CONEXIONES DE CARTAN

J.Lafuente & B.Salvador

Febrero de 2000

1. $G/H-$Estructura tangencial: Definiciones

Haremos el siguiente convenio:

Si bajo las hipótesis ambientales, existe un isomorfismo canónico entre dos objetos A y B, escribiremos A=B

En lo que sigue es M una variedad diferenciable de dimensión m.

1.1. Espacios homogeneos

1.1.1. Definiciones

Un *Espacio Homogéneo* viene definido por una variedad diferenciable F, y un grupo de Lie G que actua diferenciablemente sobre F

$$G \times F \to F \ \ (g, x) \to \lambda_g(x) = g.x$$

Admitiremos que G actua transitivamente sobre F, es decir, para todo $x, y \in E$, existe $g \in G$, tal que $g(x) = y$.

Denotamos

$$G_{xy} = \{g \in G : g.x = y\}$$

Llamamos grupo de isotropía de un punto $x \in F$, al subgrupo H_x de las transformaciones de G que dejan fijo el punto x, es decir:

$$H_x = G_{xx} = \{h \in G : h.x = x\}$$

Nótese que si $g \in G$, es tal que $g.x = y$ entonces $H_y = gH_xg^{-1}$. Así fijado un punto $o \in F$, todos los grupos de isotropía H_x de los puntos de F son conjugados con $H = H_0$. Claramente H es un subgrupo cerrado de G, y por tanto G/H tiene una única estructura de variedad diferenciable de dimensión $\dim G - \dim H$, que hace a la proyección canónica $\pi : G \to G/H$ submersión. Hay además un difeomorfismo canónico (fijado $o \in E$):

$$\pi_o : G/H \ni gH \to g.o \in F$$

que permite identificar ambos espacios ($F = G/H$). Así $\pi : G \to G/H$ se identifica con

$$\pi : G \to F \ , \ g \longmapsto g.o$$

Nótese que dar el cociente G/H es equivalente a dar un espacio homogeneo F, con un punto destacado o.

1.1.2. Espacios homogeneos reductivos

La diferencial $\pi_* = d\pi(e) : \mathfrak{g} \to T_oF$ induce por paso al cociente un isomorfismo canónico

$$\overline{\pi_*} : \mathfrak{g}/\mathfrak{h} \to T_oF$$

que permite identificar ambos espacios.

Recordemos que si $g \in G$, el automorfismo de conjugación $C_g : G \to G$, $a \to gag^{-1}$ da lugar a

$$dC_g(e) = Ad_g \in GL(\mathfrak{g})$$

y la aplicación $Ad : G \to GL(\mathfrak{g})$ define una representación denominada representación adjunta. Su restricción $Ad_H : H \to GL(\mathfrak{g})$ su restricción a H, da lugar por paso al cociente a una actuación sobre el espacio vectorial cociente $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$, que denotamos $\overline{Ad_H} : H \to GL(\mathfrak{g}/\mathfrak{h})$. Vía la identificación $\overline{\pi_*}$ es fácil ver que:

$$d\lambda_h(o) = \overline{Ad_h} : T_oF = \mathfrak{g}/\mathfrak{h} \to \mathfrak{g}/\mathfrak{h} = T_oF \tag{1}$$

Se dice que el cociente G/H es *pseudo reductivo,* si existe $\mathfrak{g}_{-1}$ subálgebra abeliana de de $\mathfrak{g}$ con

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{g}_{-1}$$

y se dirá *reductivo* si existe $\mathfrak{p}$ subespacio complementario de $\mathfrak{h}$ en $\mathfrak{g}$ tal que $Ad_h(\mathfrak{p}) \subset \mathfrak{p}$ para todo $h \in H$. Se tiene entonces $[\mathfrak{h}, \mathfrak{p}] \subset \mathfrak{p}$, y se denomina a $\mathfrak{p}$ subsepacio de lie

Si además $\mathfrak{p}$ es una subálgebra abeliana de $\mathfrak{g}$, se dirá que G/H es fuertemente *reductivo, y* entonces se tiene:

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus_{ad_{\mathfrak{h}}} \mathfrak{p}$$

1.1.3. Órden de un espacio homogeneo

El espacio homogeneo $F = G/H$ se dice de primer orden si la representación $\overline{Ad_H} : H \to GL(\mathfrak{g}/\mathfrak{h})$ es inyectiva. Esto significa cada transformación $\lambda_h : F \to F$ ($h \in H$) viene determinada por su diferencial $d\lambda_h(o)$.

Si $d^r\lambda_h(o)$ representa el $r - jet$ de λ_h en $o \in F$, diremos que el órden del espaci homogeneo es igual a r, si se verifica para cada $h, k \in H$, la implicación

$$d^r\lambda_h(o) = d^r\lambda_k(o) \Rightarrow \lambda_h = \lambda_k$$

1.2. Estructura tangencial: Primera Definición

Una G/H-estructura tangencial sobre M, viene determinada por un H-fibrado principal $Q \xrightarrow{\pi^Q} M$, y un grupo de lie G que contiene a H como subgrupo cerrado, de forma que $\dim G/H = \dim M$.

1.2.1. Convenios observaciones y notaciones:

Si $Y \to M$ es un fibrado sobre M, denotamos por Y_x la fibra sobre $x \in M$. Sea $Q \xrightarrow{\pi^Q} M$ una G/H-estructura tangencial sobre M.

a) $\pi_o : G \to F = G/H$ es la proyección canónica. En F hay un elemento distinguido $o = eH \in F$, y H es exactamente el grupo de isotropía en la actuación natural $G \times F \ni (g, \xi) \to g\xi = L_g(\xi) \in F$, del *origen* $o = eH \in F$. Denotamos por $\mathfrak{g}$ y $\mathfrak{h}$ a correspondientes álgebras de Lie de G y H, respectivamente. Sea $n = \dim \mathfrak{g}$, $r = \dim \mathfrak{h}$. Como el núcleo de $(\pi_o)_* : \mathfrak{g} \to T_oF$ es igual a $\mathfrak{h}$, se tiene la igualdad:

$$T_oF = \mathfrak{g}/\mathfrak{h}$$

La dimensión de M es $m = n - r = \dim F$, y la dimensión de Q es por tanto $r + m = n = \dim G$

b) Denotamos por $E = Q \times_H F$ al fibrado asociado, respecto a la actuación natural $H \times F \to F$, $\pi : E \to M$ es la proyeccion canónica. Podemos escribir: $E = \{q \times_H \xi : v \in Q, \xi \in F\}$, entendiendo que $qh \times_H \xi = q \times_H h\xi$, para todo $q \in Q$, $h \in H$, $\xi \in F$, y $\pi(q \times_H \xi) = \pi^Q(q)$. Nótese que en particular, para $q \in Q_x$, $h \in H$ se tiene $q \times_H o = q \times_H ho = qh \times_H o$, y la aplicación $\sigma : M \to E$ definida sin ambigüedad por $\sigma(x) = q \times_H o$ cualquiera que sea $q \in Q_x$, y constituye una sección global de E.

c) Se construye el fibrado principal $P = Q \times_H G$ sobre M, con grupo G. Nótese que $(q \times_H g)\, g' = v \times_H gg'$ para $g, g' \in G$, $q \in Q$. Sea $\pi^P : P \ni q \times_H g \to \pi^P(q) \in M$ la proyección natural. El fibrado Q puede verse así, como un subfibrado principal de P con fibra H. Se denota por $\iota_Q : Q \ni q \hookrightarrow q = q \times_H e \in P$ a la inclusión canónica.

d) Hay un isomorfismo canónico ϕ entre el fibrado $E = Q \times_H F$, y $P \times_G F$, que queda bien definido de la siguiente forma: fijado $p \times_G \xi \in P \times_G F$, se toma $g \in G$, tal que $pg \in Q$, y $\phi\,(p \times_G \xi) = pg \times_H g^{-1}\xi \in E = Q \times_H F$. Así $E = P \times_G F$, y además $E = P/H$, mediante el isomorfismo canónico $P/H \ni pH \to p \times_G o \in E$

Partiendo de un $G-$fibrado principal $P \xrightarrow{\pi^P} M$, se tiene la siguiente definición equivalente:

1.3. Estructura tangencial: Segunda Definición

Una G/H-estructura tangencial sobre M, viene determinada por un $G-$fibrado principal $P \stackrel{\pi^P}{\to} M$ y un $H-$subfibrado principal, Q , donde H es cerrado en G y $\dim G/H = \dim M$

1.3.1. Observación

Nótese, que el *dato* Q equivale a dar una sección global σ del fibrado $E = P/H \ni pH \stackrel{\pi}{\to} \mathfrak{p}(p) \in M$.

