Espacio de Möbius: Curvas en el plano.

Javier Lafuente

2001

Índice

1. m-Espacios de Möbius

1.1. Complección esférica de un espacio vectorial conforme .

Una forma cuadrática afín q en el espacio afín $V = \{1\} \times V$ sobre el espacio vectorial $V = \{0\} \times V$ viene determinada por la restricción de una forma cuadrática $\hat{q}$ sobre el espacio vectorial $\hat{V} = \mathbb{R} \times V$, es decir:

$$q(x) = q_2(x) + q_1(x) + q_0$$

siendo q_2 forma cuadrática en V , $q_1 \in V^*$, $q_0 \in \mathbb{R}$. El espacio $QA(V)$ de las formas cuadráticas afines es un espacio vectorial. Si $q \in QA(V)$ la imagen de q es

$$q^{-1}(0) = \{x \in V : q(x) = 0\}$$

y determina una cuádrica afín en V.

Supongamos dado en V un producto escalar euclideo con norma $\|\|^2$. Una forma cuadrática afín $q \in QA(V)$ se llama *esférica*, si $q_2 = x_0 \|\|^2$ para algún $x_0 \in \mathbb{R}$ El espacio de las formas cuadráticas esféricas

$$\hat{V} = \left\{q \in QA(V) : q_2 = x_0 \|\|^2 \text{ para algún } x_0 \in \mathbb{R}.\right\}$$

solo depende de la estructura lineal conforme definida por $\|\|^2$ en V y constituye un subespacio del espacio vectorial $QA(V)$ de dimensión $m+2$. El espacio proyectivo $P\left(\hat{V}\right)$se denomina *espacio de* $(m-1)$-*esferas generalizadas.* Veamos porqué este nombre:

La expresión de una $q \in \hat{V}$ en las coordenadas $(X_1, \ldots, X_m)$ en V respecto a una base ortonormal $(e_1, \ldots, e_m)$ es de la forma

$$q = x_0 \sum_1^m X_i^2 - \sum_1^m 2x_i X_i - 2x_{m+1}$$

Si $x_0 = 0$, la ecuación de la imagen de q se escribe:

$$\sum_1^m 2x_i X_i + 2x_{m+1} = 0$$

que representa un plano, el conjunto vacio (cuando $x_i = 0$, $i = 1, \ldots, m$, $x_{m+1} \neq 0$) o el total (si todos los $x_i = 0$).

Si $x_0 \neq 0$ la ecuación de la imagen de q se escribe:

$$\sum_1^m \left(X_i - \frac{x_i}{x_0}\right)^2 - \left[2\frac{x_{m+1}}{x_0} + \sum_1^m \left(\frac{x_i}{x_0}\right)^2\right] = 0$$

que representa en general una $(m-1)$-esfera con centro $(x_1/x_0, \ldots, x_m/x_0)$ cuyo radio al cuadrado vale

$$R^2 = 2\frac{x_{m+1}}{x_0} + \sum_1^m \left(\frac{x_i}{x_0}\right)^2$$

Así pues en nuestro espacio $P(\hat{V})$ de $(m-1)$-esferas generalizadas, se incluyen las esferas de radio imaginario, o real, y en particular las de radio nulo, que quedan identificadas con su centro.

En las coordenadas homogeneas $[x_0, \ldots, x_{m+1}]$ del espacio de esferas $\hat{V}$, la familia $\overline{V}$ de esferas de radio nulo viene descrita por la ecuación:

$$2x_0x_{m+1} + \sum_1^m x_i^2 = 0$$

y constituye una cuádrica de $P(\hat{V})$, que es ella misma una esfera m-dimensional. Se denomina a $\overline{V}$ complección esférica del espacio afín conforme V.

Un expresión libre de coordenadas de la forma cuadrática

$$\hat{\rho} = 2x_0x_{m+1} + \sum_1^m x_i^2 \tag{1}$$

viene dada por:

$$\hat{\rho}(q) = \|q_1\|^2 + 2x_0q_0$$

donde se entiende que $\|q_1\|$ es la norma del único vector v_1 tal que $\langle v_1, . \rangle = q_1$.

Es notorio que si sustituimos la métrica $\langle ., . \rangle$ por $e^{2r}\langle ., . \rangle$ y $q = x_0 \|\|^2 + \langle v_1, . \rangle + q_0 = (x_0 e^{-2r})\, e^{2r} \|\|^2 + e^{2r}\langle e^{-2r}v_1, . \rangle + q_0$ obtenemos como forma cuadrática asociada $\breve{\rho}$:

$$\breve{\rho}(q) = e^{2r}\left\|e^{-2r}v_1\right\|^2 + 2x_0e^{-2r}q_0 = e^{-2r}\hat{\rho}(q)$$

que define la misma cuádrica que $\hat{\rho}$

Cada *esfera* $[x_0, \dots, x_{m+1}] \in \overline{V}$, cuando $x_0 \neq 0$, es una $(m-1)$-esfera de radio nulo que identificamos con su centro $(X_1, \dots, X_m)$, es decir

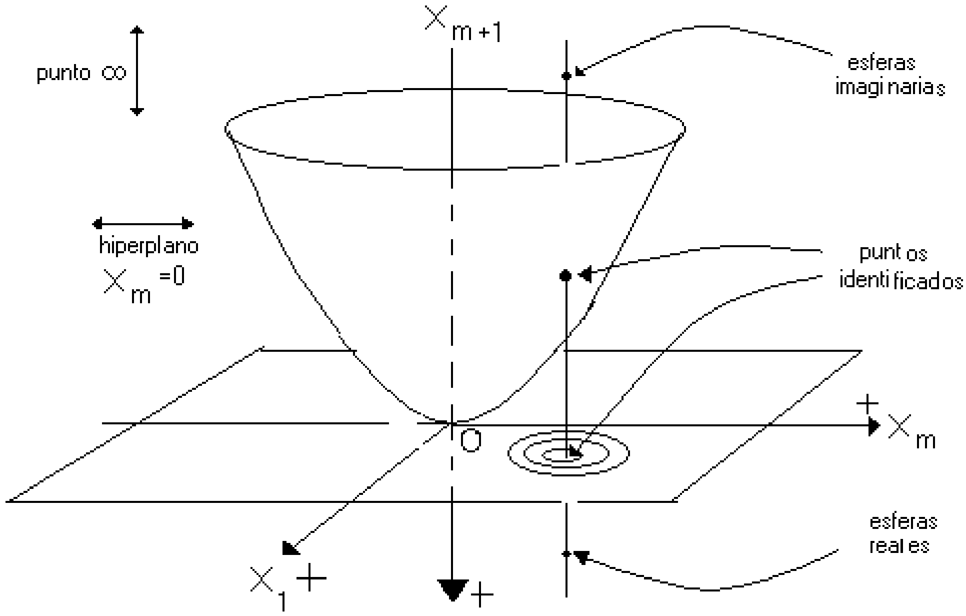
$$[x_0, \dots, x_{m+1}] \to (X_1, \dots, X_m) = \left(\frac{x_1}{x_0}, \dots, \frac{x_m}{x_0}\right) \in V \tag{2}$$

y hay una inclusión natural $V \hookrightarrow \overline{V}$. Solo el punto de $\overline{V}$ con coordenadas homogeneas $[0, 0, \dots, 1]$ no representa un punto de V, y se denomina punto del infinito ∞.

