CURVAS SUMERGIDAS EN UNA VARIEDAD CONFORME CON CONEXIÓN NORMAL DE CARTAN

Javier Lafuente y Beatriz Salvador

Diciembre de 2000

Índice

1. Curvas en ambiente conforme Riemanniano.

Sea M una variedad diferenciable conforme Riemanniana m-dimensional, con conexión normal de Cartan $\omega \in \Lambda^1(Q, \mathfrak{g})$. La estructura conforme de la variedad permite definir sobre M un fibrado tangente esférico $\overline{TM} \to M$ (compactación del fibrado tangente con su estructura conforme) de la forma

$$\overline{TM} = \bigcup_{x\in M} \overline{T_x M} = \bigcup_{x\in M} (T_x M \cup \{\infty_x\})$$

que se obtiene a partir de la noción de hiperesfera generalizada inducida por la estructura conforme en los distintos espacios tangentes $T_x M$. A través de las llamadas referencias "esféricas" (difeomorfismos conformes entre la esfera m-dimensional $\mathbb{S}^m$ y las esferas tangentes $\overline{T_x\Gamma}$), se construye el fibrado principal $P(M) \to M$ y el subfibrado de las referencias especiales $Q(M) \to M$. La conexión normal de Cartan ω está definida en el ámbito de las referencias especiales $Q = Q(M)$, y su definición puede extenderse de manera G-equivariante a todo el fibrado de referencias $P = P(M)$, dando lugar a una conexión principal en el sentido usual.

Sea $N \subset M$ una subvariedad regular n-dimensional de M, siendo $n \leq m$. Es claro que la variedad N hereda del espacio ambiente M una estructura conforme y, por lo tanto, tiene también asociado un fibrado tangente esférico $\overline{TN} = \bigcup_{x\in N} (T_x N \cup \{\infty_x\}) \to N$ y los correspondientes fibrados de referencias "esféricas" $P(N) \to N$ y $Q(N) \to N$. En particular, en el caso en que la subvariedad considerada sea unidimensional, es decir, en el caso en que se tome en M una curva Γ (regular y conexa), la estructura conforme que ésta hereda del ambiente resulta ser, de manera trivial, la única definida en Γ como variedad unidimensional.

Se verá en lo que sigue que la estructura adicional proporcionada por la presencia de la conexión normal de Cartan $\omega \in \Lambda^1(Q(M), \mathfrak{g})$ en el ambiente M, permite sumergir el fibrado tangente esférico de la subvariedad en el del ambiente, y de este modo, la curva Γ heredará de M una conexión de Cartan que describe su geometría conforme (como es el parámetro conforme de la curva o la noción de círculo conforme).

1.1. Inclusión "natural" de $\overline{T_x\Gamma}$ en $\overline{T_x M}$ (versión primera).

En esta sección se presenta en primer lugar una inclusión trivial $\overline{T_x\Gamma} \hookrightarrow \overline{T_x M}$, de la esfera tangente a la curva Γ en la esfera tangente al espacio ambiente M, para todo punto $x \in \Gamma$, obtenida de manera natural como extensión del monomorfismo vectorial $T_x\Gamma \hookrightarrow T_x M$ existente entre los correspondientes espacios tangentes, al identificar los puntos del infinito de sendas compactaciones.

Más adelante se verá que en presencia de una conexión de Cartan $\omega \in \Lambda^1(Q(M), \mathfrak{g})$ se puede optimizar la definición de esta inclusión, de modo que se adapte a la geometría definida por ω e induzca en la curva Γ una nueva conexión de Cartan ω^Γ heredada del ambiente.

1.1.1. Construcción de la inclusión.

Contando con la presencia auxiliar de una métrica $< .,. >$ en la estructura conforme de T_xM, la inclusión se describe como sigue.

Todo elemnto $q^\Gamma \in \widehat{T_x\Gamma}$ representando una hiperesfera generalizada en $T_x\Gamma$ responde a una expresión de la forma

$$q^\Gamma = k \,\|.\|^2_\Gamma - 2 < v, . >_\Gamma -2r$$

para ciertos $v \in T_x\Gamma$ y $k, r \in \mathbb{R}$, siendo $< .,. >_\Gamma$ la métrica en $T_x\Gamma$ correspondiente a la restricción de $< .,. >$. Ahora, es claro que q^Γ puede identificarse de manera natural con el elemento $q \in \widehat{T_xM}$ tal que representa a la hiperesfera generalizada en T_xM de ecuación $q = k \,\|.\|^2 - 2 < v, . > -2r$.

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} \times T_x\Gamma \times \mathbb{R} & \hookrightarrow & \mathbb{R} \times T_xM \times \mathbb{R} \\ {\scriptstyle <.,.>_\Gamma} \uparrow & & \uparrow {\scriptstyle <.,.>} \\ \widehat{T_x\Gamma} & \dashrightarrow & \widehat{T_xM} \\ & & \\ (k, v, r) & \longrightarrow & (k, v, r) \\ {\scriptstyle <.,.>_\Gamma} \uparrow & & \uparrow {\scriptstyle <.,.>} \\ q^\Gamma & \dashrightarrow & q \end{array} \tag{1}$$

Queda claro también que cualquier otra métrica conforme $\overline{< .,. >}$ que se tome en T_xM define mediante este procedimiento el mismo monomorfismo vectorial entre los espacios de esferas generalizadas $\widehat{T_x\Gamma} \hookrightarrow \widehat{T_xM}$.

Observación.- Sea $q^\Gamma = k \,\|.\|^2_\Gamma - 2 < v, . >_\Gamma -2r \in \widehat{T_x\Gamma}$ para $(k, v, r) \in \mathbb{R} \times T_x\Gamma \times \mathbb{R}$.

· **Si** $k \neq 0$**:** q^Γ representa a la hiperesfera generalizada de $T_x\Gamma$ de centro $\frac{v}{k} \in T_x\Gamma$ y radio R con $R^2 = \left\|\frac{v}{k}\right\|^2 + 2\frac{r}{k}$. Entonces, q representa a la hiperesfera generalizada en T_xM de centro $\frac{v}{k} \in T_xM$ y radio $R^2 = \left\|\frac{v}{k}\right\|^2 + 2\frac{r}{k}$.

Por lo tanto, la hiperesfera dada por q^Γ en $T_x\Gamma$ se identifica con la hiperesfera de T_xM caracterizada por ser la única ortogonal a la recta $T_x\Gamma$ y cuya intersección con $T_x\Gamma$ es exactamente $[q^\Gamma]$.

· **Si** $k = 0$**:** q^Γ representa al punto $-\frac{r}{\|v\|^2}v \in T_x\Gamma$ (i.e. al hiperplano afín de $T_x\Gamma$ pasando por $-\frac{r}{\|v\|^2}v$). Entonces, q representa al hiperplano afín de T_xM por el punto $-\frac{r}{\|v\|^2}v$ y ortogonal a $T_x\Gamma$.

De nuevo el hiperplano afín en T_xM identificado con $[q^\Gamma]$ resulta ser el único ortogonal a la recta $T_x\Gamma$ verificando $[q] \cap T_x\Gamma = [q^\Gamma]$.

De este modo, vemos que el espacio $\widehat{T_x\Gamma}$ de hiperesferas generalizadas en el espacio tangente a la curva Γ, puede verse, a través del monomorfismo $\widehat{T_x\Gamma} \hookrightarrow \widehat{T_xM}$ definido en (1), naturalmente identificado con un subespacio de $\widehat{T_xM}$, el correspondiente a las hiperesferas del espacio tangente ambiente ortogonales a la recta $T_x\Gamma \subset T_xM$. Esta inclusión preserva además la estructura conforme presente en $\widehat{T_x\Gamma}$, de modo que a través de su restricción al cono de luz y su posterior proyectivización, se tiene también bien definida una inclusión a nivel de las compactaciones esféricas, esto es, a nivel de las esferas tangentes

$$\overline{T_x\Gamma} \hookrightarrow \overline{T_xM}$$

Observando el modo en que se ha construido la inclusión (1), es fácil comprobar que se verifica la conmutatividad en el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} \overline{T_x\Gamma} & \hookrightarrow & \overline{T_xM} \\ \iota_p^\Gamma \uparrow & & \uparrow \iota_p^M \\ T_x\Gamma & \underset{vectorial}{\hookrightarrow} & T_xM \end{array}$$

Dado que la identificación del espacio tangente de la complección esférica en el origen con el propio espacio vectorial conforme viene dada a través de diferencial en el origen de inclusión $\iota : V \hookrightarrow \overline{V}$, resulta evidente que la conmutatividad del diagrama anterior tiene como consecuencia que la diferencial en el origen de la inclusión que se acaba de construir entre las esferas tangentes $\overline{T_x\Gamma} \hookrightarrow \overline{T_xM}$, resulta ser la inclusión natural de $T_x\Gamma$ en T_xM como subespacio vectorial.

1.2. Referencias adaptadas a Γ (versión primera).

Una vez visto que el fibrado de esferas tangentes a una curva Γ puede sumergirse naturalmente en el fibrado de esferas tangentes del espacio ambiente M, es claro que el transporte de esferas existente en M (dado por la conexión normal de Cartan ω) podría inducir, por restricción, un transporte de esferas tangentes a la curva Γ.

La conexión normal de Cartan ω y el correspondiente movimiento de esferas, están definidos en el ámbito de las referencias especiales. A continuación, se distinguirá entre las referencias especiales del ambiente M, una subfamilia formada por aquellas que se adaptan a la curva Γ, en el sentido de que respetan la inclusión anteriormente definida. Cada una de estas referencias adaptadas tiene asociada una referencia especial de la propia curva Γ, de modo que el movimiento de referencias adaptadas pretende ser reflejado en un movimiento de referencias de la curva, y en definitiva, en un movimiento de la esfera tangente a Γ, heredado del ambiente.

Recordemos en primer lugar que toda referencia especial en $Q(M) \to M$ podía verse representada a través de la proyectivización $[\widehat{A}] = [\widehat{A}_0 : \widehat{A}_1 : .... : \widehat{A}_m : \widehat{A}_{m+1}]$ de un isomorfismo de la forma

$$\begin{array}{rcl} \widehat{A} : \mathbb{R}^{m+2} & \to & \widehat{T_x M} \\ e_i & \to & \widehat{A}_i \end{array}$$

que preserva la estructuras conformes y las rectas de los correspondientes orígenes; o de manera equivalente, a través del difeomorfismo conforme

$$A : \quad \begin{array}{rcl} \mathbb{S}^m & \to & \overline{T_x M} \\ (y_0 ... y_m) & \to & \left[\frac{y_0+1}{2}\widehat{A}_0 + y_1\widehat{A}_1 ... + (y_0 - 1)\widehat{A}_{m+1}\right] \end{array}$$

que hace corresponder sendos orígenes.

Dada la curva Γ en el espacio ambiente M se tiene que el espacio $\widehat{T_x\Gamma}$ aparece sumergido en $\widehat{T_x M}$ como subespacio vectorial de dimensión 3; diremos que $[\widehat{A}]$ es una *referencia adaptada a* Γ cuando $x \in \Gamma$ y

$$span\{\widehat{A}_0, \widehat{A}_1, \widehat{A}_{m+1}\} = \widehat{T_x\Gamma} \subset \widehat{T_x M}$$

(equivalente a que $span\{\widehat{A}_1, \widehat{A}_{m+1}\} \subset \widehat{T_x\Gamma}$, puesto que $\widehat{A}_0$ pertenece a la recta origen de $\widehat{T_x M}$ y ésta está naturalmente contenida en $\widehat{T_x\Gamma}$).

Tenemos entonces que $\widehat{A^\Gamma} := \left(\widehat{A}_0, \widehat{A}_1, \widehat{A}_{m+1}\right) : \mathbb{R}^3 \to \widehat{T_x\Gamma}$ define una referencia especial $A^\Gamma : \mathbb{S}^1 \to \overline{T_x\Gamma}$ para la curva Γ.

De manera alternativa, una *referencia adaptada a* Γ es un difeomorfismo conforme preservando el origen, $A : \mathbb{S}^m \to \overline{T_x M}$, tal que $A^{-1}(\overline{T_x\Gamma})$ se correponde con el círculo $\mathbb{S}^1$ en $\mathbb{S}^m$ resultado de la intersección con el plano $\{y_2 = ... = y_m = 0\}$ de $\mathbb{R}^{m+1}$ generado por los dos primeros ejes.

Es claro que para las referencias especiales $A \in Q(M)_x$ y $A^\Gamma \in Q(\Gamma)_x$ se tiene el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{S}^m & \overset{A}{\hookrightarrow} & \overline{T_x M} \\ \uparrow & & \uparrow \\ \mathbb{S}^1 & \underset{A^\Gamma}{\hookrightarrow} & \overline{T_x\Gamma} \end{array}$$

y al nivel de las diferenciales en el origen $A_* \in CO(M)_x$ y $A_*^\Gamma \in CO(\Gamma)_x$

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^m & \overset{A_*}{\hookrightarrow} & T_x M \\ \uparrow & & \uparrow \\ \mathbb{R}^1 & \underset{A_*^\Gamma}{\hookrightarrow} & T_x\Gamma \end{array}$$

Observación.- Si $A : \mathbb{S}^m \to \overline{T_xM}$ es una referencia especial de M adaptada a la curva Γ, la referencia lineal conforme asociada $A_* \in CO(M)$ es tal que el primer vector de la base está en la dirección de $T_x\Gamma$, y los siguientes en el espacio ortogonal $(T_x\Gamma)^\perp$ de T_xM.

1.3. Inclusiones de $\overline{T_x\Gamma}$ en $\overline{T_xM}$.

En la sección anterior se vio que para toda curva Γ sumergida en una variedad M con estructura conforme, existe una inclusión natural del fibrado de esferas tangentes a Γ en el fibrado de esferas tangentes a M, de modo que cada $\overline{T_x\Gamma}$ queda identificado con un círculo[1] en $\overline{T_xM}$ pasando por el origen $O_x \in \overline{T_xM}$ con dirección tangente a $T_x\Gamma \subset T_xM = T_{O_x}\left(\overline{T_xM}\right)$. Se observa también que este círculo cumple la condición adicional de pasar por el punto del infinito ∞_x de $\overline{T_xM}$. Es claro que tales condiciones (ser un círculo pasando por dos puntos dados, con una dirección tangente fija en uno de ellos) caracterizan por completo a la subvariedad de $\overline{T_xM}$ que se identifica con $\overline{T_x\Gamma}$.

Ahora bien, las referencias especiales, que forman el fibrado en el cual se define la conexión normal de Cartan y que por tanto son la herramienta clave para el desplazamiento de esferas, son referencias que preservan el punto origen O_x pero que pierden el punto del infinito ∞_x, al no coincidir necesariamente su antimagen con el punto infinito natural ∞ de $\mathbb{S}^m$. De este modo, esta última condición sobre el círculo identificable con $\overline{T_x\Gamma}$, referente al punto infinito ∞_x, resulta poco coherente con el desplazamiento de esferas del espacio ambiente. Se verá más adelante que puede ser sustituida por otra condición más adaptada al movimiento de esferas, recogiendo así la estructura adicional de la conexión de Cartan ω en el ambiente M.

Por lo tanto, será interesante liberar la condición de contener al punto del infinito y estudiar, para todo $x \in \Gamma$, la familia de círculos $\overline{C}_x$ en $\overline{T_xM}$ que pasan por el origen $O_x \in \overline{T_xM}$ con dirección tangente a $T_x\Gamma \subset T_xM = T_{O_x}\left(\overline{T_xM}\right)$, como familia de posibles candidatos a ser identificados con la esfera tangente a la curva $\overline{T_x\Gamma}$.

Observación.- Si $\overline{C}_x$ es un círculo en $\overline{T_xM}$ pasando por el origen $O_x \in \overline{T_xM}$ con dirección tangente a $T_x\Gamma$, pero sin contener al punto del infinito $\infty_x \in \overline{T_xM}$, la inclusión $\iota : T_xM \hookrightarrow \overline{T_xM}$ permite considerar al círculo $\overline{C}_x$ en el espacio T_xM. La preimagen $\iota^{-1}(\overline{C}_x) \subset T_xM$ es entonces un círculo[2] C_x

[1] Un *círculo en* $\overline{T_xM}$ es una subvariedad unidimensional que a través de una/cualquier referencia conforme $A : \mathbb{S}^m \to \overline{T_xM}$ se corresponde con un círculo usual en $\mathbb{S}^m$.

[2] Un *círculo* en el espacio vectorial conforme T_xM es una subvariedad unidimensional formada por los puntos que equidistan de un punto central, según la distancia dada por cualquiera de las métricas en la estructura conforme.

en el espacio vectorial conforme T_xM que pasa por el origen $O \in T_xM$ y es tangente a la recta $T_x\Gamma$.