En efecto, dado Q, definimos $\sigma : M \ni x \to Q_x \in E$. Recíprocamente cada sección σ del fibrado E da lugar a un único subfibrado principal Q de P con fibra H, tal que $im\sigma \subset Q$, basta tomar $Q_x = \sigma(x)H$ para cada $x \in M$.

1.4. Estructura tangencial: Tercera Definición

Hay una tercera forma de mirar una G/H-estructura tangencial de partiendo del fibrado $G/H-$homogeneo E sobre M. Recordemos que esto es un fibrado $E \stackrel{\pi}{\to} M$ con fibra $F = G/H$ espacio homogeneo *punteado* $o = eH$ de grupo G, es decir, para cada $x_0 \in M$, hay un entorno abierto $\mathcal{U}$ de x_0 y una $G-$carta fibrada, es decir, una biyección $\varphi : \pi^{-1}(\mathcal{U}) \to \mathcal{U} \times F$ con $\varphi(E_x) = \{x\} \times F$ para todo $x \in \mathcal{U}$. Se denota por $\varphi_x = \varphi| : E_x \to F$. De forma que si $\psi : \pi^{-1}(\mathcal{V}) \to \mathcal{V} \times F$ es *otra* $G-$carta fibrada, entonces para cada $x \in \mathcal{U} \cap \mathcal{V}$ la aplicación $\psi_x \circ \varphi_x^{-1} : F \to F$ actua sobre F, como cierto $g_{\varphi\psi}(x) \in G$, siendo $g_{\varphi\psi} : \mathcal{U} \cap \mathcal{V} \to G$ una aplicación diferenciable

Una G/H-estructura tangencial sobre M es un fibrado G/H-homogeneo $E \stackrel{\pi}{\to} M$ sobre M (con $\dim G/H = \dim M$) y una sección suya $\sigma : M \to E$.

De esta forma se construye para cada $x \in M$, $P_x = \{\varphi_x^{-1} \circ g : g \in G\}$ y $Q_x = \{\varphi_x^{-1} \circ h : h \in H\}$. Naturalmente Q_x y P_x no dependen de la G-carta fibrada $\varphi : \pi^{-1}(\mathcal{U}) \to \mathcal{U} \times F$ elegida por x. Se denomina a E_x espacio homogeneo tangencial a M en x

Se llama órden de una estructura tangencial, al órden del espacio homogéneo. Se dice que la estructura tangencial es (pseudo) reductiva, si lo es el espacio homogéneo

2. Estructura tangencial: Ejemplos

2.1. Preliminar: Productos semidirectos

2.1.1. Afinizaciones.

Los vectores de $\mathbb{R}^m$ serán considerados vectores columna. Su espacio dual $(\mathbb{R}^m)^*$ será denotado por $\mathbb{R}_m$ y sus elementos son vectores fila. Un subgrupo

G_0 (cerrado) del lineal general $GL(m,\mathbb{R})$, usualmente se le ve actuando por la izquierda sobre $\mathbb{R}^m$, $G_0 \times \mathbb{R}^m \ni (g,v) \to gv \in \mathbb{R}^m$ por medio del producto matricial. Esta actuación permite construir el grupo de lie afinizado por la derecha $G_0A = G_0 \times_{sd} \mathbb{R}^m$, cuyo espacio base es el producto cartesiano $G_0 \times \mathbb{R}^m$ y su estructura de grupo, se obtiene identificando $(g,v) \in G_0 \times \mathbb{R}^m$ con la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ v & g \end{pmatrix}$ y aplicando el producto matricial:

$$(g,v)(g',v') = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ v & g \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ v' & g' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ v+gv' & gg' \end{pmatrix} = (gg', v+gv') \quad (2)$$

El álgebra de lie de $G_0 \times_{sd} \mathbb{R}^m$ es

$$\mathfrak{g}_0\mathfrak{a} = \mathfrak{g}_0 \oplus_{sd} \mathbb{R}^m = \left\{ (A,v) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ v & A \end{pmatrix}, v \in \mathbb{R}^m, A \in \mathfrak{g} \right\}$$

donde el corchete esta definido por medio del conmutador del producto matricial

$$[(A,v),(A',v')] = [[A,A'], Av' - A'v]$$

a $\mathfrak{a}\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{g}_0 \oplus_{sd} \mathbb{R}^m$ se llama suma semidirecta de $\mathfrak{g}_0$ y $\mathbb{R}^m$.

Análogamente, G_0 actua por la derecha sobre $\mathbb{R}_m$, : $\mathbb{R}_m \times G_0 \ni (\alpha, g) \to \alpha g \in \mathbb{R}_m$ por producto matricial, y se construye el afinizado por la izquierda $AG_0 = \mathbb{R}_m \times_{sd} G_0 = \{(\zeta, g) : g \in G_0, \zeta \in \mathbb{R}_m\}$ con la ley de composición:

$$(\zeta,g)(\zeta',g') = \begin{pmatrix} 1 & \zeta \\ 0 & g \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \zeta' \\ 0 & g' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \zeta' + \zeta g' \\ 0 & gg' \end{pmatrix} = (\zeta' + \zeta g', gg')$$

donde se ha identificado (ζ, g) con la matriz $\begin{pmatrix} 1 & \zeta \\ 0 & g \end{pmatrix}$.

La correspondiente álgebra de lie es la suma semidirecta $\mathfrak{a}\mathfrak{g}_0 = \mathbb{R}_m \oplus_{sd} \mathfrak{g}_0$.

2.1.2. Generalización

La construcción anterior se generaliza trivialmente, si se parte de un grupo de Lie G_0 abstracto, y una acción por la izquierda $\rho : G_0 \times V \to V$ de G_0 sobre un grupo de Lie $(V,+)$, que da lugar a un homomorfismo $\rho : G_0 \to Aut\,(V)$ siendo $Aut\,(V)$ el grupo de los isomorfismos de V en V. Este homomorfismo induce un homomorfismo entre las correspondientes álgebras de Lie $\rho_* : \mathfrak{g}_0 \to Aut\,(\mathfrak{V})$ siendo $\mathfrak{g}_0$, y $\mathfrak{V}$ las álgebras de Lie de G_0, y V respectivamente.

Esto da lugar, generalizando la fórmula (2) al grupo $G_0 \times_\rho V$, producto semidirecto con operación definida por la fórmula:

$$(g,v)(g',v') = (gg', v + \rho\,(g)\,v')$$

con álgebra de Lie $\mathfrak{g}_0 \oplus_{\rho_*} \mathfrak{V}$ suma directa con corchete:

$$[(A,v),(A',v')] = ([A,A'], (\rho_* A)\,v' - (\rho_* A')\,v)$$

2.2. La $\mathbb{R}^m$-estructura tangencial de una H-estructura.

2.2.1. H-Estructuras.

Fijado un modelo V de espacio vectorial m-dimensional, y $x \in M$, una V-referencia en x es un isomorfismo lineal $u : V \to T_xM$. Se puede construir $L(M,V) \to M$, el fibrado de las V-referencias, que es un fibrado principal con grupo $GL(V)$. Si H es subgrupo cerrado de $GL(V)$, una H-estructura es una H-reducción $\pi^Q : Q \to M$ de $L(M,V)$. Hay una forma vertical canónica $\theta \in \Lambda^1(TQ,V)$ definida por:

$$\theta\left(v_q\right) = q^{-1}\left(\pi_*^Q v_q\right)$$

Cuando $V = \mathbb{R}^m$ una V-referencia $u : \mathbb{R}^m \to T_xM$ es esencialmente una base de T_xM, y se llama simplemente referencia. $L(M) = L(M,\mathbb{R}^m)$ es el clásico fibrado de referencias, y Q sería ahora una H-estructura clásica.

