Sobre las cométricas con cambio transverso de signatura

Trabajo de Investigación presentado por María Esther Fernández Vieito

Director: Javier Lafuente López

Universidad Complutense de Madrid

Departamento de Geometría y Topolgía

15 de mayo de 2009

Índice

1. Introducción

En [4] se estudiaban las geodésicas y pregeodésicas de una variedad diferenciable con métrica riemanniana que cambia de signatura en una hipersuperficie, o más propiamente, de una variedad diferenciable dotada de una métrica cambiante con cambio transverso de signatura. Desde el punto de vista físico estas variedades tienen interés al ser los objetos matemáticos apropiados para modelizar espacios-tiempo que son parcialmente lorentzianos y parcialmente (en el pasado remoto) riemannianos.

Se probaba allí la existencia de pregeodésicas que atraviesan la hipersuperficie en cada punto en la dirección del radical y en cualquier otra dirección transversal a la hipersuperficie con tal de que anulase cierto campo tensorial. Esto se conseguía utilizando el spray geodésico y reduciendo el problema de la extendibilidad geodésica a uno de sistemas dinámicos, en concreto a una aplicación de un teorema de variedades estables. Además, con ayuda de la familia de pregeodésicas en la dirección del radical se podía construir una carta local en torno a cada punto de la hipersuperficie en la que la última coordenada parametrizaba la pregeodésica .

El objetivo de este trabajo es establecer algún tipo de resultado análogo para el caso dual de una cométrica g^* degenerada con cambio transverso de signatura tipo Lorentz-Riemann y anulador tangente. O visto dualmente, para la métrica g en $M - D^\infty$ dual de g^*, donde D^∞ es la hipersuperficie de degeneración de la cométrica. y que denominamos **métrica cambiante Lorentz-Riemann con final polar.**

Esta dualización no es directa ni trivial, ni en las hipótesis que debe cumplir la cométrica ni en la búsqueda de la dirección de posibles pregeodésicas. No obstante, una vez que se encuentra dicha dirección (pues ésta resulta ser única, a diferencia del caso dual), se pueden aplicar las mismas técnicas de variedades estables consiguiéndose demostrar la existencia de pregeodésicas en cada punto de la hipersuperficie en esa y sólo en esa dirección, denominada **dirección polar normal.** Obtenemos así la existencia de un campo pregeodésico en la variedad atravesando la hipersuperficie.

2. Notación

En todo el trabajo usaremos las siguientes convenciones para los índices:

$$a, b, c \in \{1, ..., m\}$$

$$i, j, k \in \{1, ..., m-1\}$$

Usaremos el convenio de sumatorios de Einstein, a no ser que el índice que se repita sea m.

Conviene tener presente también que trabajamos siempre localmente, en un entorno fijo de $p \in D^\infty$ del espacio métrico cambiante Lorentz-Riemann con final polar.

3. Cométricas

Sea M una variedad diferenciable conexa de dimensión $m \geq 2$

Definición 1 *Una* cométrica *es un campo tensorial 2-contravariante simétrico $g^\bullet$ definido sobre una variedad M .*

Es decir: La cométrica es $g^\bullet \in \mathfrak{T}_0^2(M)$ simétrico y

$$g^\bullet(p) : T_p^*(M) \times T_p^*(M) \to \mathbb{R}$$

se llama cométrica en p.

Recordemos que una *métrica* es un tensor $g_\bullet \in \mathfrak{T}_2^0(M)$ simétrico y

$$g_\bullet(p) : T_p(M) \times T_p(M) \to \mathbb{R}$$

es la métrica en p.

Dada una *métrica* $g_\bullet$ no degenerada podemos obtener una *cométrica* $g^\bullet$ no degenerada utilizando el isomorfismo $\mathfrak{F}(M)$-lineal entre campos y uno-formas, bajando el índice dos veces.

Proposición 1 *La función $\mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}^*(M)$ que hace corresponder a cada campo X la forma α_X definida así: $\alpha_X(Y) = g(X,Y) \quad \forall Y \in \mathfrak{X}(M)$ es un isomorfismo $\mathfrak{F}(M)$-lineal (siempre que g sea no degenerado).([6] pag 60)*

Esta función se ve así en el tangente:

$$\begin{array}{ll} T_pM \to T_p^*M & \textit{con} \quad \alpha_\xi(\eta) = g(\xi,\eta) \\ \quad \xi \to \alpha_\xi & \end{array}$$

Es invertible si g es no degenerada en p, es decir si:

$$Rad_p(g) = \{\alpha \in T_pM : g^*(\alpha,\beta) = 0, \forall \beta \in T_pM\} = 0$$

Veamos la expresión en coordenadas locales de este isomorfismo.

Si (x^a) es una carta local y (g_{ab}) la matriz del tensor métrico tenemos

$$g = g_{ab} dx^a \otimes dx^b$$

Dado el campo $X = X^a \frac{\partial}{\partial x^a}$, será:

$$\alpha_X = \alpha_b dx^b = \alpha_X(\frac{\partial}{\partial x^b})dx^b = g(X, \frac{\partial}{\partial x^b})dx^b = g(X^a \frac{\partial}{\partial x^a}, \frac{\partial}{\partial x^b})dx^b$$
$$= X^a g(\frac{\partial}{\partial x^a}, \frac{\partial}{\partial x^b})dx^b = X^a g_{ab} dx^b$$

de donde se deduce que:

$$\alpha_b = X^a g_{ab}$$

$$(g_{ab}) \begin{pmatrix} X^1 \\ ... \\ X^m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ ... \\ \alpha^m \end{pmatrix}$$

Despejando con $\left(g^{ab}\right) = (g_{ab})^{-1}$ (pues g es no degenerada y por tanto su matriz invertible), obtenemos

$$g^{ab}\alpha_b = X^a$$

Dada una forma $\alpha = \alpha_b dx^b$ se obtendrá entonces el campo:

$$X_\alpha = X^a \frac{\partial}{\partial x^a} = g^{ab}\alpha_b \frac{\partial}{\partial x^a}$$

Haciendo en particular $\alpha = dx^b$, es

$$X_{dx^b} = X_\alpha = X^a \frac{\partial}{\partial x^a} = g^{ab}\alpha_b \frac{\partial}{\partial x^a} = g^{ab} \frac{\partial}{\partial x^a}$$

3.1. Obtención de la cométrica a partir de la métrica

Dada M una variedad diferenciable conexa de dimensión $m \geq 2$ con una *métrica* no degenerada $g \in \mathfrak{T}_2^0(M)$ podemos definir la *cométrica* $g^* \in \mathfrak{T}_0^2(M)$ del siguiente modo:

$$\textit{Dadas } \alpha\ ,\ \beta \in \mathfrak{X}^*(M): \quad g^*(\alpha, \beta) = g(X_\alpha, X_\beta)$$

Si (x^a) es una carta local y (g_{ab}) la matriz del tensor métrico tenemos, según los anteriores resultados:

$$g^*(dx^a, dx^b) = g(X_{dx^a}, X_{dx^b}) = g(g^{ac}\frac{\partial}{\partial x^c}, g^{bd}\frac{\partial}{\partial x^d}) =$$
$$g^{ac}g_{cd}g^{bd} = \delta_d^a g^{bd} = g^{ba} = g^{ab}$$

Se tienen por tanto las relaciones:

$$g = g_{ab} dx^a \otimes dx^b$$
$$g^* = g^{ab} \frac{\partial}{\partial x^a} \otimes \frac{\partial}{\partial x^b}$$

3.2. Obtención de la métrica a partir de la cométrica

Recordemos algunos resultados elementales del álgebra lineal.

Si $\mathbb{V}$ es un espacio vectorial de dimensión finita, con base $(e_1, e_2, ..., e_n)$ y $\mathbb{V}^*$ su dual con base $(e^1, e^2, ..., e^n)$ un vector $v \in \mathbb{V}$ se escribe como

$$v = e^1(v)e_1 + ... + e^n(v)e_n$$

Siempre que la dimensión de $\mathbb{V}$ es finita es un espacio *reflexivo*, es decir, si dualizamos dos veces obtenemos un espacio vectorial canónicamente isomorfo a $\mathbb{V}$,es decir, $\mathbb{V}^{*^*} \simeq \mathbb{V}$

$$\mathbb{V} \to \mathbb{V}^{*^*}$$
$$v \to v : \mathbb{V}^* \to \mathbb{R}$$
$$\text{definiendo}$$
$$v(\beta) = \beta(v)\ \forall \beta \in \mathbb{V}^*$$

Puesto que la $\dim T_p(M)$ $=m < \infty$, utilizamos dicho isomorfismo canónico para definir:

$$T_p^* M \to T_p^{**} M \simeq T_p M$$
$$\alpha \to X_\alpha$$

donde $X_\alpha \in T_p M$ es el único que cumple:

$$\beta(X_\alpha) = g(\alpha, \beta)$$

Si (x^a) es una carta local y (g^{ab}) la matriz del tensor cométrico, es decir:

$$g = g^{ab} \frac{\partial}{\partial x^a} \otimes \frac{\partial}{\partial x^b}$$

Dada la 1-forma $\alpha = \alpha_a dx^a$, será:

$$X_\alpha = dx^b(X_\alpha) \frac{\partial}{\partial x^b} = g(\alpha, dx^b) \frac{\partial}{\partial x^b} = g(\alpha_a dx^a, dx^b) \frac{\partial}{\partial x^b} = \alpha_a g^{ab} \frac{\partial}{\partial x^b}$$

de donde se deduce que:

$$X_\alpha^b = \alpha_a g^{ab}$$

Tenemos por tanto:

$$\begin{aligned} \mathfrak{X}^*(M) &\to \mathfrak{X}(M) \\ \alpha &\to \ X_\alpha \end{aligned}$$

Su inversa es:

$$\begin{aligned} \mathfrak{X}(M) &\to \mathfrak{X}^*(M) \\ X &\to \alpha_X \end{aligned}$$

Si $\alpha = \alpha_X$ con $X = X^b \frac{\partial}{\partial x^b}$ resulta:

$$\alpha_a = X^b g_{ab}$$

Podemos definir entonces la métrica dual g^* de la cométrica g por la fórmula:

$$g^*(X, Y) = g(\alpha_X, \alpha_Y)$$

Obviamente:

$$g^*(\frac{\partial}{\partial x^a}, \frac{\partial}{\partial x^b}) = g(\alpha_{\frac{\partial}{\partial x^a}}, \alpha_{\frac{\partial}{\partial x^b}}) = g(g_{ac}dx^c, g_{db}dx^d) = g_{ac}g^{cd}g_{db} = \delta_d^a g_{db} = g_{ab}$$

Por tanto, si ponemos $\left(g^{ab}\right)^{-1} = (g_{ab})$ podemos escribir:

$$g = g_{ab}dx^a \otimes dx^b$$

Resumiendo las dos últimas secciones, hemos obtenido:

Si g es una métrica (resp. cométrica) no degenerada, entonces g^*es una cométrica (resp. métrica) no degenerada y $(g^*)^* = g$.

3.3. Cométricas degeneradas

Sea $g^* \in \mathfrak{T}_0^2(M)$ simétrico *cométrica* en M . Sea:

$$D^\infty = \left\{p \in M \;/ g^*(p) \quad : g^*(p) : T_p^*(M) \times T_p^*(M) \to \mathbb{R} \text{ es degenerada}\right\}$$

Los puntos de D^∞ se llaman *polos.*

Nos referiremos siempre a cométricas g^* con cambio transverso de signatura. Esto significa:

D1) *El conjunto D^∞ es no vacío.*

D2) *Condición de transversalidad.*

En cada punto $p \in M$, donde $g_p^* : T_p^*M \times T_p^*M \to \mathbb{R}$ es degenerado, existe $(\theta^1, \ldots, \theta^m)$ base de 1-formas en un entorno U de p (cobase móvil (θ^a)) de forma que si $g^{ab} = g^*(\theta^a, \theta^b)$ se tiene que $d_x \det\left(g^{ab}\right) \neq 0$ $\forall x \in U \cap D^\infty$ (con $\det(g^{ab}(x)) = 0$).

Es facil ver que **esta condición (transversa) es independiente de la cobase** (θ^a) **tomada en torno a** p:

En efecto, sea $(U, (\theta^a))$ cumpliendo la condición y sea $(V, (\omega^a))$ otra referencia local en torno a p.

$$g^*(\omega^a, \omega^b) = A^T (g^{ab}) A$$

donde $A : V \to M_{m\times m}(\mathbb{R})$, $A(x) \in M_{m\times m}(\mathbb{R})$ matriz del cambio de base de $(\omega^a(x))$ a $(\theta^a(x))$.

Sea $x \in U \cap V$ con $d_x \det\left(g^{ab}\right) \neq 0$ y $\det(g^{ab}(x)) = 0$. Como $\det A \neq 0$ (A es matriz de cambio de base) se tiene:

$$\begin{aligned}
\det g^*(\omega^a, \omega^b) &= (\det A)^2 \det(g^{ab}) \\
\det g^*(\omega^a(x), \omega^b(x)) &= (\det A)^2 \det(g^{ab}(x)) = 0 \\
d_x \det g^*(\omega^a(x), \omega^b(x)) &= (\det A)^2 d_x \det(g^{ab}(x)) \neq 0 \\
&\Rightarrow d_x \det g^*(\omega^a(x), \omega^b(x)) \neq 0
\end{aligned}$$

En este caso $D^\infty = \left\{p \in M \diagup g_p^* \text{ es degenerada}\right\}$ es una *hipersuperficie* -denominada *polar*- que localmente, en cualquier cobase $(U, (\theta^a))$, admite por ecuación:

$$\det\left(g^*\left(\theta^a, \theta^b\right)\right) = 0$$

En efecto, al ser $d_x \det\left(g^{ab}\right) \neq 0$ y $\det(g^{ab}(x)) = 0$ $\forall x \in U \cap D^\infty$, se tiene que D^∞ es hipersuperficie sin más que aplicar el teorema de la función implícita.

D3) *Si $p \in D^\infty$ el radical es unidimensional.*

$$Rad_p\left(g^*\right) = \left\{\alpha \in T_p^*M : g^*\left(\alpha, \beta\right) = 0, \forall \beta \in T_p^*M\right\}$$

Sea $(e^1, \ldots\ldots, e^m)$ una base de $T_p^*(M)$ tal que $g^*(e^a, e^b) = \delta_b^a g^*(e^a, e^a)$.

Tomemos en torno a $p \in D^\infty$ una carta $(U, \varphi = (x^1, \ldots.., x^m)$ tal que $dx^a|_p = e^a$. Así la representación matricial de g^* en p es diagonal con:

$$\nu = \dim Rad_p(g^*) = \text{n}^o \text{ de ceros en la diagonal}$$

$$d_p \det g^*(e^a, e^b) = \sum_{a=1}^{m} g^{11}(p)...d_p g^{aa}...g^{mm}(p)$$

Si $\nu \geq 2$ se anularía la fórmula anterior, que no es más que:

$$d_p \det g^*(e^a, e^b) = d_p g^{11} g^{22}(p)...g^{mm}(p) + g^{11}(p) d_p g^{22}...g^{mm}(p) + ...$$
$$.... + g^{11}(p) g^{22}(p)...d_p g^{mm}$$

Esto contradeciría la transversalidad de g^* en p, luego debe ser como queríamos:

$$\nu = 1 = \dim Rad_p(g^*)$$

D4) *La signatura de g^* cambia en una unidad al atravesar D^∞.*

Recordemos que $\det(g^*\left(\theta^a, \theta^b\right)) = 0$ es una ecuación local de D^∞ y por tanto:

$$\ker d_p \det g^*(e^a, e^b) = T_p D^\infty$$

Acabamos de ver que hay exactamente un a tal que $g^{aa}(p) = 0$. Si reordenamos las coordenadas podemos poner $g^{mm}(p) = 0$ y queda entonces la fórmula:

$$d_p \det g^*(e^a, e^b) = g^{11}(p) g^{22}(p)........g^{m-1m-1} d_p g^{mm} \neq 0$$

luego existe un vector $\xi \in T_pM - T_pD^\infty$ tal que $d_p \det g^*(e^a, e^b)(\xi) \neq 0$, en particular $d_p g^{mm}(\xi) \neq 0$, digamos $d_p g^{mm}(\xi) > 0$.

Tomemos $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to U$ una curva con $\gamma(0) = p$ y $\gamma'(0) = \xi$. Existe $\delta > 0$ suficientemente pequeño tal que $g^{mm}(\gamma(t))$ cambia de signo en $(-\delta, \delta)$ al atravesar $t = 0$. Como $g^{ii}(p) \neq 0$, sólo g^{mm} cambia de signo, y por tanto el índice de g varía en una unidad al atravesar D^∞.

En adelante **admitiremos que g^* es de tipo Lorentz-Riemann.**

En un entorno U de cada $p \in D^\infty$ podemos tomar (θ^a) cobase móvil de forma que:

$$(g^{ab}) = \begin{pmatrix} g^{ij} & 0 \\ 0 & \tau \end{pmatrix}$$

$D^\infty \cap U$ tiene ecuación $\tau = 0$, con $d_x\tau \neq 0 \forall x \in D^\infty \cap M$.