En el caso límite en que el punto del infinito ∞_x pertenezca a $\overline{C}_x$, se tiene que $C_x = \iota^{-1}(\overline{C}_x) \subset T_xM$ resulta ser la propia recta $T_x\Gamma$.

Queda claro también a través de esta observación que para todo $x \in \Gamma$ la familia de círculos en $\overline{T_xM}$ pasando por el origen con dirección tangente a $T_x\Gamma$ tiene $m-1$ grados de libertad.

La inclusión $\overline{T_x\Gamma} \hookrightarrow \overline{T_xM}$ asociada a la identificación del espacio $\overline{T_x\Gamma}$ con un círculo genérico $\overline{C}_x$ en $\overline{T_xM}$, se construye de manera totalmente análoga a cómo se hizo en la sección 1.1.

Sabemos que $C_x = \iota^{-1}(\overline{C}_x)$ es un círculo en T_xM tangente a la recta vectorial $T_x\Gamma$ en el origen, por lo tanto, el hiperplano ortogonal $(T_xM)^\perp$ interseca con C_x en el origen y en otro punto (diametralmente opuesto) que denotaremos por $\infty(Cx)$. La proyección del círculo C_x desde el punto $\infty(C_x)$ sobre la recta $T_x\Gamma$ define entonces una correspondencia entre $C_x \backslash \{\infty(C_x)\}$ y el espacio tangente $T_x\Gamma$, pudiéndose considerar entonces el círculo $\overline{C}_x$ como una compactación de $T_x\Gamma$ por el punto $\infty(C_x)$.

$$\overline{C}_x = T_x\Gamma \cup \{\infty(C_x)\}$$

Es clara entonces la correspondencia con la complección esférica $\overline{T_x\Gamma}$, obtenida a través de la identificacción de sendos puntos del infinito.

$$\overline{T_x\Gamma} = T_x\Gamma \cup \{\infty_x\} \overset{\sim}{\longleftrightarrow} T_x\Gamma \cup \{\infty_x(C_x)\} = \overline{C}_x \hookrightarrow \overline{T_xM}$$

En este caso, la inclusión a nivel de los espacios de hiperesferas generalizadas $\widehat{T_x\Gamma} \hookrightarrow \widehat{T_xM}$ es tal que toda hiperesfera $[q^\Gamma]$ en $T_x\Gamma$ queda identificada con la única hiperespera $[q]$ en T_xM que es ortogonal a C_x y cuya intersección con dicho círculo coincide exactamente con los puntos de $C_x = T_x\Gamma \cup \{\infty(C_x)\}$ pertenecientes a la hiperesfera inicial $[q^\Gamma]$ de $T_x\Gamma$.

1.3.1. Referencias adaptadas a Γ respecto a una inclusión de $\overline{T_x\Gamma}$ en $\overline{T_xM}$.

Fijada una elección para el círculo $\overline{C}_x \subset \overline{T_xM}$ identificable con $\overline{T_x\Gamma}$, podemos distinguir entre las referencias especiales de M sobre $x \in \Gamma$ una subfamilia de referencias que se adapten a $\overline{C}_x$, de manera totalmente análoga a como se hizo anteriormente en1.2.

Nos interesarán en este caso las referencias especiales cuyo difeomorfismo conforme asociado

$$\begin{array}{rcl} A : \mathbb{S}^m & \to & \overline{T_xM} \\ O & \to & O_x \end{array}$$

verifica la propiedad de ser $A^{-1}(\overline{C}_x) = \mathbb{S}^1 = \mathbb{S}^m \cap \{y_2 = ... = y_m = 0\}$. De igual modo, A da lugar a una referencia especial A^Γ de $\overline{T_x\Gamma}$, caracterizada por ser la única que hace conmutativo el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{S}^m & \overset{A}{\hookrightarrow} & \overline{T_xM} \\ \uparrow & & \uparrow^{\overline{C}_x} \\ \mathbb{S}^1 & \underset{A^\Gamma}{\hookrightarrow} & \overline{T_x\Gamma} \end{array}$$

que tiene su equivalente, a nivel de las diferenciales en el origen, para los isomorfismos conformes $A_* \in CO(M)_x$ y $A_*^\Gamma \in CO(\Gamma)_x$

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^m & \overset{A_*}{\hookrightarrow} & T_xM \\ \uparrow & & \uparrow \\ \mathbb{R}^1 & \underset{A_*^\Gamma}{\hookrightarrow} & T_x\Gamma \end{array}$$

Observación.- Si $A : \mathbb{S}^m \to \overline{T_xM}$ es una referencia adaptada a Γ según una elección $\overline{C}_x$ para el círculo identificable con $\overline{T_x\Gamma}$, entonces, la referencia lineal asociada $A_* \in CO(M)_x$ es tal que su primer vector v_1 está en la dirección de $T_x\Gamma$, y los $m-1$ vectores restantes $v_2, ..., v_m$ en el espacio ortogonal $(T_x\Gamma)^\perp$ de T_xM.

Observación.- Si $A : \mathbb{S}^m \to \overline{T_xM}$ es una referencia adaptada a Γ según una elección $\overline{C}_x \subset \overline{T_xM}$, entonces, el círculo $C_x \subset T_xM$ está contenido en cada una de las hiperesferas $[\widehat{A}_i]$ de T_xM, para $i = 2, ..., m$. Esto resulta inmediato si se observa que todo punto perteneciente a C_x se expresa a través de una combinación de $\widehat{A}_0, \widehat{A}_1, \widehat{A}_{m+1}$, de manera que su producto con cualquiera de los $\widehat{A}_i$, para $i = 2, ..., m$, será nulo; como se sabe, esto significa que el punto representado pertenece a la correspondiente hiperesfera de T_xM.

1.3.2. Subgrupo de H asociado a las referencias adaptadas a Γ.

En general, si $[\widehat{A}] = A$ es una referencia adaptada a Γ para cierto $\overline{C}_x$, se tienen los siguientes hechos:

(i) $[\widehat{A}_0]$ =origen $O_x \in \overline{T_xM}$

(ii) $[\widehat{A}_1]$ =hiperesfera generalizada en T_xM pasando por el origen O y ortogonal a $T_x\Gamma$ (puesto que $A_*(e_i)$ define un vector en T_xM ortogonal a la hiperesfera $[\widehat{A}_i]$ en el origen)

(iii) $[\widehat{A}_{m+1}]$ es un punto en $\overline{T_xM}$ contenido en el círculo $\overline{C}_x$.

Si llamamos *referencias adaptadas a* Γ a la familia de las referencias adaptadas para todos los posibles círculos identificables con $\overline{T_x\Gamma}$, estas no tienen restricción añadida sobre el elemento $[\widehat{A}_{m+1}]$, y vienen condicionadas únicamente por (i) e (ii). Es claro entonces que el cambio de referencia matricial entre dos referencias adaptadas a Γ viene dado por un elemento del grupo $H \approx CO(m) \leftthreetimes \mathbb{R}^{m*}$ que presenta la siguiente forma

$$h = \begin{pmatrix} a & \boxed{\begin{matrix} \alpha_1 & \alpha \end{matrix}} & \frac{-\left(\alpha_1^2+|\alpha|^2\right)}{2a} \\ \boxed{\begin{matrix} 0 \\ 0 \\ \ldots \\ 0 \end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix} \varepsilon & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & & & \\ \ldots & & A & \\ 0 & & & \end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix} \frac{-\varepsilon\alpha_1}{a} \\ \\ \frac{-A\alpha^T}{a} \\ \\ \end{matrix}} \\ 0 & \boxed{\begin{matrix} 0 & 0 & \ldots & 0 \end{matrix}} & a^{-1} \end{pmatrix} \in H \qquad (2)$$

$$h = \left(a^{-1} \begin{pmatrix} \varepsilon & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & & & \\ \ldots & & A & \\ 0 & & & \end{pmatrix}, a^{-1}\left(\alpha_1, \alpha\right) \right) \in CO(M) \leftthreetimes \mathbb{R}^{m*}$$

para $A \in O(m-1)$, $(\alpha_1, \alpha) \in \mathbb{R}^{m*}$ y $\varepsilon = \pm 1$.

Por otra parte, si nos restringimos a la familia de referencias adaptadas de M sobre $x \in \Gamma$ para una elección de círculo $\overline{C}_x$ concreto, los elementos matriciales correspondientes al cambio de referencias tendrán la forma

$$h = \begin{pmatrix} a & \boxed{\begin{matrix} \alpha_1 & 0 & \ldots & 0 \end{matrix}} & \frac{-\alpha_1^2}{2a} \\ \boxed{\begin{matrix} 0 \\ 0 \\ \ldots \\ 0 \end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix} \varepsilon & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & & & \\ \ldots & & A & \\ 0 & & & \end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix} -\frac{\varepsilon\alpha_1}{a} \\ 0 \\ \ldots \\ 0 \end{matrix}} \\ 0 & \boxed{\begin{matrix} 0 & 0 & \ldots & 0 \end{matrix}} & a^{-1} \end{pmatrix} \in H \qquad (3)$$

$$h = \left(a^{-1} \begin{pmatrix} \varepsilon & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & & & \\ \ldots & & A & \\ 0 & & & \end{pmatrix}, a^{-1}\left(\alpha_1, 0, \ldots, 0\right) \right) \in CO(M) \leftthreetimes \mathbb{R}^{m*}$$

Observación.- Si fijamos una orientación en la curva Γ y consideramos únicamente referencias adaptadas a la curva tales que tienen asociada una referencia lineal conforme cuyo primer vector está en la dirección tangente a la curva Γ positiva, entonces, las matrices de cambio (2) y (3) quedaran restringidas al caso $\varepsilon = +1$.

1.4. Desplazamiento de referencias sobre Γ dado por la conexión de Cartan ω.

Sea $t \mapsto q(t) \in Q(M)$ una curva de referencias de M adaptadas a la curva Γ sobre la parametrización $t \to \gamma(t) \in \Gamma$ de la curva.

Si denotamos por ξ_t al vector velocidad de la curva $q(t)$ (i.e. $\xi_t = \frac{d}{dt}\{q(t)\} \in T_{q(t)}Q$), recordemos que la evaluación de la conexión normal de Cartan $\omega \in \Lambda^1(Q, \mathfrak{g})$ sobre el campo velocidad ξ_t de la curva, describe a nivel infinitesimal la variación de la curva de referencias especiales $q(t)$ con respecto a una curva horizontal de referencias.

$$d\widehat{A}_i(t) = \sum_{j=0}^{m+1} \omega_i^j(\xi_t)\widehat{A}_j(t),\ \forall i = 0, 1, ..., m+1$$

Más concretamente, si a través de la integración de la curva $\omega(\xi_t)$ en el álgebra $\mathfrak{g}$ se obtiene una curva $g(t)$ en el correspondiente grupo $G \approx O(m+1,1)_I$, determinada por las condiciones

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\{g(t)\} = g(t) \cdot \omega(\xi_t) \\ g(t_0) = I \end{cases} \tag{4}$$

entonces, para todo t, el elemento $g(t)$ representa el factor corrector entre una curva horizontal de referencias $p(t)$ (con $p(t_0) = q(t_0)$) y nuestra curva original de referencias especiales $q(t)$, es decir,

$$q(t) = p(t) \cdot g(t)$$

De manera equivalente, se puede considerar que si el transporte paralelo permite trasladar toda referencia $q(t)$ a una referencia $\widetilde{p}_{t_0}(t)$ sobre t_0, entonces, el elemento $g(t)$ en el grupo G determinado por el sistema (4), la relaciona con la referencia especial $q(t_0)$ inicial, es decir,

$$\widetilde{p}_{t_0}(t) = q(t_0) \cdot g(t)$$

La descomposición del álgebra de Lie $\mathfrak{g} = \mathbb{R}^m \oplus \mathfrak{co}(m) \oplus \mathbb{R}^{m*}$, induce en la conexión normal de Cartan ω las correspondientes componentes $\omega(\xi_t) = (\omega_{-1}(\xi_t), \omega_0(\xi_t), \omega_1(\xi_t)) \in \mathbb{R}^m \oplus \mathfrak{co}(m) \oplus \mathbb{R}^{m*}$. Si se considera la expresión matricial del álgebra $\mathfrak{g} = \mathfrak{co}(m+1,1)$, se tiene entonces

$$\begin{aligned}
\omega(\xi_t) &= \left(\begin{array}{c|cc|c}
\omega_0^0 & \omega_1^0 & \omega_j^0 & 0 \\
\hline
\omega^1 & 0 & \omega_j^1 & -\omega_1^0 \\
0 & & & \\
\dots & -\omega_j^{1T} & \omega_j^i & -\omega_j^{0T} \\
0 & & & \\
\hline
0 & -\omega^1 & 0\ \dots\ 0 & -\omega_0^0
\end{array}\right)(\xi_t) = \\
&= \begin{pmatrix} \omega_0^0 & \omega_1 & 0 \\ \omega_{-1} & \omega_0 + \omega_0^0 I_m & -\omega_1^T \\ 0 & -\omega_{-1}^T & -\omega_0^0 \end{pmatrix}(\xi_t)
\end{aligned}$$

con

$$\begin{cases} \omega_{-1}(\xi_t) = (\omega^1(\xi_t), ..., \omega^m(\xi_t)) \in \mathbb{R}^m \\ \omega_0(\xi_t) = \begin{pmatrix} 0 & ... & \omega_m^1 \\ ... & \omega_j^i & ... \\ \omega_1^m & ... & 0 \end{pmatrix} (\xi_t) - \omega_0^0(\xi_t) I_m \in \mathfrak{co}(m) \\ \omega_{-1}(\xi_t) = (\omega_1^0(\xi_t), ..., \omega_m^0(\xi_t)) \in \mathbb{R}^{m*} \end{cases}$$

En primer lugar, es sabido que la componente $\omega_{-1} \in \Lambda^1(Q, \mathbb{R}^m)$ se corresponde con la forma vertical $\theta^{CO(M)} \in \Lambda^1(CO(M), \mathbb{R}^m)$ de modo que

$$\omega_{-1}(\xi_t) = (q_*(t))^{-1}(\gamma'(t))$$

Pero $\gamma'(t) \in T_{\gamma(t)}\Gamma$ y al ser $q(t)$ una referencia de M adaptada a la curva Γ se tiene que el isomorfismo conforme $q_*(t) : \mathbb{R}^m \to T_{\gamma(t)}M$ es tal que

$$\begin{cases} q_*(t)(e_1) = v_1 \in T_{\gamma(t)}\Gamma \\ q_*(t)(e_i) = v_i \in \left(T_{\gamma(t)}\Gamma\right)^{\perp}, \ \forall i = 2, ..., m \end{cases}$$

y por lo tanto,

$$\omega_{-1}(\xi_t) = \left(\omega^1(\xi_t), 0, ..., 0\right) \in \mathbb{R}^m \Longleftrightarrow \omega^2(\xi_t) = ... = \omega^m(\xi_t) = 0$$

siendo además $\omega^1(\xi_t) \neq 0$, $\forall t$.

Obsérvese que esto significa que

$$d\widehat{A}_0 = \omega_0^0 \widehat{A}_0 + \omega^1 \widehat{A}_1$$

Es decir, al movernos sobre la curva Γ con referencias adaptadas a la curva, la variación infinitesimal, con respecto a la ω-horizontalidad, de $\widehat{A}_0$ (el origen de la esfera tangente) se hace dentro del espacio $span\{\widehat{A}_0, \widehat{A}_1, \widehat{A}_{m+1}\}$. Por contra, para el resto de elementos de la base de $\overline{C}_x$ se tiene las siguientes fórmulas:

$$\begin{cases} d\widehat{A}_1 = \omega_1^0 \widehat{A}_0 + \sum_{i=2}^{m} (-\omega_i^1) \widehat{A}_i - \omega^1 \widehat{A}_{m+1} \\ d\widehat{A}_{m+1} = -\omega_1^0 \widehat{A}_1 + \sum_{i=2}^{m} (-\omega_i^0) \widehat{A}_i - \omega_0^0 \widehat{A}_{m+1} \end{cases}$$

De verificarse las condiciones

$$\omega_i^1 = 0, \forall i = 2, ..., m \tag{5}$$

$$\omega_i^0 = 0, \forall i = 2, ..., m \tag{6}$$

se tendría que también los elementos $\widehat{A}_1$ y $\widehat{A}_{m+1}$ experimentan una variación infinitesimal contenida en el espacio $span\{\widehat{A}_0, \widehat{A}_1, \widehat{A}_{m+1}\}$, y por lo tanto, al integrar, se tendría que en el desplazamiento de $q(t)$ a lo largo de la curva se mantiene invariante el espacio generado por $\{\widehat{A}_0, \widehat{A}_1, \widehat{A}_{m+1}\}$, que, como sabemos, da lugar a la esfera tangente a la curva Γ, $\overline{T_{\gamma(t)}\Gamma} \equiv \overline{C}_{\gamma(t)} \subset \overline{T_{\gamma(t)}M}$

De este modo, cuando la esfera tangente del espacio ambiente M "rueda" sobre la curva Γ (a través del desplazamiento descrito por la conexión normal de Cartan ω), ocurre de tal forma que el círculo $\overline{C}_x = \overline{T_{\gamma(t)}\Gamma} \subset \overline{T_{\gamma(t)}M}$ "rueda" a su vez sobre sí mismo.

$$\begin{array}{rcc} \Pi^{\omega}_{\gamma,t_1,t_2} & : & \overline{T_{\gamma(t_1)}M} \longrightarrow \overline{T_{\gamma(t_2)}M} \\ restricc. & : & \overline{C}_{\gamma(t_1)} \longrightarrow \overline{C}_{\gamma(t_2)} \end{array}$$

1.4.1. Cambio de referencias sobre Γ.

Sean $t \mapsto q(t)$, $t \mapsto \overline{q}(t)$ dos curvas de referencias adaptadas a Γ, sobre una misma parametrización $t \mapsto \gamma(t)$ de Γ. Denotamos por ξ_t y $\overline{\xi}_t$ a sus respectivos campos de vectores velocidad de las curvas, y sean $\omega(t) = \omega(\xi_t)$, $\overline{\omega}(t) = \omega(\overline{\xi}_t)$.