Nótese que una H-estructura general $Q \to M$ ($H \subset GL(V)$) se transforma en una clásica, $Q_{\mathbf{e}} \to M$ desde el momento en que se fije una base $\mathbf{e} = (e_1, \ldots e_m)$ de V. Todas las H-estructuras $Q_{\mathbf{e}}$ obtenidas a trravés de las distintas bases $\mathbf{e}$ de V se considerarán iguales.

2.2.2. La estructura tangencial asociada

Sea Q una H-estructura clásica. Es decir, Q es un H-fibrado principal sobre M, H es un subgrupo cerrado de $Gl(m,\mathbb{R})$.

Nótese que HA actua naturalmente sobre $\mathbb{R}^m$ por transformaciones afines

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ v & g \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \xi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ v + g\xi \end{pmatrix}$$

siendo $H = \{0\} \times H$ el grupo de isotropía del origen. así:

$$\mathbb{R}^m = HA/H$$

Segun definición 1.2 tenemos una $HA/H-$estructura tangencial en M. El fibrado principal de grupo HA construido en la definición 1.3 es $P = AQ \to M$ afinizado natural de Q, es decir:

$$P_x = \{p : \mathbb{R}^m \to T_xM : p\xi = v + q\xi,\ q \in Q_x,\ v \in T_xM\}$$

El fibrado $\mathbb{R}^m$-homogeneo construido en la definición 1.4 identifica $E_x = T_xM$, y la sección σ es $\sigma(x) = 0_x \in T_xM$ para todo $x \in M$.

En particular tomando $Q = L(M)$, $H = GL(m,\mathbb{R})$ tenemos-una $\mathbb{R}^m$ estructura canónica en M que describe esencialmente el fibrado tangente TM y se llama *estructura tangente natural* de M.

Nótese que esta estructura tangencial es fuertemente reductiva, y de primer orden

2.3. Estructura tangencial proyectiva

2.3.1. Complección proyectiva natural de un espacio vectorial

Sea V es un espacio vectorial de dimensión m, denotamos por $\tilde{V} = V \cup P(V) = P(\widehat{V})$ a la extensión proyectiva de V como espacio afín, en donde $P(V) = \infty$ es el plano del infinito. Se ha denotado $\hat{V} = \mathbb{R}\times V = \{(v_0, v) : v_0 \in \mathbb{R}, v \in V\}$, y para cada $v \in V$ se tienen las identificaciones

$$v = (1, v) = [1, v] \tag{3}$$

$\tilde{V}^* = P(\hat{V}^*)$ es el proyectivo dual que se identifica con el conjunto de los hiperplanos de $\tilde{V}$ que son los hiperplanos afines de V, y el hiperplano del infinito $\infty = P(V)$.

Un elemento típico $\hat{g}$ del grupo $GL(\hat{V})$ de las transformaciones lineales de $\hat{V}$ se escribe como

$$\hat{g} = \begin{pmatrix} a_0 & \alpha \\ a & g_0 \end{pmatrix}, a_0 \neq 0, a \in V, \alpha \in V^*, g_0 \in GL(V)$$

y $\hat{g}$ actúa sobre $\begin{pmatrix} v_0 \\ v \end{pmatrix} \in \hat{V}$ por medio del producto matricial:

$$\hat{g}\begin{pmatrix} v_0 \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0 & \alpha \\ a & g_0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_0 \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0 v_0 + \alpha\,(v) \\ v_0 a + g_0\,(v) \end{pmatrix}$$

El grupo proyectivo de $\tilde{V}$ es $GP(\tilde{V}) = PGL(\hat{V}) = \{g = [\hat{g}] : \hat{g} \in GL(\hat{V})\}$, si $g = [\hat{g}]$ se tiene

$$g\begin{bmatrix} v_0 \\ v \end{bmatrix} = \left[\begin{pmatrix} a_0 & \alpha \\ a & g_0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_0 \\ v \end{pmatrix}\right] = \begin{bmatrix} a_0 v_0 + \alpha\,(v) \\ v_0 a + g_0\,(v) \end{bmatrix}$$

Por otra parte, $\hat{g} \in GL(\hat{V})$ actúa sobre $(\zeta_0, \zeta) \in \hat{V}^*$ por la derecha, por medio del producto matricial:

$$(\zeta_0, \zeta)\,\hat{g} = (\zeta_0, \zeta)\begin{pmatrix} a_0 & \alpha \\ a & g_0 \end{pmatrix} = (\zeta_0 a_0 + \zeta\,(a), \zeta_0\alpha + \zeta \circ g_0)$$

y sobre $\tilde{V}^* = P(\hat{V}^*)$ de la forma:

$$[\zeta_0, \zeta]\,g = \left[(\zeta_0, \zeta)\begin{pmatrix} a_0 & \alpha \\ a & g_0 \end{pmatrix}\right] = [\zeta_0 a_0 + \zeta\,(a), \zeta_0\alpha + \zeta \circ g_0]$$

Observese que un hiperplano H de $\tilde{V}$ se identifica con el elemento $[\zeta_0, \zeta] \in \tilde{V}^*$ tal que

$$H = \left\{\begin{bmatrix} v_0 \\ v \end{bmatrix} : (\zeta_0, \zeta)\begin{pmatrix} v_0 \\ v \end{pmatrix} = \zeta_0 v_0 + \zeta\,(v) = 0\right\}$$

La transformación $g \in GP(\tilde{V})$ envia hiperplanos H a hiperplanos $g(H)$, y se tiene la identidad:

$$g^{-1}(H) = [\zeta_0, \zeta]\, g$$

Tenemos por un lado una actuación natural

$$GP(\tilde{V}) \times \tilde{V}^* \ni (g, H) \to g(H) \in \tilde{V}^*$$

que es transitiva, con grupo de isotropía en el hiperplano ∞ el infinito:

$$GP_\infty(\tilde{V}) = \{g \in GP(\tilde{V}) : g(\infty) = \infty\} = \left\{ \begin{bmatrix} a_0 & 0 \\ a & g_0 \end{bmatrix} \in GP(\tilde{V}) : a_0 \neq 0 \right\}$$

que se identifica con el grupo afín de V, $GLA(V) = GL(V) \times_{sd} V$ (afinizado por la derecha de $GL(V)$) mediante el isomorfismo canónico

$$GLA(V) \ni \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & g_0 \end{pmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ a & g_0 \end{bmatrix} \in GP_\infty(\tilde{V})$$

y por tanto

$$\tilde{V}^* = GP(\tilde{V})/GP_\infty(\tilde{V})$$

Por otro lado, tenemos el afinizado por la izquierda:

$$H = AGL(V) = V^* \times_{sd} GL(V) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & g_0 \end{pmatrix} : \alpha \in V, g_0 \in GL(V) \right\}$$

que puede sumergirse canónicamente en $GP(\tilde{V})$ mediante

$$AGL(V) \ni \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & g_0 \end{pmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & g_0 \end{bmatrix} \in GP_0(\tilde{V}) \subset GP(\tilde{V})$$

siendo $GP_0(\tilde{V})$, subgrupo de las $g \in GP(\tilde{V})$, que dejan invariante la radiación de hiperplanos que pasan por el origen $0 \in V$, o lo que es equivalente:

$$GP_0(\tilde{V}) = \{g \in GP(\tilde{V}) : g(0) = 0\}$$

de esta manera $H = AGL(V)$ es el grupo de isotropía del origen $0 \in V$, de la actuación transitiva natural

$$GP(\tilde{V}) \times \tilde{V} \to \tilde{V}$$

y por tanto

$$\tilde{V} = GP(\tilde{V})/GP_0(\tilde{V})$$

2.3.2. Estructura tangencial proyectiva natural sobre M

Tomando $V = \mathbb{R}^m$, es $\hat{V} = \mathbb{R}^{m+1}$, $\tilde{V} = P(\mathbb{R}^{m+1}) = \mathbb{P}^m$, $V^* = \mathbb{R}_m$, $\tilde{V}^* = P(\mathbb{R}_{m+1}) = \mathbb{P}_m$. Además: $G_0 = GL(V) = GL(m, \mathbb{R})$, $G = GP(\tilde{V}) = GP(m, \mathbb{R}) = PGL(m+1)$, $H = GL(m, \mathbb{R}) \times_{sd} \mathbb{R}_m$, y $\mathbb{P}^m = G/H$.

