SOBRE LAS CURVATURAS DE LAS VARIEDADES SUMERGIDAS EN ESPACIOS HOMOGENEOS.

Javier Lafuente & Jose Luis Guijarro

Enero de 2009 (F.tex)

Índice

1. Introducción.

1.1. Geometrías de Klein

1.1.1. Definición

Una *Geometría* de *Klein* en una variedad diferenciable E, viene definida por un grupo de Lie G que actúa diferenciablemente sobre E de forma transitiva:

$$G \times E \to E, (A, x) \to \lambda_A (x) = A.x$$

Se denomina a $E = (E, G, \lambda)$ *espacio de Klein* (con grupo G de transformaciones).

Fijado un punto $o \in E$, todos los grupos de isotropía G_x de los puntos de E son conjugados con G_o. Claramente G_o es un subgrupo cerrado de G, y por tanto G/G_o tiene una única estructura de variedad diferenciable de dimensión $\dim G - \dim G_o$, que hace a la proyección canónica $\pi : G \to G/G_o$ submersión. Hay además un difeomorfismo canónico (una vez fijado fijado o):

$$\overline{\pi} : G/G_o \ni AG_o \to \lambda_A(o) \in E$$

que permite identificar ambos espacios ($E = G/G_o$). Denotando también por π a:

$$\pi : G \to E \ , \ A \longmapsto \lambda_A(o) = A.o$$

Se tiene el diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "\pi"] \arrow[dr, "\pi"'] & G/G_o \arrow[d, "\overline{\pi}"] \\ & E \end{tikzcd}$$

Así E resulta ser un espacio homogéneo en el sentido clásico. Nótese que dar el espacio homogéneo G/G_o es equivalente a dar un espacio de Klein E con un punto destacado o.

1.1.2. La acción Adjunta

Denotamos por $\mathfrak{g}$ y $\mathfrak{g}_0$ respectivamente, a las álgebras de Lie de G y G_o.

La diferencial $\pi_* = d\pi(e) : \mathfrak{g} \to T_oE$ induce por paso al cociente un isomorfismo canónico

$$\overline{\pi_*} : \mathfrak{g}/\mathfrak{g}_0 \to T_oE$$

que permite identificar ambos espacios. Todo esto se concluye cuando se aplica la diferencial en el origen al diagrama anterior

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{g} \arrow[r, "\pi_*"] \arrow[dr, "\pi_*"'] & \mathfrak{g}/\mathfrak{g}_o \arrow[d, "\overline{\pi}_*"] \\ & T_0E \end{tikzcd}$$

Recordemos que si $A \in G$, el automorfismo de conjugación $C_A : G \to G$, $a \to AaA^{-1}$ da lugar a

$$dC_A(e) = Ad_A \in GL(\mathfrak{g})$$

y la aplicación $Ad : G \to GL(\mathfrak{g})$ define una representación denominada representación adjunta. Su restricción a G_o, $Ad_{G_o} : G_o \to GL(\mathfrak{g})$, da lugar por paso al cociente a una acción sobre el espacio vectorial cociente $\mathfrak{g}/\mathfrak{g}_0$, que denotamos

$$\overline{Ad} : G_o \to GL(\mathfrak{g}/\mathfrak{g}_0) \tag{1}$$

. Vía la identificación $\overline{\pi_*}$ es fácil ver que para $K \in G$ y definiendo

$$\overline{L_K} : G/G_o \ni AG_o \to (KA)\, G_o \in G/G_o$$

los siguientes diagramas son conmutativos:

$$\begin{tikzcd}
E \arrow[r, "\lambda_K"] \arrow[d, "\overline{\pi}"'] & E \arrow[d, "\pi"] \\
G/G_o \arrow[r, "\overline{L_K}"'] & G/G_o
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
G \arrow[r, "C_K"] \arrow[d, "\pi"'] & G \arrow[d, "\pi"] \\
G/G_o \arrow[r, "\overline{L_K}"'] & G/G_o
\end{tikzcd}$$

Así, diferenciando en el origen (via la identificación $\overline{\pi_*}$) podemos escribir:

$$d\lambda_K(o) = \overline{Ad_K} : T_oE = \mathfrak{g}/\mathfrak{g}_0 \to \mathfrak{g}/\mathfrak{g}_0 = T_oE \tag{2}$$

Recuérdese por otro lado, que si $\Omega_G \in \Omega^1(G, \mathfrak{g})$ es la forma de Cartan de G se verifica para $A \in G$

$$(R_A)^* \, \Omega_G = Ad_{A^{-1}} \Omega_G$$

1.1.3. Homomorfismos

Un homomorfismo entre los espacios de Klein $E = (E, G, \lambda)$, y $\overline{E} = \left(\overline{E}, \overline{G}, \overline{\lambda}\right)$ viene determinado por una aplicación diferenciable $\phi : E \to \overline{E}$, junto a un homomorfismo $\phi_* : \lambda G \to \overline{\lambda G}$ entre grupos de lie, de forma que $\phi \circ \lambda_A = (\phi_* \lambda_A) \circ \phi$, para todo $A \in G$. En el supuesto de que ϕ sea difeomorfismo, entonces $\phi_* \lambda_A = \phi \circ \lambda_A \circ \phi^{-1}$ queda unívocamente determinada, y $\phi_* : \lambda G \to \overline{\lambda G}$ es necesariamente inyectiva. Cuando además ϕ_* es sobre (y por tanto isomorfismo de grupos de Lie), se dice que ϕ es un isomorfismo y los espacios de Klein son isomorfos. Es así como (E, G, λ) y $(E, \lambda G, \lambda)$ son canónicamente isomorfos por la identidad.

En adelante supondremos que $\lambda : G \to Difeo(E)$ es inyectivo,
y entonces podemos identificar G con un subgrupo λG, y $A \in G$ con
$\lambda_A \in Difeo(E)$.

Un subespacio de Klein (o subespacio homogeneo) de $\overline{E} = \left(\overline{E}, \overline{G}, \overline{\lambda}\right)$, viene determinado por una subvariedad $j : E \hookrightarrow \overline{E}$ de forma que

$$G = \left\{A \in \overline{G} : \lambda_A E = E\right\}$$

determina un subgrupo de Lie $j_* : G \hookrightarrow \overline{G}$ de forma que la acción restringida $G \times E \to E, (A, x) \to \overline{\lambda}_A(x) = A.x$ hace a $E = (E, G, \lambda)$ espacio homogéneo. En este caso (j, j_*) define un monomorfismo entre los espacios de Klein E y $\overline{E}$.

1.1.4. El punto de vista de Klein

La acción de G sobre E, puede inducir *de forma natural* actuaciones $G\times\mathcal{M}\ni(A,M)\rightarrow A.M\in\mathcal{M}$ sobre determinadas familias $\mathcal{M}$ de objetos deducidas del espacio E o de eventuales *estructuras* (diferenciable, métrica, conforme,...) sobre E. La propiedad que define a los objetos de $\mathcal{M}$ es conservada por el grupo G y se denomina propiedad ($G-$)geométrica. Según Klein, el estudio de la ($G-$)geometría, consiste en el análisis de las propiedades y conceptos relativos a E que permanecen invariantes por la acción del grupo G. Cada vez que tenemos una tal familia $\mathcal{M}$, queda planteado un problema de clasificación:

Dos objetos $M,\ \overline{M}\in\mathcal{M}$ se dicen equivalentes ($M\simeq_G\overline{M}$), si están en la misma órbita, es decir, si existe $A\in G$, tal que $A.M=\overline{M}$.

Por ejemplo el grupo G actúa de manera natural sobre el fibrado de contacto de orden ℓ :

$$G\times\mathcal{G}_p^{\ell}(E)\rightarrow\mathcal{G}_p^{\ell}(E)\,,\ (A,\sigma)\rightarrow A.\sigma=\left(\mathcal{G}_p^{\ell}\lambda_A\right)(\sigma)$$

(vease epígrafe 6.2.2) Cada clase se denomina escama geométrica de órden ℓ.

1.2. Generalidades sobre Curvaturas y clasificación de variedades.

Todas las variedades las supondremos de dimensión fija p contenidas en el espacio de Klein fijo E con dimensión $m>p$ y grupo G de transformaciones. También debemos suponer (implícitamente) que todas ellas pertenecen a una cierta familia $\mathcal{F}$ invariante por la acción del grupo G. En principio no impondremos a la familia $\mathcal{F}$ restricción alguna. Sin embargo más adelante será necesario imponerle regularidad.

Dos p-variedades M y $\overline{M}$ sumergidas en un espacio de Klein E se dirán *G-congruentes* si existe una transformación $A\in G$, tal que $\overline{M}=\lambda_A(M)$. A la aplicación restricción $\lambda_A:M\rightarrow\overline{M}$ se le denomina *G-congruencia*. Nótese que dos variedades G-congruentes son en particular difeomorfas y tienen por tanto la misma dimensión p.