De hecho se puede conseguir una cobase (θ^a), que llamaremos *$Rad^* -$ adaptada,* de modo que la matriz de la cométrica tiene una expresión mucho más simple. Esta construcción es local, es decir, veremos que en un entorno V de cada $p \in D^\infty$ podemos tomar (θ^a) cobase móvil de forma que $D^\infty \cap U$ tiene ecuación $\tau = 0$, con $d_x\tau \neq 0 \forall x \in D^\infty \cap M$ y la matriz de la cometrica es:

$$(g^{ab}) = \begin{pmatrix} 1 & ... & 0 & 0 \\ ... & ... & ... & .. \\ 0 & ... & 1 & 0 \\ 0 & ... & 0 & \tau \end{pmatrix}$$

En primer lugar se toma una carta (U, φ) centrada en $p \in D^\infty$ de forma que la expresión local de la cométrica en dicha carta sea diagonal, es decir:

$$\begin{aligned} \varphi : U \to \mathbb{S}_o \subset \mathbb{R}^m \\ \varphi(p) = o; \\ g^*(o) = \left(g^{ij}(o)\right) \text{ diagonal} \end{aligned}$$

Estamos ahora en las hipótesis del siguiente lema:

Lema 1 *Sea $\mathbb{S}$ un entorno abierto del origen $o \in \mathbb{R}^p$.*

$\mathcal{L}^2_{sim}(\mathbb{R}^m)$ es el espacio de las matrices reales cuadradas y simétricas de orden m que se identifica de modo natural con el espacio de las formas bilineales simétricas de $\mathbb{R}^m$.

Sea $g : \mathbb{S} \to \mathcal{L}^2_{sim}(\mathbb{R}^m)$ una aplicación diferenciable, $G = \det g : \mathbb{S} \to \mathbb{R}$ y supongamos que:

1. $g(o)$ es matriz diagonal.

2. $G(o) = 0$, pero $dG|_o \neq 0$.

Se tienen entonces los siguientes resultados:

a) En la diagonal de $g(o)$ hay exactamente un único elemento nulo, digamos $g_{mm}(o) = 0$.

b) En un entorno $\mathbb{S}_o$ del origen o pueden construirse aplicaciones diferenciables $F_a : \mathbb{S}_o \to \mathbb{R}^m$ que cumplen que $(F_a(s))$ es base de $\mathbb{R}^m$ para todo $s \in \mathbb{S}_o$, y que es diagonal la matriz:

$$(f_{ab}(s)) = (g(s)(F_a(s), F_b(s))) = \begin{pmatrix} f_{11} & ... & 0 \\ : & .. & : \\ 0 & ... & f_{mm} \end{pmatrix}(s)$$

Además $\det(f_{ij}) = f_{11}f_{22}.....f_{m-1,m-1}$ es no nulo en $\mathbb{S}_o$ y $f_{mm}(o) = 0$, pero $df_{mm}|_o \neq 0$

c) Se puede refinar el entorno $\mathbb{S}_o$ para que $\Sigma = \{s \in \mathbb{S}_o \diagup G(s) = o\}$ sea hipersuperficie con (buena) ecuación $\Sigma = \{f_{mm} = 0\}$ y de forma que $\mathbb{S}_o - \Sigma$ tenga dos componentes conexas $\mathbb{S}^+_o : \{f_{mm} > 0\} \cap \mathbb{S}_o$, $\mathbb{S}^-_o : \{f_{mm} < 0\} \cap \mathbb{S}_o$

d)Todas las formas bilineales $g(s)$ para $s \in \mathbb{S}^+_0$ tienen el mismo índice, que es exactamente una unidad inferior al índice de las formas bilineales $g(s)$ para $s \in \mathbb{S}^-_0$

Demostración. **a)** Por hipótesis $g(o)$ es matriz diagonal en la base canónica (e_a) :

$$g(o) = \begin{pmatrix} g_{11}(o) & ... & 0 \\ : & & : \\ 0 & ... & g_{mm}(o) \end{pmatrix}$$

$$G(o) = \det g(o) = g_{11}(o)g_{22}(o).....g_{mm}(o) = 0$$

Argumentando de modo idéntico a D3 debe haber algún elemento nulo en la diagonal, pues si hubiera más de uno se tendría que:

$$\begin{aligned} dG|_o = {} & d_o g_{11}(o)g_{22}(o)...g_{mm}(0) \\ & + g_{11}(o)d_o g_{22}(o)...g_{mm}(0) + ... \\ & + g_{11}(o)g_{22}(o)...d_o g_{mm}(0) \ = 0 \end{aligned}$$

en contra de la hipótesis.

Así, hay exactamente un a tal que $g_{aa}(o) = 0$. Reordenamos las coordenadas para que sea $g_{mm}(o) = 0$.

b) Tomamos (e_a) base canónica y aplicamos el proceso de ortogonalización de Gram-Schmidt:

$$\begin{aligned} F_1 &= e_1 \\ F_2 &= e_2 - \frac{g_s(F_1, e_2)}{g_s(F_1,F_1)}F_1 \\ F_3 &= e_3 - \frac{g_s(F_1, e_3)}{g_s(F_1,F_1)}F_1 - \frac{g_s(F_2, e_3)}{g_s(F_2,F_2)}F_2 \\ & .... \end{aligned}$$

$$F_m = e_m - \frac{g_s(F_1, e_m)}{g_s(F_1,F_1)}F_1 - \frac{g_s(F_2, e_m)}{g_s(F_2,F_2)}F_2 - ...... - \frac{g_s(F_{m-1}, e_m)}{g_s(F_{m-1},F_{m-1})}F_{m-1}$$

Si esta construcción es válida (es decir, si los denominadores no se anulan), se tiene, en un entorno adecuado de o,digamos $\mathbb{S}_o$, que $(F_a(s))$ forma base de $\mathbb{R}^m$ para todo $s \in \mathbb{S}_o$ y también del modo habitual se obtiene:

$$g(o)(F_a(o), F_b(o)) = \delta_{ab}g(o)(e_a, e_b) = \delta_{ab}g_{ab}(o)$$

Veamos que **las funciones** $F_a : S_o \to R^m$ **son diferenciables**:

1) $F_1 = e_1$, lo es obviamente por ser constante en $\mathbb{S}_1 = \mathbb{S}$

2) $F_2 = e_2 - \frac{g_s(F_1,e_2)}{g_s(F_1,F_1)}F_1 = e_2 - \frac{g_s(e_1,e_2)}{g_s(e_1,e_1)}e_1$

Por hipótesis g es diferenciable, en particular continua, y por tanto serán continuas las funciones g_{ij}.

Sabemos que $g_o(e_1, e_1) = g(o)(e_1, e_1) = g_{11}(o) \neq 0$ por a) y encontramos entonces por continuidad un entorno $\mathbb{S}_2$, $o \in \mathbb{S}_2 \subset \mathbb{S}_1$, tal que

$$g_{11}(s) = g_s(e_1, e_1) \neq 0 \forall s \in \mathbb{S}_2$$

De este modo F_2 es diferenciable pues es composición de funciones diferenciables y $g_s(e_1, e_1) \neq 0$.

3) Supongamos F_i diferenciable en $\mathbb{S}_i \subset \bigcap_{2 \leq j \leq i-1} \mathbb{S}_j \quad \forall i \leq n$ y veamos entonces que F_{n+1} lo es también.

$$\begin{aligned} F_{n+1} = e_{n+1} - \frac{g_s(F_1, e_{n+1})}{g_s(F_1, F_1)} F_1 - \frac{g_s(F_2, e_{n+1})}{g_s(F_2, F_2)} F_2 - \ldots.. \\ \ldots - \frac{g_s(F_{n-1}, e_{n+1})}{g_s(F_{n-1}, F_{n-1})} F_{n-1} - \frac{g_s(F_n, e_{n+1})}{g_s(F_n, F_n)} F_n \end{aligned}$$

Si $n < m$, tenemos por el apartado a) que $g_o(e_n, e_n) \neq 0$ y razonando igual que en 2) encontramos un entorno:

$$\mathbb{S}_{n+1} \subset \bigcap_{2 \leq j \leq n} \mathbb{S}_j, o \in \mathbb{S}_{n+1} \text{ tal que:}$$

$$g_{nn}(s) = g_s(e_n, e_n) \neq 0 \forall s \in \mathbb{S}_{n+1}$$

Ahora:

$$\begin{aligned} g_s(F_n, F_n) &= g_s \begin{pmatrix} e_n - \frac{g_s(F_1, e_n)}{g_s(F_1, F_1)} F_1 - \frac{g_s(F_2, e_n)}{g_s(F_2, F_2)} F_2 - \ldots\ldots - \frac{g_s(F_{n-1}, e_n)}{g_s(F_{n-1}, F_{n-1})} F_{n-1}, \\ e_n - \frac{g_s(F_1, e_n)}{g_s(F_1, F_1)} F_1 - \frac{g_s(F_2, e_n)}{g_s(F_2, F_2)} F_2 - \ldots\ldots - \frac{g_s(F_{n-1}, e_n)}{g_s(F_{n-1}, F_{n-1})} F_{n-1} \end{pmatrix} \\ &= g_s(e_n, e_n) - \frac{g_s(F_1, e_n)}{g_s(F_1, F_1)} g_s(e_n, F_1) - \ldots - \frac{g_s(F_{n-1}, e_n)}{g_s(F_{n-1}, F_{n-1})} g_s(e_n, F_{n-1}) + \\ &+ \left(\frac{g_s(F_1, e_n)}{g_s(F_1, F_1)} \right)^2 g_s(F_1, F_1) + \ldots + \frac{g_s(F_1, e_n)}{g_s(F_1, F_1)} \frac{g_s(F_{n-1}, e_n)}{g_s(F_{n-1}, F_{n-1})} g_s(F_1, F_{n-1}) + \ldots + \\ &+ \frac{g_s(F_{n-1}, e_n)}{g_s(F_{n-1}, F_{n-1})} \frac{g_s(F_1, e_n)}{g_s(F_1, F_1)} g_s(F_{n-1}, F_1) + \ldots + \left(\frac{g_s(F_{n-1}, e_n)}{g_s(F_{n-1}, F_{n-1})} \right)^2 g_s(F_{n-1}, F_{n-1}) \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que $g_o(F_i, e_n) = 0$ si $i < n$. queda:

$$g_o(F_n(o), F_n(o)) = g_o(e_n, e_n)$$

En $\mathbb{S}_{n+1}$ se tendrá $g_s(e_n, e_n) \neq 0$.

$$\lim_{s \to o} g_s(F_n, F_n) = g_s(e_n, e_n) \neq 0$$

Es decir existe un entorno de o que de nuevo llamo $\mathbb{S}_{n+1}$ donde $g_s(F_n, F_n) \neq 0$.

Se tiene entonces F_{n*1} diferenciable por la hipótesis de inducción y ser $g_s(F_n, F_n) \neq 0$.

Tomamos $\mathbb{S}_o = \bigcap_{1\leq i\leq m} \mathbb{S}_i$ y se tiene el resultado pedido.

$$(f_{ab}(o)) = (g(o)(F_a(o), F_b(o))) = g(o) = \begin{pmatrix} g_{11}(o) & ... & 0 \\ : & & : \\ 0 & ... & g_{mm}(o) \end{pmatrix}$$

Ahora, por continuidad de las funciones g_{ii} en el punto o, en $\mathbb{S}_o$ se tiene $\det(f_{ij}) = f_{11}f_{22}.....f_{m-1,m-1}$ no nulo y $f_{mm}(o) = 0$, pero $df_{mm}|_o \neq 0$

c) Refinamos si hace falta $\mathbb{S}_o$ para aplicar el teorema de la función implícita y se obtiene $\Sigma = \{f_{mm} = 0\}$ hipersuperficie de ecuación "buena" $(df_{mm}|_o \neq 0)$.

Refinamos de nuevo si fuera necesario $\mathbb{S}_o$ para poder particularizar una propiedad local de las variedades dadas por ecuaciones: Se cumple que $\mathbb{S}_o - \Sigma$ tiene dos componentes conexas:

$$\mathbb{S}_o^+ = f_{mm}^{-1}((o, +\infty)) \cap \mathbb{S}_o \quad \text{y} \quad \mathbb{S}_o^- = f_{mm}^{-1}((-\infty, 0)) \cap \mathbb{S}_o$$

Efectivamente en el entorno $\mathbb{S}_o$ del origen $\exists\varphi = (x^1, ..., x^m = f_{mm})$ carta adaptada a la hipersuperficie.

Se encuentra esta carta partiendo de otra cualquiera $\psi = (x^1, ...x^m)$ y haciendo el cambio de variable:

$$\begin{cases} y^1 = x^1 \\ : \\ y^{m-1} = x^{m-1} \\ y^m = f_{mm} \end{cases}$$

que es posible puesto que $df_{mm}|_o \neq 0$ (suponemos por ejemplo $\frac{\partial f}{\partial x^m} \neq 0$, por eso tomamos f_{mm} como coordenada m-ésima)

Resulta:

$$M \supset \mathbb{S}_o \xrightarrow{\varphi} \mathbb{B}^{m-1} \times (-\varepsilon, \varepsilon)$$

y podemos restringir φ^{-1} :

$$\mathbb{B}^{m-1} \times (-\varepsilon, 0) \xrightarrow{\varphi^{-1}} \mathbb{S}_o^- \quad \text{y} \quad \mathbb{B}^{m-1} \times (0, \varepsilon) \xrightarrow{\varphi^{-1}} \mathbb{S}_o^+$$

Obviamente φ^{-1} es continua, y conserva la conexión, de lo que se sigue el resultado.

d) Por la construcción de $\mathbb{S}_o$ tenemos que $\det(f_{ij}) = f_{11}f_{22}.....f_{m-1,m-1}$ es no nulo en $\mathbb{S}_o$ y $f_{mm}(o) \neq 0$ en $\mathbb{S}_o^-$ y en $\mathbb{S}_o^+$. De esto y de la conexión de $\mathbb{S}_o^-$ y en $\mathbb{S}_o^+$ se sigue que todas las formas bilineales $g(s)$ tienen el mismo índice.

Al .ªtravesar"la hipersuperficie Σ se produce un único cambio de signo en la matriz diagonal, el atribuído a f_{mm}. (Para que hubiera más tendría que anularse algún otro f_{ii} y esto no ocurre en $\mathbb{S}_o$). Como $f_{mm}(\mathbb{S}_o^-) < 0$ y $f_{mm}(\mathbb{S}_o^+) > 0$, se tiene:

$$Ind_{\mathbb{S}_o^-} g - Ind_{\mathbb{S}_o}^+ g = 1$$

■

Para construir pues la cobase (θ^a) $Rad^* - adaptada$ aplicamos el lema a la situación antes descrita, donde había una carta (U, φ) centrada en $p \in D^\infty$ de forma que la expresión local de la cométrica en dicha carta era diagonal, es decir:

$$\begin{aligned} \varphi &: U \to \mathbb{S}_o \subset \mathbb{R}^m \\ \varphi(p) &= o; \\ g^*(o) &= \left(g^{ij}\,(o)\right) \text{ diagonal} \end{aligned}$$

y se cumplen las hipótesis $\det g^*(o) = 0$ pero $d_o \det g^*\,(o) \neq 0$.

Obtenemos $(F_a(s))$ base de $\mathbb{R}^m$ que en el entorno $s \in \mathbb{S}_o = \varphi(U)$ hace diagonal la matriz de la cométrica $(g(s)(F_a(s), F_b(s)))$ para todo $p \in U = \varphi^{-1}\,(\mathbb{S}_o)$

$$(f_{ab}(s)) = (g(s)(F_a(s), F_b(s))) = \begin{pmatrix} f_{11} & ... & 0 \\ : & & : \\ 0 & ... & f_{mm} \end{pmatrix} (s)$$

Para terminar, tomamos la nueva base normalizada:

$$\left(F_1'(s), F_2'(s), ..., F_{m-1,m-1}'(s)\right) = \left(\frac{F_1(s)}{\sqrt{|f_{11}|}}, \frac{F_2(s)}{\sqrt{|f_{22}|}}, ..., \frac{F_{m-1}(s)}{\sqrt{|f_{m-1,m-1}|}}, F_m(s)\right)$$

En el entorno U la matriz de la cométrica queda:

$$(g(s)(F_a(s), F_b(s))) = (g^{ab}) = \begin{pmatrix} \pm 1 & ... & 0 & 0 \\ ... & ... & ... & .. \\ 0 & ... & \pm 1 & 0 \\ 0 & ... & 0 & f_{mm} = \tau \end{pmatrix}$$

Pero teniendo en cuenta que g^* es de tipo Lorentz-Riemann y la signatura debe ser 0 o -1, hemos obtenido:

En un entorno U de cada $p \in D^\infty$ podemos tomar (θ^a) cobase móvil de forma que $D^\infty \cap U$ tiene ecuación $\tau = 0$, con $d_x\tau \neq 0 \forall x \in D^\infty \cap M$ y la matriz de la cometrica es:

$$(g^{ab}) = \begin{pmatrix} 1 & ... & 0 & 0 \\ ... & ... & ... & .. \\ 0 & ... & 1 & 0 \\ 0 & ... & 0 & \tau \end{pmatrix}$$

Matriz de la cométrica en la cobase θ^a Rad*−adaptada

$$Rad_p\,(g^*) = \left\{\alpha \in T_p^*M : g^*\,(\alpha, \beta) = 0,\, \forall \beta \in T_p^*M\right\} = span(\theta^m)$$

3.3.1. Expresión de la métrica dual en la base polar normal.

Sea (θ^a) una cobase móvil Rad$^*-$adaptada y sea (E_a) su base dual, es decir $\theta^a(E_b) = \delta^a_b$.