Si llamamos $X_{m+1} = x_{m+1}/x_0$, entonces $(X_1, , \dots, X_m, X_{m+1})$ constituyen un sistema de coordenadas cartesianas en el espacio afín $P(\hat{V}) - \{x_0 = 0\}$ constituido por las esferas generalizadas que *no son hiperplanos,* y en donde las de radio cero están en el *paraboloide* dado por la condición:

$$2X_{m+1} + \sum_1^m X_i^2 = 0$$

La ventaja de esta representación afín, es que podemos ver cada cada punto de coordenadas cartesianas $(X_1, \dots, X_m, X_{m+1})$ como una $(m-1)$-esfera centrada en $(X_1, \dots, X_m) \in V$ y radio R con $R^2 = 2X_0 + \sum_1^m X_i^2$. Las *direcciones* de este espacio afín representan hiperplanos, y justo la dirección *vertical* del eje X_{m+1} representa el punto $\infty \in \overline{V}$.



1.1.1. Estructura conforme de la Compleción Esférica.

Considérese ahora el espacio vectorial de Lorentz $(\hat{V}, \hat{\rho})$ dotado ya del sistema de coordenadas $(x_0, \ldots, x_{m+1})$, y considerese el *cono de luz*

$$\mathcal{C} = \left\{ (x_0, \ldots, x_{m+1}) : 2x_0 x_{m+1} + \sum_1^m x_i^2 = 0 \right\}$$

Haciendo el cambio de coordenadas

$$x_0 = \frac{1}{2}\left(\tilde{x}_0 + \tilde{x}_{m+1}\right), \, x_{m+1} = \tilde{x}_0 - \tilde{x}_{m+1} \tag{3}$$

queda

$$\hat{\rho} = \tilde{x}_0^2 + \sum_1^m x_i^2 - \tilde{x}_{m+1}^2$$

siendo

$$\tilde{x}_0 = x_0 + \frac{1}{2} x_{m+1}, \, \tilde{x}_{m+1} = x_0 - \frac{1}{2} x_{m+1} \tag{4}$$

El hiperplano $\Pi : (\tilde{x}_{m+1} = 1)$ es espacial, y hereda una estructura euclidea conforme lineal de $\rho = [\hat{\rho}]$, en la cual $(\tilde{x}_0, x_1, \ldots, x_m)$ constituye un sistema de coordenadas rectangulares de Π, y $\overline{V}$ se identifica con la m-esfera $\mathcal{S} = \mathcal{C} \cap \Pi$ que tiene en estas coordenadas por ecuación:

$$\mathcal{S} : \begin{cases} \tilde{x}_0^2 + \sum x_i^2 = 1 \\ \tilde{x}_{m+1} = 1 \end{cases}$$

y que hereda de Π su estructura conforme.

No olvidemos que cada punto $(\tilde{x}_0, x_1, \ldots, x_m) \in \mathcal{S}$ (con $x_0 = \tilde{x}_0 + \tilde{x}_{m+1} = \tilde{x}_0 + 1 \neq 0$) representa una esfera de radio nulo (punto de V) con centro $(X_1, \ldots X_m)$ (ver (2)) de donde (usando (3)) se obtiene:

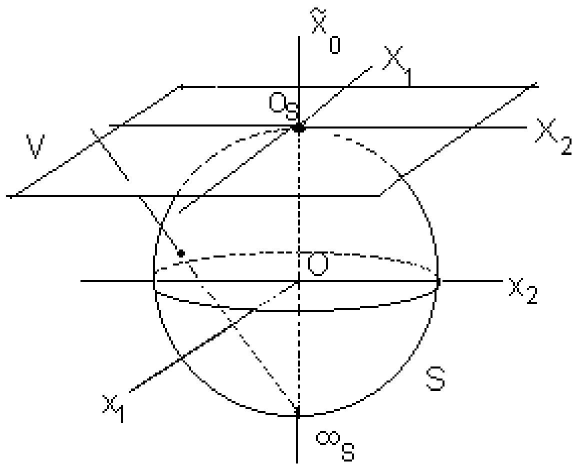
$$X_i = \frac{x_i}{x_0} = \frac{2x_i}{\tilde{x}_0 + \tilde{x}_{m+1}}, \, i = 1, \ldots, m$$

y como en $\mathcal{S}$ es $\tilde{x}_{m+1} = 1$, queda:

$$X_i = \frac{2x_i}{\tilde{x}_0 + 1}, \, i = 1, \ldots, m$$

Esta aplicación $(\tilde{x}_0, x_1, \ldots, x_m) \to (X_1, \ldots, X_m)$ de la esfera $\mathcal{S} - \{(-1, 0, \ldots, 0)\}$ en V es esencialmente la proyección estereográfica de la esfera desde el polo sur $\infty_{\mathcal{S}} = (-1, 0, \ldots, 0)$, sobre el hiperplano de Π de ecuación $\tilde{x}_0 = 1$, tangente a la esfera $\mathcal{S}$ en el punto origen $o_{\mathcal{S}} = (1, 0, \ldots, 0)$, y se extiende como aplicación global de $\mathcal{S}$ en $\bar{V}$ de forma única

$$\mathcal{S} \ni (\tilde{x}_0, x_1, \ldots, x_m) \to \left[\frac{\tilde{x}_0 + 1}{2}, x_1, \ldots, x_m, \tilde{x}_0 - 1\right] \in \bar{V} \tag{5}$$



La proyección estereográfica es una aplicación conforme. Así hemos probado que:

La estructura conforme de V se extiende de forma única a todo $\overline{V} = V \cup \{\infty\}$

La unicidad se deduce por razones de continuidad.

