

# INTRODUCCIÓN A LA GEOMETRÍA DIFERENCIAL

Javier Lafuente López

Octubre de 2001

## Índice

<b>1. TEORIA DE CURVAS</b>	<b>5</b>
1.1. CURVAS PLANAS . . . . .	5
1.1.1. Vector velocidad . . . . .	5
1.1.2. Curvas regulares . . . . .	5
1.1.3. Recta tangente y recta normal . . . . .	6
1.1.4. Reparametrizaciones . . . . .	6
1.1.5. Trayectorias y trayectorias orientadas. . . . .	6
1.1.6. Sobre la geometría de las curvas . . . . .	6
1.1.7. Curvas congruentes . . . . .	7
1.1.8. La Geometría intrínseca . . . . .	7
1.1.9. Curvas en implícitas . . . . .	7
1.1.10. Longitud de una Curva. . . . .	9
1.1.11. Parametrización por el arco . . . . .	10
1.1.12. Diedro de Frenet . . . . .	10
1.1.13. Determinación diferenciable del ángulo. . . . .	10
1.1.14. Curvatura . . . . .	11
1.1.15. Fórmulas de Frenet . . . . .	11
1.1.16. Teorema Fundamental (versión plana) . . . . .	12
1.1.17. Cálculos con parámetro arbitrario . . . . .	13
1.2. CURVAS EN EL ESPACIO . . . . .	13
1.2.1. Triedro de Frenet . . . . .	14
1.2.2. Fórmulas de Frenet . . . . .	15
1.2.3. Algoritmos para el cálculo de la curvatura y la torsión . . . . .	16
1.2.4. Los planos y rectas del triedro de Frenet . . . . .	17
1.2.5. Teorema Fundamental (versión tridimensional) . . . . .	17
1.2.6. Apéndice: Sistemas lineales de ecuaciones diferenciales . . . . .	19
1.3. Ejercicios Propuestos . . . . .	19

<b>2. SUPERFICIES: CONCEPTOS BÁSICOS</b>	<b>22</b>
2.1. Aproximación al concepto de superficie. . . . .	22
2.1.1. Gráfica de una función . . . . .	22
2.1.2. Ceros de una función . . . . .	22
2.1.3. Teorema (simplificado) de la función implícita . . . . .	23
2.1.4. Superficies parametrizadas. . . . .	23
2.2. SUPERFICIES . . . . .	24
2.2.1. Coordenadas . . . . .	24
2.2.2. Parametrizaciones locales . . . . .	24
2.2.3. Concepto de superficie (regular) . . . . .	25
2.2.4. Análisis local de una parametrización. . . . .	25
2.2.5. Cartas . . . . .	27
2.2.6. Compatibilidad de cartas . . . . .	27
2.3. ESPACIOS TANGENTES A SUPERFICIES . . . . .	27
2.3.1. Cono tangente a un subconjunto en un punto . . . . .	27
2.3.2. Plano vectorial tangente a una superficie en un punto . . . . .	28
2.3.3. Cambio de coordenadas . . . . .	29
2.4. FUNCIONES DIFERENCIABLES Y DIFERENCIAL . . . . .	29
2.4.1. Recuerdos de álgebra lineal . . . . .	29
2.4.2. Recuerdos de análisis . . . . .	31
2.4.3. Plano tangente en implícitas . . . . .	31
2.4.4. Funciones diferenciables entre superficies . . . . .	32
2.4.5. La diferencial . . . . .	32
2.4.6. Congruencias . . . . .	32
2.5. CAMPOS DE VECTORES . . . . .	33
2.5.1. Campos de vectores sobre subconjuntos de $\mathbb{R}^n$ . . . . .	33
2.5.2. El módulo de los campos de vectores $\mathfrak{X}_S$ . . . . .	33
2.5.3. Campos normales a una superficie. . . . .	33
2.5.4. Campos de vectores tangentes a subconjuntos de $\mathbb{R}^n$ . . . . .	34
2.5.5. Representación analítica local de un campo tangente a una superficie . . . . .	34
2.5.6. Curvas integrales de un campo . . . . .	35
2.6. FORMAS BILINEALES EN SUPERFICIES . . . . .	36
2.6.1. Definición . . . . .	36
2.6.2. Componentes . . . . .	36
2.7. PRIMERA FORMA FUNDAMENTAL . . . . .	37
2.7.1. Definición . . . . .	37
2.7.2. Expresión analítica local . . . . .	37
2.7.3. Longitudes de curvas . . . . .	38
2.7.4. Integrales de funciones en recintos coordenados . . . . .	38
2.8. Ejercicios Propuestos . . . . .	39

<b>3. TEORÍA LOCAL DE SUPERFICIES</b>	<b>41</b>
3.1. SEGUNDA FORMA FUNDAMENTAL . . . . .	41
3.1.1. Aplicación de Gauss . . . . .	41
3.1.2. Operador de Weingarten . . . . .	41
3.1.3. Curvatura normal de curvas en superficies orientadas .	41
3.1.4. Teorema de Meusnier . . . . .	42
3.1.5. Segunda Forma Fundamental . . . . .	43
3.1.6. Una interpretación geométrica de la Segunda Forma Fundamental. . . . .	43
3.1.7. Expresión analítica local . . . . .	44
3.2. CURVATURAS . . . . .	45
3.2.1. Aplicaciones autoadjuntas . . . . .	45
3.2.2. Expresión analítica local del Operador de Weingarten .	46
3.2.3. Curvaturas de superficies orientadas . . . . .	47
3.2.4. Clasificación de los puntos de una superficie . . . . .	47
3.2.5. Direcciones principales . . . . .	48
3.2.6. Curvaturas principales e Indicatriz de Dupin. . . . .	48
3.2.7. Direcciones asintóticas . . . . .	49
3.2.8. Líneas de curvatura y líneas asintóticas . . . . .	49
3.2.9. Símbolos de Christoffel . . . . .	49
3.2.10. Curvatura geodésica: . . . . .	50
3.2.11. Geodésicas . . . . .	51
3.3. Ejercicios propuestos . . . . .	53

pagina5

# 1. TEORIA DE CURVAS

## 1.1. CURVAS PLANAS

Fijados en el plano un sistema de coordenadas cartesianas, podemos identificar cada punto  $p$  con sus coordenadas  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ , y escribimos  $p = (x, y)$ .

Supongamos que nuestro punto  $p$  se mueve por el plano, y en cada instante  $t$  ocupa una posición  $\alpha(t) = (x(t), y(t))$ , donde  $t$  varía en un cierto intervalo  $I \subseteq \mathbb{R}$ . Si nuestro punto no tiene propiedades *fantasmales* describirá sobre el plano una traza continua, es decir, las funciones  $x(t)$ ,  $y(t)$ , definidas para  $t \in I$ , serán funciones continuas, y se denomina a  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  curva (parametrizada).

A veces se expresa esta situación escribiendo

$$\alpha(t) : \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$$

son las ecuaciones de  $\alpha$  (en las coordenadas cartesianas  $(x, y)$ )

**Definición:** *Supóngase  $I$  un intervalo abierto de  $\mathbb{R}$ . Una curva  $\alpha : I \ni t \rightarrow (x(t), y(t)) \in \mathbb{R}^2$  se dice diferenciable, si las funciones  $x(t)$ ,  $y(t)$ , admiten derivadas de cualquier, orden en todos los puntos  $t \in I$ . Si el intervalo  $I$  no es abierto, se dirá que  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  es curva diferenciable, si existe una aplicación diferenciable  $\tilde{\alpha} : \tilde{I} \rightarrow \mathbb{R}^2$  donde  $\tilde{I} \supset I$ , es un intervalo abierto de  $\mathbb{R}$ , y  $\alpha(t) = \tilde{\alpha}(t)$ ,  $\forall t \in I$*

### 1.1.1. Vector velocidad

Si  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  es una curva diferenciable, y  $t_0 \in I$ , se llama vector velocidad de  $\alpha$  en  $t_0$  a:

$$\alpha'(t_0) = (x'(t_0), y'(t_0)) = \lim_{\nabla t \rightarrow 0} \frac{\alpha(t_0 + \nabla t) - \alpha(t_0)}{\nabla t}$$

y representa de hecho, la velocidad instantánea de la partícula móvil  $\alpha(t)$  en  $t = t_0$

Denotamos  $\perp \alpha'(t_0) = (-y'(t_0), x'(t_0))$ , que es  $\alpha'(t_0)$  girado  $+\pi/2$  radianes.

### 1.1.2. Curvas regulares

Un punto  $\alpha(t_0)$  de una curva diferenciable  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  se llama regular, si  $\alpha'(t_0) \neq 0$ . La curva  $\alpha$  se llama regular si todos sus puntos son regulares

### 1.1.3. Recta tangente y recta normal

Por un punto regular  $\alpha(t_0)$  de una curva diferenciable  $\alpha$ , pueden trazarse dos rectas destacadas:

- La recta tangente a  $\alpha$  en  $t_0$ , que es la recta  $T$  que pasa por  $\alpha(t_0)$ , y tiene la dirección de  $\alpha'(t_0)$ . Sus ecuaciones son:

$$\frac{x - x(t_0)}{x'(t_0)} = \frac{y - y(t_0)}{y'(t_0)}$$

- La recta normal a  $\alpha$  en  $t_0$ , que es la recta  $N$  que pasa por  $\alpha(t_0)$ , y tiene la dirección de  $\perp\alpha'(t_0)$ . Sus ecuaciones son:

$$\frac{x - x(t_0)}{-y'(t_0)} = \frac{y - y(t_0)}{x'(t_0)}$$

### 1.1.4. Reparametrizaciones

Cuando  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  es una curva, y  $\mathbf{t} : J \ni s \rightarrow t = \mathbf{t}(s) \in I$  es un difeomorfismo entre intervalos, entonces  $\beta = \alpha \circ \mathbf{t}$  es también una curva y se verifica:

$$\beta'(s) = \mathbf{t}'(s)\alpha'(\mathbf{t}(s)) \forall s \in J$$

en particular, si  $\alpha$  es regular,  $\beta$  también lo es.

### 1.1.5. Trayectorias y trayectorias orientadas.

La aplicación  $\mathbf{t}$ , se denomina función de cambio de parámetro, que permite pasar de  $\alpha$  a  $\beta$ . Se dice entonces que las curvas  $\alpha$  a  $\beta$  definen la misma trayectoria. Si  $\mathbf{t}$  preserva la orientación entonces se dice que ambas curvas definen la misma trayectoria orientada. Ambas relaciones, son de equivalencia sobre la familia de curvas regulares, y definen por paso al cociente, los conceptos de *trayectoria*, y de *trayectoria orientada*.

### 1.1.6. Sobre la geometría de las curvas

Intuitivamente, en el caso de curvas regulares, una trayectoria viene definida por la imagen de una curva regular, y una trayectoria orientada es una trayectoria dotada de un sentido de recorrido. Conviene distinguir de entre las entidades matemáticas ó propiedades asociadas a una curva, aquellas que dependen solo de la trayectoria (que denominamos geométricas), de las que dependen de la parametrización concreta. Así por ejemplo el vector velocidad  $\alpha'(t)$  en un punto, no es geométrico, y sin embargo si lo es el vector unitario tangente  $\alpha'(t)/|\alpha'(t)|$ , o la recta afín tangente a la curva en un punto  $\alpha(t)$ .

**1.1.7. Curvas congruentes**

Dos curvas  $\alpha(t) = (x(t), y(t))$  y  $\bar{\alpha}(t) = (\bar{x}(t), \bar{y}(t))$ ,  $\alpha, \bar{\alpha} : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ , se dicen congruentes, si existe un movimiento

$$\mathcal{A} : \mathbb{R}^2 \ni (x, y) \rightarrow (\bar{x}, \bar{y}) \in \mathbb{R}^2$$

de forma que

$$\mathcal{A}\alpha(t) = \bar{\alpha}(t), \forall t \in I$$

Cuando la aplicación  $\mathcal{A}$  se interpreta como las ecuaciones de un cambio de coordenadas cartesianas:

$$\begin{cases} \bar{x} = a_1 + b_1x + c_1y \\ \bar{y} = a_2 + b_2x + c_2y \end{cases}$$

entonces resulta que las ecuaciones

$$\begin{cases} \bar{x} = \bar{x}(t) = a_1 + b_1x(t) + c_1y(t) \\ \bar{y} = \bar{y}(t) = a_2 + b_2x(t) + c_2y(t) \end{cases}$$

representan las ecuaciones de  $\alpha$  en las nuevas coordenadas cartesianas  $(\bar{x}, \bar{y})$ .

**1.1.8. La Geometría intrínseca**

La geometría intrínseca de una curva estudia los conceptos, propiedades, etc de las curvas, que no dependen de la parametrización concreta elegida, ni del sistema de coordenadas cartesiano empleado para escribir sus ecuaciones. Es por esto una buena idea, elegir para esto, un sistema de coordenadas cartesianas, respecto al cual las ecuaciones de la curva sean lo más simples posibles.

**1.1.9. Curvas en implícitas**

Las trayectorias de las curvas también podrían describirse de forma implícita.

Sea  $\mathbb{D}$  un abierto de  $\mathbb{R}^2$  y  $F : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{R}$  una función. El conjunto de ceros de  $F$  es el conjunto

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{D} : F(x, y) = 0\}$$

se dice entonces que el conjunto  $C$  es (ó viene definido implícitamente por la ecuación)  $F(x, y) = 0$ .

Aún cuando  $F$  se suponga diferenciable, el conjunto de ceros de  $F$  no tiene porqué ser una línea. De hecho cualquier subconjunto (cerrado) de  $\mathbb{R}^2$ , puede obtenerse como conjunto de ceros de una función  $F$  diferenciable.

No obstante, ciertas hipótesis adicionales sobre la función  $F$ , nos permiten garantizar (al menos localmente) la existencia de curvas parametrizadas, cuyas trayectorias describen el conjunto de los ceros de  $F$ .

**Teorema (breve) de la función implícita** Sea  $\mathbb{D}$  un abierto de  $\mathbb{R}^2$  y  $F : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{R}$  una función diferenciable, y  $C$  el conjunto de ceros de  $F$ . Sea  $(x_0, y_0) \in C$ , y supóngase que alguna de las derivadas parciales  $(\partial F/\partial x)_{(x_0, y_0)}, (\partial F/\partial y)_{(x_0, y_0)}$  es distinta de cero, por ejemplo  $(\partial F/\partial y)_{(x_0, y_0)} \neq 0$ . Existe un entorno  $\mathcal{U}$  de  $(x_0, y_0)$ , y una aplicación diferenciable  $g : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  donde  $(a, b)$  es intervalo abierto de  $\mathbb{R}$  ( $x_0 \in (a, b)$ ) de manera que

$$\{(t, g(t)) : t \in (a, b)\} = \{(x, y) \in \mathcal{U} : F(x, y) = 0\}$$

de esta forma la trayectoria de la curva regular  $\alpha : (a, b) \ni t \rightarrow (t, g(t)) \in \mathbb{R}^2$  coincide con  $C \cap \mathcal{U}$

Naturalmente hay un resultado análogo cuando  $(\partial F/\partial y)_{(x_0, y_0)} \neq 0$

**Puntos singulares y regulares.** Cuando  $F : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{R}$  es una función diferenciable, un punto  $(x_0, y_0) \in C = F^{-1}(0)$  se dice singular si

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_{(x_0, y_0)} = \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_{(x_0, y_0)} = 0$$

Si no es singular, se denomina punto regular. Cuando todos los puntos de  $C$  son regulares, cada componente conexa, puede expresarse como la trayectoria de una curva regular. Una situación muy frecuente, es que el conjunto de puntos singulares de  $C$ , sea un conjunto de puntos aislados. En este caso, cada componente conexa de  $C$  puede expresarse como una trayectoria de una curva regular a pedazos.

**Dirección normal y la tangente en un punto regular** Si  $F : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{R}$  es una función diferenciable,  $(x_0, y_0) \in C = F^{-1}(0)$  es un punto regular, entonces el vector

$$(\text{grad}F)(x_0, y_0) = \left( \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_{(x_0, y_0)}, \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_{(x_0, y_0)} \right)$$

es distinto de  $(0, 0)$ , y su dirección es normal a la curva en el punto  $(x_0, y_0)$ .

**Demostración:** Si  $\alpha : (a, b) \ni t \rightarrow (x(t), y(t)) \in \mathbb{R}^2$  es una curva regular con  $F(\alpha(t)) = 0 \forall t$ , y  $F(\alpha(t_0)) = (x_0, y_0)$  entonces usando la regla de la cadena:

$$\frac{dF \circ \alpha}{dt} \Big|_{t_0} = \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_{(x_0, y_0)} \frac{dx}{dt} \Big|_{t_0} + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_{(x_0, y_0)} \frac{dy}{dt} \Big|_{t_0}$$

o de forma equivalente, si  $v \cdot w$  denota el producto escalar ordinario de  $v, w \in \mathbb{R}^2$  se tiene:

$$(\text{grad}F)(\alpha(t_0)) \cdot \alpha'(t_0) = 0$$

y así  $(\text{grad}F)(\alpha(t_0))$  es ortogonal al vector velocidad  $\alpha'(t_0)$ .

**1.1.10. Longitud de una Curva.**

Sea  $\alpha : I = [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$  una curva regular. Se llama longitud de  $\alpha$  a

$$L(\alpha) = \int_a^b |\alpha'(t)| dt = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt \quad (1)$$

**Justificación del concepto de longitud.** La longitud de una curva  $\alpha$  se debe definir inicialmente de la siguiente forma:

Consideremos la familia de todas las particiones  $a = t_0 < \dots < t_r = b$  del intervalo  $[a, b]$ , entonces

$$L(\alpha) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \sum_{i=0}^r \left| \overrightarrow{\alpha(t_i)\alpha(t_i + \Delta t_i)} \right|$$

donde se entiende que  $\Delta t_i = t_{i+1} - t_i$ , y  $\Delta t = \max\{\Delta t_i : i = 1, \dots, r\}$ .

Supongamos para simplificar que la curva  $\alpha$  es la gráfica de una función,  $y = f(x)$ ,  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , es decir,

$$\alpha(t) = (x(t), y(t)) = (t, f(t))$$

llamando  $\Delta x_k = t_{k+1} - t_k$ ,  $\Delta y_k = f(t_{k+1}) - f(t_k)$ , por el teorema del valor medio podemos tomar  $\xi_k \in (t_k, t_{k+1})$  con  $\Delta y_k / \Delta x_k = f'(\xi_k)$ , y se tiene:

$$\begin{aligned} L(\alpha) &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \sum_{i=0}^r \sqrt{(\Delta x_k)^2 + (\Delta y_k)^2} \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \sum_{i=0}^r \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y_k}{\Delta x_k}\right)^2} \Delta x_k \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \sum_{i=0}^r \sqrt{1 + f'(\xi_k)^2} \Delta x_k \\ &= \int_a^b (1 + f'(t)^2) dt \end{aligned}$$

Si  $\mathbf{t} : J \rightarrow I$  es un cambio de parámetro, entonces usando la fórmula (1) se tiene, tomando  $c = \mathbf{t}(a)$ ,  $d = \mathbf{t}(b)$ :

$$\begin{aligned} L(\alpha) &= \int_a^b |\alpha'(t)| dt \\ &= \int_c^d |\alpha'(\mathbf{t}(s))| d\mathbf{t}(s) \\ &= \int_c^d |\alpha'(\mathbf{t}(s))| \frac{d\mathbf{t}}{ds} ds \\ &= \int_c^d \left| \alpha'(\mathbf{t}(s)) \frac{d\mathbf{t}}{ds} \right| ds = L(\alpha \circ \mathbf{t}) \end{aligned}$$

La longitud es pues un concepto que pertenece a la geometría de la curva.