Se tiene entonces:

$$X_{\theta^i} = \theta^a(X_{\theta^i})E_a = g^*(\theta^a, \theta^i)E_a = g^*(\theta^i, \theta^i)E_i = E_i$$

$$X_{\theta^m} = g^*(\theta^a, \theta^m)E_a = g^*(\theta^m, \theta^m)E_m = \tau E_m$$

Si consideramos $g = (g^*)^*$ podemos obtener $g_{ab} = g(E_a, E_b), 1 \leq a, b \leq m$ y $1 \leq i, j \leq m-1$:

$$g(E_i, E_j) = g(X_{\theta^i}, X_{\theta^j}) = g^*\left(\theta^i, \theta^j\right) = \delta^i_j$$

$$g(E_i, \tau E_m) = \tau g(E_i, E_m) = \tau g^*\left(\theta^i, \theta^m\right) = 0$$

$$\left.\begin{array}{r} g(\tau E_m, \tau E_m) = g\left(X_{\theta^m}, X_{\theta^m}\right) = g^*\left(\theta^m, \theta^m\right) = \tau \\ g\left(\tau E_m, \tau E_m\right) = \tau^2 g(E_m, E_m) \end{array}\right\} \Rightarrow g(E_m, E_m) = \frac{1}{\tau}$$

Obtenemos:

$$(g_{ab}) = \begin{pmatrix} 1 & ... & 0 & 0 \\ ... & ... & ... & .. \\ 0 & ... & 1 & 0 \\ 0 & ... & 0 & \frac{1}{\tau} \end{pmatrix} \qquad (1)$$

Estudiemos ahora el conjunto:

$$An\left(Rad_p\left(g^*\right)\right) = \{X \in T_pM : \mu\left(X\right) = 0, \forall \mu \in Rad_p\left(g^*\right)\}$$

En el caso de tener la cobase $Rad^* - adaptada$ vimos que $Rad_p\left(g^*\right) = span(\theta^m)$, luego

$$An\left(Rad_p\left(g^*\right)\right) = \{X \in T_pM : \theta^m\left(X\right) = 0\} = \ker \theta^m$$

Obviamente $An\left(Rad_p\left(g^*\right)\right)$ tiene entonces dimensión $m-1$, que coincide con la dimensión de T_pD^∞. Es verosímil pues añadir la **hipótesis**:

$$An\left(Rad_p\left(g^*\right)\right) = T_pD^\infty \; para \; todo \; p \in D^\infty$$

Sabemos que g induce una estructura semiriemanniana clásica sobre cada componente conexa de $M - D^\infty$ y la signatura cambia en una unidad al pasar de una componente a otra atravesando D^∞. Cuando el cambio se produce de Lorentz a Riemann los anuladores $An\left(Rad_p\left(g^*\right)\right)$ con $p \in D^\infty$, se interpretan como la posición límite de los conos de luz de la parte Lorentz. De modo que es conveniente añadir esta hipótesis pues entonces el tangente T_pD^∞ tiene una interpretación física interesante, pues se convierte en la posición límite de los conos de luz de la parte Lorentz.

Además de la consideración física hay otra estrictamente geométrica. Siempre aparece una métrica inducida en $An\left(Rad_p\left(g^*\right)\right)$. Si queremos garantizar la existencia de una métrica inducida en D^∞ resulta nuevamente necesario aceptar esta hipótesis.

A continuación se estudiará tanto la motivación física como la geométrica de esta hipótesis.

Si g^* reune todas las características que hemos ido estudiando, aparece la métrica objeto de este trabajo que definimos así:

Definición 2 *La métrica g en $M - D^\infty$ dual de g^*, siendo g^* cométrica degenerada con cambio transverso de signatura tipo Lorentz-Riemann y anulador tangente se denomina* ***métrica cambiante Lorentz-Riemann con final polar*** *y a la base (E_a) construída antes se le llama* ***polar-adaptada****.*

3.3.2. Los conos de luz

Sea (M, g) una variedad diferenciable dotada de uns métrica Lorentz, es decir, de signatura -1.

Llamamos $q(v) = g(v, v)$.

El cono de luz de (M, g) en el punto p es el conjunto de vectores $q^{-1}(0) - \{0\}$.

Ejemplo 1. $An\left(Rad_p\left(g^*\right)\right) = T_pD^\infty$ ***para todo*** $p \in D^\infty$. Consideramos $(\mathbb{R}^3, g^*)$ con $\mathrm{D}^\infty = \{z = 0\}$.

La matriz de la cométrica en una base $\mathrm{Rad}^* - adaptada$ tiene la forma:

$$(g^*) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & z \end{pmatrix}$$

donde la base es (dx, dy, dz) y $Rad_p\left(g^*\right) = span(dz)$.

$$(g^{ab}) = \begin{pmatrix} 1 & ... & 0 & 0 \\ ... & ... & ... & .. \\ 0 & ... & 1 & 0 \\ 0 & ... & 0 & \tau \end{pmatrix}$$

donde la base es $(dx^1, dx^2, ...dx^m)$ y $Rad_p\left(g^*\right) = span(dx^m)$.

Por tanto la matriz de la métrica en la base polar normal es:

$$(g) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{z} \end{pmatrix}$$

$$q^{-1}(0)=\left\{\xi_1\frac{\partial}{\partial x}+\xi_2\frac{\partial}{\partial y}+\xi_3\frac{\partial}{\partial z}\ \mid\ (\xi_1)^2+(\xi_2)^2+\frac{(\xi_3)^2}{z}=0\right\}$$
$$=\left\{\xi_1\frac{\partial}{\partial x}+\xi_2\frac{\partial}{\partial y}+\xi_3\frac{\partial}{\partial z}\ \mid\ (\xi_1)^2+(\xi_2)^2=-\frac{(\xi_3)^2}{z}\right\}$$
$$=\left\{\xi_1\frac{\partial}{\partial x}+\xi_2\frac{\partial}{\partial y}+\xi_3\frac{\partial}{\partial z}\ \mid z\,(\xi_1)^2+z\,(\xi_2)^2+(\xi_3)^2=0\right\}$$

Vemos que cuanto más nos acercamos a D^∞ desde la parte Lorentz, es decir, si $z=-\varepsilon$, donde $\varepsilon>0$ pequeño, más abierto aparece el cono de luz asociado $.q^{-1}(0)=\left\{\xi_1\frac{\partial}{\partial x}+\xi_2\frac{\partial}{\partial y}+\xi_3\frac{\partial}{\partial z}\ \mid\ (\xi_1)^2+(\xi_2)^2=\frac{(\xi_3)^2}{\varepsilon}\right\}$.

La posición límite de estos conos es:

$$\lim_{\varepsilon\to 0} q^{-1}(0)=\lim_{\varepsilon\to 0}\left\{\xi_1\frac{\partial}{\partial x}+\xi_2\frac{\partial}{\partial y}+\xi_3\frac{\partial}{\partial z}\ \mid \varepsilon\,(\xi_1)^2+\varepsilon\,(\xi_2)^2+(\xi_3)^2=0\right\}$$
$$=\left\{\xi_1\frac{\partial}{\partial x}+\xi_2\frac{\partial}{\partial y}+\xi_3\frac{\partial}{\partial z}\ \mid\ (\xi_3)^2=0\right\}=\left\{\xi_1\frac{\partial}{\partial x}+\xi_2\frac{\partial}{\partial y}\right\}$$

Por otra parte:

$$An\left(Rad_p\left(g^*\right)\right)=\{X\in T_pM: dz\,(X)=0\}=\ker dz=\left\{\xi_1\frac{\partial}{\partial x}+\xi_2\frac{\partial}{\partial y}\right\}$$

Es decir el anulador coincide con la posición límite de los conos de luz al acercarse a D^∞.

Por último se tiene que el anulador coincide con $T_pD^\infty=T_p\left(\{z=0\}\right)=\left\{\xi_1\frac{\partial}{\partial x}+\xi_2\frac{\partial}{\partial y}\right\}$.

Ejemplo 2. $An\left(Rad_p\left(g^*\right)\right)\neq T_pD^\infty$ ***para todo*** $p\in D^\infty$ Consideramos $(\mathbb{R}^3,g^*)$ con $\mathrm{D}^\infty=\{x=0\}$.

La matriz de la cométrica en una base Rad^*-*adaptada* tiene la forma:

$$(g^*)=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&x\end{pmatrix}$$

$Rad_p\left(g^*\right)=span(dz)$

Por tanto la matriz de la métrica en la base polar normal es:

$$(g)=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&\frac{1}{x}\end{pmatrix}$$

$$q^{-1}(0)=\left\{\xi_1\frac{\partial}{\partial x}+\xi_2\frac{\partial}{\partial y}+\xi_3\frac{\partial}{\partial z}\ \mid\ (\xi_1)^2+(\xi_2)^2+\frac{(\xi_3)^2}{x}=0\right\}$$
$$=\left\{\xi_1\frac{\partial}{\partial x}+\xi_2\frac{\partial}{\partial y}+\xi_3\frac{\partial}{\partial z}\ \mid\ (\xi_1)^2+(\xi_2)^2=-\frac{(\xi_3)^2}{x}\right\}$$
$$=\left\{\xi_1\frac{\partial}{\partial x}+\xi_2\frac{\partial}{\partial y}+\xi_3\frac{\partial}{\partial z}\ \mid x\,(\xi_1)^2+x\,(\xi_2)^2+(\xi_3)^2=0\right\}$$

Vemos que cuanto más nos acercamos a D^∞ desde la parte Lorentz, es decir, si $x=-\varepsilon$, donde $\varepsilon>0$ pequeño, más abierto aparece el cono de luz asociado $.q^{-1}(0)=\left\{\xi_1\frac{\partial}{\partial x}+\xi_2\frac{\partial}{\partial y}+\xi_3\frac{\partial}{\partial z}\ \mid\ (\xi_1)^2+(\xi_2)^2=\frac{(\xi_3)^2}{\varepsilon}\right\}.$

La posición límite de estos conos es igual que en el ejemplo 1:

$$\lim_{\varepsilon\to 0} q^{-1}(0)=\left\{\xi_1\frac{\partial}{\partial x}+\xi_2\frac{\partial}{\partial y}\right\}$$

De nuevo coincide esta posición límite al acercarse a D^∞ con el anulador, pues:

$$An\left(Rad_p\left(g^*\right)\right)=\left\{X\in T_pM : dz\left(X\right)=0\right\}=\ker dz=\left\{\xi_1\frac{\partial}{\partial x}+\xi_2\frac{\partial}{\partial y}\right\}$$

Sin embargo en este caso $T_pD^\infty = T_p\left(\{x=0\}\right) = \left\{\xi_2\frac{\partial}{\partial y}+\xi_3\frac{\partial}{\partial z}\right\} \neq An\left(Rad_p\left(g^*\right)\right).$

$An\left(Rad_p\left(g^*\right)\right)$ **es la posición límite de los conos de luz.** Consideramos $(\mathbb{R}^m,g^*)$ con $\mathrm{D}^\infty=\{\tau=0\}$.

La matriz de la cométrica en una base Rad^*-*adaptada* tiene la forma:

$$(g^{ab})=\begin{pmatrix}1 & ... & 0 & 0\\ ... & ... & ... & ..\\ 0 & ... & 1 & 0\\ 0 & ... & 0 & \tau\end{pmatrix}$$

donde la base es $(dx^1,dx^2,...dx^m)$ y $Rad_p\left(g^*\right)=span(dx^m)$.

Por tanto la matriz de la métrica en la base polar normal es:

$$(g_{ab})=\begin{pmatrix}1 & ... & 0 & 0\\ ... & ... & ... & ..\\ 0 & ... & 1 & 0\\ 0 & ... & 0 & \frac{1}{\tau}\end{pmatrix}$$

Calculamos el anulador:

$$An\,(Rad_p\,(g^*)) = \{X \in T_pM : dx^m\,(X) = 0\} = \ker dx^m = \left\{ \sum_{1\leq i\leq m-1} \xi_i|_p \frac{\partial}{\partial x^i} \right\}$$

Los conos de luz de la parte Lorentz tienen la forma:

$$C_{(x^1,\ldots,x^m)} = q^{-1}(0) = \left\{ \sum_{1\leq i\leq m} \xi_i \frac{\partial}{\partial x^i} \ \mid \ \sum_{1\leq i\leq m-1} \tau\,(\xi_i)^2 + (\xi_m)^2 = 0 \right\}$$

Consideramos una curva α que atraviese D^∞ pasando por p, es decir $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ curva con $\alpha\,(0) = p$.

Y claramente aparece:

$$\begin{aligned} \lim_{t\to 0} C\,(\alpha\,(t)) &= \lim_{t\to 0} \left\{ \sum_{1\leq i\leq m} \xi_i|_{\alpha(t)} \frac{\partial}{\partial\,(x\circ\alpha)^i} \ \mid \ \sum_{1\leq i\leq m-1} \tau\,(t) \left(\xi_i|_{\alpha(t)}\right)^2 + \left(\xi_m|_{\alpha(t)}\right)^2 = 0 \right\} \\ &= \left\{ \sum_{1\leq i\leq m} \xi_i|_{\alpha(0)} \frac{\partial}{\partial\,(x\circ\alpha)^i} \ \mid \ \sum_{1\leq i\leq m-1} \tau\,(0) \left(\xi_i|_{\alpha(0)}\right)^2 + \left(\xi_m|_{\alpha(0)}\right)^2 = 0 \right\} \\ &= \left\{ \sum_{1\leq i\leq m} \xi_i|_p \frac{\partial}{\partial x^i} \ \mid \ (\xi_m|_p)^2 = 0 \right\} = \left\{ \sum_{1\leq i\leq m-1} \xi_i|_p \frac{\partial}{\partial x^i} \right\} = An\,(Rad_p\,(g^*)) \end{aligned}$$

3.3.3. Metrica inducida en D^∞

Sea (g_{ab}) la matriz de la construcción anterior, es decir, la métrica con final polar expresada en su base polar adaptada.

Claramente (g_{ab}) no está definida en D^∞ pues $\tau = 0$ es ecuación de D^∞.

¿Podemos dotar no obstante a D^∞ de una métrica riemanniana inducida por g^* bien definida por la condición de que $(E_i|D^\infty)$ sea base ortonormal para cualquier base polar adaptada (E_i, E_m)?

Veamos la siguiente construcción de álgebra lineal elemental.

Sea $\mathbb{V}$ un espacio vectorial de dimensión finita y $\mathbb{V}^*$ su dual, sea $g^* : \mathbb{V}^* \times \mathbb{V}^* \to \mathbb{R}$ tensor simétrico con $Rad(g^*) = span\,(\mu)$ unidimensional, $\mu \in \mathbb{V}^*$.

g^* induce una métrica sobre $\ker\mu$:

$$(g^*)^* = g : \ker\mu \times \ker\mu \to \mathbb{R}$$

Utilizamos la aplicación:

$$\mathbb{V}^* \xrightarrow{f} \mathbb{V}$$
$$\alpha \to X_\alpha$$
$$\text{con } \beta(X_\alpha) = g^*(\alpha, \beta)$$

El núcleo de esta aplicación es

$$\ker f = Rad(g^*) = span\,(\mu)$$

$$\left.\begin{array}{r}\operatorname{Im} f \subset \ker \mu \text{ pues } \mu\,(X_\alpha) = g^*\,(\mu, \alpha) = 0 \\ \dim \ker \mu = \dim \operatorname{Im} f = m - 1\end{array}\right\} \Rightarrow \operatorname{Im} f = \ker \mu$$

Definimos entonces:

$$g\,(X_\alpha, X_\beta) = g^*(\alpha, \beta)\ \forall X_\alpha, X_\beta \in \ker \mu$$

Está bien definida:

$$\begin{aligned}&\text{Dados } X_\alpha = X_{\overline{\alpha}} \Rightarrow X_{\alpha-\overline{\alpha}} = 0 \Rightarrow \\ &\qquad\qquad \Rightarrow \alpha - \overline{\alpha} \in \ker d = Rad\,(g^*) = span(\mu) \Rightarrow \overline{\alpha} = \alpha + a\mu\end{aligned}$$

Obtenemos por tanto:

$$\begin{aligned}g\,(X_{\overline{\alpha}}, X_{\overline{\alpha}}) &= g^*(\overline{\alpha}, \overline{\alpha}) = g^*\,(\alpha + a\mu, \alpha + a\mu) \\ &= g^*\,(\alpha.\alpha) = g\,(X_\alpha, X_\alpha)\end{aligned}$$

En nuestra situación $Rad(g^*) = span(\theta^m)$ y $\ker \theta^m = An(Rad(g^*))$ y hemos obtenido una métrica inducida por g^* sobre $\ker \theta^m = An(Rad(g^*))$.

