Los espacios con conexión conforme

B.Salvador

2000

1 Introducción

En 1923, aparece publicado el artículo "Les espaces à connexion conforme"en el que E. Cartan presenta un patrón para definir en toda variedad conforme Riemanniana una conexión "canónica" determinada por su estructura conforme, análoga a la conexión de Levi-Civita para variedades Riemannianas. Esta conexión representa un papel clave para el estudio de estructuras conformes, y su importancia ha dado lugar a posteriores generalizaciones de la noción de conexión de Cartan, para ámbitos más generales. No obstante, llama la atención el hecho de que existe una aparente falta de consenso entre algunas de las diversas definiciones y reinterpretaciones más modernas de la original conexión conforme. La peculiar forma en que Cartan desarrolla la geometría diferencial, tan distante a la utilizada más recientemente, hace oscura la relación que une su idea original con las posteriores formalizaciones. La intención de este artículo es presentar la construcción desarrollada por Cartan, a través de una formalización más moderna y coherente con la geometría diferencial de hoy en día, haciendo explícito el lazo de unión que existe con las presentaciones hechas por autores como Kobayashi, Poor, Sternberg, ... La asombrosa intuición geométrica de Cartan, a través de una idea tan "visual" como es el transporte de referencias a lo largo de la variedad, merece el esfuerzo por reconciliar tal construcción con las presentaciones posteriores, a través de tensores, que aunque escritas en un lenguaje más comprensible para un matemático moderno pierden parte de la belleza de esa intuición geométrica original.

2 Espacio vectorial conforme

Un estructura conforme euclídea $\mathcal{C}$ en un espacio vectorial V suele venir representada a través de una familia de métricas euclídeas proporcionales en V, de la forma $\{e^{2r}\langle .,. \rangle : r \in \mathbb{R}\}$. A continuación vamos a desarrollar un procedimiento mediante el cual es posible asociar a todo par $(V, \mathcal{C})$, espacio conforme euclídeo, una variedad "esférica" conforme $\overline{V}$, que se denominará la *complección esférica* de V, en donde está totalmente reflejada la estrucutra conforme inicial, y que ofrece por tanto una presentación alternativa de los espacios conformes lineales. A través del subespacio de cuádricas afines en V correspondientes a las esferas conformes dadas por $\mathcal{C}$, se llega a una compactación por un punto del espacio V, que da lugar a la variedad $\overline{V}$, difeomorfa por tanto a la esfera m-dimensional $\mathbb{S}^m$ y con el espacio V naturalmente sumergido en ella. Es más, $\overline{V}$ está dotada de una estructura conforme que extiende al punto del infinito la estructura conforme vectorial $\mathcal{C}$ en V de la que inicialmente partíamos. En el caso particular en que el espacio conforme sea $\mathbb{R}^m$ con la estructura conforme dada por su métrica euclídea usual, la complección esférica asociada resulta ser la esfera $\mathbb{S}^m$ con la estructura conforme usual heredada de $\mathbb{R}^{m+1}$.

2.1 Complección esférica de un espacio vectorial conforme

Sea $(V, \mathcal{C})$ un espacio conforme euclídeo, es decir, V un espacio vectorial y $\mathcal{C}$ una estructura conforme sobre V representada por la familia de métricas euclídeas $\{e^{2r} \langle .,. \rangle \,:\, r \in \mathbb{R}\}$. En este contexto, es claro que tiene sentido hablar de esferas (conformes) en el espacio V, puesto que la noción de que dos puntos se hallen a una misma distancia de un centro dado está perfectamente definida por la estructura conforme lineal $\mathcal{C}$, si bien el valor de dicha distancia dependerá de la métrica (escala) considerada. De este modo, en el espacio de formas cuadráticas afines de V, toda estructura conforme $\mathcal{C}$ distingue un subespacio $\widehat{V}$, correspondiente a la familia de sus $(m-1)$-esferas afines. Es más, la estructura conforme original definida en el espacio vectorial V, va a permitir definir también en el espacio $\widehat{V}$ una estructura conforme. Este último resultado responde a la intuición geométrica de que una medida para ángulos entre vectores permite definir en la intersección de dos esferas una medida para su ángulo de corte.

Toda cuádrica afín en V, con estructura de espacio afín $V = \{1\} \times V$ sobre el espacio vectorial $V = \{0\} \times V$, viene determinada por una forma cuadrática afín $q \in QA(V)$ a través de su imagen

$$q^{-1}(0) = \{v \in V : q(v) = 0\}$$

El espacio $QA(V)$ de las formas cuadráticas afines de V tiene estructura de espacio vectorial real y sus elementos pueden descomponerse en

$$q\,(v) = q_2(v) + q_1(v) + q_0$$

siendo q_2 forma cuadrática en V, $q_1 \in V^*$ forma lineal en el dual, y $q_0 \in \mathbb{R}$.

Por otra parte, el conjunto de puntos de V que guardan una misma distancia, digamos una distancia $R \geq 0$ según la métrica conforme $\langle .,. \rangle \in \mathcal{C}$, a un punto central $w \in V$, viene descrito a través de la ecuación

$$\|v\|^2 - 2\,\langle w, v\rangle + \|w\|^2 - R^2 = 0$$

En consecuencia, es claro que la noción de $(m-1)$-esfera conforme en V se corresponde con la dada por una forma cuadrática afín $q \in QA(V)$, tal que

$$q_2(v) = k\,\|v\|^2\,; \qquad q_1(v) = -2k\,\langle w, v\rangle\,; \qquad q_0 = k\left(\|w\|^2 - R^2\right)$$

De este modo, la presencia de una estructura conforme euclídea $\mathcal{C}$ en el espacio V puede ser utilizada para distinguir en $QA(V)$ un subespacio de formas cuadráticas afines de V,

$$\widehat{V} = \left\{ q \in QA(V) : q_2 = k \| \ \|^2 \text{ con } k \in \mathbb{R}, \text{ y } \| \ \|^2 \in \mathcal{C} \right\}$$

con dimensión $m+2$, y cuya definición depende exclusivamente de la estructura conforme. El espacio proyectivo $\mathbb{P}(\widehat{V})$, que se identifica con la familia de cuádricas afines definidas por elementos de $\widehat{V}$, recibe entonces el nombre de *espacio de* $(m-1)$*-esferas generalizadas*.

En primer lugar, se hace notar que toda métrica conforme $\langle ., . \rangle \in \mathcal{C}$, define un isomorfismo canónico entre los espacios vectoriales $\widehat{V}$ y $\mathbb{R} \times V \times \mathbb{R}$, a través de la siguiente correspondencia

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} \times V \times \mathbb{R} & \to & \widehat{V} \\ (x_0, w, x_{m+1}) & \to & q_{(x_0,w,x_{m+1})} \end{array} \tag{1}$$

$$q_{(x_0,w,x_{m+1})} = x_0 \| \ \|^2 - 2\Phi_{\langle .,. \rangle}(w) - 2x_{m+1}$$

siendo $\Phi_{\langle .,. \rangle}$ el isomorfismo entre V y su espacio dual V^* definido por $\langle ., . \rangle$

$$V \ni w \mapsto \Phi_{\langle .,. \rangle}(w) = \langle w, . \rangle \in V^* \tag{2}$$

La cuádrica afín que se obtiene a partir de la forma cuadrática $q_{(x_0,w,x_{m+1})}$, viene descrita a través del subconjunto imagen

$$q^{-1}_{(x_0,v,x_{m+1})}(0) = \left\{ v \in V : x_0 \|v\|^2 - 2 \langle w, v \rangle - 2x_{m+1} = 0 \right\}$$

Si $x_0 = 0$, la forma cuadrática $q_{(x_0,v,x_{m+1})}$ se corresponde con la ecuación

$$\langle w, v \rangle + x_{m+1} = 0$$

que representa un hiperplano afín (cuando $v \neq 0$), el vacío (cuando $v = 0$ y $r \neq 0$), o el espacio total V (cuando $v = 0$ y $r = 0$).

Si $x_0 \neq 0$, la forma cuadrática $q_{(x_0,v,x_{m+1})}$ se corresponde entonces con la ecuación

$$\left\| v - x_0^{-1} w \right\|^2 = \left\| x_0^{-1} w \right\|^2 + 2\frac{x_{m+1}}{x_0}$$

que representa en general una $(m-1)$-esfera con centro $x_0^{-1} w \in V$ y radio R -respecto de $\langle ., . \rangle$- cuyo valor al cuadrado es

$$R^2 = \left\| x_0^{-1} w \right\|^2 + 2\frac{x_{m+1}}{x_0}$$

Así pues, en nuestro espacio $\mathbb{P}(\widehat{V})$ de $(m-1)$-esferas generalizadas, se incluyen las esferas de radio imaginario o real, y en particular las de radio nulo. Obsérvese que el carácter imaginario, real o nulo del radio de una $(m-1)$-esfera generalizada $[q] \in \mathbb{P}(\widehat{V})$ está definido sin ambigüedad, independientemente de la forma cuadrática q que la represente y de la métrica $\langle .,. \rangle$ que hayamos elegido en la estructura conforme.

Si denotamos por $\overline{V}$ a la familia de esferas $\left[q_{(x_0,w,x_{m+1})}\right] \in \mathbb{P}(\widehat{V})$ de radio nulo, es claro que ésta viene descrita por la ecuación

$$2x_0x_{m+1} + \|w\|^2 = 0$$

y constituye una cuádrica de $\mathbb{P}(\widehat{V})$.

Cada métrica conforme $\langle .,. \rangle \in \mathcal{C}$ en el espacio inicial V define en el espacio $\widehat{V}$ de sus esferas, una métrica ρ de tipo Lorentz, por medio de la siguiente definición: si $q \in \widehat{V}$ con $q = k\| \quad \|^2 - 2q_1 - 2q_0$,

$$\rho(q,q) = \langle q_1, q_1 \rangle + 2kq_0 \tag{3}$$

siendo $\langle q_1, q_1 \rangle$ el producto dado por la métrica dual de $\langle .,. \rangle$ en el espacio V^* (de modo que la identificación $\Phi_{\langle .,. \rangle}$ de [2] es isométrica, y el ángulo entre dos hiperplanos, como elementos del dual V^*, coincide con el formado por sus respectivas direcciones ortogonales en V).