**1.1.11. Parametrización por el arco**

Una curva regular  $\beta : J \rightarrow \mathbb{R}^2$  que verifica la condición  $|\beta'(s)| = 1$ , se dice que está parametrizada respecto a la longitud de arco (en lo sucesivo PPA) ya que verifica la identidad

$$L(\beta | [a, b]) = b - a \quad \forall a, b \in J, \quad a < b$$

Si  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  es una curva regular, y  $t_0 \in I$ , la aplicación

$$\mathbf{s} : I \ni t \rightarrow s = \mathbf{s}(t) = \int_{t_0}^t |\alpha'(t)| dt \in \mathbf{s}(I) = J$$

es un cambio de parámetro con  $\mathbf{s}'(t) = |\alpha'(t)|$ . Si  $\mathbf{t} = \mathbf{s}^{-1} : J \rightarrow I$ , la curva reparametrizada  $\beta = \alpha \circ \mathbf{t}$  está parametrizada por la longitud de arco.

**1.1.12. Diedro de Frenet**

Si  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  un curva regular se denomina al vector tangente unitario a

$$T(t) = \frac{\alpha'(t)}{|\alpha'(t)|} = \frac{1}{\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}} (x'(t), y'(t))$$

el vector normal unitario es:

$$N(t) = \frac{\perp \alpha'(t)}{|\alpha'(t)|} = \frac{1}{\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}} (-y'(t), x'(t))$$

Nótese que si la curva está PPA entonces  $T = \alpha'$ , y  $N = \perp \alpha'(t)$ .

**1.1.13. Determinación diferenciable del ángulo.**

Sea  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  un curva. Una determinación diferenciable del ángulo (DDA) es una aplicación diferenciable  $\theta : I \rightarrow \mathbb{R}$  tal que

$$T(t) = (\cos \theta(t), \sin \theta(t)) \quad \forall t \in I$$

Se puede probar que siempre existe una DDA, (que queda unívocamente determinada salvo múltiplos enteros de  $2\pi$ ), en tres pasos. Supongamos  $I = [a, b]$

1) Para todo  $t_0 \in I$ , existe un  $\varepsilon > 0$  y  $\theta : (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon) \cap I \rightarrow \mathbb{R}$  que es DDA.

2) Existe una partición  $a = t_0 < t_1 < \dots < t_r = b$  y funciones  $\bar{\theta}_i : [t_{i-1}, t_i] \rightarrow \mathbb{R}$  que son DDA.

3) Pongamos  $\bar{\theta}_1 : [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\bar{\theta}_2 : [t_1, t_2] \rightarrow \mathbb{R}$  entonces  $\bar{\theta}_2(t_1) - \bar{\theta}_1(t_1) = 2n\pi$  para  $n \in \mathbb{Z}$ , y se construye  $\theta_2 : [t_0, t_2] \rightarrow \mathbb{R}$ , DDA de la forma:

$$\theta_2(t) = \begin{cases} \bar{\theta}_1(t) & \text{si } t \in [t_0, t_1] \\ \bar{\theta}_2(t) - 2n\pi & \text{si } t \in [t_1, t_2] \end{cases}$$

Tenemos así definida paso a paso  $\theta_r : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  que es DDA. Obsérvese que si  $\theta$  es una DDA entonces también se tiene:

$$N(t) = (-\sin \theta(t), \cos \theta(t)) \quad \forall t \in I$$

#### 1.1.14. Curvatura

Si  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  es curva regular, se define la curvatura de  $\alpha$  en un punto  $\alpha(t_0)$  como:

$$\kappa(t_0) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\theta(t_0 + \Delta t) - \theta(t_0)}{L(\alpha|_{[t_0, t_0 + \Delta t]})} \quad (2)$$

donde  $\theta$  es una DDA. Parece claro que la definición dada de curvatura es intrínseca. De hecho, si  $\alpha$  es curva PPA, entonces se tiene:

$$\kappa(s_0) = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\theta(s_0 + \Delta s) - \theta(s_0)}{\Delta s} = \theta'(s_0)$$

#### 1.1.15. Fórmulas de Frenet

Si  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  es curva PPA, fijada  $\theta : I \rightarrow \mathbb{R}$  una DDA, entonces el diedro de Frenet de  $\alpha$  es  $T(s) = (\cos \theta(s), \sin \theta(s))$ ,  $N(s) = (-\sin \theta(s), \cos \theta(s))$  y se verifica  $T'(s) = \theta'(s) (-\sin \theta(s), \cos \theta(s))$ , y  $N'(s) = \theta'(s) (-\cos \theta(s), -\sin \theta(s))$  se tienen así las fórmulas:

$$\left. \begin{aligned} T' &= \kappa N \\ N' &= -\kappa T \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

que se denominan fórmulas de Frenet.

Obsérvese que

$$\kappa = \det(\alpha', \alpha'') = \pm |\alpha''|$$

Si tomamos una referencia cartesiana con origen el punto  $\alpha(0) \equiv (0, 0)$  y con base ortonormal la dada por  $(T(0), N(0))$ , la curva tiene unas coordenadas  $\alpha(s) = (x(s), y(s))$  cuyo desarrollo en serie de Taylor en  $s = 0$  resulta determinado, en este caso, por los valores de la curvatura y sus sucesivas derivadas en el 0. En efecto, teniendo en cuenta que  $T(s) = (x'(s), y'(s))$  y  $N(s) = (-y'(s), x'(s))$  a partir de las fórmulas (3), podemos expresar las derivadas de cualquier orden de  $T$  en función de la base  $(T, N)$ , con unos coeficientes que resultan ser combinaciones de las sucesivas derivadas de la curvatura. El proceso comienza así:

$$\begin{aligned} T' &= \kappa N, \\ T'' &= \frac{d}{ds}(\kappa N) = \kappa' N + \kappa N' = -\kappa^2 T + \kappa' N, \\ \vec{T}''' &= (-\kappa^2 - \kappa \kappa') T + (-\kappa^3 + \kappa') N, \quad \text{etc.}; \end{aligned}$$

y finalmente obtenemos desarrollando por Taylor:

$$\begin{cases} x(s) = s - \frac{1}{3!}\kappa^2(0)s^3 + \frac{1}{4!}(-\kappa^2(0) - \kappa(0)\kappa'(0))s^4 + \dots \\ y(s) = \frac{1}{2}\kappa(0)s^2 + \frac{1}{3!}\kappa'(0)s^3 + \frac{1}{4!}(-\kappa^3(0) + \kappa'(0))s^4 + \dots \end{cases}$$

Se desprenden de aquí muchas propiedades geométricas interesantes. Por ejemplo, se ve que  $\kappa(0) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{2y(s)}{s^2}$ , lo cual se puede reformular en términos intrínsecos de la siguiente forma: denotando por  $d(s)$  la distancia entre el punto  $\alpha(s)$  y la recta afín que pasa por  $\alpha(0)$  y tiene por dirección  $\vec{T}(0)$ , la curvatura en 0 está dada por el límite

$$|\kappa(0)| = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{2d(s)}{L(\alpha|_{[0,s]})^2}.$$

### 1.1.16. Teorema Fundamental (versión plana)

Si  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  es curva PPA, y  $\mathcal{A} : \mathbb{R}^2 \ni (x, y) \rightarrow (\bar{x}, \bar{y}) \in \mathbb{R}^2$  es un movimiento entonces  $\bar{\alpha} = \mathcal{A} \circ \alpha$  es una curva PPA, y las funciones de curvatura  $\kappa_\alpha, \kappa_{\bar{\alpha}}$  coinciden si  $\mathcal{A}$  preserva la orientación.

Por otra parte, dada una aplicación diferenciable  $\kappa : J = [0, L] \ni s \rightarrow \kappa(s) \in \mathbb{R}$ . Existe entonces una curva  $\alpha : J \ni s \rightarrow \alpha(s) \in \mathbb{R}^2$  parametrizada por el arco, que admite a  $\kappa$  por función de curvatura. Además la curva  $\alpha$  está determinada salvo movimientos.

**Demostración:** Como  $\bar{\alpha} = \mathcal{A} \circ \alpha$ , entonces  $\bar{\alpha}' = A\alpha'$ , y  $\bar{\alpha}'' = A\alpha''$ , siendo  $A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  la transformación ortogonal asociada a  $\mathcal{A}$ . En particular se tiene,  $|\bar{\alpha}'| = |A\alpha'| = |\alpha'| = 1$ , y como  $\det(A) = 1$ , se tiene que  $A(T_\alpha, N_\alpha)$  es una base positiva, y por tanto

$$A(T_\alpha, N_\alpha) = (T_{\bar{\alpha}}, N_{\bar{\alpha}})$$

luego, usando las fórmulas (3) se tiene  $T_{\bar{\alpha}}' = A(T_\alpha') = A(\kappa_\alpha N_\alpha) = \kappa_\alpha A(N_\alpha) = \kappa_\alpha N_{\bar{\alpha}} = \kappa_{\bar{\alpha}} N_{\bar{\alpha}}$ , de donde se concluye  $\kappa_\alpha = \kappa_{\bar{\alpha}}$ .

Supongamos ahora dada  $\kappa : J = [0, L] \ni s \rightarrow \kappa(s) \in \mathbb{R}$  y que  $\alpha : J \ni s \rightarrow \alpha(s) \in \mathbb{R}^2$  es una solución a nuestro problema. Sea  $\theta = \theta(s)$  una DDA. Así  $\kappa(s) = \theta'(s)$  y por tanto se tiene:

$$\theta(s) = \theta_0 + \int_0^s \kappa(\sigma) d\sigma \quad (4)$$

como  $T(s) = (\cos \theta(s), \sin \theta(s))$  se concluye que nuestra curva  $\alpha(s) = (x(s), y(s))$  tendrá que satisfacer  $x'(s) = \cos \theta(s)$ ,  $y'(s) = \sin \theta(s)$  con lo que:

$$x(s) = x_0 + \int_0^s \cos \theta(\sigma) d\sigma, \quad y(s) = y_0 + \int_0^s \sin \theta(\sigma) d\sigma \quad (5)$$

las igualdades (4) y (5) permiten construir una única solución  $\alpha$  cada vez que elijamos condiciones iniciales

$$\alpha(0) = (x_0, y_0), \alpha'(0) = (\cos \theta_0, \sin \theta_0)$$

Finalmente si  $\alpha, \beta : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}^2$  son dos curvas birregulares con  $\kappa_\alpha = \kappa_\beta$ , entonces el movimiento  $\mathcal{A}$  que lleva  $(T_\alpha(0), N_\alpha(0))$  a  $(T_\beta(0), N_\beta(0))$  transforma  $\alpha$  en una curva  $\tilde{\alpha} = \mathcal{A}\alpha$  que con las mismas condiciones iniciales que  $\beta$  tiene la misma curvatura. Así  $\tilde{\alpha} = \beta$ .

### 1.1.17. Cálculos con parámetro arbitrario

Sea  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  una curva regular,  $\theta : I \rightarrow \mathbb{R}$  una DDA, y  $s = s(t) = \int_a^t |\alpha'(t)| dt$ . Por la fórmula (2) de la curvatura se tiene:

$$\begin{aligned} \kappa(t) &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\theta(t + \Delta t) - \theta(t)}{s(t + \Delta t) - s(t)} = \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\frac{\theta(t + \Delta t) - \theta(t)}{\Delta t}}{\frac{s(t + \Delta t) - s(t)}{\Delta t}} = \frac{\theta'(t)}{s'(t)} = \\ &= \frac{\theta'(t)}{|\alpha'(t)|} \end{aligned}$$

como  $T(t) = (\cos \theta(t), \sin \theta(t))$ ,  $N(t) = (-\sin \theta(t), \cos \theta(t))$ , es  $T'(t) = \theta'(t)N(t)$ , y  $N'(t) = -\theta'(t)T(t)$ , se tiene:

$$\left. \begin{aligned} T' &= |\alpha'| \kappa N \\ N' &= -|\alpha'| \kappa T \end{aligned} \right\}$$

que son las fórmulas generales de Frenet. Se tiene:

$$\left\{ \begin{aligned} \alpha' &= |\alpha'| T \\ \alpha'' &= |\alpha'|' T + |\alpha'|^2 \kappa N \end{aligned} \right. ;$$

en particular  $\det(\alpha', \alpha'') = |\alpha'|^3 \kappa$ , por lo que se tiene la fórmula:

$$\kappa = \frac{\det(\alpha', \alpha'')}{|\alpha'|^3} \quad (6)$$

## 1.2. CURVAS EN EL ESPACIO

Una curva en el espacio viene definida por una aplicación  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$   $\alpha(t) = (x(t), y(t), z(t))$ , donde  $x(t)$ ,  $y(t)$ ,  $z(t)$  son funciones diferenciables. Su velocidad es  $\alpha'(t) = (x'(t), y'(t), z'(t))$ , y su aceleración  $\alpha''(t) =$

$(x''(t), y''(t), z''(t))$ . Se dice que  $\alpha$  es *regular* si  $\alpha'(t) \neq 0$  para todo  $t \in I$ . Se dice que es *birregular*, si  $\{\alpha'(t), \alpha''(t)\}$  son linealmente independientes para todo  $t \in I$ .

Los conceptos de curva regular o birregular son intrínsecos, en el sentido de que son independientes de la parametrización tomada. Es decir: si  $\mathbf{t} : J \ni s \rightarrow t = \mathbf{t}(s) \in I$  es un difeomorfismo entre intervalos, entonces  $\beta = \alpha \circ \mathbf{t}$  es también una curva y se verifica:

$$\frac{d\beta}{ds}(s) = \frac{d\alpha}{dt}(\mathbf{t}(s)) \frac{d\mathbf{t}}{ds}(s) \quad \forall s \in J$$

así, si  $\alpha$  es regular,  $\beta$  también lo es. Por otra parte como:

$$\frac{d^2\beta}{ds^2} = \frac{d^2\alpha}{dt^2} \frac{d\mathbf{t}}{ds} + \frac{d\alpha}{dt} \frac{d^2\mathbf{t}}{ds^2}$$

se concluye que

$$(\beta', \beta'') = (\alpha', \alpha'') \begin{pmatrix} \mathbf{t}' & \mathbf{t}'' \\ 0 & \mathbf{t}' \end{pmatrix}$$

y  $\beta$  es birregular si  $\alpha$  lo es.

Igual que en las curvas planas se define la longitud de una curva  $\alpha : I = [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$  como

$$L(\alpha) = \int_a^b |\alpha'(t)| dt = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2} dt$$

Si  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  es una curva regular, y  $t_0 \in I$ , la aplicación

$$\mathbf{s} : I \ni t \rightarrow s = \mathbf{s}(t) = \int_{t_0}^t |\alpha'(t)| dt \in \mathbf{s}(I) = J$$

es un cambio de parámetro con  $\mathbf{s}'(t) = |\alpha'(t)|$ . Si  $\mathbf{t} = \mathbf{s}^{-1} : J \rightarrow I$ , la curva reparametrizada  $\beta = \alpha \circ \mathbf{t}$  está parametrizada por la longitud de arco (es decir  $|\beta'(s)| = 1 \quad \forall s$ )

### 1.2.1. Triedro de Frenet

Supongamos que  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  es una curva parametrizada por la longitud de arco (PPA). Llamamos vector tangente unitario a  $\alpha$  a  $T(s) = \alpha'(s)$ . Si  $\alpha$  es birregular entonces  $\text{Span}(\alpha'(s), \alpha''(s))$  tiene dimensión 2, y se denomina *plano osculador* de la curva  $\alpha$  en  $s$ . Como  $\langle \alpha', \alpha' \rangle = 1$ , se tiene

$$0 = \frac{d}{ds} \langle \alpha', \alpha' \rangle = 2 \langle \alpha', \alpha'' \rangle$$

y  $\alpha$  es birregular si y solo si  $\alpha''(s) \neq 0 \forall s$ . Se denomina vector normal unitario de  $\alpha$  en  $s$  a curvatura de  $\alpha$  en  $s$  a

$$N(s) = \frac{1}{\kappa(s)}\alpha''(s) \text{ con } \kappa(s) = |\alpha''(s)|$$

y a  $\kappa = \kappa(s)$  se la denomina función de *curvatura*. Finalmente se define el vector binormal de  $\alpha$  en  $s$ :

$$B(s) = T(s) \times N(s) \quad (7)$$

Se denomina a  $(T, N, B)$  triedro (móvil) de Frenet para la curva  $\alpha$ .

### 1.2.2. Fórmulas de Frenet

Supongamos que  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  es una curva PPA, y sea  $(T, N, B)$  su triedro de Frenet. Como  $(T(s), N(s), B(s))$  constituyen una base ortonormal, para cada función vectorial  $X = X(s)$   $s \in I$  se tiene la identidad:

$$X = \langle X, T \rangle T + \langle X, N \rangle N + \langle X, B \rangle B$$

En particular  $T' = \langle T', T \rangle T + \langle T', N \rangle N + \langle T', B \rangle B$  pero como  $\langle T, T \rangle = 1$ , es  $0 = \langle T, T' \rangle = 2 \langle T', T \rangle$  y  $T' = \alpha''$  es proporcional a  $N$  por lo que  $\langle T', B \rangle = 0$ . Finalmente  $\langle T', N \rangle = \langle \alpha'', N \rangle = \kappa$ , por lo que queda:

$$T' = \kappa N \quad (8)$$

Nos proponemos calcular ahora  $N'$  en función de  $(T, N, B)$ . Tenemos  $N' = \langle N', T \rangle T + \langle N', N \rangle N + \langle N', B \rangle B$ . Como antes,  $\langle N', N \rangle = 0$ , y al ser  $\langle T, N \rangle = 0$ , se concluye  $\langle N', T \rangle = -\langle T', N \rangle = -\kappa$ , y llamando a  $\tau = \langle N', B \rangle$  torsión de  $\alpha$ , queda:

$$N' = -\kappa T + \tau B \quad (9)$$

Finalmente  $B' = (T \times N)' = T' \times N + T \times N' = \kappa N \times N + T \times (-\kappa T + \tau B) = -\tau N$ , es decir

$$B' = -\tau N \quad (10)$$

Las fórmulas (8), (9) y (10) constituyen las fórmulas de Frenet que pueden escribirse todas juntas:

$$\begin{cases} T' = & \kappa N \\ N' = & -\kappa T & +\tau B \\ B' = & & -\tau N \end{cases} ; \quad (11)$$

De forma análoga a como se hizo en el caso de las curvas planas, se puede calcular el desarrollo de Taylor (en el parámetro) de la curva, expresada ésta en la referencia cartesiana con origen el punto  $\alpha(0)$  y con base ortonormal

la dada por  $(T(0), N(0), B(0))$ . Los primeros términos de dicho desarrollo, cuando  $\alpha$  está parametrizada por la longitud de arco (es decir, cuando  $|\alpha'| = 1$ ), son

$$\begin{cases} x(s) = s - \frac{1}{6}\kappa^2(0)s^3 + \dots \\ y(s) = \frac{1}{2}\kappa(0)s^2 + \frac{1}{6}\kappa'(0)s^3 + \dots \\ z(s) = \frac{1}{6}\kappa(0)\tau(0)s^3 + \dots \end{cases}$$

Nuevamente se deducen de forma fácil propiedades sobre la geometría de la curva. Por ejemplo, como la ecuación del plano afín que pasa por  $\alpha(0)$  y tiene por dirección  $Span(\vec{T}(0), \vec{N}(0))$  (el llamado plano afín osculador, ver 1.2.4) es, en esta referencia,  $z = 0$  y como es inmediato que la curva satisface esta ecuación hasta el segundo orden, resulta evidente que en el plano osculador hay tres puntos de la curva "infinitesimalmente próximos" (es decir, que la solución  $s = 0$  es, al menos, triple).

### 1.2.3. Algoritmos para el cálculo de la curvatura y la torsión

Analicemos primero el caso en el que la curva  $\alpha$  viene parametrizada por la longitud de arco, es decir  $|\alpha'| = 1$ .