Sabemos que para toda t existe un elemento $h(t)$ en el subgrupo de H asociado a las referencias adaptadas a Γ (2), y tal que: $\overline{q}(t) = q(t) \cdot h(t)$.

Se verifica entonces lo siguiente:

$$\overline{\omega}(t) = Ad_{h(t)^{-1}}\left(\omega(t)\right) + \left.\frac{d}{ds}\right|_{s=t} \{h(t)^{-1}h(s)\} \tag{7}$$

Desarrollemos ahora esta última igualdad siendo

$$h = \begin{pmatrix} a & \boxed{\begin{matrix} \alpha_1 & \alpha \end{matrix}} & \frac{-\left(\alpha_1^2+|\alpha|^2\right)}{2a} \\ \boxed{\begin{matrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix} \varepsilon & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & \\ \dots & & A & \\ 0 & & & \end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix} \frac{-\varepsilon\alpha_1}{a} \\ \\ \frac{-A\alpha^T}{a} \\ \end{matrix}} \\ 0 & \boxed{\begin{matrix} 0 & 0 & \dots & 0 \end{matrix}} & a^{-1} \end{pmatrix}$$

$$h^{-1} = \begin{pmatrix} a^{-1} & \boxed{\begin{matrix} \frac{-\alpha_1\varepsilon}{a} & -\frac{\alpha}{a}A^T \end{matrix}} & \frac{-\left(\alpha_1^2+|\alpha|^2\right)}{2a} \\ \boxed{\begin{matrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix} \varepsilon & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & \\ \dots & & A^{-1} & \\ 0 & & & \end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix} \alpha_1 \\ \\ \alpha^T \\ \end{matrix}} \\ 0 & \boxed{\begin{matrix} 0 & 0 & \dots & 0 \end{matrix}} & a \end{pmatrix}$$

$$\omega = \begin{pmatrix} \omega^0_0 & \boxed{\begin{matrix} \omega^0_1 & \omega^0_j \end{matrix}} & 0 \\ \boxed{\begin{matrix} \omega^1 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix} 0 & \omega^1_j \\ & \\ -\omega^{1T}_j & \omega^i_j \\ & \end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix} -\omega^0_1 \\ \\ -\omega^{0T}_j \\ \end{matrix}} \\ 0 & \boxed{\begin{matrix} -\omega^1 & 0 & \dots & 0 \end{matrix}} & -\omega^0_0 \end{pmatrix}$$

La ecuación (7) es equivalente al sistema de ecuaciones siguiente relacionando las componentes de $\omega(t) = \left(\omega^i; \omega^i_j; \omega_j\right)$ y $\overline{\omega}(t) = \left(\overline{\omega}^i; \overline{\omega}^i_j; \overline{\omega}_j\right)$

$$\left\{\begin{array}{l} \overline{\omega}^0_0 = \omega^0_0 - \alpha_1\omega^1 + a^{-1}\frac{da}{dt} \\ \overline{\omega}^1 = a\omega^1 \\ \overline{\omega}^0_1 = a^{-1}\left[\omega^0_1 + \alpha_1\omega^0_0 + \frac{\|\alpha\|^2-\alpha_1^2}{2}\omega^1 + \alpha A^T\omega^{1T}_j + \frac{d\alpha_1}{dt}\right] \\ \overline{\omega}^0_j = a^{-1}\left[\omega^0_j A + \alpha\omega^0_0 - \alpha_1\omega^1\alpha - \alpha_1\omega^1_j A - \alpha\left(A^{-1}\omega^i_j A + A^{-1}\frac{dA}{dt}\right) + \frac{d\alpha}{dt}\right] \\ \overline{\omega}^1_j = \omega^1_j A + \omega^1\alpha \\ \overline{\omega}^i_j = A^{-1}\omega^i_j A + A^{-1}\frac{dA}{dt} \end{array}\right. \tag{8}$$

con $a(t) \in \mathbb{R}^+, (\alpha_1, \alpha)(t) \in \mathbb{R}^{m*}, A(t) \in O(m-1)$.

1.4.2. Optimización de las referencias sobre Γ

Observando las relaciones anteriores (8), queda claro que podemos optimizar la elección de referencias adaptadas de M sobre $\gamma(t)$ de modo que en el desplazamiento sean nulas las componentes $\omega^1_j = 0$, $\forall j = 2, ..., m$ $(\Leftrightarrow d\widehat{A}_1 \in span\{\widehat{A}_0, \widehat{A}_1, \widehat{A}_{m+1}\})$.

Si $q(t)$ es una elección cualquiera de referencias adaptadas a Γ, entonces, las referencias que buscamos serían $\overline{q}(t) = q(t) \cdot h(t)$ para aquellas curvas $h(t)$ tales que verifican

$$\begin{array}{rcl} 0 & = & \omega^1_j(t)A^j_k(t) + \omega^1(t)\alpha_k(t), \forall k = 2, ..., m \\ & \Leftrightarrow & \alpha_k(t) = \omega^1(t)^{-1}\left(-\omega^1_j(t)A^j_k(t)\right) \end{array}$$

Es claro además que dos referencias adaptadas $q(t), \overline{q}(t)$ cumpliendo $\omega^1_j = \overline{\omega}^1_j = 0$ difieren en elementos matriciales $h(t)$ de la forma $\alpha(t) = 0$

$$h(t) = \left(\begin{array}{ccc} a & \boxed{\begin{array}{cccc} \alpha_1 & 0 & ... & 0 \end{array}} & -\alpha_1^2/2a \\ \boxed{\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ ... \\ 0 \end{array}} & \boxed{\begin{array}{cccc} \varepsilon & 0 & ... & 0 \\ 0 & & & \\ ... & & A & \\ 0 & & & \end{array}} & \boxed{\begin{array}{c} -\frac{\alpha_1}{a}\varepsilon \\ 0 \\ ... \\ 0 \end{array}} \\ 0 & \boxed{\begin{array}{cccc} 0 & 0 & ... & 0 \end{array}} & a^{-1} \end{array}\right)(t) \tag{9}$$

y las relaciones entre las componentes de la conexión de Cartan sobre las respectivas curvas pasan a ser entonces

$$\left\{\begin{array}{l} \overline{\omega}^0_0 = \omega^0_0 - \alpha_1\omega^1 + a^{-1}\frac{da}{dt} \\ \overline{\omega}^1 = a\omega^1 \\ \overline{\omega}^0_1 = a^{-1}\left[\omega^0_1 + \alpha_1\omega^0_0 - \frac{\alpha_1^2}{2}\omega^1 + \frac{d\alpha_1}{dt}\right] \\ \overline{\omega}^0_j = a^{-1}\omega^0_j A \\ \overline{\omega}^i_j = A^{-1}\omega^i_j A + A^{-1}\frac{dA}{dt} \end{array}\right.$$

con $a(t) \in \mathbb{R}^+, \alpha_1(t) \in \mathbb{R}^{1*}, A(t) \in O(m-1)$.

Se observa que la condición (6) $\omega_j^0 = 0$, $\forall j = 2, ..., m$ (equivalente a que $d\widehat{A}_{m+1} \in span\{\widehat{A}_0, \widehat{A}_1, \widehat{A}_{m+1}\}$) es independiente de la referencia que consideremos cumpliendo (5) $\omega_j^1 = 0$, $\forall j = 2, ..., m$; se trata por lo tanto de una característica geométrica de la curva base $\gamma(t)$ dada por la estructura conforme de la variedad ambiente M. Como se justificará en la observación que sigue, esta propiedad es incluso independiente de la parametrización que se elija sobre la curva Γ. En consecuencia. se tiene que la estructura conforme presente en la variedad (M, ω) distingue una familia especial de curvas, análoga en cierto modo a la familia de trayectorias geodésicas asociadas a toda estructura métrica; estas curvas reciben el nombre de *círculos conformes de la variedad conforme* y se tratarán en una sección posterior.

Observación.- Supongamos que tenemos dos parametrizaciones distintas de la curva Γ, $\gamma(t)$ y $\overline{\gamma}(s) = \gamma(t(s))$. Sea $q(t)$ una elección de referencias especiales de M sobre la referencia $\gamma(t)$, entonces, la curva $\overline{q}(s) = q(t(s))$ corresponde a la misma elección de referencias pero sobre la parametización $\overline{\gamma}(s)$.

Se tiene que

$$\overline{\xi}_s = t'(s)\xi_{t(s)} \in T_{\overline{q}(s)}Q(M)$$

siendo $\xi_t = \frac{d}{dt}\{q(t)\}$ y $\overline{\xi}_s = \frac{d}{ds}\{\overline{q}(s)\}$, de modo que se da la siguiente relación

$$\omega(\overline{\xi}_s) = t'(s)\omega\left(\xi_{t(s)}\right)$$

Es decir, fijada sobre cada punto de la curva Γ una elección de referencias adaptadas (i.e. una sección del fibrado de referencias adaptadas de M sobre Γ), se tiene que las variaciones en la parametrización de la curva base hacen variar las componentes infinitesimales del desplazamiento de referencias en un factor proporcional a la velocidad de reparametrización. En particular, puesto que todas las condiciones que se han ido imponiendo se describen a través de la anulación de ciertas componentes de ω, éstas permanecen estables por reparametrizaciones de la curva.

De este modo, dada una curva Γ en la variedad ambiente (M, ω), se distingue en el fibrado de referencias especiales de M adaptadas a la curva Γ, una subfamilia caracterizada por la condición de que en ella la conexión normal de Cartan ω tiene nulas sus componentes $\omega_j^1 = 0, \forall j = 2, ..., m$. De este modo modo obtenemos una reducción de las referencias adaptadas sobre Γ donde el grupo estructural es el formado por los elementos de la forma (9).

2. Inclusión canónica de $\overline{T_x\Gamma}$ en $\overline{T_xM}$.

Para una curva general Γ sumergida en el espacio conforme (M,ω), la elección de referencias adaptadas a la curva se puede optimizar de modo que se verifique $\omega^1_j = 0, \forall j = 2,...,m$ ($\Longleftrightarrow d\widehat{A}_1 \in span\{\widehat{A}_0, \widehat{A}_1, \widehat{A}_{m+1}\}$).

La libertad de elección de referencia adaptada sobre un punto $x \in \Gamma$ con la condición añadida de optimización queda entonces controlada por matrices de cambio en el grupo $H \approx CO(M) \ltimes \mathbb{R}^{m*}$ que presentan la forma

$$h = \begin{pmatrix} a & \boxed{\alpha_1 \;\; 0 \;\; ... \;\; 0} & -\alpha_1^2/2a \\ \boxed{\begin{matrix} 0 \\ 0 \\ ... \\ 0 \end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix} \varepsilon & 0 & ... & 0 \\ 0 & & & \\ ... & & A & \\ 0 & & & \end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix} -\frac{\alpha_1}{a}\varepsilon \\ 0 \\ ... \\ 0 \end{matrix}} \\ 0 & \boxed{0 \;\; 0 \;\; ... \;\; 0} & a^{-1} \end{pmatrix}$$

para $a \in \mathbb{R}^+$, $A \in O(m-1)$, $\alpha_1 \in \mathbb{R}^{1*}$.

Por lo que se ha visto en secciones anteriores (véase (3)), esta familia de matrices h coincide exactamente con la asociada a los cambios entre referencias adaptadas para una determinada elección del círculo $\overline{C_x} \subset \overline{T_xM}$ identificable con $\overline{T_x\Gamma}$; de modo que la condición de optimización (5) ($\omega^1_j = 0, \forall j = 2,...,m$) sobre las referencias adaptadas a la curva Γ (dada por la conexión normal de Cartan ω de la variedad ambiente M), optimiza a su vez la elección del círculo identificable con $\overline{T_x\Gamma}$, puesto que toda referencia optimizada está asociada a *un único* círculo $\overline{C_x}$ en $\overline{T_xM}$.

En consecuencia, la estructura adicional en la variedad conforme M que proporciona la presencia de la conexión de Cartan ω, distingue en $\overline{T_xM}$ un círculo $\overline{C_x}$, candidato natural para ser identificado con $\overline{T_x\Gamma}$, dando lugar de este modo a una inclusión canónica de la esfera tangente de la curva en la esfera tangente de la variedad ambiente.

A partir de ahora, se hablará de referencias adaptadas a la curva Γ entendiéndose, salvo que se indique lo contrario, que se hace según dicha inclusión canónica $\overline{T_x\Gamma} \hookrightarrow \overline{T_xM}$.

2.1. Descripción geométrica del círculo $\overline{C_x}$ en $\overline{T_xM}$: círculo osculador.

Para simplificar el desarrollo de los cálculos siguientes, partiremos parametrizando la curva Γ con una parametrización $t \to \gamma(t)$ unitaria para la métrica conforme $g \in \mathcal{C}$ previamente fijada, y que define la conexión normal de Cartan ω en M. Podemos proceder así sin perder generalidad alguna puesto que, como ya se observó anteriormente, el círculo $\overline{C_x}$ de $\overline{T_xM}$ viene descrito por propiedades geométricas de la curva independientes de la parametrización que se quiera considerar.

Sea $q(t)$ una curva de referencias adaptadas a $\gamma(t)$, de la manera más general, sin estar referidas a ningún círculo $\overline{C}_{\gamma(t)}$ previamente fijado.

Sabemos que si $q(t) = [\widehat{A}_0 : \widehat{A}_1 : .... : \widehat{A}_m : \widehat{A}_{m+1}](t)$, entonces, se tiene que $span\{\widehat{A}_0, \widehat{A}_1, \widehat{A}_{m+1}\} \cap \overline{T_{\gamma(t)}\Gamma} = \overline{C}_{\gamma(t)}$. Es más, si tenemos en cuenta que el punto $A_{m+1} = [\widehat{A}_{m+1}]$ es un punto de $\overline{C}_{\gamma(t)}$ distinto del punto origen $A_0 = O_{\gamma(t)}$, es claro que $\overline{C}_{\gamma(t)}$ está determinado por ser el único círculo pasando por el origen $O_{\gamma(t)}$ con dirección tangente a $T_{\gamma(t)}\Gamma \subset T_{O_{\gamma(t)}}\left(T_{\gamma(t)}M\right)$ y que pasa también por el punto A_{m+1}.

Sea $q_*(t) \in CO(M)$ la referencia lineal conforme asociada a la referencia especial esférica $q(t)$. Puesto que $CO(M)$ está sumergido en $Q(M)$ a través de su identificación con el subfibrado de referencias especiales que fijan también el punto del infinito, resultará que $q(t), q_*(t) \in Q(M)$ y existe un $h(t) \in \mathbb{R}^{m*} \subset CO(M) \leftthreetimes \mathbb{R}^{m*}$ tal que $q(t) = q_*(t) \cdot h(t)$. La expresión matricial de $h(t)$ será por tanto

$$h(t) = \begin{pmatrix} 1 & \alpha(t) & -\frac{\alpha(t)^2}{2} \\ 0 & I_m & -\alpha(t)^T \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \exp\left(\alpha(t)\right)$$

siendo $\alpha(t) \in \mathbb{R}^{m*} \subset \mathfrak{g} = \mathbb{R}^m \oplus \mathfrak{co}(m) \oplus \mathbb{R}^{m*}$.