También se puede aplicar esta construcción en cada espacio tangente $T_x M$ de una variedad m-dimensional, M, lo que nos permite construir el fibrado $\mathbb{P}^m$-homogéneo $\pi{:}\widetilde{T}(M) \to M$ con espacio total.

$$\widetilde{T}(M) = \cup_{x \in M} \widetilde{T_x M}$$

y la sección canónica $M \ni x \to 0_x \in T_x M \subset \widetilde{T_x M}$. Como $\dim \mathbb{P}^m = \dim M = m$, se concluye que esta es una $\mathbb{P}^m$-estructura tangencial canónica en M. Observese que con las notaciones que venimos utilizando, es:

$$P_x = \left\{ p : \mathbb{P}^m \to \widetilde{T_x M}, \text{ homografía } \right\}$$

$$Q_x = \{ q \in P_x : q(0) = 0_x \}$$

Veamos que la $\mathbb{P}^m$- estructura tangencial de M es pseudo reductiva. En efecto, si $GP_c(m, \mathbb{R})$ es la componente conexa de la identidad de $GP(m, \mathbb{R})$, la aplicación

$$SL(m+1, \mathbb{R}) \ni \hat{g} \to [\hat{g}] \in GP_c(m, \mathbb{R})$$

resulta ser epimorfismo de grupos de Lie, cuyo nucleo es discreto ($Z = \{\pm id\}$ si m es impar, y $Z = \{id\}$ en otro caso). Es por tanto epimorfismo recubridor, y así el álgebra de lie de $GP(m, \mathbb{R})$ es isomorfa al álgebra de lie de $SL(m+1, \mathbb{R})$

$$\mathfrak{sl}(m+1, \mathbb{R}) = \left\{ A = \begin{pmatrix} -trA_0 & \alpha \\ a & A_0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{gl}(m+1, \mathbb{R}) \right\}$$

Llamando

$$\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{gl}(m, \mathbb{R}) = \left\{ A = \begin{pmatrix} -trA_0 & 0 \\ 0 & A_0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{gl}(m+1, \mathbb{R}) \right\}$$

$$\mathfrak{g}_{-1} = \left\{ a = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ a & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{gl}(m+1, \mathbb{R}) \right\} \approx \mathbb{R}^m$$

$$\mathfrak{g}_1 = \left\{ \alpha = \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{gl}(m+1, \mathbb{R}) \right\} \approx \mathbb{R}_m$$

se tiene entonces: $\mathfrak{sl}(m+1, \mathbb{R}) = (\mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_0) \oplus \mathfrak{g}_{-1}$

Ejercicio 1 *Probar que la estructura tangencial proyectiva es de órden* 2.

2.4. Estructura tangencial esférica

2.4.1. Complección esférica de un espacio vectorial conforme .

Una forma cuadrática afín q en el espacio afín $V = \{1\} \times V$ sobre el espacio vectorial $V = \{0\} \times V$ viene determinada por la restricción de una forma cuadrática $\hat{q}$ sobre el espacio vectorial $\hat{V} = \mathbb{R} \times V$, es decir:

$$q(v) = q_2(v) + q_1(v) + q_0$$

siendo q_2 forma cuadrática en V , $q_1 \in V^*$, $q_0 \in \mathbb{R}$. El espacio $QA(V)$ de las formas cuadráticas afines es un espacio vectorial. Si $q \in QA(V)$ la imagen de q es

$$q^{-1}(0) = \{v \in V : q(v) = 0\}$$

y determina una cuádrica afín en V.

Supongamos dado en V una forma cuadrática $\| \|^2$. El espacio

$$\check{V} = \left\{q \in QA(V) : q_2 = k \| \|^2 \text{ para algún } k \in \mathbb{R}.\right\}$$

solo depende de la estructura conforme definida por $\| \|^2$ en V y constituye un subespacio del espacio vectorial $QA(V)$ de dimensión $m + 2$. El espacio proyectivo $P\left(\check{V}\right)$se denomina *espacio de* $(m-1)$-*esferas generalizadas.* Veamos porqué este nombre:

La expresión de una $q \in \check{V}$ en las coordenadas $(X_1, \ldots, X_m)$ en V respecto a una base ortonormal $(e_1, \ldots, e_m)$ es de la forma

$$q = x_0 \sum_1^m X_i^2 - \sum_1^m 2x_i X_i - 2x_{m+1}$$

Si $x_0 = 0$, la ecuación de la imagen de q se escribe:

$$\sum_1^m 2x_i X_i - 2x_{m+1} = 0$$

que representa un plano, el conjunto vacio (cuando $x_i = 0$, $i = 1, \ldots, m$, $x_{m+1} \neq 0$) o el total (si todos los $x_i = 0$).

Si $x_0 \neq 0$ la ecuación de la imagen de q se escribe:

$$\sum_1^m \left(X_i - \frac{x_i}{x_0}\right)^2 - \left[2\frac{x_{m+1}}{x_0} + \sum_1^m \left(\frac{x_i}{x_0}\right)^2\right] = 0$$

que representa en general una $(m-1)$-esfera con centro $(x_1/x_0, \ldots, x_m/x_0)$ cuyo radio al cuadrado vale

$$R^2 = 2\frac{x_{m+1}}{x_0} + \sum_1^m \left(\frac{x_i}{x_0}\right)^2$$

Así pues en nuestro espacio $P(\check{V})$ de $(m-1)$-esferas generalizadas, se incluyen las esferas de radio imaginario, o real, y en particular las de radio nulo, que quedan identificadas con su centro.

En las coordenadas homogeneas $[x_0, \ldots, x_{m+1}]$ del espacio de esferas $\check{V}$, la familia $\overline{V}$ de esferas de radio nulo viene descrita por la ecuación:

$$2x_0x_{m+1} + \sum_1^m x_i^2 = 0$$

y constituye una cuádrica de $P(\check{V})$, que es ella misma una esfera m-dimensional. Se denomina a $\overline{V}$ complección esférica del espacio afín conforme V.

Un expresión libre de coordenadas de la forma cuadrática

$$\breve{\rho} = 2x_0x_{m+1} + \sum_1^m x_i^2 \tag{4}$$

viene dada por:

$$\breve{\rho}(q) = \|q_1\|^2 + 2kq_0$$

Cada *esfera* $[x_0, \ldots, x_{m+1}] \in \overline{V}$, cuando $x_0 \neq 0$, es una $(m-1)$-esfera de radio nulo que identificamos con su centro $(X_1, \ldots, X_m)$, es decir

$$[x_0, \ldots, x_{m+1}] \to (X_1, \ldots, X_m) = \left(\frac{x_1}{x_0}, \ldots, \frac{x_m}{x_0}\right) \in V \tag{5}$$

y hay una inclusión natural $V \hookrightarrow \overline{V}$. Solo el punto de $\overline{V}$ con coordenadas homogeneas $[1, 0, \ldots, 0]$ no representa un punto de V, y se denomina punto del infinito ∞.