1.1.2. Modelo analítico.

En resumen, fijado en el espacio vectorial conforme V un sistema rectangular de *coordenadas cartesianas libres* $(X_1, \ldots, X_m)$, queda canónicamente inducido en V un sistema de *coordenadas homogéneas* $[x_0, x_1, \ldots, x_m, x_{m+1}]$ *ligadas* por la relación $2x_0 x_{m+1} + \sum x_i^2 = 0$ y determinadas por la condición

$$X_i = \frac{x_i}{x_0}\ , \ x_0 \neq 0,\ i = 1, \ldots, m$$

donde el punto $\infty \in \bar{V}$ tiene coordenada $x_0 = 0$, es decir $[0,0,\ldots,0,1]$.

También queda canónicamente inducido un sistema de coordenadas cartesianas $(\tilde{x}_0, x_1, \ldots, x_m)$ *ligadas* por la relación $\tilde{x}_0^2 + \sum x_i^2 = 1$, y determinadas por la condición:

$$X_i = \frac{2x_i}{\tilde{x}_0 + 1},\ \tilde{x}_0 \neq -1,\ i = 1, \ldots, m$$

donde el punto $\infty \in \bar{V}$ tiene coordenadas con $\tilde{x}_0 = -1$, es decir $(-1,0,\ldots,0)$

El modelo analítico canónico se obtiene tomando $V = \mathbb{R}^m$ y $X = (X_1, \ldots, X_m)$, el sistema canónico de coordenadas rectangulares.

$$\hat{V} = \mathbb{R}^{m+2} = \{x = (x_0, x_1, \ldots, x_m, x_{m+1})\}$$

$$P(\hat{V}) = \mathbb{P}^{m+1} = \{[x] = [x_0, x_1, \ldots, x_m, x_{m+1}]\}$$

$$\begin{aligned} \overline{\mathbb{R}^m} &= \left\{[x] : 2x_0 x_{m+1} + \sum x_i^2 = 0\right\} = \\ \mathbb{S}^m &= \left\{\left[\frac{\tilde{x}_0 + 1}{2}, x_1, \ldots, x_m, \tilde{x}_0 - 1\right] : \tilde{x}_0^2 + \sum x_i^2 = 1\right\} \end{aligned}$$

Un punto de $\mathbb{R}^m$

La forma cuadrática, $\hat{\rho}$ tiene por matriz

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & I_m & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1.1.3. El grupo de Möbius

Hay una actuación natural

$$PO(\hat{V}) \times \overline{V} \to \overline{V}$$

del grupo $PO(\hat{V})$ de transformaciones proyectivas de $P(\hat{V})$ que deja invariante la forma cuadrática $\rho = [\hat{\rho}]$. Nótese que si $O(\hat{V})$ es el grupo de las transformaciones lineales que dejan invariante $\hat{\rho}$ entonces

$$PO(\hat{V}) = \left\{[a] : a \in O(\hat{V})\right\}$$

(a) Esta actuación es efectiva, transitiva, y representa a la totalidad de los difeomorfismos conformes de $\overline{V}$

(b) El grupo de isotropía $PO_\infty(\hat{V})$ de ∞ es precisamente el grupo $OA(V)$ de las tranformaciones afines conformes de V (afinizado por la derecha de $O(V)$)

(c) $\overline{V}$ es pues un espacio homogeneo con dos puntos destacados 0, y ∞. y podemos escribir:

$$\overline{V} = PO(\hat{V})/OA(V) = PO(\hat{V})/PO_0(\hat{V})$$

En el modelo analítico $V = \mathbb{R}^m$ y $X = (X_1, \ldots, X_m)$ el grupo $PO(\hat{V})$ es $P\hat{O}(m+1,1) = \left\{A = \left[\hat{A}\right] : \hat{A} \in \hat{O}(m+1,1)\right\}$ siendo

$$\hat{O}(m+1,1) = \left\{\hat{A} \in GL(m+2,\mathbb{R}) : \hat{A}^T S \hat{A} = S\right\}$$

1.1.4. Ortogonalidad

Pongamos $\hat{A}, \hat{B} \in \hat{V}$, representando esferas generalizadas A, y B. Recuerdese que A es un punto si y solo si $\hat{\rho}\left(\hat{A}, \hat{A}\right) = 0$, además, A es esfera real (respectivamente imaginaria) si y solo si $\hat{\rho}\left(\hat{A}, \hat{A}\right) > 0$ (respectivamente $\hat{\rho}\left(\hat{A}, \hat{A}\right) < 0$)

Por otra parte, la condición $\hat{\rho}\left(\hat{A}, \hat{B}\right) = 0$ es equivalente a:

1. Si A, B son esferas reales, se cortan ortogonalmente
2. Si A es esfera y B hiperplano, el hiperplano B, pasa por el centro de A
3. Si A y B son hiperplanos, se cortan ortogonalmente.
4. Si B es un punto entonces $B \in A$
5. Si B es infinito, entonces A es hiperplano.

Observación 1.1 *Dos hiperesferas conformes A, B se dicen ortogonales, si $C = A \cap B \neq \emptyset$, y en (cada ó existe) un punto $P \in C$ se tiene que los planos T_PA y T_PB son ortogonales.*

1.1.5. Referencias en la compleción esférica

Una referencia por un punto $A_0 = \left[\hat{A}_0\right] \in \overline{V}$, es una base

$$\left(\hat{A}_0, \hat{A}_1, \ldots, \hat{A}_m, \hat{A}_{m+1}\right)$$

de $\hat{V}$ en cuyas coordenadas $(y_0, y_1, \ldots, y_m, y_{m+1})$ se tenga

$$\rho = \left[2y_0 y_{m+1} + \sum_1^m y_i^2\right]$$

La referencia, está determinada salvo una constante multiplicativa, (es decir $\left(\lambda\hat{A}_0, \lambda\hat{A}_1, \ldots, \lambda\hat{A}_m, \lambda\hat{A}_{m+1}\right)$ con $\lambda \neq 0$, será considerada la misma referencia). Así, una referencia, es en particular un sistema de referencia proyectivo sobre el espacio $P(\hat{V})$ de esferas generalizadas. Sii $A_i = \left[\hat{A}_i\right]$, se tiene que A_0, y A_{m+1} son puntos de $\overline{V} = V \cup \{\infty\}$, y $A_1, \ldots, A_m$ son esferas generalizadas que pasan por A_0, y A_{m+1} y se cortan ortogonalmente (ver epígrafe 1.1.4.

Por lo visto en el epígrafe 1.1, puede construirse una referencia canónica $\left(\hat{E}_0, \hat{E}_1, \ldots, \hat{E}_m, \hat{E}_{m+1}\right)$ de coordenadas $(x_0, x_1, \ldots, x_m, x_{m+1})$ a partir de un sistema de coordenadas rectangulares $(X_1, \ldots, X_m)$ inducido por una base rectangular $(e_1, \ldots, e_m)$ de V. En esta referencia:

E_0 representa el origen 0 del espacio vectorial V

E_{m+1} representa el punto del infinito ∞.