Tenemos entonces que

$$[\widehat{A}_{m+1}] = q(t) \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = q_*(t) \begin{bmatrix} -\frac{\alpha(t)^2}{2} \\ -\alpha(t)^T \\ 1 \end{bmatrix} \in \overline{C}_{\gamma(t)}$$

Todo $q_*(t) \in CO(M)$ representa una referencia lineal conforme del espacio $T_{\gamma(t)}M$ formada por vectores $\{v_1(t), v_2(t), ..., v_m(t)\}$ tales que

- $\cdot$ $\gamma'(t) = f(t).v_1(t)$ con $f(t) \neq 0$
- $\cdot$ $g(v_i(t), v_j(t)) = f(t)^{-2}.\delta_{ij}$

Se tiene por tanto que $f(t) = \omega^1\left(\frac{d}{dt}\{q(t)\}\right) = \omega^1\left(\frac{d}{dt}\{q_*(t)\}\right)$

Por las fórmulas anteriores de cambio de referencia, se tiene que para todo $j = 2, .., m$

$$\begin{aligned} 0 \;&=\; \omega^1_j\left(\frac{d}{dt}q(t)\right) = \omega^1_j\left(\frac{d}{dt}q_*(t)\right) + \alpha_j.\omega^1\left(\frac{d}{dt}q_*(t)\right) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow\; \alpha_j = -f(t)^{-1}.\omega^1_j\left(\frac{d}{dt}q_*(t)\right) \end{aligned}$$

Por otra parte,

$$\begin{aligned}\omega_0^0\left(\frac{d}{dt}q(t)\right) &= \omega_0^0\left(\frac{d}{dt}q_*(t)\right) - \alpha_1.\omega^1\left(\frac{d}{dt}q_*(t)\right) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \alpha_1 = \frac{\omega_0^0\left(\frac{d}{dt}q_*(t)\right) - \omega_0^0\left(\frac{d}{dt}q(t)\right)}{f(t)}\end{aligned}$$

Ahora, dado que la curva $q_*(t)$ se mueve por el subfibrado $CO(M)$, se sabe que la componente ω_0 de la conexión normal de Cartan ω tomando valores en $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{co}(m)$ coincide con la forma de conexión asociada a la conexión de Levi-Civita ∇ de la métrica conforme $g \in \mathcal{C}$. Entonces, haciendo uso de la notación $\omega^i_{j*}(t) = \omega^i_j(\frac{d}{dt}\{q_*(t)\})$

$$\frac{\nabla}{dt}v_i(t) = \sum_{j\neq i}\omega^j_{i*}(t)v_j(t) - \omega^0_{0*}(t)v_i(t)$$

En particular se tiene

$$\begin{cases} \frac{\nabla}{dt}v_1(t) = -\omega^0_{0*}(t)v_1(t) - \omega^1_{2*}(t)v_2(t) - ... - \omega^1_{m*}(t)v_m(t) \\ \frac{\nabla}{dt}v_1(t) = \frac{\nabla}{dt}\left(f(t)^{-1}\gamma'(t)\right) = \frac{f'(t)}{f(t)^2}\gamma'(t) + f(t)^{-1}\frac{\nabla}{dt}\gamma'(t)\end{cases}$$

pero puesto que $\gamma(t)$ es una parametrización g-unitaria $(g(\gamma',\gamma') = 1)$, se tiene además que $\frac{\nabla}{dt}\gamma'(t) \in \gamma'(t)^\perp = span\{v_2(t), ..., v_m(t)\}$ de modo que

$$\frac{f'(t)}{f(t)^2}\gamma'(t) = -\omega^0_{0*}(t)v_1(t) = \frac{-\omega^0_{0*}(t)}{f(t)}\gamma'(t) \Leftrightarrow \omega^0_{0*}(t) = -\frac{f'(t)}{f(t)}$$

$$\begin{aligned}f(t)^{-1}\frac{\nabla}{dt}\gamma'(t) &= -\omega^1_{2*}v_2 - ... - \omega^1_{m*}v_m = \\ &= f(t)\left(\alpha_2 v_2 + ... + \alpha_m v_m\right) \\ &= f(t)q_*(t)(0, \alpha_2, ..., \alpha_m)\end{aligned}$$

Distinguimos ahora dos casos distintos

· **(i)** $\frac{\nabla}{dt}\gamma'(t) \in span\{\gamma'(t)\} \Leftrightarrow (\alpha_2, ..., \alpha_m) = 0$**:**

Si se cumple además que $\alpha_1 = 0 \Leftrightarrow \omega(t) = -\frac{f'(t)}{f(t)}$ se tendría que

$$[\widehat{A}_{m+1}] = q_*(t)\begin{bmatrix} -\frac{\alpha(t)^2}{2} \\ -\alpha(t)^T \\ 1\end{bmatrix} = q_*(t)\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix} = \infty_{\gamma(t)} \in \overline{T_{\gamma(t)}M}$$

y el círculo $\overline{C}_{\gamma(t)}$ en $\overline{T_{\gamma(t)}M}$ es el que inicialmente se propuso, pasando por el origen con dirección tangente $T_{\gamma(t)}\Gamma$ y pasando también por el punto del infinito $\infty_{\gamma(t)}$.

En caso de que $\alpha_1 \neq 0$

$$[\widehat{A}_{m+1}] = q_*(t)\begin{bmatrix} -\frac{\alpha_1(t)^2}{2} \\ -\alpha_1(t) \\ 0 \\ ... \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = q_*(t)\begin{bmatrix} 1 \\ \frac{2}{\alpha_1(t)} \\ 0 \\ ... \\ 0 \\ -\frac{2}{\alpha_1(t)^2} \end{bmatrix} = \iota(\frac{2}{\alpha_1(t)}v_1(t))$$

Es decir, el punto $[\widehat{A}_{m+1}] \in \overline{T_{\gamma(t)}M}$ se corresponde con el punto de $T_{\gamma(t)}M$ dado por $\frac{2}{\alpha_1}v_1 = \frac{2}{\alpha_1 f(t)}\gamma'(t) \in T_{\gamma(t)}\Gamma$. Es claro entonces que el único círculo por elorigen, tangente a $T_{\gamma(t)}\Gamma$ y pasando por $\frac{2}{\alpha_1 f(t)}\gamma'(t)$ es la propia recta $T_{\gamma(t)}\Gamma \subset T_{\gamma(t)}M$ así que de nuevo $\overline{C}_{\gamma(t)}$ resulta ser el círculo que pasa por el infinito $\infty_{\gamma(t)}$.

· **(ii)** $\frac{\nabla}{dt}\gamma'(t) \notin span\{\gamma'(t)\} \Leftrightarrow (\alpha_2, ..., \alpha_m) \neq 0$**:**

$$[\widehat{A}_{m+1}] = q_*(t)\begin{bmatrix} -\frac{\|\alpha(t)\|^2}{2} \\ -\alpha(t)^T \\ 1 \end{bmatrix} = q_*(t)\begin{bmatrix} 1 \\ \frac{2\alpha(t)^T}{\|\alpha(t)\|^2} \\ -\frac{\|\alpha(t)\|^2}{2} \end{bmatrix} = \iota(q_*(\frac{2\alpha(t)^T}{\|\alpha(t)\|^2})) \in \overline{T_{\gamma(t)}M}$$

$$\begin{aligned} q_*(t)(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m) &= \alpha_1 v_1 + ... + \alpha_m v_m = \\ &= f(t)^{-2}\left(\left(\frac{f'(t)}{f(t)} - \omega_0^0(q'(t))\right)\gamma'(t) + \frac{\nabla}{dt}\gamma'\right) = \\ &= f(t)^{-2}(\varepsilon(t)\gamma'(t) + \frac{\nabla}{dt}\gamma') \end{aligned}$$

siendo $\varepsilon(t) = \frac{f'(t)}{f(t)} - \omega_0^0\left(\frac{d}{dt}q(t)\right)$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} q_*(t)(\frac{2\alpha(t)^T}{\|\alpha(t)\|^2}) &= \frac{2q_*(t)(\alpha^T)}{f(t)^2 g\left(q_*(\alpha^T), q_*(\alpha^T)\right)} = 2\frac{\varepsilon\gamma'(t) + \frac{\nabla}{dt}\gamma'(t)}{f(t)^2 g\left(q_*(\alpha^T), q_*(\alpha^T)\right)} = \\ &= 2\frac{\varepsilon\gamma'(t) + \frac{\nabla}{dt}\gamma'(t)}{\varepsilon^2 + g(\frac{\nabla}{dt}\gamma', \frac{\nabla}{dt}\gamma')} \in T_{\gamma(t)}M \end{aligned}$$

Para cada t fijo,l valor de la constante $\varepsilon(t) = \frac{f'(t)}{f(t)} - \omega_0^0\left(\frac{d}{dt}q(t)\right)$ irá variando en función de la elección de referencias $q(t)$ considerada, y del mismo modo, irá variando pués el punto de $T_{\gamma(t)}M$ correspondiente a $[\widehat{A}_{m+1}] \in \overline{C}_{\gamma(t)}$ de la referencia adaptada $q(t)$ sobre $\gamma(t)$.

Obsérvese ahora que para todo valor de $\varepsilon(t)$, se verifica

$$g\left(q_*(\frac{2\alpha^T}{\|\alpha\|^2}) - \frac{\frac{\nabla}{dt}\gamma'(t)}{g(\frac{\nabla}{dt}\gamma', \frac{\nabla}{dt}\gamma')}, q_*(\frac{2\alpha^T}{\|\alpha\|^2}) - \frac{\frac{\nabla}{dt}\gamma'(t)}{g(\frac{\nabla}{dt}\gamma', \frac{\nabla}{dt}\gamma')}\right) = \frac{1}{g(\frac{\nabla}{dt}\gamma', \frac{\nabla}{dt}\gamma')}$$

de modo que los distintos puntos $[\widehat{A}_{m+1}] \in \overline{C}_{\gamma(t)}$ correspondientes a las posibles referencias adaptadas, recorren un círculo en $T_{\gamma(t)}M$, contenido en el plano *span*$\{\gamma'(t), \frac{\nabla}{dt}\gamma'(t)\}$ (plano osculador), de centro $\frac{\frac{\nabla}{dt}\gamma'(t)}{g(\frac{\nabla}{dt}\gamma', \frac{\nabla}{dt}\gamma')}$ y de radio al cuadrado igual a $\frac{1}{g(\frac{\nabla}{dt}\gamma', \frac{\nabla}{dt}\gamma')}$. Es claro que éste círculo se corresponde con el *círculo osculador* de la curva según la geometría Riemannian inducida por la métrica conforme g.

Observación.- El caso límite en que se tenga $\frac{\nabla}{dt}\gamma'(t) = 0$ puede incluirse considerando que el círculo de centro $\frac{0}{g(0,0)} = \infty_{\gamma(t)}$ y de radio $\frac{1}{0} = \infty$ (pasando por el origen $O_{\gamma(t)}$ con dirección tangente a $T_{\gamma(t)}\Gamma$) es la recta $T_{\gamma(t)}\Gamma$. Obsérvese también que para las geodésicas de g la inclusión canónica $T_x\Gamma \to T_xM$ es la que inicialmente y que preserva los puntos del infinito.

3. Conexión conforme en Γ heredada de (M, ω).

Tenemos que para toda curva Γ en la variedad conforme M con conexión de Cartan ω, existe una inclusión canónica $\overline{T_x\Gamma} \hookrightarrow \overline{T_xM}$ $(\forall x \in \Gamma)$ que permite distinguir una familia de referencias adaptadas a la curva entre las referencias especiales de la variedad ambiente M. Los elementos de cambio entre dos referencias adaptadas de tal familia tienen una expresión matricial de la forma

$$h = \begin{pmatrix} a & \boxed{\begin{matrix} \alpha_1 & 0 & \dots & 0 \end{matrix}} & -\frac{\alpha_1^2}{2a} \\ \boxed{\begin{matrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & \\ \dots & & A & \\ 0 & & & \end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix} -\alpha_1/a \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{matrix}} \\ 0 & \boxed{\begin{matrix} 0 & 0 & \dots & 0 \end{matrix}} & a^{-1} \end{pmatrix} \tag{10}$$

con $a \in \mathbb{R}^+$, $\alpha_1 \in (\mathbb{R})^*$, $A \in O(m-1)$.

La conexión de Cartan $\omega \in \Lambda^1(Q(M), g)$ actuando sobre las referencias adaptadas es de la forma

$$\omega = \begin{pmatrix} \omega_0^0 & \boxed{\begin{matrix} \omega_1^0 & \omega_2^0 & \dots & \omega_m^0 \end{matrix}} & 0 \\ \boxed{\begin{matrix} \omega^1 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & \\ \dots & & \omega_j^i & \\ 0 & & & \end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix} -\omega_1^0 \\ -\omega_2^0 \\ \dots \\ -\omega_m^0 \end{matrix}} \\ 0 & \boxed{\begin{matrix} -\omega^1 & 0 & \dots & 0 \end{matrix}} & -\omega_0^0 \end{pmatrix}$$

Sabemos que si la curva de referencias adaptadas $q(t)$ sobre la parametrización $\gamma(t)$ es de la forma $q(t) = \left[\widehat{A}_0(t) : \widehat{A}_1(t) : \dots : \widehat{A}_m(t) : \widehat{A}_{m+1}(t)\right]$, entonces, los puntos $\left[\widehat{A}_0(t) : \widehat{A}_1(t) : \widehat{A}_{m+1}(t)\right]$ generan $\mathbb{P}(\widehat{T_x\Gamma}) \supset \overline{T_x\Gamma}$ y se tiene

$$\begin{cases} d\widehat{A}_0 = \omega_0^0 \widehat{A}_0 + \omega^1 \widehat{A}_1 \in span\{\widehat{A}_0, \widehat{A}_1, \widehat{A}_{m+1}\} \\ d\widehat{A}_1 = \omega_1^0 \widehat{A}_0 - \omega^1 \widehat{A}_{m+1} \in span\{\widehat{A}_0, \widehat{A}_1, \widehat{A}_{m+1}\} \\ d\widehat{A}_{m+1} = -\omega_1^0 \widehat{A}_1 - \omega_0^0 \widehat{A}_{m+1} - \sum\limits_{i=2,\dots,m} \omega_i^0 \widehat{A}_i \end{cases}$$

En el caso especial de que la curva Γ sea un círculo conforme se tendrá que

$$\sum_{i=2,\dots,m} \omega_i^0 \widehat{A}_i = 0$$

de modo que también se tendrá que $d\widehat{A}_{m+1} \in span\{\widehat{A}_0, \widehat{A}_1, \widehat{A}_{m+1}\}$, pero en general este elemento no se anula. Ocurrirá entonces que la variación infinitesimal del elemento $\widehat{A}_{m+1}$ en la referencia tiene una componente no nula en el espacio ortogonal $span\{\widehat{A}_2, \dots, \widehat{A}_m\}$; esto provoca que, en el movimiento obtenido por integración, el espacio $\overline{T_{\gamma(t)}\Gamma} = \mathbb{P}\left(span\{\widehat{A}_0, \widehat{A}_1, \widehat{A}_{m+1}\} \cap C\right)$ no se mantenga invariante al desplazarse sobre $\gamma(t)$.

No obstante, podemos perturbar ligeramentee la variación dada por ω no considerando la componente de $d\widehat{A}_{m+1}$ en la dirección ortogonal a $\widehat{T_x\Gamma}$ y definir entonces un desplazamiento a través de las expresiones

$$\begin{cases} d\widehat{A}_0 = \omega_0^0 \widehat{A}_0 + \omega^1 \widehat{A}_1 \\ d\widehat{A}_1 = \omega_1^0 \widehat{A}_0 - \omega^1 \widehat{A}_{m+1} \\ d\widehat{A}_{m+1} = -\omega_1^0 \widehat{A}_1 - \omega_0^0 \widehat{A}_{m+1} \end{cases} \iff \begin{pmatrix} \omega_0^0 & \omega_1^0 & 0 \\ \omega^1 & 0 & -\omega_1^0 \\ 0 & -\omega^1 & -\omega_0^0 \end{pmatrix}$$

Es claro que este procedimiento da lugar a una forma con valores en el álgebra $\mathfrak{o}(2,1) = \mathbb{R}^1 \oplus \mathfrak{co}(1) \oplus \mathbb{R}^{1*}$ sobre las referencias especiales de M adaptadas a la curva Γ y éstas tienennaturalmente asociadas referencias especiales de la curva Γ.

