Phi^{\varpi}(q_0) \cdot H^m$. Se tiene así que

$$\begin{aligned} \left(-\mathbf{V} \circ \sigma\right)\left(N(x_0) \cap \mathcal{U}\right) &= \{X \in \mathbb{U} : \exp X \in \Phi^{\varpi}(q_0) \cdot H^m\} \\ &= \{X \in \mathbb{U} : \exists h \in H^m,, \ (\exp X) \cdot h = g \in \Phi^{\varpi}(q_0)\} \\ &= \{X \in \mathbb{U} : \exists g \in \Phi^{\varpi}(q_0),, \ g(O) = \iota(X) \in \mathbb{S}^m\} \\ &= \left\{X \in \mathbb{U} : \iota(X) \in ev_O\left(\Phi^{\varpi}(q_0)\right)\right\}. \end{aligned}$$

Por el Lema 7.1 a continuación, la composición $-\mathbf{V} \circ \sigma : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^m$ define un difeomorfismo (carta local) entre un entorno de x_1 en M, que denotamos igualmente por $\mathcal{U}$, y un entorno $\mathbb{U}$ de $0 = \left(-\mathbf{V} \circ \sigma\right)(x_1)$ en $\mathbb{R}^m$. Además, esta carta induce una biyección entre $N(x_0) \cap \mathcal{U}$ en M y $ev_O\left(\Phi^{\varpi}(q_0)\right) \cap \mathbb{U}$ en $\mathbb{R}^m \cong \mathbb{S}^m$-$\{\infty\}$[2].

$$\begin{array}{ccccc} N(x_0) \cap \mathcal{U} & \hookrightarrow & \mathcal{U} & \subset & M \\ \updownarrow & & \updownarrow^{-\mathbf{V}\circ\sigma} & & \\ ev_O\left(\Phi^{\varpi}(q_0)\right) \cap \mathbb{U} & \hookrightarrow & \mathbb{U} & \subset & \mathbb{R}^m \end{array} \tag{7.13}$$

[2] La identificación $\mathbb{R}^m \cong \mathbb{S}^m$-$\{\infty\}$ se realiza a través de la inclusión canónica $\iota : \mathbb{R}^m \hookrightarrow \mathbb{S}^m$.

Recuérdese de la Observación 7.4 anterior que $ev_O\,(\Phi^{\varpi}(q_0))$ coincide con la inclusión del espacio homogéneo $\Phi^{\varpi}(q_0)/H^{\omega}(q_0)$ como subvariedad de $\mathbb{S}^m$. La variedad $\Phi^{\varpi}(q_0)/H^{\omega}(q_0)$ induce una estructura de variedad diferenciable en $N(x_0)\cap\mathcal{U}$ (entorno abierto de x_1 en $N(x_0)$) mediante la correspondencia dada por $(-\mathbf{V}\circ\sigma)|_{N(x_0)\cap\mathcal{U}}$:

$$N(x_0)\cap\mathcal{U} \;\longleftrightarrow\; ev_O\,(\Phi^{\varpi}(q_0))\cap\mathbb{U} \;\longleftrightarrow\; U \;\subset\; \Phi^{\varpi}(q_0)/H^{\omega}(q_0).$$

(**3**) Con esta estructura de variedad diferenciable en $N(x_0)\cap\mathcal{U}$, la inclusión natural $N(x_0)\cap\mathcal{U}\hookrightarrow\mathcal{U}$ es una aplicación diferenciable que sumerge $N(x_0)\cap\mathcal{U}$ en $\mathcal{U}\subset M$ como subvariedad no necesariamente regular. Esto es consecuencia del hecho de que el diagrama (7.13), formado por difeomorfismos en su parte vertical $\updownarrow$, pone a esta inclusión en correspondencia con la inclusión de $ev_O\,(\Phi^{\varpi}(q_0))\approx\Phi^{\varpi}(q_0)/H^{\omega}(q_0)$ como subvariedad de $\mathbb{S}^m$.

(**4**) Veamos que al variar $x_1\in N(x_0)$, $q_1\in Q(q_0)_{x_1}$ por otro par $x_2\in N(x_0)$, $q_2\in Q(q_0)_{x_2}$, las estructuras diferenciables que se inducen por (2) en abiertos de $N(x_0)$ son compatibles. Por el procedimiento descrito en (2) obtenemos dos cartas sobre el abierto $\mathcal{U}$ de M:

$$\begin{array}{l} -\mathbf{V}\circ\sigma_1 : M\supset\mathcal{U}\longrightarrow\ \mathbb{U}_1\subset\mathbb{R}^m,,\ -\mathbf{V}\circ\sigma_1\,(N(x_0)\cap\mathcal{U}) = ev_O\,(\Phi^{\varpi}(q_0))\cap\mathbb{U}_1 \\ -\mathbf{V}\circ\sigma_2 : M\supset\mathcal{U}\longrightarrow\ \mathbb{U}_2\subset\mathbb{R}^m,,\ -\mathbf{V}\circ\sigma_2\,(N(x_0)\cap\mathcal{U}) = ev_O\,(\Phi^{\varpi}(q_0))\cap\mathbb{U}_2 \end{array}$$

El cambio de carta viene dado por el difeomorfismo entre abiertos de $\mathbb{R}^m$

$$(-\mathbf{V}\circ\sigma_2)\circ(-\mathbf{V}\circ\sigma_1)^{-1}\ :\ \mathbb{U}_1\longrightarrow\ \mathbb{U}_2$$

que al verificar

$$(-\mathbf{V}\circ\sigma_2)\circ(-\mathbf{V}\circ\sigma_1)^{-1}\,(ev_O\,(\Phi^{\varpi}(q_0))\cap\mathbb{U}_1) = ev_O\,(\Phi^{\varpi}(q_0))\cap\mathbb{U}_2$$

induce un difoemorfismo entre las subvariedades $ev_O\,(\Phi^{\varpi}(q_0))\cap\mathbb{U}_1$ y $ev_O\,(\Phi^{\varpi}(q_0))\cap\mathbb{U}_2$. En consecuencia, las estructuras diferenciables inducidas en $N(x_0)\cap\mathcal{U}$ a través de las correspondencias $(-\mathbf{V}\circ\sigma_1)|_{N(x_0)\cap\mathcal{U}}$ y $(-\mathbf{V}\circ\sigma_2)|_{N(x_0)\cap\mathcal{U}}$ resultan ser equivalentes.

(**5**) Concluimos entonces que por (2) se induce en todo $N(x_0)$ una única estructura de variedad diferenciable, que por (3) hace que la inclusión natural $N(x_0)\to M$ sumerja a $N(x_0)$ como subvariedad de M.

Además, la proyección $\pi : Q(q_0)\to N(x_0)$ es diferenciable y da lugar a un fibrado principal sobre $N(x_0)$ de grupo estructural $H^{\omega}(q_0)$. ∎

Obsérvese que la dimensión de $N(x_0)$ es

$$\dim N(x_0) = \dim(pr_{-1}\mathfrak{g}(q)) = \dim\mathfrak{g}(q) - \dim\mathfrak{h}^{\omega}(q),\,\forall q\in Q(M)_{x_0}.$$

Lema 7.1 *Sea* $\sigma : \mathcal{U} \to \overset{\circ}{P}(M)$ *una sección con* $\sigma(x_0) = q \in Q(M)$ *y* $\mathrm{Im}\,(d_{x_0}\sigma) = \mathcal{H}_q$*, espacio horizontal de* $\varpi \in \Lambda^1(P(M), \mathfrak{g})$ *en* $T_qP(M)$*. Entonces, su composición con la aplicación* $\mathbf{V} : \overset{\circ}{P}(M) \to \mathbb{R}^m$ *definida por* $p^{-1}(O_x) = \iota(-\mathbf{V}_p) \in \mathbb{S}^m$ *en (7.2), pág. 176,*

$$\mathbf{V} \circ \sigma \ : \ \mathcal{U} \ \longrightarrow \ \mathbb{R}^m$$

da lugar a un difeomorfismo en un entorno de x_0 *con* $\mathbf{V} \circ \sigma(x_0) = 0$*.*

Demostración. Recordemos de la Observación 7.1 que $\ker d_qV = T_qQ(M)$, así,

$$\begin{aligned}\ker(d_{x_0}(\mathbf{V} \circ \sigma)) &= \ker(d_qV) \cap \mathrm{Im}\,(d_{x_0}\sigma) = T_qQ(M) \cap \mathcal{H}_{q_0} \\ &= \left\{\xi_q \in T_qQ(M) : \omega(\xi_q) = 0\right\} = \{0\}\end{aligned}$$

y la diferencial $d_{x_0}(\mathbf{V} \circ \sigma) : T_{x_0}M \to \mathbb{R}^m$ resulta ser un isomorfismo. Concluimos entonces que $\mathbf{V} \circ \sigma$ define un difeomorfismo entre entornos suficientemente pequeños de $x_0 \in M$ y de $0 = (\mathbf{V} \circ \sigma)(x_0) \in \mathbb{R}^m$. ∎

Teorema de reducción

Teorema 7.4 *Sea* $(Q(M), \omega)$ *una geometría conforme de Cartan sobre la variedad* M*. Para* $q_0 \in Q(M)_{x_0}$*,* $x_0 \in M$*, la restricción a* $Q(q_0)$ *de la 1-forma* $\omega \in \Lambda^1(Q(M), \mathfrak{g})$ *define una conexión de Cartan* $\omega|_{TQ(q_0)} \in \Lambda^1(Q(q_0), \mathfrak{g}(q_0))$ *para el fibrado de holonomía* $Q(q_0) \to N(x_0)$*.*

Demostración. Sea $\xi_q \in T_qQ(q_0) = T_qP(q_0) \cap T_qQ(M)$ un vector tangente.