Obsérvese que para todo punto $v \in V$ en la intersección de dos $(m-1)$-esferas $[q], [q'] \in \mathbb{P}(\widehat{V})$, representadas por $(x_0, w, x_{m+1}), (x'_0, w', x'_{m+1}) \in \mathbb{R} \times V \times \mathbb{R}$, los vectores $x_0v - w$ y $x'_0v - w'$ de V están en la dirección ortogonal al espacio tangente en v de las esferas $[q]$ y $[q']$ respectivamente. Un sencillo cálculo demuestra que el producto de tales vectores es

$$\langle x_0v - w, x'_0v - w' \rangle = \langle w, w' \rangle + x_0x'_{m+1} + x'_0x_{m+1} = \rho(q,q')$$

De este modo, la correspondiente métrica ρ en $\widehat{V}$ asociada a la métrica $\langle .,. \rangle \in \mathcal{C}$, responde a la intuición geométrica, como ya se anunciaba en un principio, en el sentido de que a cada par de esferas que se intersecan le atribuye una medida para su ángulo de corte que coincide con la correspondiente al ángulo formado por sus direcciones ortogonales en V en cualquiera de los puntos de intersección.

Si dos respresentantes métricos de la estructura conforme $\mathcal{C}$ en V se relacionan a través de $\overline{\langle .,. \rangle} = e^{2r} \langle .,. \rangle$, las métricas inducidas en $\widehat{V}$ resultan ser también conformemente equivalentes, y el factor de proporción entre ellas viene dado por

$$\rho_{\overline{\langle .,. \rangle}} = e^{-2r}\rho_{\langle .,. \rangle}$$

Es claro entonces que en el espacio vectorial $\widehat{V}$, cuyas direcciones $\mathbb{P}(\widehat{V})$ son las $(m-1)$-esferas generalizadas conformes, hay definida una estructura conforme lineal $[\rho] = \{e^{-2r}\rho : r \in \mathbb{R}\}$ de tipo Lorentz, que se hereda de forma natural de la estructura conforme inicial $\mathcal{C}$. El *cono de luz* que define tal estructura conforme $[\rho]$ en $\widehat{V}$

$$C = \left\{ q \in \widehat{V} : \rho(q) = 0 \right\}$$

da lugar a la cuádrica $\overline{V} \subset \mathbb{P}(\widehat{V})$, cuyos elementos se corresponden con las $(m-1)$-esferas de radio nulo.

Cada elemento $[q] \in \overline{V}$, con $q_2 \neq 0$, es una $(m-1)$-esfera en V cuyo radio es nulo, y puede identificarse con el punto v de V que representa al centro de tal esfera. Por lo tanto, existe una inclusión natural del espacio V en la cuádrica $\overline{V} \subset \mathbb{P}(\widehat{V})$,

$$\iota : V \hookrightarrow \overline{V} \tag{4}$$

resultado de considerar cada punto $v \in V$ como una esfera de radio nulo.

Si $\langle .,. \rangle \in \mathcal{C}$ es una métrica conforme, se tiene la siguiente expresión para la inclusión natural ι

$$\iota(v) = \left[\| \quad \|^2 - 2\Phi_{\langle .,. \rangle}(v) + \|v\|^2 \right]$$

siendo inmediato que ésta preserva las estructuras conformes, como cabía esperar.

El único punto de la cuádrica $\overline{V}$ que no representa un punto del espacio V es el correspondiente a la recta de formas cuadráticas afines $\{q = q_1 \in \widehat{V} : q_1 \in \mathbb{R}\}$, y recibe el nombre de *punto del infinito* ∞. La cuádrica $\overline{V} = V \cup \{\infty\}$ recibe el nombre de *compleción esférica de* $(V, \mathcal{C})$ y, como acabamos de ver, está dotada de una estructura conforme heredada de $(\widehat{V}, [\rho])$, que extiende naturalmente la estructura conforme lineal $\mathcal{C}$ de V.

Hemos probado por tanto que

Todo espacio conforme $(V, \mathcal{C})$ puede extenderse de forma única a la llamada compleción esférica $(\overline{V} = V \cup \{\infty\}, [\rho])$

Como última observación, se hace notar que en la compleción esférica $\overline{V}$ se halla naturalmente distinguido otro punto de naturaleza especial, el dado por la recta de formas cuadráticas $\{q = q_2 \in \widehat{V} : q_2 = k\langle .,. \rangle\}$. A través de la inclusión $\iota : V \hookrightarrow \overline{V}$, éste se corresponde con el origen vectorial de V, y recibe el nombre de *punto origen* O de la compleción esférica $\overline{V}$.

La inclusión $\iota : V \to \overline{V}$ permite entonces identificar, a través de su diferencial en el origen $\iota_* : V = T_O V \to T_O \overline{V}$, el espacio tangente a $\overline{V}$ en el punto origen O, $T_O \overline{V}$, con el espacio vectorial V, y sus correspondientes estructuras conformes lineales.

2.1.1 Expresiones en coordenadas rectangulares

Supongamos que tenemos previamente fijado en el espacio conforme lineal $(V, \mathcal{C})$ un sistema rectangular de coordenadas $(X_1, ..., X_m)$, asociado a una base ortonormal $\{e_1, ..., e_m\}$ para cierta métrica $\langle .,. \rangle \in \mathcal{C}$. En el caso particular de $\mathbb{R}^m$, existe un sistema coordenado rectangular natural que hace que la construcción que se desarrolla a continuación sea canónica. El isomorfismo dado por la métrica $\langle .,. \rangle$ identificando el espacio $\widehat{V}$ con $\mathbb{R} \times V \times \mathbb{R}$ mediante la fórmula [1], permite definir también un sistema coordenado para el espacio vectorial $\widehat{V}$: un elemento $q \in \widehat{V}$ tiene coordenadas $(x_0, x_1, ..., x_m, x_{m+1})$ cuando se corresponde con la ecuación

$$q(X_1, ..., X_m) = x_0 \sum_{i=1,...m} X_i^2 - 2 \sum_{i=1,...m} x_i X_i - 2x_{m+1}$$

Contando con la presencia de tal sistema de coordenadas en $\widehat{V}$, se obtienen las siguientes expresiones analíticas asociadas a los objetos anteriormente presentados.

(i) La métrica ρ en $\widehat{V}$ asociada a $\langle .,. \rangle \in \mathcal{C}$, tiene la siguiente expresión matricial

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & I_m & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

es decir, se corresponde con la forma cuadrática

$$\sum_{i=1,\ldots m} x_i^2 + 2x_0 x_{m+1}$$

de modo que las nuevas coordenadas $(x_0, x_1, ..., x_m, x_{m+1})$ forman también un sistema rectangular para el espacio conforme lineal $(\widehat{V}, [\rho])$, identificándolo entonces con $(\mathbb{R}^{m+2}, [S])$.

(ii) La inclusión $\iota : V \hookrightarrow \overline{V} \subset \mathbb{P}(V)$ se corresponde con la expresión

$$\mathbb{R}^m \ni (X_1, ..., X_m) \mapsto \left[1 : X_1 : ... : X_m : -\frac{\sum X_i^2}{2} \right] \in \mathbb{P}^{m+1} \tag{5}$$

y es claro que los puntos origen e infinito de $\overline{V}$ son, respectivamente,

$$O = [1 : 0 : ... : 0]$$
$$\infty = [0 : ... : 0 : 1]$$

(iii) La cuádrica que constituye la complección esférica $\overline{V}$ en $\mathbb{P}(\widehat{V})$, puede identificarse con el corte del cono de luz C con el hiperplano afín

$$\Pi : x_0 - \frac{1}{2} x_{m+1} = 1$$

A través del cambio de variables en $\widehat{V}$

$$(y_0, y_1, ..., y_m, y_{m+1}) = (x_0 + \frac{1}{2} x_{m+1}, x_1, ..., x_m, x_0 - \frac{1}{2} x_{m+1}) \tag{6}$$

es claro que el hiperplano Π pasa a tener ecuación $y_{m+1} = 1$ y la intersección $C \cap \Pi$ responde ahora a la ecuación:

$$y_0^2 + \sum y_i^2 = 1$$

Las coordenadas $(y_0, y_1, \ldots, y_m) \equiv (y_0, y_1, \ldots, y_m, 1)$ hacen que la métrica ρ restringuida a vectores en la dirección de Π se corresponda con la forma cuadrática estándar

$$y_0^2 + \sum_{i=1,\ldots m} y_i^2$$

Por tanto, la complección esférica $\overline{V} \subset \mathbb{P}^{m+1}$, puede identificarse con $\mathbb{S}^m = C \cap \Pi$, la esfera m-dimensional en $\mathbb{R}^{m+1} = \Pi$, a través de

$$\Psi : \mathbb{S}^m \longrightarrow \overline{V} \subset \mathbb{P}^{m+1} \tag{7}$$
$$\Psi(y_0, y_1, \ldots, y_m) = \left[\frac{y_0+1}{2} : y_1 : \ldots : y_m : y_0 - 1\right]$$

y los puntos origen e infinito de $\overline{V}$ son entonces los puntos antipodales:

$$\begin{aligned} O &= (1, 0, ..., 0) \in \mathbb{S}^m \\ \infty &= (-1, 0, ..., 0) \in \mathbb{S}^m \end{aligned}$$

(iv) La identificación de $\overline{V}$ con $\mathbb{S}^m$ dada por Ψ, ofrece una nueva expresión para la inclusión $\iota : V \hookrightarrow \overline{V}$, a través de una aplicación $\mathbb{R}^m \hookrightarrow \mathbb{S}^m$ que responde a la fórmula

$$X = (X_1, \ldots X_m) \hookrightarrow \left(\frac{1 - \frac{1}{4}\|X\|^2}{1 + \frac{1}{4}\|X\|^2}, \frac{X_1}{1 + \frac{1}{4}\|X\|^2}, ..., \frac{X_m}{1 + \frac{1}{4}\|X\|^2}\right)$$

y ésta resulta ser la aplicación inversa de la proyección estereográfica (desde el punto $(-1, 0, ..., 0)$ sobre el hiperplano $y_0 = 1$), que como es sabido, es efectivamente una aplicación conforme.

Es más, su diferencial en el origen es la identidad, $T_O\mathbb{R}^m = \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m = T_O\mathbb{S}^m$, de modo que la identificación $\Psi : \mathbb{S}^m \longrightarrow \overline{V}$ tiene como diferencial en el origen la identidad $\Psi_* : T_O\mathbb{S}^m = \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^m = V = T_O\overline{V}$.