Si tenemos un cambio de referencias adaptadas a la curva de la forma $\bar{q}(t) = q(t) \cdot h(t)$, con $h(t)$ una curva de elementos (10) en el grupo, entonces, es claro que

$$\left[\widehat{A}_0 : \widehat{A}_1 : \widehat{A}_{m+1}\right]_{\bar{q}(t)} = \left[\widehat{A}_0 : \widehat{A}_1 : \widehat{A}_{m+1}\right]_{q(t)} \cdot \begin{bmatrix} a & \alpha_1 & -\frac{\alpha_1^2}{2a} \\ 0 & 1 & -\alpha_1 \\ 0 & 0 & a^{-1} \end{bmatrix} (t)$$

Es decir, las referencias de $\overline{T_{\gamma(t)}\Gamma}$ definidas por $q^\Gamma(t) = \left[\widehat{A}_0 : \widehat{A}_1 : \widehat{A}_{m+1}\right]_{\bar{q}(t)}$ y por $\overline{q}^\Gamma(t) = \left[\widehat{A}_0 : \widehat{A}_1 : \widehat{A}_{m+1}\right]_{q(t)}$ están relacionadas por una matriz de cambio $h^\Gamma(t)$ de la forma

$$h^\Gamma(t) = \begin{pmatrix} a & \alpha_1 & -\frac{\alpha_1^2}{2a} \\ 0 & 1 & -\alpha_1/a \\ 0 & 0 & a^{-1} \end{pmatrix} (t) \in CO(1) \leftthreetimes \mathbb{R}^{1*}$$

y se tienen las siguientes relaciones, siendo $\xi_t = \frac{d}{dt}\{q(t)\}$ y $\overline{\xi}_t = \frac{d}{dt}\{\overline{q}(t)\}$

$$\left\{ \begin{array}{l} \omega^0_0(\overline{\xi}_t) = \omega^0_0(\xi_t) - \omega^1(\xi_t)\alpha_1(t) + a^{-1}(t)a'(t) \\ \omega^1(\overline{\xi}_t) = a(t)\omega^1(\xi_t) \\ \omega^0_1(\overline{\xi}_t) = a^{-1}(t)\left(\omega^0_1(\xi_t) + \omega^0_0(\xi_t)\alpha_1(t) - \frac{\alpha_1(t)^2}{2a}\omega^1(\xi_t) + \alpha_1'(t)\right) \end{array} \right. \tag{11}$$

Observación.- A la vista de las fórmulas (11) es claro que se verifican los siguientes hechos:

(i) Dadas dos curvas de referencias adaptadas $q(t)$ y $\overline{q}(t)$ tales que inducen la misma curva de referencias $q^\Gamma(t)$ para la curva Γ, estas estarán relacionadas por una curva de elementos $h(t)$ con $h^\Gamma(t) = Id$, es decir, con $\alpha_1 = 0$ y $a = 1$, de modo que se tendrá

$$\left\{ \begin{array}{l} \omega^0_0(\overline{\xi}_t) = \omega^0_0(\xi_t) \\ \omega^1(\overline{\xi}_t) = \omega^1(\xi_t) \\ \omega^0_1(\overline{\xi}_t) = \omega^0_1(\xi_t) \end{array} \right.$$

En consecuencia, estará bien definida sobre el fibrado de referencias especiales de la curva Γ la 1-forma $\omega^\Gamma \in \Lambda^1(Q(\Gamma), \mathbb{R}^1 \oplus \mathfrak{co}(1) \oplus \mathbb{R}^{1*})$ definida por

$$\omega^\Gamma \left(\frac{d}{dt}\{q^\Gamma(t)\}\right) = \begin{pmatrix} \omega^0_0 & \omega^0_1 & 0 \\ \omega^1 & 0 & -\omega^0_1 \\ 0 & -\omega^1 & -\omega^0_0 \end{pmatrix} \left(\frac{d}{dt}\{q(t)\}\right) \in \mathfrak{o}(2,1)$$

siendo $q(t)$ cualquier curva de referencias de M adaptadas a Γ, tal que induce la curva $q^\Gamma(t)$ inicial de referencias especiales de Γ.

(ii) Si dos curvas de referencias especiales $q^\Gamma(t)$ y $\overline{q}^\Gamma(t)$ de $\overline{T_{\gamma(t)}\Gamma}$ están relacionadas por el cambio matricial $h^\Gamma(t) \in CO(1) \leftthreetimes \mathbb{R}^{1*}$, entonces, la fórmula (11) indica que se verifica

$$\omega^\Gamma\left(\overline{q}^{\Gamma\prime}(t)\}\right) = Ad_{h^\Gamma(t)^{-1}}\omega^\Gamma\left(q^{\Gamma\prime}(t)\}\right) + h^{\Gamma\prime}(t)$$

de modo que es fácil ver que la 1-forma $\omega^\Gamma \in \Lambda^1(Q(\Gamma), \mathfrak{o}(2,1))$ resulta ser entonces una conexión (normal) de Cartan para la estructura conforme de la curva.

Se puede concluir por tanto, que la restricción de la conexión normal de Cartan del espacio ambiente $\omega \in \Lambda^1(Q(M), \mathfrak{o}(m+1,1))$ al fibrado de referencias especiales de M adaptadas a la curva Γ, permite inducir, mediante este procedimiento de proyección ortogonal, una conexión de Cartan $\omega^\Gamma \in \Lambda^1(Q(\Gamma), \mathfrak{o}(2,1))$ en la subvariedad Γ. En las secciones siguientes veremos que a través de dicha conexión ω^Γ se puede asociar a la curva un parámetro conforme canónico.

Obsérvese que en el caso especial de los llamados círculos conformes se tiene que el desplazamiento que experimenta la esfera tangente a la curva $\overline{T_{\gamma(t)}\Gamma}$ definido por la conexión ω^Γ coincide con el descrito por la conexión ω en el ambiente sobre el círculo $\overline{C_{\gamma(t)}} \equiv \overline{T_{\gamma(t)}\Gamma}$ como subespacio de $\overline{T_{\gamma(t)}M}$.

4. Parámetro conforme de una curva Γ en (M,ω).

En los apartados anteriores se ha desarrollado la manera natural en que un curva Γ sumergida en una variedad ambiente conforme Riemanniana M dotada de una conexión normal de Cartan $\omega \in \Lambda^1(Q(M), o(m+1,1))$, tiene asociada una conexión de Cartan $\omega^\Gamma \in \Lambda^1(Q(\Gamma), o(2,1))$. Ahora bien, al ser la variedad Γ unidimensional se nos ofrece una situación muy especial.

En primer lugar, es inmediato ver que la 2-forma de curvatura de la conexión ω^Γ es idénticamente nula (por superar ésta las dimensiones de la variedad Γ); o de manera equivalente, dado un par de puntos distintos cualesquiera x, x' en Γ existe un único camino que los une y por tanto sus esferas tangentes $\overline{T_x\Gamma}$ y $\overline{T_{x'}\Gamma}$ están canónicamente identificadas a través de la conexión ω^Γ. Se tiene un "paralelismo" en el fibrado tangente esférico de la curva $\overline{T\Gamma} \to \Gamma$ y la estructura conforme de (Γ, ω^Γ) corresponde entonces al caso homogéneo: $\mathbb{S}^1 = \frac{O(2,1)}{CO(1) \rtimes \mathbb{R}^{1*}}$.

Observación: Variedades conformes (M,ω) de curvatura nula.

Sea (M,ω) una m-variedad conforme con conexión normal de Cartan ω de curvatura nula. La conexión de Cartan ω da lugar entonces a un paralelismo local en el fibrado tangente esférico $\overline{TM}$, es decir, para todo par de puntos $x, x' \in M$ suficientemente próximos el transporte a lo largo de cualquier curva que los una induce un único difeomorfismo conforme $\phi^x_{x'} : \overline{T_xM} \to \overline{T_{x'}M}$ relacionando las correspondientes esferas tangentes.

Para todo punto $x \in M$ y para todo entorno $\mathcal{U}_x$ de x en la variedad con grupo de homotopía trivial (v.g. un dominio de carta), se puede definir la aplicación diferenciable $\Phi_x : \mathcal{U}_x \to \overline{T_xM}$ a través del siguiente procedimiento

$$\forall x' \in \mathcal{U}_x \ , \ \Phi_x(x') = z_\gamma(t_1)$$

siendo $\gamma(t)$ una curva en M uniendo $x = \gamma(t_0)$ y $x' = \gamma(t_1)$, y $z_\gamma(t)$ el desarrollo en $\overline{T_xM}$ de la curva γ.

Se tiene que Φ_x es una aplicación diferenciable bien definida y su diferencial en x es $d\Phi_x(x) \equiv id : T_xM \to T_xM \equiv T_{O_x}\left(\overline{T_xM}\right)$.

Es claro también que para dos puntos x, x' de $\mathcal{U}_x$ las aplicaciones $\Phi_x : \mathcal{U}_x \to \overline{T_xM}$ y $\Phi_{x'} : \mathcal{U}_x \to \overline{T_{x'}M}$ están relacionadas a través del difeomorfismo conforme $\phi^x_{x'} : \overline{T_xM} \to \overline{T_{x'}M}$ de modo que $\Phi_{x'} = \phi^x_{x'} \circ \Phi_x$. Por lo tanto, la diferencial de Φ_x en cualquier punto $x' \in M$ es el isomorfismo conforme $d\Phi_x(x') = d\phi^{x'}_x(O_{x'}) : T_{O_{x'}}\left(\overline{T_{x'}M}\right) = T_{x'}M \to T_xM$.

Obtenemos por tanto que para toda $x \in M$ y todo $\mathcal{U}_x$ en las condiciones mencionadas, tenemos un difeomorfismo local $\Phi_x :\to \overline{T_xM}$ que preserva las estructuras conformes. Puesto que toda esfera tangente $\overline{T_xM}$ es equivalente al espacio conforme $\mathbb{S}^m$ a través de cualquier referencia esférica $p_x \in P(M)_x$, se tiene en realidad un difeomorfismo local y conforme

$$\Phi_x : \mathcal{U}_x \to \mathbb{S}^m$$

que es único salvo transformación conforme de $\mathbb{S}^m$.

De este modo queda claro que toda variedad conforme (M, ω) con curvatura nula es localmente equivalente al caso homogéneo $(\mathbb{S}^m = \frac{G(m)}{H(m)}, \omega_{G(m)})$ siendo $G(m) \approx O(m+1,1)_I$, $H \approx CO(m) \rightthreetimes \mathbb{R}^{m*}$ y $\omega_{G(m)}$ la conexión de Maurer-Cartan de $G(m)$.

4.1. Equivalencia entre las estructuras conforme y proyectiva unidimensionales.

La esfera unidimensional $\mathbb{S}^1$ con su estructura conforme se sabe equivalente al espacio proyectivo unidimensional (real) $\mathbb{P}^1$ con su estructura proyectiva. Tal equivalencia puede ser vista a través de la correspondencia siguiente:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{P}^1 & \longleftrightarrow & \mathbb{S}^1 \\ [x_0 : x_1] & \longleftrightarrow & \left(\frac{x_0^2 - \frac{1}{4}\frac{1}{4}x_1^2}{x_0^2 + \frac{1}{4}\frac{1}{4}x_1^2}, \frac{x_0 x_1}{x_0^2 + \frac{1}{4}\frac{1}{4}x_1^2} \right) \end{array}$$

que da lugar a un isomorfismo entre los grupos de transformaciones positivas asociados:

$$O(2,1)_I \longleftrightarrow Homograf_+(\mathbb{P}^1)$$

$$\begin{pmatrix} a & \alpha & -\frac{\alpha^2}{2a} \\ av & \alpha v + 1 & -\frac{\alpha^2 v}{2a} - \frac{\alpha}{a} \\ -a\frac{v^2}{2} & -\alpha\frac{v^2}{2} - v & \frac{\alpha^2 v^2}{4a} + \frac{\alpha v}{a} + \frac{1}{a} \end{pmatrix} \longleftrightarrow \begin{bmatrix} a & \frac{\alpha}{2} \\ av & \frac{\alpha}{2}v + 1 \end{bmatrix}$$

Obsérvese además que la inclusión $\iota : \mathbb{R}^1 \to \mathbb{S}^1$ que se tenía pasa a ser, con la identificación $\mathbb{S}^1 \approx \mathbb{P}^1$, la inclusión natural siguiente

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^1 & \longleftrightarrow & \mathbb{P}^1 \\ t & \longleftrightarrow & [1 : t] \end{array}$$

4.1.1. Estructura proyectiva en (Γ, ω^Γ).

Si partimos de una curva Γ en una variedad conforme (M, ω), tenemos entonces en la curva Γ la conexión conforme de Cartan $\omega^\Gamma \in (Q(\Gamma), \mathfrak{o}(2,1))$ heredada del espacio ambiente. Es claro que ω^Γ no tiene curvatura y los difeomorfismos locales conformes $\Phi_x : \mathcal{U}_x \to \mathbb{S}^1$ pueden extenderse a toda la vareidad Γ, dando lugar al difeomorfismo local confome y global $\Phi : \Gamma \to \mathbb{S}^1$

(único salvo elementos en $O(2,1)_I$), que es a su vez es equivalente a un difeomorfismo local $\Phi : \Gamma \to \mathbb{P}^1$, único salvo homografía (positiva). De modo que vamos a poder atribuir a la curva Γ una estructura proyectiva que permite distinguir una familia de parametrizaciones de la curva $t \mapsto \overline{\gamma}(t) \in \Gamma$ equivalentes a través de homografías y caracterizadas por cumplir

$$\begin{array}{ccccc} I & \xrightarrow{\gamma} & \Gamma & \xrightarrow{\Phi} & \mathbb{P}^1 \\ t & \mapsto & \overline{\gamma}(t) & \mapsto & \Phi \circ \overline{\gamma}(t) = [a+bt : c+dt] \end{array}$$

para $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in Hom(\mathbb{P}^1)$. Llamamos *parámetro proyectivo de* Γ a cualquiera de tales parametrizaciones $t \mapsto \overline{\gamma}(t) \in \Gamma$.

En particular, la estructura proyectiva en la curva Γ da lugar a una *razón doble* $[x_1 : x_2 : x_3 : x_4]_\Gamma$ para cuadruplas (x_1, x_2, x_3, x_4) de puntos en Γ. A través del parámetro proyectivo $\overline{\gamma}(t)$ se tiene la equivalencia

$$[\overline{\gamma}(t_1) : \overline{\gamma}(t_2) : \overline{\gamma}(t_3) : \overline{\gamma}(t_4)]_\Gamma = [t_1 : t_2 : t_3 : t_4]_{\mathbb{R}^1}$$

Sea $t \mapsto \gamma(t) \in \Gamma$ una parametrización arbitraria de la curva y $t \mapsto q(t) \in Q(\Gamma)$ una elección de referencias especiales sobre $\gamma(t)$ con $q(0) = q \in Q(\Gamma)_{\gamma(0)}$. El transporte paralelo de $q(t)$ a $t = 0$ a lo largo de $\gamma(t)$ es el elemento $q \cdot g(t) \in Q(\Gamma)_{\gamma(0)}$, siendo $g(t)$ la curva en $O(2,1)_I$ caracterizada por

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dt}\{g(t)\} = g(t) \cdot \omega^\Gamma \left(\frac{d}{dt} q(t)\right) \\ g(0) = I \end{array} \right. \tag{12}$$

A continuación, sabemos que la curva desarrollo de $\gamma(t)$ en $t = 0$ es $z_\gamma(t) = (q \cdot g(t))(O) \in \overline{T_{\gamma(0)}M}$, y recordando el modo en que el difeomorfismo local $\Phi : \Gamma \to \mathbb{S}^1$ se definió, se observa fácilmente que

$$\Phi(\gamma(t)) = q^{-1}(z_\gamma(t)) = g(t)(O) \in \mathbb{S}^1 \approx \mathbb{P}^1$$

Para t suficientemente cercanos a $t = 0$ podemos considerar que $\tau(t) := \Phi(\gamma(t)) = g(t)(O) \in \mathbb{R}^1 \subset \mathbb{P}^1$ es un difeomorfismo y es claro que el cambio de parámetro $\tau : I \ni t \mapsto \tau(t) \in J$ nos proporciona una parametrización proyectiva $\overline{\gamma}(\tau) = \gamma(t(\tau))$ de Γ $(\Phi(\overline{\gamma}(\tau)) = \tau(t(\tau)) = \tau)$.

Por lo tanto la família de parametrizaciones conformes de la curva Γ se obtienen a través del *desarrollo de la curva en la esfera tangente*, naturalmente equivalente a $\mathbb{P}^1$, y "desenrollando" $\mathbb{P}^1$ de nuevo sobre la curva Γ. Obsérvese que, en particular, la razón doble de cuatro puntos de la curva Γ puede hallarse a través de la razón doble de los correspondientes puntos imagen en el desarrollo de Γ en cualquiera de sus esferas tangentes, y equivalentes a $\mathbb{P}^1$.

4.2. Elección preferente de referencias adaptadas.

Vimos en las secciones previas que la conexión de Cartan $\omega^\Gamma \in (Q(\Gamma), \mathfrak{o}(2,1))$ definida sobre la curva Γ, se hereda del ambiente (M, ω) a través del fibrado de referencias especiales de M adaptadas a la curva Γ. Tales referencias se identifican de manera natural con referencias especiales de $\overline{T_x\Gamma} \equiv \overline{C}_x \subset \overline{T_xM}$. Vamos a ver que sobre cada parametrización $\gamma(t)$ de la curva Γ existen una elección preferente de referencias adaptadas (o de refererencias especiales de Γ) que simplifican la expresión del transporte paralelo dado por la conexión de Cartan y que, en particular, sirve como testador para evaluar la proximidad de la parametrización con el parámetro proyectivo.