(a) Dado que $\xi_q \in T_qQ(M)$, $\omega(\xi_q) = 0 \Leftrightarrow \xi_q = 0_q$.

(b) Por el Teorema de Reducción aplicado a la conexión principal $\varpi \in \Lambda^1(P(M), \mathfrak{g})$ con $\varpi|_{TQ(M)} = \omega$, se tiene que $\varpi(TP(q_0)) = \mathfrak{g}(q_0)$, y en particular,

$$\omega(\xi_q) = \varpi(\xi_q) \in \mathfrak{g}(q_0).$$

Es claro que (b) indica que la restricción de ω a $Q(q_0)$ toma valores en el álgebra de holonomía $\mathfrak{g}(q_0)$, dando lugar a una 1-forma $\omega|_{TQ(q_0)} \in \Lambda^1(Q(q_0), \mathfrak{g}(q_0))$.

Por otra parte, dado que la dimensión de $\mathfrak{g}(q_0)$ coincide con la de $Q(q_0)$, (a) implica que $\omega|_{T_qQ(q_0)} : T_qQ(q_0) \to \mathfrak{g}(q_0)$ es isomorfismo, $\forall q \in Q(q_0)$. La condiciones de $Ad_{H^\omega(q_0)}$-equivarianza ($R_h^*\omega = Ad_{h^{-1}} \circ \omega$, $h \in H^\omega(q_0)$) y coherencia con los campos verticales ($\omega(A^\#) = A$, $A \in \mathfrak{h}(q_0)$) se verifican trivialmente por estar $Q(q_0)$ contenido en $Q(M)$. De este modo, concluimos que $\omega|_{TQ(q_0)} \in \Lambda^1(Q(q_0), \mathfrak{g}(q_0))$ es una conexión de Cartan en $Q(q_0)$. ∎

7.3 Holonomía en una variedad conforme

Sea $(M,\mathcal{C})$ una variedad conforme conexa de dimensión $m>2$. Cada una de las conexiones lineales y simétricas ∇ compatibles con la estructura conforme $\mathcal{C}$ induce una conexión normal de Cartan distinta $\omega\in\Lambda^1(Q(M),\mathfrak{g})$ en el fibrado de referencias esféricas especiales $Q(M)$. De este modo, existe toda una familia de geometrías normales de Cartan $(Q(M),\omega)$ ligadas a la estructura conforme de M, y que resultan mutuamente equivalentes por automorfismos del fibrado $Q(M)$ (Corolario 5.2, pág. 5.2). En particular, las geometrías de Cartan asociadas a dos conexiones conformes, ∇ y $\overline{\nabla}=\nabla+\Phi_\alpha$, con $\alpha\in\Lambda^1(M)$, se corresponden a través del siguiente automorfismo

$$\begin{array}{rcl} R_{\exp\eta_\alpha}:(Q(M),\overline{\omega}) & \longrightarrow & (Q(M),\omega) \qquad \text{(i.e. } \overline{\omega}=(R_{\exp\eta})^*\omega) \\ q & \longmapsto & q\cdot\exp\eta_\alpha(q) \end{array}$$

siendo $\eta_\alpha:Q(M)\to\mathbb{R}^{m*}$ la aplicación definida por la 1-forma $\alpha\in\Lambda^1(M)$ a través de $\eta_\alpha(q)=\alpha\circ q_*\in\mathbb{R}^{m*}$. Este automorfismo puede extenderse de manera natrural al fibrado $P(M)\supset Q(M)$, dando lugar a un automorfismo $F_\alpha:P(M)\to P(M)$ tal que:

(a) $F(q)=q\cdot\exp\eta_\alpha(q)$, $\forall q\in Q(M)$,

(b) las conexiones principales ϖ y $\overline{\varpi}\in\Lambda^1(P(M),\mathfrak{g})$ que extienden a las conexiones de Cartan ω y $\overline{\omega}\in\Lambda^1(Q(M),\mathfrak{g})$, respectivamente, verifican la identidad

$$\overline{\varpi}=F_\alpha^*\varpi.$$

Lema 7.2 *Fijada una curva $t\mapsto\gamma_t$ en M con $\gamma_{t_0}=x$, sean $(\mathbb{P}_\gamma^{\varpi}q)_t$ y $(\mathbb{P}_\gamma^{\overline{\varpi}}q)_t$ las elevaciones horizontales por $q\in Q(M)_x$, respectivamente asociadas a las conexiones principales ϖ y $\overline{\varpi}=F_\alpha^*\varpi$ en $P(M)$. Entonces,*

$$(\mathbb{P}_\gamma^{\varpi}q)_t=F_\alpha(\mathbb{P}_\gamma^{\overline{\varpi}}q)_t\cdot\exp\left(\text{-}\eta_\alpha(q)\right),\ \forall t.$$

Demostración. La curva $t\mapsto(\mathbb{P}_\gamma^{\overline{\varpi}}q)_t\in P(M)$ es horizontal respecto a la conexión $\overline{\varpi}=F_\alpha^*\varpi$, y su imagen a través del automorfismo F_α define una curva ϖ-horizontal $t\mapsto F_\alpha(\mathbb{P}_\gamma^{\overline{\varpi}}q)_t\in P(M)$, sobre $t\mapsto\gamma_t\in M$, que en t_0 toma el valor

$$F_\alpha(\mathbb{P}_\gamma^{\overline{\varpi}}q)_{t_0}=F_\alpha(q)=q\cdot\exp\eta_\alpha(q)\in Q(M).$$

Por lo tanto, coincide con la curva elevación horizontal de γ_t por $q\cdot\exp\eta_\alpha(q)$, respecto a la conexión ω, es decir, $\forall t$,

$$F_\alpha(\mathbb{P}_\gamma^{\overline{\varpi}}q)_t=\left(\mathbb{P}_\gamma^{\varpi}(q\cdot\exp\eta_\alpha(q))\right)_t=\left(\mathbb{P}_\gamma^{\varpi}q\right)_t\cdot\exp\eta_\alpha(q),$$

o de manera equivalente, $\left(\mathbb{P}_\gamma^{\varpi}q\right)_t=F_\alpha(\mathbb{P}_\gamma^{\overline{\varpi}}q)_t\cdot\exp\left(-\eta_\alpha(q)\right)$. ■

Para un lazo $t \mapsto \gamma_t \in M$ en $C_\circ(x, M)$ con $\gamma_{t_0} = \gamma_{t_1} = x \in M$, sean $\tau = |\ |^{\omega}_{\gamma,t_0,t_1}$ y $\overline{\tau} = |\ |^{\overline{\omega}}_{\gamma,t_0,t_1}$ las correspondientes transformaciones de $\overline{T_x M}$ obtenidas por el transporte paralelo a lo largo de $t \mapsto \gamma_t$ según las conexiones normales de Cartan asociadas a ∇ y $\overline{\nabla} = \nabla + \Phi_\alpha$ ($\alpha \in \Lambda^1(M)$), respectivamente. Fijada una referencia especial $q \in Q(M)_x$, si denotamos $\eta_\alpha(q) = \alpha_x \circ q_* \in \mathbb{R}^{m*}$, sean h y $\overline{h}$ los elementos de H^m definidos por:

$h = q^{-1} \circ \tau \circ q$, i.e. $q \cdot h = (\mathbb{P}^{\varpi}_{\gamma} q)_{t_1} \in Q(M)_x$,

$\overline{h} = q^{-1} \circ \overline{\tau} \circ q$, i.e. $q \cdot \overline{h} = (\mathbb{P}^{\overline{\varpi}}_{\gamma} q)_{t_1} \in Q(M)_x$.

Aplicando el Lema anterior a la curva $\gamma \in C_\circ(x, M)$ se obtiene que para $t = t_1$ es

$$\begin{aligned} q \cdot h = (\mathbb{P}^{\varpi}_{\gamma} q)_{t_1} &= F_\alpha(\mathbb{P}^{\overline{\varpi}}_{\gamma} q)_{t_1} \cdot \exp \text{-}\eta_\alpha(q) = F_\alpha(q \cdot \overline{h}) \cdot \exp \text{-}\eta_\alpha(q) \\ &= F_\alpha(q) \cdot \overline{h} \cdot \exp \text{-}\eta_\alpha(q) = q \cdot \exp \eta_\alpha(q) \cdot \overline{h} \cdot \exp \text{-}\eta_\alpha(q) \end{aligned}$$

de lo que se deduce la relación

$$h = \exp \eta_\alpha(q) \cdot \overline{h} \cdot \exp \text{-}\eta_\alpha(q) = C_{\exp \eta_\alpha(q)} \overline{h} \in H^m. \tag{7.14}$$

para $\eta_\alpha(q) = \alpha \circ q_* \in \mathbb{R}^{m*}$. Recuérdese que $\forall \eta \in \mathbb{R}^{m*}$ el elemento

$$\exp \eta = \begin{pmatrix} 1 & \eta & -\frac{\|\eta\|^2}{2} \\ 0 & I_m & -\eta^{\intercal} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in H^m$$

define en la esfera de Möbius $\mathbb{S}^m$ una traslación del punto infinito ∞, que deja fijo el punto origen $(\exp \eta)(O) = O$ y tiene como diferencial en el origen a la identidad en $\mathbb{R}^m \equiv T_O \mathbb{S}^m$, $(\exp \eta)_* = I_m$. Por lo tanto, de la relación (7.14) se deducen las siguientes equivalencias e identidades:

(i) $\gamma \in C(x, M, \overline{\varpi})$ únicamente si $\gamma \in C(x, M, \omega)$, dada la equivalencia

$$\overline{h}(O) = O \;\Leftrightarrow\; h(O) = O;$$

(ii) $h_* = (\exp \eta_\alpha(q))_* \cdot \overline{h}_* \cdot (\exp \text{-}\eta_\alpha(q))_* = \overline{h}_* \in CO(m)$.