**Proposición 1.1** *Sea  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  una curva birregular y tal que  $|\alpha'| = 1$ . Se tiene entonces:*

$$\begin{cases} \alpha' = T \\ \alpha'' = \kappa N \\ \alpha''' = -\kappa^2 T + \kappa' N + \kappa\tau B \end{cases};$$

en particular:

$$\kappa = |\alpha''|, \quad \tau = \frac{\det(\alpha', \alpha'', \alpha''')}{|\alpha''|^2}$$

En el caso de una parametrización regular cualquiera, se tiene:

**Proposición 1.2** *Sea  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  una curva birregular. Se tiene entonces:*

$$\begin{cases} \alpha' = |\alpha'|T \\ \alpha'' = |\alpha'|'T + |\alpha'|^2\kappa N \\ \alpha''' = f_1T + f_2N + |\alpha'|^3\kappa\tau B \end{cases},$$

donde  $f_1$  y  $f_2$  son funciones  $I \rightarrow \mathbb{R}$  diferenciables. En particular:

$$\kappa = \frac{|\alpha' \times \alpha''|}{|\alpha'|^3}, \quad \tau = \frac{\det(\alpha', \alpha'', \alpha''')}{|\alpha' \times \alpha''|^2}$$

### 1.2.4. Los planos y rectas del triedro de Frenet

Sea  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  una curva birregular y  $(T, N, B)$  el triedro de Frenet. Para cada  $t \in I$ , los planos coordenados del triedro tienen los siguiente nombres:

$$\begin{cases} \text{Span}(T(t), N(t)) \text{ es el } \textit{plano osculador a } \alpha \text{ en } t \\ \text{Span}(N(t), B(t)) \text{ es el } \textit{plano normal a } \alpha \text{ en } t \\ \text{Span}(T(t), B(t)) \text{ es el } \textit{plano rectificante a } \alpha \text{ en } t \end{cases}$$

Obsérvese que, para cada  $t \in I$ , estos planos están en  $T_{\alpha(t)}\mathbb{R}^3$ . Se llama *plano vectorial osculador a  $\alpha$  en  $t$*  a  $\text{Span}(T(t), N(t))$ , que es un plano vectorial de  $\mathbb{R}^3$ . El *plano afín osculador a  $\alpha$  en  $t$*  es el plano afín de  $\mathbb{R}^3$  que pasa por  $\alpha(t)$  y tiene por dirección  $\text{Span}(\vec{T}(t), \vec{N}(t))$ . Análogamente se definen los *planos (vectoriales o afines) normal y rectificante a  $\alpha$  en  $t$* .

Las rectas afines que pasan por  $\alpha(t)$  y tienen por direcciones  $T(t)$ ,  $N(t)$  ó  $B(t)$  se denominan, respectivamente, *recta tangente*, *recta normal principal* o *recta binormal a  $\alpha$  en  $t$* .

Intuitivamente, la curvatura mide cuánto se desvía la imagen de la curva de estar contenida en su recta (afín) tangente y la torsión mide cuánto se desvía de estar contenida en su plano afín osculador.

### 1.2.5. Teorema Fundamental (versión tridimensional)

Dadas  $\kappa(s), \tau(s)$ ,  $s \in [0, L]$  funciones diferenciables, con  $\kappa > 0$ , y  $(T_0, N_0, B_0)$  base ortonormal positiva de  $\mathbb{R}^3$ , existe entonces una única curva  $\alpha(s)$   $s \in [0, L]$  parametrizada por el arco que tiene a  $\kappa(s)$ , y  $\tau(s)$  por curvatura y torsión, y su triedro de Frenet en  $s = 0$  es  $T(0) = T_0$ ,  $N(0) = N_0$ , y  $B(0) = B_0$ . En particular la curvatura y la torsión determinan la curva salvo movimientos (directos).

#### Demostración:

Si existe tal curva. Tomando:

$$\begin{cases} T = (x_1, x_2, x_3) \\ N = (x_4, x_5, x_6) \\ B = (x_7, x_8, x_9) \end{cases}$$

las fórmulas de Frenet (11) dan lugar un sistema lineal de ecuaciones de la forma

$$\begin{pmatrix} dx_1/dt \\ \dots \\ dx_9/dt \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_9 \end{pmatrix}$$

donde los coeficientes de la matriz matriz  $A = A(s)$  dependen diferenciablemente de la variable  $s \in [0, L]$  y es conocida a partir de las funciones  $\kappa(s)$ , y de  $\tau(s)$ . Usando el teorema 1.2.6 de más abajo, se concluye que fijado

$$\xi = (T_0, N_0, B_0) = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_9) \in \mathbb{R}^9$$

existe un único  $\phi_\xi \in \Phi$  espacio de soluciones con  $\phi_\xi(0) = \xi$ , lo que significa que existe una única solución  $T = T(s)$ ,  $N = N(s)$ ,  $B = B(s)$  que verifican las ecuaciones de Frenet (11) y

$$(T(0), N(0), B(0)) = (T_0, N_0, B_0)$$

Veamos que  $(T, N, B)$  constituyen un sistema de referencia ortonormal. Para ello consideramos las derivadas de los productos escalares, que usando nuevamente (11) verifican

$$\begin{cases} \frac{d}{ds} \langle T, T \rangle = 2\kappa \langle T, N \rangle \\ \frac{d}{ds} \langle T, N \rangle = \kappa \langle N, N \rangle - \kappa \langle T, T \rangle + \tau \langle T, B \rangle \\ \frac{d}{ds} \langle T, B \rangle = \kappa \langle T, B \rangle - \tau \langle T, N \rangle \\ \frac{d}{ds} \langle N, N \rangle = -2\kappa \langle T, N \rangle + 2\tau \langle N, B \rangle \\ \frac{d}{ds} \langle N, B \rangle = -\kappa \langle T, B \rangle + \tau \langle B, B \rangle - \tau \langle N, N \rangle \\ \frac{d}{ds} \langle B, B \rangle = -2\tau \langle N, B \rangle \end{cases}$$

lo que da lugar sustituyendo  $\langle T, T \rangle = y_1, \dots, \langle B, B \rangle = y_6$  a un nuevo sistema lineal de ecuaciones diferenciales de la forma

$$\begin{pmatrix} dy_1/dt \\ \dots \\ dy_6/dt \end{pmatrix} = L \begin{pmatrix} y_1 \\ \dots \\ y_6 \end{pmatrix}$$

que es automáticamente satisfecho por  $\langle T, T \rangle = \phi_1, \dots, \langle B, B \rangle = \phi_6$ , con valores iniciales

$$(\phi_1(0), \phi_2(0), \phi_3(0), \phi_4(0), \phi_5(0), \phi_6(0)) = (1, 0, 0, 1, 0, 1)$$

Una vez determinado  $\vec{T} = \vec{T}(s)$  y también por las funciones constantes  $\psi = (\psi_1, \dots, \psi_6) = (1, 0, 0, 1, 0, 1)$  por tanto  $(\phi_1, \dots, \phi_6) = (1, 0, 0, 1, 0, 1)$  y el sistema  $(T, N, B)$  es ortonormal. Nos queda integrar

$$\frac{dx}{ds} = T_1(s), \frac{dy}{ds} = T_2(s), \frac{dz}{ds} = T_3(s)$$

que dá lugar a una única solución por  $\alpha(s) = (x(s), y(s), z(s))$  tal que  $\alpha(0) = p = (x_0, y_0, z_0)$ .

Finalmente si  $\alpha, \beta : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}^3$  son dos curvas birregulares con  $\kappa_\alpha = \kappa_\beta$ , y  $\tau_\alpha = \tau_\beta$  entonces el movimiento  $\mathcal{A}$  que lleva  $(T_\alpha(0), N_\alpha(0), B_\alpha(0))$  a  $(T_\beta(0), N_\beta(0), B_\beta(0))$  transforma  $\alpha$  en una curva  $\tilde{\alpha} = \mathcal{A}\alpha$  que con las mismas condiciones iniciales que  $\beta$  tiene la misma curvatura y torsión. Así  $\tilde{\alpha} = \beta$ .

### 1.2.6. Apéndice: Sistemas lineales de ecuaciones diferenciales

Supongamos  $A = (a_{ij}(s))$  una matriz cuadrada cuyas entradas  $a_{ij}(s)$   $s \in [0, L]$  son funciones diferenciables con valores reales. Se considera el sistema de ecuaciones:

$$\begin{pmatrix} dx_1/dt \\ \dots \\ dx_n/dt \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} \quad (12)$$

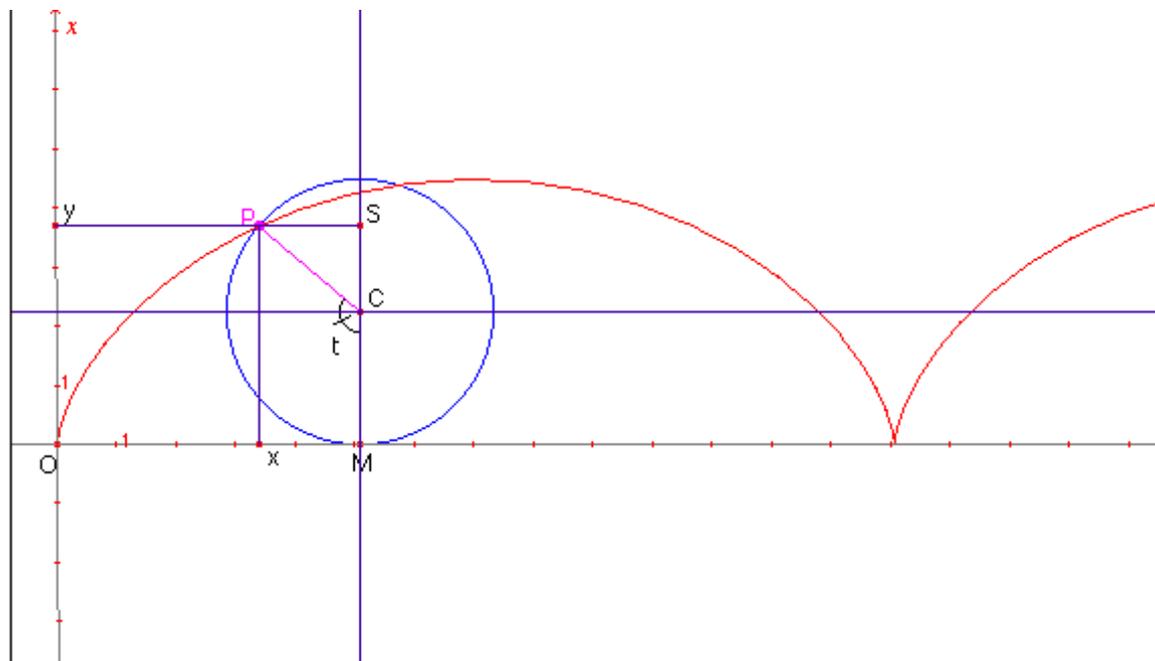
y sea  $\Phi = \{\phi : [0, L] \text{ diferenciables: } \phi = (\phi_1, \dots, \phi_n) \text{ satisfacen (12)}\}$ . Entonces  $\Phi$  es un espacio vectorial sobre  $\mathbb{R}$ , y para cada  $\vec{\xi} \in \mathbb{R}^n$  existe un único  $\phi_{\vec{\xi}} \in \Phi$  con  $\phi_{\vec{\xi}}(0) = \vec{\xi}$ . Por otra parte, la aplicación:

$$\vec{\xi} \ni \mathbb{R}^n \rightarrow \phi_{\vec{\xi}} \in \Phi$$

resulta ser un isomorfismo lineal.

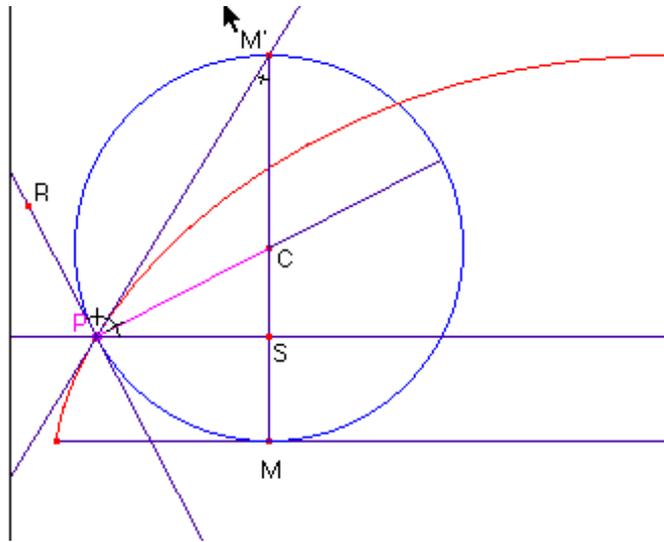
### 1.3. Ejercicios Propuestos

- Hay curvas perfectamente diferenciables, que sin embargo presentan "picos" en su traza. Este es el caso de la cicloide.



Esta curva es la trayectoria descrita por un punto  $P$  de una circunferencia que rueda sin deslizar por un eje. Se pide:

- a) Si  $r > 0$  es el radio de la circunferencia, tomando como eje el de las  $X$ , y como parámetro  $t$  el ángulo orientado  $\widehat{MCP}$  ( $C$  es el centro de la circunferencia, y  $M$  el punto de contacto con el eje), determinar sus ecuaciones paramétricas.
- b) Determinar los puntos no regulares.
- c) Probar que la recta tangente a la cicloide por un punto  $P$  regular cualquiera viene determinada por los puntos  $P$  y  $M'$ , siendo  $M'$  el simétrico de  $M$  respecto a  $C$ .



Determinar la longitud del arco de cicloide entre dos puntos consecutivos de retroceso, en función del radio  $r$  de la circunferencia rodante.

2. Sea  $\alpha : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^2$  una curva regular plana. Supóngase que existe  $t_0 \in (a, b)$  tal que la distancia  $|\overrightarrow{o\alpha(t)}|$  del origen a la trayectoria de  $\alpha$  tenga un máximo en  $t_0$ . Demostrar que la curvatura  $\kappa$  de  $\alpha$  en  $t_0$  satisface  $|\kappa(t_0)| \geq 1/|\alpha(t_0)|$
3. Sea  $\alpha : I = (-a, a) \rightarrow \mathbb{R}^2$  una curva PPA. Definamos  $\beta : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  por  $\beta(s) = \alpha(-s)$ :
- Probar que  $\beta$  es parametrizada por el arco, y  $\kappa_\beta(s) = -\kappa_\alpha(-s)$ .
  - Probar que si  $\kappa_\alpha(s) = \kappa_\alpha(-s)$ , entonces la traza de  $\alpha$  es simétrica respecto de la recta normal a  $\alpha$  en  $\alpha(0)$ .
  - Probar que si  $\kappa_\alpha(s) = -\kappa_\alpha(-s)$ , entonces la traza de  $\alpha$  es simétrica respecto del punto  $\alpha(0)$ .

*Indicación:* Debe observarse que si  $\alpha, \beta : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^2$  son curvas PPA con  $\kappa_\alpha(s) = -\kappa_\beta(s)$  entonces existe un movimiento en  $\mathbb{R}^2$  que cambia la orientación, y transforma  $\alpha$  en  $\beta$

4. Este ejercicio determina salvo movimientos, las curvas birregulares de curvatura y torsión constantes:

Dada la curva parametrizada

$$\alpha(s) = \left( a \cos\left(\frac{s}{c}\right), a \operatorname{sen}\left(\frac{s}{c}\right), b\frac{s}{c} \right), \quad s \in \mathbb{R}, \quad c^2 = a^2 + b^2$$

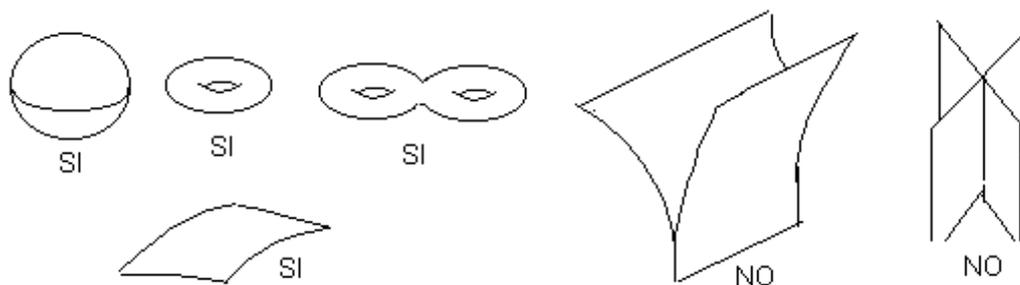
- a) Demostrar que el parámetro  $s$  es la longitud de arco. b) Determinar las funciones de curvatura y la torsión de  $\alpha$ , y demostrar que son constantes. c) Determinar el plano osculador de  $\alpha$ . d) Demostrar que las rectas con dirección  $N(s)$  y que pasan por  $\alpha(s)$  cortan al eje  $z$  bajo un ángulo constante igual a  $\pi/2$
5. Se dice que una curva alabeada parametrizada por el arco  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  con curvatura positiva es una *hélice* cuando todas sus rectas normales son perpendiculares a una dirección dada. Probar que  $\alpha$  es una hélice si y sólo si existe  $a \in \mathbb{R}$  tal que  $\tau(s) = ak(s)$  para cada  $s \in I$ . Este resultado se conoce con el nombre de *teorema de Lancret*.
6. Probar que una curva alabeada con torsión nula necesariamente está contenida en un plano. Considérese la aplicación:

$$\alpha(t) = \begin{cases} (t, 0, e^{-1/t^2}) & \text{si } t > 0 \\ (t, e^{-1/t^2}, 0) & \text{si } t < 0 \\ (0, 0, 0) & \text{si } t = 0 \end{cases}$$

- a) Probar que  $\alpha$  es una curva diferenciable. b) Probar que  $\alpha$  es regular, y que la curvatura  $\kappa(t) \neq 0$ , para todo  $t \neq 0$ ,  $t \neq \pm\sqrt{2/3}$ , y  $\kappa(0) = 0$ . c) Probar que el límite de los planos osculadores cuando  $t \rightarrow 0, t > 0$  es el plano  $y = 0$ , pero dicho límite es el plano  $z = 0$  cuando  $t \rightarrow 0, t < 0$ . d) Probar que la torsión de  $\alpha$  es cero y sin embargo, no está contenida en un plano. ¿Cómo se explica esto?
7. Sea  $\alpha$  una curva alabeada cuya traza está sobre una esfera de radio  $r$ . Pruébese que la curvatura cumple  $\kappa \geq 1/r$ .

## 2. SUPERFICIES: CONCEPTOS BÁSICOS

Intuitivamente hablando, una superficie es un subconjunto de  $\mathbb{R}^3$  liso, que tiene *dimensión dos* (¿una sábana flotando?). Otra aproximación intuitiva está ligada al hecho de admitir que cada punto de la superficie, tenga un plano tangente bien definido. Piense el lector en cada uno de los ejemplos gráficos que se dan a continuación. ¿Son superficies?, ¿porqué sí? ¿porqué no?



### 2.1. Aproximación al concepto de superficie.

Estableceremos aquí algunas sugerencias como definición formal de superficie. Después decidiremos cual es la mejor.

#### 2.1.1. Gráfica de una función

Sea  $z = f(x, y)$ ,  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  ( $\Omega$  abierto de  $\mathbb{R}^2$ ) una función diferenciable. Se llama grafo de  $f$  al conjunto

$$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in \Omega, z = f(x, y)\}$$

Nuestra definición de superficie, debería contener a los grafos de las funciones diferenciables como caso particular.