Hacer G-geometría de $p-$variedades, consiste a *groso modo* en estudiar aquellas propiedades de las variedades que permanecen inalteradas por la acción del grupo.

En particular estamos interesados en dar criterios prácticos para reconocer cuando dos $p-$variedades son G-congruentes.

Obsérvese que $M=(f:S)$, $\overline{M}=\left(\overline{f}:\overline{S}\right)$ son congruentes, si y solo si existe $\phi:S\rightarrow\overline{S}$ difeomorfismo, y $A\in G$ tal que $\lambda_A\circ f=\overline{f}\circ\phi$.

1.2.1. Curvaturas.

Una curvatura para las variedades, es un operador κ, que tiene asociada una clase de subvariedades Σ_κ de E, y asigna a cada variedad $M\in\Sigma_\kappa$ una función diferenciable $\kappa_M\in C^\infty(M,\mathbb{R})$. Si $M=(f:S)$ escribimos $\kappa_f=\kappa_M\circ f$. Una forma habitual de determinar el invariante Φ consiste precisamente en establecer un operador

$$f\rightarrow\kappa_f$$

que asigna a cada $f:S\rightarrow E$ en Σ_κ, un *valor* $\kappa_f\in C^\infty(S,\mathbb{R})$ con la propiedad

$$\kappa_{f\circ\varphi}=\kappa_f\circ\varphi$$

En este sentido se dice entonces que la asignación $f \to \kappa_f$ es (o tiene carácter de) invariante.

Normalmente indicaremos que $M \in \Sigma_\kappa$ diciendo que existe κ_M. Más aún, cuando escribamos κ_M, estamos admitiendo de forma implícita su existencia.

Un difeomorfismo $\lambda : M \to \overline{M}$ entre variedades sumergidas en E, se dice que respeta la curvatura κ, cuando $\kappa_M = \lambda^* \kappa_{\overline{M}} \circ \lambda$. Se dice que κ es un G-invariante, si es respetado por todas las transformaciones de G, es decir,

$$\kappa_M = \lambda_A \kappa_{\lambda_A(M)} \circ \lambda_A$$

para todo $A \in G$. Esto significa si $M = (f : S)$ que $\kappa_f = \kappa_{\lambda_A \circ f}$ para todo $A \in G$.

Obsérvese que de lo dicho se desprende que si κ es un G-invariante, la familia Σ_κ de variedades para las que existe κ_M es invariante por G (esto es si $M \in \Sigma_\kappa$ y $A \in G$ entonces $\lambda_A (M) \in \Sigma_\kappa$. Esto significa que si $M = (f : S)$ entonces $\kappa_f = \kappa_{\lambda_A \circ f}$ para todo $A \in G$.

En presencia de una geometría de Klein E dada por G, el término curvatura significará G-curvatura o curvatura Geométrica, a no ser que se explicite lo contrario.

1.2.2. Orden de una Curvatura.

Las curvaturas que aquí vamos a considerar provienen todas de la siguiente idea:

Sea $\mathcal{G}^r$ un abierto de $\mathcal{G}_p^r (E)$, y $\mathcal{F} = \mathcal{F} (\mathcal{G}^r)$ la familia de p-variedades M de E tales que $T_x^r M \in \mathcal{G}^r \ \forall x \in M$.

Una curvatura de orden mayor o igual que r sobre las variedades de $\mathcal{F}$, es una aplicación diferenciable entre fibrados $\kappa : \mathcal{G}^r \subset \mathcal{G}_p^r (E) \to \mathbb{R}$, que asocia a cada $\gamma \in \mathcal{G}^r$, el tensor $\kappa_\gamma \in \mathbb{R}$, siendo $T_\gamma =\downarrow_1^r \gamma \in \mathcal{G}_p^1 (E)$

Se dice que es de orden (exactamente) r, si existen $\gamma, \overline{\gamma} \in \mathcal{G}^r$ con $\gamma \downarrow = \overline{\gamma} \downarrow \in \mathcal{G}_p^{r-1} (E)$ y sin embargo $\kappa_\gamma \neq \kappa_{\overline{\gamma}}$.

Tal invariante κ asigna a cada variedad $M \in \mathcal{F}$ una función $\kappa_M \in C^\infty (M, \mathbb{R})$ con

$$\kappa_M (x) = \kappa_{T_x^r M} \ \forall x \in M$$

Si $M = (f : S)$ escribimos $\kappa_f = f^* \kappa_M$.

Si tenemos $(u_1, \ldots u_p)$ parametrización (local) de S y $(x_1 \ldots x_m)$ parametrización local en E, el invariante κ es de orden r si κ_f depende de las derivadas

$$\frac{\partial^{|\alpha|} (x_j \circ f) (u_1, \ldots u_p)}{\partial u_{\alpha_1} \ldots \partial u_{\alpha_k}}$$

para $j = 1, \ldots m$, $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$ con $|\alpha| = \sum \alpha_i \leq r$: Pero no de las derivadas de orden superior a r.

Supuesto $M = (f : S)$, $\overline{M} = \left(\overline{f} : \overline{S}\right)$, $a = f (s) = \overline{f}(\overline{s})$ la condición $T_a^r M = T_a^r \overline{M}$ equivale a decir que existe un difeomorfismo $\varphi : S \to \overline{S}$ en torno a s, con

$$\varphi (s) = \overline{s}, \text{ y además } j_s^r f = j_s^r \left(\overline{f} \circ \varphi\right)$$

y entonces debería verificarse

$$\left(\varphi^* \kappa_{\overline{f}}\right) (s) = \kappa_f (s)$$

Se tiene entonces el siguiente criterio:

Proposición. *El invariante $\kappa : f \to \kappa_f$ es de órden $\leq r$ si $\kappa_f(s) = \kappa_{\overline{f}}(s)$ cada vez que $f, \overline{f} : S \to E$ son p-variedades con $j_s^r f = j_s^r \overline{f}$.*

Naturalmente es $\Sigma_\kappa = \mathcal{F}$, y si pretendemos que que sea curvatura geométrica es necesario que $\mathcal{G}^r$ sea G-invariante, es decir que G induzca una acción $G \times \mathcal{G}^r \to \mathcal{G}^r$, y $\kappa_\gamma = \kappa_{A.\gamma}$ para todo $\gamma \in \mathcal{G}^r$.

1.2.3. Sistemas independientes de curvaturas

Una invariante κ se dice que depende de un sistema $\left(\kappa^{(1)}, \ldots, \kappa^{(r)}\right)$ de invariantes, si todo difeomorfismo λ que respete a $\kappa^{(1)}, \ldots, \kappa^{(r)}$ respeta necesariamente a κ. Si cada $\kappa^{(i)}$ no depende de los demás elementos de la familia se dice que el sistema de invariantes $\left(\kappa^{(1)}, \ldots, \kappa^{(r)}\right)$ es independiente.

1.2.4. Sistemas completos

Un problema fundamental en el estudio de la G-geometría de variedades, es el de su clasificación G-geométrica, que consiste en dar criterios algorítmicos para reconocer cuando dos variedades son G-congruentes.

Partimos de una familia G-invariante de p-variedades de E que en adelante denominamos variedades *admisibles*.

Naturalmente, dos variedades G-congruentes son difeomorfas. Pongamos M y $\overline{M}$ variedades difeomorfas. ¿son G-congruentes? Una buena cosa sería disponer de un sistema de G-curvaturas $\left(\kappa^{(1)}, \ldots, \kappa^{(r)}\right)$ de manera que cualquier difeomorfismo entre variedades admisibles que los respete a todos, sea necesariamente una G-congruencia. Un tal sistema se denomina sistema $G-$completo de curvaturas. Naturalmente, si el sistema no fuera independiente, es tautológico que podría reducirse a otro mas pequeño independiente y completo.