Podemos concluir entonces con el siguiente resultado, relacionando las geometrías asociadas a dos conexiones de Cartan disitintas sobre una misma variedad conforme.

Proposición 7.4 *Sean ω y $\overline{\varpi} \in \Lambda^1(Q(M), \mathfrak{g})$ las conexiones normales de Cartan en $Q(M)$, respectivamente asociadas a conexiones lineales ∇ y $\nabla = \nabla + \Phi_\alpha$ ($\alpha \in \Lambda^1(M)$) compatibles con la estructura conforme de M. Dado $x \in M$ y $q \in Q(M)_x$ se verifica:*

(a) *$C(x, M, \omega) = C(x, M, \overline{\varpi})$;*

(b) $H^\omega(q) = C_{\exp \eta_\alpha(q)} H^{\overline{\omega}}(q) \subset H^m$, *para* $\eta_\alpha(q) = \alpha \circ q_* \in \mathbb{R}^{m*}$*;*

(c) $H^\omega_*(q) = H^{\overline{\omega}}_*(q) \subset CO(m)$.

Demostración. Es consecuencia de las relaciones obtenidas en el desarrollo anterior: (**a**) se deduce de **(i)**, (**b**)se deduce de la relación (7.14) y (**b**) de (**ii**). ■

La equivalencia (**a**) de la Proposición indica que, fijado $x \in M$, el espacio de lazos de $C_\circ(x, M)$ cuyo desarrollo respecto a una geometría conforme de Cartan $(Q(M), \omega)$ define una curva cerrada en $\overline{T}_x M$, es independiente de la conexión normal de Cartan $\omega \in \Lambda^1(Q(M), \mathfrak{g})$ que se tome en la estructura conforme. Por lo tanto, en el espacio de lazos $C_\circ(x, M)$ de la variedad conforme distingue una subfamilia

$$C(x, M, \mathcal{C}) = C(x, M, \omega),\ \forall \omega \text{ conexión normal de Cartan de } \mathcal{C}$$

que depende únicamente de la estructura conforme $\mathcal{C}$ de la variedad y se denotará en adelante por $C(x, M, \mathcal{C})$.

Por otra parte, (**c**) nos indica que el grupo $H^\omega_*(q)$ de holonomía infinitesimal en $q \in Q(M)$ permanece también invariante a través de los cambios de conexión normal de Cartan $\omega \in \Lambda^1(Q(M), \mathfrak{g})$ en la estructura conforme. Así, pese a que los grupos de holonomía asociados a distintas conexiones conformes varían en la medida en que lo hace el automorfismo $R_{\exp \eta}$ (véase la relación de conjugación (**b**)), al considerar la holonomía infinitesimal se obtiene la invarianza deseada. Esta holonomía infinitesimal es propia de la estructura conforme de la variedad.

7.3.1 Holonomía infinitesimal de una estructura conforme

Una variedad conforme $(M, \mathcal{C})$ admite la definición de una noción de holonomía canónica, asociada exclusivamente a la estructura conforme $\mathcal{C}$. La *holonomía infinitesimal conforme* en un punto $x \in M$ es el grupo Φ_x de isomorfismos conformes de $T_x M$ definido por

$$\Phi_x = \left\{ (\| \ |^{\omega}_{\gamma, t_0, t_1})_* : T_x M \to T_x M \ : \ \gamma \in C(x, M, \mathcal{C}) \text{ con } \gamma_{t_0} = \gamma_{t_1} = x \right\},$$

para cualquiera conexión normal de Cartan $\omega \in \Lambda^1(Q(M), \mathfrak{g})$ asociada a una conexión lineal y conforme ∇. Cada elemento de Φ_x es un isomorfismo conforme de $T_x M$ obtenido por el siguiente procedimiento: tomando una curva cerrada γ en la familia $C(x, M, \mathcal{C})$ de lazos distinguidos por la estructura conforme $\mathcal{C}$, desplazar la esfera $\overline{T}_x M$ a lo largo de γ según el transporte paralelo definido por alguna de las conexiones normales de Cartan de $\mathcal{C}$, la esfera tangente $\overline{T}_x M$ experimenta un movimiento que finalmente deja el punto origen O_x fijo e induce mediante su diferencial en O_x un isomorfismo conforme de $T_x M$ que no depende de la conexión normal tomada.

Definición 7.2 *El* grupo de holonomía infinitesimal *de la estructura conforme* $\mathcal{C}$ *con base* $q \in Q(M)_x$ *es el subgrupo* $\Phi_*(q) = H_*^\omega(q)$ *de* $CO(m)$ *definido por*

$$\Phi_*(q) = \left\{h_* \in CO(m) : \exists h \in H^m \text{ y } \gamma \in C(x, M, \mathcal{C}) \text{ t.q. } (\mathbb{P}_\gamma^\omega p)_{t_1} = p \cdot h\right\},$$

siendo ω *qualquiera de las conexiones normales de Cartan en* $Q(M)$ *determinada por una conexión* ∇ *lineal y conforme en* M.

El grupo $\Phi_*(q)$ define un subgrupo de Lie de $CO(m)$, y va ligado a un álgebra de Lie $\mathfrak{h}_*(q) \subset \mathfrak{co}(m)$.

Para cada conexión conforme normal de Cartan $\omega \in \Lambda^1(Q(M), \mathfrak{g})$, el álgebra infinitesimal $\mathfrak{h}_*(q)$ coincide con

$$\mathfrak{h}_*(q) = pr_0\left(\mathfrak{h}^\omega(q)\right) = \{A \in \mathfrak{co}(m) : A \oplus \eta \in \mathfrak{h}^\omega(q) \subset \mathfrak{co}(m) \oplus \mathbb{R}^{m*}\}$$

siendo $pr_0 : \mathfrak{h} \to \mathfrak{co}(m)$ la proyección asociada a la descomposición $\mathfrak{h} = \mathfrak{co}(m) \oplus \mathbb{R}^{m*}$.

El Teorema de Ambrose-Singer afirma que el álgebra de holonomía $\mathfrak{g}^\omega(q)$ está generada por los valores que toma la forma de curvatura $\quad \in \Lambda^2(P(M), \mathfrak{g})$ de la conexión ϖ, en los puntos $p \in P^\varpi(q)$ (véase Teorema 7.2, pág. 175). En particular, para $\overline{q} \in Q^\varpi(q) = Q(M) \cap P^\varpi(q)$, la forma de curvatura $\quad_{\overline{q}}$ toma valores en la subálgebra $\mathfrak{h}$ de $\mathfrak{g}$, de modo que

$$\quad_{\overline{q}} \in \mathfrak{h}^\omega(q) = \mathfrak{h} \cap \mathfrak{g}^\varpi(q),$$

y por lo tanto, su proyección $(\quad_{\overline{q}})_0 = pr_0 \circ \quad_{\overline{q}} \in \mathfrak{co}(m)$ está en el álgebra de holonomía infinitesimal $\mathfrak{h}_*(q)$,

$$\left\{(\quad_{\overline{q}})_0(\xi_{\overline{q}}) \in \mathfrak{co}(m) : \xi_{\overline{q}} \in T_{\overline{q}}Q(M),\ \overline{q} \in Q^\varpi(q)\right\} \subset \mathfrak{h}_*(q). \tag{7.15}$$

Recuérdese que sobre cualquier punto de $Q(M)$ la curvatura tiene como componente en $\mathfrak{co}(m)$ la 2-forma $\quad_0 \in \Lambda^2(Q(M), \mathfrak{co}(m))$ asociada al tensor de curvatura conforme de Weyl $W \in \mathfrak{T}_3^1(M)$ (véase Corolario 5.1, pág.116). La pregunta que surge entonces de manera natural es:

¿Existe un resultado del tipo Ambrose-Singer que afirme que el álgebra de holonomía infinitesimal $h_*(q)$ *asociada a una estructura conforme está generada por la subfamilia (7.15) de los valores que toma la forma* $\quad_0$ *de curvatura de Weyl sobre los puntos del fibrado de holonomía* $Q^\varpi(q)$*?*

El tensor de curvatura de Weyl define un invariante clásico de la geometría conforme, dada su condición de invarianza mediante los cambios de métrica conforme (aquí hemos dado una definición más general que permite definirlo a partir de una conexión conforme arbitraria, no necesariamente métrica). Sobre una variedad conforme de dimensión $m > 3$ se anula únicamente cuando la estructura es localmente plana. Si la pregunta que nos planteamos tiene una respuesta afirmativa, el tensor de curvatura de Weyl tendría un significado geométrico más potente, directamente relacionado con la holonomía conforme derivada del transporte paralelo natural de esferas tangentes. En este sentido, ocuparía una posición equiparable al tensor de curvatura Riemanniano que se relaciona con la holonomía descrita por el transporte paralelo de la conexión de Levi-Civita.