Por tanto si queremos dotar a D^∞ de una métrica riemanniana inducida por g^* bien definida, es suficiente adoptar la mencionada hipótesis haciendo:

$$An(Rad(g^*)) = T_p D^\infty$$

Esta métrica inducida hace ortonormales a los $(E_i | D^\infty)$ para cualquier base polar adaptada (E_i, E_m).

3.4. La conexión dual cerca de $\mathbf{D}^\infty$

En un espacio semiriemanniano (M, g) tenemos una única conexión simétrica ∇ compatible con la métrica, llamada conexión de Levi-Civita.

$$\nabla : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$$
$$(X, Y) \to \nabla_X Y$$

En el espacio Riemann-Lorentz $(M - D^\infty, g)$ existe una única conexión dual [4]:

$$\Box : \mathfrak{X}(M - D^\infty) \times \mathfrak{X}(M - D^\infty) \to \mathfrak{X}^*(M - D^\infty)$$

Esta se caracteriza por ser la única aplicación entre esos espacios que cumple la fórmula del tipo de la de Koszul:

$$\begin{aligned}2\Box_X Y\,(Z) :=&\ X\,(g(Y, Z)) + Y\,(g(Z, X)) - Z\,(g(X, Y)) \\ &- g\,(X, [Y, Z]) + g\,(Y, [Z, X]) + g\,(Z, [X, Y])\end{aligned}$$

Esta conexión dual es compatible con la conexión de Levi-Civita en el sentido de que se cumple:

$$\Box_X Y\,(Z) = g(\nabla_X Y, Z)$$

3.4.1. Los símbolos de Christoffel $\Gamma_{cab} = \Box_{E_a} E_b\left(E_c\right)$

Respecto a una base (E_i, E_m) polar adaptada la conexión dual es determinada por los símbolos de Christoffel $\Gamma_{cab} = \Box_{E_a} E_b\left(E_c\right)$.

$$\Box_X Y\left(Z\right) = X\left(Y^b\right) g\left(E_a, E_b\right) Z^c + \Gamma_{cab} Z^c X^a Y^b$$

$$\Gamma_{cab} = \frac{1}{2}\left\{\begin{array}{c} E_a(g\left(E_b, E_c\right)) + E_b(g\left(E_c, E_a\right)) - E_c(g\left(E_a, E_b\right)) \\ -g(E_a, [E_b, E_c]) + g(E_b, [E_c, E_a]) + g(E_c, [E_a, E_b]) \end{array}\right\}$$

Introducimos también la siguiente notación:

Notación 1 *Sea una función, campo, etc., digamos* $F : M - D^\infty \to \widetilde{M}$*, diferenciable. Si se extiende diferenciablemente a* D^∞ *escribiremos* $F \cong 0$.

Recordemos que (g_{ab}) es la matriz de una base polar normal, es decir $(g_{ab}) = \begin{pmatrix} 1 & ... & 0 & 0 \\ ... & ... & ... & .. \\ 0 & ... & 1 & 0 \\ 0 & ... & 0 & \frac{1}{\tau} \end{pmatrix}$ y veamos si los símbolos de Christoffel son extendibles diferenciablemente a D^∞.

1. $\Gamma_{kij} \cong 0$.

$$\begin{aligned} \Gamma_{kij} &= \frac{1}{2}\left\{\begin{array}{c} E_i(g\left(E_j, E_k\right)) + E_j(g\left(E_k, E_i\right)) - E_k(g\left(E_i, E_j\right)) \\ -g(E_i, [E_j, E_k]) + g(E_j, [E_k, E_i]) + g(E_k, [E_i, E_j]) \end{array}\right\} \\ &= \frac{1}{2}\left\{\begin{array}{c} E_i(0) + E_j(0) - E_k(0) \\ -g(E_i, [E_j, E_k]) + g(E_j, [E_k, E_i]) + g(E_k, [E_i, E_j]) \end{array}\right\} \\ &= \frac{1}{2}\left\{-g(E_i, [E_j, E_k]) + g(E_j, [E_k, E_i]) + g(E_k, [E_i, E_j])\right\} \end{aligned}$$

Efectivamente $[E_j, E_k] \in \mathfrak{X}\left(D^\infty\right)$ y por tanto $g\left(E_i, [E_j, E_k]\right) \cong 0$.
Si $[E_j, E_k] = X^a E_a$ se tiene $X^m|_{D^\infty} = 0$, de forma que:

$$\begin{aligned} g\left(E_i, [E_j, E_k]\right) &= X^i \in C^\infty\left(M\right) \\ g\left(E_m, [E_j, E_k]\right) &= \frac{1}{\tau} X^m \in C^\infty\left(M\right) \end{aligned}$$

En particular $\Box_{\lambda^i E_i}\left(\lambda^j E_j\right) \cong 0$

2. $\Gamma_{ikm} \cong 0$

$$\begin{aligned} \Gamma_{ikm} &= \frac{1}{2}\left\{\begin{array}{c} E_k(g\left(E_m, E_i\right)) + E_m(g\left(E_i, E_k\right)) - E_i(g\left(E_k, E_m\right)) \\ -g(E_k, [E_m, E_i]) + g(E_m, [E_i, E_k]) + g(E_i, [E_k, E_m]) \end{array}\right\} \\ &= \frac{1}{2}\left\{\begin{array}{c} E_k(0) + E_m(0) - E_i(0) \\ -g(E_k, [E_m, E_i]) + g(E_m, [E_i, E_k]) + g(E_i, [E_k, E_m]) \end{array}\right\} \\ &= \frac{1}{2}\left\{-g(E_k, [E_m, E_i]) + g(E_m, [E_i, E_k]) + g(E_i, [E_k, E_m])\right\} \end{aligned}$$

Si ponemos $[E_a, E_b] = C_{ab}^c E_c$ resulta:

$$(\tau g)(E_i, [E_j, E_m]) = (\tau g)\big(E_i, C_{jm}^c E_c\big) = \tau C_{jm}^i$$
$$(\tau g)(E_m, [E_i, E_k]) = (\tau g)(E_m, C_{ik}^c E_c) = \tau C_{ik}^m \frac{1}{\tau} = C_{ik}^m$$

Como $[E_i, E_k] \in \mathfrak{X}(D^\infty)$ se tiene $C_{ik}^m|_{D^\infty} = 0$ y obtenemos:

$$\tau\Gamma_{ikm} \cong 0 \;\; y \;\; \tau\Gamma_{ikm}|_{D^\infty} = 0$$

Luego $\tau\Gamma_{ikm} = \tau h$ con $h \in C^\infty(M)$ y finalmente $\Gamma_{ikm} \cong 0$.

3. Análogamente $\Gamma_{kmj} \cong 0$ y $\Gamma_{mik} \cong 0$ teniendo en cuenta que τg está definida en todo M.

4. $\tau\ \Gamma_{mim} \cong 0$, $\tau\Gamma_{mmi} \cong 0$ y $\tau\Gamma_{imm} \cong 0$.

$$\begin{aligned}\Gamma_{mim} &= \frac{1}{2}\left\{\begin{array}{c} E_i(g(E_m, E_m)) + E_m(g(E_m, E_i)) - E_m(g(E_i, E_m)) \\ -g(E_i, [E_m, E_m]) + g(E_m, [E_m, E_i]) + g(E_m, [E_i, E_m]) \end{array}\right\} \\ &= \frac{1}{2}\left\{\begin{array}{c} E_i(\frac{1}{\tau}) + E_m(0) - E_m(0) \\ -g(E_i, 0) + g(E_m, [E_m, E_i]) + g(E_m, [E_i, E_m]) \end{array}\right\} \\ &= \frac{1}{2}\left\{E_i(\frac{1}{\tau}) + g(E_m, [E_m, E_i]) + g(E_m, [E_i, E_m])\right\} = \frac{1}{2}\left\{E_i(\frac{1}{\tau})\right\}\end{aligned}$$

La última igualdad es obvia pues $g(E_m, [E_m, E_i]) = -g(E_m, [E_i, E_m])$ al ser $[E_m, E_i] = -[E_i, E_m]$.

Ahora, puesto que $E_i(\tau)|_{D^\infty} = 0$:

$$\tau E_i(\frac{1}{\tau}) = -\frac{E_i(\tau)}{\tau} \cong 0 \text{ al ser } E_i(\frac{1}{\tau}) = -\frac{E_i(\tau)}{\tau^2}$$

Obtenemos por tanto:

$$\tau\Gamma_{mim} = \frac{1}{2}\left\{\tau E_i(\frac{1}{\tau})\right\} \cong 0$$

$$\begin{aligned}\Gamma_{imm} &= \frac{1}{2}\left\{\begin{array}{c} E_m(g(E_m, E_i)) + E_m(g(E_i, E_m)) - E_i(g(E_m, E_m)) \\ -g(E_m, [E_m, E_i]) + g(E_m, [E_i, E_m]) + g(E_i, [E_m, E_m]) \end{array}\right\} \\ &= \frac{1}{2}\left\{\begin{array}{c} E_m(0) + E_m(0) - E_i(\frac{1}{\tau}) \\ -g(E_m, [E_m, E_i]) + g(E_m, [E_i, E_m]) + g(E_i, 0) \end{array}\right\} \\ &= \frac{1}{2}\left\{-E_i(\frac{1}{\tau}) - 2g(E_m, [E_m, E_i])\right\}\end{aligned}$$

De nuevo:

$$\tau\Gamma_{imm} = \frac{1}{2}\left\{-\tau E_i(\frac{1}{\tau}) - 2\tau g(E_m, [E_m, E_i])\right\} \cong 0$$

considerando que τg está definida en todo M.

$$\begin{aligned}\Gamma_{mmi} &= \frac{1}{2}\left\{\begin{array}{c} E_m(g(E_i, E_m)) + E_i(g(E_m, E_m)) - E_m(g(E_m, E_i)) \\ -g(E_m, [E_i, E_m]) + g(E_i, [E_m, E_m]) + g(E_m, [E_m, E_i]) \end{array}\right\} \\ &= \frac{1}{2}\left\{E_i(\frac{1}{\tau}) + 2g(E_m, [E_m, E_i])\right\}\end{aligned}$$

Igual que antes:

$$\tau\Gamma_{mmi} = \frac{1}{2}\left\{\tau E_i(\frac{1}{\tau}) + 2\tau g(E_m, [E_m, E_i])\right\} \cong 0$$

5. $\tau^2\ \Gamma_{mmm} \cong 0$

$$\Gamma_{mmm} = \frac{1}{2}\left\{E_m(g(E_m, E_m))\right\} = \frac{1}{2}E_m(\frac{1}{\tau}) = -\frac{E_m(\tau)}{2\tau^2}$$

$E_m(\tau)\,|_{D^\infty}$ no tiene porqué ser nulo siempre, por lo que ahora lo que podemos garantizar es:

$$\tau^2\Gamma_{mmm} = -\frac{E_m(\tau)}{2} \cong 0$$

4. Direccion polar normal

Sea (M, g) Lorentz-Riemann con final polar.

Esencialmente en este trabajo estamos presentando el contexto dual del planteado por M. Kossowski y M. Kriele en [4]. Allí se sustituye la co-metrica g^* por una métrica g verificando la propiedad análoga a la transversalidad. Se llama D^0 a la hipersuperficie donde g degenera, y se impone que en cada punto $p \in D^0$, el radical $Rad_p(g)$ (que es unidimensional) sea transverso a T_pD^0. En estas condiciones prueban:

Teorema 1 *([4] Th 2 y 4) Por cada punto $p \in D^0$ hay una única C^∞-pregeodésica Γ_p que atraviesa D^0 por p con dirección $Rad_p(g)$.*

Con ayuda de esta familia de pregeodésicas, es posible construir una carta $(x^1, \ldots x^m)$ en torno a cada punto de D^0, en donde la métrica se escribe

$$\sum_{i,j=1}^{m-1} g_{ij}dx^i \otimes dx^j + x^m dx^m \otimes dx^m$$

Aquí la hipersupeficie D^0 tiene ecuación $x^m = 0$, y $(x^i = cte,\ x^m = t)$ son ecuaciones paramétricas de las pregeodésicas Γ_p. Además, la coordenada x^m está definida independientemente de la carta, y se puede considerar como una función global sobre un abierto de M que contiene a D^0.

En el mismo trabajo se encontraban otras pregeodésicas en direcciones determinadas por la condición de anular cierto campo tensorial.

Buscamos establecer un resultado de tipo *dual* del teorema 1 para cométricas g^* cumpliendo las propiedades antes vistas que convierten a g en métrica Lorentz-Riemann con final polar. Es decir, queremos probar que **por cada punto** $p \in D^\infty$ **hay una** $C^\infty-$**pregeodésica que atraviesa** D^∞ **por** p.

La situación no dualiza trivialmente pues resultará que en el caso D^∞ **sólo** podremos encontrar **pregeodésicas** por un punto en una cierta **dirección** que llamaremos **polar normal**.

Pero en este caso no tenemos a primera vista ninguna dirección única privilegiada (a diferencia del caso D^0 donde se tiene la dirección del radical unidimensional). Por tanto el primer objetivo es estudiar si g determina alguna dirección "especial"transversal a D^∞. La respuesta es afirmativa pero no inmediata.

Sea $N \in \mathfrak{X}(M)$ un campo transversal. Si ha de ser pregeodésico debe ser:

$$\nabla_N N = \lambda N \Leftrightarrow (\nabla_N N)^{N^\perp} = 0$$

Es decir, la proyección de $\nabla_N N$ sobre el ortogonal $N^\perp$ debe ser nula.

Sea $X \in \mathfrak{X}(D^\infty)$ con $g(X,N) = 0$. Poniendo $X|_{D^\infty} = V$ definiremos:

$$\beta_N(V) = \frac{\Box_N N(X)}{g(N,N)}|_{D^\infty} \in \Omega^1(D^\infty)$$

(Recordemos que $\frac{\nabla_N N}{g(N,N)} = \tau_N \nabla_N N \cong 0$).

Una vez que se compruebe la consistencia de esta definición llamaremos **campo polar normal** a cualquier campo $N \in \mathfrak{X}(M)$ transversal a D^∞ cuya β_N asociada sea idénticamente nula.

$$N \text{ es polar normal} \Leftrightarrow \beta_N = 0$$

Claramente, si un campo $N \in \mathfrak{X}(M)$ transversal es pregeodésico (y por tanto $\nabla_N N = \lambda N$) su β_N asociada es idénticamente nula. Es decir, si una campo $N \in \mathfrak{X}(M)$ transversal es pregeodésico entonces N es polar normal.

Efectivamente, sea $X \in \mathfrak{X}(D^\infty)$ con $g(X,N) = 0$ y $X|_{D^\infty} = V$. Se tiene:

$$\Box_N N(X) = g(\nabla_N N, X) = g(\lambda N, X) = 0$$

$$\begin{aligned}\beta_N(V) &= \frac{\Box_N N(X)}{g(N,N)}|_{D^\infty} = \frac{g(\nabla_N N, X)}{g(N,N)}|_{D^\infty} \\ &= \frac{g(\lambda N, X)}{g(N,N)}|_{D^\infty} = 0\end{aligned}$$

Es decir, obtenemos:

$$\begin{aligned} N \text{ es pregeodésico transversal } &\Leftrightarrow (\tau_N \nabla_N N)\,|_{D^\infty} = \lambda N|_{D^\infty} \\ &\Rightarrow N \text{ es polar normal} \Leftrightarrow \beta_N = 0 \end{aligned}$$

Sin embargo no es cierto que todo campo $N \in \mathfrak{X}(M)$ transversal polar normal sea necesariamente pregeodésico. Es sencillo construir un contraejemplo: Tomamos un $N \in \mathfrak{X}(M)$ transversal pregeodésico, $Y \in \mathfrak{X}(M)$ tal que $Y|_{D^\infty} \equiv 0$. Entonces el campo $N+Y$ no es pregeodésico, pero su β_{N+Y} es idénticamente nula.

$$\begin{aligned} \beta_{N+Y}(V) &= \frac{\Box_{N+Y}(N+Y)(X)}{g(N,N)}|_{D^\infty} = \frac{g(\nabla_{N+Y}(N+Y),X)}{g(N,N)}|_{D^\infty} \\ &= \frac{g(\nabla_N(N+Y)+\nabla_Y(N+Y),X)}{g(N,N)}|_{D^\infty} \\ &= \frac{g(\nabla_N(N+Y),X)+g(\nabla_Y(N+Y),X)}{g(N,N)}|_{D^\infty} \\ &= \frac{g(\nabla_N N+\nabla_N Y,X)+g(\nabla_Y N+\nabla_Y Y,X)}{g(N,N)}|_{D^\infty} \\ &= \frac{g(\nabla_N N,X)+g(\nabla_N Y,X)+g(\nabla_Y N,X)+g(\nabla_Y Y,X)}{g(N,N)}|_{D^\infty} \\ &= \beta_N(V) + \frac{g(\nabla_N Y,X)+g(\nabla_Y N,X)+g(\nabla_Y Y,X)}{g(N,N)}|_{D^\infty} \\ &= \frac{g(\nabla_N Y,X)+g(\nabla_Y N,X)+g(\nabla_Y Y,X)}{g(N,N)}|_{D^\infty} = 0 \end{aligned}$$

4.1. Cualquier 1-forma $\mu \in \mathfrak{X}^*(M)$ de modo que $\mu(x) \in Rad_x(g^*) - \{0\}\ \forall x \in D^\infty$ puede ser $\mu = \mu_m$ donde (μ_i, μ_m) es una cobase $Rad^* - adaptada.$

Para ello tomemos una cobase $Rad^* - adaptada$ cualquiera (θ^i, θ^m), de modo que la matriz de g^* resulta:

$$\left(g^*\left(\theta^a,\theta^b\right)\right) = \begin{pmatrix} 1 & ... & 0 & 0 \\ ... & ... & ... & .. \\ 0 & ... & 1 & 0 \\ 0 & ... & 0 & \tau \end{pmatrix}$$

Expresemos μ en la base (θ^i, θ^m), es decir:

$$\mu = f_i\theta^i + f_m\theta^m$$

Observemos que $\mu(x) \in Rad_x(g^*) = span(\theta^m) \Rightarrow f_i(x) = 0\ \forall x \in D^\infty \Rightarrow \exists h_i \in C^\infty(M)$ de forma que $f_i = \tau h_i$.