E_i representa el hiperplano coordenado $X_i = 0$ para $i = 1, \ldots, m$.

Hay una única transformación $A = \left[\hat{A}\right] \in PO(\hat{V})$ capaz de transformar la referencia canónica $\left(\hat{E}_0, \hat{E}_1, \ldots, \hat{E}_m, \hat{E}_{m+1}\right)$ en la $\left(\hat{A}_0, \hat{A}_1, \ldots, \hat{A}_m, \hat{A}_{m+1}\right)$ y $A : \overline{V} \to \overline{V}$ es una transformación conforme que lleva el origen $0 = E_0$ de V al punto A_0 de $\overline{V}$, el infinito $\infty = E_{m+1}$, al punto A_{m+1} y la diferencial $A_* : V = T_0 V \to T_{A_0}\overline{V}$, transforma la base rectangular $(e_1, \ldots, e_m)$ en una base rectangular $(a_1, \ldots, a_m)$ de $T_{A_0}\overline{V}$.

Recíprocamente, fijados los puntos A_0, $A_{m+1} \in \overline{V}$, y una base rectangular $(a_1, \ldots, a_m)$ de $T_{A_0}\overline{V}$, existe una única transformación $A = \left[\hat{A}\right] \in PO(\hat{V})$ que transforma $0 = E_0$ en A_0, ∞ en A_{m+1}, y la diferencial $A_* : V = T_0 V \to T_{A_0}\overline{V}$ lleva la base rectangular $(e_1, \ldots, e_m)$ en la $(a_1, \ldots, a_m)$ de $T_{A_0}\overline{V}$.

Así pues, dar una referencia en un *origen* $A_0 \in \overline{V}$, consiste a fijar la imagen del el *infinito* $A_{m+1} \in \overline{V}$, y una base rectangular de $T_{A_0}\overline{V}$. Además, esto equivale a dar una transformación conforme A de $\overline{V}$, que lleva 0 en A_0.

1.2. El m-Espacio de Möbius.

Un *m-espacio de Möbius* abstracto debe entenderse como un espacio homogeneo del tipo $\overline{V}$ (complección esférica de un espacio vectorial conforme V) en donde no están destacados a priori los puntos origen o, e infinito ∞.

Quizás lo mas *geométrico* sea pensar en un m-espacio de Möbius, como en una variedad m-dimensional $\mathcal{S}$ con una estructura conforme y un grupo de transformaciones conformes $M\ddot{o}b\,(\mathcal{S})$ con la siguiente propiedad:

Cada vez que se fijan dos puntos distintos $A_o, A_\infty \in \mathcal{S}$ el espacio $\mathcal{S} - \{A_o, A_\infty\}$ tiene una estructura canónica de espacio vectorial lineal-conforme con origen en A_o, y el grupo lineal conforme es exactamente

$$CO\,(\mathcal{S} - \{A_o, A_\infty\}) = \{f \in M\ddot{o}b\,(\mathcal{S}) : f(A_o) = A_o,\ f(A_\infty) = A_\infty\}$$

1.2.1. Observaciones

Fijado el punto ∞ en el espacio de Möbius $\mathcal{S}$, el espacio $\mathcal{S} - \{\infty\}$ tiene estructura canónica de espacio afín lineal-conforme, y el grupo afín conforme es exactamente

$$COA\,(\mathcal{S} - \{A_\infty\}) = \{f \in M\ddot{o}b\,(\mathcal{S}) :\ f(A_\infty) = A_\infty\}$$

Por otra parte, se ve que el espacio vectorial conforme $V = \mathcal{S} - \{A_o, A_\infty\}$ admite una complección esférica $\overline{V}$, y la aplicación identidad $V \to V$ se *extiende* de forma única a un isomorfismo conforme $\overline{V} \to \mathcal{S}$ que transforma o en A_o, y ∞ en A_∞, así, módulo esta identificación canónica se tiene

$$\overline{\mathcal{S} - \{A_o, A_\infty\}} = \mathcal{S}$$

En definitiva una espacio de Möbius $\mathcal{S}$ no es más que una variedad conforme $\mathcal{S}$ que es conformemente isomorfa a la esfera $\mathbb{S}^m$ con su estructura conforme canónica.

Finalmente conviene observar que un espacio de Möbius $\mathcal{S}$ es en particular un espacio doblemente homogéneo (two points homogeneous). De hecho, por razones ya obvias fijados $A_o, A_\infty \in \mathcal{S}$ (distintos) y $B_o, B_\infty \in \mathcal{S}$ (distintos) y una aplicación lineal conforme $\varphi : T_{A_o}\mathcal{S} \to T_{B_o}\mathcal{S}$, existe una única transformacion conforme $f \in M\ddot{o}b\,(\mathcal{S})$ tale que $fA_o = B_o$, $fA_\infty = B_\infty$, y $df(A_o) = \varphi$.

En el caso $m > 1$, el grupo $M\ddot{o}b\,(\mathcal{S})$constituye todo el grupo de transformaciones conformes de $\mathcal{S}$. El caso de la recta de Möbius será discutido luego en el epígrafe 1.2.7

1.2.2. Morfismos

Sean V y W son espacios vectoriales conformes. Una aplicación $f : V \to W$ se dirá extendible si su extensión natural $\bar{f} : \bar{V} \to \bar{W}$ con $f(\infty_V) = \infty_W$ es una aplicación diferenciable. Por ejemplo si f es una aplicación [lineal] conforme, se puede garantizar que f es lineal e inyectiva, y se extiende de hecho a una aplicación conforme e inyectiva $\bar{f} : \bar{V} \to \bar{W}$.

Cuando *dim* $V \geq 2$ la condición de *linealidad* de f puede omitirse para tener la misma garantía. Sin embargo, cuando $\dim V = 1$, el hecho de que f sea conforme, no aporta mucha información (de hecho es suficiente para ello con que f sea *no singular* en cada punto).