Al cierre de esta memoria esta cuestión permanece aun abierta, aunque se hace patente la existencia de una relación entre la curvatura de Weyl y la holonomía conforme. Ofreceremos a continuación un resultado que demuestra que el álgebra de holonomía infinitesimal es trivial $\mathfrak{h}_*(q) = \{0\}$ únicamente cuando la estructura conforme es localmente plana (Teorema 7.6, pág. 200). Es bien conocido que esta última condición es equivalente a que la curvatura de Weyl sea idénticamente nula.

7.3.2 Variedades $N(x)$ asociadas a la estructura conforme

Recordemos que fijado un punto $x_0 \in M$, cada conexión conforme de Cartan $\omega \in \Lambda^1(Q(M), \mathfrak{g})$ determina una variedad $N^\omega(x_0) = (7.12)$ formada por aquellos puntos de M que está relacionados con x_0 a través de la siguiente relación de equivalencia:

> $x \sim x_0 \Leftrightarrow \exists$ un par de referencias especiales (q_0, q) sobre (x_0, x) unidas por una curva ω-horizontal $\Leftrightarrow \exists$ curva $\gamma(t) \subset M$ uniendo x_0 con x y tal que su ω-desarrollo en $\overline{T}_{x_0}M$ es una curva cerrada.

A la vista de los resultados anteriores (Lema 7.2, pág. 188) que relacionan los transportes paralelos asociados a dos conexiones normales de Cartan ω y $\overline{\omega} = (R_{\exp\eta})^*\omega \in \Lambda^1(Q(M), \mathfrak{g})$, se observa que si $q = (\mathbb{P}_\gamma^{\varpi} q_0)_{t_1} \in Q(M)_x$, entonces,

$$(\mathbb{P}_\gamma^{\overline{\varpi}} q_0)_{t_1} = F_\alpha(\mathbb{P}_\gamma^{\varpi} q_0)_{t_1} \cdot \exp\text{-}\eta_\alpha(q_0) = F_\alpha(q) \cdot \exp\text{-}\eta_\alpha(q_0) = q \cdot \exp(\eta_\alpha(q) - \eta_\alpha(q_0)).$$

Es claro que $\sim$ define una relación de equivalencia entre puntos de M que permanece invariante por cambios de conexión conforme, y que por lo tanto viene determinada exclusivamente por la estructura conforme.

Por un resultado anterior (Proposición 7.3), sabemos que cada clase de equivalencia $N(x)$ tiene estructura de variedad diferenciable con dimensión

$$\dim N(x) = \dim\left(pr_{-1}\mathfrak{g}(q)\right), \; \forall q \in Q(M)_x, \; \omega \in \Lambda^1(Q(M), \mathfrak{g})$$

siendo $\mathfrak{g}(q) \subset \mathfrak{g}$ el álgebra de holonomía ligada a $\omega \in \Lambda^1(Q(M), \mathfrak{g})$ cualquier conexión conforme de Cartan. La inclusión natural de $N(x)$ en M la sumerge como subvariedad no necesariamente regular de M.

Proposición 7.5 *Para todo $k \leq m$, el subconjunto $\{x \in M : \dim N(x) \geq k\}$ define un abierto de la variedad M.*

Demostración. Sea $x_0 \in N^k \subseteq M$ y veamos que existe un entorno abierto $\mathcal{U}_{x_0}$ de x_0 tal que $\mathcal{U}_{x_0} \subset M$. Fijemos una referencia especial cualquiera $q_0 \in Q(M)_{x_0}$. Por hipótesis, podemos tomar k elementos distintos $A_1, ..., A_k$ en la subálgebra $\mathfrak{g}(q_0)$ de $\mathfrak{g} = \mathbb{R}^m \oplus \mathfrak{h}$ tales que sus proyecciones a $\mathbb{R}^m$ resultan ser linealmente independientes. Supondremos, para simplificar, que la matriz de las k primeras componentes de dichas proyecciones tiene determinante distinto de cero,

$$\det_k (pr_{-1}A_1, ..., pr_{-1}A_k) \neq 0$$

Acudimos ahora a la presencia auxiliar de una sección de $\sigma : \mathcal{U} \to P(q_0)$ en un entorno U de x_0, con $\sigma(x_0) = q_0$ y $\sigma(\mathcal{U}) \subset \overset{\circ}{P}(M)$. A través de la aplicación $\mathbf{q} : \overset{\circ}{P}(M) \to Q(M)$ de (7.3) se define una sección $\mathbf{q} \circ \sigma : \mathcal{U} \to Q(M)$. Entonces, $\forall x \in \mathcal{U}$ es

$$\begin{aligned}\dim N(x) &= \dim(pr_{-1}\mathfrak{g}(\mathbf{q} \circ \sigma_x)) = \dim(pr_{-1}\mathfrak{g}(\sigma_x \cdot \exp -\mathbf{V}_{\sigma_x})) \\ &= \dim\left(pr_{-1} \circ Ad_{\exp \mathbf{V}_{\sigma_x}}\mathfrak{g}(q_0)\right).\end{aligned}$$

Consideramos entonces la aplicación de U en $\mathbb{R}$, definida por

$$\mathcal{U} \ni x \longmapsto \det_k \left(pr_{-1} \circ Ad_{\exp \mathbf{V}_{\sigma_x}}(A_1), ..., pr_{-1} \circ Ad_{\exp \mathbf{V}_{\sigma_x}}(A_k)\right) \in \mathbb{R}$$

Esta es una aplicación diferenciable cuya imagen en x_0 es distinta de cero, y existe por tanto un entorno $\mathcal{U}_{x_0}$ de x_0 en el que continúa siendo no nula. Se tiene así que $\forall x \in \mathcal{U}_{x_0}$ es $\dim N(x) = \dim\left(pr_{-1} \circ Ad_{\exp V_{\sigma_x}}\mathfrak{g}(q_0)\right) \geq k$, y por tanto $\mathcal{U}_{x_0} \subset N^k$. ■

Corolario 7.2 *El conjunto de puntos $x_0 \in M$ para los cuales la dimensión de $N(x_0)$ alcanza su valor máximo $k_0 = \max\{\dim N(x) : x \in M\} \leq m$, forma un abierto de M.*

Esta familia de variedades $N(x)$ son características de la estructura conforme. En el caso particular en que la estructura conforme es localmente plana, las subvariedades $N(x)$ resultan ser todas 0-dimensionales (i.e. cada $N(x)$ es la unión discreta de puntos aislados). Y recíprocamente, veremos más adelante que cuando estas subvariedades están formadas por puntos aislados, entonces la estructura conforme es localmente plana (Observación 7.5, pág. 199)

7.3.3 Resultados sobre el álgebra de holonomía conforme

Este apartado recoge una serie de resultados que hacen referencia a la naturaleza de las álgebras asociadas a las distintas nociones de holonomía que hemos definido en el ámbito de la geometría conforme de Cartan, poniendo especial interés en la holonomía infinitesimal conforme $\Phi_*(q) \subset CO(M)$. En particular, justificamos aquí resultados que hemos citado anteriormente y que, con el propósito de no perder la línea argumental, hemos preferido demostrar aparte.

Fijada una referencia especial $q \in Q(M) \subset P(M)$ sobre la variedad conforme M, se han definido tres nociones distintas de holonomía asociadas a los siguientes tres grupos de Lie:

grupo de holonomía	**álgebra**	**en relación a**
$\Phi^{\varpi}(q) \subset G^m$	$\mathfrak{g}^{\varpi}(q) \subset \mathfrak{g}$	una conexión principal ϖ en $P(M)$
$H^{\omega}(q) \subset H^m$	$\mathfrak{h}^{\omega}(q) = \mathfrak{g}^{\varpi}(q) \cap \mathfrak{h}$	una conexión de Cartan ω en $Q(M)$
$\Phi_*(q) \subset CO(m)$	$\mathfrak{h}_*(q) = pr_0\,(\mathfrak{h}^{\omega}(q))$	la estructura conforme $(M,\mathcal{C})$

Nuestro propósito es conocer el álgebra de holonomía infinitesimal $\mathfrak{h}_*(q) \subset \mathfrak{co}(m)$, que define un invariante propio de la estructura conforme de la variedad M. Por el Teorema 7.2 de Ambrose-Singer somos capaces de determinar el álgebra $\mathfrak{g}^{\varpi}(q)$, asociada a la noción clásica de holonomía de la conexión principal ϖ en $P(M)$.

Partimos entonces de una conexión normal y conforme de Cartan $\omega \in \Lambda^1(Q(M), \mathfrak{g})$ cuya extensión natural $\varpi \in \Lambda^1(P(M), \mathfrak{g})$ define una conexión principal en $P(M)$, y vamos a estudiar el álgebra $\mathfrak{h}_*(q) = pr_0\,(\mathfrak{g}^{\varpi}(q) \cap \mathfrak{h}) \subset \mathfrak{co}(m)$, para $q \in Q(M)$.