#### 2.1.2. Ceros de una función

Sin embargo, no todas las superficies se pueden describir globalmente así. Por ejemplo, la superficie de una esfera

$$\mathbb{S}^2 = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$$

debería ser considerada superficie, pero no es el grafo de ninguna función. Sin embargo, si lo es localmente, ya que el grafo de la función  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$  definida en  $\Omega = \{(x, y) : x^2 + y^2 < 1\}$  describe el hemisferio norte:

$$\mathbb{S}_+^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{S}^2 : z > 0\}$$

De forma más general

### 2.1.3. Teorema (simplificado) de la función implícita

Sea  $F : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{R}$  una función diferenciable definida sobre un abierto  $\mathbb{D}$  de  $\mathbb{R}^3$ . Tomemos en  $\mathbb{R}^3$  coordenadas  $(x, y, z)$ . Supongamos que existe un punto  $p = (a, b, c) \in \mathbb{D}$  en el que  $F(p) = 0$  y  $(\partial F / \partial z)(p) \neq 0$ . Denotemos la proyección por

$$\pi : \mathbb{R}^3 \ni (x, y, z) \rightarrow (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Entonces existen: un abierto  $\Omega$  de  $\mathbb{R}^2$  con  $(a, b) \in \Omega$ , un intervalo abierto  $J$  con  $c \in J$  y una función diferenciable  $\varsigma : \Omega \rightarrow J$  verificando las siguientes condiciones:

$$\begin{cases} \Omega \times J \subset \mathbb{D} & \text{y además} \\ \{(x, y, z) \in \Omega \times J \mid F(x, y, z) = 0\} = \{(x, y, \varsigma(x, y)) \mid (x, y) \in \Omega\} \end{cases}$$

Naturalmente el teorema admite un enunciado análogo si se supone por ejemplo que  $(\partial F / \partial x)(p) \neq 0$ .

En particular, si  $M = F^{-1}(0)$  es el conjunto constituido por los ceros de una función diferenciable  $F : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{R}$ , tal que  $DF(p)$  es de rango 1, para todo  $p \in M$ , entonces  $M$  se ve localmente como la gráfica de una función y debería ser considerada superficie.

### 2.1.4. Superficies parametrizadas.

Otra idea es pensar una superficie como una curva bidimensional:

$$\varphi : \mathbb{U} \rightarrow \mathbb{R}^3, \varphi : \begin{cases} x = x(u, v) \\ y = y(u, v) \\ z = z(u, v) \end{cases}$$

que sea regular, es decir

$$rg(D\varphi) = rg \begin{pmatrix} \partial x / \partial u & \partial x / \partial v \\ \partial y / \partial u & \partial y / \partial v \\ \partial z / \partial u & \partial z / \partial v \end{pmatrix} = 2 \text{ en todo punto}$$

La *superficie*  $M$  será la imagen de  $\varphi$ .

Sin embargo, esto no es del todo satisfactorio. En efecto, consideremos:

$$\varphi(u, v) = (\sin u, \sin 2u, v), \quad -\frac{5\pi}{4} < u < \frac{\pi}{4}, \quad -\infty < v < \infty$$

se trata de un cilindro, cuya base tiene la forma de la letra  $\alpha$ , tal y como se ve en la figura:

A esta cosa, no debería llamarsele superficie. Lo que sucede es que  $\varphi$  no es inyectiva, ya que  $\varphi(0, v) = \varphi(\pi, v)$ .

Sin embargo sigue habiendo cosas raras, aun si se impone que  $\varphi$  sea inyectiva. En efecto tomando ahora

$$\varphi(u, v) = (\sin u, \sin 2u, v), \quad 0 < u < 2\pi, \quad -\infty < v < \infty$$

puede probarse que  $\varphi$  es inyectiva, y su imagen es un cilindro cuya base tiene la forma del símbolo  $\infty$ .

Esto tampoco debería ser considerado superficie. Lo que sucede ahora es algo mas sutil: la aplicación  $\varphi$  no induce homeomorfismo sobre su imagen.

## 2.2. SUPERFICIES

Establecemos aquí una definición formal de superficie, y analizamos su relación con las ideas sugeridas en el epígrafe anterior.

### 2.2.1. Coordenadas

En adelante mantendremos una doble notación para las coordenadas. Así, si tomamos coordenadas  $(x, y, z)$  en  $\mathbb{R}^3$ , implícitamente las estaremos identificando con  $(x_1, x_2, x_3)$  según la sencilla regla  $x \equiv x_1$ ,  $y \equiv x_2$ ,  $z \equiv x_3$ . Coordenadas  $(u, v)$  en  $\mathbb{R}^2$  se identificarán con  $(u_1, u_2)$  según  $u \equiv u_1$ ,  $v \equiv u_2$ .

### 2.2.2. Parametrizaciones locales

Sea  $S$  un subconjunto de  $\mathbb{R}^3$ . Una *parametrización (local) de  $S$*  es un homeomorfismo  $\varphi: \mathbb{U} \rightarrow \mathcal{U}$ , donde  $\mathbb{U}$  es un abierto de  $\mathbb{R}^2$  y  $\mathcal{U}$  es un abierto de  $S$  (en la topología relativa). Además se exige la siguiente propiedad de regularidad:  $\varphi: \mathbb{U} \rightarrow \mathbb{R}^3$  es una aplicación diferenciable y  $\text{rg}(D\varphi(u, v)) = 2$ , para todo  $(u, v) \in \mathbb{U}$ .

*Con las notaciones que venimos utilizando correspondería escribir*

$$\varphi(u, v) = ((x \circ \varphi)(u, v), (y \circ \varphi)(u, v), (z \circ \varphi)(u, v)),$$

para  $(u, v) \in \mathbb{U}$ . No obstante, y presuponiendo que se ha fijado de antemano la parametrización  $\varphi$ , las funciones  $(x, y, z)$  se considerarán indistintamente funciones definidas sobre  $\mathcal{U} = \varphi(\mathbb{U})$  o sobre el propio  $\mathbb{U}$ , por lo que valdrán las identificaciones  $x \circ \varphi \equiv x$ ,  $y \circ \varphi \equiv y$ ,  $z \circ \varphi \equiv z$ , escribiremos

$$\varphi(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$$

y diremos que  $x = x(u, v)$ ,  $y = y(u, v)$ ,  $z = z(u, v)$  son las ecuaciones de  $\varphi$ , resumidas en  $x_i = x_i(u, v)$  ( $i = 1, 2, 3$ ).

Más aún: la restricción a  $\mathcal{U}$  de cualquier función diferenciable  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  se considerará indistintamente definida sobre  $\mathcal{U} = \varphi(\mathbb{U})$  o sobre el propio  $\mathbb{U}$ , por lo que valdrá la identificación  $f \circ \varphi \equiv f$ .

### 2.2.3. Concepto de superficie (regular)

Un subconjunto  $M$  de  $\mathbb{R}^3$  se llama *superficie (regular)* si, para cada punto  $p \in M$ , existe una parametrización (local)  $\varphi : \mathbb{U} \rightarrow \mathcal{U}$  con  $p \in \mathcal{U}$ .

Una observación elemental, aunque importante, es que un abierto  $A$  de una superficie  $M$  es también una superficie.

Observese que el grafo  $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in \Omega, z = f(x, y)\}$  de una función diferenciable  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  ( $\Omega$  abierto de  $\mathbb{R}^2$ ) es una superficie, ya que la aplicación  $\varphi : \Omega \rightarrow M$  con  $\varphi(u, v) = (u, v, f(u, v))$  es una parametrización global. Nótese que  $\varphi^{-1} = \pi : M \ni (x, y, z) \rightarrow (x, y) \in \Omega$ .

### 2.2.4. Análisis local de una parametrización.

Consideremos una parametrización local de una superficie  $M$ :

$$\varphi : \mathbb{U} \rightarrow \mathbb{R}^3, \varphi : \begin{cases} x = x(u, v) \\ y = y(u, v) \\ z = z(u, v) \end{cases}$$

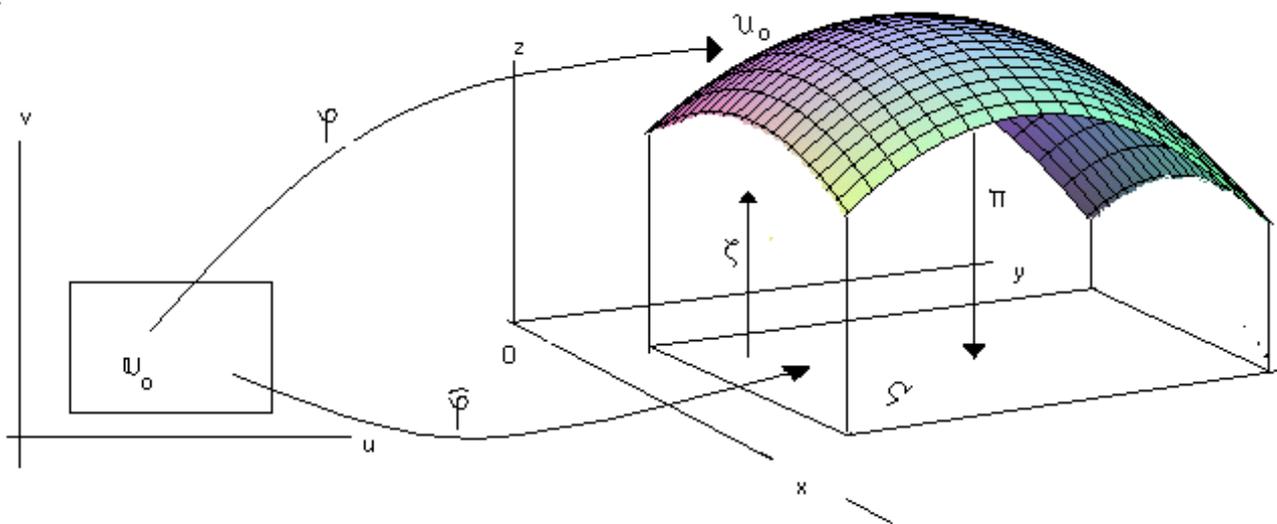
y supongase que en cierto punto  $w_0 = (u_0, v_0) \in \mathbb{U}$ , y sea  $p = \varphi(w_0) = (a, b, c)$ . Se verifica

$$\det \left( \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \Big|_{w_0} \right) \neq 0$$

y sea  $\pi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$  la proyección  $\pi(x, y, z) = (x, y)$ . Entonces

$$\tilde{\varphi} = \pi \circ \varphi : \begin{cases} x = x(u, v) \\ y = y(u, v) \end{cases}$$

define por el teorema de la función inversa, un difeomorfismo  $\tilde{\varphi} : \mathbb{U}_0 \rightarrow \Omega$  de un entorno  $\mathbb{U}_0$  de  $w_0$  en un abierto  $\Omega$  de  $\mathbb{R}^2$  que contiene a  $\tilde{p} = \pi(p)$ .



Así  $\mathcal{U}_0 = \varphi(\mathbb{U}_0)$  es un abierto de  $M$  que podemos suponer de la forma:

$$\mathcal{U}_0 = (\Omega \times J) \cap M$$

siendo  $J$  un intervalo abierto de  $\mathbb{R}$  que contiene a la tercera componente  $c$  de  $p$ . Tenemos así el diagrama:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{U}_0 & \xrightarrow{\varphi} & \mathcal{U}_0 \\ & \searrow \tilde{\varphi} & \downarrow \pi \\ & & \Omega \end{array}$$

La aplicación  $\zeta = \varphi \circ \tilde{\varphi}^{-1} : \Omega \rightarrow \mathcal{U}_0$  verifica  $\pi \circ \zeta = \pi \circ (\varphi \circ \tilde{\varphi}^{-1}) = \tilde{\varphi} \circ \tilde{\varphi}^{-1} = id_{\Omega}$  es decir:

$$\zeta(x, y) = (x, y, \zeta_3(x, y)) \quad \forall (x, y) \in \Omega$$

y se verifica

$$\mathcal{U}_0 = \varphi(\mathbb{U}_0) = (\varphi \circ \tilde{\varphi}^{-1})(\Omega) = \zeta(\Omega) = \{(x, y, \zeta_3(x, y)) \mid (x, y) \in \Omega\}$$

por tanto:

**Conclusión 1:** En un entorno del punto  $p$ , la superficie se ve como la gráfica de una función

**Conclusión 2:** Por otra parte, la aplicación  $\phi : \Omega \times J \rightarrow \mathbb{U}_0$  tal que  $\phi(x, y, z) = \tilde{\varphi}^{-1}(x, y, z)$  verifica la propiedad:

$$\phi(x, y, z) = \varphi^{-1}(x, y, z) \quad \forall (x, y, z) \in \mathcal{U}_0 = (\Omega \times J) \cap M$$

En efecto, ya que  $\forall (u, v) \in \mathbb{U}_0$  es  $\phi(\varphi(u, v)) = \tilde{\varphi}^{-1}(\pi \circ \varphi(u, v)) = (u, v)$

### 2.2.5. Cartas

Si  $\varphi : \mathbb{U} \rightarrow \mathcal{U}$  es una parametrización (local) de una superficie  $M$  y denotamos por  $\varphi^{-1} = \mathbf{c} = (u, v) : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{U}$  la aplicación inversa, se denomina *carta de  $M$*  al par  $(\mathcal{U}, \mathbf{c})$

Con las notaciones que venimos utilizando correspondería escribir

$$\mathbf{c}(p) = ((u \circ \mathbf{c})(p), (v \circ \mathbf{c})(p)) ,$$

para  $p \in \mathcal{U}$ . No obstante, y presuponiendo que se ha fijado de antemano la carta  $\mathbf{c}$ , las funciones  $(u, v)$  se considerarán indistintamente funciones definidas sobre  $\mathbb{U} = \mathbf{c}(\mathcal{U})$  o sobre el propio  $\mathcal{U}$ ; por lo que valdrán las identificaciones  $u \circ \mathbf{c} \equiv u$ ,  $v \circ \mathbf{c} \equiv v$ , escribiremos

$$\mathbf{c}(p) = (u(p), v(p))$$

y diremos que  $u(p)$ ,  $v(p)$  son las coordenadas de  $p$  con respecto a la carta  $(\mathcal{U}, \mathbf{c})$ .

Consideremos la restricción a  $\mathcal{U}$  de cualquier función diferenciable  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ . De la identificación (2.2.2)  $f \circ \varphi \equiv f$  se sigue  $f(p) \equiv f(u(p), v(p))$  y escribiremos  $f = f(u, v)$ .

Análogamente se obtiene:  $\frac{\partial f}{\partial u_i}(p) \equiv \frac{\partial f}{\partial u_i}(u(p), v(p))$  y escribiremos:

$$\frac{\partial f}{\partial u_i} = \frac{\partial f}{\partial u_i}(u, v) .$$

### 2.2.6. Compatibilidad de cartas

Si  $(\mathcal{U}, \mathbf{c} = \varphi^{-1})$ ,  $(\bar{\mathcal{U}}, \bar{\mathbf{c}} = \bar{\varphi}^{-1})$  son dos cartas de una superficie  $M$ , con  $\mathcal{U} \cap \bar{\mathcal{U}}$  no vacío, es fácil probar (usando la conclusión 2 del epígrafe 2.2.4) que la aplicación *cambio de carta*

$$\bar{\mathbf{c}} \circ \varphi: \mathbf{c}(\mathcal{U} \cap \bar{\mathcal{U}}) \rightarrow \bar{\varphi}^{-1}(\mathcal{U} \cap \bar{\mathcal{U}})$$

es un difeomorfismo. Las correspondientes ecuaciones:  $\bar{u} = (\bar{u} \circ \bar{\varphi}^{-1} \circ \varphi)(u, v)$ ,  $\bar{v} = (\bar{v} \circ \bar{\varphi}^{-1} \circ \varphi)(u, v)$ , abreviadamente  $\bar{u} = \bar{u}(u, v)$ ,  $\bar{v} = \bar{v}(u, v)$ , se llaman *ecuaciones del cambio de carta*.

## 2.3. ESPACIOS TANGENTES A SUPERFICIES

### 2.3.1. Cono tangente a un subconjunto en un punto

Sea  $S$  un subconjunto de  $\mathbb{R}^n$  y  $p \in S$ . Se denomina *cono tangente a  $S$  en  $p$*  al conjunto

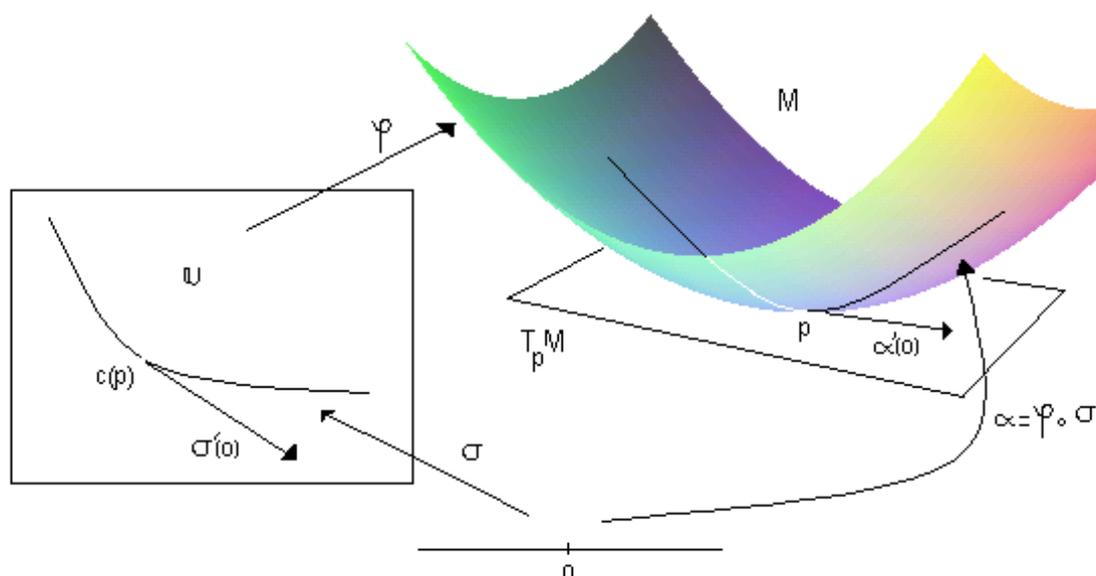
$$T_p S := \{\alpha'(0) \mid \alpha \in C(p, S)\} ,$$

donde  $C(p, S)$  es la familia de curvas por  $p$  en  $S$ , es decir curvas diferenciables  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  tales que  $0 \in I$ , y  $\alpha(0) = p$ . Obsérvese que  $T_p S$  coincide con  $T_p \mathcal{U}$  cuando  $\mathcal{U}$  es abierto de  $S$  en la topología relativa de  $S$  y  $p \in \mathcal{U}$ ; en particular,  $\mathbb{R}^n = T_p \mathbb{R}^n = T_p \mathbb{U}$  cuando  $\mathbb{U}$  es abierto de  $\mathbb{R}^n$  y  $p \in \mathbb{U}$ .

$T_p S$  no tiene por qué ser en general subespacio vectorial de  $\mathbb{R}^n$ ; sin embargo, como vamos a ver, sí lo es cuando  $S$  es una superficie de  $\mathbb{R}^3$ :

### 2.3.2. Plano vectorial tangente a una superficie en un punto

Sea  $\varphi : \mathbb{U} \rightarrow \mathcal{U}$  una parametrización de una superficie  $M$ . Dada cualquier curva  $\alpha : I \rightarrow \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^3$ , es fácil ver (usando de nuevo el epígrafe 2.2.4) que  $\sigma = (\mathbf{c} \circ \alpha) : I \rightarrow \mathbb{U}$  es también una curva (esto es, diferenciable), que podemos escribir como  $\sigma(t) = (u(t), v(t))$  que es la representación analítica local de  $\alpha$ .



Se tiene  $\alpha(t) = \varphi(u(t), v(t))$  y entonces, usando la regla de la cadena se tiene:

$$\frac{d\alpha}{dt} = \frac{\partial \varphi}{\partial u} \frac{du}{dt} + \frac{\partial \varphi}{\partial v} \frac{dv}{dt}$$

si  $p \in \mathcal{U}$ , y  $\alpha \in C(p, \mathcal{U})$  entonces  $\sigma \in C(\mathbf{c}(p), \mathbb{U})$  por lo que particularizando la igualdad anterior en  $t = 0$ , se concluye que

$$T_p M = \text{Span} \left( \left. \frac{\partial \varphi}{\partial u} \right|_{\mathbf{c}(p)}, \left. \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right|_{\mathbf{c}(p)} \right)$$

ahora bien, como el rango de la matriz

$$D\varphi = \begin{pmatrix} \partial x/\partial u & \partial x/\partial v \\ \partial y/\partial u & \partial y/\partial v \\ \partial z/\partial u & \partial z/\partial v \end{pmatrix} \equiv \left( \frac{\partial \varphi}{\partial u}, \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right)$$

es siempre igual a dos, se concluye que  $\dim T_p M = 2$ . Cualquier vector  $\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3) \in T_p M$  puede escribirse en la forma

$$\xi = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix} = \left( \frac{\partial \varphi}{\partial u} \Big|_{\mathbf{c}(p)}, \frac{\partial \varphi}{\partial v} \Big|_{\mathbf{c}(p)} \right) \begin{pmatrix} \xi_1^\varphi \\ \xi_2^\varphi \end{pmatrix}$$

las componentes  $(\xi_1^\varphi, \xi_2^\varphi)$  de  $\xi$  se denominan  $\xi$  locales respecto a  $\varphi$ , mientras que  $(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$  se denominan componentes extrínsecas de  $\xi$ .