A partir de ahora, decir que f es [lineal] (respect. [afín]) conforme, significa que es conforme, y lineal (respect. afín) si $\dim V = 1$. (ver epígrafe 1.2.7 más adelante)

Parece natural dar como definición de *morfismo* entre espacios de Möbius $\mathcal{S}_1$, y $\mathcal{S}_2$ a una aplicación $\phi : \mathcal{S}_1 \to \mathcal{S}_2$ tal que existe (para todo) $A_\infty \in \mathcal{S}_1$, la restricción $\phi| : \mathcal{S}_1 - \{A_\infty\} \to \mathcal{S}_2 - \{\phi A_\infty\}$ es [afín] conforme. Nótese que entonces ϕ define un *embeding* de $\mathcal{S}_1$ como subvariedad de $\mathcal{S}_2$. Cuando $\mathcal{S}_1 \subset \mathcal{S}_2$ y la inclusión es morfismo se llama a $\mathcal{S}_1$ subespacio de Möbius de $\mathcal{S}_2$.

Por otra parte, si $\dim \mathcal{S}_1 \geq 2$ entonces ϕ es morfismo si y solo si es conforme.

Finalmente observese que $M\ddot{o}b\,(\mathcal{S})$ coincide con el grupo de *auto*morfismos de $\mathcal{S}$ incluso si $\dim \mathcal{S} = 1$.

1.2.3. Hiperesferas generalizadas.

Sea ahora $\mathcal{S}$ un espacio de Möbius. Fijado un *infinito* $A_\infty \in \mathcal{S}$, el espacio $\mathcal{S} - \{A_\infty\}$ es afín conforme lineal, cuyo grupo conforme de transformaciones afines $COA\,(\mathcal{S} - \{A_\infty\})$ preserva hiperplanos afines e hiperesferas. Debemos interpretar que los puntos de $\mathcal{S}$ (incluido A_∞) son hiperesferas de radio cero (así $\mathcal{S} \subset \Sigma$), y completar los hiperplanos afines de $\mathcal{S} - \{A_\infty\}$ con el punto A_∞ del infinito.

Hiperesferas e hiperplanos constituyen el espacio Σ de hiperesferas (generalizadas) de $\mathcal{S}$. Es claro que la definición de esfera real, no depende del punto destacado A_∞ . De hecho, si se toma otro $B_\infty \in \mathcal{S}$, una transformación $f \in Conf(\mathcal{S})$ con $fA_\infty = B_\infty$ da por restricción una $f : \mathcal{S} - \{A_\infty\} \to \mathcal{S} - \{B_\infty\}$ afín conforme, que respeta hiperplanos e hiperesferas. Nótese que los hiperplanos de $\mathcal{S} - \{A_\infty\}$ son las hiperesferas que contienen al infinito A_∞.

1.2.4. Hiperesferas y morfismos

La familia de hiperesferas (generalizadas) de un espacio de Möbius $\mathcal{S}$, parece caracterizar totalmente su geometría. Por ejemplo, un morfismo $\phi : \mathcal{S}_1 \to \mathcal{S}_2$ entre espacios de Möbius, queda caracterizado por la propiedad de que $\phi^{-1}(H)$ es hiperesfera de $\mathcal{S}_1$, cada vez que H, lo es de $\mathcal{S}_2$. Cuando $\mathcal{S}_1 \subset \mathcal{S}_2$ la condición de $\mathcal{S}_1$ para ser subespacio de Möbius, es que las hiperesferas de $\mathcal{S}_1$ se obtengan como intersección de $\mathcal{S}_1$ con hiperesferas de $\mathcal{S}_2$

1.2.5. Referencias

Siguiendo la argumentación del epígrafe 1.1.5 , dar una referencia A en un *origen* $A_0 \in \mathcal{S}$, consiste a fijar el *infinito* $A_{m+1} \in \mathcal{S}$, y un sistema rectangular de coordenadas $(X_1, \ldots, X_m)$ de $T_{A_0}\mathcal{S}$.

Esto equivale a dar la (única) transformación conforme A de $\overline{\mathbb{R}^m}$, en $\mathcal{S}$, que lleva el origen 0 en A_0, el infinito $\infty \in \overline{\mathbb{R}^m}$ al A_{m+1}, de forma que $dA(0) : \mathbb{R}^m \to T_{A_0}\mathcal{S}$ lleva la base canónica, a la base rectangular canónica de $\mathbb{R}^m$en la inducida por $(X_1, \ldots, X_m)$ en $T_{A_0}\mathcal{S}$. De esta manera la aplicación inversa de A, $A^{-1} : \mathcal{S} \to \overline{\mathbb{R}^m}$ induce en $\mathcal{S}$ sistemas de coordenadas *homogéneas* $[x_0, x_1, \ldots, x_m, x_{m+1}]$ *ligadas, (* $2x_0x_{m+1} + \sum x_i^2 = 0$) y cartesianas $(\tilde{x}_0, x_1, \ldots, x_m)$ *ligadas* $(\tilde{x}_0^2 + \sum x_i^2 = 1)$ que toman valores sobre la esfera $\mathbb{S}^m$ (ver epígrafe 1.1.2). Ambos sistemas de coordenadas se relacionan mediante las fórmulas (3) o (4):

$$\left\{ \begin{array}{l} x_0 = \frac{1}{2}\left(\tilde{x}_0 + \tilde{x}_{m+1}\right) \\ x_{m+1} = \tilde{x}_0 - \tilde{x}_{m+1} \end{array} \right. , \left\{ \begin{array}{l} \tilde{x}_0 = x_0 + \frac{1}{2}x_{m+1} \\ \tilde{x}_{m+1} = x_0 - \frac{1}{2}x_{m+1} \end{array} \right. \tag{6}$$

Las coordenadas cartesianas *ligadas* $(\tilde{x}_0, x_1, \ldots, x_m)$ determinan univocamente la transformación conforme $\tilde{A}^{-1} : \mathcal{S} \to \mathbb{S}^m$, en donde A_0 es enviado a

$o = (1, 0, \ldots, 0) \in \mathbb{S}^m$. Identificando $T_o\mathbb{S}^m$ con el hiperplano$\{(1, x_1, \ldots, x_m)\}$, se ve que la diferencial $d\tilde{A}(o) : T_o\mathbb{S}^m \to T_{A_0}\mathcal{S}$ tiene por ecuaciones

$$\{X_1 = x_1, ..., X_m = x_m\}$$

1.2.6. Referenciales

Un referencial es un sistema $(A_0, \ldots, A_{m+1}; A_u)$ de $\mathcal{S}$ donde $A_1, \ldots, A_m \in \Sigma$, son m hiperesfras que se cortan ortogonalmente en los puntos distintos $A_0, A_{m+1} \in \mathcal{S}$, y A_u representa una esfera *unidad* en $T_{A_0}\mathcal{S}$. Un referencial determina por tanto una clase de referencias en donde la base rectangular $(a_1, \ldots, a_m)$ de $T_{A_0}\mathcal{S}$ se elegiría tomando

$$\pm a_i \in A_u \cap (\cap_{j \neq i} T_{A_0} A_j)$$

Observese que el dato A_u equivale a fijar la estructura euclidea de $T_{A_0}\mathcal{S}$, lo que equivale a dar un vector *unitario* $u \in T_{A_0}\mathcal{S}$.