El hecho de que la conexión principal ϖ en $P(M)$ provenga de la conexión normal de Cartan ω implica que cumple una serie de propiedades adicionales que involucran a las componentes de su curvatura $\quad = d\varpi + \frac{1}{2}[\varpi, \varpi] \in \Lambda^2(P(M), \mathfrak{g})$, tomando valores en el álgbra graduada

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{-1} \oplus \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1 = \mathbb{R}^m \oplus \mathfrak{co}(m) \oplus \mathbb{R}^{m*}.$$

Sea p una referencia en el abierto $\mathring{P}\,(M)$, es decir, tal que $p^{-1}(O_x) \neq \infty \in \mathbb{S}^m$ y $p = \mathbf{q}(p) \cdot \exp \mathbf{V}_p$ para $\mathbf{q}(p) \in Q(M)$ y $\mathbf{V}_p \in \mathbb{R}^m$ (véase definición (7.3)). Dado que ϖ es una conexión principal debe cumplir la condición de G^m-equivarianza y también así su curvatura, de modo que

$$|_p = \quad |_{\mathbf{q}(p)\cdot\exp \mathbf{V}_p} = Ad_{\exp -\mathbf{V}_p} \quad |_{\mathbf{q}(p)}\,.$$

Aplicando la fórmula de Baker-Campbell-Hausdorff (véase (5.42), pág. 117) esto es equivalente al siguiente sistema de identidades entre componentes:

$$
\begin{aligned}
{}_1|_p &= \quad {}_1|_{\mathbf{q}(p)} \\
{}_0|_p &= \quad {}_0|_{\mathbf{q}(p)} - [\mathbf{V}_p, \quad {}_1|_{\mathbf{q}(p)}] \\
{}_{-1}|_p &= \quad {}_{-1}|_{\mathbf{q}(p)} - [\mathbf{V}_p, \quad {}_0|_{\mathbf{q}(p)}] + \tfrac{1}{2}[\mathbf{V}_p, [\mathbf{V}_p, \quad {}_1|_{\mathbf{q}(p)}]]
\end{aligned}
\tag{7.16}
$$

La conexión normal de Cartan ω tiene la propiedad de tener torsión nula, esto implica que la componente de la curvatura $\ _{-1}$ es idénticamente nula sobre los elementos de $Q(M)$, en particular $\ _{-1}|_{\mathbf{q}(p)} = 0$.

Lema 7.3 *La componente de la curvatura* $\ _{-1} \in \Lambda^2(P(M), \mathbb{R}^m)$ *en* $p \in \overset{\circ}{P}(M)$*, está determinada por las otras componentes* $\ _0,\ \ _1$ *y por* $\mathbf{V}_p \in \mathbb{R}^m$*, mediante la ecuación*

$$\begin{aligned} \ _{-1}|_p &= -[\mathbf{V}_p,\ \ _0|_p] - \tfrac{1}{2}[\mathbf{V}_p, [\mathbf{V}_p,\ \ _1|_p]] \\ &= \ _0|_p\,\mathbf{V}_p + \ \ _1|_p\,\mathbf{V}_p \cdot \mathbf{V}_p - \tfrac{\|\mathbf{V}_p\|^2}{2}\ \ _1|_p^{\intercal}. \end{aligned} \tag{7.17}$$

Demostración. Se deduce directamente del sistema de ecuaciones (7.16), y de la definición del corchete $[.,.]$ en el álgebra $\mathfrak{g} = \mathbb{R}^m \oplus \mathfrak{co}(m) \oplus \mathbb{R}^{m*}$ que describimos en el apartado **5.1.7.** ■

Corolario 7.3 *Si para* $p_0 \in \overset{\circ}{P}(M)$ *se tiene que* $pr_{\mathfrak{h}}\, \mathfrak{g}^{\varpi}(p_0) = \{0\}$*, en la descomposición* $\mathfrak{g} = \mathbb{R}^m \oplus \mathfrak{h}$*, entonces,* $\mathfrak{g}^{\varpi}(p_0) = 0$ *y la estructura conforme es localmente plana.*

Demostración. Para $p \in P(p_0) \cap \overset{\circ}{P}(M)$ es $(\ _0|_p,\ \ _1|_p) \in pr_{\mathfrak{h}}\mathfrak{g}^{\varpi}(p_0) = \{0\}$, y por la fórmula (7.17) del Lema anterior esto implica que también es $\ _{-1}|_p = 0$. De modo que la curvatura es idénticamente nula en el conjunto $P(p_0) \cap \overset{\circ}{P}(M)$, y por lo tanto, se anula sobre su cierre que coincide con $P(p_0)$.

Por el Teorema de Ambrose-Singer 7.2, el álgebra $\mathfrak{g}^{\varpi}(p_0)$ está generado por los valores que toma la forma de curvatura $\ _p$ en los puntos $p \in P(q_0)$, que en estas condiciones se reducen al $0 \in \mathfrak{g}$, y concluimos así que $\mathfrak{g}^{\varpi}(p_0) = 0$. ■

Por el Lema 5.4, sabemos que otra propiedad de la conexión normal de Cartan ω en $Q(M)$ es que su curvatura toma valores en $\mathfrak{o}(m) \oplus \mathbb{R}^{m*} \subset \mathfrak{co}(m) \oplus \mathbb{R}^{m*} = \mathfrak{h}$. En particular, es $\ _0^0|_{\mathbf{q}(p)} = 0$, $\forall p \in \overset{\circ}{P}(M)$.

Lema 7.4 *En un punto* $p \in \overset{\circ}{P}(M)$*, la componente de la curvatura* $\ _0^0 \in \Lambda^2(P(M), \mathbb{R})$*, obtenida por la descomposición* $\mathfrak{co}(m) = \mathfrak{o}(m) \oplus \mathbb{R}$*, es*

$$\ _0^0|_p = -\ \ _1|_p \cdot \mathbf{V}_p \tag{7.18}$$

Demostración. Es consecuencia de la relación $\ _0|_p = \ _0|_{\mathbf{q}(p)} - [\mathbf{V}_p,\ \ _1|_p]$ en el sistema (7.16), y del hecho de que $[\mathbf{V}_p,\ \ _1|_p]_0^0 = \ \ _1|_p \cdot \mathbf{V}_p$. ■

Por otra parte, existen otras propiedades derivadas del hecho de que $\mathfrak{g}^{\varpi}(p)$ defina una subálgebra de $\mathfrak{g} = \mathbb{R}^m \oplus \mathfrak{h} = \mathbb{R}^m \oplus \mathfrak{co}(m) \oplus \mathbb{R}^{m*}$, $\forall p \in P(M)$. En primer lugar se observa que para $(0, A, \eta) \in \mathfrak{g}^{\varpi}(q) \cap \mathfrak{h}$ y $(\overline{V}, \overline{A}, \overline{\eta}) \in \mathfrak{g}^{\varpi}(q)$ se tiene

$$\left[(0, A, \eta), (\overline{V}, \overline{A}, \overline{\eta})\right] = \left([A, \overline{V}]\,, [A, \overline{A}] + [\eta, \overline{V}], [A, \overline{\eta}] + [\eta, \overline{A}]\right) \in \mathfrak{g}^{\varpi}(q).$$

En particular, $\forall A \in pr_0\left(\mathfrak{g}^{\varpi}(q) \cap \mathfrak{h}\right)$ se verifica que

$$\begin{aligned}[A, pr_{-1}\mathfrak{g}^{\varpi}(q)] &\subset pr_{-1}\mathfrak{g}^{\varpi}(q) \\ [A, \mathfrak{g}_1^{\varpi}(q)] &\subset \mathfrak{g}_1^{\varpi}(q)\end{aligned} \tag{7.19}$$

y además,

$$[pr_{-1}\mathfrak{g}^{\varpi}(q), \mathfrak{g}_1^{\varpi}(q)] \subset pr_0\left(\mathfrak{g}^{\varpi}(q) \cap \mathfrak{h}\right).$$

Un subespacio vectorial $\mathbb{V}$ en el espacio Euclídeo $\mathbb{R}^m$ tiene asociado un subespacio dual $\mathbb{V}^*$ en $\mathbb{R}^{m*}$, dado por la siguiente definición:

$$\mathbb{V}^* = \{\eta \in \mathbb{R}^{m*} : \exists V \in \mathbb{R}^m \text{ con } \eta = V^{\intercal} \in \mathbb{R}^{m*}\}.$$

Consideramos que el espacio $\mathbb{R}^n$ está naturalmente sumergido en $\mathbb{R}^m$ a través de sus n primeras componentes. Tiene además asociado un espacio dual $\mathbb{R}^{n*}$ que identificamos con las n primeras componentes de $\mathbb{R}^{m*}$, y que se puede describir también como:

$$\mathbb{R}^{n*} = \{\eta \in \mathbb{R}^{m*} : \exists V \in \mathbb{R}^n \text{ con } \eta = V^{\intercal}\} = \left\{\eta \in \mathbb{R}^{m*} : \eta(W) = 0, \forall W \in \mathbb{R}^{m-n}\right\}$$

siendo $\mathbb{R}^{m-n}$ el espacio ortogonal a $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^m$(identificado con las $m-n$ últimas componentes de $\mathbb{R}^m$).

Lema 7.5 *Si* $pr_{-1}\mathfrak{g}^{\varpi}(p) \subset \mathbb{R}^m$ *y* $\mathfrak{g}_1^{\varpi}(q) \subset \mathbb{R}^{m*}$ *son ambos no triviales, entonces,*

$$pr_{-1}\mathfrak{g}^{\varpi}(p) = \mathbb{R}^n \Leftrightarrow \mathfrak{g}_1^{\varpi}(q) = \mathbb{R}^{n*} \quad (n > 0)$$

en cuyo caso se tiene que $\mathfrak{co}(n) \subset pr_0\left(\mathfrak{g}^{\varpi}(q) \cap \mathfrak{h}\right) \subset \mathfrak{co}(m)$.