Con esta notación, la velocidad de una curva  $\alpha : I \rightarrow \mathcal{U}$  en  $t = \tau$  se escribe

$$\alpha'(\tau) = \frac{du}{dt}(\tau) \frac{\partial \varphi}{\partial u} \Big|_{\mathbf{c}\alpha(\tau)} + \frac{dv}{dt}(\tau) \frac{\partial \varphi}{\partial v} \Big|_{\mathbf{c}\alpha(\tau)},$$

siendo  $(\mathbf{c} \circ \alpha)(t) = (u(t), v(t))$  la correspondiente expresión analítica de  $\alpha$

### 2.3.3. Cambio de coordenadas

Sean  $(\mathcal{U}, \mathbf{c} = (u, v))$ ,  $(\bar{\mathcal{U}}, \bar{\mathbf{c}} = (\bar{u}, \bar{v}))$  dos cartas de una superficie  $M$ , con  $p \in \mathcal{U} \cap \bar{\mathcal{U}}$ . Se deduce entonces,

$$\left( \frac{\partial \varphi}{\partial u_i} \right)_p = \sum_{j=1}^2 \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial u_i}(p) \left( \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial \bar{u}_j} \right)_p \quad (i = 1, 2),$$

donde  $\bar{u}_j = \bar{u}_j(u, v)$  son las ecuaciones del cambio de carta (recordar 2.2.6).

En efecto basta aplicar la regla de la cadena a la identidad:

$$\varphi(u, v) = \bar{\varphi}(\bar{u}(u, v), \bar{v}(u, v))$$

## 2.4. FUNCIONES DIFERENCIABLES Y DIFERENCIAL

### 2.4.1. Recuerdos de álgebra lineal

Una matriz  $A$  con coeficientes en  $\mathbb{R}$  del tipo

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

puede escribirse  $A = (a_1, \dots, a_n)$ , donde  $a_i = \begin{pmatrix} a_{1i} \\ \vdots \\ a_{mi} \end{pmatrix}$ . Por razones de comodidad tipográfica, preferiremos en general escribir los vectores en forma de fila, así en este caso  $a_i = (a_{1i}, \dots, a_{mi})$ . No obstante, mantendremos en estas notas el siguiente criterio: *los elementos de  $\mathbb{R}^n$  serán considerados indistintamente vectores fila o columna, dependiendo del contexto.*

Una matriz  $A$  como la anterior, se interpreta como una aplicación:

$$A : \mathbb{R}^n \ni \vec{\xi} \rightarrow A\vec{\xi} \in \mathbb{R}^m ,$$

donde  $A\xi$  denota el producto matricial de  $A$  por la matriz columna  $\xi \in \mathbb{R}^n$ . Obsérvese que  $A$  representa la única aplicación lineal de  $\mathbb{R}^n$  en  $\mathbb{R}^m$  que transforma la base canónica  $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$  de  $\mathbb{R}^n$  en el sistema ordenado  $(a_1, \dots, a_n)$  de vectores de  $\mathbb{R}^m$ . Supuesto  $m = n$ , la condición para que  $(a_1, \dots, a_n)$  constituya una base ortonormal de  $\mathbb{R}^n$  es que  $AA^t = I$ . En este caso la transformación (o la matriz)  $A$  se dice *ortogonal*. El conjunto  $O(n)$  de transformaciones ortogonales tiene estructura natural de grupo. Es inmediato ver que la matriz  $A$  es ortogonal si y sólo si preserva el producto escalar:

$$\langle A\vec{\xi}, A\vec{\eta} \rangle = \langle \vec{\xi}, \vec{\eta} \rangle , \quad \forall \vec{\xi}, \vec{\eta} \in \mathbb{R}^n$$

Si  $A \in O(n)$ , es  $1 = \det(I) = \det(AA^t) = (\det A)^2$ . Por tanto  $\det A = \pm 1$ . Si  $\det A = 1$ , se dice que  $A$  es *ortogonal positiva*, o también que la base  $(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n)$  es *ortonormal positiva*. El conjunto  $SO(n) := \{A \in O(n) \mid \det A = 1\}$  es un subgrupo de  $O(n)$  cuyos elementos se llaman *rotaciones*. En el caso de  $\mathbb{R}^3$ , es fácil ver que  $A \in SO(3)$  si y sólo si preserva el producto escalar y el vectorial, es decir:

$$\langle A\xi, A\eta \rangle = \langle \xi, \eta \rangle \quad \text{y} \quad (A\xi) \times (A\eta) = \xi \times \eta \quad , \quad \forall \xi, \eta \in \mathbb{R}^3$$

.Si  $p, q \in \mathbb{E}^n$ , definimos la *distancia* entre ambos puntos por  $d(p, q) := |q - p|$ . Un *movimiento* en  $\mathbb{R}^n$  es una biyección  $\mathcal{A} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  que preserva la distancia, es decir,  $d(p, q) = d(\mathcal{A}p, \mathcal{A}q)$ . Se prueba que todo movimiento puede expresarse en la forma:

$$\mathcal{A} : \mathbb{R}^n \ni p \rightarrow Ap + \xi \in \mathbb{R}^n , \quad (13)$$

donde  $A \in O(n)$  y  $\xi \in \mathbb{R}^n$ .

El movimiento se dice *directo* si  $A \in SO(n)$ ; en este caso, se denomina a  $A$  la *rotación de  $\mathcal{A}$*

### 2.4.2. Recuerdos de análisis

Sea  $F = (F_1, \dots, F_m) : \mathbb{U} \rightarrow \mathbb{R}^m$  función diferenciable definida sobre un abierto  $\mathbb{U}$  de  $\mathbb{R}^n$ . La matriz jacobiana:

$$DF = \begin{pmatrix} \partial F_1 / \partial x_1 & \cdots & \partial F_1 / \partial x_n \\ \vdots & & \vdots \\ \partial F_m / \partial x_1 & \cdots & \partial F_m / \partial x_n \end{pmatrix}$$

induce en cada punto  $p \in \mathbb{U}$ , una aplicación lineal. Se llama *diferencial de  $F$  en  $p \in \mathbb{U}$*  a la aplicación lineal

$$DF(p) : \mathbb{R}^n \ni \xi \rightarrow DF(p)\xi \in \mathbb{R}^m ;$$

en donde  $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ . Es decir, se trata de la aplicación lineal que tiene por matriz, respecto de las bases canónicas de  $\mathbb{R}^n$  y de  $\mathbb{R}^m$ , la matriz jacobiana  $DF(p)$ .

El vector  $DF(p)\xi \in \mathbb{R}^m$  puede determinarse geoméricamente de la siguiente forma:

Tómese cualquier curva diferenciable  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{U}$  por  $p$  (esto es,  $\alpha(0) = p$ ) y tal que  $\alpha'(0) = \xi$ . Entonces  $DF(p)\xi$  es precisamente el vector velocidad de la curva  $F \circ \alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^m$  en  $t = 0$ :

$$DF(p)\xi = (F \circ \alpha)'(0) \tag{14}$$

En particular  $(F \circ \alpha)'(0)$  solo depende de  $\alpha'(0) = \xi$

En efecto, si  $\alpha(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$  entonces  $(F \circ \alpha)(t) = (y_1(t), \dots, y_m(t))$ , con  $y_j(t) = F_j(x_1(t), \dots, x_n(t))$ . Aplicando la regla de la cadena se concluye que

$$\frac{dy_j}{dt} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial F_j}{\partial x_i} \frac{dx_i}{dt}$$

y particularizando para  $t = 0$ ,

$$\left. \frac{dy_j}{dt} \right|_{t=0} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial F_j}{\partial x_i}(p) \left. \frac{dx_i}{dt} \right|_{t=0} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial F_j}{\partial x_i}(p) \xi_i$$

de donde se deduce (14)

Observese que si  $F = \mathcal{A} : \mathbb{R}^n \ni p \rightarrow Ap + \xi \in \mathbb{R}^m$  es una aplicación afín ( $A$  es matriz de  $n$  filas y  $m$  columnas y  $\xi \in \mathbb{R}^m$ ) entonces  $DF = A$

### 2.4.3. Plano tangente en implícitas

Sea  $M$  una superficie y sea  $\mathcal{V} \subset M$  un abierto (en la topología relativa) de la forma  $\mathcal{V} = F^{-1}(0)$ , con  $F$  tal como se detalla en el Teorema 2.1.3. Entonces se verifica, para todo  $p \in \mathcal{V}$ ,

$$T_p M = \ker(DF|_p)$$

En efecto, si  $\alpha(t) = (x(t), y(t), z(t))$  es una curva en  $M$  con  $\alpha(0) = p$ , entonces la función  $\phi(t) = F(x(t), y(t), z(t))$  es constante, y por la regla de la cadena se tiene

$$\begin{aligned} 0 &= \phi'(0) = \frac{\partial F}{\partial x} \Big|_p \frac{dx}{dt} \Big|_0 + \frac{\partial F}{\partial y} \Big|_p \frac{dy}{dt} \Big|_0 + \frac{\partial F}{\partial z} \Big|_p \frac{dz}{dt} \Big|_0 \\ &= DF|_p \alpha'(0) \end{aligned}$$

esto prueba que  $T_p M \subset \ker(DF|_p)$  el otro contenido es por razón de dimensiones.

#### 2.4.4. Funciones diferenciables entre superficies

Sean  $M$  y  $\bar{M}$  superficies de  $\mathbb{R}^3$ . Una función  $F : M \rightarrow \bar{M}$  se dice *diferenciable* si, para cada punto  $p \in M$ , existen un abierto  $\mathbb{U}$  de  $\mathbb{R}^3$  que contiene a  $p$  y una función diferenciable  $\tilde{F} : \mathbb{U} \rightarrow \mathbb{R}^3$  tales que  $F|_{\mathbb{U} \cap M} = \tilde{F}|_{\mathbb{U} \cap M}$ .

Resulta inmediato que la composición de aplicaciones diferenciables entre subconjuntos es también diferenciable.

#### 2.4.5. La diferencial

Sean  $M$  y  $\bar{M}$  un superficies de  $\mathbb{R}^3$  y sea  $F : M \rightarrow \bar{M}$  una función diferenciable. Si  $p \in M$  y  $\xi \in T_p M$ , entonces, eligiendo  $\alpha \in C(p, M)$  tal que  $\alpha'(0) = \xi$ , se verifica localmente  $F \circ \alpha = \tilde{F} \circ \alpha \in C(F(p), \bar{M})$  (la notación  $\tilde{F}$  es la del apartado anterior); así queda definida sin ambigüedad una aplicación:

$$dF(p) : T_p M \ni \xi = \alpha'(0) \rightarrow (F \circ \alpha)'(0) \in T_{F(p)} \bar{M}.$$

Naturalmente  $dF(p)$  resulta ser la restricción a  $T_p M$  de  $D\tilde{F}(p)$ ; por tanto,  $dF(p)$  será una aplicación lineal, denominada *diferencial de  $F$  en  $p$* .

#### 2.4.6. Congruencias

Sean  $M$  y  $\bar{M}$  superficies de  $\mathbb{R}^3$ . Una aplicación  $\phi : M \rightarrow \bar{M}$  se llama *congruencia* si existe un movimiento  $\mathcal{A} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  de forma que  $\phi = \mathcal{A}|_M$ , es decir:

$$\phi : M \ni p \rightarrow \mathcal{A}(p) \in \bar{M}$$

Se dice entonces que las superficies  $M$  y  $\bar{M}$  son *congruentes*, y escribimos  $M \equiv \bar{M}$ . Como los movimientos en  $\mathbb{R}^3$  son difeomorfismos, también lo son las congruencias entre superficies.

Puesto que, la inversa de una congruencia y la composición de congruencias son congruencias, se concluye que la relación de congruencia es relación de equivalencia.

Recordemos que para las curvas en el espacio, se habían definido invariantes geométricos *computables* de congruencia, (arco, curvatura y torsión) que nos permitían decidir cuando dos curvas son congruentes.

Un problema central de la teoría de superficies es el determinar invariantes geométricos *computables* de congruencia con análogo fin.

## 2.5. CAMPOS DE VECTORES

### 2.5.1. Campos de vectores sobre subconjuntos de $\mathbb{R}^n$

Sea  $S$  un subconjunto de  $\mathbb{R}^n$ , y  $f : S \rightarrow \mathbb{R}^m$  una aplicación. Se dice que  $f$  es diferenciable, si localmente en torno (en  $\mathbb{R}^n$ ) de cada punto  $p \in S$ , se puede extender a una función diferenciable. En particular el conjunto  $\mathfrak{F}(S)$  de funciones diferenciables  $f : S \rightarrow \mathbb{R}$  tiene estructura natural de anillo.

Un *campo de vectores sobre un subconjunto  $S$  de  $\mathbb{R}^n$*  viene determinado por una aplicación diferenciable  $X : S \rightarrow \mathbb{R}^n$ , que se interpreta como una asignación que hace corresponder a cada punto  $p \in S$  un vector  $X(p) \in \mathbb{R}^n$ . Podemos escribir para todo  $p \in S$ :

$$X = (X_1, \dots, X_m)$$

donde las funciones diferenciables  $X_i : S \rightarrow \mathbb{R}$  reciben el nombre de *componentes de  $X$* .

### 2.5.2. El módulo de los campos de vectores $\mathfrak{X}_S$

El conjunto  $\mathfrak{X}_S$  de los campos de vectores sobre un subconjunto  $S$  de  $\mathbb{R}^n$  tiene estructura natural de  $\mathbb{R}$ -espacio vectorial. Además es un  $\mathfrak{F}(S)$ -módulo, donde  $\mathfrak{F}(S)$  es el anillo de las funciones diferenciables  $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ .

Puesto que, dado un campo  $X = (X_1, \dots, X_m) \in \mathfrak{X}_S$ , podemos escribir la identidad

$$X = \sum_{i=1}^n X_i \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_S, \text{ con } \frac{\partial}{\partial x_i} = (0, \dots, 1^i, \dots, 0) \quad (15)$$

se concluye que el conjunto  $(\partial/\partial x_1 \Big|_S, \dots, \partial/\partial x_n \Big|_S)$  de campos de vectores sobre  $S$  constituye una base del módulo  $\mathfrak{X}_S$ .

### 2.5.3. Campos normales a una superficie.

Un vector  $\nu \in \mathbb{R}^3$  se dice que es *normal unitaria a un plano  $\Pi$  vectorial de  $\mathbb{R}^3$*  si se verifica que  $\langle \nu, \nu \rangle = 1$ , y  $\langle \nu, \xi \rangle = 0$ ,  $\forall \xi \in \Pi$ .

Un plano  $\Pi$  de  $\mathbb{R}^3$  tiene exactamente dos normales unitarias  $\pm \nu$ , y cada una de ellas define una *orientación de  $\Pi$*  en el siguiente sentido:

Una base  $(\xi, \eta)$  de  $\Pi$  se dice que es (tá) *positiva(mente orientada)* (con respecto a  $\nu$ ) si el vector  $\xi \times \eta$  tiene el mismo sentido que  $\nu$ , es decir, si  $\langle \xi \times \eta, \nu \rangle$  es positivo, lo cual equivale a decir que  $\det(\xi, \eta, \nu) > 0$ .

Un campo  $\nu \in \mathfrak{X}_M$  sobre una superficie  $M$  de  $\mathbb{R}^3$  se dice *normal unitaria a  $M$*  si  $\nu(p)$  es normal unitaria a  $T_p M$ , para todo  $p \in M$ . No siempre existe una normal unitaria  $\nu \in \mathfrak{X}_M$  a una superficie  $M$  pero, cuando existe, se dice que  $M$  es *orientable* y  $\nu$  define una *orientación en  $M$* . Así, dar una orientación en  $M$  supone establecer una orientación sobre cada espacio tangente  $T_p M$  y que esta orientación varíe diferenciablemente al mover el punto  $p$  sobre la superficie. Si la superficie  $M$  es conexa y orientable, admite exactamente dos orientaciones.

Una carta  $(\mathcal{U}, \mathbf{c} = (u, v))$  de  $M$  induce una orientación sobre  $\mathcal{U}$ , que es la definida por la normal unitaria:

$$\nu: = \frac{\partial \varphi / \partial u \times \partial \varphi / \partial v}{|\partial \varphi / \partial u \times \partial \varphi / \partial v|} \in \mathfrak{X}_{\mathcal{U}}.$$

#### 2.5.4. Campos de vectores tangentes a subconjuntos de $\mathbb{R}^n$

Un campo de vectores  $X \in \mathfrak{X}_S$  sobre un subconjunto  $S$  de  $\mathbb{R}^n$  se dice *tangente a  $S$*  si, para todo  $p \in S$ , se verifica  $X(p) \in T_p S$ . Se denota por  $\mathfrak{X}(S)$  al conjunto de los campos tangentes a  $S$ . Obsérvese que:

a) Si  $S = \mathbb{U}$  es un abierto de  $\mathbb{R}^n$ , entonces  $\mathfrak{X}(\mathbb{U}) = \mathfrak{X}_{\mathbb{U}}$ . En particular,  $\mathfrak{X}_{\mathbb{U}}$  es un  $\mathfrak{F}(\mathbb{U})$ -módulo.

b) Si  $S = M$  es una superficie de  $\mathbb{R}^3$ , entonces  $\mathfrak{X}(M)$  está estrictamente contenido en  $\mathfrak{X}_M$  y constituye un  $\mathfrak{F}(M)$ -submódulo.

c) Si  $\mathcal{U}$  es abierto de la superficie  $M$  y  $V \in \mathfrak{X}(M)$ , entonces  $V$  se puede restringir a  $\mathcal{U}$  y da lugar a  $V|_{\mathcal{U}} \in \mathfrak{X}(\mathcal{U})$ .

#### 2.5.5. Representación analítica local de un campo tangente a una superficie

Si  $(\mathcal{U}, \mathbf{c})$  es una carta de una superficie  $M$ , entonces, para cada  $i = 1, 2$ , la asignación  $\partial \varphi / \partial u_i$ , que hace corresponder a cada  $p \in \mathcal{U}$  el vector  $(\partial \varphi / \partial u_i)_{\mathbf{c}(p)} \in T_p M$ , define un campo tangente a  $\mathcal{U}$ , que denominamos *i-ésimo campo coordenado*. De hecho, el conjunto

$$\left( \frac{\partial \varphi}{\partial u}, \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right)$$

constituye una base del  $\mathfrak{F}(\mathcal{U})$ -módulo  $\mathfrak{X}(\mathcal{U})$  y se tiene, por (15):

$$\frac{\partial \varphi}{\partial u_i} = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial x_j}{\partial u_i} \frac{\partial}{\partial x_j} \quad (i = 1, 2). \quad (16)$$

Obsérvese que usando las identificaciones de los epígrafes 2.2.5 y 2.2.2 se tiene

$$\frac{\partial \varphi}{\partial u_i} = \left( \frac{\partial x}{\partial u_i}, \frac{\partial y}{\partial u_i}, \frac{\partial z}{\partial u_i} \right)$$

Sea ahora  $V = \sum_{i=1}^3 V_i \frac{\partial}{\partial x_i} |_M \in \mathfrak{X}(M)$  un campo tangente a una superficie  $M$  y sea  $(\mathcal{U}, \mathbf{c})$  una carta de  $M$ . Puesto que  $(\frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial v})$  constituye una base del  $\mathfrak{F}(\mathcal{U})$  -módulo  $\mathfrak{X}(\mathcal{U})$ , existirán  $V_1^\mathbf{c}, V_2^\mathbf{c} \in \mathfrak{F}(\mathcal{U})$  tales que se podrá escribir

$$V|_{\mathcal{U}} = \sum_{i=1}^2 V_i^\mathbf{c} \frac{\partial \varphi}{\partial u_i}; \quad (17)$$

esta expresión se denomina *expresión analítica local de  $V$  en la carta  $(\mathcal{U}, \mathbf{c})$*  y las  $V_i^\mathbf{c}$  ( $i = 1, 2$ ) son las *componentes locales de  $V$  en la carta  $(\mathcal{U}, \mathbf{c})$* .