Como ya se comentaba anteriormente, es importante destacar que en el caso especial del espacio $\mathbb{R}^m$ con su estructura conforme natural, la construcción que se acaba de hacer es canónica, de modo que, el espacio de sus $(m-1)$-esferas generalizadas se corresponde con la proyectivización de $\mathbb{R}^{m+2} = \widehat{\mathbb{R}^m}$ y su complección esférica es la esfera m-dimensional $\mathbb{S}^m = \overline{\mathbb{R}^m}$, con la estructura conforme usual.

2.2 Referencias de $\overline{V}$

La introducción de la complección esférica $\overline{V}$ como herramienta alternativa para el estudio de un espacio conforme euclídeo $(V, \mathcal{C})$, en la que el espacio inicial ha sido completado con el punto del infinito, va a dar lugar a una noción de referencias conformes más amplia que la tradicionalmente presentada, englobando en ellas a las clásicas referencias lineales del espacio conforme $(V, \mathcal{C})$.

Vimos con anterioridad que la presencia de unas coordenadas rectangulares del espacio vectorial conforme $\left(V, e^{2r}\langle ., . \rangle\right)$ daban lugar a unas coordenadas de $\widehat{V}$ en las que la matriz

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & I_m & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

se correspondía con una forma cuadrática representante de la estructura conforme lineal $[\rho]$ inducida en $\widehat{V}$. Existen otras referencias en $\widehat{V}$ que comparten tal propiedad y que van a ser objeto de nuestro interés.

En general, una referencia del espacio vectorial $\widehat{V}$, formada por los elementos $\{\widehat{A}_0, \widehat{A}_1, ..., \widehat{A}_m, \widehat{A}_{m+1}\}$, es tal que la estructura conforme lineal $[\rho]$ tiene como representante a la métrica de matriz S en la base $\{\widehat{A}_i\}$, cuando los vectores que la forman cumplen las condiciones siguientes:

- $\widehat{A}_0$ y $\widehat{A}_{m+1}$ son dos puntos arbitrarios del cono de luz $C \subset \widehat{V}$
- $\widehat{A}_1, ..., \widehat{A}_m$ forman una base rectangular del espacio $\Pi_{A_0 A_{m+1}}$ ortogonal común a $\widehat{A}_0$ y $\widehat{A}_{m+1}$
- con la condición de compatibilidad:

$$\rho(\widehat{A}_0, \widehat{A}_{m+1}) = \rho(\widehat{A}_i, \widehat{A}_i) \; \forall i = 1, ..., m$$

Es claro que $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ la referencia $\{\lambda\widehat{A}_0, \lambda\widehat{A}_1, ..., \lambda\widehat{A}_m, \lambda\widehat{A}_{m+1}\}$ está en las mismas condiciones.

Toda referencia $\{\widehat{A}_0, \widehat{A}_1, ..., \widehat{A}_m, \widehat{A}_{m+1}\}$ de $\widehat{V}$ puede verse presentada de manera alternativa como un isomorfismo lineal

$$\begin{array}{rcl} \breve{A} : \mathbb{R}^{m+2} & \longrightarrow & \widehat{V} \\ e_i & \longrightarrow & \widehat{A}_i \end{array}$$

que hace corresponder la estructura conforme $[\rho]$ en $\widehat{V}$ con la generada por la matriz S en $\mathbb{R}^{m+2} = \widehat{\mathbb{R}^m}$. Es claro entonces que este dará lugar a un difeomorfismo conforme entre las cuádricas subyacentes, esto es $A : \overline{\mathbb{R}^m} \to \overline{V}$. Si se hace uso de la identificación existente entre $\overline{\mathbb{R}^m}$ y $\mathbb{S}^m$, dada a través de Ψ en [7], A puede verse entonces como un difeomorfismo conforme de la forma

$$\begin{array}{rcl} A : \mathbb{S}^m & \longrightarrow & \overline{V} \\ (x_0, ..., x_m) & \longrightarrow & A\,(x_0, ..., x_m) \end{array}$$

definido por

$$A\,(x_0, ..., x_m) = \left[\frac{x_0 + 1}{2}\widehat{A}_0 + x_1\widehat{A}_1 + ... + x_m\widehat{A}_m + (x_0 - 1)\,\widehat{A}_{m+1}\right]$$

De manera inmediata se comprueba que dadas dos referencias $\widehat{A}$ y $\widehat{A}'$ de $\widehat{V}$

$$A = A' : \mathbb{S}^m \longrightarrow \overline{V} \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}\backslash\{0\},, \; \widehat{A}' = \lambda\widehat{A}$$

Llamaremos *referencia de* $\overline{V}$ a cada una de las clases $A = \{\lambda\widehat{A} : \lambda \in \mathbb{R}\backslash\{0\}\}$, siendo $\widehat{A}$ referencia de $(\widehat{V}, [\rho])$.

Por la observación anterior, cada referencia de $\overline{V}$ da lugar a un único difeomorfismo conforme $A : \mathbb{S}^m \to \overline{V}$. Pero es más, el hecho de que los difeomorfismos conformes de la esfera $\mathbb{S}^m$ se obtengan siempre a partir de transformaciones de

$\mathbb{R}^{m+2}$ preservando la matriz S, demuestra que todo difeomorfismo conforme entre las variedades $\mathbb{S}^m$ y $\overline{V}$ viene dado por una referencia $\widehat{A} : \mathbb{R}^{m+2} \to \widehat{V}$. De este modo, de manera equivalente, llamamos *referencia de* $\overline{V}$ a todo difeomorfismo conforme $A : \mathbb{S}^m \to \overline{V}$.

Obsérvese ahora que dado el difeomorfismo conforme $A : \mathbb{S}^m \to \overline{V}$,

$$
\begin{aligned}
&A(1,0,...0) = [\widehat{A}_0] = A_0 \\
&A(-1,0,...0) = [\widehat{A}_{m+1}] = A_{m+1} \\
&A_* = dA(1,0,..0) : \mathbb{R}^m = T_{(1,0...)}\mathbb{S}^m \to T_{A_0}\overline{V}
\end{aligned}
$$

La elección de un elemento $\widehat{A}'_0 \in \widehat{V}$ generador de la recta A_0 (de modo que $\widehat{A}'_0 = \lambda \widehat{A}_0$ para cierto $\lambda \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$), da lugar a la secuencia de identificaciones

$$T_{A_0}\overline{V} \simeq \frac{T_{\widehat{A}'_0}C}{< \widehat{A}'_0 >} \simeq \Pi_{A_0 A_{m+1}}$$

puesto que tenemos la descomposición en suma directa $T_{\widehat{A}'_0}C = \Pi_{A_0A_{m+1}} \oplus < \widehat{A}'_0 >$, siendo $\Pi_{A_0A_{m+1}}$ el espacio ortogonal común a las rectas A_0 y A_{m+1}. Ahora, es claro que

$$
\begin{aligned}
A_*(e_i) &= \frac{d}{dt}\{A(\cos t.e_0 + \sin t.e_i)\} = \frac{d}{dt}\left\{[\cos t.\widehat{A}_0 + \sin t.\widehat{A}_i]\right\} = \\
&= \frac{d}{dt}\left\{[\cos t.\lambda\widehat{A}_0 + \sin t.\lambda\widehat{A}_i]\right\} \simeq \lambda\widehat{A}_i = \widehat{A}'_i \in \Pi_{A_0A_{m+1}}
\end{aligned}
$$

Y por último, si tomamos en la recta A_{m+1} el único generador que verifica la propiedad

$$\rho(\widehat{A}'_0, \widehat{A}'_{m+1}) = \rho(\widehat{A}'_i, \widehat{A}'_i) \ \forall i = 1, ..., m$$

obtenemos precisamente el elemento $\widehat{A}'_{m+1} = \lambda\widehat{A}_{m+1}$. A través de este procedimiento se puede recuperar a partir del difeomorfismo $A : \mathbb{S}^m \to \overline{V}$ la referencia inicial $\{\widehat{A}_0, ..., \widehat{A}_{m+1}\}$, salvo constante. Es más, los datos necesarios para caracterizar una referencia en $\overline{V}$ son los equivalentes a fijar un punto origen A_0 y un punto infinito A_{m+1} en la complección esférica $\overline{V}$, y dar una base rectangular en el espacio $T_{A_0}\overline{V}$.

2.2.1 Referencias especiales de $\overline{V}$

El punto origen O desempeña un destacado papel en la complección esférica, de modo que vamos a estar interesados en destacar una clase especial de referencias de $\overline{V}$, la formada por aquellas referencias que preservan el citado origen. Recibirá el nombre de *referencia especial de* $\overline{V}$ todo difeomorfismo conforme $A : \mathbb{S}^m \longrightarrow \overline{V}$ que cumpla la condición adicional

$$A([1:0:...:0]) = O_V \in \overline{V}$$

o de manera equivalente, aquellas referencias del tipo $A = \left\{\lambda\{\widehat{A}_0, ..., \widehat{A}_{m+1}\} : \lambda \in \mathbb{R}\right\}$ con $[\widehat{A}_0] = O_V \in \overline{V}$.

Toda referencia especial de $\overline{V}$, $A : \mathbb{S}^m \longrightarrow \overline{V}$, tiene asociada de manera natural una referencia (lineal) conforme del espacio vectorial V. Es claro que la diferencial en al origen del difeomorfismo A da lugar a una isomorfismo conforme entre los espacios tangentes de los orígenes en las correspondientes variedades, $dA(O) : T_O\mathbb{S}^m \longrightarrow T_O\overline{V}$. Como ya vimos anteriormente, la inclusión $\iota : V \hookrightarrow \overline{V}$ permite identificar el espacio tangente a la complección esférica en el punto origen con el espacio vectorial conforme inicial, tendremos pues que la diferencial en el origen viene dada mediante un isomorfismo conforme

$$A_* : \mathbb{R}^m \longrightarrow V$$

A través de este procedimiento, toda referencia especial A de $\overline{V}$ tiene asociada mediante su diferencial A_* una referencia conforme A_* de V.