4.2.1. Elección primera (derivada de Schwarz).

Recordemos que una curva sobre $\gamma(t)$ de referencias especiales de M adaptadas a Γ es de la forma $q(t) = \left[\widehat{A}_0(t) : \widehat{A}_1(t) : ... : \widehat{A}_m(t) : \widehat{A}_{m+1}(t)\right]$, cumpliéndose las siguientes condiciones

$$span\{\widehat{A}_0(t), \widehat{A}_1(t), \widehat{A}_{m+1}(t)\} = \widehat{T_{\gamma(t)}\Gamma} \subset \widehat{T_{\gamma(t)}M}$$

$$\begin{cases} d\widehat{A}_0 = \omega_0^0 \widehat{A}_0 + \omega^1 \widehat{A}_1 \\ d\widehat{A}_1 = \omega_1^0 \widehat{A}_0 - \omega^1 \widehat{A}_{m+1} \\ d\widehat{A}_{m+1} = -\omega_1^0 \widehat{A}_1 - \omega_0^0 \widehat{A}_{m+1} - \sum\limits_{i=2,\dots,m} \omega_i^0 \widehat{A}_i \end{cases}$$

Esta curva puede verse en correspondencia con la curva de referencias especiales de Γ definidas por $q(t) = q^\Gamma(t) = \left[\widehat{A}_0(t) : \widehat{A}_1(t) : \widehat{A}_{m+1}(t)\right]$ que a través de la conexión ω^Γ se desplaza según las fórmulas

$$\begin{cases} d\widehat{A}_0 = \omega_0^0 \widehat{A}_0 + \omega^1 \widehat{A}_1 \\ d\widehat{A}_1 = \omega_1^0 \widehat{A}_0 - \omega^1 \widehat{A}_{m+1} \\ d\widehat{A}_{m+1} = -\omega_1^0 \widehat{A}_1 - \omega_0^0 \widehat{A}_{m+1} \end{cases} \Leftrightarrow \omega^\Gamma(q'(t)) = \begin{pmatrix} \omega_0^0 & \omega_1^0 & 0 \\ \omega^1 & 0 & -\omega_1^0 \\ 0 & -\omega^1 & -\omega_0^0 \end{pmatrix}$$

Recuérdese además que si se consideraba otra elección $\overline{q}(t) = q(t) \cdot h(t)$ con

$$h(t) = \begin{pmatrix} a & \alpha_1 & -\frac{\alpha_1^2}{2a} \\ 0 & 1 & -\alpha_1 \\ 0 & 0 & a^{-1} \end{pmatrix}(t) \in CO(1) \ltimes \mathbb{R}^{1*}$$

entonces se tenían las relaciones siguientes entre $\omega^\Gamma(q'(t)) = (\omega_j^i)$ y $\omega^\Gamma(\overline{q}'(t)) = (\overline{\omega}_j^i)$

$$\begin{cases} \overline{\omega}_0^0 = \omega_0^0 - \omega^1 \alpha_1(t) + a^{-1}(t) a'(t) \\ \overline{\omega}^1 = a(t)\omega^1 \\ \overline{\omega}_1^0(\overline{\xi}_t) = a^{-1}(t)\left(\omega_1^0 + \omega_0^0 \alpha_1(t) - \frac{\alpha_1(t)^2}{2a}\omega^1 + \alpha_1'(t)\right) \end{cases} \tag{13}$$

Por lo tanto, podemos elegir las referencias sobre $\gamma(t)$ de modo tal que se tenga $\omega^1 = 1$ para toda t. Geométricamente, esta condición se corresponde con que la elección de referencia sea tal que $\gamma'(t)$ coincida con el vector "normal" a la esfera $\widehat{A}_1$. Es claro que los elementos de la familia de referencias verificando esa condición estarán relacionadas por matrices de cambio $h(t)$ con $a(t) = 1$ y con libertad $\alpha_1(t) \in \mathbb{R}^{1*}$. De modo que las relaciones (13) entre dos elecciones posibles pasan a ser

$$\begin{cases} \overline{\omega}_0^0 = \omega_0^0 - \alpha_1(t) \\ \overline{\omega}^1 = \omega^1 = 1 \\ \overline{\omega}_1^0(\overline{\xi}_t) = \omega_1^0 + \omega_0^0\alpha_1(t) - \frac{\alpha_1(t)^2}{2a} + \alpha_1'(t) \end{cases}$$

pudiéndose adaptar entonces la elección de referencias a la condición añadida $\omega_0^0 = 0$. Es más, se observa claramente que estas dos condiciones $\omega^1 = 1$ y $\omega_0^0 = 0$ determinan completamnte la elección de una única referencia $q(t)$ de $\overline{T_{\gamma(t)}\Gamma}$ sobre cada uno de los puntos de la curva Γ.

A través de estas referencias $q(t)$ sobre $\gamma(t)$ el transporte de las esferas tangentes de Γ dado por la conexión de Cartan ω^Γ tiene por tanto la sencilla expresión

$$\omega^\Gamma(q'(t)) = \begin{pmatrix} 0 & f & 0 \\ 1 & 0 & -f \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \tag{14}$$

siendo $f(t) = \omega_1^0(q'(t))$ una función real, asociada de manera exclusiva a cada parametrización $\gamma(t)$ de la curva.

A la vista de tal expresión, se observa que la curva $g(t)$ en $O(2,1)_I$ que describe el movimiento de la esfera tangente a la curva en función de $q(t)$ y que está determinada por las condiciones (12), se corresponde con la curva

$$g(t) = \begin{pmatrix} a & \alpha & -\frac{\alpha^2}{2a} \\ av & \alpha v + 1 & -\frac{\alpha^2 v}{2a} - \frac{\alpha}{a} \\ -a\frac{v^2}{2} & -\alpha\frac{v^2}{2} - v & \frac{\alpha^2 v^2}{4a} + \frac{\alpha v}{a} + \frac{1}{a} \end{pmatrix}(t)$$

donde $a(t) \in \mathbb{R}^+$, $\alpha(t) \in \mathbb{R}^1$, $v(t) \in \mathbb{R}^{1*}$ cumplen las condiciones $a(0) = 1$, $\alpha(0) = 0$, $v(t) = 0$ y

$$\begin{cases} a'(t) = \alpha(t) \\ \alpha'(t) = a(t)f(t) + \frac{\alpha(t)^2}{2a(t)} \\ v'(t) = \frac{1}{a(t)} \end{cases} \tag{15}$$

En primer lugar, retomando el difeomorfismo local $\Phi : \Gamma \to \mathbb{P}^1$ que describe la estructura proyectiva de Γ, se tiene que

$$\Phi(\gamma(t)) = g(t)(O) = \begin{bmatrix} 1 \\ v(t) \\ -\frac{v(t)^2}{2} \end{bmatrix} = \iota(v(t)) = [1 : v(t)] \in \mathbb{P}^1$$

de modo que la función $t \mapsto v(t)$ está definiendo el parámetro proyectivo de la curva Γ.

Si desarrollamos el sistema de ecuaciones diferenciables anterior 15 llegamos a las siguientes expresiones en relación con el citado parámetro proyectivo $v(t)$

$$\left\{ \begin{array}{l} a(t) = \frac{1}{v'(t)} \\ \alpha(t) = -\frac{v''(t)}{v'(t)^2} \end{array} \right.$$

$$f(t) = -2\{v\}_t$$

siendo

$$\{v\}_t = \frac{1}{2}\frac{v'''}{v'} - \frac{3}{4}\left(\frac{v''}{v'}\right)^2$$

la *derivada de Schwartz* de $v(t)$. Por lo tanto, la función $f(t)$ unívocamente asociada a cada parametrización $\gamma(t)$ a través de la expresión (14) de ω^Γ permite recuperar las parametrizaciones proyectivas $\overline{\gamma}(\tau) = \gamma(t(\tau))$ a través de los cambios de parámetro $\tau(t)$ determinados por ser solución de la ecuación

$$f(t) = -2\{\tau\}_t$$

Como es sabido, la soluciones de tal ecuación difieren unas de otras en homografías $\frac{a+bt}{c+dt}$; y para $f(t) = 0$, se tiene que la familia de soluciones es $\tau(t) = \frac{a+bt}{c+dt}$ de modo que la parametrización $\gamma(t)$ inicial forma parte del parámetro proyectivo.

Resultado: Una parametrización $\gamma(t)$ de la curva (Γ, ω^Γ) está definiendo el parámetro proyectivo si y sólo si $f(t) = 0$, es decir, si y sólo si admite una elección de referencias $q(t)$ en la cual la conexión de Cartan ω^Γ presente la siguiente expresión

$$\omega^\Gamma(q'(t)) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

4.2.2. Elección segunda (traslaciones).

Partiendo de nuevo de las fórmulas de cambio 12 para la expresión de ω^Γ en función de la elección de referencias sobre una parametrización fija $\gamma(t)$ de la curva Γ, se observa que imponiendo inicialmente la restricción $\omega_0^0 = 0$ se tiene la libertad siguiente

$$\left\{ \begin{array}{l} \overline{\omega}_0^0 = \omega_0^0 = 0 \\ \overline{\omega}^1 = a(t)\omega^1 \\ \overline{\omega}_1^0 = a^{-1}(t)\left(\omega_1^0 - \frac{\alpha_1(t)^2}{2a}\omega^1 + \alpha_1'(t)\right) \end{array} \right.$$

con $\alpha_1(t) = \frac{a'(t)}{a(t)\omega^1}$. Podemos imponer entonces la condición $\omega_1^0 = 0$ y los cambios entre tales referencias vendrán dados por matrices satisfaciendo

$$\begin{cases} \alpha_1(t) = \frac{a'(t)}{a(t)\omega^1} \\ \alpha_1'(t) = \frac{\alpha_1(t)^2}{2a}\omega^1 \end{cases}$$

Si imponemos las condiciones iniciales $a(0) = 1$, $\alpha_1(0) = 0$ es claro que las soluciones a tal sistema son $a(t) = 1$ y $\alpha_1(t) = 0$, de manera que, elegida una refrencia inicial $q \in Q(\Gamma)_{\gamma(0)}$, existe una única curva de referencias $q(t)$ partiendo de q que cumple $\omega_0^0 = 0$ y $\omega_1^0 = 0$, o de manera equivalente,

$$\omega^\Gamma(q'(t)) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \omega^1 & 0 & 0 \\ 0 & -\omega^1 & 0 \end{pmatrix} \tag{16}$$

Este tipo de elección en las referencias sobre una parametrización $\gamma(t)$ son interesantes porque la curva en $O(2,1)_I$ que describe el movimiento de la esfera tangente y caracterizada por 12 pasa a ser entonces de la forma

$$g(t) = \begin{pmatrix} a & \alpha & -\frac{\alpha^2}{2a} \\ av & \alpha v + 1 & -\frac{\alpha^2 v}{2a} - \frac{\alpha}{a} \\ -a\frac{v^2}{2} & -\alpha\frac{v^2}{2} - v & \frac{\alpha^2 v^2}{4a} + \frac{\alpha v}{a} + \frac{1}{a} \end{pmatrix}(t)$$

donde $a(t) \in \mathbb{R}^+$, $\alpha(t) \in \mathbb{R}^1$, $v(t) \in \mathbb{R}^{1*}$ cumplen las condiciones $a(0) = 1$, $\alpha(0) = 0$, $v(t) = 0$ y

$$\begin{cases} a'(t) = 0 \Rightarrow a(t) = 1 \\ \alpha'(t) = 0 \Rightarrow \alpha(t) = 0 \\ v'(t) = \omega^1(t) \end{cases}$$

Es decir, la curva de transformaciones conformes que definen el desplazamiento de la esfera tangente sobre $\gamma(t)$ está formada por movimientos

$$g(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ v(t) & 1 & 0 \\ -\frac{v(t)^2}{2} & -v(t) & 1 \end{pmatrix}$$

que corresponden a *traslaciones* de vector $v(t)$ (la imagen del punto origen) con $v'(t) = \omega^1(t)$.

El cambio de parámetro $\tau(t) = v(t) = \int_0^t \omega^1(s)ds$ da lugar, en este caso, a la reparametrización que define el parámetro proyectivo natural de (Γ, ω^Γ). En particular, si $\omega^1(t) = \frac{bc}{(c+dt)^2}$ (v.g. $\omega^1(t) = 1$) entonces $v(t) = \frac{bt}{c+dt}$ y $\gamma(t)$ es una parametrización proyectiva.

Por lo tanto, fijada una referencia especial q sobre un punto de la curva, se pueden elegir las referencias $q(t)$ sobre el resto de puntos de la curva de modo que el desplazamiento de la esfera tangente a Γ según $q(t)$ venga descrito a través de traslaciones. La curva de los vectores de la traslación describe el cambio de parámetro para una reparametrización proyectiva de la curva Γ.

Observación.- La principal ventaja que presenta el hecho de restringirnos a tal elección de referencias es que las secciones $\sigma : \Gamma \to \overline{T\Gamma}$ del fibrado de esferas tangentes a Γ que son ω^Γ-horizontales, definen también el parámetro proyectivo. Esto es así porque su expresión $w(t)$ en una curva de referencias especiales que se mueve por traslaciones resulta ser proyectivamente equivalente a la correspondiente expresión $v(t)$ del desarrollo de la curva. Veámoslo.

Considérese la sección en el fibrado esférico tangente $\gamma(t) \to \sigma(t) \in \overline{T_{\gamma(t)}\Gamma}$. Puesto que en cada t tenemos una referencia especial $q(t)$ para la esfera tangente $\overline{T_{\gamma(t)}\Gamma}$ es claro que el punto $\sigma(t)$ se podrá expresar como

$$\sigma(t) = [q(t) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ w(t) \\ \frac{-\|w(t)\|^2}{2} \end{pmatrix}]$$

Ahora, la sección $\sigma(t)$ será horizontal exclusivamente cuando a través del transporte paralelo definido por ω^Γ es llevada siempre a un mismo punto (proyectivo) de la esfera tangente, es decir, cuando $d\sigma = \lambda\sigma$ para cierto $\lambda \in \mathbb{R}$. Desarrollando tal expresión se llega a

$$q'(t) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ w(t) \\ \frac{-\|w(t)\|^2}{2} \end{pmatrix} + q(t) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ w'(t) \\ < w'(t), w(t) > \end{pmatrix} = q(t) \cdot \lambda(t) \begin{pmatrix} 1 \\ w(t) \\ \frac{-\|w(t)\|^2}{2} \end{pmatrix}$$

y como sabemos que $q'(t) = q(t) \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \omega^1 & 0 & 0 \\ 0 & -\omega^1 & 0 \end{pmatrix}$, esto es equivalente a

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \omega^1 & 0 & 0 \\ 0 & -\omega^1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ w(t) \\ \frac{-\|w(t)\|^2}{2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ w'(t) \\ < w'(t), w(t) > \end{pmatrix} = \lambda(t) \begin{pmatrix} 1 \\ w(t) \\ \frac{-\|w(t)\|^2}{2} \end{pmatrix}$$

es decir, equivalente a la ecuación diferencial

$$w'(t) = -\omega^1(t) = -v'(t)$$

de modo que finalmente se concluye que $w(t) = cte - v(t)$, quedando claro entonces que es proyectivamente equivalente al desarrollo $v(t)$ de la curva $\gamma(t)$.

Por tanto, la expresión de toda sección ω^Γ-horizontal en el fibrado esférico a la curva con respecto a una elección de referencias adecuada (caracterizada por restringir el transporte a traslaciones) define también el buscado parámetro proyectivo de la curva. En particular, este es el método que utiliza E.Cartan en su artículo para definir dicho parámetro.