Demostración. Si $pr_{-1}\mathfrak{g}^{\varpi}(p) = \mathbb{R}^n$, $n > 0$, de la primera relación de (7.19), se deduce que la subálgebra $pr_0\left(\mathfrak{g}^{\varpi}(q) \cap \mathfrak{h}\right) \subset \mathfrak{co}(m)$ está formada por matrices que preservan el subespacio $\mathbb{R}^n$ (y su ortogonal $\mathbb{R}^{(m-n)}$). Por otra parte, se tiene que

$$[\mathbb{R}^n, \mathfrak{g}_1^{\varpi}(q)] = [pr_{-1}\mathfrak{g}^{\varpi}(q), \mathfrak{g}_1^{\varpi}(q)] \subset pr_0\left(\mathfrak{g}^{\varpi}(q) \cap \mathfrak{h}\right) \subset \mathfrak{c}(\mathfrak{o}(n) \oplus \mathfrak{o}(m-n))$$

lo que implica que $\mathfrak{g}_1^{\varpi}(q) \subset \mathbb{R}^{n*}$.

Por un razonamiento análogo que parte de la relación segunda de (7.19), se deduce que si $\mathfrak{g}_1^{\varpi}(q) = \mathbb{R}^{r*}$, $r > 0$, entonces, $pr_{-1}\mathfrak{g}^{\varpi}(p) \subset \mathbb{R}^r$. Y concluimos así que $pr_{-1}\mathfrak{g}^{\varpi}(p) = \mathbb{R}^n \Leftrightarrow \mathfrak{g}_1^{\varpi}(q) = \mathbb{R}^{n*}$ y $\mathfrak{co}(n) = [\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^{n*}] \subset pr_0\left(\mathfrak{g}^{\varpi}(q) \cap \mathfrak{h}\right)$. ■

Resultados referentes a $pr_{-1}\mathfrak{g}^{\varpi}(q_0) \subset \mathfrak{g}_{-1} = \mathbb{R}^m$

Introducidos estos operadores auxiliares, resulta sencillo obtener las primeras restricciones para el álgebra de holonomía $\mathfrak{g}^{\varpi}(q_0)$ correspondiente a una conexión normal de Cartan ω en el fibrado de referencias especiales $Q(M)$.

Lema 7.6 *Si para $q \in Q(M)$ existe un $W \in \mathbb{R}^m$ tal que la componente de la curvatura $\;_{-1} \in \Lambda^2(P(M), \mathbb{R}^m)$ en $p = q \cdot \exp W \in \overset{\circ}{P}(M)$ verifica $W^{\intercal} \quad {}_{-1}|_p \equiv 0$, entonces,*

$$ {}_{1}|_q W = 0. $$

Demostración. La referencia $p = q \cdot \exp W \in \overset{\circ}{P}(M)$, es tal que $\mathbf{q}(p) = q \in Q(M)$ y $\mathbf{V}_p = W \in \mathbb{R}^m$. Al aplicar el sistema de ecuaciones (7.16) a la curvatura de p obtenemos la relación

$$ \begin{aligned} {}_{-1}|_p &= -[W, \quad {}_{0}|_q] + \tfrac{1}{2}[W, [W, \quad {}_{1}|_q]] \\ &= \quad {}_{0}|_q W - (\quad {}_{1}|_q W) \cdot W + \tfrac{\|W\|^2}{2} \quad {}_{1}|_q^{\intercal}, \end{aligned} $$

de la que deducimos la igualdad

$$ \begin{aligned} W^{\intercal} \quad {}_{-1}|_p &= W^{\intercal} \left(\quad {}_{0}|_q W - (\quad {}_{1}|_q W)\, W + \tfrac{\|W\|^2}{2} \quad {}_{1}|_q^{\intercal} \right) \\ &= W^{\intercal} \quad {}_{0}|_q W - (\quad {}_{1}|_q W)\, W^{\intercal} W + \tfrac{\|W\|^2}{2} W^{\intercal} \quad {}_{1}|_q^{\intercal} \\ &= -\tfrac{\|W\|^2}{2} \quad {}_{1}|_q W + W^{\intercal} \quad {}_{0}|_q W. \end{aligned} $$

Recuérdese que al ser $q \in Q(M)$ la componente $\quad {}_{0}|_q$ toma valores en $\mathfrak{o}(m)$ y por tanto es $W^{\intercal} \quad {}_{0}|_q W = 0$. La hipótesis $W^{\intercal} \quad {}_{-1}|_p = 0$ equivale entonces a la identidad

$$ 0 = W^{\intercal} \quad {}_{-1}|_p = \tfrac{\|W\|^2}{2} \quad {}_{1}|_q W $$

equivalente a su vez a la condición $\quad {}_{1}|_q W = 0$. ■

Proposición 7.6 *Si $pr_{-1}\mathfrak{g}^{\varpi}(q) = \mathbb{R}^n$, con $n \leq m$, para $q \in Q(M)$, entonces, la componente de la curvatura $\quad {}_{1}|_q$ toma valores en el dual $\mathbb{R}^{n*} \subset \mathbb{R}^{m*}$. En particular,*

$$ pr_{-1}\mathfrak{g}^{\varpi}(q) = \{0\} \;\Rightarrow\; \quad {}_{1}|_q = 0. $$

Demostración. Consideramos una sección $\sigma : \mathcal{U} \to P(q)$ en un abierto $\mathcal{U}$ de M, con $\sigma(x_0) = q$ y $\mathrm{Im}(d_{x_0}\sigma) = \mathcal{H}_q$.

Por el Lema 7.1, la composición $\mathbf{V} \circ \sigma : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^m$ define un difeomorfismo en un entorno de x_0 suficientemente pequeño. Podemos tomar así una carta asociada

$$ \varphi = (\mathbf{V} \circ \sigma)^{-1} : B(\varepsilon) \to \mathcal{U}_{x_0}, \text{ con } \varphi(0) = x_0, $$

para $B(\varepsilon) \subset \mathbb{R}^m$ bola de centro $0 \in \mathbb{R}^m$ y radio $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeño.

Por otra parte, al ser σ una sección de $P(q_0)$, es claro que $\ |_{\sigma(x)} \in \mathfrak{g}^{\varpi}(q)$, $\forall x \in \mathcal{U}_{x_0}$, y en particular $\ _{-1}|_{\sigma(x)} \in pr_{-1}\mathfrak{g}^{\varpi}(q) = \mathbb{R}^n$.

Si $\mathbb{R}^{m-n}$ denota el ortogonal a $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^m$, es claro que para $X \in \mathbb{R}^{m-n} \cap B(\varepsilon)$ es $\varphi(X) \in \mathcal{U}_{x_0} \subset M$ y el punto $\sigma(\varphi(X)) = q(\sigma \circ \varphi(X)) \cdot \exp X \in P(M)$ verifica

$$X^{\intercal} \quad _{-1}|_{\sigma\circ\varphi(X)} = 0.$$

Por el Lema 7.6 anterior esto implica que

$$_{1}|_{\sigma(\varphi(X))}\ X = 0,\ \forall X \in \mathbb{R}^{m-n} \cap B(\varepsilon). \tag{7.20}$$

Si $X \in \mathbb{R}^{m-n} \cap B(\varepsilon)$ con $X \neq 0$, podemos considerar la curva $t \mapsto tX \in \mathbb{R}^{m-n} \cap B(\varepsilon)$ para $t \in (-1, 1)$. Al aplicar (7.20) se obtiene que en $t \neq 0$ es

$$_{1}|_{\sigma\circ\varphi(tX)}\ tX = 0 \ \Rightarrow \quad _{1}|_{\sigma\circ\varphi(tX)}\ X = 0,$$

y por continuidad, también para $t = 0$ debe verificarse la identidad

$$_{1}|_{q}\ X = \quad _{1}|_{\sigma\circ\varphi(0)}\ X = 0.$$

Como esto ocurre para cualquier $X \in \mathbb{R}^{m-n} \cap B(\varepsilon)$ concluimos finalmente que la componente $\ _{1}|_{q}$ toma valores en el subespacio $\mathbb{R}^{n*} \subset \mathbb{R}^{m*}$. ■

Proposición 7.7 *Si $pr_{-1}\mathfrak{g}^{\varpi}(q) = \mathbb{R}^n$, para $q \in Q(M)$, entonces, la componente de la curvatura $\ _{0}|_{q}$ toma valores en $\mathfrak{o}(n) \subset \mathfrak{o}(m)$. En particular,*

$$pr_{-1}\mathfrak{g}^{\varpi}(q) = \{0\} \ \Rightarrow \quad _{0}|_{q} = 0.$$

Demostración. Obsérvese que $\forall \eta \in \mathbb{R}^{m*}$, el elemento $q \cdot \exp \eta \in Q(M)$ tiene asociada un álgebra de holonomía tal que

$$pr_{-1}\mathfrak{g}^{\varpi}(q \cdot \exp \eta) = pr_{-1}(Ad_{\exp -\eta})\mathfrak{g}^{\varpi}(q) = pr_{-1}\mathfrak{g}^{\varpi}(q) = \mathbb{R}^n,$$

y por la Proposición 7.6 se deduce que $\ _{1}|_{q\cdot\exp -\eta} \in \mathbb{R}^{n*}$, siendo

$$_{1}|_{q\cdot\exp\eta} = \quad _{1}|_{q} - [\eta, \quad _{0}|_{q}].$$

Como $\ _{1}|_{q} \in \mathbb{R}^{n*}$, esto implica que $[\eta, \quad _{0}|_{q}] = \quad _{1}|_{q} - \quad _{1}|_{q\cdot\exp\eta} \in \mathbb{R}^{n*}$, $\forall \eta \in \mathbb{R}^{m*}$.