Como $\mu(x) \in Rad_x(g^*) - \{0\}$ $\forall x \in D^\infty \Rightarrow f_m|_{D^\infty} \neq 0$, por lo que podemos renombrar $\theta^m = f_m\theta^m$ de modo que queda:

$$\mu = \tau h_i \theta^i + \theta^m$$

¿Cómo será una base de $\mu^\perp$?

$$\alpha = \alpha_a \theta^a \text{es } g^* - ortogonal \text{ a } \mu \Leftrightarrow \sum \tau h_i \alpha_i + \alpha_m \tau = 0$$
$$\Leftrightarrow \tau \left(\sum h_i \alpha_i + \alpha_m \right) = 0 \Leftrightarrow \alpha_m = -\sum h_i \alpha_i$$

Por tanto $(\nu^i = \theta^i - h_i\theta^m)$ forman una base de $\mu^\perp$. Aplicamos formalmente el proceso de ortonormalización de Gram-Schmidt (observemos que se puede al ser $\mu^\perp$ euclídeo) para obtener la cobase deseada Rad* $-$ *adaptada* en la que μ es la última 1-forma.

4.2. Cualquier campo N$\in \mathfrak{X}(M)$ transversal a D$^\infty$ puede ser el último campo de una base polar adaptada.

Sea (E_i, E_m) una base polar adaptada con dual (θ^a) Rad$^*-$adaptada.

$$g(E_a, E_b) = (g_{ab}) = \begin{pmatrix} 1 & ... & 0 & 0 \\ ... & ... & ... & .. \\ 0 & ... & 1 & 0 \\ 0 & ... & 0 & \frac{1}{\tau} \end{pmatrix}$$

N $\in \mathfrak{X}(M)$ es un campo transversal, es decir, nunca puede estar contenido en $span(E_i)$ luego se tiene:

$$N = h^a E_a \text{ con } h^m(x) \neq 0 \ \forall x \in D^\infty$$

Ahora comprobemos que se puede tomar una 1-forma μ *ad hoc,* $\mu \in Rad^* - \{0\}$, para que $X_\mu = \tau N$. Sea:

$$\mu = \tau h_i \theta^i + h^m \theta^m$$

Efectivamente, como teníamos $X_{\theta^i} = E_i$ y $X_{\theta^m} = \tau E_m$, se obtiene:

$$X_\mu = \tau h_i X_{\theta^i} + h^m X_{\theta^m} = \tau h_i E^i + h^m \tau E_m = \tau N$$

Entonces, por el apartado anterior, se tiene una cobase Rad$^*-$adaptada (μ_i, μ_m) donde $\mu = \mu_m$. Se obtiene entonces la base dual polar adaptada

$(X_{\mu_i}, X_{\mu_m}) = (X_{\mu_i}, X_\mu) = (N_i, N_m)$.

$$\begin{aligned} g\left(N_i,N_i\right) &= g\left(X_{\mu_i},X_{\mu_i}\right) = g^*\left(\mu_i,\mu_i\right) = 1 \\ g\left(N_m,N_m\right) &= g\left(X_{\mu_m},X_{\mu_m}\right) = g^*\left(\mu_m,\mu_m\right) = g^*\left(\mu,\mu\right) \\ &= g^*\left(\tau h_i\theta^i + h^m\theta^m, \tau h_i\theta^i + h^m\theta^m\right) \\ &= g^*\left(h^m\theta^m, h^m\theta^m\right) = \left(h^m\right)^2 g^*\left(\theta^m,\theta^m\right) = h\tau = \tau_\mu \end{aligned}$$

Hemos utilizado que $\tau|_{D^\infty} = 0$ y $h = (h_m)^2$ nunca nula en D$^\infty$.

$$g(N_a, N_b) = \begin{pmatrix} 1 & ... & 0 & 0 \\ ... & ... & ... & .. \\ 0 & ... & 1 & 0 \\ 0 & ... & 0 & \tau_\mu \end{pmatrix}$$

$$\tau_\mu = g(N_m, N_m) = g^*\left(\mu_m,\mu_m\right) = g^*\left(\mu,\mu\right) = h\tau \Rightarrow \tau = \frac{\tau_\mu}{h}$$

$$X_\mu = N_m = \tau N = \frac{\tau_\mu}{h} N$$

Se obtiene finalmente $N = hN_m$.

Observación 1 *En particular, si $N \in \mathfrak{X}(M)$ es un campo transversal a D^∞ lo que acabamos de ver indica que la expresión $\frac{1}{g(N,N)}$ puede extenderse a una función τ_μ de forma que $\{\tau_\mu = 0\}$ es una ecuación de D^∞.*

Observación 2 *También podemos extender la expresión $\tau_\mu g$ a todo M y su rango en D^∞ es 1, como se puede observar en la expresión matricial de la métrica en la base polar adaptada.*

Se tiene, si $X = h^i E_i + h^m N$, que $g(N, X) = h^m$. Es decir, si ponemos $TM = TD^\infty \oplus spanN$, $g(N, X) = h^m$ es la componente "N"de X.

4.2.1. Definición de la 1-forma β_N

Proposición 2 *Sea $N \in \mathfrak{X}(M)$ un campo transversal a D^∞, entonces $\frac{1}{g(N,N)} = \tau_N \cong 0$ y $\{\tau_N = 0\}$ es una ecuación de D^∞. Sea $X \in \mathfrak{X}\left(D^\infty\right)$ con $g\left(X,N\right) = 0$.Entonces:*

$$\frac{\Box_N N\left(X\right)}{g(N,N)} = \tau_N \Box_N N\left(X\right) \cong 0$$

Demostración. Analicemos la 1-forma $\tau_N \Box_N N$.

Por la fórmula de Koszul tenemos:

$$\begin{aligned} 2\Box_N N\left(X\right) &= N\left(g(N,X)\right) + N\left(g(X,N)\right) - X\left(g(N,N)\right) \\ &\quad - g\left(N,[N,X]\right) + g\left(N,[X,N]\right) + g\left(X,[N,N]\right) \\ &= 2N\left(g(X,N)\right) - X\left(g(N,N)\right) + 2g\left(N,[X,N]\right) \\ &= -X\left(\frac{1}{\tau_N}\right) + 2g\left(N,[X,N]\right) \end{aligned}$$

Y resulta:

$$\tau_N(\Box_N N)(X) = -\frac{1}{2}\tau_N X\left(\frac{1}{\tau_N}\right) + \tau_N g(N,[X,N])$$

Por otra parte:

$$X\left(\frac{1}{\tau_N}\right) = -X(\tau_N)\frac{1}{(\tau_N)^2}$$

Como $X \in \mathfrak{X}(D^\infty)$ y $\{\tau_N = 0\}$ es una ecuación de D^∞, tenemos $X(\tau_N) = 0$ de donde se obtiene finalmente:

$$\tau_N X\left(\frac{1}{\tau_N}\right) = -\frac{X(\tau_N)}{\tau_N} \cong 0$$

Recordando que $\tau_N g \cong 0$, queda:

$$\tau_N(\Box_N N)(X) = \frac{1}{2}\frac{X(\tau_N)}{\tau_N} + \tau_N g(N,[X,N]) \cong 0$$

■

Sea $V \in \mathfrak{X}(D^\infty)$. Buscamos definir una 1-forma en $\mathfrak{X}^*(D^\infty)$ a partir de la conexión dual. Pero esta conexión dual está definida en $\mathfrak{X}^*(M - D^\infty)$ .Para ello tomemos una extensión de V, es decir $X \in \mathfrak{X}(M)$ tal que $X|_{D^\infty} = V$ y $g(X,N) = 0$. Estamos en las condiciones de la proposición anterior, es decir:

$$\tau_N(\Box_N N)(X) \cong 0$$

Es decir, se puede extender la expresión diferenciablemente a D^∞ y tiene sentido la expresión:

$$\tau_N(\Box_N N)(X)|_{D^\infty} = \frac{1}{2}\frac{X(\tau_N)}{\tau_N}|_{D^\infty} + \tau_N g(N,[X,N])|_{D^\infty}$$

A pesar de que $\Box_N N$ no está definida en D^∞, al multiplicarla por τ_N se consigue extenderla a D^∞.

El segundo sumando $\tau_N g(N,[X,N])$ es la componente en la dirección de N de $[X,N]$, como reza la observación **??**

Definición 3 *Sea $N \in \mathfrak{X}(M)$ un campo transversal a D^∞.*

Sea $X \in \mathfrak{X}(D^\infty)$ con $g(X,N) = 0$ y $X|_{D^\infty} = V$. Denominamos

$$\beta_N(V) = \frac{\Box_N N(X)}{g(N,N)}|_{D^\infty} \in \Omega^1(D^\infty)$$

La 1-forma ha sido definida a través de un particular campo que extiende a V. Hay que probar por tanto que la definición no depende de la extensión particular elegida.

Proposición 3 *β_N está bien definida, es decir, es independiente de $X \in \mathfrak{X}(D^\infty)$ con $g(X,N) = 0$ y $X|_{D^\infty} = V$. $\beta_N \in \Omega^1(D^\infty)$*

Demostración. Tomemos $\overline{X} \in \mathfrak{X}(M)$ con $g(\overline{X}, N)$ identicamente nula y $\overline{X}|_{D^\infty} = X|_{D^\infty} = V$.

Comprobemos que $\tau_N(\Box_N N)(X)|_{D^\infty} = \tau_N(\Box_N N)\left(\overline{X}\right)|_{D^\infty}$ donde $\tau_N = \frac{1}{g(N,N)}$.

En efecto, tomemos una base polar adaptada (E_i, E_m) con $E_m = N$ y $X = X^a E_a$.

$$(\Box_N N)(X) = (\Box_{E_m} E_m)(X^a E_a) = X^a (\Box_{E_m} E_m)(E_a) = X^a \Gamma_{amm}$$

En la expresión de $\tau_N(\Box_N N)(X)|_{D^\infty}$ hacemos $X = E_k$:

$$\begin{aligned} \tau(\Box_{E_m} E_m)(E_k) &= \tau \Gamma_{kmm} \\ &= \frac{1}{2} \frac{E_k(\tau)}{\tau_N} + \tau_N g(E_m, [E_k, E_m]) \cong 0 \end{aligned}$$

En consecuencia:

$$\tau_N(\Box_N N)(X)|_{D^\infty} = \gamma_k X^k|_{D^\infty}, \text{ con } \gamma_k = \tau_N \Gamma_{kmm}|_{D^\infty}$$

La expresión $\tau_N(\Box_N N)(X)|_{D^\infty}$ sólo depende de $X|_{D^\infty}$ y por tanto se tiene:

$$\tau_N(\Box_N N)(X)|_{D^\infty} = \gamma_k X^k|_{D^\infty} = \gamma_k \overline{X}^k|_{D^\infty} = \tau_N(\Box_N N)\left(\overline{X}\right)|_{D^\infty}$$

Además $\beta_N \in \Omega^1(D^\infty)$, como se desprende de la definición. ∎

Lema 2 *β_N no varía si sustituímos N por otro campo transversal hN con $h \in C^\infty(M)$ y h nunca nula en D^∞ :*

Demostración. Sea $X \in \mathfrak{X}(D^\infty)$ un campo vectorial y sea $\overline{X} \in \mathfrak{X}(M)$ tal que $\overline{X}|_{D^\infty} = X$.

$$\begin{aligned} \beta_{hN}(X) &= \frac{\Box_{hN} hN\left(\overline{X}\right)}{g(hN, hN)}|_{D^\infty} \\ &= \frac{h(\Box_N hN\left(\overline{X}\right))}{h^2 g(N,N)} \\ &= \frac{N(h)\, g\left(\overline{X}, N\right) + h \Box_N N\left(\overline{X}\right)}{hg(N,N)} \\ &= \frac{\Box_N N\left(\overline{X}\right)}{g(N,N)} = \beta_N(X) \end{aligned}$$

donde la última igualdad se tiene considerando que $g\left(\overline{X}, N\right) = 0$. ■
Si $(E_i, E_m = N)$ es base polar, la expresión de β_N en dicha base queda:

$$\begin{aligned}\beta_N &= \gamma_k \theta^k|_{D^\infty}.\ \text{donde}\ \gamma_k = \tau_N \Gamma_{kmm}|_{D^\infty} \\ &= \tau_N \left(\square_{E_m} E_m\right)(E_k)|_{D^\infty} = \\ &= \frac{1}{2}\left\{-\tau_N E_k\left(\frac{1}{\tau}\right) - 2\tau_N g(E_m, [E_m, E_k])\right\}|_{D^\infty}\end{aligned}$$

4.3. Definición de la dirección polar normal

Definición 4 *Diremos que un campo vectorial $N \in \mathfrak{X}(M)$ es un campo vectorial **polar normal** si es transversal a D^∞ y su 1-forma asociada β_N es idénticamente nula.*

En primer lugar debemos demostrar que tal cosa existe:

Proposición 4 *Existe un campo vectorial $N \in \mathfrak{X}(M)$ polar normal.*

Demostración. Tomemos una base polar normal auxiliar (E_i, E_m) y sea $N = \overline{E_m}$ un campo transversal cualquiera, es decir $\overline{E_m} = \lambda^i E_i + \lambda^m E_m$ con $\lambda^m|_{D^\infty}$ nunca nulo.

Sin pérdida de generalidad podemos poner $\overline{E_m} = \lambda^i E_i + E_m$ sin más que tomar un nuevo $\overline{E_m} = \frac{1}{\lambda^m} N$, que no afecta a esta proposición pues $\beta_N = \beta_{\lambda^m \overline{E_m}}$ por el lema al ser $\lambda^m|_{D^\infty}$ nunca nula.

Tomamos una base polar adaptada en la que $\overline{E_m}$ sea el último vector, digamos $\left(\overline{E_i}, \overline{E_m}\right)$.

De nuevo **s.p.d.g. podemos suponer** $\overline{E_i}|_{D^\infty} = E_i|_{D^\infty}$.

Esto puede hacerse sin más que considerar cierto cambio de base si es necesario:

Puede encontrarse una matriz ortogonal $\left(a^i_j\right)$ con $a^i_j \in C^\infty\left(D^\infty\right)$, matriz del cambio de base tal que:

$$E_j|_{D^\infty} = a^i_j \overline{E_i}|_{D^\infty}$$

Ahora, tomamos extensiones diferenciables $A^i_j \in C^\infty(M)$ con $A^i_j|_{D^\infty} = a^i_j$ y $\overline{E_m}\left(A^i_j\right) = 0$ de modo que:

$$\widehat{E_j} = A^i_j \overline{E_i}$$

y se toma como base polar adaptada $\left(\widehat{E_i}, \overline{E_m}\right)$ que cumple lo que queríamos, pues

$$\widehat{E_i}|_{D^\infty} = a^i_j \overline{E_j}|_{D^\infty} = E_j|_{D^\infty}$$

Se tiene entonces:

$$\overline{E_j} = \lambda_j^i E_i + \lambda_m^i E_m \text{ con } \lambda_j^i|_{D^\infty} = \delta_i^j,\ \lambda_m^i|_{D^\infty} = 0$$

Por tanto existe una función $\mu_j \in C^\infty(M)$ de modo que:

$$\overline{E_j} = \lambda_j^i E_i + \tau\mu_j E_m$$

Puesto que $\left(\overline{E_i}, \overline{E_m}\right)$ es base polar adaptada se tiene que $g\left(\overline{E_i}, \overline{E_m}\right) = 0$, explicitamente:

$$\begin{aligned} 0 = g\left(\overline{E_i}, \overline{E_m}\right) &= g\left(\lambda_i^j E_j + \tau\mu_i E_m, \lambda^k E_k + E_m\right) \\ &= \sum_i \lambda_i^k \lambda^k + \mu_i \end{aligned}$$

Observemos que al restringirlo a D^∞ queda:

$$\mu_i|_{D^\infty} = -\sum_i \delta_i^k \lambda^k|_{D^\infty} \ = -\lambda^i|_{D^\infty}$$

Calculemos $\beta_N\left(E_k|_{D^\infty}\right) = \beta_{\overline{E_m}}\left(E_k|_{D^\infty}\right)$ considerando que $\gamma_k = \beta_{E_m}\left(E_k|_{D^\infty}\right) = \tau\Gamma_{kmm}|_{D^\infty}$ y que $\overline{E_m} = \lambda^i E_i + E_m$:

$$\begin{aligned} \overline{\gamma_k} &= \beta_{\overline{E_m}}\left(\overline{E_k}|_{D^\infty}\right) = \beta_{\overline{E_m}}\left(E_k|_{D^\infty}\right) \\ &= \gamma_k + \frac{1}{2}\lambda_i|_{D^\infty} E_m(\tau)\,|_{D^\infty} \end{aligned}$$

donde falta demostrar la última igualdad. Supuesta demostrada, la existencia del campo polar normal se tiene fácilmante. Para conseguir $\overline{\gamma_k} = 0$ para todo k basta con tomar $\lambda_i|_{D^\infty} = \frac{-2\gamma_k}{E_m(\tau)|_{D^\infty}}$.