La condición necesaria y suficiente para que $\left(\kappa^{(1)}, \ldots, \kappa^{(r)}\right)$ sea completo es que para $f, \overline{f} : S \to E$ p-variedades admisibles se verifique la equivalencia:

$$\kappa_f^{(i)} = \kappa_{\overline{f}}^{(i)} \; 1 \leq i \leq r \Leftrightarrow \overline{f} = \lambda_A \circ f \text{ para algún } A \in G$$

1.2.5. Orden de contacto geométrico

Las variedades $M, \overline{M}$ de E se dice que tienen G-contacto de orden al menos r $(r \geq 0)$ en los puntos $a \in M$, $\overline{a} \in \overline{M}$ si definen en dichos puntos la misma r-escama geométrica, es decir: Existe $A \in G$, con $\lambda_A(a) = \overline{a}$, y $\lambda_A(M)$ tiene contacto de orden al menos r en $\overline{a} \in \lambda_A(M) \cap \overline{M}$, por tanto

$$(\lambda_A)^{(r)} T_a^r M = T_{\overline{a}}^r \overline{M}$$

Esta relación es de equivalencia sobre la familia de variedades punteadas (M, a) Denotamos por $[M, a]^{(r)}$ a la clase definida por (M, a), que es exactamente la escama geométrica (o G-escama) de orden r definida por M en el punto a

Supuesto $M = (f : S)$, $\overline{M} = \left(\overline{f} : \overline{S}\right)$, $a = f(s)$, $\overline{a} = \overline{f}(\overline{s})$ la condición $[M, a]^{(r)} = \left[\overline{M}, \overline{a}\right]^{(r)}$equivale a decir que existe un $A \in G$ tal que $g_s^r(\lambda_A \circ f) = g_{\overline{s}}^r \overline{f}$ (según definición 6.2.2). Por la proposición de **6.1.4** existe un $A \in G$ y un difeomorfismo $\phi : S \to \overline{S}$ en torno a s, con

$$\phi(s) = \overline{s}, \text{ y además } j_s^r(\lambda_A \circ f) = j_{\overline{s}}^r\left(\overline{f} \circ \phi\right)$$

y escribimos entonces $[g_s^r f] = \left[g_{\overline{s}}^r \overline{f}\right]$

1.2.6. Gérmenes geométricos de variedades

Dos variedades punteadas (M, a) y $\left(\overline{M}, \overline{a}\right)$ de E se dicen G-congruentes, si existen entornos U de a en M y $\overline{U}$ de $\overline{a}$ en $\overline{M}$, y existe $A \in G$ tal que $A.a = \overline{a}$, y $A.U = \overline{U}$ .Esta relación de congruencia , es de equivalencia sobre la familia de todas las variedades punteadas. Denotamos por $[M, a]$ a la clase definida por (M, a), que denominamos germen geométrico (o G-germen) definido por M en el punto a.

1.2.7. Niveles de exigencia para la solución.

Resolver un problema de clasificación G-geométrica de variedades admisibles puede entenderse según dos niveles de exigencia, y una decripción final que denominamos **GGP** (**G**érmenes **G**eométricos **P**latónicos).

Lo podíamos describir así:

Nivel 1 Encontrar un sistema independiente $\left(\kappa^{(1)}, \ldots, \kappa^{(r)}\right)$ de G-invariantes con la siguiente propiedad: Si $f, \overline{f} : \mathbb{S} \to E$ definen parametrizaciones globales de variedades admisibles $M = f(\mathbb{S})$, $\overline{M} = \overline{f}(\mathbb{S})$, se tiene la equivalencia

$$\kappa_f^{(i)} = \kappa_{\overline{f}}^{(i)}\ ,\ i = 1, \ldots, r \iff \overline{f} \circ f^{-1} : M \to \overline{M} \text{ es } G\text{-congruencia}$$

Esta propiedad caracteriza en efecto, a los sistemas completos de invariantes.

Nivel 2 Encontrar las ecuaciones de compatibilidad. Es decir, fijados un abierto $\mathbb{S}$ (simplemente conexo) de $\mathbb{R}^p$ y funciones $k^{(i)}$ $i = 1, \ldots r$ en $\mathbb{S}$, determinar condiciones *computables* digamos (C) necesarias y suficientes para que exista una inmersión f de forma que $k^{(i)} = \kappa_f^{(i)}$ $i = 1, \ldots r$. Denotemos por

$$\mathfrak{F}(\mathbb{S}) = \left\{\left\{k^{(i)} : 1 \leq i \leq r\right\} : \text{verifican las condiciones } (C)\right\}$$

Supóngase que $\left\{k^{(i)}\right\} \in \mathfrak{F}(\mathbb{S})$. Una vez determinada una *solución* $f : \mathbb{S} \to E$ todas las demás son de la forma $\lambda_A \circ f$ cuando $A \in G$. Por tanto, supuesto $0 = (0, \ldots, 0) \in \mathbb{S}$, y fijado $a \in E$ (por ejemplo el origen o) los *datos* $k^{(i)}$ determinan un único germen geométrico, digamos $[M, a]$.

Queda aún por aclarar cuando otra familia de datos $\left\{\overline{k}^{(i)}\right\} \in \mathfrak{F}(\mathbb{S})$ determinan el mismo germen. De hecho, si $\zeta : \mathbb{S}_0 \to \mathbb{S}$ es un monomorfismo con $\mathbb{S}_0 \subset \mathbb{S}$, y $\zeta(0) = 0$, y $\left\{k^{(i)}\right\} \in \mathfrak{F}(\mathbb{S})$, entonces $\left\{k^{(i)} \circ \zeta\right\} \in \mathfrak{F}(\mathbb{S})$ induce el mismo germen geométrico. Además si $\left\{\overline{k}^{(i)}\right\} \in \mathfrak{F}(\mathbb{S})$ determinan el mismo germen $\left\{k^{(i)}\right\}$ entonces existe una tal ζ con $\left\{k^{(i)} \circ \zeta\right\} = \left\{k^{(i)}\right\}$.

GGP Elegir una familia de *Gérmenes Geométricos Platónicos (GGPs)* digamos $\{P_\zeta\}$.
Esto significa que cada P_ζ es una p-variedad admisible que contiene al origen $o \in E$, y

1. Dos GGP distintos inducen gérmenes geométricos distintos en el origen o. Es decir

$$[P, o] \neq \left[\widetilde{P}, o\right] \text{ si } P, \widetilde{P} \in \{P_\zeta\} \text{ con } P \neq \widetilde{P}$$

2. Para cualquier p-variedad admisible M y todo punto $a \in M$ existe $P \in \{P_\zeta\}$ con $[M, a] = [P, o]$

Naturalmente debería existir un procedimiento algorítmico para calcular P a partir de $[M, a]$.

Por otra parte la familia $\{P_\zeta\}$ se podría identificar con una familia $\{P_\zeta\}$ de parametrizaciones $P_\zeta : \mathbb{S}_\varepsilon \to E$ sobre la bola $\mathbb{S}_\varepsilon$ de $\mathbb{R}^p$ centrada en el origen $0 = (0, \ldots, 0)$ y de radio ε, con $P_\zeta(0) = o$.

1.3. Sobre el método de la referencia móvil.

1.3.1. La forma de Maurer-Cartan.

Sea G un grupo de Lie y $\mathfrak{g}$ su álgebra de Lie.

La aplicación $G \times \mathfrak{g} \to TG$, $(A, X) \to AX = (L_A)_* X$ define una sección canónica global del fibrado tangente TG cuya aplicación inversa $TG \to G \times \mathfrak{g}$ viene definida por $X_A \to (A, \Omega_G(X_A))$, siendo $\Omega_G \in \Omega^1(G, \mathfrak{g})$ la forma de Maurer-Cartan. Nótese que

$$(L_A)_*^{-1} = \Omega_G : T_A G \to \mathfrak{g} \tag{3}$$

Además un cálculo de la diferencial exterior de Ω_G da

$$d\Omega_G(X, Y) = X(\Omega_G(Y)) - Y(\Omega_G(X)) - \Omega_G([X, Y])$$

Si tomamos X, Y campos invariantes por la izquierda, los dos primeros sumandos se anulan y queda

$$d\Omega_G(X, Y) + [\Omega_G(X), \Omega_G(Y)] = 0$$

pero esto es verdad punto a punto sobre vectores tangentes, por lo que se tiene la ecuación estructural

$$d\Omega_G + \frac{1}{2}[\Omega_G, \Omega_G] = 0 \tag{4}$$

Por otra parte, Ω_G es invariante por traslaciones a la izquierda, es decir si $A \in G$

$$(L_A)^* \Omega_G = \Omega_G \tag{5}$$

1.3.2. Derivada de Darboux. Condiciones de integrabilidad

Sea S es una variedad diferenciable G un grupo de Lie y $\mathbf{u} : S \to G$ aplicación diferenciable. Se denomina derivada de Darboux de $\mathbf{u}$ a la 1-forma $\Omega_{\mathbf{u}} = \mathbf{u}^* \Omega_G \in \Omega^1(S, \mathfrak{g})$.

Fijada $\omega \in \Omega^1(S, \mathfrak{g})$ se plantea el siguiente problema

1) Establecer condiciones necesarias y suficientes para que exista $\mathbf{u} : S \to G$ diferenciable con $\Omega_{\mathbf{u}} = \omega$

2) Determinar todas las funciones $\mathbf{u}$.

La solución al problema constituye (una generalización de) el Teorema Fundamental del Cálculo, que tiene como caso particular el bien conocido teorema para la determinación de primitivas $F(x)$ de $f(x)dx$ para funciones reales de variable real.

Usando (**??**) y (**??**), se ve que también se verifica

$$d\Omega_{\mathbf{u}} + \frac{1}{2}[\Omega_{\mathbf{u}}, \Omega_{\mathbf{u}}] = 0 \tag{6}$$

Por otra parte, usando (5) es fácil probar que si $A \in G$

$$\Omega_{A\mathbf{u}} = \Omega_{\mathbf{u}} \tag{7}$$

ya que $\Omega_{A\mathbf{u}} = (L_A \circ \mathbf{u})^* \Omega_G = \mathbf{u}^* (L_A)^* \Omega_G = \mathbf{u}^* \Omega_G = \Omega_{\mathbf{u}}$.