1.2.7. La recta de Möbius

Es un hecho que toda variedad unidimensional admite una única estructura conforme, y por tanto el grupo de sus transformaciones conformes, coincide con el de difeomorfismos. Esto es así en particular para la recta Γ de Möbius. De hecho, una revisión algo forzada de la definición 1.2 nos conduce a que Γ es un espacio que se transforma en un espacio afín en cuanto se le quita un punto A_∞, y su grupo afín es

$$GA\,(\Gamma - \{A_\infty\}) = \{f \in M\ddot{o}b\,(\Gamma) : \ f(A_\infty) = A_\infty\}$$

de esta forma se concluye que Γ es una recta proyectiva y $M\ddot{o}b\,(\Gamma)$ es su grupo de transformaciones proyectivas, que evidentemente no coincide con el grupo de difeomorfismos.

Así por ejemplo, la estructura proyectiva de la complección esférica de $\mathbb{R}$

$$\overline{\mathbb{R}} = \left\{[x_0, x_1, x_2] : 2x_0x_2 + x_1^2 = 0\right\}$$

viene dada por el isomofismo canónico que identifica $\overline{\mathbb{R}}$ con la recta proyectiva $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$, cuando escribimos

$$t = \left[1, t, -\frac{t^2}{2}\right], \, \infty = [0, 0, 1] \tag{7}$$

Volviendo al caso genérico, una esfera real $A \in \Sigma$ de Γ es en realidad un par de puntos, que cuando están confundidos se identifican con un punto de Γ. En la recta afín $\Gamma - \{A_\infty\}$, los hiperplanos son los $A \in \Sigma$, de la forma $A = \{P, A_\infty\}$ con $P \in \Gamma$.

Una referencia en Γ de acuerdo con el epígrafe 1.1.5, viene dada por un par de puntos de Γ, digamos (A_0, A_2), y un vector no nulo u de $T_{A_0}\Gamma$. Nótese que u es en realidad un punto (¿vector?) de la recta vectorial obtenida al tomar origen en A_0 de la recta afín $\Gamma - \{A_2\}$, así que esencialmente (A_0, A_2, A_u) son tres puntos distintos de Γ, y por tanto su sistema de referencia proyectivo. El referencial asociado a esta referencia es (A_0, A_1, A_2, A_u) donde $A_1 \in \Sigma$ es la esfera real $A_1 = \{A_0, A_2\}$.

Hay una única transformación proyectiva de Γ a la recta proyectiva real $\overline{\mathbb{R}}$ que lleva (A_0, A_2, u) a $(0, \infty, 1)$. Es el denominado *parámetro proyectivo* t de Γ, pues la aplicación inversa $\gamma = \gamma(t)$ $(\gamma : \overline{\mathbb{R}} \to \Gamma)$ parametriza Γ.

Observese que el parámetro proyectivo t viene determinado salvo transformaciones del tipo:

$$s = \frac{at + b}{ct + d} \text{ con } ad - bc \neq 0$$

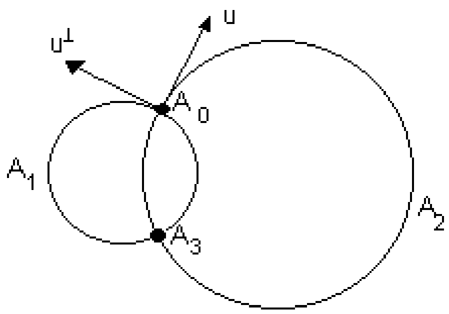
que son los cambios proyectivos de parámetro.

Por ejemplo, el parámetro proyectivo asociado a la referencia canónica de $\overline{\mathbb{R}}$, es el t definido anteriormente en (7) es decir, si $2x_0x_2 + x_1^2 = 0$:

$$t\,[x_0, x_1, x_2] = \frac{x_1}{x_0}, \text{ si } x_0 \neq 0,\ t\,[0, 0, 1] = \infty$$

1.2.8. El plano de Möbius

Un referencial en un plano Π de Möbius, viene dado por $(A_0, A_1, A_2, A_3, A_u)$, donde $A_1, A_2 \in \Sigma$, son circulos conformes que se cortan ortogonalmente en los puntos $A_0, A_3 \in \Pi$. Si fijamos por ejemplo $u \in T_{A_0}A_2$ como primer elemento de la base de $T_{A_0}\Pi$, y supuesto Π orientado, denotamos $u^\perp$ al vector u girado $\pi/2$ radianes en el sentido positivo, obtendremos dos referencias asociadas segun tomemos la base $\left(u, u^\perp\right)$ o $\left(u, -u^\perp\right)$, con los puntos $A_0, A_3 \in \Pi$ fijados.



1.2.9. Referencias asociadas a curvas en el plano de Möbius

Fijemos en el plano afín conforme $V = \Pi - \{\infty\}$ un sistema de coordenadas lineales rectangulares (X_1, X_2) con origen en el punto $o \in V$. Así V puede ser considerado un plano vectorial euclideo con origen o. El espacio vectorial $\hat{V}$ de las *ecuaciones de esferas generalizadas* (reales o imaginarias) tiene ahora un sistema lineal de coordenadas en el cual $\hat{A} = (x_0, x_1, x_2, x_3)$ representa forma cuadrática afín $x_0(X_1^2+X_2^2)-2x_1X_1-2x_2X_2-2x_3$ y si $x_0 \neq 0$, determina la ecuación de una esfera de radio $R^2 = 2x_0/x_3+(x_1/x_0)^2+(x_1/x_0)^2$, y centro $(x_1/x_0, x_2/x_0)$ de manera que los puntos de V admiten coordenadas homogeneas (x_0, x_1, x_2, x_3) con $2x_0x_3 + x_1^2 + x_2^2 = 0$, es decir un punto de V de coordenadas $\alpha = (X_1, X_2)$ le asociamos coordenadas (homogenas)

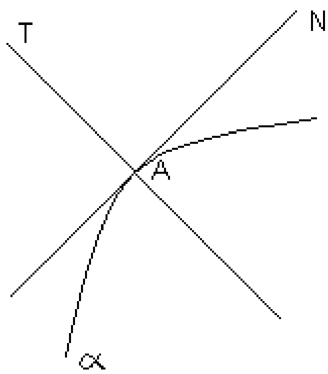
$$\hat{A} = \left(1, X_1, X_2, -\left(X_1^2 + X_2^2\right)/2\right) = \left(1, \alpha, -\frac{1}{2}(\alpha.\alpha)\right)$$