Una clase aún más particular de referencias es la formada por aquellas que cumplan la condición adicional de fijar también el otro punto distinguido de la complección esférica, el punto del infinito ∞ (es decir, a la condición $A_0 = O_V$ se le añade $A_{m+1} = \infty_V$). Haciendo uso de la identificación $\mathbb{S}^m \backslash \{\infty\} = \mathbb{R}^m$ y $\overline{V} \backslash \{\infty\} = V$, tenemos la correspondiente restricción

$$A|_{\mathbb{R}^m} : \mathbb{R}^m \longrightarrow V$$

que define un difeomorfismo conforme entre las variedades $\mathbb{R}^m$ y V, preservando el origen vectorial de ambos espacios. Es un resultado conocido que en estas condiciones la aplicación $A|_{\mathbb{R}^m}$ es, de hecho, un isomorfismo lineal y conforme; se trata por tanto de una referencia conforme lineal usual del espacio V, que podemos identificar con la referencia especial A, donde el punto ∞ es preservado. Como cabía esperar, la referencia conforme lineal $A_* : \mathbb{R}^m \longrightarrow V$ que se asocia a $A : \overline{\mathbb{R}^m} \longrightarrow \overline{V}$ como referencia especial (por medio de su diferencial), coincide con la propia referencia, en coherencia con tal identificación.

2.2.2 Grupos asociados a las referencias

Los grupos de Lie asociados a la familia de referencias que acabamos de definir para la complección esférica, van a venir dados a través de los difeomorfismos conformes de la esfera m-dimensional $\mathbb{S}^m$ (complección esférica de $\mathbb{R}^m$). Sea

$$G = \{g : \mathbb{S}^m \longrightarrow \mathbb{S}^m / \ g \text{ difeomorfismo conforme}\}$$

este grupo es esencialmente $O(m+1,1)_I$, la componente conexa de la identidad del grupo de matrices

$$\left\{A \in GL(m+2; \mathbb{R}) : A^T S A = S\right\}$$

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & I_m & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

donde la correspondencia entre sus elementos $G \ni g \longleftrightarrow A \in O(m+1,1)_I$ está dada por el difeomorfismo $\Psi : \mathbb{S}^m \to \overline{\mathbb{R}^m}$ de [7], a través de la fórmula

$$\Psi \circ g\,(x_0, ..., x_m) = [A \circ \Psi\,(x_0, ..., x_m)]\,, \forall\,(x_0, ..., x_m) \in \mathbb{S}^m \tag{8}$$

Las referencias especiales tienen asociado el subgrupo H de G de isotropía para el origen $O \in \mathbb{S}^m$. H se corresponde entonces con el subgrupo de matrices de $O(m+1,1)_I$ tales que $A\,(1,0,..,0) = (r^{-1}, 0, ..., 0)$ para algún $r \in \mathbb{R}^+$, es decir, las matrices de la forma

$$\begin{pmatrix} r^{-1} & \alpha & -\frac{\alpha\alpha^T}{2}r \\ 0 & R & -rR\alpha^T \\ 0 & 0 & r \end{pmatrix}, , r \in \mathbb{R}^+, R \in O(m), \alpha \in \mathbb{R}^{m*}$$

A través de la identificación de tal matriz con el elemento $(rR, r\alpha) \in CO(m) \times \mathbb{R}^{m*}$, H resulta ser esencialmente el grupo $CO(m) \rtimes \mathbb{R}^{m*}$ producto semidirecto. La operación que asocia de manera natural a cada referencia especial $A : \mathbb{S}^m \longrightarrow \mathbb{S}^m$ en H, una referencia conforme lineal en $CO(m)$, $A_* : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^m$ (mediante su diferencial en el origen), se corresponde con la proyección natural

$$\Pi_{CO(m)}\,(rR, r\alpha) = rR,\ \forall\,(rR, r\alpha) \in CO(m) \rtimes \mathbb{R}^{m*}$$

Por último, el caso más restrictivo nos lleva a aquellas referencias especiales que también preservan el punto del infinito, y éstas tienen asociado el subgrupo cuyos elementos son de la forma

$$\begin{pmatrix} r^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & R & 0 \\ 0 & 0 & r \end{pmatrix} = (rR, 0) = rR \in CO(m)$$

Es claro que la proyección anterior actúa esencialmente como la identidad, tal como ya se vió en el caso general.

A nivel de álgebras de Lie, se tiene que las álgebras asociadas a tales grupos responden a las descomposiciones siguientes

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{o}(m+1,1) = \mathbb{R}^m \oplus \mathfrak{co}(m) \oplus \mathbb{R}^{m*} = \mathbb{R}^m \oplus \mathfrak{h}$$

$$\mathfrak{o}(m+1,1) \ni \begin{pmatrix} -r & \alpha & 0 \\ v & R & -\alpha^T \\ 0 & -v^T & r \end{pmatrix} = (v, R + rI_m, r\alpha) \in \mathbb{R}^m \oplus \mathfrak{co}(m) \oplus \mathbb{R}^{m*}$$

Un resultado que interesa destacar ahora para el desarrollo posterior, es el siguiente,

Remark 1 *Si tenemos una curva g_t en G por el origen, con velocidad inicial dada por el elemento $X \in \mathfrak{g} = \mathbb{R}^m \oplus \mathfrak{h}$, entonces,*

$$pr_{\mathbb{R}^m}(X) = \left.\frac{d}{dt}\right|_0 \{g_t(O)\} \in T_O\mathbb{S}^m = \mathbb{R}^m$$

Proof. La curva $g_t \in G$ se corresponde con una curva $A_t \in O(m+1,1)$, determinada por la condición (8), y tal que

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_0 \{A_t\} = X = \begin{pmatrix} -r & \alpha & 0 \\ v & R & -\alpha^T \\ 0 & -v^T & r \end{pmatrix}$$

Puesto que la diferencial en el origen del difeomorfismo Ψ (7), el la identidad $\Psi_* = id : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$, se tiene la secuencia de igualdades

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_0 \{g_t(O)\} = \Psi_* \left.\frac{d}{dt}\right|_0 \{g_t(O)\} = \left.\frac{d}{dt}\right|_0 \{\Psi \circ g_t(O)\} =$$

$$= \left.\frac{d}{dt}\right|_0 \{A_t \circ \Psi(O)\} = \left.\frac{d}{dt}\right|_0 \{[A_t\,(1,0,...,0)]\} = \left[\left.\frac{d}{dt}\right|_0 \{A_t\}\,(1,0,...,0)\right] =$$

$$= [\;]_* \,(X\,(1,0,...,0)) = [\;]_* \,(-r, v_1, ..., v_m, 0) = (v_1, ..., v_m) = pr_{\mathbb{R}^m}(X)$$

■

3 Variedades con estructura conforme Riemanniana

El procedimiento desarrollado en la sección anterior para espacios conformes euclídeos puede ser trasladado de manera inmediata al ámbito de las variedades conformes Riemannianas $(M, \mathcal{C})$. En este caso, la presencia de una estructura conforme Riemanniana sobre la variedad diferenciable M va a permitir completar el fibrado tangente de M para dar lugar a un nuevo fibrado F, que apoya sobre cada punto de la variedad base una "esfera tangente", y que recibe el nombre de fibrado tangente esférico. Análogamente al caso lineal, la estructura conforme inicial presente en el fibrado tangente de la variedad M se extiende de manera natural a todo el fibrado esférico.

De este modo, la estructura de una variedad conforme Riemanniana $(M, \mathcal{C})$ va a poder ser estudiada de manera alternativa a través del nuevo fibrado F, donde los espacios vectoriales tangentes han sido sustituidos por sus complecciones esféricas. La gran ventaja que supone el trabajar en el fibrado tangente esférico F es que la conexión normal de Cartan, canónicamente definida para toda variedad conforme, adquiere en este ámbito una presentación muy natural. Veremos que la noción de conexión de Cartan responde a la idea de transporte paralelo de esferas tangentes de la variedad M preservando su estructura conforme, de manera totalmente análoga a la correspondencia entre la noción de conexión (lineal) de Levi-Civita con el transporte paralelo de espacios tangentes preservando la estructura métrica.

3.1 Fibrado tangente esférico y fibrados asociados

Sea M una variedad diferenciable de dimensión m, y $\mathcal{C} = \{e^{2f}g : f \in C^\infty(M,\mathbb{R})\}$ una estructura conforme Riemanniana sobre M.

Como es sabido, la estructura conforme $\mathcal{C}$ define sobre cada espacio tangente de la variedad M una estructura conforme lineal (euclídea), con la correspondiente condición de diferenciabilidad. Por tanto, dado un punto $x \in M$, el espacio vectorial tangente T_xM y su estructura conforme permiten distinguir en el espacio vectorial de formas cuardáticas afines de T_xM el espacio de sus $(m-1)$-esferas conformes generalizadas, $\widehat{T_x}M$, tal como hemos visto en la sección anterior, y a través de la proyectivización del subespacio de esferas de radio nulo, pasar a la definición de su compleccion esférica $\overline{T_xM}$. En definitiva, todo espacio tangente T_xM puede sumergirse de forma natural en su complección esférica, dando lugar a una esfera tangente $\overline{T_xM} = T_xM \cup \{\infty\}$ que cuenta con la presencia de una estructura conforme prolongación de la existente en T_xM. El fibrado $F = \bigcup_{x\in M} \overline{T_xM}$ que se obtiene de este modo recibe el nombre de *fibrado tangente esférico* de $(M,\mathcal{C})$.

La inclusión natural [5] que se tiene al nivel de las fibras, $\iota_x : T_xM \longrightarrow \overline{T_xM}$, $\forall x \in M$, da lugar a una aplicación entre fibrados que permite considerar al fibrado tangente TM sumergido en el fibrado esférico F

$$\iota : TM \hookrightarrow F$$

Como ya vimos en la sección anterior, la complección esférica de todo espacio vectorial conforme es una esfera doblemente punteada, en el sentido de que se hallan en ella distinguidos dos puntos de naturaleza espacial: el punto origen O y el punto del infinito ∞. Este resultado se manifiesta a través de la existencia natural de dos secciones distinguidas en el fibrado $F \to M$.

- $\sigma_O : M \to F$, tal que $\sigma_O(x) = O_x \in \overline{T_xM}$
- $\sigma_\infty : M \to F$, tal que $\sigma_\infty(x) = \infty_x \in \overline{T_xM}$

La introducción de la complección esférica de una espacio conforme, daba lugar a una noción más general de referencia en la estructura conforme (como difeomorfismos entre la complección esférica y $\mathbb{S}^m$), en la cual están incluidas las referencias lineales conformes usuales del espacio vectorial. Por tanto, en la variedad conforme $(M,\mathcal{C})$ también el fibrado de referencias lineales conformes $CO(M)$ va a verse extendido a un fibrado de referencias asociado al fibrado tangente esférico F.