Tenemos el siguiente

Teorema Fundamental de Integrabilidad *Sea S variedad diferenciable, G grupo de Lie con álgebra de lie $\mathfrak{g}$ y sea $\omega \in \Omega^1(S, \mathfrak{g})$. Se plantea encontrar todas las soluciones $\mathbf{u} : S \to G$ (si existen) de la ecuación*

$$\Omega_{\mathbf{u}} = \omega \tag{8}$$

Entonces:

(a) La condición necesaria y suficiente para que exista $\mathbf{u} : S \to G$ diferenciable tal que $\Omega_{\mathbf{u}} = \omega$ es que se verifique

$$d\omega + \frac{1}{2}[\omega, \omega] = 0$$

(b) Supuesto que existe $\mathbf{u}_0 : S \to G$ diferenciable solución de (8) todas las soluciones de (8) son de la forma

$$\mathbf{u} = A\mathbf{u}_0 \text{ con } A \in G$$

En particular, cualquier solución $\mathbf{u} : S \to G$ viene unívocamente determinada por el valor que toma sobre un punto dado de S.

1.3.3. Referencias en un espacio de Klein.

En lo que sigue $E = (E, G, \lambda)$ es una geometría (fiel) de Klein. Fijado un origen $o \in E$, es $G_o = \{A \in G : A.o = o\}$ su grupo de isotropía. La proyección $\pi : G \ni A \to \lambda_A(o) \in E$, induce en G una estructura natural de fibrado principal (con base E y grupo $G_o = \{A \in G : \lambda_A(o) = o\}$), (ver definición y notaciones en 1.1.1). G se puede considerar como un fibrado de referencias en el siguiente sentido:

Referencias en un punto Una referencia (o mas exactamente o-referencia) en un punto (o con origen en) $a \in E$, es un elemento $u \in G$, tal que $\pi(u) = a$. Así $\pi^{-1}(a)$ es el conjunto de las referencias en el punto a. Cuando se ve a G como el conjunto de todas las referencias. Lo denotamos por $o(E) = \{u : u \in G\}$ y la proyección $\pi : o(E) \to E$, que hace corresponder a cada referencia u, su origen $a = u.o \in E$, es entonces un fibrado (de referencias) con fibra G_o. Así $o(E, a) = \{uK : K \in G_o\}$

Si $u \in o(E, a)$, y $A \in G$ transforma a en $\lambda_A(a) = b$, entonces se entiende que A transforma la referencia u en la $(\lambda_A)_* u = Au \in o(E, b)$. Recíprocamente si $u \in o(E, a)$, y $\overline{u} \in o(E, \overline{a})$ existe una única transformación λ_A con $A = u^{-1}\overline{u}$ que transforma la referencia u en la $\overline{u}$.

Referencias móviles. Una referencia móvil (local) en torno a un punto $a \in E$, es una sección local del fibrado de referencias $\pi : o(E) \to E$, es decir, es una aplicación diferenciable $\mathbf{u} : \mathcal{U} \to G$ donde $\mathcal{U}$ es un entorno de a en E, y $u(x) \in o(E, x)$ para todo $x \in \mathcal{U}$. De hecho, E admite referencias móviles $\mathbf{u}$ en torno a cada punto a con un valor predeterminado $\mathbf{u}(a) = u \in o(E, a)$. Esta afirmación, equivale justamente a admitir que $o(E)$ es fibrado principal de base E y grupo G_o

Referencias en variedades. Sea $f : S \to E$ variedad diferenciable sumergida en el espacio de Klein $E = (E, G, \lambda)$

El conjunto de las referencias a lo largo de f, $o(f)$ se construye como el pullback por f del fibrado de referencias $o(E)$, es decir $o(f) = \cup_{s \in S} o(f, s) = f^* G(E) \to S$ donde para cada $s \in S$ es

$$o(f, s) = o(E, f(s)) = \{u \in o(E) : \pi(u) \in f(s)\}$$

y tiene por tanto estructura natural de fibrado principal $o(f) \to S$ con fibra el grupo G_o

Referencias móviles en variedades. Una referencia (móvil) a lo largo de f es una sección (local) $\mathbf{u}$ del fibrado $o(f) \to S$ de referencias en f. Por tanto $\mathbf{u} : S \to G$ es una aplicación diferenciable, tal que $\pi(\mathbf{u}(s)) = f(s)$ para todo $s \in S$. Denotamos por $\Gamma(o(f))$ la familia de tales referencias.

La forma de Darboux de una referencia movil. Si $\mathbf{u} \in \Gamma(o(f))$ la 1-forma $\Omega_{\mathbf{u}} = \mathbf{u}^* \Omega_G \in \Omega^1(S, \mathfrak{g})$ .se denomina forma Maurer Cartan asociada a $\mathbf{u}$. El Teorema Fundamental 1.3.2 es la clave que nos permitirá usar la forma Darboux como potente herramienta para la clasificación de variedades.

1.3.4. Referencias de Frenet.

Supongamos que tenemos una familia admisible $\mathcal{F} = \{(f : S)\}$ de p-variedades de E, y que disponemos de un procedimiento algorítmico-geométrico para construir a partir de cada f una familia $\{\mathbf{u}_f\}$ de referencias móviles (elementos de $\Gamma(o(f))$), y que todas ellas se pueden determinar a partir de una dada $\mathbf{u} \in \{\mathbf{u}_f\}$ por traslación a la derecha respecto a elementos de cierto subgrupo $G_\infty \subset G_0$ es decir

$$\{\mathbf{u}_f\} = \{\mathbf{u}\mathbf{K} : \mathbf{K} : S \to G_\infty \text{ diferenciable}\}$$

El procedimiento no debe depender de la parametrización en el sentido de que si $\overline{f} : \overline{S} \to E$, variedad p-dimensional sumergida, $\phi : S \to \overline{S}$ es difeomorfismo y $f = \overline{f} \circ \phi$ (i.e.$(f : S) = (\overline{f} : \overline{S})$) entonces $\{\mathbf{u}_f\} = \left\{\mathbf{u}_{\overline{f}} \circ \phi\right\}$.

Además se debe verificar la siguiente propiedad:

$$\widetilde{f} = \lambda_A \circ f \text{ para } A \in G, \text{ y } \mathbf{u} \in \{\mathbf{u}_f\} \Rightarrow A\mathbf{u} = \widetilde{\mathbf{u}} \in \left\{\mathbf{u}_{\widetilde{f}}\right\}$$

Denotamos $\{\Omega_f\} = \left\{\Omega_{\{\mathbf{u}_f\}}\right\}$.

De esta forma nos aseguramos que la asignación $f \rightsquigarrow \{\Omega_f\}$ constituye un invariante geométrico

Teorema. La asignación $f \rightsquigarrow \{\Omega_f\}$ constituye un invariante completo para la clasificación de variedades de $\mathcal{F}$. Es decir:

Sean $f, \widetilde{f} : S \to \mathcal{E}$, subvariedades de $\mathcal{F}$ entonces:

$$\{\Omega_f\} = \left\{\Omega_{\widetilde{f}}\right\} \Longleftrightarrow \exists A \in G \text{ con } \widetilde{f} = \lambda_A \circ f$$

Demostración.

La afirmación $\Rightarrow$ es consecuencia directa del TFC 1.3.2 pues si $\Omega_{\mathbf{u}} = \Omega_{\widetilde{\mathbf{u}}}$ para ciertos $\mathbf{u} \in \{\mathbf{u}_f\}$, $\widetilde{\mathbf{u}} \in \left\{\mathbf{u}_{\widetilde{f}}\right\}$ entonces

$$\Omega_{\mathbf{u}} = \Omega_{\widetilde{\mathbf{u}}} \Rightarrow \exists A \in G \text{ con } \widetilde{\mathbf{u}} = A\mathbf{u} \Rightarrow \widetilde{f} = \widetilde{\mathbf{u}}.o = (A\mathbf{u}).o = \lambda_A \circ f$$

La implicación $\Leftarrow$. es consecuencia de que si $\mathbf{u} \in \{\mathbf{u}_f\} \Rightarrow A\mathbf{u} = \widetilde{\mathbf{u}} \in \left\{\mathbf{u}_{\widetilde{f}}\right\}$, y por TCF 1.3.2 es $\Omega_{\mathbf{u}} = \Omega_{\widetilde{\mathbf{u}}}$ y $\{\Omega_f\} = \left\{\Omega_{\widetilde{f}}\right\}$.