De la identificación (2.2.2)  $V_i^\mathbf{c} \circ \varphi \equiv V_i^\mathbf{c}$  se sigue  $V_i^\mathbf{c}(p) \equiv V_i^\mathbf{c}(u(p), v(p))$  y escribiremos  $V_i^\mathbf{c} = V_i^\mathbf{c}(u, v)$ .

Por otra parte, las funciones  $V_j \in \mathfrak{F}(M)$  ( $j = 1, 2, 3$ ) restringen a funciones diferenciables  $V_j|_{\mathcal{U}} : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$ . Entre éstas y las  $V_i^\mathbf{c}$  ( $i = 1, 2$ ) existe la siguiente relación

$$V_j|_{\mathcal{U}} = \sum_{i=1}^2 V_i^\mathbf{c} \frac{\partial x_j}{\partial u_i} \quad (j = 1, 2, 3). \quad (18)$$

### 2.5.6. Curvas integrales de un campo

Sea  $X \in \mathfrak{X}(\mathbb{U})$  un campo de vectores sobre un abierto  $\mathbb{U}$  de  $\mathbb{R}^n$ . Una curva  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{U}$  se dice *curva integral de  $X$*  si  $X(\alpha(t)) = \alpha'(t)$  para todo  $t \in I$ .

Tomando en  $\mathbb{R}^n$  coordenadas  $(x_1, \dots, x_n)$  y escribiendo  $\alpha(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$  y  $X = (X_1, \dots, X_n)$ , la condición necesaria y suficiente para que  $\alpha$  sea curva integral de  $X$  es que las funciones  $x_i(t)$  verifiquen el sistema de ecuaciones diferenciales

$$\left. \frac{dx_i}{dt} = X_i(x_1(t), \dots, x_n(t)) \right\}_{i=1, \dots, n}.$$

La teoría general de ecuaciones diferenciales asegura:

1. Para cada  $t_0 \in \mathbb{R}$  y cada  $p \in \mathbb{U}$ , existe una curva integral de  $X$ ,  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{U}$ , con  $t_0 \in I$  y  $\alpha(t_0) = p$ . Por otra parte, si  $\beta : J \rightarrow \mathbb{U}$  es cualquier curva integral de  $X$  verificando la misma condición, entonces  $\alpha | I \cap J = \beta | I \cap J$ .
2. (más aún) Para cada  $t_0 \in \mathbb{R}$  y cada  $p \in \mathbb{U}$ , existen entornos  $I$  de  $t_0$  y  $\mathbb{V} \subset \mathbb{U}$  de  $p$  y existe una función diferenciable  $\psi : I \times \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{U}$  tales que,  $\forall q \in \mathbb{V}$ , la función  $\psi(\cdot, q) : I \rightarrow \mathbb{U}$  es una curva integral de  $X$  con  $\psi(t_0, q) = q$ .

## 2.6. FORMAS BILINEALES EN SUPERFICIES

### 2.6.1. Definición

Una *forma bilineal sobre una superficie*  $M$  es un operador  $\mathcal{B}$  que asocia, a cada punto  $p \in M$ , una forma bilineal  $\mathcal{B}_p : T_p M \times T_p M \rightarrow \mathbb{R}$  verificando la siguiente propiedad de diferenciabilidad:

Para todo par de campos  $V, W \in \mathfrak{X}(\mathcal{U})$  definidos sobre un abierto  $\mathcal{U}$  de  $M$ , la aplicación:

$$\mathcal{B}(V, W) : \mathcal{U} \ni p \rightarrow \mathcal{B}_p(V(p), W(p)) \in \mathbb{R}$$

es una función diferenciable.

La forma bilineal  $\mathcal{B}$  induce una función (denotada por la misma letra)  $\mathcal{B} : \mathfrak{X}(\mathcal{U}) \times \mathfrak{X}(\mathcal{U}) \rightarrow \mathfrak{F}(\mathcal{U})$  que es  $\mathfrak{F}(\mathcal{U})$ -bilineal, es decir, verifica, para todo  $U, V, W \in \mathfrak{X}(\mathcal{U})$  y todo  $f, g \in \mathfrak{F}(\mathcal{U})$ , las propiedades:

1.  $\mathcal{B}(fU + gV, W) = f\mathcal{B}(U, W) + g\mathcal{B}(V, W)$
2.  $\mathcal{B}(U, fV + gW) = f\mathcal{B}(U, V) + g\mathcal{B}(U, W)$
3. Además, si  $\mathcal{V}$  es abierto contenido en  $\mathcal{U}$ , se verifica:  $\mathcal{B}(V|_{\mathcal{V}}, W|_{\mathcal{V}}) = \mathcal{B}(V, W)|_{\mathcal{V}}$ .

### 2.6.2. Componentes

Si  $(\mathcal{U}, \varphi^{-1} = \mathbf{c} = (u, v))$  es una carta, las funciones:

$$b_{ij}^{\mathbf{c}} := \mathcal{B}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial u_i}, \frac{\partial \varphi}{\partial u_j}\right) \in \mathfrak{F}(\mathcal{U}) \quad (i, j = 1, 2)$$

determinan completamente  $\mathcal{B}$  en  $\mathcal{U}$ ; ya que, si  $V = \sum_{i=1}^2 V_i^{\mathbf{c}} \frac{\partial \varphi}{\partial u_i} \in \mathfrak{X}(\mathcal{U})$  y  $W = \sum_{i=1}^2 W_i^{\mathbf{c}} \frac{\partial \varphi}{\partial u_i} \in \mathfrak{X}(\mathcal{U})$ , se tiene:

$$\mathcal{B}(V, W) = \sum_{i,j=1}^2 b_{ij}^{\mathbf{c}} V_i^{\mathbf{c}} W_j^{\mathbf{c}}.$$

Las funciones:  $b_{ij}^{\mathbf{c}} : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$  se denominan *componentes de  $\mathcal{B}$  en la carta*  $(\mathcal{U}, \mathbf{c})$ . Habida cuenta de los convenios introducidos en 2.2.2, valdrán las identificaciones  $b_{ij}^{\mathbf{c}} \circ \mathbf{c} \equiv b_{ij}^{\mathbf{c}}$ .

**Observación 2.1** *En la práctica, la condición de diferenciabilidad de una forma bilineal  $\mathcal{B}$  sobre la superficie  $M$  se garantiza cuando podemos asegurar que sus componentes  $b_{ij}$  en una carta arbitraria son funciones diferenciables.*

**Proposición 2.1** Sea  $\mathcal{B}$  una forma bilineal sobre  $M$ , sean  $(\mathcal{U}, \mathbf{c})$ ,  $(\bar{\mathcal{U}}, \bar{\mathbf{c}})$  dos cartas de  $M$  y sean  $b_{ij}^{\mathbf{c}}$ ,  $b_{ij}^{\bar{\mathbf{c}}}$  las correspondientes componentes de  $\mathcal{B}$ . Si la aplicación cambio de carta

$$\bar{\mathbf{c}} \circ \mathbf{c}^{-1} : \mathbf{c}(\mathcal{U} \cap \bar{\mathcal{U}}) \rightarrow \bar{\mathbf{c}}(\mathcal{U} \cap \bar{\mathcal{U}})$$

tiene por ecuaciones (ver 2.2.6)  $\bar{u}_j = \bar{u}_j(u, v)$ , teniendo en cuenta 2.3.3 se concluye que:

$$b_{ij}^{\mathbf{c}} = \sum_{k,l=1}^2 b_{kl}^{\bar{\mathbf{c}}} \frac{\partial \bar{u}_k}{\partial u_i} \frac{\partial \bar{u}_l}{\partial u_j} \quad (i, j = 1, 2),$$

es decir

$$(b_{ij}^{\mathbf{c}}) = \left( \frac{\partial(\bar{u}, \bar{v})}{\partial(u, v)} \right)^t (b_{ij}^{\bar{\mathbf{c}}}) \frac{\partial(\bar{u}, \bar{v})}{\partial(u, v)} \quad (19)$$

## 2.7. PRIMERA FORMA FUNDAMENTAL

El producto escalar ordinario de vectores en  $\mathbb{R}^3$  induce un producto escalar sobre cada espacio tangente  $T_p M$  a una superficie. Es la llamada primera forma fundamental, que permite determinar sobre la superficie medidas de longitudes de curvas. Hay otra forma bilineal fundamental sobre cada  $T_p M$  que *controla* las curvaturas (normales) en  $p$  de las curvas contenidas en la superficie. Es la denominada segunda forma fundamental. Las dos formas fundamentales contienen toda la información geométrica de la superficie.

### 2.7.1. Definición

Si  $M$  es una superficie de  $\mathbb{R}^3$  y  $p \in M$ , entonces  $T_p M$  es un subespacio vectorial 2-dimensional de  $T_p \mathbb{R}^3 = \mathbb{R}^3$  y, por tanto, es un plano euclídeo. En estas condiciones, se tiene la siguiente :

**Definición 2.1** Dada  $M$  superficie de  $\mathbb{R}^3$ , existe una única forma bilineal sobre  $M$  (que denotamos por  $\mathcal{G}$ ) de manera que, para cada  $\mathcal{U}$  abierto de  $M$  y  $V, W \in \mathfrak{X}(\mathcal{U})$ , se tiene:

$$\mathcal{G}(V, W)(p) := \langle V(p), W(p) \rangle, \quad \forall p \in \mathcal{U}$$

Se denomina a  $\mathcal{G}$  primera forma fundamental de la superficie  $M$ . Usualmente escribiremos  $\langle V, W \rangle$  en lugar de  $\mathcal{G}(V, W)$ .

### 2.7.2. Expresión analítica local

Sea  $M$  una superficie de  $\mathbb{R}^3$ . Presuponiendo que se ha fijado de antemano una carta  $(\mathcal{U}, \mathbf{c})$  de  $M$ , las componentes  $g_{ij}$  de la primera forma fundamental  $\mathcal{G}$  se escriben:

$$g_{ij} \equiv \left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial u_i}, \frac{\partial \varphi}{\partial u_j} \right\rangle = \sum_{k=1}^3 \frac{\partial x_k}{\partial u_i} \frac{\partial x_k}{\partial u_j}.$$

Introducimos los siguientes nombres para los coeficientes  $g_{ij}$  (que son estándar en la bibliografía)

$$E \equiv g_{11} = \left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial u}, \frac{\partial \varphi}{\partial u} \right\rangle, F \equiv g_{12} = \left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial u}, \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right\rangle, G \equiv g_{22} = \left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial v}, \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right\rangle,$$

que se denominan *coeficientes de la primera forma fundamental de  $M$* . Si  $V = \sum_{i=1}^2 V_i^{\mathbf{c}} \frac{\partial}{\partial u_i}$ ,  $W = \sum_{i=1}^2 W_i^{\mathbf{c}} \frac{\partial}{\partial u_i} \in \mathfrak{X}(\mathcal{U})$ , entonces se tiene:

$$\langle V, W \rangle = \sum_{i,j=1}^2 g_{ij} V_i^{\mathbf{c}} W_j^{\mathbf{c}} = (V_1^{\mathbf{c}}, V_2^{\mathbf{c}}) \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W_1^{\mathbf{c}} \\ W_2^{\mathbf{c}} \end{pmatrix};$$

en particular,

$$|V|^2 = E(V_1^{\mathbf{c}})^2 + 2FV_1^{\mathbf{c}}V_2^{\mathbf{c}} + G(V_2^{\mathbf{c}})^2.$$

### 2.7.3. Longitudes de curvas

Sea  $(\mathcal{U}, \mathbf{c} = (u, v))$  una carta de una superficie  $M$  de  $\mathbb{R}^3$  y sea  $(\mathbf{c} \circ \alpha)(t) = (u(t), v(t))$  la correspondiente expresión analítica de una curva  $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathcal{U}$ . Entonces se tiene la siguiente expresión para la longitud de  $\alpha$ :

$$L(\alpha) := \int_a^b |\alpha'(t)| dt = \int_a^b \sqrt{E(u, v) \left(\frac{du}{dt}\right)^2 + 2F(u, v) \frac{du}{dt} \frac{dv}{dt} + G(u, v) \left(\frac{dv}{dt}\right)^2} dt$$

### 2.7.4. Integrales de funciones en recintos coordenados

Sea  $(\mathcal{U}, \mathbf{c} = (u, v))$  una carta de una superficie  $M$  de  $\mathbb{E}^3$ , con  $\varphi : \mathbb{U} \rightarrow \mathcal{U}$  la parametrización local asociada. Una función  $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$  se dirá *integrable* (o *medible*) si lo es  $f \equiv f \circ \varphi : \mathbb{U} \rightarrow \mathbb{R}$ ; en tal caso, se llama *integral de  $f$  en  $M$*  a:

$$\int_M f d\sigma := \int_{\mathbb{U}} f(u, v) \left| \frac{\partial}{\partial u} \times \frac{\partial}{\partial v} \right| du dv \quad (20)$$

nótese que si  $\phi$  es una determinación del ángulo entre  $\partial\varphi/\partial u$ , y  $\partial\varphi/\partial v$  se tiene

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial}{\partial u} \times \frac{\partial}{\partial v} \right|^2 &= \left| \frac{\partial \varphi}{\partial u} \times \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right|^2 = \left| \frac{\partial \varphi}{\partial u} \right|^2 \left| \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right|^2 (1 - \cos^2 \phi) \\ &= EG - F^2 \end{aligned}$$

por tanto se verifica también

$$\int_M f d\sigma = \int_{\mathcal{U}} f(u, v) \sqrt{E(u, v)G(u, v) - F(u, v)^2} dudv$$

lo que prueba que la integral es una magnitud intrínseca (que depende solo de la primera forma fundamental).

Un recinto  $\mathcal{R}$  de  $M$  contenido en  $\mathcal{U}$  se dice *medible* si lo es  $\mathbf{c}(\mathcal{R})$ . Se llama *integral de  $f$  en  $\mathcal{R}$*  a:

$$\int_{\mathcal{R}} f d\sigma := \int_M f \chi_{\mathcal{R}} d\sigma ,$$

siendo  $\chi_{\mathcal{R}}$  la función característica de  $\mathcal{R}$ . Se define el *área de  $\mathcal{R}$*  como:

$$A(\mathcal{R}) := \int_M \chi_{\mathcal{R}} d\sigma = \int_{\mathbf{c}(\mathcal{R})} \sqrt{EG - F^2} dudv .$$

La definición de función (o recinto) medible no depende de la parametrización  $\varphi$  utilizada, ni tampoco la integral de la función (o el área del recinto). Probemos esto último:

Pongamos  $\mathbf{c} = (u, v)$ ,  $\bar{\mathbf{c}} = (\bar{u}, \bar{v})$  dos cartas con el mismo dominio  $\mathcal{U}$ , por (19), se tiene:

$$\det(g_{ij}^{\varphi}) = \det\left(\frac{\partial(\bar{u}, \bar{v})}{\partial(u, v)}\right)^2 \det(g_{ij}^{\bar{\varphi}})$$

así:

$$\begin{aligned} & \int_{\bar{\mathbf{c}}(\mathcal{U})} f \circ \varphi(\bar{u}, \bar{v}) \sqrt{\det(g_{ij}^{\bar{\varphi}})} d\bar{u}d\bar{v} \\ &= \int_{\mathbf{c}(\mathcal{U})} f \circ \varphi(u, v) \sqrt{\det(g_{ij}^{\bar{\varphi}})} \left| \det\left(\frac{\partial(\bar{u}, \bar{v})}{\partial(u, v)}\right) \right| dudv \\ &= \int_{\mathbf{c}(\mathcal{U})} f \circ \varphi(u, v) \sqrt{\det(g_{ij}^{\varphi})} dudv \end{aligned}$$

## 2.8. Ejercicios Propuestos

1. Sea  $M$  la imagen de la aplicación  $\varphi(u, v) = (u \sin v, u \cos v, v)$  con  $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ .
  - a) Encontrar una función  $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  diferenciable de forma que  $M = F^{-1}(0)$  y  $DF(p) \neq 0 \forall p \in M$ .
  - b) Probar que  $\varphi$  define una parametrización (global) de  $M$ .
  - c) Determinar  $T_p M$  en los puntos  $p = (0, 0, z)$ .

2. Se considera la aplicación  $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  definida de la siguiente forma:  $\varphi(u, v)$  es la intersección de la recta definida por los puntos  $(u, v, 0)$  y el polo norte  $p^+ = (0, 0, 1)$  con la esfera  $\mathbb{S}^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ . Se denomina a  $\varphi$  proyección estereográfica desde el polo norte  $p^+$ .
- Determinar las ecuaciones de  $\varphi$  y probar que define una parametrización de la esfera con imagen  $\mathbb{S}^2 - \{p^+\}$
  - Encontrar una aplicación diferenciable  $\phi : \mathbb{R}^2 - \{(x, y, 1) : (x, y) \in \mathbb{R}^2\}$  cuya restricción a  $\mathbb{S}^2 - \{p^+\}$  coincide con la carta  $\mathbf{c} = (u, v) = \varphi^{-1}$ .
  - Si  $\bar{\mathbf{c}} = (\bar{u}, \bar{v})$  es la carta definida por la proyección estereográfica de la esfera desde el polo sur  $p^- = (0, 0, -1)$ . determinar las ecuaciones de  $\bar{\mathbf{c}} \circ \varphi : \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\} \ni (u, v) \rightarrow (\bar{u}, \bar{v}) \in \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$  y comprobar que es un difeomorfismo.
3. Fijados los números positivos  $r$  y  $R$  con  $r < R$ , se llama toro  $\mathcal{T}$  al conjunto formado por los puntos  $(x, y, z)$  de  $\mathbb{R}^3$  por los que pasa la circunferencia  $\mathcal{C}$  de centro el punto  $(0, R, 0)$  radio  $r$ , y situada en el plano  $x = 0$ , al girar alrededor del eje  $OZ$ .
- Demostrar que  $\mathcal{T} = F^{-1}(0)$ , siendo
 
$$F : \mathbb{R}^3 \ni (x, y, z) \rightarrow (x^2 + y^2 + z^2 - R^2 - r^2)^2 - 4R^2(r^2 - z^2) \in \mathbb{R}$$
  - Probar que  $DF(p) \neq 0$ , para todo  $p \in M$ , y por tanto  $M$  es una superficie.
  - Probar que la aplicación  $\varphi(\phi, \theta) = ((R + r \cos \phi) \cos \theta, (R + r \cos \phi) \sin \theta, r \sin \phi)$  define una parametrización local del toro  $\mathcal{T}$  cuando  $(\phi, \theta) \in (-\pi, \pi) \times (-\pi, \pi)$ .
  - Determinar los puntos  $p$  del toro  $\mathcal{T}$  (con  $R = 2, r = 1$ ) del ejercicio tales que
 
$$T_p \mathcal{T} = \{(\xi_1, \xi_2, \xi_3)_p : \xi_1 + \xi_2 + \xi_3 = 0\}$$
 y determinar en las coordenadas  $(\phi, \theta)$  la expresión analítica de  $(1, 0, -1)_p$
4. Sea  $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 - z^2 = 1\}$ , y sea
 
$$X = zx \frac{\partial}{\partial x} + zy \frac{\partial}{\partial y} + (1 + z^2) \frac{\partial}{\partial z}$$
- Probar que  $M$  es una superficie, y  $X$  es un campo tangente a  $M$ .
  - Probar que  $\varphi(t, \theta) = (\cosh(t) \cos(\theta), \cosh(t) \sin(\theta), \sinh(t))$ ,  $(t, \theta) \in \mathbb{R} \times (-\pi, \pi)$  define una parametrización de  $M$ .
  - Determinar la expresión analítica del campo  $V$  restricción de  $X$  a  $M$  en las coordenadas  $(t, \theta)$ .