Cuando $x_0 = 0$, la ecuación $-2x_1X_1 - 2x_2X_2 - 2x_3 = 0$ representa un recta afín ortogonal al vector (x_1, x_2)

A una curva $\alpha = \alpha(s)$ parametrizada respecto al arco en el plano afín euclideo de V le podemos asociar en primera instancia la referencia

$$\begin{cases} \hat{A} = \left(1, \alpha, -\frac{1}{2}(\alpha.\alpha)\right) \\ \hat{T} = (0, \alpha', -\alpha.\alpha') \\ \hat{N} = \left(0, \alpha'^{\perp}, -\alpha'^{\perp}.\alpha\right) \\ \hat{\infty} = (0, 0, 0, 1) \end{cases} \tag{8}$$

en donde $A = \left[\hat{A}\right]$ representa el punto $\alpha(s)$ de la curva, $T = \left[\hat{T}\right]$ es la recta normal a la curva por el punto A, $N = \left[\hat{N}\right]$ representa la recta tangente a la curva en el punto A, y $\infty = [\hat{\infty}]$ es el punto del infinito.

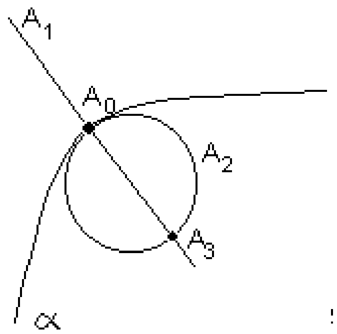


Teniendo en cuenta que la referencia euclidea de Frenet para α es $\left(\alpha', \alpha'^{\perp}\right)$ y la ecuación de Frenet $\alpha'' = \kappa\alpha'^{\perp}$, siendo $\kappa = \kappa(s)$ la curvatura euclidea de α, se concluye que:

$$\begin{cases} d\hat{A}/ds = \hat{T} \\ d\hat{T}/ds = \kappa\hat{N} - \hat{\infty} \\ d\hat{N}/ds = -\kappa\hat{T} \\ d\hat{\infty}/ds = 0 \end{cases} \tag{9}$$

La referencia (8) tiene un tufillo claramente euclideo. Nos proponemos asociar referencias a lo largo de la curva, que solo dependan de ella y de la estructura conforme. Para ello, vamos a ir modificando paulatinamente la referencia (8).

Debemos notar en primer lugar, que asociado a un punto α de la curva, hay una única circunferencia tangente, que tiene con la curva un contacto de orden mayor o igual a dos. Es la llamada circunferencia osculatriz A_2 cuyo centro es el centro de curvatura , y su radio es el radio de curvatura $\rho = 1/\left|\kappa\right|$. Nuestro nuevo sistema de referencia es $\left(\hat{A}_0, \hat{A}_1, \hat{A}_2, \hat{A}_3\right)$.



$\hat{A}_0 = \hat{A}$, $\hat{A}_1 = \hat{T}$, la elección del representante $\hat{A}_2$, y del representante $\hat{A}_3$ del punto A_3 en $T \cap A_2$ ya vienen condicionadas por las restricciones algebraicas que imponen los sistemas de referencia

$$\left\langle \hat{A}_2, \hat{A}_2 \right\rangle = \left\langle \hat{A}_0, \hat{A}_3 \right\rangle = 1, \ \left\langle \hat{A}_2, \hat{A}_0 \right\rangle = \left\langle \hat{A}_3, \hat{A}_3 \right\rangle = \left\langle \hat{A}_3, \hat{A}_2 \right\rangle = 0 \tag{10}$$

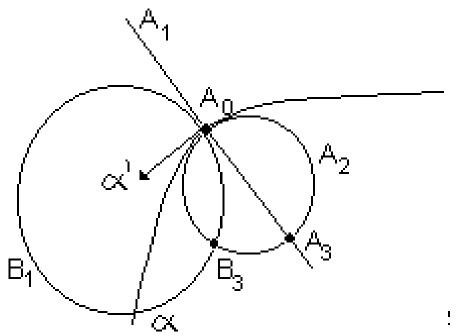
quedando entonces:

$$\begin{cases} \hat{A}_0 = \hat{A} \\ \hat{A}_1 = \hat{T} \\ \hat{A}_2 = \hat{N} + \kappa \hat{A} \\ \hat{A}_3 = \hat{\infty} - \kappa \hat{N} - \frac{1}{2}\kappa^2 \hat{A} \end{cases} \tag{11}$$

Aplicando las ecuaciones de Frenet (9) , quedan las ecuaciones:

$$\begin{cases} d\hat{A}_0/ds = \hat{A}_1 \\ d\hat{A}_1/ds = -\frac{1}{2}\kappa^2 \hat{A}_0 - \hat{A}_3 \\ d\hat{A}_2/ds = \frac{d\kappa}{ds}\hat{A}_0 \\ d\hat{A}_3/ds = \frac{1}{2}\kappa^2 \hat{A}_{1-} \frac{d\kappa}{ds}\hat{A}_2 \end{cases} \tag{12}$$

Llamaremos referencia movil *aceptable* a lo largo de $\alpha = \alpha(s)$ a cualquier referencia de la forma $(A_0, B_1, A_2, B_3; \alpha')$, que se corresponde con $\left(\hat{A}_0, \hat{B}_1, \hat{A}_2, \hat{B}_3\right)$:



y que queda determinada, en cuanto fijemos el punto B_3 sobre el circulo de curvatura A_2. Un representante de B_3 viene dado por $\hat{A}_0 + u\hat{A}_1 - (u^2/2)\,\hat{A}_3$ con $u \neq 0$. Sin embargo, al imponer las condiciones de referencia tipo (10) a $\left(\hat{A}_0, \hat{B}_1, \hat{A}_2, \hat{B}_3\right)$ nos obliga a elegir

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{B}_3 = \frac{-2}{u^2}\hat{A}_0 - \frac{2}{u}\hat{A}_1 + \hat{A}_3 \\ \hat{B}_1 = -\frac{2}{u}\hat{A}_0 - \hat{A}_1 \end{array} \right. \tag{13}$$

podemos entonces despejar

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{A}_1 = \frac{-2}{u}\hat{A}_0 - \hat{B}_1 \\ \hat{A}_3 = \frac{-2}{u^2}\hat{A}_0 - \frac{2}{u}\hat{B}_1 + \hat{B}_3 \end{array} \right. \tag{14}$$

y considerar $u = u(s)$ una función.