Corolario. *Sean* $f : S \to E$, $\overline{f} : \overline{S} \to E$ *subvariedades de* $\mathcal{F}$, $M = (f : S)$, $\overline{M} = \left(\overline{f} : \overline{S}\right)$ *entonces son equivalentes*

i) $\exists \phi : S \to \overline{S}$ *difeomorfismo tal que* $\phi^* \left\{\Omega_{\overline{f}}\right\} = \{\Omega_f\}$

ii) *La aplicación* $\varphi : M \to \overline{M}$, $f(s) \to \overline{f}(\phi s)$ *es una congruencia.*

Observación. En el caso extremo $G_\infty = \{id\}$, entonces $\{\Omega_f\}$ consta de un único elemento Ω_f, y hay una única referencia móvil de Frenet $\mathbf{u}_f$ para cada $f \in \mathcal{F}$. La *formula* que nos da $\Omega_f \in \Omega^1(\mathbb{S}, \mathfrak{g})$ a partir de f, nos resuelve el problema a Nivel 1 el problema de clasificación.

Esto también es así en el caso G_∞ discreto, donde la colección de las $\{\Omega_f\} = \{Ad_K\omega : K \in G_\infty\}$ es *calculable* a partir de un cierto $\omega \in \{\Omega_f\}$.

Por el contrario el método pierde efectividad a medida que G_∞ aumenta. Así en el caso trivial en que $G_\infty = G_0$, el procedimiento apenas dice nada.

2. Método de las Ecuaciones reducidas.

2.1. Familias admisibles de p-variedades.

El grupo G actúa de manera natural sobre el fibrado de contacto de orden ℓ :

$$G \times \mathcal{G}_p^{\ell}(E) \to \mathcal{G}_p^{\ell}(E), \ \left(A, g_s^{\ell} f\right) \to A.g_s^{\ell} f = g_s^{\ell}(Af) \tag{9}$$

(vease epígrafe 6.2.2) y se verifica la condición de compatibilidad con $\downarrow$: $\mathcal{G}_p^{\ell}(E) \to \mathcal{G}_p^{\ell-1}(E)$ es decir

$$\downarrow (A.\sigma) = A.(\downarrow \sigma) \text{ para todo } A \in G, \ \sigma \in \mathcal{G}_p^{\ell}(E) \tag{10}$$

También es cierto que esta acción se restringe a una acción de G_o sobre el espacio de escamas de orden ℓ apoyadas en o , $\mathcal{G}_p^{\ell}(E, o)$

$$G_o \times \mathcal{G}_p^{\ell}(E, o) \to \mathcal{G}_p^{\ell}(E, o), \ (A, \sigma) \to A.\sigma = \left(\mathcal{G}_p^{\ell} \lambda_A\right)(\sigma)$$

Si $\mathcal{S} \subset \mathcal{G}_p^{\ell}(E)$, denotamos por $G.\mathcal{S} = \{A.\sigma : A \in G, \ \sigma \in \mathcal{S}\}$. Si $\mathcal{S} = G.\mathcal{S}$ diremos que $\mathcal{S}$ es geométrico. Por otra parte se define el *grupo de isotropía* de $\mathcal{S}$:

$$G_{\mathcal{S}} = \{A \in G : A.\sigma = \sigma \text{ para todo } \sigma \in \mathcal{S}\}$$

Trataremos de delimitar el contexto en el que es posible aplicar ciertos protocolos (que más adelante se expondrán) para la clasificación de p-variedades.

Supondremos en lo sucesivo que G_0 es compacto

2.1.1. Variedades de tipo constante

Una p-variedad $f : S \to E$ se dice de *tipo constante*, (brevemente, f es TC) si para cada $\ell = 1, ...$ y todo $s \in S$, los grupos de isotropía $G_{g_s^{\ell} f}$ en la acción $G \times \mathcal{G}_p^{\ell}(E) \to \mathcal{G}_p^{\ell}(E)$, están en la misma clase de conjugación $[G_{\ell}]$.

Nótese que la propiedad TC es una propiedad geométrica.

Así si f es TC, entonces para cada $s \in S$ tenemos una sucesión

$$G_{g_s^1 f} \supset \ldots \supset G_{g_s^q f} = G_{g_s^{q+1} f} = \cdots$$

y la sucesión o tipo (de isotropía) de f es

$$\left([G_{g_s^{\ell} f}]\right)_{1 \le \ell \le q}$$

donde $[H]$ denota la clase de conjugación en G de uno de sus subgrupos H.

Al entero mínimo q a partir del cual se estabiliza la sucesión se denomina orden (de estabilidad) para f,

Dos p-variedades TC $\overline{f}, f : S \to E$, $\overline{f} : \overline{S} \to E$ se dice que son del mismo tipo (de isotropía) si tienen la misma sucesión de isotropía.

La relación anterior es de equivalencia sobre la familia de p-variedades sumergidas en E, y cada clase de equivalencia $\mathcal{F}$ la denominamos *familia de admisible* Obviamente cada familia de admisibleestá asociada a una sucesión de isotropía fija $([G_{\ell}])_{1 \le \ell \le q}$ con

$$G_1 \supset \ldots \supset G_q = G_{q+1} = \cdots \tag{11}$$

Nótese que dos p-variedades de TC congruentes estan en la misma familia de TC, por tanto cada familia TC es geométrica..

2.1.2. Familias admisibles asociadas.

Asociada a una p-variedad $f_0 : S \to E$ de TC hay familia $\mathcal{F}$ de p-variedades de E de admisible con el mismo tipo de isotropía dado por la sucesión $([G_\ell])_{1\leq \ell\leq q}$ con $G_1 \supset \ldots \supset G_q = G_{q+1} = \cdots$.

Construimos la sucesión $\mathcal{F}_0 \supset \mathcal{F}_1 \supset \cdots \supset \mathcal{F}_\ell \supset \mathcal{F}_{\ell+1} \supset \cdots \supset \mathcal{F}$ de la siguiente forma:

a) Sea $\mathcal{F}_0 = \left\{(f : S) \ p\text{-variedad de } E \Big/ G_{f(s)} \in [G_0]\right\}$ obviamente $\mathcal{F}_0$ es el conjunto de todas las p-variedades de E.

b) Supuesto construido $\mathcal{F}_\ell$, se toma $\mathcal{F}_{\ell+1} = \left\{(f : S) \in \mathcal{F}_\ell \Big/ G_{g_s^{\ell+1}f} \in [G_{\ell+1}] \ \forall s\right\}$

Se define

$$\mathcal{E}^\ell = \mathcal{G}^\ell_{\mathcal{F}_\ell}(E) = \left\{g_s^\ell f \in \mathcal{G}^\ell_p(E) : (f : S) \in \mathcal{F}_\ell, \ s \in S\right\}$$

Ejercicio 1 *Para $\ell \geq 0$ probar que:*

1. *$\mathcal{E}^\ell$ coincide con $\mathcal{G}^\ell_p(E)_{[G_\ell]}$ que es el subespacio de los elementos $\gamma \in \mathcal{G}^\ell_p(E)$ tales que $G_\gamma \in [G_\ell]$ en la acción natural $G \times \mathcal{G}^\ell_p(E) \to \mathcal{G}^\ell_p(E)$.*

2. *$\mathcal{E}^\ell_o = \mathcal{G}^\ell_{\mathcal{F}_\ell}(E, o)$ coincide con $\mathcal{G}^\ell_p(E, o)_{[G_\ell]}$ en la acción $G_0 \times \mathcal{G}^\ell_p(E, o) \to \mathcal{G}^\ell_p(E, o)$.*

3. *$\mathcal{E}^\ell$ es un G/G_ℓ- fibrado homogeneo, si se supone G_0 compacto.*
   Observese que $\mathcal{E}^\ell = G\mathcal{E}^\ell_o$

   a*) El fibrado $\mathcal{E}^\ell$ se escribe como $\mathcal{E}^\ell = G\mathcal{E}^\ell_o$*

   b*) Si $\gamma \in \mathcal{G}^\ell_p(E, o)$, y $A \in G$, con $A.\gamma = \gamma$ es $A.o = o$, por tanto*

$$\{K \in G_0 : K.\gamma = \gamma\} = \{A \in G : A.\gamma = \gamma\}$$

4. *Se tiene la sucesión de epimorfismos (submersiones):*

$$\ldots \overset{\downarrow}{\to} \mathcal{E}^{\ell+1} \overset{\downarrow}{\to} \mathcal{E}^\ell \overset{\downarrow}{\to} \ldots \overset{\downarrow}{\to} \mathcal{E}^1 \overset{\downarrow}{\to} \mathcal{E}^0 = E$$

Se denomina a cada $\mathcal{F}_\ell$ familia admisible de orden ℓ (asociada a la familia admisible$\mathcal{F}$). De hecho se verá que la sucesión $\mathcal{F}_0 \supset \mathcal{F}_1 \supset \cdots \supset \mathcal{F}_\rho = \mathcal{F}_{\rho+1} = \ldots$ se estabiliza para un cierto ρ con $\rho \leq q+1$, y $\mathcal{F}_\rho = \mathcal{F}$.