Si ponemos $\overline{E_m} = \lambda^i E_i + E_m$ cumpliendo dicha condición, tenemos el resultado buscado, y esto podemos hacerlo pues lo único que se le pedía a $\overline{E_m}$ era que fuese transversal a D^∞ y esta condición en absoluto se ve afectada por la elección de las funciones λ_i.

Estudiemos pues $\beta_{\overline{E_m}}\left(\overline{E_k}|_{D^\infty}\right)$, y para ello observemos que, dado que $\overline{E_m} = \lambda^i E_i + E_m$

$$\Box_{\overline{E_m}}\overline{E_m} = \Box_{\lambda^i E_i}\lambda^i E_i + \Box_{\lambda^i E_i} E_m + \Box_{E_m}\lambda^i E_i + \Box_{E_m} E_m$$

- $\Box_{\lambda^i E_i}\lambda^i E_i \cong 0$

  Efectivamente, pues habíamos visto que $\Gamma_{kij} \cong 0$.

- $\Box_{\lambda^i E_i} E_m\left(E_k\right) = \lambda^i \Box_{E_i} E_m\left(E_k\right) = \lambda^i \Gamma_{kim}$

  $\Box_{\lambda^i E_i} E_m\left(E_m\right) = \lambda^i \Box_{E_i} E_m\left(E_m\right) = \lambda^i \Gamma_{mim}$

  Si $\left(\theta^a\right)$ es la cobase dual de $\left(E^a\right)$, podemos expresar:

$$\Box_{E_m}\lambda^i E_i = \lambda^i \Gamma_{kim}\theta^k + \lambda^i \Gamma_{mim}\theta^m$$

- $\square_{E_m}\lambda^i E_i(E_k) = E_m(\lambda^i)\,g_{ik} + \lambda^i\Gamma_{kmi} = E_m\left(\lambda^k\right) + \lambda^i\Gamma_{kmi}$
  $\square_{E_m}\lambda^i E_i(E_m) = E_m(\lambda^i)\,g_{im} + \lambda^i\Gamma_{mmi} = \lambda^i\Gamma_{mim}$

$$\square_{E_m}\lambda^i E_i = \left(E_m\left(\lambda^k\right) + \lambda^i\Gamma_{kim}\right)\theta^k + \lambda^i\Gamma_{mmi}\theta^m$$

Finalmente, obtenemos que para una cierta $\theta \in \Omega^1(M)$, es:

$$\begin{aligned}\square_{\overline{E_m}}\overline{E_m} &= \theta + \lambda^i\left(\Gamma_{mim} + \Gamma_{mmi}\right)\theta^m + \square_{E_m}E_m \\ \theta &= \square_{\lambda^i E_i}\lambda^i E_i + \left(E_m\left(\lambda^k\right) + 2\lambda^i\Gamma_{kim}\right)\theta^k \cong 0\end{aligned}$$

Se obtiene:

$$\beta_{\overline{E_m}}\left(E_k|_{D^\infty}\right) = \frac{\square_{\overline{E_m}}\overline{E_m}}{g\left(\overline{E_m},\overline{E_m}\right)}\left(\overline{E_k}\right)|_{D^\infty}$$

donde:

$$\begin{aligned}\frac{\square_{\overline{E_m}}\overline{E_m}}{g\left(\overline{E_m},\overline{E_m}\right)}\left(\overline{E_k}\right) &= \frac{\square_{\overline{E_m}}\overline{E_m}}{\sum\left(\lambda^i\right)^2 + \frac{1}{\tau}}\left(\overline{E_k}\right) = \frac{\tau\square_{\overline{E_m}}\overline{E_m}}{\tau\sum\left(\lambda^i\right)^2 + 1}\left(\overline{E_k}\right) \\ &= \frac{\tau\theta + \lambda^i\left(\tau\Gamma_{mim} + \tau\Gamma_{mmi}\right)\theta^m + \tau\square_{E_m}E_m}{\tau\sum\left(\lambda^i\right)^2 + 1}\left(\lambda_k^i E_i + \tau\mu_k E_m\right) \\ &= \beta_{E_m}\left(E_k|_{D^\infty}\right) + \frac{1}{2}\mu_i|_{D^\infty}E_m(\tau)\,|_{D^\infty}\end{aligned}$$

La última igualdad se tiene por:

- $\theta^m(E_i) = 0$, por ser bases duales.
- $\tau\square_{E_m}E_m\left(\lambda_k^i E_i\right)|_{D^\infty} = \beta_{E_m}\left(\lambda_k^i E_i|_{D^\infty}\right) = \beta_{E_m}\left(\delta_k^i E_i|_{D^\infty}\right) = \beta_{E_m}\left(E_k|_{D^\infty}\right) = \gamma_k$.
- $\lambda^i\left(\tau\Gamma_{mim} + \tau\Gamma_{mmi}\right)\theta^m\left(\tau\mu_k E_m\right) = \lambda^i\tau^2\left(\Gamma_{mim} + \tau^2\Gamma_{mmi}\right)\mu_k|_{D^\infty} = 0$.
- $\tau^2\square_{E_m}E_m(E_m) = \frac{1}{2}\tau^2 E_m(\frac{1}{\tau}) = -\frac{1}{2}\tau^2\frac{1}{\tau^2}E_m(\tau) = -\frac{E_m(\tau)}{2}$

La primera igualdad se tiene recordando los cálculos:

$$\Gamma_{mmm} = \frac{1}{2}E_m(\frac{1}{\tau})$$

Por último queda:

$$\begin{aligned}\beta_{\overline{E_m}}\left(E_k|_{D^\infty}\right) &= \gamma_k + \frac{1}{2}\tau^2\square_{E_m}E_m(E_m)\,\mu_k|_{D^\infty} = \gamma_k - \frac{1}{2}\mu_k|_{D^\infty}E_m(\tau)\,|_{D^\infty} \\ &= \gamma_k + \frac{1}{2}\lambda_k|_{D^\infty}E_m(\tau)\,|_{D^\infty}\end{aligned}$$

que era la expresión que queríamos demostrar. ∎

Proposición 5 *Sean $N, Z \in \mathfrak{X}(M)$ campos polares normales. Se cumple $N|_{D^\infty} = hZ|_{D^\infty}$ donde $h(x) \neq 0 \ \forall x \in D^\infty$.*

Demostración. Tomamos $N = E_m$ y ponemos la base polar adaptada (E_i, E_m). Como N es polar normal $\beta_N = \beta_{E_m} = 0$, luego $\gamma_k = 0$.

Z es otro campo polar normal, luego es tranversal a D^∞ y cumple $\beta_Z = 0$.

Lo escribimos en función de la base (E_i, E_m), es decir $Z = \lambda^i E_i + hE_m. = \overline{E_m}$ donde $h(x) \neq 0 \ \forall x \in D^\infty$ por ser Z transversal a D^∞.

$$\begin{aligned} 0 = \beta_Z (E_k|_{D^\infty}) &= \beta_{\overline{E_m}} (E_k|_{D^\infty}) \\ &= \gamma_k + \frac{1}{2}\lambda_k|_{D^\infty} E_m (\tau) |_{D^\infty} \\ &= \frac{1}{2}\lambda_k|_{D^\infty} E_m (\tau) |_{D^\infty} \end{aligned}$$

Debe ser $\lambda_k|_{D^\infty} = 0$ para todo k y por tanto $Z|_{D^\infty} = hE_m|_{D^\infty} = hN|_{D^\infty}$

■

Definición 5 *Llamamos dirección polar normal a la dirección dada por cualquier campo polar normal N.*

5. Existencia de pregeodésicas

Vamos a demostrar la existencia de pregeodésicas que cruzan la hipersuperficie polar. Lo haremos desarrollando un argumento paralelo al de la demostración del Teorema 2 en [4]. En ella se parte del campo vectorial en TM llamado spray geodésico (cuyas curvas integrales se proyectan en geodésicas de la variedad) y se trabaja en un punto $\widehat{x}$ de la hipersuperficie de degeneración. Al spray se le hacen ciertas variaciones necesarias por razones técnicas y que no afectan a las trayectorias en M de las curvas integrales. Se linealiza (ver apéndice) dicho campo en uno de sus ceros, concretamente en el vector $v_{\widehat{x}}$ que pasa por $\widehat{x}$ con la dirección candidata a velocidad de la pregeodésica en ese punto. Se estudian los autovalores de la linealización concluyendo que es aplicable una variante de un teorema clásico de variedades estables. Se obtiene en particular una subvariedad estable unidimensional cuyo espacio tangente es $v_{\widehat{x}}$ como queríamos y cuya proyección deja una curva pregeodésica diferenciable.

En nuestro caso, la construcción (local) será como sigue:

1. Se construye el spray geodésico Γ. Este campo Γ no se extiende diferenciablemente a D^∞, pero $\tau\Gamma$ sí lo hace, siendo $\tau = 0$ la ecuación local de D^∞.

   Las trayectorias integrales proyectadas en M del campo $\tau\Gamma$ son las mismas que las de Γ fuera de D^∞, las trayectorias pregeodésicas.

2. Observamos que $\tau\Gamma\left(E_m\right) = -hV$, donde V es el campo de Liouville, E_m el último campo de una base polar adaptada y h una cierta función diferenciable no nula en D^∞. Necesitaríamos que se anulara el campo en esa dirección para seguir adelante con el argumento de estabilidad.

3. Consideramos el campo $\widetilde{S} = \tau\Gamma + hV$, obviamente nulo en E_m. Pero, ¿proyectarán sus trayectorias integrales en M a las mismas trayectorias que el campo Γ, es decir a pregeodésicas en M? La respuesta es afirmativa, lo que demostramos con ayuda del siguiente lema:

4. **Lema:** Observamos que $\widetilde{\Gamma} = \Gamma + \frac{h}{\tau}V$ donde V es el campo de Liouville, $\tau = 0$ la ecuación local de D^∞ y h una función cualquiera tiene las mismas trayectorias integrales en M que Γ.

5. El campo $\widetilde{S} = \tau\widetilde{\Gamma} = \tau\Gamma + hV$ se anula en la dirección polar normal en cada punto, es decir, en la dirección candidata a velocidad de la pregeodésica y tiene las mismas trayectorias integrales en M fuera de $\tau = 0$ que Γ. Se le aplica la variante del teorema de variedades estables obteniéndose las pregeodésicas en la dirección polar normal.

5.1. El spray geodésico

Tenemos como siempre en un entorno U de $x \in D^\infty$ la carta (x^i, x^m) y la base polar adaptada $E_a = E_a^b \frac{\partial}{\partial x^b}$.

Consideremos la carta mixta (x^a, u^a) en TM, donde u^a son las funciones coordenadas de los vectores tangentes en la base polar adaptada:

$$\xi = \dot{x}^a\left(\xi\right)\frac{\partial}{\partial x^a} = u^a\left(\xi\right)E_a = u^a\left(\xi\right)E_a^b\frac{\partial}{\partial x^b} \Rightarrow$$

$$\dot{x}^a = u^b E_b^a$$

Sea $\pi : TM \to M$ la proyección canónica que localmente viene dada por $(x^a, u^a) \to (x^a)$.

El **spray geodésico** es el campo vectorial Γ en TM cuyas curvas integrales se proyectan en las geodésicas de M.

En las coordenadas $\left(x^a, \dot{x}^a\right)$ naturales el spray geodésico se escribe:

$$\Gamma = \dot{x}^a\frac{\partial}{\partial x^a} - B_{ab}^c\dot{x}^a\dot{x}^b\frac{\partial}{\partial \dot{x}^c}$$

B_{ab}^c son los símbolos de Christoffel habituales en las coordenadas (x^a).

Veamos ahora cómo se escribe el spray geodésico en las coordenadas mixtas de TM.

Recordemos:

$$\begin{aligned}\Gamma_{cab} &= \square_{E_a} E_b \left(E_c\right) = g(\nabla_{E_a} E_b, E_c) \\ &= g\left(\Gamma^d_{ab} E_d, E_c\right) = \Gamma^d_{ab} g_{dc}\end{aligned}$$

Esto expresado en forma matricial, teniendo en cuenta la matriz de $(g_{ab})^{-1}$ queda así:

$$\begin{pmatrix} \Gamma^1_{ab} \\ .. \\ .. \\ \Gamma^m_{ab} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & ... & 0 & 0 \\ ... & ... & ... & .. \\ 0 & ... & 1 & 0 \\ 0 & ... & 0 & \tau \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Gamma_{1ab} \\ .. \\ .. \\ \Gamma_{mab} \end{pmatrix}$$

Recordemos que como E_m es polar normal:

$$\tau \Gamma_{kmm}|_{D^\infty} = \tau \Gamma^k_{mm}|_{D^\infty} = 0$$

El spray geodésico en la carta mixta es:

$$\Gamma = \overset{\bullet}{x}^a \frac{\partial}{\partial x^a} - \Gamma^c_{ab} u^a u^b \frac{\partial}{\partial u^c}$$

Sus curvas integrales son:

$$\begin{cases} x^a = x^a(t) \\ u^a = u^a(t) \end{cases}$$

y se tienen las ecuaciones difenciales:

$$\begin{cases} \frac{dx^a}{dt} = \overset{\bullet}{x}^a = u^b E^a_b \\ \frac{du^c}{dt} = -\Gamma^c_{ab} u^a u^b \end{cases}$$

Se supone que $\Gamma^c_{ab} = \Gamma^c_{ab}\left(x^1, ..., x^m\right)$ y $E^a_b = E^a_b\left(x^1, ..., x^m\right)$.

Entonces necesariamente $x^a \circ \gamma = x^a\left(t\right)$ define una curva en M y $u^c \circ \gamma' = u^c\left(t\right)$.

Por construcción del spray geodésico la curva γ es geodésica. Recíprocamente cualquier geodésica en M es curva integral del spray geodésico.

5.2. El campo de Liouville

Hay un campo canónico $V \in \mathfrak{X}\left(TM\right)$ definido por:

$$V\left(\xi\right) = \frac{d}{dt}|_{t=0}\left(\xi + t\xi\right) \text{ donde } \xi \in TM$$

En las coordenadas $\left(x, \overset{\bullet}{x}\right)$ se escribe:

$$V = \overset{\bullet}{x}^a \frac{\partial}{\partial \overset{\bullet}{x}^a}$$

En las coordenadas mixtas $(x^1, .., x^m.u^1, .., u^m)$ también se escribe:

$$V = u^a \frac{\partial}{\partial u^a}$$

En efecto, la curva:

$$\begin{aligned} &\mathbb{R} \rightarrow TM \\ &t \rightarrow \xi + t\xi \end{aligned}$$

se escribe en coordenadas mixtas como la curva que hace corresponder a cada $t \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} x^a = x^a\,(p) \\ u^a = u^a\,(\xi) + tu^a\,(\xi) \end{cases}$$

donde p es el punto de apoyo de ξ. Por tanto:

$$\frac{d}{dt}|_{t=0}\,(\xi + t\xi) = u^a\,(\xi)\,\frac{\partial}{\partial u^a}|_\xi$$

5.3. Las trayectorias integrales

Lema 3 *Sea $\Gamma \in \mathfrak{X}\,(TM)$ el spray geodésico y sea $V \in \mathfrak{X}\,(TM)$ el campo de Liouville.*

Para cualquier función $h\,(x^1, ..., x^m)$ los campos Γ y $\Gamma + hV$ tienen las mismas trayectorias integrales en M. Es decir, las trayectorias integrales de $\Gamma + hV$ son pregeodésicas.