En primer lugar, sea P el *fibrado de las referencias* (en el sentido de la sección anterior) de las complecciones esféricas de los espacios tangentes de la variedad, es decir,

$$P = \{p : \mathbb{S}^m \longrightarrow \overline{T_xM} : p \text{ difeomorfismo conforme } \overline{T_xM}\}$$

Es claro que P tiene estructura de fibrado principal con grupo estructural $G = O(m+1,1)_I$, que representa el grupo de difeomorfismos conformes de la esfera $\mathbb{S}^m$.

Por otra parte, aquellas referencias que cumplen con la condición adicional de preservar el punto distinguido del origen, dan lugar a un subfibrado Q de P, el llamado *fibrado de las referencias especiales*

$$Q = \{q : \mathbb{S}^m \to \overline{T_xM} \in P : q(O) = O_x\}$$

Éste es una H-reducción de P, siendo $H = CO(m) \ltimes \mathbb{R}^{m*}$, representando al subgrupo de isotropía de los difeomorfismos conformes que fijan el punto origen $O \in \mathbb{S}^m$.

Y en último lugar, aquellas referencias que preservan el punto origen y el punto del infinito en las esferas, dan lugar a un subfibrado que está identificado con el fibrado $CO(M)$ de referencias conformes de M. Por tanto, $CO(M)$ aparece como una reducción del fibrado P (y de Q) de grupo estructural $CO(m)$.

Recordemos ahora que toda referencia especial de la compleccion esférica daba lugar a una referencia lineal conforme del espacio vectorial subyacente, a través de la diferencial en el origen. En el caso de nuestra variedad conforme M, este hecho se traduce en que tenemos una proyección natural de $Q \to CO(M)$. Se cumple además que restringuida al subfibrado $CO(M)$ es la identidad. Es más, con tal proyección, $Q \to CO(M)$ tiene estrucutra de $\mathbb{R}^{m*}$-fibrado principal, con una sección natural dada por la inclusión.

$$\begin{array}{ccccc} P & \hookleftarrow & Q & \underset{\longrightarrow}{\hookleftarrow} & CO(M) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ M & = & M & = & M \end{array}$$

Por otra parte es claro que si consideramos el espacio homogéneo G/H por ser H un grupo de isotropía para el grupo G que actúa transitivamente en $\mathbb{S}^m$ tenemos que $G/H \approx \mathbb{S}^m$. El grupo G actúa de por la derecha en G/H a través del producto de modo que se puede considerar el fibrado asociado $P \times_G (G/H)$. Éste fibrado asociado es naturalmente isomorfo al fibrado tangente esférico F, sin más que hacer uso de la correspondencia

$$P \times_G (G/H) \ni p \times_G (gH) \longleftrightarrow p \circ g(O) \in \overline{T_xM}$$

(ésta no depende del representnate elegido puesto que si tenemos otro, será de la forma $p\overline{g} \times_G (\overline{g}^{-1}gH)$ para cierto $\overline{g} \in G$, y es claro que $p\overline{g} \circ (\overline{g}^{-1}g)(O) = p \circ g(O)$). Obsérvese que la sección natural que tiene el fibrado asociado $P \times_G (G/H)$ definida por $x \to q \times_G (eH), , q \in Q_x$, se corresponde con la sección origen σ_O del fibrado tangente esférico.

3.2 Ejemplo paradigmático

Tomemos como variedad M el espacio homogéneo $G/H \approx \mathbb{S}^m$ con su estructura conforme natural, siendo $G = O(m+1,1)_I$, el grupo de transformaciones conformes de $\mathbb{S}^m$, y $H = CO(m) \ltimes \mathbb{R}^{m*}$ el grupo de isotropía del punto origen O.

Recordemos que $\mathbb{S}^m$ es la complección esférica de $\mathbb{R}^m$, y que se halla canónicamente sumergida en el hiperplano afín $\Pi : x_0 - \frac{1}{2}x_{m+1} = 1$ de $\mathbb{R}^{m+2}$, tal como se detalla en la sección 2.1.1., a través de la correspondencia

$$\mathbb{S}^m \ni (x_0, x) \longleftrightarrow \left(\frac{x_0+1}{2}, x, x_0 - 1\right) \in \Pi \subset \mathbb{R}^{m+2}$$

Esto hecho justifica que identifiquemos el espacio tangente a $\mathbb{S}^m$ en su punto (x_0, x) con el subespacio vectorial m-dimensional de $\mathbb{R}^{m+2}$ en la dirección vectorial de Π (de ecuación $x_0 - \frac{1}{2}x_{m+1} = 0$), definido por

$$T_{(x_0,x)}\mathbb{S}^m = \left\{ (\frac{1}{2}X_0, X, X_0) \in \mathbb{R}^{m+2} : X_1x_1 + ... + X_mx_m + X_0x_0 = 0 \right\}$$

Como en este caso contamos con la presencia en la estructura conforme de una métrica canónica ρ, el espacio de esferas conformes $\widehat{T}_{(x_0,x)}\mathbb{S}^m$ está identificado con $\mathbb{R} \times T_{(x_0,x)}\mathbb{S}^m \times \mathbb{R}$ a través de

$$(u_0, u, u_{m+1}) \longleftrightarrow q, , q(\frac{1}{2}X_0, X, X_0) = u_0(X_0^2 + \|X\|^2) - 2u^TX - 2u_{m+1}$$

Elegimos el punto $\widehat{O}_{(x_0,x)} = \left(\frac{x_0+1}{2}, x, x_0 - 1\right) \in \mathbb{R}^{m+2}$ para que defina el origen de la esfera tangente en (x_0, x)

$$O_{(x_0,x)} = [\widehat{O}_{(x_0,x)}] = [\frac{x_0+1}{2} : x_1 : ... : x_m : x_0 - 1] = (x_0, x)$$

respondiendo a la intuición geométrica de identificarlo con el propio punto base $(x_0, x) \in \mathbb{S}^m$. Tomamos también el punto $\widehat{\infty}_{(x_0,x)} = \frac{1}{2}\left(\frac{x_0-1}{2}, x, x_0 + 1\right) \in \mathbb{R}^{m+2}$ para definir el punto del infinito de la esfera tangente en (x_0, x)

$$\infty_{(x_0,x)} = [\widehat{\infty}_{(x_0,x)}] = [\frac{x_0-1}{2} : x_1 : ... : x_m : x_0 + 1] = (-x_0, -x)$$

en respuesta a l aintuición de hacerlo corresponder con el antipodal del punto base $(x_0, x) \in \mathbb{S}^m$. Entonces, tal elección lleva a la correspondencia automática

$$\mathbb{R} \times T_{(x_0,x)}\mathbb{S}^m \times \mathbb{R} \simeq < \widehat{O}_{(x_0,x)} > \oplus T_{(x_0,x)}\mathbb{S}^m \oplus < \widehat{\infty}_{(x_0,x)} > = \mathbb{R}^{m+2}$$

$$(u_0, u, u_{m+1}) \longleftrightarrow u_0\widehat{O}_{(x_0,x)} + u + u_{m+1}\widehat{\infty}_{(x_0,x)}$$

definiendo un isomorfismo natural entre $\widehat{T}_{(x_0,x)}\mathbb{S}^m$ y $\mathbb{R}^{m+2}$ que preserva las estructuras conormes. A nivel de las cuádricas subyacentes, da lugar a una identificación canónica de la esfera tangente $\overline{T_{(x_0,x)}\mathbb{S}^m}$ con la esfera m-dimensional $\mathbb{S}^m$.

Por tanto, con las identificaciones naturales que acabamos de desarrollar, los fibrados asociados a la variedad conforme $\mathbb{S}^m$ son los siguientes:

(i) El *fibrado tangente esférico* F de la esfera $m-$dimensional $\mathbb{S}^m$ es esencialmente

$$F = \mathbb{S}^m \times \mathbb{S}^m \stackrel{pr_1}{\to} \mathbb{S}^m$$

donde las dos secciones distinguidas son:

$$\sigma_O(x_0,x) = O_{(x_0,x)} = ((x_0,x),(x_0,x)) \in \mathbb{S}^m \times \mathbb{S}^m$$
$$\sigma_\infty(x_0,x) = \infty_{(x_0,x)} = ((x_0,x),-(x_0,x)) \in \mathbb{S}^m \times \mathbb{S}^m$$

(ii) El *fibrado de referencias* P es tal que sobre cada punto $(x_0,x) \in \mathbb{S}^m$ apoya la fibra formada por difeomorfismos conformes de $\mathbb{S}^m$ en $\mathbb{S}^m = \bar{T}_{(x_0,...,x_m)}\mathbb{S}^m$, es decir, elementos del grupo $G = O(m+1,1)_I$. De modo que P es el fibrado producto

$$P = \mathbb{S}^m \times G \stackrel{pr_1}{\to} \mathbb{S}^m$$

(iii) El *fibrado de referencias especiales* Q apoya en cada punto $(x_0,x) \in \mathbb{S}^m$ la fibra formada por difeomorfismos conformes de $\mathbb{S}^m$ que llevan el origen $O = (1,0,...,0) \in \mathbb{S}^m$ al origen $O_{(x_0,x)} = (x_0,x) \in \mathbb{S}^m$, de modo que $Q = G \simeq O(m+1,1)_I$

$$\begin{array}{rcl} Q = G & \to & \mathbb{S}^m \\ g & \to & g(1,0,...,0) \end{array}$$