Si llamamos $X_0 = x_{m+1}/x_0$, entonces $(X_0, , \ldots, X_m)$ constituyen un sistema de coordenadas cartesianas en el espacio afín $P(\check{V}) - \{x_0 = 0\}$ constituido por las esferas generalizadas que *no son hiperplanos,* y en donde las de radio cero están en el *paraboloide* dado por la condición:

$$2X_0 + \sum X_i^2 = 0$$

La ventaja de esta representación afín, es que podemos ver cada cada punto de coordenadas cartesianas $(X_0, X_1, \ldots, X_m)$ como una $(m-1)$-esfera centrada en $(X_1, \ldots, X_m) \in V$ y radio R con $R^2 = 2X_0 + \sum_1^m X_i^2$. Las *direcciones* de este espacio afín representan hiperplanos, y justo la dirección *vertical* del eje X_0 representa el punto $\infty \in \overline{V}$.

2.4.2. Estructura conforme de la Complección Esférica.

Recapitulando, tenemos que la complección esférica $\overline{V}$ del espacio vectorial V viene definida por el conjunto de puntos de a cuádrica $\rho = [\breve{\rho}]$ definida por la ecuación $2x_0x_{m+1}+\sum x_i^2=0$ y solo depende de la estructura (lineal) conforme de V, y no del sistema particular de coordenadas rectangulares $(X_1,,\ldots,X_m)$ elegido al principio. $\left(\check{V},\breve{\rho}\right)$ es un espacio vectorial de Lorentz de dimensión $m+2$, cuyas direcciones $P\left(\check{V}\right)$ son las esferas generalizadas. Las esferas de radio cero son las contenidas en el *cono de luz*

$$\mathcal{C}=\left\{(x_0,\ldots,x_{m+1}):2x_0x_{m+1}+\sum_1^m x_i^2=0\right\}$$

Haciendo el cambio de coordenadas

$$x_{m+1}=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(y_{m+1}+y_0\right),\, x_0=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(y_{m+1}-y_0\right) \tag{6}$$

queda

$$\breve{\rho}=-y_0^2+\sum_1^m x_i^2+y_{m+1}^2$$

El hiperplano $\Pi_0\,:\,(y_0=1)$ es espacial, y hereda una estructura euclidea conforme lineal de $\rho=[\breve{\rho}]$, en la cual $(x_1,\ldots,x_m,y_{m+1})$ constituye un sistema de coordenadas rectangulares y $\overline{V}$ se identifica con la m-esfera $\mathcal{S}=\mathcal{C}\cap\Pi_0$ que tiene ahora por ecuación:

$$\sum x_i^2+y_{m+1}^2=1,\ (y_0=1)$$

que hereda de Π_0 su estructura conforme.

No olvidemos que cada punto $(x_1,\ldots,x_m,y_{m+1})\in\mathcal{S}$ con $y_{m+1}\neq1$ representa una esfera de radio nulo (punto de V) con centro $(X_1,\ldots X_m)$ (ver (5)) de donde (usando las inversas de (6)) se obtiene:

$$X_i=\frac{x_i}{x_0}=\frac{\sqrt{2}x_i}{y_{m+1}-1}$$

Esta aplicación $(x_1,\ldots,x_m,y_{m+1})\to(X_1,\ldots X_m)$ de la esfera $\mathcal{S}$ en V es esencialmente la proyección estereográfica, que es así una aplicación conforme.

Hemos probado por tanto que

La estructura conforme de V se extiende de forma única a todo $\overline{V}=V\cup\{\infty\}$

2.4.3. El grupo de Möbius

Hay una actuación natural

$$PO(\check{V})\times\overline{V}\to\overline{V}$$

del grupo $PO(\check{V})$ de transformaciones proyectivas de $P(\check{V})$ que deja invariante la forma cuadrática $\rho = [\breve{\rho}]$. Nótese que si $O(\check{V})$ es el grupo de las transformaciones lineales que dejan invariante $\breve{\rho}$ entonces

$$PO(\check{V}) = \left\{[a] : a \in O(\check{V})\right\}$$

(a) Esta actuación es efectiva, transitiva, y representa a la totalidad de los difeomorfismos conformes de $\overline{V}$

(b) El grupo de isotropía $PO_\infty(\check{V})$ de ∞ es precisamente el grupo $OA(V)$ de las tranformaciones afines conformes de V (afinizado por la derecha de $O(V)$)

(c) $\overline{V}$ es pues un espacio homogeneo con dos puntos destacados 0, y ∞. y podemos escribir:

$$\overline{V} = PO(\check{V})/OA(V) = PO(\check{V})/PO_0(\check{V})$$

2.4.4. Estructura tangencial conforme

Tomando $V = \mathbb{R}^m = \{X = (x_1, \ldots, x_m)\}$, con el producto escalar ordinario, tenemos

$$\check{V} = \mathbb{R}^{m+2} = \{x = (x_{0,}x_1, \ldots, x_m, x_{m+1})\}$$

$$P(\check{V}) = \mathbb{P}^{m+1} = \{[x] = [x_{0,}x_1, \ldots, x_m, x_{m+1}]\}$$

$$\overline{\mathbb{R}^m} = \left\{[x] : 2x_0x_{m+1} + \sum x_i^2 = 0\right\}$$

La forma cuadrática, $\breve{\rho}$ tiene por matriz

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & I_m & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

y el grupo $PO(\check{V})$ es $P\breve{O}(m+1,1)$ siendo

$$\breve{O}(m+1,1) = \left\{g \in GL(m+2,\mathbb{R}) : g^T S g = S\right\}$$

Dada en la variedad M una estructura riemanniana, podemos hacer la construcción anterior en cada espacio tangente para obtener el fibrado esférico

$$\overline{T}(M) = \cup \overline{T_x M}$$

donde cada $\overline{T_x M}$ es la complección esferica conforme del espacio vectorial conforme $T_x M$. Este es un fibrado homogeneo de grupo $G = P\breve{O}(m+1,1)$. De hecho puede obtenerse a partir de él el fibrado principal P cuyas fibras, para cada $x \in M$ son:

$$P_x = \left\{p : \overline{\mathbb{R}^m} \to \overline{T_x M} : \ p \text{ difeomorfismo conforme}\right\}$$

hay dos secciones $\sigma : M \to \overline{T}(M)$ distinguidas la (0 y la ∞) en $\overline{T}(M) \to M$ para poder construir Q. Por ejemplo:

$$Q_x = \{q \in P_x : \; q(0) = 0_x\}$$

Ejercicio 2 *Probar que est estructura tangencial es pseudoreductiva y de orden* 2.

2.5. Otros Ejemplos.

3. Geometrías de Cartan

3.1. Definicion

Una conexión de Cartan sobre una G/H-estructura tangencial de M, es una 1-forma $\omega : TQ \to \mathfrak{g}$, (es decir $\omega \in \Lambda^1(TQ, \mathfrak{g})$) verificando las siguiente propiedades:

Cr1) $\omega : T_qQ \to \mathfrak{g}$ es un isomorfismo lineal $\forall q \in Q$.

Cr2) $\omega(A^{\#}) = A$ para todo $A \in \mathfrak{h}$, donde $A^{\#}$ es el campo vertical fundamental definido por $A \in \mathfrak{h}$ mediante la fórmula

$$A^{\#}(q) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} q \exp(tA) \; \forall q \in Q$$

Cr3) $R_h^*\omega = Ad_{h^{-1}} \circ \omega$, para todo $h \in H$, es decir, el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} T_qQ \arrow[r, "(R_h)_*"] \arrow[d, "\omega"'] & T_qhQ \arrow[d, "\omega"] \\ \mathfrak{g} \arrow[r, "Ad_h^{-}1"'] & \mathfrak{g} \end{tikzcd}$$

Se dice por esto que ω es Ad_H-equivariante.

El par (Q, ω) se denomina Geometría de Cartan modelada en G/H.