Por tanto para $1 \leq \ell$ se verifican las siguientes propiedades

A1) El conjunto $\mathcal{E}^\ell = \left\{g_s^\ell(f) : (f : S) \in \mathcal{F}, \ s \in S\right\}$ es una subvariedad de $\mathcal{G}^\ell_p(E)$

A2) La acción $G \times \mathcal{E}^\ell \to \mathcal{E}^\ell$ restringida de la natural $G \times \mathcal{G}^\ell_p(E) \to \mathcal{G}^\ell_p(E)$, da a $\mathcal{G}^\ell_{\mathcal{F}}(E)$ estructura de $G/[G_\ell]$-fibrado homogeneo.

2.1.3. Referenciales de contacto: Ecuaciones reducidas.

Supondremos inicialmente que G_o es compacto. No obstante la construcción que vamos a exponer aquí podría ser válida en un contexto más general. Sería interesante reconocer cual es la condición (necesaria y suficiente) que debería imponerse a G_0 para que esta construcción siga funcionando (ver párrafo **??**).

Sea $\mathbf{f} : S \to E$ una p-variedad con isotropía homogenea, y $\mathcal{F}$ la familia de p-variedades, de la misma clase de isotropía que $\mathbf{f}$. Fijemos un $\mathbf{s} \in S$, $\mathbf{f}(\mathbf{s}) = o$, a partir del cual construimos los grupos de isotropía $G_\ell = G_{g^\ell_{\mathbf{s}}\mathbf{f}}$ que dan lugar a la sucesión encajada de subgrupos $G_0 \supset G_1 \ldots \supset G_q = G_{q+1} = \cdots$.

Nuestro objetivo es explicitar un algoritmo preciso para la construcción para cada ℓ con $0 \le \ell \le q+1$ de una G_ℓ-reducción $\mathcal{O}^\ell$ del $G/[G_\ell]$ fibrado, $\mathcal{E}^\ell$ de manera que se tenga la siguiente sucesión de epimorfismos

$$.. \overset{\downarrow}{\to} \mathcal{O}^{\ell+1} \overset{\downarrow}{\to} \mathcal{O}^\ell \overset{\downarrow}{\to} ... \overset{\downarrow}{\to} \mathcal{O}^1 \overset{\downarrow}{\to} \mathcal{O}^0 = o$$

esto nos permitirá establecer un teorema de clasificación, cuyo resultado final es que si $\sigma^\ell : G.\mathcal{O}^\ell \to \mathcal{O}^\ell$ es la proyección natural, y $\sigma^\ell_s f = \sigma^\ell\left(g^\ell_s f\right)$ entonces la asignación

$$f \to \sigma^{\rho+1} f : S_f \to \mathcal{O}^{\rho+1}$$

determina un sistema completo.de invariantes para la familia restringida *proxima a* $\mathbf{f}$:

$$\mathcal{F}_{\rho+1} = \left\{f,\ p\text{-variedad de } E : im(\left(g^{\rho+1} f\right) \subset G.\mathcal{O}^{\rho+1}\right\}$$

Definición 2 *Llamamos a esta sucesión* $\left(\mathcal{O}^\ell\right)_{0\le\ell}$ *un referencial de contacto (para* $\mathcal{F}$*).*

El algoritmo general de construcción podría ser el siguiente

1. Partimos de $\mathcal{O}^0 = \{o\}$, que puede considerarse G_o-reducción de $\mathcal{E}^0 = E$.
2. Supóngase construidas para cada $l \le \ell$ una G_l-reducción $\mathcal{O}^l$ de $\mathcal{G}^l_{\mathcal{F}}(E)$ de forma que se tengan los epimorfismos

$$\mathcal{O}^\ell \overset{\downarrow}{\to} \mathcal{O}^{\ell-1} \overset{\downarrow}{\to} ... \overset{\downarrow}{\to} \mathcal{O}^1 \overset{\downarrow}{\to} \mathcal{O}^0 = o \tag{12}$$

   Construimos $\mathcal{O}^{\ell+1}$ de la siguiente forma:

   a) El conjunto $\mathcal{G}^{\ell+1}_{\mathcal{F}_\ell}\left(E, \mathcal{O}^\ell\right) = \left\{\gamma \in \mathcal{G}^{\ell+1}_{\mathcal{F}_\ell}(E) : \downarrow \gamma \in \mathcal{O}^\ell\right\}$ es un abierto G_ℓ-invariante de $\mathcal{G}^{\ell+1}_{\mathcal{F}_\ell}(E)$

   b) En la acción $G_\ell \times \mathcal{G}^{\ell+1}_{\mathcal{F}_{\ell+1}}\left(E, \mathcal{O}^\ell\right) \to \mathcal{G}^{\ell+1}_{\mathcal{F}_{\ell+1}}\left(E, \mathcal{O}^\ell\right)$ aparece $[G_{\ell+1}]$ como única isotropía. Una $G_{\ell+1}$ reducción $\mathcal{O}^{\ell+1}$ del $G_\ell/[G_{\ell+1}]$ fibrado $\mathcal{G}^{\ell+1}_{\mathcal{F}_{\ell+1}}\left(E, \mathcal{O}^\ell\right)$ es $G_{\ell+1}$-reducción de $\mathcal{G}^{\ell+1}_{\mathcal{F}_{\ell+1}}(E)$ como $G/G_{\ell+1}$ fibrado

   c) La aplicación $\mathcal{O}^{\ell+1} \overset{\downarrow}{\to} \mathcal{O}^\ell$ es una submersión, cuya imagen es un abierto de $\mathcal{O}^\ell$.
   podemos suponer sin pérdida de generalidad $\downarrow \mathcal{O}^{\ell+1} = \mathcal{O}^\ell$ y hacer (si fuera necesario) una restricción abierta en la sucesión (12)

3. Tomando $\ell = q$, como $G_q = G_{q+1}$ se concluye que

$$\begin{aligned} \mathcal{O}^{q+1} &= \left\{\gamma \in \mathcal{G}^{q+1}_{\mathcal{F}_{q+1}}(E, \mathcal{O}^q) : A.\gamma = \gamma\ \forall A \in G_q\right\} \\ &= \mathcal{G}^{q+1}_{\mathcal{F}_{q+1}}(E, \mathcal{O}^q) \end{aligned}$$

   es la reducción correspondiente de $\mathcal{E}^{q+1}$

4. A partir de aquí se continua $\mathcal{O}^{q+2} = \mathcal{G}^{q+2}_{\mathcal{F}_{q+2}}\left(E, \mathcal{O}^{q+1}\right)$....etc

En la práctica el cálculo y manejo de las acciones $G \times \mathcal{G}^{\ell}_{p}(E) \to \mathcal{G}^{\ell}_{p}(E)$ suele ser complicado.

Intentaremos mas adelante otra vía para la construcción de los $\mathcal{E}^{\ell}$ y $\mathcal{O}^{\ell}$, usando inductivamente la acción del grupo sobre sobre determinados espacios de Grassmannianas de fibrados homogeneos.

Ejercicio 3 *Probar que la sucesión de epimorfismos* $\mathcal{O}^{\ell+1} \xrightarrow{\downarrow} \mathcal{O}^{\ell} \xrightarrow{\downarrow} \cdots \xrightarrow{\downarrow} \mathcal{O}^{2} \xrightarrow{\downarrow} \mathcal{O}^{(1)} \xrightarrow{\downarrow} o$ *permite construir inductivamente, un sistema de coordenadas* $\left(\kappa^{1}, \ldots \kappa^{\mu_{\ell+1}}\right)$ *para* $\mathcal{O}^{\ell+1}$ *de forma que* $\left(\kappa^{1}, \ldots \kappa^{\mu_{\ell+1}}\right) = \downarrow_{\ell}\left(\kappa^{1}, \ldots \kappa^{\mu_{\ell}}\right)$ *es sistema de coordenadas para* $\mathcal{O}^{\ell}$ *para* $1 \leq \ell$.