Obsérvese que en este caso particular, en que trabajamos con el espacio homogéneo $\mathbb{S}^m = G/H$, cuenta también con la peculiaridad de que el fibrado tangente esférico es naturalmente un fibrado producto, y por tanto, hay un paralelismo absoluto que nos permite transportar naturalmente la esfera conforme tangente apoyada en un punto $(x_0,...,x_m) \in \mathbb{S}^m$ a la apoyada en cualquier otro punto de la variedad $(x_0(t),...,x_m(t)) \in \mathbb{S}^m$

$$((x_0,...,x_m),(X_0,...,X_m)) \to ((x_0(t),...,x_m(t)),(X_0,...,X_m))$$

Remark 2 *Sea $t \to x(t) \in \mathbb{S}^m$ una curva en la variedad. A través de la sección natural origen σ_O, ésta se eleva a una curva en el fibrado tangente esférico $F = \mathbb{S}^m \times \mathbb{S}^m$*

$$t \to \sigma_O(x(t)) = (x(t),x(t)) \in \mathbb{S}^m \times \mathbb{S}^m$$

El transporte natural en $F = \mathbb{S}^m \times \mathbb{S}^m$ nos permite trasladar paralelamente (a lo largo de $x(t)$) cada elemento $(x(t),x(t)) \in \{x(t)\} \times \mathbb{S}^m$ hasta la fibra $F_{x(0)} = \{x(0)\} \times \mathbb{S}^m$, dando lugar a una curva $z(t)$ en el espacio tangente esférico $F_{x(0)}$, que es el llamado desarrollo de la curva *$x(t)$ en $F_{x(0)}$. Es claro que, en nuestro caso, el desarrollo de $x(t)$ es precisamente la curva $z(t)$*

$$t \to z(t) = (x(0),x(t)) \in \{x(0)\} \times \mathbb{S}^m$$

Es decir, el desarrollo de curvas asociado al transporte paralelo natural en $F = \mathbb{S}^m \times \mathbb{S}^m$ es tal que reproduce "exactamente" en la esfera tangente $\{x(0)\} \times \mathbb{S}^m$, la curva base de la variedad $\mathbb{S}^m$. Geométricamente, esta igualdad se corresponde con la siguiente idea: el transporte en el fibrado esférico $\mathbb{S}^m \times \mathbb{S}^m$ es tal que para desplazar a lo largo de una curva en la variedad la esfera tangente en un punto, se hace rodar la variedad base $\mathbb{S}^m$ sobre la esfera tangente, siguiendo el recorrido de la curva, y sin que haya deslizamiento alguno*, de este modo, la curva que se obtiene en la esfera tangente copia exactamente el mismo trazado de la curva inicial en la variedad base.*

Dada una curva en la variedad, es claro que su desarrollo en la esfera tangente viene descrito por la variación del punto origen en la esfera tangente sufrida durante el transporte a lo largo de la curva, por lo tanto, una consecuencia de la observación anterior es que tal transporte no preserva nunca los orígenes de las complecciones esféricas. No obstante, sí preserva su estructura conforme, de manera que este transporte puede describirse también en el ámbito de las referencias conformes, es decir, en el fibrado $P = \mathbb{S}^m \times G$. De este modo, si $(x, g) \in \mathbb{S}^m \times G$, entonces se traslada paralelamente (independientemente del camino seguido) al elemento $(x(t), g) \in \mathbb{S}^m \times G$. Como es ya conocido, el transporte paralelo en el fibrado principal P queda completamente descrito en el nivel infinitesimal, a través de su forma de conexión $\omega \in \Lambda^1(\mathbb{S}^m \times G, \mathfrak{g})$.

$$\omega_{(x,g)} \left(\left.\frac{d}{dt}\right|_0 (x(t), g(t)) \right) = \left(\lambda_{(x,g)}\right)_*^{-1} \left(\left.\frac{d}{dt}\right|_0 (x, g(t)) \right) =$$

$$= \left.\frac{d}{dt}\right|_0 g^{-1} g(t) = \lambda_{g^{-1}*}(g'(0))$$

$$\omega_{(x,g)} \left(x'(0), (\lambda_g)_* \exp X\right) = X \in \mathfrak{g}$$

Si estudiamos ahora la restricción de la forma de conexión ω al subfibrado de referencias especiales $Q = G$, que continúa describiendo totalmente el transporte paralelo de esferas tangentes, tenemos entonces una forma $\omega \in \Lambda^1(G, \mathfrak{g})$ que actúa del modo siguiente: si $g \in G_{x_0}$ (siendo $g(1, 0, ..., 0) = x \in \mathbb{S}^m$), y $X^{\#}(g) = \lambda_{g*} \exp X \in T_g G$ (para $X \in \mathfrak{g}$), entonces,

$$\omega_g(X^{\#}(g)) = \omega_g(\lambda_{g*} \exp X) = X$$

De modo que esta $\omega \in \Lambda^1(G, \mathfrak{g})$ resulta ser la conocida *forma de Maurer-Cartan* del grupo G, implícita en todo grupo de Lie, y que en el caso particular del grupo G de movimientos conformes $\mathbb{S}^m$, acabamos de ver que describe el transporte natural en el fibrado tangente esférico de $\mathbb{S}^m$.

Puesto que este transporte paralelo en $\mathbb{S}^m$ está definido por un paralelismo absoluto, éste no dependerá de la curva base por la cual tenga lugar el desplazamiento, la forma de conexión asociada ω tiene, por tanto, curvatura nula, y esto ocurre efectivamente con la conexión de Maurer-Cartan, respondiendo a la conocida ecuación de estrucutra

$$d\omega + \frac{1}{2}[\omega, \omega] = 0$$

3.3 Conexión normal de Cartan de una variedad conforme

El ejemplo que se acaba de desarrollar, paradigma de variedad diferenciable Riemanniana conforme, marca la pauta para generalizar esta idea y dar una definición de *transporte paralelo de esferas tangentes* en cualquier variedad Riemanniena conforme. De este modo, la conexión de Maurer-Cartan ω, versión infinitesimal del transporte de referencias especiales en $\mathbb{S}^m = G/H$, se verá a la par generalizada a toda variedad conforme, dando lugar a la noción de *conexión* *de Cartan*, ubicada en este caso en el fibrado principal de referencias especiales Q de la variedad. Al igual que en el caso métrico, una vez impuestas unas condiciones de normalización sobre el transporte paralelo, en toda variedad conforme Riemanniana hay una elección preferente de transporte de las esferas conformes, única, que es la correspondiente a la *conexión normal de Cartan* de la variedad conforme.

3.3.1 Transporte paralelo de esferas conformes

Sea $(M, \mathcal{C})$ una variedad conforme Riemanniana, con $F \to M$ el fibrado tangente esférico, $P \to M$ el fibrado de referencias esféricas, y $Q \to M$ el fibrado de referencias especiales. Es claro que todo transporte paralelo en F preservando la estructura conforme da lugar a un transporte paralelo en el fibrado de referencias P, con las correspondientes condiciones de compatibilidad con la acción del grupo G. A nivel infinitesimal, el transporte paralelo se describe a través de una conexión principal, es decir, de una 1-forma $\omega \in \Lambda^1(P, \mathfrak{g})$ verificando las condiciones siguientes $\forall p \in P$:

(*i*) $\omega_p(X^{\#}(p)) = X$, $\forall X \in \mathfrak{g}$

(*ii*) $R_g^* \omega = Ad_{g^{-1}} \omega$, $\forall g \in G$

(*iii*) $\ker \omega_p \oplus \mathcal{V}_p = T_p P$, con $\mathcal{V}_p$ el espacio vertical del fibrado P.

Hemos observado anteriormente que en el caso homogéneo $\mathbb{S}^m = G/H$ el llamado desarrollo de una curva en el fibrado tangente esférico, que describe el movimiento del origen O al desplazar la esfera tangente a lo largo de la curva, reproducía exactamente la curva base, respondiendo a una condición geométrica de no deslizamiento. En el caso general, la condición equivalente se formula únicamente a nivel inifinitesimal, ya que el desarrollo de la curva $x(t)$ en la variedad M se trata de una curva $z(t)$, con origen $O_{x(0)}$, en la fibra $F_{x(0)} = \overline{T_{x(0)}M}$, y las variedades M y $\overline{T_{x(0)}M}$ son en general de naturaleza distinta. Obsérvese no obstante que estas curvas tienen velocidades iniciales comparables, puesto que se tiene $x'(0) \in T_{x(0)}M$ y $z'(0) \in T_{O_{x(0)}}(\overline{T_{x(0)}M}) = T_{x(0)}M$ (por la inclusión $\iota : T_{x(0)}M \hookrightarrow \overline{T_{x(0)}M}$). De este modo, tiene sentido la condición

$$z'(0) = x'(0) \in T_{x(0)}M \tag{9}$$

y es la que llamamos *condición de no deslizamiento*, imponiéndosela al transporte natural de esferas en $(M, \mathcal{C})$. Esta condición está expresada en el artículo de Cartan a través de la identificación del punto de apoyo $x \in M$ de cada esfera tangente $\overline{T_x M}$ con el punto origen O_x de dicha esfera, de modo que en el transporte paralelo de esferas, el desplazamiento del origen es entonces equivalente al desplazamiento del punto base sobre la curva. Está equivalencia, a un nivel infinitesimal es exactamente la condición descrita en [9] referente a la coincidencia en las velocidades iniciales.

Como en el caso homogéneo, nos interesa el estudio de la forma de conexión ω asociada al transporte paralelo en su restricción a Q. Se tratará por tanto de una forma $\omega \in \Lambda^1(Q,\mathfrak{g})$, verificando la condición de no deslizamiento y tal que $\forall q \in Q$:

(i) $\omega_q(X^{\#}(q)) = X$, $\forall X \in \mathfrak{h}$

(ii) $R_g^*\omega = Ad_{g^{-1}}\omega$, $\forall g \in G$.

Proposition 3 *La condición de no deslizamiento [9] es equivalente a que la forma $\omega \in \Lambda^1(Q,\mathfrak{g})$, al descomponerse en factores $\omega = \omega_{-1} + \omega_{\mathfrak{h}} \in \Lambda^1(Q,\mathbb{R}^m \oplus \mathfrak{h})$, verifique para su componente $\omega_{-1} \in \Lambda^1(Q,\mathbb{R}^m)$, la identidad siguiente*

$$\omega_{-1} = \left(\Pi^Q_{CO(M)}\right)^* \theta^{CO(M)} \tag{10}$$

siendo $\theta^{CO(M)}$ la forma vertical natural del fibrado $CO(M)$.

Proof. Supongamos que tenemos la conexión $\omega \in \Lambda^1(Q,\mathfrak{g})$ describiendo un transporte paralelo en el fibrado esférico de la vareidad conforme M. Sea $\xi_q \in T_qQ$ la velocidad inicial de la curva $t \to q_t \in Q$, y sea $x_t = \Pi^Q_M(q_t) \in M$.

(i) En primer lugar calculemos $\omega_{-1}(\xi_q)$.