### 3. TEORÍA LOCAL DE SUPERFICIES

Supondremos, en adelante y salvo aviso explícito, que  $M$  es una superficie conexa de  $\mathbb{R}^3$  orientada por una normal unitaria  $\nu \in \mathfrak{X}_M$ . Así pues, todo lo que sigue es igualmente válido en el dominio de una carta. El signo de algunas funciones que aquí se van a establecer va a depender de la orientación elegida. El lector decidirá cuáles.

#### 3.1. SEGUNDA FORMA FUNDAMENTAL

##### 3.1.1. Aplicación de Gauss

El campo normal  $\nu$  se puede interpretar como una aplicación diferenciable  $\nu : M \rightarrow \mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$ , y así interpretada se denomina *aplicación de Gauss*.

##### 3.1.2. Operador de Weingarten

Es importante observar, que para cada  $p \in M$ , el vector  $\nu(p)$  es normal a  $T_pM$  y a  $T_p\mathbb{S}^2$ , por tanto, ambos planos vectoriales coinciden, y  $d\nu(p) : T_pM \rightarrow T_p\mathbb{S}^2 = T_pM$  resulta ser un endomorfismo. Se denomina operador de Weingarten en  $p$  al endomorfismo

$$\mathcal{L}_p = -d\nu(p) : T_pM \rightarrow T_pM$$

Concretando: si  $\xi \in T_pM$  y  $\alpha : I \rightarrow M$  es una curva por  $p$  en  $M$  con  $\alpha'(0) = \xi$ , se tiene:

$$\mathcal{L}_p(\xi) = -(\nu \circ \alpha)'(0)$$

en particular, si se ha fijado una carta  $(\mathcal{U}, \mathbf{c} = (u, v))$  de  $M$ , podemos escribir para cada  $p \in \mathcal{U}$

$$\mathcal{L}_p \left( \frac{\partial \varphi}{\partial u_i} \Big|_{\mathbf{c}(p)} \right) = - \frac{\partial (\nu \circ \varphi)}{\partial u_i} \Big|_{\mathbf{c}(p)} \quad (21)$$

##### 3.1.3. Curvatura normal de curvas en superficies orientadas

Sea  $\alpha : I \ni s \rightarrow \alpha(s) \in M$  una curva birregular parametrizada por la longitud de arco, sea  $\{T, N, B\}$  el triedro de Frenet de  $\alpha$  y sea  $\kappa(s)$  la curvatura de  $\alpha$  en  $s$ . Se llama *curvatura normal de  $\alpha$  en  $(M, \nu)$*  a la proyección del *vector de curvatura*  $\alpha''$  sobre la dirección normal, es decir:

$$\kappa_\nu := \langle \alpha'', \nu \circ \alpha \rangle : I \rightarrow \mathbb{R} ;$$

como la curvatura  $\kappa$  de  $\alpha$  verifica  $\alpha'' = T' = \kappa N$ , denotando por  $\vartheta(s) \in [0, \pi]$  el ángulo (no orientado) definido por  $N(s)$  y  $\nu(\alpha(s))$  se tiene:

$$\kappa_\nu(s) = \kappa(s) \langle N(s), \nu(\alpha(s)) \rangle = \kappa(s) \cos \vartheta(s), \quad \forall s \in I ;$$

obsérvese que, en los puntos  $s \in I$  en los que  $N(s) = \pm\nu(\alpha(s))$ , se verifica  $\kappa_\nu(s) = \pm\kappa(s)$ .

Por otra parte, como  $\langle T, \nu \circ \alpha \rangle = 0$ , derivando se tiene :

$$0 = \langle T', \nu \circ \alpha \rangle + \langle T, (\nu \circ \alpha)' \rangle ;$$

En particular, si  $\alpha(0) = p$  y  $T(0) \equiv \xi \in T_p M$ , se concluye que:

$$\kappa_\nu(0) = - \langle d\nu(p)(\xi), \xi \rangle = \langle \mathcal{L}_p(\xi), \xi \rangle .$$

Como consecuencia se obtiene el siguiente:

### 3.1.4. Teorema de Meusnier

a) *Todas las curvas birregulares en  $M$  que tienen en un punto  $p$  de su trayectoria la misma recta tangente tienen en dicho punto la misma curvatura normal.*

b) *Todas las curvas birregulares en  $M$  que tienen en un punto  $p$  de su trayectoria el mismo plano afín osculador (no tangente a  $M$  en  $p$ ) tienen en dicho punto la misma curvatura.*

Probemos el apartado b): Supóngase  $\alpha, \beta : I \rightarrow M$ , parametrizadas por el arco,  $\alpha(0) = p = \beta(0)$ , y sea  $\Pi$  el plano osculador común no tangente a  $M$  en  $p$ . Entonces  $\alpha'(0), \beta'(0) \in T_p M \cap \Pi = L$  que es una recta vectorial. Así necesariamente es  $\alpha'(0) = \pm\beta'(0)$ , ya que  $|\alpha'(0)| = |\beta'(0)| = 1$ . Podemos suponer que  $\alpha'(0) = \beta'(0)$  pues caso contrario sustituiríamos  $\beta(s)$  por  $\beta(-s)$ . Además  $\alpha''(0), \beta''(0) \in \Pi$  y son ortogonales a  $L$ , luego son necesariamente proporcionales:  $\beta''(0) = \lambda\alpha''(0)$  con  $\lambda \in \mathbb{R}$ . pero por a) se deduce que:

$$\kappa_\nu(0) = \langle \beta''(0), \nu(p) \rangle = \lambda \langle \alpha''(0), \nu(p) \rangle = \langle \alpha''(0), \nu(p) \rangle$$

Como  $\alpha$  tiene plano osculador en  $s = 0$ , se verifica  $\alpha''(0) \neq 0$  entonces, necesariamente es  $\langle \alpha''(0), \nu(p) \rangle \neq 0$ , pues si  $\langle \alpha''(0), \nu(p) \rangle = 0$ , entonces sería  $\Pi = \text{span}(\alpha'(0), \alpha''(0)) = T_p M$ . así se deduce que  $\lambda = 1$ , y  $\beta''(0) = \alpha''(0)$  por lo cual tienen la misma curvatura  $k = |\alpha''(0)| = |\beta''(0)|$

Dados  $p \in M$  y  $\xi \in T_p M$ , con  $|\xi| = 1$ , tendría sentido (por a)) definir la "curvatura normal de  $(M, \nu)$  según el vector unitario"  $\xi$  como el número real  $-\langle d\nu(p)(\xi), \xi \rangle$ . Ahora bien: dados  $p \in M$  y  $\xi \in T_p M$ , con  $\xi (\neq \vec{0}_p)$  arbitrario, se verifica

$$\frac{\langle \mathcal{L}_p(\lambda\xi), \lambda\xi \rangle}{\langle \lambda\xi, \lambda\xi \rangle} = \frac{\langle \mathcal{L}_p(\xi), \xi \rangle}{\langle \xi, \xi \rangle} , \quad \forall \lambda (\neq 0) \in \mathbb{R} ,$$

por lo que definimos la *curvatura normal de  $(M, \nu)$  en la dirección de  $\xi$*  como el número real

$$\kappa_\nu(\xi) := \frac{\langle \mathcal{L}_p(\xi), \xi \rangle}{\langle \xi, \xi \rangle} . \quad (22)$$

La terminología ”en la dirección de” es intencional, en el sentido de que este número real depende, no ya del vector tangente (no nulo) propiamente dicho, sino de su clase proyectiva, por lo que en algún caso utilizaremos el concepto de *curvatura normal de*  $(M, \nu)$  *en el punto*  $p$  para referirnos a la función

$$P(T_p M) \ni [\xi] \rightarrow \kappa_\nu(\xi) \in \mathbb{R} ,$$

donde  $P(T_p M)$  es el proyectivizado del espacio tangente.

### 3.1.5. Segunda Forma Fundamental

**Definición 3.1** *Dadas*  $M$  *superficie de*  $\mathbb{R}^3$  *y*  $\nu$  *orientación en*  $M$ , *existe una única forma bilineal sobre*  $M$  *(que denotamos por*  $\mathcal{H}$ *) de manera que, para cada*  $\mathcal{U}$  *abierto de*  $M$  *y*  $V, W \in \mathfrak{X}(\mathcal{U})$ , *se tiene*

$$\mathcal{H}(V, W)(p) := \langle \mathcal{L}_p V(p), W(p) \rangle \quad \forall p \in \mathcal{U}$$

*Se denomina a*  $\mathcal{H}$  *segunda forma fundamental de la superficie orientada*  $(M, \nu)$ .

Se verifica:

1. Si  $p \in M$  y  $\xi, \eta \in T_p M$  :  $\mathcal{H}(\xi, \eta) = \langle \mathcal{L}_p(\xi), \eta \rangle$
2. Si  $p \in M$  y  $\xi \in T_p M$  ( $\xi \neq \vec{0}_p$ ) :

$$\kappa_\nu(\xi) = \frac{\mathcal{H}(\xi, \xi)}{\mathcal{G}(\xi, \xi)} \quad (23)$$

### 3.1.6. Una interpretación geométrica de la Segunda Forma Fundamental.

Sea  $(M, \nu)$  una superficie orientada de  $\mathbb{R}^3$  y sea  $p$  un punto de  $M$ . Definimos la *aplicación altura*  $h_p : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  por la relación:

$$h_p(x) := \langle \vec{p}\vec{x}, \nu(p) \rangle , \quad \forall x \in \mathbb{R}^3 .$$

Así, los puntos  $x \in M$  para los que  $h_p(x) > 0$  estarán situados a un lado del plano afín tangente a  $M$  en  $p$  y los  $x$  para los que  $h_p(x) < 0$  al otro. Pues bien, vamos a ver que es precisamente la segunda forma fundamental  $\mathcal{H}_p$  en  $p$  la que nos proporciona (hasta el ”segundo orden”) este tipo de información sobre la función  $h_p$  en las proximidades de  $p$ . En efecto:

Sea  $\xi \in T_p M$ , con  $|\xi| = 1$ , y sea  $\alpha : I \rightarrow M$  una curva birregular parametrizada por la longitud de arco y tal que  $\alpha(0) = p$  y  $\alpha'(0) = \xi$ . Estudiemos el comportamiento, en torno al  $0 \in I$ , de la función  $h_p \circ \alpha : I \rightarrow \mathbb{R}$ . Se tiene:

$$\frac{d(h_p \circ \alpha)}{ds}(0) = \frac{d \langle \overrightarrow{p\alpha(s)}, \nu(p) \rangle}{ds}(0) = \langle \alpha'(0), \nu(p) \rangle = 0 ;$$

como  $(h_p \circ \alpha)(0) = 0$ , si por ejemplo fuera  $d^2(h_p \circ \alpha)/ds^2(0) \neq 0$ , entonces  $h_p \circ \alpha$  presentaría un extremo local estricto en  $0 \in I$ , lo que nos permitiría concluir que, para  $I$  pequeño,  $\alpha(I)$  estaría situada a un solo lado del plano afín tangente. Ahora bien, usando 3.1.3 y (23) se concluye que

$$\frac{d^2(h_p \circ \alpha)}{ds^2}(0) = \langle \alpha''(0), \nu(p) \rangle = \kappa_\nu(\xi) = \mathcal{H}(\xi, \xi) ,$$

lo que nos permite concluir que, efectivamente,  $\mathcal{H}_p$  controla (hasta el "segundo orden") el comportamiento de  $h_p$  en las proximidades de  $p$ .

De esta interpretación pueden sacarse interesantes propiedades geométricas sobre cómo es la superficie. Por ejemplo, si la segunda forma fundamental es definida, la superficie debe estar, en un entorno del punto en cuestión, a un solo lado del espacio afín tangente; y si es no degenerada pero no definida, entonces deben existir dos rectas en el espacio afín tangente que dividen a éste en cuatro sectores, estando la superficie por encima o por debajo de ellos alternativamente.

### 3.1.7. Expresión analítica local

Sea  $(M, \nu)$  una superficie orientada de  $\mathbb{R}^3$ . Presuponiendo que se ha fijado de antemano una carta  $(\mathcal{U}, \mathbf{c})$  de  $M$ , las componentes  $h_{ij}$  de la segunda forma fundamental  $\mathcal{H}$  se escriben:

$$h_{ij} \equiv \left\langle \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u_i \partial u_j}, \nu \right\rangle = \sum_{k=1}^3 \frac{\partial^2 x_k}{\partial u_i \partial u_j} \nu_k .$$

En efecto, se tiene que  $\langle \partial \varphi / \partial u_j, \nu \rangle = 0$ , en todo punto, y así

$$0 = \frac{\partial}{\partial u_i} \left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial u_j}, \nu \right\rangle = \left\langle \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u_i \partial u_j}, \nu \right\rangle + \left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial u_j}, \frac{\partial \nu}{\partial u_i} \right\rangle$$

por otra parte, teniendo en cuenta (21) se ve que  $\mathcal{L}(\partial \varphi / \partial u_i) = -\partial \nu / \partial u_i$  así que

$$h_{ij} \equiv \mathcal{H} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial u_i}, \frac{\partial \varphi}{\partial u_j} \right) = \left\langle \mathcal{L} \frac{\partial \varphi}{\partial u_i}, \frac{\partial \varphi}{\partial u_j} \right\rangle = - \left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial u_j}, \frac{\partial \nu}{\partial u_i} \right\rangle = \left\langle \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u_i \partial u_j}, \nu \right\rangle$$

Introducimos los siguientes nombres para los coeficientes  $h_{ij}$  (que son estándar en la bibliografía)

$$e \equiv h_{11} = \langle \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^2}, \nu \rangle, \quad f \equiv h_{12} = \langle \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u \partial v}, \nu \rangle, \quad g \equiv h_{22} = \langle \frac{\partial^2 \varphi}{\partial v^2}, \nu \rangle,$$

y se denominan *coeficientes de la segunda forma fundamental de  $(M, \nu)$* .

Se ve que la segunda forma fundamental es simétrica, es decir: para todo  $\mathcal{U}$  abierto de  $M$  y todo  $V, W \in \mathfrak{X}(\mathcal{U})$ ,  $\mathcal{H}(V, W) = \mathcal{H}(W, V)$ .

Si  $V = \sum_{i=1}^2 V_i^\varphi \frac{\partial}{\partial u_i}$ ,  $W = \sum_{i=1}^2 W_i^\varphi \frac{\partial}{\partial u_i} \in \mathfrak{X}(\mathcal{U})$ , entonces se tiene:

$$\mathcal{H}(V, W) = \sum_{i,j=1}^2 h_{ij} V_i^\varphi W_j^\varphi = (V_1^\varphi, V_2^\varphi) \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W_1^\varphi \\ W_2^\varphi \end{pmatrix};$$

en particular,

$$\mathcal{H}(V, V) = e(V_1^\varphi)^2 + 2fV_1^\varphi V_2^\varphi + g(V_2^\varphi)^2.$$

## 3.2. CURVATURAS

### 3.2.1. Aplicaciones autoadjuntas

Sea  $\mathbb{R}$  un espacio vectorial euclídeo con producto escalar  $\langle, \rangle$  y sea  $L : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E}$  una aplicación lineal. Se dice que  $L$  es *autoadjunta* si  $\langle Lv, w \rangle = \langle v, Lw \rangle$ , para todo  $v, w \in \mathbb{E}$ . La forma bilineal  $H : \mathbb{E} \times \mathbb{E} \ni (v, w) \rightarrow \langle Lv, w \rangle \in \mathbb{R}$  se denomina *forma bilineal asociada a  $L$* .  $H$  es simétrica si y sólo si  $L$  es autoadjunta.

El siguiente teorema contiene resultados suficientemente conocidos del álgebra lineal elemental:

**Proposición 3.1** *Sea  $L : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E}$  una aplicación lineal en un espacio vectorial euclídeo  $\mathbb{E}$  y sea  $H$  su forma bilineal asociada.*

- $L$  es autoadjunta si y sólo si tiene, respecto de alguna (o toda) base ortonormal de  $\mathbb{E}$ , una matriz representativa simétrica.*
- $L$  es autoadjunta si y sólo si, respecto de alguna (o toda) base de  $\mathbb{E}$ , las matrices  $(l_{ij})$ ,  $(g_{ij})$  y  $(h_{ij})$ , representativas de  $L$ ,  $\langle, \rangle$  y  $H$  en dicha base, respectivamente, verifican  $(l_{ij}) = (g_{ij})^{-1}(h_{ij})$ . En particular, si la base es ortonormal ( $g_{ij} = \delta_{ij}$ ), las matrices de  $L$  y de su forma bilineal asociada  $H$  coinciden.*

c) Si  $L$  es autoadjunta, existe una base ortonormal formada por autovectores de  $L$ . Esto significa que, respecto de dicha base, la representación matricial de  $L$  (y de  $H$ ) es una matriz diagonal:

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Por otra parte, si  $H : \mathbb{E} \times \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{R}$  es una forma bilineal simétrica, existe una única aplicación lineal autoadjunta  $L : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E}$  que tiene a  $H$  por forma bilineal asociada.

### 3.2.2. Expresión analítica local del Operador de Weingarten

Sea  $(M, \nu)$  una superficie orientada de  $\mathbb{R}^3$ . La segunda forma fundamental define, en cada espacio tangente  $T_p M$ , una forma bilineal simétrica; la correspondiente aplicación autoadjunta es la aplicación de Weingarten en  $p$ , ya que

$$\mathcal{H}(\xi, \eta) = \langle \mathcal{L}_p \xi, \eta \rangle, \quad \forall \xi, \eta \in T_p M$$

El operador de Weingarten  $\mathcal{L}$  puede también entenderse como un endomorfismo  $\mathfrak{F}(M)$ -lineal  $\mathcal{L} : \mathfrak{X}(M) \ni V \rightarrow -D_V \nu \in \mathfrak{X}(M)$ , definiendo:

$$(\mathcal{L}V)(p) := \mathcal{L}_p(V(p)) \quad , \quad \forall p \in M .$$

Si  $(\mathcal{U}, \mathbf{c} = (u, v))$  es una carta de  $M$ , el operador de Weingarten viene determinado, en la base  $\{\partial\varphi/\partial u, \partial\varphi/\partial v\}$  del módulo  $\mathfrak{X}(\mathcal{U})$ , por funciones diferenciables  $l_{ij} \in \mathfrak{F}(\mathcal{U})$  ( $i, j = 1, 2$ ), llamadas *coeficientes del operador de Weingarten*, tales que

$$\begin{cases} \mathcal{L}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right) = l_{11}\frac{\partial\varphi}{\partial u} + l_{21}\frac{\partial\varphi}{\partial v} \\ \mathcal{L}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right) = l_{12}\frac{\partial\varphi}{\partial u} + l_{22}\frac{\partial\varphi}{\partial v} \end{cases}$$

Es fácil ver que los coeficientes  $l_{ij}$  se obtienen a partir de los coeficientes  $h_{ij}$  de la segunda forma fundamental; en efecto, usando la Propos. 3.1.b queda la siguiente igualdad entre matrices de funciones:

$$(l_{ij}) = (g_{ij})^{-1}(h_{ij}) ,$$

o de forma más explícita:

$$l_{11} = \frac{eG - fF}{EG - F^2}, \quad l_{12} = \frac{fG - gF}{EG - F^2}, \quad l_{21} = \frac{fE - eF}{EG - F^2}, \quad l_{22} = \frac{gE - fF}{EG - F^2} \quad (24)$$

### 3.2.3. Curvaturas de superficies orientadas

Fijado un punto  $p$  de una superficie orientada  $(M, \nu)$  de  $\mathbb{R}^3$ , los invariantes geométricos (traza, determinante, autovalores, etc.) de la aplicación de Weingarten  $\mathcal{L}_p$  determinan invariantes geométricos de la superficie, que a su vez nos permiten determinar el aspecto geométrico de ésta en las proximidades del punto  $p$ .