Determinamos las ecuaciones de Frenet para esta referencia. para ello utilizamos las ecuaciones (12), (13) y (14), y obtenemos:

$$\left\{ \begin{array}{l} d\hat{A}_0/ds = \frac{-2}{u}\hat{A}_0 - \hat{B}_1 \\ d\hat{B}_1/ds = \frac{2}{u^2}\left(du/ds + \frac{\kappa^2 u^2}{4} + 1\right)\hat{A}_0 + \hat{B}_3 \\ d\hat{A}_2/ds = \frac{d\kappa}{ds}\hat{A}_0 \\ d\hat{B}_3/ds = ... \end{array} \right.$$

diremos finalmente que la referencia es *conforme adaptada*, si $d\hat{B}_1/ds = \hat{B}_3$. Se pueden obtener referencias conformes adaptadas $\left(\hat{A}_0, \hat{B}_1, \hat{A}_2, \hat{B}_3\right)$ a partir de la referencia (11) tomando como $u = u(s)$ soluciones de la ecuación diferencial

$$\frac{du}{ds} + \frac{\kappa^2 u^2}{4} + 1 = 0$$

Las ecuaciones de Frenet para una referencia conforme adaptada son

$$\begin{cases} d\hat{A}_0/ds = \frac{-2}{u}\hat{A}_0 - \hat{B}_1 \\ d\hat{B}_1/ds = \hat{B}_3 \\ d\hat{A}_2/ds = \frac{d\kappa}{ds}\hat{A}_0 \\ d\hat{B}_3/ds = \frac{d\kappa}{ds}\hat{A}_2 + \frac{2}{u}\hat{B}_3 \end{cases}$$

La circunferencia B_1 *bascula infinitesimalmente* en torno a B_3 segun la siguiente definición

Definición 1.1 *Sean $\hat{B} = \hat{B}(t)$, $\hat{P} = \hat{P}(t)$ curvas en $\hat{V}$ que representan una circunferencia móvil $B = B(t)$. y un punto móvil $P = P(t)$ en la circunferencia.$B(t)$ (es decir $\left\langle \hat{P}(t), \hat{B}(t) \right\rangle = 0$. Se dice que la circunferencia B bascula infinitesimalmente en torno al punto P si existen funciones $\lambda = \lambda(t)$, $\mu = \mu(t)$ de forma que*

$$\frac{d\hat{B}}{dt} = \lambda\hat{B} + \mu\hat{P}$$

Observación 1.2 *La condición de* bascular infinitesimalmente *no depende de los representantes tomados $\hat{B}$ y $\hat{P}$ de B y P, y ni siquiera de la parametrización t. Es pues una condición estrictamente geométrica. Posiblemente su interpretación es la siguiente: Fijado t, Hay una curva continua $P_t(\tau)$ ($|\tau| < \varepsilon$) con $P_t(\tau) \in B(t) \cap B(t+\tau)$ si $\tau \neq 0$, y $P_t(0) = P(t)$ o de forma simbólica:*

$$P(t) = \lim_{\Delta t \to 0} (B(t) \cap B(t + \Delta t))$$

La conclusión final de este epígrafe es quizás la siguiente:

Definición 1.2 *Una referencia movil* adaptada *a una curva $A = A(t)$ en el plano de Möbius Π, viene dada por $(A, B, C, P; A')$ donde $C = C(t)$ es la circunferencia osculadora de A en $A(t)$, y $P = P(t)$ es un punto de $C(t)$ distinto de $A(t)$, de forma que la circunferencia $B = B(t)$ (ya perfectamente definida por la condición de referencia) bascula infinitesimalmente en torno a P.*

Teorema 1.1 *Sea $A = A(t)$ una curva en el plano de Möbius, y sea $C(t)$ la circunferencia osculadora de A en cada $A(t)$. Fijemos para $t = \tau$, un* *punto $P_0 \in C(\tau)$ distinto de $A(\tau)$. Existe entonces un único punto móvil $P = P(t)$ con $P(\tau) = P_0$, y de forma que la circunferencia móvil $B = B(t)$ (determinada por la condición de cortar ortogonalmente a la osculadora $C(t)$ en los puntos $A(t)$, y $P(t)$) bascula infinitesimalmente en torno a P.*

El sistema $(A, B, C, P; A')$ determina entonces la única referencia móvil adaptada a la curva $A = A(t)$ con la condición inicial $P(\tau) = P_0$.

1.2.10. El parámetro conforme

Es importante destacar, que el referencial móvil (A, B, C, P) adaptado a la curva $A = A(t)$ es *geométrico*, en el sentido de que no depende de la parametrización t. Es decir, si $t = \mathbf{t}(u)$ es un cambio de parámetro entonces y $\tilde{A} = \tilde{A}(u) = A(\mathbf{t}(u))$, $\tilde{B} = ...$, entonces $\left(\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}, \tilde{P}\right)$ es el referencial movil adaptado a $\tilde{A}$.

Realmente el referencial móvil (A, B, C, P) adaptado a la curva A,solo depende del punto inicial $P(\tau) = P_0$ en la circunferencia osculatriz $C(\tau)$ del punto $A(\tau)$. Así el punto $P(t)$ en $C(t)$ puede entenderse como *transportado paralelo* de $P_0 = P(\tau)$ desde $A(\tau)$ hasta $A(t)$ a lo largo de A, y solo depende de la estructura conforme.

Es necesario ahora demostrar las siguientes afirmaciones:

- La aplicación de transporte $\|_\tau^t : C(\tau) \to C(t)$ definida antes, es conforme (es decir proyectiva), y permite *mover* también el origen $A(\tau)$.
- Para cada τ, la curva $D_\tau(t) = \|_t^\tau A(t) \in C(\tau)$ define el desarrollo de A en sobre la circunferencia osuladora $C(\tau)$. Se verifica la condición de no deslizamiento:
$$\left.\frac{dD_\tau(t)}{dt}\right|_{t=0} = A'(\tau), \ \forall\tau$$
- Fijado un origen τ, llamamos razón doble de cuatro puntos $A(t_i)$ $i = 0, 1, 2, 3$ sobre la curva A a:
$$[A(t_0), A(t_1), A(t_2), A(t_3)] = [D_\tau(t_0), D_\tau(t_1), D_\tau(t_2), D_\tau(t_3)]$$
en donde la última razón doble está tomada sobre la recta proyectiva $C(\tau)$. (ver epígrafe 1.2.7). Por otra parte, la razón doble $[A(t_0), A(t_1), A(t_2), A(t_3)]$ así definida no depende del origen τ tomado.