Todo elemento $q_t \in Q_{x_t}$ se transporta paralelamente a lo largo de la curva base x_t hasta dar lugar a un elemento $p_t \in Q_{x_0}$. Entonces,

$$\omega(\xi_q) = (\lambda_q)_*^{-1}\left(\left.\frac{d}{dt}\right|_0 \{p_t\}\right) = \left.\frac{d}{dt}\right|_0 \{(\lambda_q)^{-1}p_t\} = \left.\frac{d}{dt}\right|_0 \{g_t\}$$

siendo g_t la curva en G con origen en $e \in G$ tal que $p_t = q.g_t$, $\forall t$.
Por tanto,

$$\omega_{-1}(\xi_q) = pr_{\mathbb{R}^m}\left(\omega(\xi_q)\right) = pr_{\mathbb{R}^m}\left(\left.\frac{d}{dt}\right|_0 \{g_t\}\right) \in \mathbb{R}^m$$

Por una observación anterior, en el estudio del grupo $G \simeq O(m+1,1)$, se tiene

$$pr_{\mathbb{R}^m}\left(\left.\frac{d}{dt}\right|_0 \{g_t\}\right) = \left.\frac{d}{dt}\right|_0 \{g_t(O)\} \in T_O\mathbb{S}^m = \mathbb{R}^m$$

por tanto, será

$$\omega_{-1}(\xi_q) = \left.\frac{d}{dt}\right|_0 \{g_t(O)\}$$

(ii) Calculemos ahora $\left(\Pi^Q_{CO(M)}\right)^* \theta^{CO(M)}(\xi_q)$.

$$\left(\Pi^Q_{CO(M)}\right)^* \theta^{CO(M)}(\xi_q) = \theta^{CO(M)}\left(\Pi^Q_{CO(M)*}(\xi_q)\right) =$$

$$= \left(\Pi^Q_{CO(M)}(q)\right)^{-1}(\Pi^Q_{M*}(\xi_q)) = (q_*)^{-1}(\left.\frac{d}{dt}\right|_0 x_t)$$

Por lo tanto, la condición [10] del enunciado es equivalente a:

$$(q_*)^{-1}(\left.\frac{d}{dt}\right|_0 x_t) = \left.\frac{d}{dt}\right|_0 \{g_t(O)\}$$

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_0 x_t = \left.\frac{d}{dt}\right|_0 \{qg_t(O)\} = \left.\frac{d}{dt}\right|_0 \{p_t(O)\} \tag{11}$$

Es inmediato observar que la curva $p_t(O) \in \bar{T}_{x_0}M$ es precisamente el desarrollo $z(t)$ de x_t en la fibra $\bar{T}_{x_0}M$. En efecto, la curva $q_t g_t^{-1} \in P$ en el fibrado de referencias es elevación horizontal de x_t. Ahora, para toda t tenemos el elemento $\sigma(x_t) = O_{x_t} \in \bar{T}_{x_t}M$ y la referencia $q_t g_t^{-1}$ de $\bar{T}_{x_t}M$ de modo que $\sigma(x_t)$ tiene coordenadas

$$\left(q_t g_t^{-1}\right)^{-1} O_{x_t} = g_t q_t^{-1}(O_{x_t}) = g_t(O)$$

por lo tanto, por ser $q_t g_t^{-1} \in P$ curva horizontal con origen q, se tiene que el transporte paralelo de $\sigma(x_t)$ es

$$z(t) = qg_t(O) = p_t(O)$$

De modo que la equivalencia anterior [11] es justamente .

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_0 x_t = \left.\frac{d}{dt}\right|_0 z(t)$$

la condición de no deslizamiento ■

Por lo tanto, todo transporte paralelo natural conforme en M se corresponderá con una forma de conexión asociada $\omega \in \Lambda^1(Q, \mathfrak{g})$ verificando las condiciones:

(i) $\omega_q(X^{\#}(q)) = X, \forall X \in \mathfrak{h}$

(ii) $R_g^*\omega = Ad_{g^{-1}}\omega, \forall g \in G$

$(iii)'$ $\omega_{-1} = \left(\Pi_{CO(M)}^{Q}\right)^* \theta^{CO(M)}$.[1]

Remark 4 *Obsérvese que la componente* $\omega_{-1} \in \Lambda^1(Q, \mathbb{R}^m)$ *es horizontal (por la propiedad (i)), de modo que fijado un elemento* $q \in Q$*, es decir, fijada un referencia especial de la esfera tangente* $\overline{T_xM}$ *en* $x \in M$*,* $(\omega_{-1})_q$ *puede verse actuando sobre la variedad M,*

$$(\omega_{-1})_{q,T_xM} : T_xM \to \mathbb{R}^m$$

[1] En general, una conexión de Cartan en Q se define como una 1-forma $\omega \in \Lambda^1(Q, \mathfrak{g})$ verificando las condiciones (i), (ii) y

(iii) $\forall q \in Q$, $\omega_q : T_qQ \to \mathfrak{g}$ es un isomorfismo.

Es claro que condición $(iii)'$ que se impone en este caso lleva implícita la condición general (iii).

Por la proposición que acabamos de ver, la condición de no deslizamiento es equivalente a la siguiente identidad

$$(\omega_{-1})_{q,T_xM} = q_* : T_xM \to \mathbb{R}^m$$

Puesto que $q_* \in CO(M)$, *tenemos entonces que si* $(\omega_{-1})_{q,T_xM} = (\omega_1, ..., \omega_m)$, *entonces,*

$$ds^2 = \omega_1^2 + ... + \omega_m^2$$

define una métrica de la estructura conforme en T_xM.

3.3.2 Condiciones de normalización

Como se ha visto, las condiciones presentadas anteriormente $((i), (ii), (iii))$ son las que aparecen de manera natural en toda conexión que describa un transporte paralelo en las esferas tangentes, a continuación, se detallan otras condiciones especiales que se consideran óptimas para tal transporte (como es el caso de la simetría), y que distinguirán el modo más natural de transportar esferas en una variedad conforme.

Si tomamos como referencia al espacio homogéneo G/H, una característica adicional de la conexión natural (de Maurer-Cartan) comentada ya anteriormente, es que su curvatura es idéticamente nula. En general, una condición similar de anulación de curvatura no va a poder ser impuesta para una variedad conforme arbitraria $(M, \mathcal{C})$, puesto que ésta sería equivalente a exigir que el transporte entre dos puntos de la variedad no dependa del camino que los una, de modo que la topología de la variedad puede presentar claras obstrucciones a tal condición. No obstante, sí vamos a poder imponer otras condiciones naturales sobre la curvatura de la conexión, presentes en la conexión de Maurer-Cartan y más débiles que la anulación, aptas para cualquier variedad conforme. Éstas determinarán completamente una única conexión de Cartan: la llamada *conexión normal de Cartan* de la variedad conforme $(M, \mathcal{C})$.

En primer lugar, recordemos que *la curvatura* de una conexión, correspondiente a la variación experimentada en el transporte paralelo a lo largo de un camino cerrado infinitesimal sobre M, se manifiesta a través de la 2-forma horizontal $\Omega \in \Lambda^2(Q, \mathfrak{g})$, definida por la fórmula

$$\Omega = d\omega + \frac{1}{2}[\omega, \omega] \in \Lambda^2(Q, \mathfrak{g})$$

La descomposición del álgebra graduada $\mathfrak{g} = \mathbb{R}^m \oplus \mathfrak{h} = \mathbb{R}^m \oplus \mathfrak{co}(m) \oplus \mathbb{R}^{m*}$ da lugar a la descomposición del tensor curvatura en componentes $\Omega = (\Omega_{-1}, \Omega_0, \Omega_1)$, siendo

$$\begin{aligned}
\Omega_{-1} &= d\omega_{-1} + [\omega_0, \omega_{-1}] \\
\Omega_0 &= d\omega_0 + [\omega_1, \omega_{-1}] + \frac{1}{2}[\omega_0, \omega_0] \\
\Omega_1 &= d\omega_1 + [\omega_0, \omega_1]
\end{aligned}$$

En particular, la componente $\Omega_{-1} \in \Lambda^2(Q, \mathbb{R}^m)$ se denomina *la torsión de* ω. La elección de este nombre está motivada por el hecho de que éste es un operador análogo a la torsión usual en las conexiones lienales. Efectivamente, obsérvese que, de nuevo por la condición (i), si consideramos el $\mathbb{R}^{m*}$-fibrado principal $Q \to CO(M)$, los tensores ω_{-1}, ω_0 y Ω_{-1} son horizontales y dan lugar, por tanto, a tensores en $CO(M)$, verificando la fórmula siguiente:

$$(\Omega_{-1})_{q, T_{q_*}CO(M)} = d\theta^{CO(M)}_{q_*} + [(\omega_0)_{q, T_{q_*}CO(M)}, \theta^{CO(M)}_{q_*}]$$

siendo $\theta^{CO(M)}$ la forma vertical en $CO(M)$. Es claro, entonces, que el tensor $(\Omega_{-1})_{q, T_{q_*}CO(M)}$ responde a la definición usual de torsión en la G-estrucura $CO(M)$ para $(\omega_0)_{q, T_{q_*}CO(M)} : T_{q_*}CO(M) \to \mathfrak{co}(m)$.

Como ocurre en el caso de las variedades métricas y la conexión de Levi-Civita naturalmente definida en ellas, a la conexión de Cartan asociada al transporte natural de esferas tangentes de una variedad conforme $(M, \mathcal{C})$ se le exige la condición (compatible ya con cualquier variedad conforme) de tener *torsión nula*, es decir,

(iv) $\Omega_{-1} = 0$

Es claro que esta condición es intrínseca de la variedad, en el sentido de que no depende de la referencia especial $q \in Q$ que estemos considerando. En particular, el significado geométrico de la propiedad (iv) es que el transporte paralelo de la esfera tangente a lo largo de un camino cerrado infinitesimal sobre la variedad M, preserva el punto origen.

A continuación denotemos por $\Omega_0^0 \in \Lambda^2(Q, \mathbb{R})$ al tensor asociado al factor de escala (en $\mathbb{R}$) del álgebra conforme $\mathfrak{co}(m) = \mathbb{R} \oplus \mathfrak{o}(m)$ de la correspondiente componente $\Omega_0 \in \Lambda^2(Q, \mathfrak{co}(m))$ de la curvatura. A través de una rutinaria comprovación, se tiene que de nuevo la anulación simultánea de los tensores Ω_{-1} y Ω_0^0 es intrínseca a la variedad, es decir, no depende de la referencia de la esfera tangente $q \in Q$ que se considere. La interpretación geométrica se corresponde con la propiedad de que el transporte paralelo de la esfera tangente a lo largo de una curva cerrada infinitesimal sobre la variedad da lugar a un movimiento conforme de la esfera que, a parte de mantener fijo el origen, preserva también el factor de escala de las métricas conformes en $T_xM = T_{O_x}\left(\overline{T_xM}\right)$. Esta última condición está también requerida para el transporte natural, la llamada *"condición isometrica"* para la curvatura:

(v) $\Omega_0^0 = 0$.