En principio se necesita establecer coordenadas para los fibrados de escamas $\mathcal{G}^{\ell}_{p}(E, o)$, que podrían identificarse con el modelo analítico $J^{r}_{p}(\mathbb{R}^{c}, 0) \to \mathbb{G}^{r}_{p,m}$ con la ayuda de una carta $(x_1, \ldots, x_m)$ centrada en el origen $o \in E$. (ver epígrafe 6.2.4 en pág 80)...esto da lugar a las coordenadas

$$\left(\left(x^{\lambda}_{\alpha_1}\right), \left(x^{\lambda}_{\alpha_1\alpha_2}\right), \ldots, \; \left(x^{\lambda}_{\alpha_1\ldots\alpha_\ell}\right)\right)^{p<\lambda\leq m}_{1\leq\alpha_1\ldots\leq\alpha_\ell\leq p}$$

donde

$$x^{\lambda}_{\alpha_1\ldots\alpha_r} = \left.\frac{\partial^{(\Sigma\alpha_i)}\zeta_\lambda}{\partial u_{\alpha_1}\cdots\partial u_{\alpha_r}}\right|_0$$

según el esquema de las fórmulas (82) en pág 79. Es decir, un *punto* de $\mathcal{G}^{\ell}_{p}(E, o)$ con las coordenadas anteriores, está representado por el contacto de orden ℓ en el origen dado por la variedad M que se describe en las coordenadas $(x_1, \ldots, x_m)$ por

$$\begin{cases} x_\alpha = u_\alpha \\ x_\lambda = \zeta_\lambda(u_1, \ldots u_p) \end{cases}$$

$$\zeta_\lambda = \sum_{r=1}^{\ell} \sum_{1\leq\alpha_1\ldots\leq\alpha_r\leq p} \frac{1}{(\Sigma\alpha_i)!} x^{\lambda}_{\alpha_1\ldots\alpha_r} u_{\alpha_1}\cdots u_{\alpha_r}$$

Una vez fijado el sistema de coordenadas $\left(\kappa^{1}, \ldots \kappa^{\mu_{\ell}}\right)$ para los $\mathcal{O}^{\ell}$ según el esquema del ejercicio 3, las ecuaciones paramétricas de cada $\mathcal{O}^{r}$ $1 \leq r \leq \ell$, como subvariedad de $\mathcal{G}^{r}_{p}(E, o)$ en las anteriores coordenadas, podrán describirse como funciones:

$$x^{\lambda}_{\alpha_1\ldots\alpha_r} = \chi^{\lambda}_{\alpha_1\ldots\alpha_r}\left(\kappa^{1}, \ldots \kappa^{\mu_r}\right)$$

y un punto genérico $\gamma \in \mathcal{O}^{\ell}$ se identifica con las *ecuaciones reducidas*

$$\begin{cases} x_\alpha = u_\alpha \\ x_\lambda = \zeta_\lambda(u_1, \ldots u_p) \end{cases}$$

$$\zeta_\lambda = \sum_{r=1}^{\ell} \sum_{1\leq\alpha_1\ldots\leq\alpha_r\leq p} \frac{1}{(\Sigma\alpha_i)!} \chi^{\lambda}_{\alpha_1\ldots\alpha_r}\left(\kappa^{1}\gamma, \ldots \kappa^{\mu_r}\gamma\right) u_{\alpha_1}\cdots u_{\alpha_r}$$

Una p-variedad $(f : S)$ de E se dice $\mathcal{O}^{\ell}$-admisible si $g^{\ell}_{s}f \in G.\mathcal{O}^{\ell}$ $\forall s$, y entonces $\sigma^{\ell}_{s}f = \sigma^{\ell}\left(g^{\ell}_{s}f\right) \in \mathcal{O}^{\ell}$ representa en este sentido la *ecuación reducida* de orden ℓ para f en s.

2.1.4. Referencias adaptadas.

Supongamos fijado de una vez por todas un referencial $\left(\mathcal{O}^\ell\right)$

Nótese que una referencia $\mathcal{O}^\ell$-adaptada, $u \in o(f,s)$, es exactamente una referencia $u \in \mathcal{O}^\ell\left(g^\ell f, s\right)$ de $G.\mathcal{O}^\ell$. (Ver epígrafe 6.3.5). Por tanto, el espacio $\mathcal{O}^\ell\left(g^\ell f\right) \to S$ constituye un fibrado sobre S y grupo G_ℓ

Si denotamos por $\mathcal{O}^\ell(f) = \mathcal{O}^\ell\left(g^\ell f\right)$ al fibrado de referencias $\mathcal{O}^\ell$-adaptadas, se tiene:

$$\mathcal{O}^\ell(f) \subset \mathcal{O}^{\ell-1}(f) \subset \cdots \subset o(f)$$

Denotamos en general para $u \in o(f,s)$

$$\gamma_u^\ell f = u^{-1}.g_s^\ell(f)$$

observese la siguiente identidad:

$$\gamma_{uK}^\ell(f) = K^{-1}.\left(\gamma_u^\ell f\right) \text{ para todo } K \in G_o \tag{13}$$

y además, debido a la igualdad (10), para todo $\ell = 1, \ldots$, se tiene

$$\downarrow\left(\gamma_u^\ell f\right) = \gamma_u^{\ell-1} f \tag{14}$$

2.1.5. Ecuaciones reducidas y orden de contacto geométrico.

La proyección (ver (89)):

$$\sigma^\ell : G.\mathcal{O}^\ell \to \mathcal{O}^\ell,\ x \to (G.x) \cap \mathcal{O}^\ell$$

permite definir para $(f:S)$ variedad admisible la aplicación

$$\sigma^\ell f : S \to \mathcal{O}^\ell,\ s \to \sigma_s^\ell f = \sigma^\ell\left(g_s^\ell f\right)$$

llamamos a $\sigma_s^\ell f$ *ecuación reducida de orden* ℓ de f en s.

Proposición 4 *La aplicación $\sigma^\ell f : S \to \mathcal{O}^\ell \quad s \to \sigma_s^\ell f$ es diferenciable, y la asignación $f \to \sigma^\ell f$ constituye un invariante de orden ℓ para las p-variedades admisibles de E.*

Proposición 5 *Sean $M = (f:S)$, $\overline{M} = \left(\overline{f}:\overline{S}\right)$ dos variedades admisibles de dimensión de E, y sean $a = f(s)$, y $\overline{a} = \overline{f}(\overline{s})$. Entonces, el orden de contacto geométrico (ver apartado 1.2.5) de M y $\overline{M}$ en a, es al menos ℓ, si y solo si $\sigma_s^\ell f = \sigma_{\overline{s}}^\ell \overline{f}$.*

Demostración. Si existe $A \in G$, tal que $g_s^\ell(\lambda_A \circ f) = g_{\overline{s}}^\ell \overline{f}$, usando proposición 4 se tiene:

$$\begin{aligned}\sigma_s^\ell f = \sigma_s^\ell(\lambda_A \circ f) &= \sigma^\ell\left(g_s^\ell(\lambda_A \circ f)\right)\\ &= \sigma^{\ell+1}\left(g_{\overline{s}}^\ell \overline{f}\right) = \sigma_{\overline{s}}^\ell \overline{f}\end{aligned}$$

Recíprocamente, supongamos $\sigma = \sigma_s^\ell f = \sigma_{\overline{s}}^\ell \overline{f}$, y fijemos $u \in \mathcal{O}^\ell(f,s)$, $\overline{u} \in \mathcal{O}^\ell\left(\overline{f},\overline{s}\right)$ sendas referencias de orden ℓ en $a \in M$, y $\overline{a} \in \overline{M}$ respectivamente. Entonces

$$u.\sigma = g_s^\ell f,\ \overline{u}.\sigma = g_{\overline{s}}^\ell \overline{f}$$

y existe $K \in G_\ell$, tal que $\gamma_u^{\ell+1}(\lambda_K \circ f) = \gamma_{\overline{u}}^{\ell+1}\overline{f}$. Llamando $v = uK^{-1} \in \mathcal{O}^\ell(f,s)$ se tiene por (13)

$$\gamma_v^{\ell+1}(f) = \gamma_{\overline{u}}^{\ell+1}\overline{f} \Rightarrow \left(\overline{u}v^{-1}\right).\left(g_s^{\ell+1} f\right) = g_{\overline{s}}^{\ell+1}\overline{f}$$

Esto significa que $A.g_s^\ell f = g_{\overline{s}}^\ell \overline{f}$ para $A = \overline{u}u^{-1}$, y se tiene que $(\lambda_A \circ f : S)$, $\left(\overline{f}:\overline{S}\right)$ tiene contacto de orden ℓ en s y $\overline{s}$. ∎

2.1.6. Referencias de Frenet.

Una referencia $\mathcal{O}^q$-adaptada a f en $s \in S$ se denomina referencia de Frenet. Así

$$\mathcal{O}^q(f,s) = \{u \in o(f,s) : \gamma_u^q f \in \mathcal{O}^q\}$$

constituye el conjunto de referencias de Frenet en s, y $\mathcal{O}^q(f) \to S$ es un fibrado principal de grupo G_q. y sus secciones $\mathbf{u} \in \Gamma(\mathcal{O}^q(f))$ son las referencias móviles de Frenet.