3.1.1. Notaciones

(1) La condición **Cr1)** implica que Q es paralelizable. Si $A \in \mathfrak{g}$ denotamos por $\tilde{A}$ el único campo en Q, que verifica la identidad:

$$\omega(\tilde{A}(q)) = A \; \forall q \in Q$$

(2) La condición **Cr2)** nos indica que el campo vertical fundamental $A^{\#}$ en Q asociado a $A \in \mathfrak{h}$ coincide con $\tilde{A}$, y para cada $x \in M$, $q \in Q_x$, ω induce isomorfismo

$$T_q Q_x \xrightarrow{\omega} \mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$$

3.2. AdH-estructura asociada a un espacio homogeneo.

Un espacio homogeneo $M = F = G/H$ admite una G/H-estructura tangencial canónica, ya que, $\pi_o : Q = G \to F = M$ es un $H-$fibrado principal con fibra H.

Por otra pare, la forma de Maurer_Cartan $\omega \in \Lambda^1(TG, \mathfrak{g})$ define un conexión de Cartan sobre esta estructura tangencial.

Cada elemento $g \in G$, induce una $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ *-referencia* φ_g^{-1} en el punto $\pi(g) = g.o = x \in F$. En efecto: g permite asociar a cada vector de $T_x F$ unas *coordenadas* en $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ dadas por el isomorfismo lineal

$$\varphi_g = d\lambda_g(o)^{-1} : T_x F \to T_o F = \mathfrak{g}/\mathfrak{h}$$

y φ_g se expresa por medio de la forma de Maurer-Cartan ω, para $v_x \in T_x F$

$$\varphi_g\left(\pi_* v_g\right) = \omega\left(v_g\right) + \mathfrak{h}$$

que es independiente del $v_g \in T_g G$, tal que $\pi_* v_g = v_x$, ya que $\omega\left(w_g\right) \in \mathfrak{h}$, si $w_g \in T_g H$.

El siguiente diagrama es por tanto conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
T_g G \arrow[r, "\omega"] \arrow[d, "\pi_*"'] & \mathfrak{g} \arrow[d] \\
T_x F \arrow[r, "\varphi_g"'] & \mathfrak{g}/\mathfrak{h}
\end{tikzcd}$$

la condición **Cr3)** $R_h^* \omega = Ad_{h^{-1}} \circ \omega$, para todo $h \in H$ nos garantiza que :

$$\varphi_{gh}(v_x) = \omega\left(R_h^* v_g\right) + \mathfrak{h} = Ad_{h^{-1}} \circ \omega\left(v_g\right) + \mathfrak{h} = \overline{Ad_{h^{-1}}} \varphi_g(v_x)$$

es decir:

$$\varphi_{gh}^{-1} = \varphi_g^{-1} \circ \overline{Ad_h}$$

de forma que $\varphi_{gh} = \varphi_g$ si y solo si $\overline{Ad_h} = id \in GL(\mathfrak{g}/\mathfrak{h})$

Sea $L(G/H)$ el conjunto de todas las referencias φ_g^{-1}, $g \in G$. El subgrupo $\overline{Ad}H$ de $GL(\mathfrak{g}/\mathfrak{h})$ actua de forma efectiva por la derecha sobre $L(G/H)$ por composición

$$R_{\overline{Ad}_h}\left(\varphi_g^{-1}\right) = \varphi_g^{-1} \circ \overline{Ad_h} = \varphi_{gh}^{-1}$$

y así $L(G/H) \to F$ es un fibrado de $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$-referencias. Además la aplicación

$$G \to L(G/H),\, g \to \varphi_g^{-1}$$

es un homomorfismo de fibrados principales, con homomorfismo de *fibras* asociado $\overline{Ad} : H \to \overline{Ad}H$.

Si el espacio homogeneo es de primer orden, entonces se trata de un isomorfismo, y $\pi : G \to F$ debe ser considerado un fibrado de $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$-referencias sobre F.

3.3. AdH-Estructura asociada a una geometría de Cartan

En presencia de una conexión de Cartan $\omega \in \Lambda^1(TQ, \mathfrak{g})$ sobre la estructura tangencial $\pi^Q : Q \to M$, cada elemento $q \in Q$, induce una $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}-$ *referencia* φ_q^{-1}en el punto $x = \pi^Q(q) \in M$, que viene definida, para cada $v_x \in T_xM$ por:

$$\varphi_q : T_xM \to \mathfrak{g}/\mathfrak{h},\, v_x = \pi_*^Q v_q \to \omega\left(v_q\right) + \mathfrak{h} \tag{7}$$

que es independiente del $v_q \in T_qQ$, tal que $\pi_*^Q v_q = v_x$, ya que si $\pi_*^Q(v_q) = \pi_*^Q(\tilde{v}_q) = v_x$ entonces $\tilde{v}_q - v_q \in T_qQ_x$ y $\omega\left(\tilde{v}_q - v_q\right) \in \mathfrak{h}$ por **Cr2**).

Análogamente a lo que sucedía antes, la condición **Cr3)** nos garantiza que

$$\varphi_{qh} = \overline{Ad_{h^{-1}}}\varphi_q \text{ para todo } q \in Q,\ h \in H$$

Asociada a la geometría de Cartan (Q, ω), hay una $\overline{Ad}H$-estructura Q^ω formada por todas las $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}-$ *referencias* φ_q^{-1} con $q \in Q$, y hay un epimorfismo natural $Q \ni q \to \varphi_q^{-1} \in Q^\omega$, que en el caso de tratarse de una geometría de primer orden, sería un isomorfismo.

3.4. Tangencialidad entre fibra y base

En presencia de una conexión de Cartan $\omega \in \Lambda^1(TQ, \mathfrak{g})$ sobre la estructura tangencial $\pi^Q : Q \to M$, se identifican canónicamente T_xM y $T_{\sigma(x)}E_x$.

Demostración:

La aplicación $q_F : F \ni \xi \to q \times_H \xi \in E_x$, es difeomorfismo que transforma el punto $o \in F$ en el $o_x = \sigma(x)$, se tiene así un isomorfismo natural

$$\phi_q : T_xM \to T_{o_x}E_x, v_x \to q_{F*}\left(\varphi_q(v_x)\right)$$

Probaremos ahora que $\phi_q = \phi_{\tilde{q}}$ para todo $q, \tilde{q} \in Q_x$. En efecto, si $\tilde{q} = qh$, para $h \in H$, se ve que

$$\tilde{q}_F(\xi) = qh \times_H \xi = q \times_H h\xi = q_F \circ L_h(\xi),\, \forall \xi \in F$$

así, si $v_x = \pi_*^P(v_q) \in T_xM$, es también $v_x = \pi_*^P(R_{h*}v_q)$, y se verifica:

$$\begin{aligned}
\phi_{\tilde{q}}(v_x) &= \tilde{q}_{F*}\left(\varphi_{qh}(v_x)\right) \\
&= q_{F*} \circ L_{h*}\left(\overline{Ad_{h^{-1}}}\varphi_q(v_x)\right) \\
&= q_{F*}\left(\overline{Ad_h}\left(\overline{Ad_{h^{-1}}}\varphi_q(v_x)\right)\right) \\
&= \phi_q(v_x)
\end{aligned}$$

3.5. Conexión lineal y conexión de Cartan.

El concepto de conexión de Cartan, se puede presentar como una generalización natural del de conexión lineal en una H-estructura.

Sea $\pi^Q : Q \to M$ una H-estructura en M. Es decir, Q es un fibrado principal sobre H, subgrupo cerrado de $Gl(m, \mathbb{R})$. A partir de una conexión lineal $\gamma \in \Lambda^1(TQ, \mathfrak{h})$ en Q, podemos construir canónicamente una conexión de Cartan $\omega \in \Lambda^1(TQ, \mathfrak{h} \oplus_{sd} \mathbb{R}^m)$, sobre la $\mathbb{R}^m$ estructura tangencial en M dada en el epígrafe 2.2.

En efecto, sea $\theta \in \Lambda^1(TQ, \mathbb{R}^m)$ la forma vertical canónica definida por la condición

$$\pi_*^Q \xi = v\theta(\xi) = (v_1, \ldots v_m)\begin{pmatrix} \theta_1(\xi) \\ \vdots \\ \theta_m(\xi) \end{pmatrix}$$

para todo $v \in Q$, $\xi \in T_vQ$, y en donde $v = (v_1, \ldots v_m)$ se ve como una base de T_xM $(x = \pi^Q(v))$.