A continuación, pasamos a estudiar la condición de normalidad, que acabará por determinar totalmente el transporte de esferas tangentes conformes de la variedad M. Esta última viene impuesta sobre la componente de la curvatura $\Omega_0 \in \Lambda^2(Q, \mathfrak{co}(m))$. Por la condición (v) anterior, resultará que ésta componente en realidad toma valores en la subálgebra ortogonal $\mathfrak{o}(m) \subset \mathfrak{co}(m)$, es decir, $\Omega_0 = \left(\Omega^i_j\right) \in \Lambda^2(Q, \mathfrak{o}(m))$. Si tomamos la base de 1-formas dada por las componentes del tensor $\omega_{-1} = \left(\omega^1, ..., \omega^m\right) \in \Lambda^1\left(Q, \mathbb{R}^m\right)$, Ω_0 se podrá expresar a través de unas funciones A^i_{jkl}, para $k < l$, dadas por

$$\Omega^i_j = \sum_{k<l} A^i_{jkl}\left(\omega^k \wedge \omega^l\right)$$

La *condición de normalización* es entonces la siguiente:

(vi) $\sum\limits_k A^k_{ijk} = 0$

Esta condición es de nuevo independiente de la referencia conforme $q \in Q$ que estemos considerando, y define entonces una condición geométrica intrínseca a la variedad. De hecho, esta componente de la curvatura define un característico operador naturalmente asociado a toda variedad conforme: la curvatura de Weyl.

Remark 5 *Dada una conexión ω de Cartan (i.e. una forma verificando (i), (ii), (iii)), entonces, el cumplimiento simultáneo de las condiciones de simetría ((iv) $\Omega^i = 0$) y de normalidad ((vi) $\sum\limits_k A^k_{ijk} = 0$), lleva implícito el cumplimiento de la propiedad (v)*

$$\Omega^0_0 = 0$$

Proof. En primer lugar, el hecho de que ω tenga torsión nula (condición (iv)) da lugar a la siguiente relación, haciendo uso de la segunda ecuación de estructura:

$$\omega^i \wedge \Omega^0_0 - \sum_k \omega^k \wedge \Omega^i_k = 0, \ \forall i = 1, ..., m$$

es decir, si $\Omega^0_0 = A^0_{0kl}\left(\omega^k \wedge \omega^l\right)$, entonces,

$$\sum_{h.k.l} A^i_{hkl}\left(\omega^h \wedge \omega^k \wedge \omega^l\right) = \sum_{kl} A^0_{0kl}\left(\omega^i \wedge \omega^k \wedge \omega^l\right)$$

$$A^i_{ikl} + A^i_{kli} + A^i_{lik} = A^0_{0kl} - A^0_{0lk} = 2A^0_{0kl}, \ \forall i, k, l \tag{12}$$

Puesto que $\Omega_0 = \left(\Omega^i_j\right)$ toma valores en $\mathfrak{o}(m)$, se tiene $\Omega^i_i = 0$ (luego $A^i_{ikl} = 0$, para todo k, l) y de este modo la anterior fórmula [12] implica la siguiente: para todo k, l

$$2A^0_{0kl} = A^i_{kli} + A^i_{lik} = A^i_{kli} - A^i_{lki}$$

$$2mA^0_{0kl} = \sum_i \left(A^i_{kli} - A^i_{lki}\right) = \sum_i A^i_{kli} - \sum_i A^i_{lki} \tag{13}$$

Si contamos ahora con la condición de normalidad (vi) es claro entonces que el lado derecho de la igualdad [13] es idénticamente nulo, resultando entonces

$$\Omega^0_0 = A^0_{0kl}\left(\omega^k \wedge \omega^l\right) = 0$$

Por lo tanto, la condición (v) no es sinó consecuencia de la condiciones de simetría y normalidad. ■

Las condiciones naturales $(i), ..., (vi)$ que se han ido describiendo resultan ser compatibles para cualquier variedad conforme Riemanniena $(M, \mathcal{C})$. En el artículo de Cartan se puede hallar un desarrollo detallado, a través del conocido método de la referencia móvil, de cálculos que aseguran la existencia de una conexión ω verificando las condiciones hasta ahora presentadas, en toda variedad conforme Riemanniana general,

• las condiciones comunes de todo transporte de esferas: $(i), (ii), (iii)$

• las condiciones características del transporte natural, impuestas sobre la curvatura:

$$\Omega^i = 0,\, \Omega_0^0 = 0,\, \sum_k A_{ijk}^k = 0$$

Llegados a este punto, la conexión atribuida al transporte natural va a cumplir la condición de unicidad bajo tales condiciones en el siguiente sentido: la unicidad viene dada salvo métrica g perteneciente a la estructura conforme $\mathcal{C}$. Fijando préviamente una métrica compatible $g \in \mathcal{C}$, es claro que ésta da lugar a una reducción de $CO(M)$ (y de Q) de grupo estructural $CO(m)$, formada por aquellas referencias lineales ortonormales para g, que denotamos por $O(M)_g$. Esto nos da la posibilidad de añadir una propiedad más,

$$\omega_0^0|_{TO(M)_g} = 0 \tag{14}$$

es decir, geométricamente, se impone que el transporte paralelo de esferas tangentes experimente una variación del factor de escala conforme compatible con la métrica $g \in \mathcal{C}$. Esta condición [14] se puede expresar de manera equivalente a través del enunciado siguiente: la componente $\omega_0 \in \Lambda^1(Q, \mathfrak{co}(m))$ restringida al fibrado $O(M)_g$ de referencias ortonormales de $g \in \mathcal{C}$ toma valores en la subálgebra $\mathfrak{o}(m)$, lo que significa que la 1-forma $\omega_0 \in \Lambda^1(O(M)_g, \mathfrak{o}(m))$ define una conexión lineal en el fibrado ortonormal $O(M)_g$. Obsérvese además, que por la condición anterior (iv) de simetría, ésta es exactamente la única conexión simétrica compatible con la métrica, es decir, ω_0 es la conexión de Levi-Civita de la métrica g.

3.4 Conclusión

Resumiendo, si partimos de una métrica en la estructura conforme $g \in \mathcal{C}$, existe una única conexión de Cartan $\omega \in \Lambda^1(Q, \mathfrak{g})$ (verificando pues (i) y (ii)), tal que sus componentes cumplen las propiedades:

• ω_{-1} se corresponde con la forma vertical $\theta^{CO(M)}$ (determinada por la condición (iii))

• ω_0 se corresponde con la forma de la conexión de Levi-Civita de g (determinada por la condición (iv) y la compatibilidad con la métrica g [14])

• ω_1 determinada por la condición de normalidad (vi).

Tal conexión recibe el nombre de *conexión normal de Cartan* en la variedad conforme $(M, \mathcal{C})$, y permite asociar a cada estructura conforme definida sobre una variedad diferenciable un transporte natural en el fibrado tangente de esferas conformes, canónico, salvo elección de métrica compatible.

Esta unicidad salvo representante métrico es suficientemente restringida como para dar lugar a tensores y propiedades completamente definidas para la estructura conforme, sin depender ya del representante métrico que se considere. Por ejemplo, como ya hemos comentado anteriormente, la componente de la curvatura Ω_0 define un operador en M que coincide con la denominada curvatura de Weyl de la variedad conforme (que nos permite comprobar para $m > 3$, cuando la estructura conforme es localmente plana).

Una vez hecha esta descripción detallada del procedimiento de Cartan en variedades conformes queda claro que su construcción coincide exactamente con la presentada por W.Poor en su trabajo. En él, los fibrados de referencias para la esfera conforme se presentan como fibrados asociados al fibrado de referencias lineales conformes $CO(M)$ a través de la inclusión natural del grupo $CO(m)$ en los grupos H y G, quedando más oculto de este modo el posible significado geométrico original de tales fibrados como los formados por un tipo de referencias conformes.

No obstante, se habrá observado que la mayoría de los autores Kobayashi, Sternberg, ... hablan a la conexión normal de Cartan de una variedad conforme $(M, \mathcal{C})$, haciendo referencia a una 1-forma de similares características (verifica las condiciones $(i), ..., (vi)$) pero definida en un fibrado Q de distinta índole al aquí presentado a través de referencias especiales de las esferas conformes; en este caso, el fibrado $Q = CO(M)_1$ es el conocido como *la primera prolongación de* $CO(M)$, subfibrado de $L(CO(M)) \subset L(LM)$ que representa a la familia de posibles conexiones lineales simétricas que admite $CO(M)$[2]. En este caso, la unicidad de la conexión de Cartan es absoluta y no depende ni siquiera de representantes métricos.

Es más, se tiene que toda métrica $g \in \mathcal{C}$ define un isomorfismo natural entre los fibrados $Q \to CO(M)$ de referencias esféricas, y la primera prolongación $CO(M)_1 \to CO(M)$, haciendo corresponder la conexión de Cartan canónica en $CO(M)_1$ con la naturalmente obtenida en Q a partir de la métrica $g \in \mathcal{C}$. Este hecho nos asegura que todo tensor relacionado con la conexión normal de Cartan ω en Q que de lugar a un tensor en $CO(M)$ va a ser inherente de la estructura conforme $\mathcal{C}$, puesto que podrá obtenerse también a través de $CO(M)_1$, en donde la conexión normal de Cartan es canónica y no depende de representante métrico. Este es el caso del tensor de curvatura de Weyl.

Esta última observación, resuelve ya totalmente la cuestión de la unicidad puesto que aunque aparentemente en la construcción de Cartan se llega al final a una familia de conexiones posibles, con un grado de libertad dominado paralelo a las métricas conformes de la estructura, a través de la primera prolongación $CO(M)_1$ todas ellas pueden aunarse en una única conexión de Cartan.

[2] Este fibrado está también naturalmente identificado con el subfibrado de $F^2(M)$ llamado *levantamiento al primer orden* de $CO(M)$.