Si $\mathbb{R}^{(m-n)*}$ denota el espacio ortogonal a $\mathbb{R}^{n*}$, sabemos que $\ _{0}|_{q}$ toma valores en el álgebra $pr_0(\mathfrak{g}^{\varpi}(q) \cap \mathfrak{h}) \subset \mathfrak{co}(m)$ y preserva por tanto los espacios $\mathbb{R}^{n*}$ y $\mathbb{R}^{(m-n)*}$ (por (7.19), pág. 196). De este modo,

$$[\eta, \quad _{0}|_{q}] \in \mathbb{R}^{(m-n)*} \cap \mathbb{R}^{n*} = 0, \quad \forall \eta \in \mathbb{R}^{(m-n)*},$$

lo que implica que $\quad {}_0|_q$ toma valores en $\mathfrak{o}(n) \subset \mathfrak{co}(m)$. ■

Estas Proposiciones implican que si $pr_{-1}\mathfrak{g}^{\varpi}(q_0) = \mathbb{R}^n$ para $q_0 \in Q(M)$, entonces, toda referencia especial q en el fibrado de holonomía $Q(q_0) = Q(M) \cap P(q_0)$ es tal que su forma de curvatura $\quad |_q = (0, \quad {}_0|_q\,, \quad {}_{-1}|_q)$ toma valores en la subálgebra $\mathfrak{o}(n) \oplus \mathbb{R}^{n*} \subset \mathfrak{h}$:

$$|_q = (0, \quad {}_0|_q\,, \quad {}_{-1}|_q)(\xi_q) \in \mathfrak{o}(n) \oplus \mathbb{R}^{n*}, \quad \forall \xi_q \in T_qQ(M).$$

Corolario 7.4 *Si sobre el punto $x \in M$ existe una referencia especial $q \in Q(M)_x$ tal que $pr_{-1}(\mathfrak{g}^{\varpi}(q)) = 0$, entonces,*

$$|_q = (0, \quad {}_0|_q\,, \quad {}_{-1}|_q) \equiv 0$$

y la curvatura es idénticamente nula en x.

Teorema 7.5 *La estructura conforme de la variedad M es localmente plana si y sólo si la familia de subvariedes $N(x)$ asociadas son 0-dimensionales.*

Demostración. Recuérdese que fijada la conexión normal y conforme de Cartan $\omega \in \Lambda^1(Q(M), \mathfrak{g})$, se tiene que $\forall q \in Q(M)_x$ es $\dim N(x) = \dim pr_{-1}\mathfrak{g}^{\varpi}(q)$.

Una implicación es trivial: si la estructura es localmente plana, entonces, $\mathfrak{g}^{\varpi}(q) = 0$, $\forall q \in Q(M)$, y por lo tanto tanto $\dim N(x) = 0$, $\forall x \in M$.

La otra implicación se deduce del Corolario anterior: si $\dim pr_{-1}\mathfrak{g}^{\varpi}(q) = \dim N(x) = 0$, entonces, la curvatura es idénticamente nula en x. Como esto ocurre en todo $x \in M$, el Teorema de Ambrose-Singer asegura que el álgebra de holonomía es nula y la estructura conforme resulta localmente plana. ■

Resultados referentes al álgebra de holonomía conforme infinitesimal $\mathfrak{h}_*(q)$

Proposición 7.8 *Si $pr_0(\mathfrak{g}^{\varpi}(p_0) \cap \mathfrak{h}) = \{0\} \subset \mathfrak{co}(m)$ para $p_0 \in \mathring{P}(M)$, entonces,*

$$\mathfrak{g}^{\varpi}(p_0) \cap \mathfrak{h} = \{0\}.$$

Demostración. Partimos de un $p_0 \in \mathring{P}(M)$, tal que $\mathfrak{g}^{\varpi}(p_0) \cap \mathfrak{h} = \mathfrak{g}_1^{\varpi}(q_0) \subset \mathfrak{g}_1 = \mathbb{R}^{m*}$. Para demostrar que $\mathfrak{g}_1^{\varpi}(p_0) = \{0\}$, supongamos que $\mathfrak{g}_1^{\varpi}(p_0) = \mathbb{R}^{n*} \subset \mathbb{R}^{m*}$ para $n \neq 0$ y llegaremos a un absurdo.

Las propiedades derivadas del hecho de que $\mathfrak{g}^{\varpi}(p_0)$ sea una subálgebra (Lema 7.5) indican que si $pr_{-1}\mathfrak{g}^{\varpi}(p_0)$ define un subespacio no nulo en $\mathbb{R}^m$, entonces, coincide con $\mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}^m = \mathfrak{g}_{-1}$ (dual de $\mathfrak{g}_1^{\varpi}(p_0)$) y $\mathfrak{co}(n)$ está contenido en $pr_0\,(\mathfrak{g}^{\varpi}(p_0) \cap \mathfrak{h})$. Dado que por hipótesis es $pr_0\,(\mathfrak{g}^{\varpi}(p_0) \cap \mathfrak{h}) = \{0\}$ debe ser $pr_{-1}\mathfrak{g}^{\varpi}(p_0) = \{0\}$ y tenemos

$$\mathfrak{g}^{\varpi}(p_0) = \mathfrak{g}^{\varpi}(p_0) \cap \mathfrak{h} = \mathfrak{g}_1^{\varpi}(q_0) \subset \mathbb{R}^{m*}.$$

Para las referencias $p \in P(p_0) \cap \overset{\circ}{P}(M)$, se tiene que $\;_p = (0, 0\;\;_1|_p,)$ y por la relación (7.17) pág. 195 se verifica

$$\begin{aligned} 0 = &\;\;_{-1}|_p = 0 \cdot \mathbf{V}_p + \;\;_1|_p \, \mathbf{V}_p \cdot \mathbf{V}_p - \tfrac{\|\mathbf{V}_p\|^2}{2} \;\;_1|_p^{\mathsf{T}} \\ \Leftrightarrow &\;\;_1|_p \, \mathbf{V}_p \cdot \mathbf{V}_p = \tfrac{\|\mathbf{V}_p\|^2}{2} \;\;_1|_p^{\mathsf{T}}. \end{aligned}$$

De lo que se deduce en primer lugar que $\;_1|_p \, \mathbf{V}_p = 0$, y finalmente que

$$\tfrac{\|\mathbf{V}_p\|^2}{2} \;\;_1|_p^{\mathsf{T}} = 0.$$

Ahora bien, si $\mathbf{V}_p \neq 0$ esto implica que $\;_1|_p = 0$. Por otra parte, si $\mathbf{V}_p = 0$ entonces $p \in Q(M)$ y $pr_{-1}\mathfrak{g}^{\varpi}(p) = pr_{-1}\mathfrak{g}^{\varpi}(p_0) = 0$, concluyéndose de igual modo que $\;_1|_p = 0$, por la Proposición 7.6 anterior.

Por lo tanto, hemos probado que la curvatura se anula en $P(p_0) \cap \overset{\circ}{P}(M)$, y por extensión, en su cierre $P(p_0)$. Por el Teorema de Ambrose-Singer 7.2 sería $\mathfrak{g}^{\varpi}(p_0) = 0$, lo que contradice la asunción inicial $\mathfrak{g}_1^{\varpi}(q_0) = \mathbb{R}^{n*}$ para $n \neq 0$. ■

Este resultado significa que cuando la holonomía conforme infinitesimal $\mathfrak{h}_*(q_0) = pr_0\mathfrak{h}^{\omega}(q_0)$, asociada a una referencia especial $q \in Q(M)$, coincide con el álgebra trivial $\{0\}$ en $\mathfrak{co}(m)$, entonces, necesariamente la subálgebra $\mathfrak{h}^{\omega}(q)$ es trivial en $\mathfrak{h}$ para cualquier conexión conforme de Cartan $\omega \in \Lambda^1(Q(M), \mathfrak{g})$. Pero se puede afirmar más, en tal caso la estructura de la variedad conforme M es plana en un entorno de $x_0 = \pi(q_0) \in M$.