Demostración. En las coordenadas $\left(x^a, \overset{\bullet}{x}^a\right)$ el campo $\Gamma + hV$ se expresa:

$$\Gamma = \overset{\bullet}{x}^a \frac{\partial}{\partial x^a} - B^c_{ab}\overset{\bullet}{x}^a\overset{\bullet}{x}^b \frac{\partial}{\partial \overset{\bullet}{x}^c} + h\overset{\bullet}{x}^c \frac{\partial}{\partial \overset{\bullet}{x}^c}$$

Las ecuaciones diferenciales asociadas a este campo son: $\begin{cases} \frac{dx^a}{dt} = \overset{\bullet}{x}^a \\ \frac{d\overset{\bullet}{x}^c}{dt} = -B^c_{ab}\overset{\bullet}{x}^a\overset{\bullet}{x}^b + h\overset{\bullet}{x}^c \end{cases}$

que también se pueden expresar como la ecuación diferencial de grado2: $\frac{d^2x^c}{dt^2} + B^c_{ab}\frac{dx^a}{dt}\frac{dx^b}{dt} + h\frac{dx^c}{dt} = 0$

Tomemos una solución de este sistema asociado a $\Gamma + hV$, digamos $x(s)$. Veamos que con una adecuada reparametrización $s(t)$ obtenemos $x(t)$, solución del sistema asociado a Γ.

Consideremos la solución $\left(x(s), \frac{dx}{ds}\right)$ de la ecuación en función de un parámetro s. Escribimos dicha ecuación en función del parámetro s y en coordenadas $x = (x^1, .., x^m)$, para $B_{ij}^k = B_{ij}^k(x)$ y $h = h(x)$ funciones diferenciables:

$$\left\{ \frac{d^2x^k}{ds^2} + B_{ij}^k(x)\frac{dx^i}{ds}\frac{dx^j}{ds} + h(x)\frac{dx^k}{ds} = 0 \right\}_{k=1...m}$$

Ponemos, más brevemente, $B_{ij}^k(x)\frac{dx^i}{ds}\frac{dx^j}{ds} = B^k\left(x, \frac{dx}{ds}\right)$:

$$\left\{ \frac{d^2x^k}{ds^2} + B^k\left(x, \frac{dx}{ds}\right) + h(x)\frac{dx^k}{ds} = 0 \right\}_{k=1...m}$$

Es estas condiciones si $x_i = x_i(s)$ es solución de dicho sistema, existe un cambio de parámetro $s = \overline{s}(t)$ de forma que $x_i = x_i(\overline{s}(t))$ es solución del sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\left\{ \frac{d^2x^k}{dt^2} + B^k\left(x, \frac{dx}{dt}\right) = 0 \right\}_{k=1...m}$$

Este cambio $s = \overline{s}(t)$ es justamente el inverso de $t(s)$, donde $t(s)$ es la solución de la ecuación diferencial:

$$\frac{dt}{ds} = \exp\left(-\int h(x(s))\,ds\right) > 0$$

Observemos que es un cambio válido pues la derivada no se anula nunca por tratarse de una exponencial y comprobemos que se cumple lo pedido.

Tengamos en cuenta que:

$$-h(x(s)) = \frac{ds}{dt} \cdot \frac{d^2t}{ds^2} = \frac{\frac{d^2t}{ds^2}}{\frac{dt}{ds}} = \frac{d}{ds}\left(\ln\left(\frac{dt}{ds}\right)\right)$$

Hacemos el cambio de variable:

$$\begin{aligned} \frac{d^2x^k}{dt^2} &= \frac{d}{dt}\left(\frac{dx^k}{ds} \cdot \frac{ds}{dt}\right) = \\ &= \frac{d^2x^k}{ds^2}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 + \frac{dx^k}{ds}\frac{d^2s}{dt^2} \end{aligned}$$

Aplicamos que $x_i = x_i(s)$ es solución del sistema:

$$
\begin{aligned}
\frac{d^2x^k}{dt^2} &= \left[-B^k\left(x,\frac{dx}{ds}\right)-h\left(x\right)\frac{dx^k}{ds}\right]\left(\frac{ds}{dt}\right)^2+\frac{dx^k}{ds}\frac{d^2s}{dt^2}\\
&= \left[-B^k\left(x,\frac{dx}{dt}\right)\left(\frac{dt}{ds}\right)^2-h\left(x\right)\frac{dx^k}{dt}\cdot\frac{dt}{ds}\right]\left(\frac{ds}{dt}\right)^2+\frac{dx^k}{ds}\frac{d^2s}{dt^2}\\
&= -B^k\left(x,\frac{dx}{dt}\right)-h\left(x\right)\frac{dx^k}{dt}\cdot\frac{dt}{ds}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2+\frac{dx^k}{ds}\frac{d^2s}{dt^2}\\
&= -B^k\left(x,\frac{dx}{dt}\right)+\frac{dx^k}{dt}\cdot\frac{d^2t}{ds^2}\cdot\left(\frac{ds}{dt}\right)^2+\frac{dx^k}{ds}\frac{d^2s}{dt^2}
\end{aligned}
$$

Es decir, obtenemos

$$
\frac{d^2x^k}{dt^2}+B^k\left(x,\frac{dx}{dt}\right)=\frac{dx^k}{dt}\cdot\frac{d^2t}{ds^2}\cdot\left(\frac{ds}{dt}\right)^2+\frac{dx^k}{ds}\frac{d^2s}{dt^2}
$$

Utilizando:

$$
\frac{ds}{dt}=\frac{d\overline{s}\left(t\right)}{dt}=\frac{1}{\frac{dt}{ds}}
$$

Veamos que $\frac{dx^k}{dt}\cdot\frac{d^2t}{ds^2}\cdot\left(\frac{ds}{dt}\right)^2+\frac{dx^k}{ds}\frac{d^2s}{dt^2}=0$:

$$
\begin{aligned}
\frac{dx^k}{dt}\cdot\frac{d^2t}{ds^2}\cdot\left(\frac{ds}{dt}\right)^2+\frac{dx^k}{ds}\frac{d^2s}{dt^2} &= \frac{dx^k}{dt}\cdot\frac{d^2t}{ds^2}\cdot\left(\frac{ds}{dt}\right)^2+\frac{dx^k}{dt}\cdot\frac{dt}{ds}\cdot\frac{d}{dt}\left(\frac{ds}{dt}\right)\\
&= \frac{dx^k}{dt}\cdot\frac{d^2t}{ds^2}\cdot\left(\frac{ds}{dt}\right)^2+\frac{dx^k}{dt}\cdot\frac{dt}{ds}\cdot\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\frac{dt}{ds}}\right)\\
&= \frac{dx^k}{dt}\cdot\frac{d^2t}{ds^2}\cdot\left(\frac{ds}{dt}\right)^2-\frac{dx^k}{dt}\cdot\frac{d^2t}{ds^2}\cdot\left(\frac{ds}{dt}\right)^2=0
\end{aligned}
$$

Hemos obtenido que $x_i = x_i\left(\overline{s}\left(t\right)\right)$ es solución del otro sistema ecuaciones diferenciales asociado a Γ. La reparametrización no afecta a las trayectorias integrales proyectadas en M, que en ambos casos son pregeodésicas en M. ■

Observemos que sí se modifica la curva integral en TM pues la reparametrización afecta a los vectores de los tangentes en cada punto de la trayectoria en M.

También es trivial que un campo cualquiera X de TM tiene las mismas trayectorias integrales proyectadas en M que fX donde f es una función nunca nula.

Recapitulando, Γ y $\widetilde{\Gamma}=\Gamma+\frac{h}{\tau}V$ tienen las mismas trayectorias integrales en M, y $\widetilde{\Gamma}=\Gamma+\frac{h}{\tau}V$ tiene las mismas que $\widetilde{S}=\tau\widetilde{\Gamma}=\tau\Gamma+hV$ (por la observación anterior) en todos los puntos donde no se anula τ, es decir, fuera de D^{∞}.

.

5.4. Aplicación del teorema de variedades estables

Querríamos aplicar el argumento de estabilidad al spray en la dirección polar normal, pero para ello esta debería anular el spray, y esto no se da. Veámoslo:

En las coordenadas mixtas el spray se escribe:

$$\Gamma = \overset{\bullet}{x}^{a}\frac{\partial}{\partial x^{a}} - \Gamma_{ij}^{c}u^{i}u^{j}\frac{\partial}{\partial u^{c}} - (\Gamma_{mj}^{a} + \Gamma_{jm}^{a})u^{m}u^{j}\frac{\partial}{\partial u^{a}} - \Gamma_{mm}^{k}(u^{m})^{2}\frac{\partial}{\partial u^{k}} - \\ - \Gamma_{mm}^{m}(u^{m})^{2}\frac{\partial}{\partial u^{m}}$$

Queremos calcular $\Gamma\left(E_{m}\right)|_{D^{\infty}}$. En primer lugar debemos ocuparnos de si este campo se puede extender diferenciablemente a D^{∞} es decir, de si está bien definido.

Usamos la información que habíamos recopilado al calcular los símbolos de Christoffel:

$$\begin{aligned}
\Gamma_{ij}^{k} &= \Gamma_{kij} \cong 0 \\
\Gamma_{ik}^{m} &= \tau\Gamma_{mik} \cong 0 \\
\Gamma_{mj}^{k} &= \Gamma_{kmj} \cong 0 \;\; y \;\; \Gamma_{ik}^{m} = \tau\Gamma_{mik} \cong 0 \\
\tau\Gamma_{im}^{m} &= \tau\Gamma_{mim} \cong 0, \;\; \tau\Gamma_{mi}^{m} = \tau\Gamma_{mmi} \cong 0 \;\; y \;\; \tau\Gamma_{mm}^{i} = \tau\Gamma_{imm} \cong 0 \\
\tau\Gamma_{mm}^{m} &= \tau^{2}\Gamma_{mmm} = -\frac{E_{m}(\tau)}{2} \cong 0
\end{aligned}$$

Observamos que el campo Γ no se extiende diferenciablemente a D^{∞} pero $\tau\Gamma$ sí lo hace, y la proyección a M de las trayectorias integrales de de $\tau\Gamma$ son pregeodésicas. Se tiene:

$$\tau\Gamma = \tau\overset{\bullet}{x}^{a}\frac{\partial}{\partial x^{a}} - \tau\Gamma_{ij}^{c}u^{i}u^{j}\frac{\partial}{\partial u^{c}} - \tau(\Gamma_{mj}^{a} + \Gamma_{jm}^{a})u^{m}u^{j}\frac{\partial}{\partial u^{a}} - \tau\Gamma_{mm}^{k}(u^{m})^{2}\frac{\partial}{\partial u^{k}} - \tau\Gamma_{mm}^{m}(u^{m})^{2}\frac{\partial}{\partial u^{m}}$$

$$\tau\Gamma\left(E_m\right)|_{D^\infty} = \begin{bmatrix} \tau\overset{\bullet}{x}^a\frac{\partial}{\partial x^a} - \tau\Gamma^c_{ij}u^iu^j\frac{\partial}{\partial u^c} - \tau(\Gamma^a_{mj}+\Gamma^a_{jm})u^mu^j\frac{\partial}{\partial u^a} - \\ \tau\Gamma^k_{mm}(u^m)^2\frac{\partial}{\partial u^k} - \tau\Gamma^m_{mm}(u^m)^2\frac{\partial}{\partial u^m} \end{bmatrix}\left(E_m\right)|_{D^\infty}$$

$$= \left[-\tau(\Gamma^m_{mj}+\Gamma^m_{jm})u^mu^j\frac{\partial}{\partial u^a} - \tau\Gamma^k_{mm}(u^m)^2\frac{\partial}{\partial u^k} - \tau\Gamma^m_{mm}(u^m)^2\frac{\partial}{\partial u^m}\right]\left(E_m\right)|_{D^\infty}$$

(pues la función τ que se anula en D^∞ está multiplicando a una función extendible en esos sumandos)

$$= \left[-\tau\Gamma^k_{mm}\frac{\partial}{\partial u^k} - \tau\Gamma^m_{mm}\frac{\partial}{\partial u^m}\right]\left(E_m\right)|_{D^\infty}$$

(pues $u^j\left(E_m\right) = 0$ y $u^m\left(E_m\right) = 1$)

$$= -\tau\Gamma^m_{mm}\frac{\partial}{\partial u^m}\left(E_m\right)|_{D^\infty} = \frac{E_m\left(\tau\right)}{2}|_{D^\infty}\frac{\partial}{\partial u^m}$$

(pues E_m es campo polar normal, la forma β_{E_m} es idénticamente nula y $\beta_{E^m} = \gamma_k\theta^k|_{D^\infty}$. donde los $\gamma_k = \tau\Gamma_{kmm}|_{D^\infty} = \tau\Gamma^k_{mm}|_{D^\infty}$ son todos nulos)

$$\tau\Gamma\left(E_m\right)|_{D^\infty} = \frac{E_m\left(\tau\right)}{2}|_{D^\infty}\frac{\partial}{\partial u^m}$$

Hacemos $h = -\frac{E_m(\tau)}{2}$ (supongamos por ejemplo $h > 0$) y consideramos el campo $\widetilde{S} = \tau\Gamma + hV$ que por todo lo considerado en el apartado anterior tiene trayectorias integrales que proyectan a pregeodésicas de M.

$$\begin{aligned} \widetilde{S} &= \tau\Gamma + hV \\ &= \tau\overset{\bullet}{x}^a\frac{\partial}{\partial x^a} - \tau\Gamma^c_{ij}u^iu^j\frac{\partial}{\partial u^c} - \tau(\Gamma^a_{mj}+\Gamma^a_{jm})u^mu^j\frac{\partial}{\partial u^a} - \tau\Gamma^k_{mm}(u^m)^2\frac{\partial}{\partial u^k} - \\ &- \tau\Gamma^m_{mm}(u^m)^2\frac{\partial}{\partial u^m} + hu^a\frac{\partial}{\partial u^a} \end{aligned}$$

Dado $p \in D^\infty$, el vector $\xi = E_m\left(p\right)$ es un punto estacionario de $\widetilde{S}$, pues $\tau\left(p\right) = 0$, $u^i\left(\xi\right) = 0$, y $u^m\left(\xi\right) = 1$ y:

$$\begin{aligned} \widetilde{S}\left(\xi\right) &= \tau\left(p\right)\left[\overset{\bullet}{x}^a\frac{\partial}{\partial x^a} - \Gamma^c_{ij}u^iu^j\frac{\partial}{\partial u^c} - (\Gamma^a_{mj}+\Gamma^a_{jm})u^mu^j\frac{\partial}{\partial u^a} - \Gamma^k_{mm}(u^m)^2\frac{\partial}{\partial u^k}\right]\left(\xi\right) \\ &- \tau\Gamma^m_{mm}(u^m\left(\xi\right))^2\frac{\partial}{\partial u^m} + h\left(p\right)u^a\left(\xi\right)\frac{\partial}{\partial u^a} \\ &= 0 + \frac{E_m\left(\tau\right)}{2}|_p\frac{\partial}{\partial u^m} - \frac{E_m\left(\tau\right)}{2}|_p\frac{\partial}{\partial u^m} = 0 \end{aligned}$$

Podemos por tanto linealizar $\widetilde{S}$ en $\xi = E_m\left(p\right)$ (ver apéndice) para obtener $D\widetilde{S}|_\xi : T_\xi TM \to T_\xi TM$

En primer lugar tenemos en cuenta que $\tau\left(p\right) = 0$, donde $p \in D^\infty$ es el punto de apoyo de ξ.

$$\begin{aligned}\widetilde{S} = \tau \overset{\bullet}{x}^a \frac{\partial}{\partial x^a} - \tau \Gamma^c_{ij} u^i u^j \frac{\partial}{\partial u^c} - \tau (\Gamma^a_{mj} + \Gamma^a_{jm}) u^m u^j \frac{\partial}{\partial u^a} - \\ - \tau \Gamma^k_{mm} (u^m)^2 \frac{\partial}{\partial u^k} - h (u^m)^2 \frac{\partial}{\partial u^m} + h u^a \frac{\partial}{\partial u^a}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}D\widetilde{S}|_\xi &= d\tau\,(p)\, \overset{\bullet}{x^a}(\xi) \otimes \frac{\partial}{\partial x^a} - d\tau\,(p)\, \Gamma^c_{ij} u^i\,(\xi)\, u^j\,(\xi) \otimes \frac{\partial}{\partial u^c} - \\ &- d\tau\,(p)\,(\Gamma^a_{mj} + +\Gamma^a_{jm}) u^m\,(\xi)\, u^j\,(\xi) \otimes \frac{\partial}{\partial u^a} - \\ &- d\tau\,(p)\, \Gamma^k_{mm} (u^m\,(\xi))^2 \otimes \frac{\partial}{\partial u^k} - dh\,(p)\left(u_m\,(\xi)^2\right) \otimes \frac{\partial}{\partial u^m} - \\ &- h\,(p)\, 2u^m\,(\xi)\, du^m\,(\xi) \otimes \frac{\partial}{\partial u^m} + dh\,(p)\, u^a\,(\xi) \otimes \frac{\partial}{\partial u^a} + h\,(p)\, du^a\,(\xi) \otimes \frac{\partial}{\partial u^a}\end{aligned}$$

Considerando ahora que $u^j\,(\xi) = 0$ y $u^m\,(\xi) = 1$, queda:

$$\begin{aligned}D\widetilde{S}|_\xi &= d\tau\,(p)\, \overset{\bullet}{x^a}(\xi) \otimes \frac{\partial}{\partial x^a} - d\tau\,(p)\, \Gamma^k_{mm} \otimes \frac{\partial}{\partial u^k} - dh\,(p) \otimes \frac{\partial}{\partial u^m} \\ &- h\,(p)\, 2du^m\,(\xi) \otimes \frac{\partial}{\partial u^m} + dh\,(p) \otimes \frac{\partial}{\partial u^m} + h\,(p)\, du^a\,(\xi) \otimes \frac{\partial}{\partial u^a} \\ &= d\tau\,(p) \left[\overset{\bullet}{x^a}(\xi) \otimes \frac{\partial}{\partial x^a} - \Gamma^k_{mm} \otimes \frac{\partial}{\partial u^k}\right] - h\,(p)\, du^m\,(\xi) \otimes \frac{\partial}{\partial u^m} + \\ &+ h\,(p)\, du^i\,(\xi) \otimes \frac{\partial}{\partial u^i}\end{aligned}$$

Resumiendo:

$$\begin{aligned}D\widetilde{S}|_\xi = (d\tau|_p \circ \pi_*) \otimes \left(\xi - \Gamma^k_{mm} \frac{\partial}{\partial u^k}\right) \\ - h\,(p)\, du^m \otimes \frac{\partial}{\partial u^m} + h\,(p)\, du^i \otimes \frac{\partial}{\partial u^i}\end{aligned}$$

Se ha identificado $\xi \in TM$ con $\xi \in T_\xi TM$ a través de la inmersión canónica $T_pM \hookrightarrow T_\xi TM$ que hace $\frac{\partial}{\partial u^a}|_p \to \frac{\partial}{\partial u^a}|_\xi$.

$$TM \xrightarrow{\pi} M$$
$$T_\xi TM \xrightarrow{\pi_*} T_pM$$

$$\pi_* \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_\xi = \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_p$$
$$\pi_* \left(\frac{\partial}{\partial u^i}\right)_\xi = 0$$

Calculemos los autoespacios para aplicar después el teorema de variedades estables (ver apéndice).