Se define entonces

$$\omega = \gamma \oplus \theta \in \Lambda^1(Q, \mathfrak{h} \oplus_{sd} \mathbb{R}^m)$$

veamos que ω es conexión de Cartan:

Las propiedades **Cr1)** y **Cr2)** son inmediatas. Centremonos en la

Cr3) $R_h^*\omega = Ad_{h^{-1}} \circ \omega$, para todo $h \in H$.

Como esta condición es satisfecha por γ es suficiente probarlo con θ. Para ello basta observar que la acción adjunta Ad_H sobre $\mathfrak{h} \oplus_{sd} \mathbb{R}^m$ coincide sobre $\mathbb{R}^m$, con la acción natural por la izquierda de H. En efecto, para cada $\lambda \in \mathbb{R}^m$

$$Ad_h(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & h \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \lambda & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & h^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ h\lambda & 0 \end{pmatrix} = h\lambda$$

Ahora bien, se tiene la identidad

$$\mathfrak{q}_*(R_h)_*\xi = \mathfrak{q}_*\xi = v\theta(\xi) = (vh)\left(h^{-1}\theta(\xi)\right)$$

lo que prueba que $\theta((R_h)_*\xi) = Ad_{h^{-1}}\theta(\xi)$, para todo $v \in Q$, $\xi \in T_vQ$, $h \in H$.

Observese que la conexión de Cartan obtenida es reductiva de primer orden.

3.6. Conexiones de Cartan reductivas

Partimos de una geometría de Cartan (Q, ω) modelada en G/H Supongase que estamos en las condiciones reductivas, es decir, existe una subálgebra $\mathfrak{p}$ de $\mathfrak{g}$ de forma que

$$Ad_h(\mathfrak{p}) \subset \mathfrak{p}\ \forall h \in H,\ \mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{p}$$

En esta situación la conexión de Cartan ω descompone en la forma

$$\omega = \omega_{\mathfrak{h}} + \omega_{\mathfrak{p}}$$

y $\gamma = \omega_{\mathfrak{h}}$ define sobre $Q = Q^{\omega}$, una conexión. La razón de esto, es que $\omega_{\mathfrak{h}}$ verifica la propiedad de Ad_H-equivariancia

$$R_h^* \omega_{\mathfrak{h}} = Ad_{h^{-1}} \omega_{\mathfrak{h}} \forall h \in H$$

gracias a que por **Cr3)** ω la verifica, y Ad_h respeta la descomposición $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{p}$. Por tanto, ω induce una conexión γ sobre el fibrado principal Q.

Si además (Q, ω)de primer orden, se identifica canónicamente con la $\overline{Ad}H$-estructura Q^{ω} formada por todas las $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}-$ *referencias* φ_q^{-1} con $q \in Q$, e induce por tanto una conexión lineal.

La parte $\omega_{\mathfrak{p}}$ es esencialmente (en virtud de la fórmula (7)) la forma vertical canónica de Q^{ω}, ya que se tiene la identidad:

$$\varphi_q\left(\pi_*^Q v_q\right) = \omega(v_q) + \mathfrak{h} = \omega_{\mathfrak{p}}(v_q)$$

Así pues se tiene el reccíproco del epígrafe 3.5:

Una conexión de Cartan, sobre una estructura tangencial reductiva de primer órden, es esencialmente una conexión lineal.

3.7. Conexión standar asociada a una conexión de Cartan

Teorema 3 *Dada una conexión de Cartan $\omega \in \Lambda^1(TQ, \mathfrak{g})$, existe una única conexión $\bar{\omega} \in \Lambda^1(TP, \mathfrak{g})$, tal que $\iota_Q^* \bar{\omega} = \omega$ es decir:*

$$\forall q \in Q,\ es\ \omega(v_q) = \bar{\omega}(v_q)\ para\ todo\ v_q \in T_qQ \subset T_qP.$$

*Recíprocamente, una conexión lineal $\bar{\omega} \in \Lambda^1(P, \mathfrak{g})$ induce una conexión de Cartan en Q si y solo si $\iota^* \bar{\omega} = \omega$ verifica la propiedad **Cr1)***

Demostración: Nótese primero que si $q \in Q_x$, como $T_qQ \cap T_qP_x = T_qQ_x$ se concluye por razón de dimensiones que:

$$T_qP = T_qQ + T_qP_x$$

Por otra parte, T_qQ y T_qP_x están canónicamente identificados con $\mathfrak{g}$ vía (ver notaciones 3.1.1):

$$\mathfrak{g} \ni A \to \tilde{A}(q) \in T_qQ$$
$$\mathfrak{g} \ni B \to B^{\#}(q) \in T_qP_x$$

de forma que si $v \in T_qP$ existen $A, B \in \mathfrak{g}$ tales que $v = \tilde{A}(q) + B^{\#}(q)$, donde $B^{\#}$ es le campo fundamental vertical asociado a B en P, y Así, si existe $\bar{\omega} \in \Lambda^1(TP, \mathfrak{g})$ conexión en P tal que $\iota_Q^*\bar{\omega} = \omega$, es $\bar{\omega}(v) = \bar{\omega}(\tilde{A}(q)) + \bar{\omega}(B^{\#}(q)) = \omega(\tilde{A}(q))) + B = A + B$. Podemos pues tomar como definición de $\bar{\omega} : T_qP \to \mathfrak{g}$:

$$\bar{\omega}(v) = A + B, \text{ si } v = \tilde{A}(q) + B^{\#}(q) \text{ con } A, B \in \mathfrak{g}$$

además $\bar{\omega}(v)$ no depende de los $A, B \in \mathfrak{g}$ encontrados, pues si $v = \tilde{X}_q + Y_q^{\#}$ con $X, Y \in \mathfrak{g}$, esto significa que

$$(\widetilde{A - X})(q) = (Y - B)^*(q) \in T_qQ \cap T_qP_x = T_qQ_x$$

por tanto $(Y - B)^{\#}(q) = (\widetilde{Y - B})(q) = (\widetilde{A - X})(q)$ de donde $Y - B = A - X$, es decir $A + B = X + Y$.

El *valor* de $\bar{\omega}$ en otro punto $p = qg$ se obtiene por la conmutatividad del diagrama:

$$\begin{tikzcd}
T_qP \arrow[r, "(R_g)_*"] \arrow[d, "\omega"'] & T_qgQ \arrow[d, "\omega"] \\
\mathfrak{g} \arrow[r, "Ad_g^-1"'] & \mathfrak{g}
\end{tikzcd}$$

3.7.1. Observaciones

(1) La condición de que $\bar{\omega}$ proceda de una conexión de Cartan ω en el fibrado Q, impone que $\ker \bar{\omega} \cap T_qQ = \{0\}$. Por razón de dimensiones, se concluye $T_qP = \ker \bar{\omega} \oplus T_qQ$.

(2) Una conexión $\bar{\omega} \in \Lambda^1(TP, \mathfrak{g})$ induce un transporte paralelo sobre el fibrado asociado $E = P \times_G F$, de forma que si $c : t \to x_t$ es una curva en M por x_0, y $e_0 = p_0 \times_G \xi \in E_{x_0}$, entonces $t \to e_t = p_t \times_G \xi$ es el transporte de e_0 a lo largo de c, donde $t \to p_t$ es la elevación horizontal de γ por p_0. Si escribimos $e_t = \|_0^t e_0$ resulta ser $\|_0^t : E_{x_0} \to E_{x_t}$ un difeomorfismo (que depende de c) entre los espacios homogeneos tangentes, cuya inversa se denota por $\|_t^0 : E_{x_t} \to E_{x_0}$. La curva $c_0(t) = \|_t^0 \sigma(x_t)$ se llama desarrollo de γ en el espacio homogéneo tangente E_{x_0}

Ejercicio 4 *Hacer ver como las geodésicas son las proyecciones de las curvas integrales de los campos* $\omega^{-1}(\lambda)$ *con* $\lambda \in \mathbb{R}^m$.