**Definición 3.2** *Fijado un punto  $p \in M$ , se llaman:*

- a) Curvaturas principales  $k_1(p), k_2(p)$  de  $(M, \nu)$  en  $p$  a los autovalores de  $\mathcal{L}_p$ .
- b) Curvatura de Gauss  $K(p)$  de  $(M, \nu)$  en  $p$  al determinante de  $\mathcal{L}_p$ .
- c) Curvatura Media  $H(p)$  de  $(M, \nu)$  en  $p$  a  $1/2$  de la traza de  $\mathcal{L}_p$ .

Obsérvese que la curvatura de Gauss no depende de la orientación (local o global) de la superficie, ya que  $\det(\mathcal{L}_p) = \det(-\mathcal{L}_p)$ .

Usando (24) se tiene por tanto la siguiente fórmula local, que pone de manifiesto que la curvatura de Gauss  $K : M \rightarrow \mathbb{R}$  de una superficie de  $\mathbb{R}^3$  es una función diferenciable:

$$K := \det \mathcal{L} = \frac{eg - f^2}{EG - F^2}$$

### 3.2.4. Clasificación de los puntos de una superficie

Sea  $p$  un punto de una superficie orientada  $(M, \nu)$  de  $\mathbb{R}^3$ . Aplicando la Propos. 3.1.c, se concluye que existe una base ortonormal positiva  $(e_1, e_2)$  de  $T_p M$  formada por autovectores de  $\mathcal{L}_p$ . Según las definiciones del apartado anterior, se tiene:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_p e_1 &= k_1(p) e_1, & \mathcal{L}_p e_2 &= k_2(p) e_2, \\ K(p) &= k_1(p)k_2(p), & H(p) &= \frac{k_1(p) + k_2(p)}{2}. \end{aligned}$$

Se llama a  $(e_1, e_2)$  *base adaptada a  $(M, \nu)$  en  $p$* . En estas condiciones:

**Definición 3.3** *Se dice que  $p$  es:*

- a) hiperbólico si  $K(p) < 0$
- b) parabólico si  $K(p) = 0$  y  $k_1(p)$  y  $k_2(p)$  no son ambas nulas
- c) elíptico si  $K(p) > 0$
- d) umbílico si  $k_1(p) = k_2(p)$
- e) plano si  $k_1(p) = k_2(p) = 0$ .

### 3.2.5. Direcciones principales

Si  $p \in M$ , se dice que un vector tangente  $\xi \in T_p M$  no nulo define una *dirección principal* si  $\xi$  es autovector de  $\mathcal{L}_p$ . Así,  $p$  es umbílico si y sólo si todas las direcciones en  $T_p M$  son principales. Por otra parte, si  $p$  no es umbílico entonces  $T_p M$  posee exactamente dos direcciones principales distintas, que son las definidas por los vectores  $e_1$  y  $e_2$  de la base adaptada.

### 3.2.6. Curvaturas principales e Indicatriz de Dupin.

Sea  $(e_1, e_2)$  una base adaptada a  $(M, \nu)$  en  $p$  y sean  $k_1(p)$  y  $k_2(p)$  las curvaturas principales:  $\mathcal{L}_p(e_i) = k_i(p)e_i$  (elegimos la notación de forma que se tenga:  $k_1(p) \geq k_2(p)$ ). Un vector unitario genérico  $\xi \in T_p M$  se escribe:  $\xi = (\cos \theta)e_1 + (\sin \theta)e_2$ . De esta forma obtenemos un representante cuasi-canónico de cada dirección; el otro representante sería  $-\xi$ , obtenido eligiendo el ángulo  $\theta + \pi$ . La curvatura normal de  $(M, \nu)$  en la dirección de  $\xi$  es, por :

$$\kappa_\nu(\xi) = \mathcal{H}(\xi, \xi) = \langle \mathcal{L}_p \xi, \xi \rangle = k_1(p) \cos^2 \theta + k_2(p) \sin^2 \theta.$$

La fórmula que acabamos de demostrar (llamada *fórmula de Euler*) prueba que la curvatura normal de  $(M, \nu)$  en  $p$  es una combinación afín y "convexa" (ya que  $\cos^2 \theta \geq 0$ ,  $\sin^2 \theta \geq 0$  y su suma es uno) de  $k_1(p)$  y  $k_2(p)$ . Al variar  $\theta$  entre 0 y  $2\pi$ , obtenemos todos los valores del intervalo  $[k_2(p), k_1(p)]$ , en particular  $k_1(p)$  para  $\theta = 0$  (y  $\pi$ ) y  $k_2(p)$  para  $\theta = \pi/2$  (y  $3\pi/2$ ), que son los ángulos correspondientes a las direcciones de  $\xi_1$  y  $\xi_2$ . De esta forma concluimos que las curvaturas principales  $k_1(p)$  y  $k_2(p)$  son los valores máximo y mínimo, respectivamente, de la curvatura normal de  $(M, \nu)$  en  $p$ . El producto  $k_1(p)k_2(p) = K(p)$  es (salvo quizás el signo) el cuadrado de la media geométrica de los dos valores extremos, mientras que la curvatura media  $H(p)$  es la media aritmética de estos extremos; es decir, otra forma de interpretar la curvatura de Gauss y la curvatura media es como las medias que razonablemente se pueden hacer de los valores extremos de la curvatura normal.

El conjunto

$$\mathcal{D}_p := \{ \xi \in T_p M \mid \mathcal{H}(\xi, \xi) = \pm 1 \}$$

se denomina *indicatriz de Dupin de  $(M, \nu)$  en  $p$* . Es evidente que, si  $Xe_1 + Ye_2 \in \mathcal{D}_p$ , se verifica:  $k_1(p)X^2 + k_2(p)Y^2 = \pm 1$ . Por otra parte, se deduce de (23) que, si  $\xi \in \mathcal{D}_p$ , se verifica:  $\kappa_\nu(\xi) = \pm 1 / \langle \xi, \xi \rangle$ .

Obsérvese que, para el punto  $p$ , se tienen las siguientes equivalencias:

- a)  $p$  es hiperbólico si y sólo si  $\mathcal{D}_p$  consiste en un par de hipérbolas cuyas asíntotas tienen direcciones definidas por la ecuación  $k_1(p)X^2 + k_2(p)Y^2 = 0$ .
- b)  $p$  es parabólico si y sólo si  $\mathcal{D}_p$  consiste en un par de rectas distintas.

- c)  $p$  es elíptico si y sólo si  $\mathcal{D}_p$  es una elipse.
- d)  $p$  es umbílico (no plano) si y sólo si  $\mathcal{D}_p$  es una circunferencia.
- e)  $p$  es plano si y sólo si  $\mathcal{D}_p$  es vacío.

### 3.2.7. Direcciones asintóticas

Si  $p \in M$ , se dice que un vector tangente  $\xi \in T_p M$  no nulo define una *dirección asintótica* si  $\langle \mathcal{L}_p \xi, \xi \rangle = 0$ , lo que equivale a decir que se anula la curvatura normal  $\kappa_\nu(\xi)$  de  $(M, \nu)$  en la dirección de  $\xi$ . Entonces se tiene:

- a)  $p$  es elíptico si y sólo si  $T_p M$  no posee direcciones asintóticas.
- b)  $p$  es hiperbólico si y sólo si  $T_p M$  posee exactamente dos direcciones asintóticas distintas.
- c)  $p$  es parabólico si y sólo si  $T_p M$  posee una única dirección asintótica.

### 3.2.8. Líneas de curvatura y líneas asintóticas

Sea  $M$  una superficie de  $\mathbb{E}^3$ . Una curva regular  $\alpha : I \rightarrow M$  se dice *línea de curvatura de  $M$*  (respectivamente, *línea asintótica de  $M$* ) si, para cada  $t \in I$ , el vector  $\alpha'(t)$  define una dirección principal (respectivamente, una dirección asintótica) de  $T_p M$ . Es importante observar que tanto el carácter de línea de curvatura como el de línea asintótica se preservan frente a cambios regulares de parámetro.

Una consecuencia inmediata de la definición algebraica que hemos dado de direcciones principales es que una curva regular  $\alpha : I \rightarrow M$  es línea de curvatura si y sólo si, para cualquier elección (no necesariamente global) de normal unitaria  $\nu$ , se verifica:

$$\frac{d(\nu \circ \alpha)}{dt} = -k \frac{d\alpha}{dt} ,$$

donde la función  $k : I \rightarrow \mathbb{R}$  da lugar, en cada  $t \in I$ , a un autovalor (curvatura principal) de  $\mathcal{L}_{\alpha(t)}$ . Este resultado se conoce como *teorema de Olinde-Rodrigues*.

Similarmente se prueba que una curva regular  $\alpha : I \rightarrow M$  es línea asintótica si y sólo si, para cualquier elección (no necesariamente global) de normal unitaria  $\nu$ , se verifica:

$$\left\langle \frac{d(\nu \circ \alpha)}{dt}, \frac{d\alpha}{dt} \right\rangle = 0 .$$

### 3.2.9. Símbolos de Christoffel

Fijada una carta  $(\mathcal{U}, \mathbf{c} = (u, v))$ , es claro que el conjunto de campos locales  $(\frac{\partial \varphi}{\partial u}, \frac{\partial \varphi}{\partial v}, \nu)$ , donde  $\nu$  es la normal unitaria inducida por la carta, constituye una base del módulo  $\mathfrak{X}_{\mathcal{U}}$ . Las derivadas (??) con respecto a  $u$  y  $v$  de los

campos de esta base local se podrán a su vez escribir como combinación lineal de estos mismos campos. Como

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial u_i \partial u_j} - \left\langle \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u_i \partial u_j}, \nu \right\rangle \nu = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u_i \partial u_j} - h_{ij} \nu$$

es un campo tangente, se podrá escribir (punto a punto) como combinación lineal de  $\partial\varphi/\partial u_k$ , es decir

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial u_i \partial u_j} = \sum_{k=1}^2 \Gamma_{ij}^k \frac{\partial \varphi}{\partial u_k} + h_{ij} \nu \quad (i, j = 1, 2), \quad (25)$$

Las funciones  $\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ij}^k(u, v)$  se llaman símbolos de Cristoffel.

Por otra parte el operador de Weingarten da la identidad:

$$\frac{\partial \nu}{\partial u_i} = - \sum_{j=1}^2 l_{ji} \frac{\partial \varphi}{\partial u_j} \quad (i = 1, 2);$$

se tiene entonces:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^2} = \Gamma_{11}^1 \frac{\partial}{\partial u} + \Gamma_{11}^2 \frac{\partial}{\partial v} + e\nu \\ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u \partial v} = \Gamma_{12}^1 \frac{\partial}{\partial u} + \Gamma_{12}^2 \frac{\partial}{\partial v} + f\nu \\ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial v^2} = \Gamma_{22}^1 \frac{\partial}{\partial u} + \Gamma_{22}^2 \frac{\partial}{\partial v} + g\nu \\ \frac{\partial \nu}{\partial u} = -l_{11} \frac{\partial}{\partial u} - l_{21} \frac{\partial}{\partial v} \\ \frac{\partial \nu}{\partial v} = -l_{12} \frac{\partial}{\partial u} - l_{22} \frac{\partial}{\partial v} \end{array} \right. .$$

Es importante observar ahora que todos estos coeficientes se obtienen a partir de los de las dos formas fundamentales  $(g_{ij})$  y  $(h_{ij})$

### 3.2.10. Curvatura geodésica:

Sea  $\alpha : I \rightarrow M$  una curva diferenciable sobre la superficie  $M$  orientada por el vector unitario normal  $\nu$ , y sea Supongase que  $\alpha$  está parametrizada por el arco, es decir  $|\alpha'| = 1$ . Entonces

$$\alpha'' - \langle \alpha'', \nu \rangle \nu$$

es para cada  $t$  un vector tangente a  $M$ , y ortogonal a  $\nu$  y  $\alpha''$ , por tanto podemos escribir

$$\alpha'' = \kappa_g (\nu \times \alpha') + \kappa_\nu \nu$$

se denomina entonces a  $\kappa_g$  curvatura geodésica de  $\alpha$  y representa (salvo el signo) la longitud de la proyección del vector de curvatura  $\alpha''$  sobre el plano tangente. Si denotamos  $\kappa_\nu(t)$  es la curvatura normal en  $\alpha'(t)$ , se tiene:de forma que si  $\kappa = |\alpha''|$  es la curvatura de se verifica la identidad:

$$\kappa^2 = \kappa_g^2 + \kappa_\nu^2$$

### 3.2.11. Geodésicas

Una curva  $\gamma : I \rightarrow M$  se llama *geodésica* si  $\gamma'' = \kappa_\nu \nu$ , es decir  $\gamma''$  es ortogonal a  $M$  en todos los puntos  $\gamma(t)$ .

**Proposición 3.2** *Si  $\gamma : I \rightarrow M$  es geodésica, entonces  $\langle \gamma', \gamma'' \rangle = 0$ . En particular  $|\gamma'|$  es constante y por tanto, está parametrizada con parámetro proporcional a la longitud de arco.*

En particular, una geodésica tiene curvatura geodésica nula.

Sea  $(\mathcal{U}, \mathbf{c} = (u, v))$  una carta de  $M$  y supóngase  $\gamma : I \rightarrow \mathcal{U}$ , con  $(\mathbf{c} \circ \gamma)(t) = (u(t), v(t)) = (u_1(t), u_2(t))$ . Expresemos analíticamente la condición de que la proyección ortogonal de  $\gamma''(t)$  sobre  $T_{\gamma(t)}M$  sea nula. Tenemos  $\gamma(t) = \varphi(u(t), v(t))$  y así

$$\frac{d\gamma}{dt} = \sum_{i=1}^2 \frac{\partial \varphi}{\partial u_i} \frac{du_i}{dt}$$

Derivando y aplicando otra vez la regla de la cadena queda:

$$\begin{aligned} \frac{d^2\gamma}{dt^2} &= \sum_{i=1}^2 \left\{ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial u_i} \right) \frac{du_i}{dt} + \frac{\partial \varphi}{\partial u_i} \frac{d^2u_i}{dt^2} \right\} \\ &= \sum_{i,j=1}^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u_i \partial u_j} \frac{du_i}{dt} \frac{du_j}{dt} + \sum_{k=1}^2 \frac{\partial \varphi}{\partial u_k} \frac{d^2u_k}{dt^2} \end{aligned}$$

Usando ahora la igualdad 25 se tiene:

$$\frac{d^2\gamma}{dt^2} = \sum_{k=1}^2 \left\{ \sum_{i,j=1}^2 \Gamma_{ij}^k \frac{du_i}{dt} \frac{du_j}{dt} + \frac{d^2u_k}{dt^2} \right\} \frac{\partial \varphi}{\partial u_k} + \left\{ \sum_{i,j=1}^2 h_{ij} \frac{du_i}{dt} \frac{du_j}{dt} \right\} \nu$$

Como el primer sumatorio es la parte tangencial de  $\gamma''$ , se tiene el siguiente resultado:

**Proposición 3.3** *Sea  $(\mathcal{U}, \mathbf{c} = (u, v))$  una carta de  $M$  y sea  $\gamma : I \rightarrow \mathcal{U}$  una curva, con  $(\mathbf{c} \circ \gamma)(t) = (u(t), v(t))$ . Entonces  $\gamma$  es una geodésica si y sólo si las funciones  $u_1(t) = u(t)$ ,  $u_2(t) = v(t)$  verifican el sistema de ecuaciones diferenciales de segundo orden:*

$$\frac{d^2u_k}{dt^2} + \sum_{i,j=1}^2 \frac{du_i}{dt} \frac{du_j}{dt} \Gamma_{ij}^k(u, v) = 0 \quad (k = 1, 2)$$

El siguiente resultado se obtiene de aplicar el epígrafe 2.5.6 de existencia y unicidad de soluciones para ecuaciones diferenciales al siguiente sistema particular

$$\begin{cases} \frac{du_k}{dt} = \xi_k \quad (i = 1, 2) \\ \frac{d\xi_k}{dt} = - \sum_{i,j=1}^2 \xi_i \xi_j \Gamma_{ij}^k(u(t), v(t)) \end{cases} \quad (k = 1, 2) \quad (26)$$

**Proposición 3.4** *Sea  $M$  superficie. Entonces se tiene:*

1. *Para cada  $p \in M$  y cada  $\xi \in T_pM$ , existe una geodésica  $\gamma : I \rightarrow M$  por  $\xi$ .*
2. *Dos geodésicas por  $\xi \in T_pM$  coinciden en la intersección de sus dominios.*
3. *Por cada  $\xi \in T_pM$  existe una única geodésica maximal, que denotamos por  $\gamma_\xi : I_\xi \rightarrow M$ .*
4. *Fijados  $\xi \in T_pM$  y  $s \in \mathbb{R}$ , se verifica:*

$$\begin{cases} t \in I_{s\xi} \iff st \in I_\xi & y \\ \gamma_{s\xi}(t) = \gamma_\xi(st) \end{cases} \quad (27)$$

La última afirmación es una consecuencia del particular aspecto de las ecuaciones (26)

### 3.3. Ejercicios propuestos

1. Considérese la superficie parametrizada.

$$\varphi(u, v) = \left( u - \frac{u^3}{3} + uv^2, v - \frac{v^3}{3} + vu^2, u^2 - v^2 \right)$$

- a) Determinar los coeficientes de la primera y segunda formas fundamentales. b) Determinar las curvaturas principales. c) Demostrar que las curvas coordenadas ( $u = cte$ , ó  $v = cte$ ) son líneas de curvatura. d) Probar que las curvas  $u + v = cte$ , o también  $u - v = cte$ , son líneas asintóticas.
2. Sea  $M$  una superficie de revolución obtenida al hacer girar una curva regular simple

$$\alpha(u) = (\rho(u), 0, h(u)) \quad a < u < b$$

en el plano  $XZ$ , en torno al eje  $Z$ . Se supone  $\rho(u) > 0$  para  $a < u < b$ .

- a) Probar que  $\varphi(u, v) = (\rho(u) \cos v, \rho(u) \sin v, h(u))$   $a < u < b$ ,  $-\pi < v < \pi$  define una parametrización local de  $M$ .
- b) Determinar en la parametrización anterior, los coeficientes de la primera forma fundamental.
- c) Determinar la segunda forma fundamental.
- d) Caracterizar los puntos parabólicos, y planos.
- e) Probar que los meridianos ( $u = t, v = cte$ ) y los paralelos ( $u = cte, v = t$ ) son líneas de curvatura.
- f) Supóngase  $(h')^2 + (\rho')^2 = 1$ . Probar que la curvatura de Gauss  $K$  de  $M$  es  $K = \rho''/\rho$ .
- g) Probar que los meridianos ( $u = t, v = cte$ ) son geodésicas.
- h) Probar que un paralelo ( $u = u_0, v = t$ ) es geodésica, si y solo si  $\rho'(u_0) = 0$
3. Determinar en el origen, las direcciones principales y asintóticas de la superficie  $M$  definida por  $z = x^2 - y^2$  y demostrar que todos sus puntos son hiperbólicos.
4. Probar que el origen es un punto umbílico para la superficie definida por  $2z = x^2 + y^2$ . Probar que la curvatura de Gauss de  $M$  verifica:

$$K(p) > 0 \quad \forall p \in M, \text{ y } \inf\{K(p) : p \in M\} = 0$$

5. Se considera el cilindro  $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1\}$

- a) Probar que las curvas  $x = \cos t$ ,  $y = \sin t$ ,  $z = at$ , con  $a \in \mathbb{R}$  son geodésicas de  $M$
- b) Encontrar todas las geodésicas de  $M$ .