5. Círculos conformes de (M, ω)

Como ya vimos anteriormente, existe una familia especial de curvas Γ en toda variedad conforme Riemanniana M, caracterizadas por la propiedad (geométrica) de que la inclusión natural del espacio tangente esférico de la curva Γ en el espacio tangente esférico del espacio ambiente M, es tal que el desplazamiento sobre la curva Γ descrito por la conexión de Cartan ω lo preserva.

$$\begin{array}{ccc} \overline{T_{x_1}M} & \xrightarrow{\Pi^{\omega}_{\gamma,t_1,t_2}} & \overline{T_{x_2}M} \\ \uparrow & & \uparrow \\ \overline{T_{x_1}\Gamma} & \underset{restricc.}{\longrightarrow} & \overline{T_{x_2}\Gamma} \end{array}$$

Esta propiedad se manifiesta de manera equivalente a través de la condición de que la conexión normal de Cartan ω sobre referencias especiales de M adaptadas a la curva Γ tiene nulas sus componentes ω^0_i, $\forall i = 2, ..., m$.

$$\omega = \begin{pmatrix} \omega^0_0 & \boxed{\begin{matrix} \omega^0_1 & 0 & ... & 0 \end{matrix}} & 0 \\ \boxed{\begin{matrix} \omega^1 \\ 0 \\ ... \\ 0 \end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix} 0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & & & \\ ... & & \omega^i_j & \\ 0 & & & \end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix} -\omega^0_1 \\ 0 \\ ... \\ 0 \end{matrix}} \\ 0 & \boxed{\begin{matrix} -\omega^1 & 0 & ... & 0 \end{matrix}} & -\omega^0_0 \end{pmatrix}$$

y los cambios de referencias adaptadas dados por elementos $h(t) = (A, a, \alpha_1)(t) \in H$ de la forma (3) son enontces

$$\begin{cases} \overline{\omega}^0_0 = \omega^0_0 - \alpha_1\omega^1 + a^{-1}\frac{da}{dt} \\ \overline{\omega}^1 = a\omega^1 \\ \overline{\omega}^0_1 = a^{-1}\left[\omega^0_1 + \alpha_1\omega^0_0 - \frac{\alpha_1^2}{2}\omega^1 + \frac{d\alpha_1}{dt}\right] \\ \overline{\omega}^i_j = A^{-1}\omega^i_j A + A^{-1}\frac{dA}{dt} \end{cases}$$

Se puede parametrizar el círculo conforme Γ a través de su parámetro proyectivo con $t \to \gamma(t) \in \Gamma$, y por lo que se desarrolló en la sección anterior, se tiene entonces que podemos optimizar la elección de referencias adaptadas a Γ sobre la parametrización $\gamma(t)$ de manera que la curva $q(t)$ cumpla

$$\begin{aligned} \omega^0_0(q'(t)) &= 0 \\ \omega^0_1(q'(t)) &= 0 \\ \omega^1(q'(t)) &= 1 \end{aligned}$$

Estas condiciones determinan completamente los elementos $[\widehat{A}_0(t) : \widehat{A}_1(t) : \widehat{A}_{m+1}(t)]$ de la referencia $q(t) = [\widehat{A}_0(t) : \widehat{A}_1(t) : ... : \widehat{A}_m(t) : \widehat{A}_{m+1}(t)]$. Pero si observamos la ecuación de cambio de referencia

$$\overline{\omega}^i_j = A^{-1}\omega^i_j A + A^{-1}\frac{dA}{dt}$$

es claro que podemos ajustar la elección del resto de elementos $\widehat{A}_2(t), ..., \widehat{A}_m(t)$ de manera que se verifique también la anulación $\omega^i_j(q'(t)) = 0$.

De este modo, se llega a que el círculo conforme Γ admite una parametrización $\gamma(t)$ y una elección de referencias adaptadas $q(t)$ sobre ella, de manera que se verifica

$$\omega(q'(t)) = \begin{pmatrix} 0 & \boxed{\begin{matrix} 0 & ... & 0 \end{matrix}} & 0 \\ \boxed{\begin{matrix} 1 \\ ... \\ 0 \end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix} 0 & ... & 0 \\ ... & & ... \\ 0 & ... & 0 \end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix} 0 \\ ... \\ 0 \end{matrix}} \\ 0 & \boxed{\begin{matrix} -1 & 0... & 0 \end{matrix}} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ ... \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m$$

Si ahora se toma el elemento $e_1 = (1, 0, ..., 0) \in \mathbb{R}^m$ y se utiliza para definir un campo $\mathbb{E}$ en $Q(M)$ a través de la conexión normal de Cartan $\omega \in (Q(M), \mathbb{R}^m \oplus \mathfrak{co}(m) \oplus \mathbb{R}^{m*})$ mediante la fórmula

$$\mathbb{E}(q) = (\omega_q)^{-1}(e_1) \in T_qQ(M)$$

resulta que la curva $q(t)$ resulta ser una curva integral del campo $\mathbb{E}$.

Llamamos *geodésica conforme de la variedad conforme* M a toda curva parametrizada $\gamma(t)$ correspondiente a un círculo conforme Γ de (M, ω) parametrizado a través de su parámerto proyectivo.

Resultado: Las geodésicas conformes de un espacio conforme (M, ω) son las proyecciones a M de las curvas (parametrizadas) integrales en $Q(M)$ del campo

$$\mathbb{E}(q) = (\omega_q)^{-1}(e_1) \in T_qQ(M)$$

definido a partir de la conexión normal de Cartan $\omega \in (Q(M), \mathfrak{g})$. Los círculos conformes son sus trayectorias.

6. Caracterización a través de la geometría Riemanniana

La definición de la conexión normal de Cartan ω en el fibrado de esferas tangentes a la variedad se apoya en la elección previa de una métrica conforme $g \in \mathcal{C}$. En esta sección se va a desarrollar la definición de $\omega \in \Lambda^1(Q(M), \mathfrak{g})$ para relacionarla posteriormente con elementos propios de la geometría Riemanniana asociados a la métrica conforme inicial en la estructura conforme $\mathcal{C}$. Esto nos permitirá expresar los elementos definidos en las secciones anteriores, como son la noción de círculo conforme o de parámetro conforme en una curva, mediante ecuaciones diferenciales donde intervienen tensores asociados a las métricas, en particular, intervendrán la forma de conexión y el tensor de Schouten (estrechamente ligado a la curvatura de Weyl).

6.1. Conexión normal de Cartan

En primer lugar, recordemos que la conexión normal de Cartan ω es una 1-forma definida sobre el fibrado de referencias esféricas especiales $Q(M)$ que toma valores en el álgebra de Lie graduada $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{-1} \oplus \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1 = \mathfrak{o}(m+1,1) = \mathbb{R}^m \oplus \mathfrak{co}(m) \oplus \mathbb{R}^{m*}$.

Como se sabe, la definición de tal conexión normal de Cartan $\omega \in \Lambda^1(Q(M), \mathfrak{g})$ se apoya en la elección previa de una métrica conforme $g \in \mathcal{C}$. Entonces, $\omega = (\omega_{-1}, \omega_0, \omega_1) \in \mathbb{R}^m \oplus \mathfrak{co}(m) \oplus \mathbb{R}^{m*}$ queda determinada a través de sus componentes por las condiciones siguientes:

- ω_{-1} se corresponde con la *forma vertical* $\left(\Pi^{Q(M)}_{CO(M)}\right)^* \theta^{CO(M)}$, siendo $\theta^{CO(M)}$ la forma vertical en el fibrado de referencias conformes $CO(M)$.

- ω_0 se corresponde con la extensión H-equivariante a $Q(M)$ de la *forma de conexión* definida en $CO(M) \subset Q(M)$ asociada a la conexión ∇ de Levi-Civita de la métrica inicial g.

- ω_1 está determinada por las anteriores componentes y por la condición de normalización sobre la curvatura Ω. Para las referencias $q \in CO(M) \subset Q(M)$ se tiene que

$$(\omega_{-1})_q = \tau_q$$

siendo $\tau_q = (\tau_i) \in T^*_q CO(M) \otimes \mathbb{R}^{m*}$ la forma definida a través de

$$\tau_i(.) = L\left(v_i, (\Pi^Q_M)_*(.)\right)$$

cuando la referencia lineal conforme $q \in CO(M)$ está formada por los vectores $\{v_1, ..., v_m\}$ de $T_x M$ y $L \in \mathfrak{T}^0_2(M)$ es el *tensor de Schouten* de la métrica g

$$L = -\frac{1}{m-2} Ric + \frac{Sc}{2(m-1)(m-2)} g \tag{17}$$

Supongamos ahora que tenemos la curva de referencias esféricas especiales $q(t) \in Q(M)$ sobre la curva base $\gamma(t) \in M$. Pasemos a estudiar las tres componentes de la conexión normal de Cartan $\omega \in \Lambda^1(Q(M), \mathbb{R}^m \oplus \mathfrak{co}(m) \oplus \mathbb{R}^{m*})$ actuando sobre el campo velocidad $\xi_t = \frac{d}{dt}\{q(t)\}$ de la curva de referencias $q(t)$.

Sea $q_*(t) \in CO(M)$ la curva de referencias lineales conformes asociada a $q(t)$. Es claro que si consideramos $q_*(t) \in CO(M) \subset Q(M)$, existirá una curva $h(t) \in \mathbb{R}^{m*} \subset CO(m) \leftthreetimes \mathbb{R}^{m*}$ de la forma

$$h(t) = \begin{pmatrix} 1 & \eta(t) & -\frac{\|\eta(t)\|^2}{2} \\ 0 & I_m & -\eta(t)^T \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \exp \begin{pmatrix} 0 & \eta(t) & 0 \\ 0 & 0 & -\eta(t)^T \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

tal que $q(t) = q_*(t) \cdot h(t)$.

Si denotamos $\xi_{*t} = \frac{d}{dt}\{q_*(t)\}$,se tendrá entonces que

$$\xi_t = \left(R_{h(t)}\right)_* (\xi_{*t}) + \left(\lambda_{q(t)}\right)_* \left(\left.\frac{d}{ds}\right|_{s=t} \{h(t)^{-1}h(s)\} \right)$$

y, por lo tanto,

$$\omega(\xi_t) = Ad_{h(t)^{-1}} \left(\omega(\xi_{*t})\right) + \left.\frac{d}{ds}\right|_{s=t} \{h(t)^{-1}h(s)\}$$

Teniendo en cuenta que $h(t) = \exp(\eta(t))$, es claro que

$$\left\{ \begin{array}{l} \omega_{-1}(\xi_t) = \omega_{-1}(\xi_{*t}) \\ \omega_0(\xi_t) = \omega_0(\xi_{*t}) - [\eta(t), \omega_{-1}(\xi_{*t})] \\ \omega_1(\xi_t) = \omega_1(\xi_{*t}) - [\eta(t), \omega_0(\xi_{*t})] + \frac{1}{2}[\eta(t), [\eta(t), \omega_{-1}(\xi_{*t})]] + \eta'(t) \end{array} \right. \tag{18}$$

• *La primera componente $\omega_{-1}(\xi_t) \in \mathbb{R}^m$ se corresponde, como ya es sabido, con la forma vertical del subfibrado de referencias conformes $CO(M)$, de modo que*

$$\boxed{\omega_{-1}(\xi_t) = q_*(t)^{-1}\left(\gamma'(t)\right) \in \mathbb{R}^m} \tag{19}$$

Si la referencia lienal conforme $q_*(t)$ es la formada por los vectores $\{v_1(t), ..., v_m(t)\}$ de $T_{\gamma(t)}M$, entonces,

$$\omega_{-1}(\xi_t) = (X^i(t))_i \in \mathbb{R}^m$$

siendo $\gamma'(t) = \sum\limits_{i=1}^{m} X^i(t)v_i(t)$.

Estudiemos ahora la componente $\omega_0 \in \Lambda^1(Q(M), \mathfrak{co}(m))$. Para ello, hacemos uso de las fórmulas 18, teniendo presente que para la curva $q_*(t) \in CO(M)$ la componente ω_0 de la conexión de Cartan coincide con la forma asociada a la conexión ∇ de Levi-Civita de la métrica inicial g, es decir,

$$\frac{\nabla}{dt} v_i(t) = \sum_{k \neq i} \omega_i^k(\xi_{*t}) v_k(t) - \omega_0^0(\xi_{*t}) v_i(t) \tag{20}$$

(en la expresión se ha considerado la descomposición $\omega_0 = \left(\omega_j^i\right)_{i,j} - \omega_0^0 I_m \in \mathfrak{co}(m)$, por coherencia con la presentación matricial del álgebra de Lie $\mathfrak{g} = \mathfrak{o}(m+1,1)$)

Ahora, recuperando la expresión del corchete de Lie

$$[\eta(t), \omega_{-1}(\xi_{*t})] = \left(\eta_i X^j - X^i \eta_j - \sum_k \eta_k X^k \delta_j^i \right)_{i,j} \in \mathfrak{co}(m)$$

es claro que la identidad $\omega_0(\xi_t) = \omega_0(\xi_{*t}) - [\eta(t), \omega_{-1}(\xi_{*t})]$, se expresa de manera equivalente a través de las igualdades

$$\begin{cases} \omega_j^i(\xi_t) = \omega_j^i(\xi_{*t}) + X^i\eta_j - \eta_i X^j, \forall i, j \\ \omega_0^0(\xi_t) = \omega_0^0(\xi_{*t}) - \sum\limits_k \eta_k X^k \end{cases}$$

Obsérvese ahora que $\omega_0(\xi_t) \in \mathfrak{co}(m)$ da lugar a la definición de una nueva conexión lineal conforme $\overline{\nabla}$, a través de las fórmulas análogas a (20)

$$\frac{\overline{\nabla}}{dt} v_i(t) = \sum_{k \neq i} \omega_i^k(\xi_t) v_k(t) - \omega_0^0(\xi_t) v_i(t)$$

es decir, una nueva conexión conforme $\overline{\nabla}$ que responde a la siguiente fórmula

$$\begin{aligned} \frac{\overline{\nabla}}{dt} v_i(t) &= \frac{\nabla}{dt} v_i(t) + X^k \eta_i v_k - \eta_k X^i v_k + \eta_k X^k v_i = \\ &= \frac{\nabla}{dt} v_i(t) + H(v_i)\gamma'(t) - g(\gamma'(t), v_i) H \uparrow_g + H(\gamma'(t)) v_i \end{aligned}$$

donde $H \in \left(T_{\gamma(t)}M\right)^*$está definido por $H(v_i) = \eta_i$, $\forall i = 1, .., m$.

De este modo, $\omega_0(\xi_t)$ *se corresponde con la forma de conexión asociada a* $\overline{\nabla}$, conexión lineal conforme relacionada con la conexión de Levi-Civita ∇ inicial a través de

$$\frac{\overline{\nabla}}{dt} v = \frac{\nabla}{dt} v(t) + H(\gamma'(t)) v + H(v)\gamma'(t) - g(\gamma'(t), v) H \uparrow_g \qquad (21)$$

donde la 1-forma H_t está *definida por* $H_t \circ q_*(t) = \eta(t) \in \mathbb{R}^{m*}$, siendo $q(t) = q_*(t) \cdot \exp \eta(t)$.

Observación.- Toda 1-forma H_t definida sobre la curva $\gamma(t)$ es integrable, es decir, existirá una función $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{U})$ en un entorno $\mathcal{U}$ de la curva $\gamma(t)$, tal que

$$H_t = df(\gamma(t)) = \frac{d(f \circ \gamma)}{dt} dt$$

Ahora es inmediato observar que si se define la métrica $\overline{g} = e^{2f} g$ en el entorno de la curva $\mathcal{U}$, entonces el operador derivada covariante sobre $\gamma(t)$ dado por la conexión de Levi-Civita de la métrica conforme $\overline{g}$ es justamente $\frac{\overline{\nabla}}{dt}$ definido en (21).

Entonces, de manera equivalente podemos enunciar:

• *La componente* $\omega_0(\xi_t) \in \mathfrak{co}(m)$ *se corresponde con la forma de conexión asociada a la conexión de Levi-Civita de una métrica conforme* $\overline{g} = e^{2f} g$

definida en un entorno de la curva base $\gamma(t) \in M$, para cualquier función f verificando

$$df(\gamma(t)) \circ q_*(t) = \eta(t) \in \mathbb{R}^{m*}$$

siendo $q(t) = q_*(t) \cdot \exp \eta(t)$.

Las componentes $(\omega_{-1}, \omega_0) \in \Lambda^1(Q(M), \mathbb{R}^m \oplus \mathfrak{co}(m))$ de la conexión normal de Cartan ω actuando sobre la curva $q(t) \in Q(M)$ se corresponden, respectivamente, con la forma vertical $\theta^{CO(M)}$ del fibrado de referencias lineales conformes y con la forma de conexión asociada a la conexión de Levi-Civita de la métrica conforme $\overline{g} = e^{2f}g$ (con $df(\gamma(t)) \circ q_*(t) = \eta(t)$), por lo tanto, podemos afirmar que la componente $\omega_1 \in \Lambda^1(Q(M), \mathbb{R}^{m*})$ sobre la curva $q(t)$ se corresponderá entonces con la 1-forma $\overline{\tau} = i_{\gamma'(t)}(\overline{L})$ correspondiente al tensor de Schouten $\overline{L}$ asociado a la métrica $\overline{g}$.

- *La componente $\omega_1(\xi_t) = (\tau_j(t))_j \in \mathbb{R}^{m*}$ viene dada por*

$$\tau_j(t) = \overline{L}(v_j(t), \gamma'(t))$$

correspondiente al tensor de Schouten (17) sobre la curva $\gamma(t)$ de la métrica conforme $\overline{g} = e^{2f}g$, siendo $df(\gamma(t)) \circ q_*(t) = \eta(t) \in \mathbb{R}^{m*}$, para $q(t) = q_*(t) \cdot \exp \eta(t)$.

$$\overline{L} = -\frac{1}{m-2}\overline{Ric} + \frac{\overline{Sc}}{2(m-1)(m-2)}\overline{g}$$

6.2. Conexión de Cartan inducida en una curva

Sea Γ una curva en la variedad conforme Riemanniana M dotada de conexión normal de Cartan $\omega \in \Lambda^1(Q(M), \mathfrak{g})$. Sobre la subvariedad Γ se considera entonces el subfibrado de $Q(M)$ formado por aquellas referencias especiales $q : \mathbb{S}^m \to \overline{T_xM}$ *adaptadas a la curva* Γ (en el sentido en que se ha definido en la sección anterior).