Teorema 7.6 *Si el álgebra de holonomía conforme $\mathfrak{h}_*(q_0) \subset \mathfrak{co}(m)$ coincide con el álgebra trivial $\{0\}$, para una referencia $q_0 \in Q(M)$ sobre $x_0 \in M$, entonces, la estructura conforme es plana en un entorno del punto x_0.*

Demostración. Por la Proposición anterior sabemos

$$\mathfrak{h}_*(q_0) = \{0\} \subset \mathfrak{co}(m) \;\Leftrightarrow\; \mathfrak{h}^{\omega}(q_0) = \{0\} \subset \mathfrak{h}.$$

Obsérvese en primer lugar que $\forall q \in Q(M)$ es $\dim \mathfrak{g}^{\varpi}(q) = \dim \mathfrak{h}^{\omega}(q) + \dim pr_{-1}\mathfrak{g}^{\varpi}(q)$, y en particular para $q_0 \in Q(M)_{x_0}$ se cumple

$$\dim \mathfrak{g}^{\varpi}(q_0) = \dim pr_{-1}\mathfrak{g}^{\varpi}(q_0) = \dim N(x_0) = k_0 \leq m.$$

Por lo tanto, para cualquier $x \in M$ y $q \in Q(M)_x$ se tiene que:

- $\dim N(x) = \dim pr_{-1}\mathfrak{g}^{\varpi}(q) \leq \dim \mathfrak{g}^{\varpi}(q) = \dim \mathfrak{g}^{\varpi}(q_0) = k_0$
- $\dim N(x) = k_0 \Leftrightarrow \dim \mathfrak{h}^{\omega}(q) = 0 \Leftrightarrow \mathfrak{h}^{\omega}(q) = \{0\}$

Concluimos entonces que $k_0 = \max\{\dim N(x) : x \in M\}$, y por el Corolario 7.2 existe un entorno abierto $\mathcal{U}$ de x_0 en M tal que $\dim N(x) = k_0$, $\forall x \in \mathcal{U}$. Para $x \in \mathcal{U}$ y $q \in Q(M)_x$ se tiene:

$$_q = (0, \ \ _0|_q, \ \ _{-1}|_q) \in \mathfrak{h}^\omega(q) = \{0\} \Rightarrow \ \ _q = 0,$$

de modo que la curvatura es idénticamente nula en el abierto $\mathcal{U}$, y la estructura conforme plana en un entorno de x_0. ■

Corolario 7.5 *La estructura conforme de M es localmente plana si y sólo si el álgebra de holonomía conforme $\mathfrak{h}_*(q) \subset \mathfrak{co}(m)$ es trivial, $\forall q \in Q(M)$.*

Bibliografía

[1] W. Ambrose and I.M. Singer. A theorem on holonomy. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 75:428 – 443, 1953.

[2] B.N. Apanasov. *Conformal Geometry of Discrete Groups and Manifolds.* Walter de Gruyter, 2000.

[3] Th. Aubin. *Some Nonlinear Problems in Riemannian Geometry.* Springer, 1998.

[4] T.N. Bailey and M.G. Eastwood. Conformal circles and parametrizations of curves in conformal manifolds. *Proc. of the Am. Math. Soc.*, 108(1):215–221, 1990.

[5] M. Berger. *Geometry*, volume I. Springer-Verlag, 1994.

[6] A. Borel and A. Lichnerowicz. Groupes d'holonomie des variétés riemanniennes. *C. R. Acad. Sci. Paris*, (234):1835 – 1837, 1952.

[7] A. Cap, J. Slovak, and V. Soucek. Invariant operatos on manifolds with almost hermitian symetric structures I-II. *Acta. Math. Univ. Comen.*, 66(I and II):33–69 and 203–220, 1997.

[8] E. Cartan. La méthode du repère mobile, la théorie des groupes continus et les espaces généralisés. *Exposés de Géométrie*, V.

[9] E. Cartan. Les espaces à connexion conforme. *Ann. Soc. Math.*, 2:171–221, 1923.

[10] E. Cartan. Sur les variétés à connexion projective. *Bull. Soc. Math.*, 52:205 – 241, 1924.

[11] E. Cartan. Les groupes d'holonomie des espaces généralisés. *Acta Math.*, 48:1–42, 1926.

[12] S.S. Chern. Pseudo-groupes continus infinis. In *Colloque de Géométrie Différentielle*, pages 119 – 136, Strasbourg, 1953.

[13] L.A. Cordero, C.T.J. Dodson, and M. de Leon. *Differential Geometry of Frame Bundles*. Kulwer Academic Publishers, 1989.

[14] C. Ehresmann. Les connexions infinitésimales dans un espace fibré différentiable. *Colloque de Topologie*, pages 29 – 55, 1950.

[15] L.P. Eisenhart. *Riemannian Geometry*. Princeton University Press, 1949.

[16] D.B.A. Epstein. Isomorfismi conformi e geometria iperbolica. In *Quaderno Dei Grupi Di Recerca Matemática Del C.N.R.* Editrice Universitaria Levroto e Bella, 1984.

[17] J.F. Frênet. Sur quelques propiétés des coubres à double coubure. *J. Math. Pures Appl.*, (17):365 – 372, 1852.

[18] H. Friedrich and B.G. Schmidt. Conformal geodesics in general relativity. *Proc. R. Soc. London*, Ser. A 414:171–195, 1987.

[19] S. Gallot, D. Hulin, and J. Lafontaine. *Riemannian Geometry*. Springer-Verlag, 1993.

[20] W. Greub, S. Haperlin, and R. Vanstone. *Connections, Curvature and Cohomology*, volume II. Academic Press, 1973.

[21] V. Guillemin. The integrability problem for g-structures. *Trans. Amer. Math. Soc.*, (116):544 – 560, 1965.

[22] C. Jordan. Sur la théorie des courbes dans l'espace à n dimensions. *C. R. Acad. Sci. Paris*, (79):795 – 797, 1874.

[23] S. Kobayashi. *Transformation Groups in Differential Geometry*. Springer-Verlag, 1972.

[24] S. Kobayashi and K.Nomizu. *Foundations of Differential Geometry*, volume I. Interscience Publisher, 1963.

[25] R.S. Kulkarni. Curvature structures and conformal transformations. *J. Differential Geometry*, 4:425–451, 1969.

[26] R.S. Kulkarni. Conformal structures and möbius structures. In R.S.Kulkarni and U.Pinkall, editors, *Conformal Geometry*. Friedr. Vieweg and Shon, 1988.

[27] J. Lafontaine. Conformal geometry from the riemannian viewpoint. In R.S.Kulkarni and U.Pinkall, editors, *Conformal Geometry*. Friedr. Vieweg and Sohn, 1988.

[28] J. Lafuente and B. Salvador. From the fermi-walker to the cartan connection. *Proc. of the 19th Winter School on Geometry and Physics, Srni 1999, Rendiconti Circ. Mat. Palermo*, Serie II(Supp. 63):149–156, 2000.

[29] D. Laugwitz. *Differential and Riemannian Geometry.* Academic Press, 1965.

[30] O. Lehto. *Univalent Functions and Teichmüller Spaces.* Springer, 1987.

[31] F. Leitner. Twistor spinors and normal cartan connections in conformal geometries. *Preprint SFB 288*, (471), 2000.

[32] T. Levi-Civita. Nozione di parallellismo in una varietà qualunque e conseguente specificazione della curvatura riemanniana. *Rendiconti Circ. Mat. Palermo*, 42:173–205, 1917.

[33] P. Liberman and C. Marble. *Symplectic Geometry and Analitical Mechanics.* Reidel Publ., 1987.

[34] A. Lichnerowicz. *Global Theory of Connections and Holonomy Groups.* Noordhoff International Publishing, 1976.

[35] W. Misner, K.S. Thorne, and J.A. Wheeler. *Gravitation.* W.H. Freeman and Company, 1973.

[36] E. Outerelo and J.M. Ruiz. *Topología Diferencial. Variedades con Borde. Transversalidad. Aproximación.* Addison-Wesley, 1998.

[37] W.A. Poor. *Differential Geometric structures.* McGraw-Hill Book Company, 1981.

[38] R.K. Sachs and H. Wu. *General Relativity for Mathematicians.* Springer-Verlag, 1977.

[39] B. Salvador. *Sobre Las Conexiones Asociadas a Una Estructura Conforme. La Conexión de Cartan.* PhD thesis, F. de CC. Matemáticas de la UCM, 1999.

[40] B. Salvador. *Contribuciones Matematicas. Homenaje al Profesor Joaquín Arregui.* Ed. Complutense, 2001.

[41] I. Sánchez. *Conexiones en el fibrado de referencias. Conexiones de segundo orden.* PhD thesis, Universidad Complutense, Junio 1994.

[42] Ch. Schiemangk and R. Sulanke. Submanifolds of the möbius space. *Math. Nachr.*, 96:165–183, 1980.

[43] R. Schoen and S.-T. Yau. *Lectures on Differential Geometry.*, volume I. International Press, 1994.

[44] J.A. Schouten. *Ricci-Calculus.* Springer-Verlag, 1954.

[45] H.A. Schwarz. Uber einige abbildungsaufgaben. *J. fur riene und angewandte Math.*, 70, 1869.

[46] R.W. Sharpe. *Differential Geometry: Cartan's Generalization of Klein's Erlangen Program.* Springer, 1997.

[47] N. Steenrod. *The Topology of Fibre Bundles.* Princeton University Press, 1951.

[48] S. Sternberg. *Lectures on Differential Geometry.* Prentice Hall Inc., 1964.

[49] R. Sulanke. Submanifolds of the möbius space ii, frenet formulas and curves of constant curvatures. *Math. Nachr.*, 100:235–247, 1981.

[50] V.S. Varadarajan. *Lie Groups, Lie Algebras and Their Representations.* Prentice-Hall inc, 1974.

[51] F. Warner. *Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups.* Scott-Foresman Glenview, 1971.

[52] H. Weyl. Reine infinitesimaltheorie. *Math. Z.*, 2:384 – 411, 1918.

[53] H. Weyl. Zur infinitesimalgeometrie; einordnung der projektiven und conformalen auffassung. *Göttingen Nachr.*, pages 99–112, 1922.

[54] K. Yano. *Integral Formulas in Riemannian Geometry.* Marcel Dekker Inc., 1970.