Para el cálculo conviene tener presente las bases respectivas de T_pM y de $T_\xi TM$.

Para T_pM, puesto que $(x^1,...,x^m)$ es la carta en un entorno de $p \in M$, tenemos como siempre:

$$\xi = \xi^a \frac{\partial}{\partial x^a}|_p = dx^a(\xi)\frac{\partial}{\partial x^a}|_p \in T_pM$$

La carta de TM en un entorno de $\xi \in T_pM$ es $(x^1,...,x^m,u^1,...,u^m)$ y por tanto la base de $T_\xi TM$ es $\left(\frac{\partial}{\partial x^1},...,\frac{\partial}{\partial x^m},\frac{\partial}{\partial u^1},...,\frac{\partial}{\partial u^m}\right)$, luego:

$$\eta = dx^a(\eta)\frac{\partial}{\partial x^a}|_\xi + du^a(\eta)\frac{\partial}{\partial u^a}|_\xi$$

- Si $\eta \in T_pD^\infty \hookrightarrow T_\xi TM$ entonces $0 = d\tau(\eta)$ (pues $\tau|_{D^\infty} = 0$) y $u^a(\eta) = 0 = du^a(\eta)$. Por tanto

$$\begin{aligned} D\widetilde{S}|_\xi(\eta) &= \left\{\begin{array}{c} (d\tau|_p \circ \pi_*) \otimes \left(\xi - \Gamma^k_{mm}\frac{\partial}{\partial u^k}\right) - \\ -h(p)\,du^m \otimes \frac{\partial}{\partial u^m} + h(p)\,du^i \otimes \frac{\partial}{\partial u^i} \end{array}\right\}(\eta) = \\ &= \left(-h(p)\,du^m \otimes \frac{\partial}{\partial u^m} + h(p)\,du^i \otimes \frac{\partial}{\partial u^i}\right)(\eta) = 0 \end{aligned}$$

- Si $\eta = \frac{\partial}{\partial u^j}|_\xi$ entonces $0 = dx^i(\eta) = d\tau(\eta) = du^a(\eta)$ $(a \neq j)$ y sólo $du^j(\eta) = 1$, por lo que se tiene:

$$D\widetilde{S}|_\xi(\eta) = \left[h(p)\,du^i \otimes \frac{\partial}{\partial u^i}\right](\eta) = h(p)\,\eta$$

- Si $\eta = \frac{\partial}{\partial u^m}|_\xi$ entonces $0 = dx^i(\eta) = du^a(\eta)$ $(a \neq m)$ y $du^m(\eta) = 1$. También $\pi_*(\eta) = \pi_*\left(\frac{\partial}{\partial u^m}|_\xi\right) = 0$.

$$\begin{aligned} D\widetilde{S}|_\xi(\eta) &= \left\{\begin{array}{c} (d\tau|_p \circ \pi_*) \otimes \left(\xi - \Gamma^k_{mm}\frac{\partial}{\partial u^k}\right) - \\ -h(p)\,du^m \otimes \frac{\partial}{\partial u^m} \end{array}\right\}(\eta) = \\ &= -h(p)\,\eta \end{aligned}$$

- Por último, consideramos el vector ξ. Se tiene $0 = du^a(\xi)$ $(a \neq m)$ y $du^m(\xi) = 1$.También $\pi_*(\xi) = \xi$ y $d\tau|_p(\xi) = E_m(\tau)|_p = -2h(p)$.

$$\begin{aligned} D\widetilde{S}|_\xi(\xi) &= \left\{\begin{array}{c} (d\tau|_p \circ \pi_*) \otimes \left(\xi - \Gamma^k_{mm}\frac{\partial}{\partial u^k}\right) - \\ h(p)\,du^m \otimes \frac{\partial}{\partial u^m} + h(p)\,du^i \otimes \frac{\partial}{\partial u^i} \end{array}\right\}(\xi) = \\ &= \left\{(d\tau|_p \circ \pi_*) \otimes \left(\xi - \Gamma^k_{mm}\frac{\partial}{\partial u^k}\right) - h(p)\,du^m \otimes \frac{\partial}{\partial u^m}\right\}(\xi) \\ &= -2h(p)\left(\xi - \Gamma^k_{mm}(p)\frac{\partial}{\partial u^k}\right) \end{aligned}$$

Se puede probar que existe un autovector asociado al autovalor $-2h(p)$. Dicho autovector tiene la forma $\eta = \xi - c^i \frac{\partial}{\partial u^i}$ para ciertas constantes c^i.

Esto se haría aplicando una generalización del lema siguiente:

Lema 4 *Sea L:$V \to V$ un edomorfismo en un espacio vectorial y u^i, v vectores no nulos, con $L(u_i) = bu_i$ y $L(v) = a\left(v - \sum_{i=1}^{m-1} \gamma_i u^i\right)$. Entonces existe una constantes c_i de modo que $v - \sum_{i=1}^{m-1} \gamma_i u^i$es autovector de L con autovalor a.*

Demostración. Comprobamos explicitamente que dichas constantes son $c_i = \frac{-2\gamma_i}{3}$ ■

En nuestro caso resultan $c_i = \frac{-2\Gamma^i_{mm}(p)}{3}$.

Resumiendo, tenemos los autovalores 0, $h(p)$, $-h(p)$, $-2h(p)$ con multiplicidades $m-1$, $m-1$, 1 y 1 respectivamente (en total hay $2m$ autovalores si los contamos con su multiplicidad).

Recordemos que habíamos supuesto $h > 0$. Por tanto, el autovalor $-2h(p)$ es estrictamente más pequeño que los otros autovalores negativos.

Usando un refinamiento (ver apéndice) del teorema de variedades estables se concluye que existe una línea (variedad diferenciable de dimensión uno) $\widetilde{S} - estable$:

$$\text{Existe } \widetilde{L} \subset TM \text{ una línea } \widetilde{S} - estable$$
$$\xi \in \ \widetilde{L} \ y \ \ T_\xi \widetilde{L} = span\left(\xi - c^i \frac{\partial}{\partial u^i}\right)$$

Si proyectamos mediante π_* resulta:

$$\pi_*\left(\xi - c^i \frac{\partial}{\partial u^i}\right) = \xi \neq 0, \ \ \pi_*(\xi) = p$$
$$\pi\left(\widetilde{L}\right) = L \ \text{ y por tanto } T_p L = span(\xi)$$

Recordemos que $T_\xi TM \xrightarrow{\pi_*} T_p M$ es suprayectiva por ser $TM \xrightarrow{\pi} M$ submersión y $\pi_*\left(\xi - c^i \frac{\partial}{\partial u^i}\right) = \xi \neq 0$. Por tanto $\pi\left(\widetilde{L}\right) = L$ tiene dimensión uno.

Es decir L es una línea.

Ahora, $\widetilde{L} - \xi$ (pues $\widetilde{S}(\xi) = 0$) es una trayectoria integral de $\widetilde{S}$ (por tanto trayectoria integral de Γ, como vimos) y por tanto su proyección mediante π nos deja la pregeodésica $L - \{p\}$. Resumiendo:

La proyección $L = \pi\left(\widetilde{L}\right)$ de esta línea estable sobre M es la pregeodésica diferenciable buscada en M.

Hemos obtenido como queríamos una pregeodésica en la dirección polar normal.

6. Apéndice

Seguiremos [8] para la definición de linealización y para el teorema clásico de variedades estables.

6.1. Linealización

Definición 6 *Sea $X \in \mathfrak{X}(M)$ un campo y $p_0 \in M$ un punto singular, punto crítico o punto de equilibrio de X (es decir, $X(p_0) = 0$).*

La linealización *de X en el punto singular p_0 es la aplicación lineal:*

$$DX(p_0) : T_{p_0}M \to T_{p_0}M$$

definida por:

$$DX|_{p_0}(\xi) = \frac{d}{dt}|_{t=0}\left(dF_t|_{p_0}\right)(\xi)$$

donde F es el flujo de X. Los autovalores de $DX(p_0)$ se llaman exponentes característicos de X en p_0.

En la definición se supone para simplificar que el campo X es completo. Recordemos que el *flujo* de un campo completo es:

$$F : \mathbb{R} \times M \to M$$

Se tiene $F_t(p) = F(t,p) = c_p(t)$ y $c_p : \mathbb{R} \to M$ es la curva integral de X por el punto p. Se tiene que $F_t : M \to M$ es difeomorfismo , con $F_t(p_0) = p_0$, $dF_t|_{p_0} : T_{p_0}M \to T_{p_0}M$ y su derivada en $t = 0$ también $DX|_{p_0} : T_{p_0}M \to T_{p_0}M$ (es endomorfismo).

Esta definición no es computacionalmente adecuada. Necesitamos un algoritmo para el cálculo efectivo de $DX(p_0)$, que haremos en coordenadas locales.

Tomando una carta $\varphi = (x_1, .., x_m)$ en torno a p_0 $(x_i(p_0) = 0)$ y el flujo local $F(t,x) = F(t, x_1, .., x_m)$, si $X = X^i \frac{\partial}{\partial x_i}$, $X^i = X^i(x_1, .., x_m)$ se tiene:

$$\frac{dF^i}{dt}|_{(t,x)} = X^i(F(t,x)) = X^i \circ F(t,x)$$

Por definición:

$$DX|_{p_0}\left(\frac{\partial}{\partial x_j}|_{p_0}\right) = \frac{d}{dt}|_{t=0}\left(dF_t|_{p_0}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x_j}|_{p_0}\right)$$

En la carta se escribe:

$$\begin{aligned}
DX|_{p_0}\left(\frac{\partial}{\partial x_j}|_{p_0}\right) &= \frac{d}{dt}|_{t=0}\left(dF_t\left(\frac{\partial}{\partial x_j}|_0\right)\right) = \frac{d}{dt}|_{t=0}\left(\frac{\partial\left(F_1...F_n\right)}{\partial x_j}|_{(t,0)}\right)\\
&= \left\{\frac{d}{dt}|_{t=0}\left(\frac{\partial F_i}{\partial x_j}|_{(t,0)}\right)\right\}\left(\frac{\partial}{\partial x_i}|_0\right) = \frac{\partial^2 F_i}{\partial t \partial x_j}|_{(0,0)}\left(\frac{\partial}{\partial x_i}|_0\right)\\
&= \left(\frac{\partial}{\partial x_j}|_{x=0}\left\{\frac{\partial F_i}{\partial t}|_{(0,x)}\right\}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x_i}|_{p_0}\right)\\
&= \left\{\frac{\partial}{\partial x_j}|_{x=0}(X^i \circ F\left(0,x\right))\right\}\left(\frac{\partial}{\partial x_i}|_{p_0}\right)\\
&= \left\{\frac{\partial}{\partial x_j}|_{x=0}(X^i(x))\right\}\left(\frac{\partial}{\partial x_i}|_{p_0}\right) = \left(\frac{\partial X^i}{\partial x_j}|_{x=0}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x_i}|_{p_0}\right)
\end{aligned}$$

Por lo tanto se obtiene:

$$\begin{aligned}
DX|_{p_0}\left(\xi^j\frac{\partial}{\partial x_j}|_{p_0}\right) &= \left(\frac{\partial X^i}{\partial x_j}|_{x=0}\xi^j\right)\frac{\partial}{\partial x_i}|_{p_0} = \left\{\frac{\partial X^i}{\partial x_j}|_{x=0}dx^j\left(\xi\right)\right\}\frac{\partial}{\partial x_i}|_{p_0}\\
&= \left(dX^i|_0\right)\left(\xi\right)\frac{\partial}{\partial x_i}|_{p_0} = \left\{(dX^i \otimes \frac{\partial}{\partial x_i})|_0\right\}\left(\xi\right)
\end{aligned}$$

Es decir:

$$DX|_{p_0} = (dX^i \otimes \frac{\partial}{\partial x_i})|_{x(p_0)}$$

6.2. Teorema de Estabilidad

El teorema que a continuación enuncio es consecuencia del teorema 7.2.2, pag. 526 de[8].

Teorema 2 *Sea $X \in \mathfrak{X}(M)$ y $p_0 \in M$ un punto singular (aislado) de X y sean $\lambda_1, ..., \lambda_r \in \mathbb{C}$ ($\lambda_j = a_j + ib_j$) los autovalores distintos de $DX|_{p_0}$.*

Sea $T_{p_0}^{-}(M)$ subespacio $(DX|_{p_0})-invariante$ de $T_{p_0}(M)$ que corresponde a los autovalores λ_j con $a_j < 0$. Análogamente $T_{p_0}^{+}(M)$.

Entonces existen M_0^+ y M_0^- subvariedades regulares de M, invariantes por el flujo y tal que $p_0 \in M_0^+ \cap M_0^-$, $T_{p_0}\left(M_0^+\right) = T_{p_0}^{+}(M)$ y $T_{p_0}\left(M_0^-\right) = T_{p_0}^{-}(M)$

El teorema que se utiliza en la demostración es un refinamiento de éste debido a A. Vanderbauwhede (1989)[9], que asegura:

Teorema 3 *Sea* $X \in \mathfrak{X}(M)$ *y* $p_0 \in M$ *un punto singular (aislado) de* X *y sean* $\lambda_1, ..., \lambda_r \in \mathbb{C}$ $(\ \lambda_j = a_j + ib_j)$ *los autovalores distintos de* $DX|_{p_0}$.

Sea $T_{p_0}^{--}(M)$ *subespacio* $(DX|_{p_0})-$*invariante de* $T_{p_0}(M)$ *que corresponde al autovalor* λ_j *con parte real más negativa* $(a_j < 0 \text{ y } a_j < a_i\ (i \neq j))$.

Entonces existe M_0^{--} *subvariedad regular de* M, *invariante por el flujo y tal que* $p_0 \in M_0^{--}$ *y* $T_{p_0}\left(M_0^{--}\right) = T_{p_0}^{--}(M)$.

Referencias

[1] E.Aguirre and J. Lafuente. *Transverse Riemann-Lorentz metrics with tangent radical.* Diff. Geom. its App.,24, 2, 91-100,2005.

[2] M. Kossowski. *Fold singularities in pseudoriemannian geodesic tubes.* Proc. Amer. Math. Soc., 95, 463-469,1985.

[3] M. Kossowski. *Pseudo-riemannian metric singularities and the extendability of parallel transport.* Proc. Amer. Math. Soc., 99, 147-154, 1987.

[4] M. Kossowski and M. Kriele. *Transverse, type changing, pseudo riemannian metrics and the extendability of geodesics.* Proc. R. Soc. Lond. A 444, 297-306,1994.

[5] M. Kossowski and M. Kriele. *The volume blow-up and characteristic classes for transverse, type changing, pseudo-riemannian metrics.* Geom. Dedicata 64, 1-16. 1997.

[6] B. O'Neill. *Semi-riemannian Geometry.* Academic Press, 1983.

[7] E. Aguirre, V. Fernández, J. Lafuente.*On the Conformal Geometry of Transverse Riemann-Lorentz Manifolds.* Journal of Geom and Phys 1541-1547

[8] Ralph Abraham and Jerrold E. Marsden. *Foundations of Mechanics.* The Benjamin/Cummings Publishing Company, 1978.

[9] André Vanderbauwhede. *Centre Manifolds, Normal Forms and Elementary Bifurcations.* Dynamics Reported. Volume 2. John Wiley &Sons Ltd. 1989