Ejercicio 5 *Estudiar como funciona el desarrollo de una curva en esta conexión de Cartan. Demostrar que este desarrollo para* $c(t)$ *curva en* M *con* $c(0) = x_0$ *es de la forma* $c_0(t) = tc'(0)$ *si y solo si* $c(t)$ *es geodésica.*

Ejercicio 6 *Restablecer aquí el concepto de curvatura y torsión en términos de la conexión de Cartan*

4. Conexiones Pseudoreductivas de Cartan

Se refiere a las conexiones de Cartan ω dadas sobre una estructura tangencial pseudoreductiva.

a) Se puede generalizar aquí, a la vista de lo dicho en el epígrafe 3.5, el concepto de geodésica (Geodésicas de Cartan) y caracterizarlas en términos del desarrollo en el espacio homogeneo tangencial.

b) Es el momento de hablar de la Curvatura, y de la *derivación* inducida.

c) Hacer ver que una conexión de Cartan sobre una estructura tangencial fuertemente reductiva de primer orden, es esencialmente una conexión clásica de Ehresmann sobre un fibrado principal.

d) Holonomía y Curvatura.

5. Conexiones Normales de Cartan (AHS-Estructuras!).

En esta sección vamos a analizar el problema de existencia y unicidad de conexiones de Cartan en una situación especial, que en la práctica se refiere a dos casos muy concretos: son las conexiones normales proyectivas y conformes de Cartan.

5.1. $G/H-$Estructuras tangenciales normales

Una G/H-estructura tangencial de M se dice *normal*, si el álgebra de lie $\mathfrak{g}$ está graduada en la forma

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_{-1}$$

donde

$$\mathfrak{h} = \mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_0 = \mathbb{R}_m \oplus_{sd} \mathfrak{g}_0 \text{ y } \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_{-1} = \mathfrak{g}_0 \oplus_{sd} \mathbb{R}^m$$

En estas condiciones, sea $B \xrightarrow{\mathfrak{p}} M$ una G_0-estructura, es decir, un G_0-fibrado principal sobre M, con G_0 subgrupo cerrado del lineal general $GL(m, \mathbb{R})$, con álgebra de Lie $\mathfrak{g}_0$ ($m = \dim M$). Supongase que H es el grupo *afinizado* de

G_0, es decir, $H = AG_0 = \mathbb{R}_m \times_{sd} G_0$. Entonces B se extiende (canónicamente) al H-fibrado principal $Q = B \times_{G_0} H$, con proyección $\mathfrak{p}(b \times_{G_0} h) = \mathfrak{p}(b)$. La inclusión $\iota : B \ni b \to b \times_{G_0} e \in Q$, hace que B sea una G_0-reducción de Q. Se dice que esta G/H-estructura tangencial es $B-$normal.

5.2. Conexiones adaptadas de Cartan

Sea $\omega : TQ \to \mathfrak{g}$ una conexión de Cartan, sobre una G/H-estructura tangencial $B-$normal en M. Entonces para cada $v_q \in T_qQ$ podemos escribir $\omega(v_q) = \omega_{-1}(v_q) + \omega_0(v_q) + \omega_1(v_q)$ donde $\omega_i(v_q) \in \mathfrak{g}_i$, así cada $\omega_i \in \Lambda^1(TQ, \mathfrak{g}_i)$. Si $\theta \in \Lambda^1(TB, \mathbb{R}^m)$ es la restricción a B de la forma vertical canónica del fibrado de referencias $L(M)$, se dice que ω está adaptada a B, si $\theta = \iota^*\omega_{-1}$, siendo $\iota : B \hookrightarrow Q$

Recuerdese que la forma vertical canónica $\theta \in \Lambda^1(TB, \mathbb{R}^m)$ está definida por $\theta(v) = b^{-1}(\mathfrak{p}_* v)$, para $v \in T_bB$. Así para $g \in G_0$, es $R_g^*\theta = g^{-1}\theta$ ya que:

$$\left(R_g^*\theta\right) v = \theta(R_{g*}v) = (bg)^{-1}\mathfrak{p}_* v = \left(g^{-1}\theta\right) v$$

5.2.1. Observaciones:

(1) Un elemento $b \in B_x$ es una base de T_xM, induce isomorfismo $b : \mathbb{R}^m \to T_xM$. Por otra parte, como $b \in Q_x$ y la aplicación $b_F : F \ni \xi \to b \times_H \xi \in E_x$ induce isomorfismo $b_{F*} : T_oF = \mathfrak{g}/\mathfrak{h} = \mathfrak{g}_{-1} = \mathbb{R}^m \to T_{\sigma(x)}E_x$. Pero la conexión de Cartan ω permite escribir por la proposición 3.4: $T_xM = T_{\sigma(x)}E_x$. La condición $\theta = \iota^*\omega_{-1}$, expresa la igualdad:

$$b = b_{F*} : \mathbb{R}^m \to T_xM.$$

(2) Nótese que la acción adjunta del grupo G_0 sobre el álgebra de Lie $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{-1} \oplus \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1$ viene definida para cada $g \in G_0$ y $v + A + \zeta \in: \mathfrak{g}_{-1} \oplus \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1$

$$\begin{gathered} Ad_g\,(v + A + \zeta) = \\ = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & g \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ v & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \zeta \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & g^{-1} \end{pmatrix} \\ = gv + gAg^{-1} + \zeta g^{-1} \end{gathered}$$

En particular $Ad_g = g : \mathfrak{g}_{-1} \to \mathfrak{g}_{-1}$, y la condición $\theta = \iota^*\omega_{-1}$ implica que el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{tikzcd} T_bB \arrow[r, "R_g*"] \arrow[d, "\omega_{-}1 = \theta"'] & T_bgB \arrow[d, "\theta = \omega_{-}1"] \\ \mathfrak{g}_{-}1 = \mathbb{R}^m \arrow[r, "g^{-}1 = Ad_g^{-}1"'] & \mathbb{R}^m = \mathfrak{g}_{-}1 \end{tikzcd}$$

(3) Para $h \in H$, el isomorfismo $Ad_h : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ deja invariante $\mathfrak{h} = \mathfrak{g}_0 + \mathfrak{g}_1$ por lo que induce isomorfismo $\overline{Ad_h} : \mathfrak{g}/\mathfrak{h} = \mathfrak{g}_{-1} = \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m = \mathfrak{g}_{-1} = \mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ que coincide (en el caso seminormal) con $Ad_h : \mathfrak{g}_{-1} \to \mathfrak{g}_{-1}$ cuando $h \in G_0$, pero en general, no es cierto que Ad_h deje invariante $\mathfrak{g}_{-1}$.

(4) La condición $\theta = \iota^* \omega_{-1}$ determina completamente ω_{-1}, en cada espacio $T_b Q$ para $b \in B$.

Teorema 7 *Sea $Q \xrightarrow{\mathfrak{p}} M$ es una G/H-estructura tangencial normal sobre M, $\omega_i \in \Lambda^1(TQ, \mathfrak{g}_i)$ para $i = -1, 0$. Supóngase que:*
(a) $\omega_{-1}(A^*) = 0$ y $\omega_0(A^*) = A_0$ para todo $A = A_0 + A_1 \in \mathfrak{g}_0 + \mathfrak{g}_1$
(b) $\omega_{-1} + \omega_0$ es Ad_H-equivariante
(c) $\ker \omega_{-1}(q) = T_q Q_x$, para todo $x \in M$, y todo $q \in Q_x$
Existe entonces $\omega_1 \in \Lambda^1(TQ, \mathfrak{g}_1)$ de forma que $\omega = \omega_{-1} + \omega_0 + \omega_1$ es conexión de Cartan. Por otra parte, todas las posibles ω_1 son de la forma:

$$\bar{\vartheta}_1 = \omega_1 + (f_{ij})\omega_{-1}$$

donde (f_{ij}) es una matriz $m \times m$ de funciones diferenciables $f_{ij} : Q \to \mathbb{R}$. ∎

5.3. Curvatura