Si la componente $\omega_{-1} \in \Lambda^1(Q(M), \mathbb{R}^m)$ de la conexión de Cartan ω se descompone en $\omega_{-1} = (\omega^1, \omega^2, ..., \omega^m)$, entonces, se verifica que para toda $q(t) \in Q(M)$ curva de referencias adaptadas sobre $\gamma(t) \in M$ se hacen nulas las componentes

$$\omega^2 = ... = \omega^m = 0$$

siendo además $\gamma'(t) = \omega^1(t)v_1(t)$, con $q_*(t) = \{v_1, ..., v_m\}(t) \in CO(M)$ la referencia lineal conforme asociada.

Además, las referencias adaptadas a una curva Γ cumplían la condición adicional de optimización de hacer nulas también las componentes de la conexión de Cartan ω del ambiente

$$\omega^1_2 = ... = \omega^1_m = 0$$

siendo $\omega_0 = \left(\omega_j^i\right) - \omega_0^0 I_m$.

Por el desarrollo hecho en la sección anterior, sabemos que esta condición puede expresarse también, de manera alternativa, a través de la ecuación

$$\frac{\overline{\nabla}}{dt}\left(v_1(t)\right) = -\omega_0^0(t) v_1(t) \tag{22}$$

para la conexión $\overline{\nabla}$ de Levi-Civita de la métrica $\overline{g} = e^{2f} g$ sobre $\gamma(t)$, tal que $df(\gamma(t)) \circ q_*(t) = \eta(t) \in \mathbb{R}^{m*}$, siendo $q(t) = q_*(t) \cdot \exp\left(\eta(t)\right)$.

O de manera equivalente

$$\frac{\overline{\nabla}}{dt}\left(\gamma'(t)\right) = \left(\frac{d}{dt}\{\ln \omega^1(t)\} - \omega_0^0(t)\right)\gamma'(t)$$

es decir, la curva $\gamma(t)$ es una pregeodésica para la métrica $\overline{g} = e^{2f} g$ definida más arriba.

Se puede concluir, por tanto, que asociada a una curva Γ sumergida en un espacio ambiente conforme (M, ω) hay una familia distinguida de referencias especiales de M adaptadas a la geometría de Γ, y ésta se corresponde con la familia de métricas conformes de la forma $\overline{g} = e^{2f} g \in \mathcal{C}$ tales que tienen a la curva Γ como trayectoria geodésica.

6.2.1. Parámetro proyectivo

Recuérdese en primer lugar que toda parametrización $\gamma(t)$ de la curva Γ definiendo el parámetro proyectivo venía dada por la condición de admitir una curva $q(t)$ de referencias adaptas sobre ella, tal que la conexión normal de Cartan ω actuando sobre su campo velocidad fuese de la forma

$$\omega = \begin{pmatrix} 0 & \boxed{\begin{matrix} 0 & \omega_2^0 & \dots & \omega_m^0 \end{matrix}} & 0 \\ \boxed{\begin{matrix} 1 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & \\ \dots & & \omega_j^i & \\ 0 & & & \end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix} 0 \\ -\omega_2^0 \\ \dots \\ -\omega_m^0 \end{matrix}} \\ 0 & \boxed{\begin{matrix} -1 & 0 & \dots & 0 \end{matrix}} & 0 \end{pmatrix}$$

Si se hace uso de las expresiones anteriormente obtenidas para las distintas componentes de la conexión de Cartan ω, se llega a que dicho parámetro proyectivo está caracterizado por hacer posible la verificación simultánea de las condiciones

$$\left\{\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} \omega^1 = 1 \Leftrightarrow \gamma'(t) = v_1(t) \ (v_1 \text{ el primer vector de } q_*) \\ \omega_0^0 = 0 \Leftrightarrow \frac{\overline{\nabla}}{dt} v_1(t) = 0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \frac{\overline{\nabla}}{dt}\gamma'(t) = 0 \\ \omega_1^0 = 0 \Leftrightarrow \overline{L}(\gamma'(t), v_1) = 0 \Leftrightarrow \overline{L}(\gamma'(t), \gamma'(t)) = 0 \Leftrightarrow \overline{L}(T\Gamma, T\Gamma) = 0 \end{array}\right. \tag{23}$$

Por lo tanto, la curva de referencias especiales $q(t) = q_*(t) \cdot \exp(\eta(t))$ sobre Γ se corresponde con una métrica conforme $\overline{g} = e^{2f} g \in \mathcal{C}$ (a través de la relación $df \circ q_*(t) = \eta(t) \in \mathbb{R}^{m*}$), que tiene a Γ como curva pregeodésica ($\frac{\overline{\nabla}}{dt}\gamma'(t) = 0$) y que verifica además que su tensor de Schouten se anula cuando ambas entradas corresponden a vectores tangentes a la curva Γ ($\overline{L}(T\Gamma, T\Gamma) = 0$).

Si contamos con una métrica $\overline{g} = e^{2f} g \in \mathcal{C}$ en las condiciones anteriores, se considera la parametrización $\gamma(t)$ de la curva Γ que la hace $\overline{g}$-geodésica unitaria (i.e. $\frac{\overline{\nabla}}{dt}\gamma'(t) = 0$, $\overline{g}(\gamma', \gamma') = 1$), esta parametrización de Γ define entonces el parámetro proyectivo de Γ.

En efecto, podemos tomar sobre $\gamma(t)$ una curva de referencias lineales conformes de la forma $q_*(t) = \{v_1(t), ..., v_m(t)\}$ de $T_{\gamma(t)}M$ tales que el primer vector coincida con la velocidad de la parametrización $\gamma'(t) = v_1(t)$, y entonces, tomar la referencia adaptada $q(t) = q_*(t) \cdot \exp(\eta(t)) \in Q(M)$, siendo $\eta(t) \in \mathbb{R}^{m*}$ el elemento definido por $df \circ q_*(t) = \eta(t)$. La curva de referencias especiales adaptadas $q(t)$ sobre $\gamma(t)$ así definida verifica las condiciones (23).

Resultado: Una curva $\gamma(t)$ está parametrizada por su *parámetro proyectivo* cuando admite una métrica conforme $\overline{g}$ tal que tiene a $\gamma(t)$ como *geodésica unitaria* y verifica la propiedad añadida de que su *tensor de Schouten se hace nulo cuando actúa sobre pares de vectores tangentes* a la curva.

Observación.- Las condiciones anteriores para la métrica $\overline{g} \in \mathcal{C}$, dan lugar a que la parametrización $\gamma(t)$ verifique la ecuación de segundo grado siguiente

$$\overline{g}\left(\frac{\overline{\nabla}}{dt}(\frac{\overline{\nabla}}{dt}\gamma'), \gamma'\right) = \frac{3\overline{g}(\gamma', \frac{\overline{\nabla}}{dt}\gamma')^2}{\overline{g}(\gamma', \gamma')} - \frac{3\overline{g}(\frac{\overline{\nabla}}{dt}\gamma', \frac{\overline{\nabla}}{dt}\gamma')}{2} - \overline{g}(\gamma', \gamma')\overline{L}(\gamma', \gamma')$$

puesto que ambos lados de la igualdad resultan idénticamente nulos. Veremos más adelante que esta ecuación se mantiene invariante por cambios conformes de métrica, de modo que nos ofrecerá una manera alternativa para hallar la parametrización proyectiva $\gamma(t)$ en las curvas Γ sumergidas en una variedad conforme $(M, \mathcal{C})$, partiendo de cualquiera de las métricas conformes.

6.2.2. Geodésicas conformes

En toda variedad conforme M se distingue una familia de curvas Γ asociada a su estructura conforme $\mathcal{C}$, caracterizadas por verificar la anulación de las siguientes componentes de la conexión normal de Cartan ω

$$\omega_2^0 = ... = \omega_m^0 = 0$$

cuando ésta actúa en el subfibrado de referencias especiales de M adaptadas a dicha curva.

Por lo que se ha desarrollado anteriormente, estas condiciones de anulación pueden expresarse de manera equivalente a través de las condiciones

$$\overline{L}(\gamma'(t), v_i) = 0, \forall i = 2, ..., m \Leftrightarrow \overline{L}(T\Gamma, T\Gamma^{\perp}) = 0$$

siendo $\overline{L}$ el tensor de Schouten asociado a la métrica $\overline{g} = e^{2f} g \in \mathcal{C}$, que representa a cualquiera de las métricas conformes que tienen a la curva Γ como trayectoria geodésica (estas estan en correspondencia con las referencias adaptadas $q(t) = q_*(t) \cdot \exp(\eta(t))$ a través de la relación $df \circ q_*(t) = \eta(t) \in \mathbb{R}^{m*}$).

Si se considera ahora una parametrización del círculo conforme Γ que define el parámetro proyectivo, se tiene entonces la geodésica conforme $\gamma(t)$. Recuperando los resultados obtenidos para el parámetro proyectivo en el apartado anterior, sabemos que tal parametrización se halla tomando entre las métricas conformes que tienen a Γ como trayectoria geodésica, aquellas $\overline{g} \in \mathcal{C}$ que además verifican que su tensor de Schouten $\overline{L}$ se anula cuando ambas entradas están en la dirección tangente a la curva Γ ($\overline{L}(T\Gamma, T\Gamma) = 0$). En este caso, como el hecho de estar considerando una círculo conforme proporciona la propiedad extra $\overline{L}(T\Gamma, T\Gamma^{\perp}) = 0$, es claro que esto significa que, de hecho, las métricas $\overline{g}$ se caracterizan por

$$\overline{L}(T\Gamma, TM) = 0 \Leftrightarrow \overline{L}(T\Gamma, .) = 0 \in TM^*$$

Parametrizando entonces la curva Γ de modo que sea geodésica unitaria para la métrica conforme en tales condiciones, obtenemos las parametrizaciones que definen el parámetro conforme de Γ.

Resultado: Una *geodésica conforme* en la variedad conforme (M, ω) es toda curva parametrizada que admite métricas conformes $\overline{g}$ cumpliendo las condiciones de tenerla como *geodésica unitaria* y de tener asociado un *tensor de Schouten* $\overline{L}$ *que se anula cuando una de sus dos entradas es el vector velocidad* de la curva

$$\overline{L} = -\frac{1}{m-2}\overline{Ric} + \frac{\overline{Sc}}{2(m-1)(m-2)}\overline{g}$$

Observación.- Obsérvese que en este caso, la parametrización $\gamma(t)$ resulta ser solución para la siguiente ecuación de tercer grado, siendo $\overline{g}$ una métrica en las condiciones anteriores, puesto que se anulan ambos lados de la igualdad

$$\frac{\overline{\nabla}}{dt}\left(\frac{\overline{\nabla}}{dt}\gamma'\right) \wedge \gamma' = \frac{3\overline{g}(\gamma', \frac{\nabla}{dt}\gamma')}{\overline{g}(\gamma', \gamma')}\left(\frac{\overline{\nabla}}{dt}\gamma' \wedge \gamma'\right) + \overline{g}(\gamma', \gamma')\left(\left(\overline{L}(\gamma', .) \uparrow_{\overline{g}}\right) \wedge \gamma'\right)$$

Al igual que antes, esta ecuación resulta ser invariante por cambios conformes de la métrica.

6.3. Coherencia con trabajo de Bailey-Eastwood.

En el estudio de las estructuras conformes sobre variedades diferenciables a través de la familia de métricas Riemannianas conformes, se definen las *"curvas geodésicas conformes"*[2] como aquellas $t \to \gamma(t) \in M$ tales que verifican la siguiente equación diferenciable de segundo orden

$$\frac{\nabla}{dt}(\frac{\nabla}{dt}\gamma') = \frac{3g(\gamma', \frac{\nabla}{dt}\gamma')}{g(\gamma', \gamma')}\frac{\nabla}{dt}\gamma' - \frac{3g(\frac{\nabla}{dt}\gamma', \frac{\nabla}{dt}\gamma')}{2g(\gamma', \gamma')}\gamma' + g(\gamma', \gamma')l(\gamma') - 2L(\gamma', \gamma')\gamma' \tag{24}$$

siendo $l(v) = L(v, .) \uparrow_g$ y L el tensor de Schouten de la métrica g, para cualquier métrica conforme $g \in \mathcal{C}$.

En efecto, esta ecuación se mantiene invariante a través de los cambios conformes de la métrica $g \in \mathcal{C}$, y por tanto, es claro que tales curvas dependen exclusivamente de la estrucutura conforme definida sobre M, estando pues bien definido el concepto de geodésica conforme asociado a $\mathcal{C}$.

La ecuación (24) se escinde en las dos ecuaciones siguientes, puesto que es claro que es equivalente a la verificación simultánea de las equaciones

$$g\left(\frac{\nabla}{dt}(\frac{\nabla}{dt}\gamma'), \gamma'\right) = \frac{3g(\gamma', \frac{\nabla}{dt}\gamma')^2}{g(\gamma', \gamma')} - \frac{3g(\frac{\nabla}{dt}\gamma', \frac{\nabla}{dt}\gamma')}{2} - g(\gamma', \gamma')L(\gamma', \gamma') \tag{25}$$

$$\frac{\nabla}{dt}(\frac{\nabla}{dt}\gamma') \wedge \gamma' = \frac{3g(\gamma', \frac{\nabla}{dt}\gamma')}{g(\gamma', \gamma')}\left(\frac{\nabla}{dt}\gamma' \wedge \gamma'\right) + g(\gamma', \gamma')\left((L(\gamma', .) \uparrow_g) \wedge \gamma'\right) \tag{26}$$

Se observa que la segunda ecuación (26) se mantiene invariante por reparametrizaciones arbitrarias de la curva, mientras que la primera (25) es invariante únicamente a través de los cambios de parámetros dados por homografías $t \to \frac{at+b}{ct+d}$.

Se verifica además que toda curva en la variedad M puede ser reparametrizada de modo tal que verifique la primera ecuación (25). En consecuencia, toda curva Γ en la variedad conforme $(M, \mathcal{C})$ admite una familia distinguida de parámetros equivalentes a través de homografías que verifican la ecuación primera (25), dando lugar al llamado *"parámetro proyectivo"*[2] *de la curva* Γ.

En particular, una curva $\gamma(t)$ resultará ser una "geodésica conforme"[2] únicamente cuando esté parametrizada por su "parámetro proyectivo"[2] y verifique también la ecuación segunda (26).

A estas alturas es inmediato ver que si tenemos una curva parametrizada $\gamma(t)$ podemos elegir la métirca conforme $g \in \mathcal{C}$ de manera que tenga a $\gamma(t)$ como geodésica unitária ($\frac{\nabla}{dt}\gamma' = 0$ y $g(\gamma', \gamma') = 1$), entonces, la curva estará parametrizada por su "parámetro proyectivo" únicamente cuando verifique la ecuación (25), es decir, cuando

$$0 = \frac{3g(\gamma', \frac{\nabla}{dt}\gamma')^2}{g(\gamma', \gamma')} - \frac{3g(\frac{\nabla}{dt}\gamma', \frac{\nabla}{dt}\gamma')}{2} - g(\gamma', \gamma')L(\gamma', \gamma') = -L(\gamma', \gamma')$$

Por otra parte, $\gamma(t)$ será además una "geodésica conforme"[2] cuando se verifique simultáneamente la ecuación segunda (26), es decir, cuando también se cumpla

$$0 = \frac{3g(\gamma', \frac{\nabla}{dt}\gamma')}{g(\gamma',\gamma')}\left(\frac{\nabla}{dt}\gamma' \wedge \gamma'\right) + g(\gamma',\gamma')\left((L(\gamma',.)\uparrow_g) \wedge \gamma'\right) = (L(\gamma',.)\uparrow_g) \wedge \gamma'$$

$$(L(\gamma',.)\uparrow_g) \wedge \gamma' = 0 \Leftrightarrow L(\gamma',(\gamma')^{\perp}) = 0$$

Comparando lo que se acaba de obtener con los resultados anteriores, es inmediato ver que las dos definiciones de parámetro proyectivo y de geodésica conforme son equivalentes; en esta segunda caracterización se sustituye la utilización de la conexión normal de Cartan ω por tensores asociados a las métricas Riemannianas g de la estructura conforme.

En particular, con esta equivalencia, se tiene que las definiciones de parámetro proyectivo y de geodésica conforme en una variedad conforme $(M,\mathcal{C})$ son independientes de la conexión normal de Cartan ω que se considere, y cuya unicidad estaba determinada salvo elección previa de una métrica conforme.