El hecho relevante ahora es que si $f \in \mathcal{F}$ y $u \in \mathcal{O}^q(f,s)$ entonces $g_s^q\left(u^{-1}f\right) \in \mathcal{O}^q$ entonces como $u^{-1}f \in \mathcal{F}$

$$G_{g_s^q(u^{-1}f)} = G_q = G_{q+1} = G_{g_s^{q+1}(u^{-1}f)}$$

se verifica: $\sigma_s^{q+1}f = g_s^{q+1}\left(u^{-1}f\right) \in \mathcal{O}^{q+1}$ por tanto $u \in \mathcal{O}^{q+1}(f,s)$. Usando la observación **??** se tiene:

Proposición 6 *Si $\mathbf{u} : S \to G$ es una $\mathcal{O}^q$-referencia movil para $f \in \mathcal{F}_{q+r}$, entonces también es $\mathcal{O}^{q+r}$-referencia movil para todo $r \geq 1$. O tambien*

$$\mathcal{O}^q(f,s) = \mathcal{O}^{q+r}(f,s) \;\; \forall s \in S$$

En el caso en que $G_q = \{e\}$, tenemos que $\mathcal{O}^q(f,s) = \{\mathbf{u}_f(s)\}$ se reduce a un punto para cada $s \in S$, y se denomina f-referencia de Frenet en s. Así las cosas, existe una única $\mathbf{u}_f : S \to \mathcal{O}^q(f)$ diferenciable, que es referencia móvil de Frenet,y que denotamos por $\mathbf{u}_f$

En el caso general, nótese que fijada una referencia móvil de Frenet $\mathbf{u}$, todas las demás se obtienen a partir de ella a través de una aplicación diferenciable $\mathbf{K} : S \to G_q$ mediante la fórmula:

$$\mathbf{v}(s) = \mathbf{u}(s)\,\mathbf{K}(s)$$

En el caso *genérico* la aplicación $\mathbf{K} : S \to G_q$ es (localmente) constante, pues G_q es discreto.

2.2. Ecuaciones estructurales.

Sea $\mathcal{F}$ una familia admisible de p-variedades y sucesión de isotropía generada por $G_0 \supset G_1 \ldots \supset G_q = G_{q+1} = \cdots$

Sean $\mathfrak{g}_0 \supset \mathfrak{g}_1 \ldots \supset \mathfrak{g}_q = \mathfrak{g}_{q+1}$ las correspondientes álgebras de Lie. Se toman entonces complementarios $\mathfrak{m}_\ell$ con $\mathfrak{g}_{\ell-1} = \mathfrak{m}_\ell \oplus \mathfrak{g}_\ell$ para $\ell \geq 1$, y $\mathfrak{m}_0$ con $\mathfrak{g} = \mathfrak{m}_0 \oplus \mathfrak{g}_0$, de forma que al final se tiene la descomposición

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{m}_0 \oplus \mathfrak{m}_1 \oplus \cdots \mathfrak{m}_q \oplus \mathfrak{g}_q$$

Tenemos entonces

$$\mathfrak{g}/\mathfrak{g}_\ell \simeq \mathfrak{m}_0 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{m}_\ell, \; \mathfrak{g}_{\ell-1}/\mathfrak{g}_\ell \simeq \mathfrak{m}_\ell$$

Sea $\dim \mathfrak{m}_\ell = m_\ell - m_{\ell-1}$ y $m_0 = m = \dim \mathfrak{m}_0 = \dim E$.

Se supone construida una base $(e_1 \ldots, e_r)$ de $\mathfrak{g}$ de forma que $(e_i : 0 < i \leq m_0)$ es base de $\mathfrak{g}/\mathfrak{g}_0 \simeq \mathfrak{m}_0 \simeq T_oE$, y en general $(e_i : 1 \leq i \leq m_\ell)$ en es una base de $\mathfrak{m}_0 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{m}_\ell \simeq \mathfrak{g}/\mathfrak{g}_\ell$. Obsérvese $(e_i + \mathfrak{g}_\ell : 0 \leq i \leq m_\ell)$ es base de $\mathfrak{g}/\mathfrak{g}_\ell$. Sin embargo en lo sucesivo no se hará distinción explícita entre las dos bases.

2.2.1. Definiciones y Notaciones preliminares.

Si $(f:S)$ es $\mathcal{O}^{\ell}$-admisible se define para $\mu_{\ell-1} \leq \nu \leq \mu_{\ell}$ las curvaturas de orden ℓ:

$$\kappa^{\nu} f : S \to \mathbb{R},\ s \to \kappa_s^{\nu} f = \kappa^{\nu}\left(\sigma_s^{\ell} f\right)$$

Siendo las (κ^{ν}) el sistema de coordenadas para los $\mathcal{O}^{\ell}$ establecidas en el ejercicio 3

Así $(\kappa_s^{\nu}(f) : 1 \leq \nu \leq \mu_{\ell})$ son las coordenadas de $\sigma_s^{\ell} f \in \mathcal{O}^{\ell}$ en este sistema y se concluye que localmente los invariantes σ^{ℓ} y $(\kappa^{\nu} : 1 \leq \nu \leq \mu_{\ell})$ son esencialmente los mismos. Así decir que dos variedades admisibles $f\ \overline{f} : S \to E$, tienen los mismos invariantes hasta el orden ℓ significa que $\sigma^{\ell} f = \sigma^{\ell}\overline{f}$ o también que $\kappa^{\nu} f = \kappa^{\nu}\overline{f}$ para $1 \leq \nu \leq \mu_{\ell}$. Entonces por la proposición 4 tienen en cada $s \in S$, orden de contacto geométrico al menos ℓ.

Si $f \in \mathcal{F}_q$ es $\mathcal{O}^{q}$-admisible, entonces por (**??**), es $\mathcal{O}^{q+1}$-admisible y

$$\left(\kappa^{\nu}(f) : 1 \leq \nu \leq \mu_{q+1}\right)$$

es el sistema de curvaturas de f.

Como criterio de variación de subíndices adoptamos el siguiente que complementa el cuadro (**??**)

Nombre	Intervalo
$a,\ b,\ c$	$1 \leq \bigstar \leq r$
$\widetilde{a},\ \widetilde{b},\ \widetilde{c}$	$p+1 \leq \bigstar \leq r$
$\alpha,\ \beta,\ \gamma$	$1 \leq \bigstar \leq p$
$\widetilde{\alpha}_{\ell},\ \widetilde{\beta}_{\ell},\ \widetilde{\gamma}_{\ell}$	$p+1 \leq \bigstar \leq m_{\ell}$
$\alpha_{\ell},\ \beta_{\ell},\ \gamma_{\ell}$	$m_{\ell-1} < \bigstar \leq m_{\ell}$
$i_{\ell},\ j_{\ell}$	$1 \leq \bigstar \leq m_{\ell}$
ν_{ℓ}, τ_{ℓ}	$1 \leq \bigstar \leq \mu_{\ell}$

$$\left\{\begin{array}{l} r = \dim G \\ p = \dim S \\ m_{\ell} = \dim \mathfrak{g}/\mathfrak{g}_{\ell} \\ \mu_{\ell} = \dim W^{\ell} \\ n_{\ell} = m_{\ell} - m_{\ell-1} \\ m_0 = m,\ m_{-1} = 0 \end{array}\right. \tag{15}$$

Así por ejemplo, escribiremos $(e_{i_{\ell}})$ en lugar de $(e_i : 1 \leq i \leq m_{\ell})$

2.2.2. Forma de Frenet y cobases ℓ-adaptadas.

Una referencia móvil $\mathbf{u} \in \Gamma(o(f))$ se dice $\mathcal{O}^{\ell}$-adaptada (o de orden ℓ) si lo es $\mathbf{u}(s)$ para todo $s \in S$. Es decir $\mathbf{u}(s)^{-1}.g_s^{\ell}(f) \in \mathcal{O}^{\ell}$ para todo $s \in S$. Esto significa que $\mathbf{u} \in \Gamma\left(\mathcal{O}^{\ell}(f)\right)$ es una sección del fibrado $\mathcal{O}^{\ell}(f) \to S$.

Nótese que una referencia (móvil) $\mathcal{O}^{\ell}$-adaptada es $\mathcal{O}^{l}$-adaptada para $1 \leq l \leq \ell$.

Forma de Frenet Asociada a $\mathbf{u} \in \Gamma\left(\mathcal{O}^{\ell}(f)\right)$ podemos construir la forma vertical $\Omega_{\mathbf{u}}(\operatorname{mod}\mathfrak{g}_{\ell}) = \Theta_{\mathbf{u}}^{\ell} \in \Omega^1(S, \mathfrak{g}/\mathfrak{g}_{\ell})$ introducida en el párrafo 6.4.4 donde $\Omega \in \Omega^1(G, \mathfrak{g})$ es la forma de Cartan de G, y $\Omega_{\mathbf{u}} = \mathbf{u}^*\Omega \in \Omega^1(S, \mathfrak{g})$.

Se denomina a $\Theta_{\mathbf{u}}^{\ell}$ forma de Frenet de orden ℓ.

Nota 7 *De hecho $\Theta_{\mathbf{u}}^{\ell}(s)$ solo depende de $u = \mathbf{u}(s) \in \mathcal{O}^{\ell}(f,s)$ en virtud de la proposición 58 (pág 89). De acuerdo con esto denotamos $\Theta_{\mathbf{u}}^{\ell}(s) = \Theta_{u}^{\ell}(f,s)$. Usando (94) en pág 90, se concluye que para cualquier otra referencia $\overline{u} = uK \in \mathcal{O}^{\ell}(f,s)$ ($K \in G_{\ell}$) se tiene*

$$\Theta_{\overline{u}}^{\ell}(f,s) = \Theta_{uK}^{\ell}(f,s) = Ad_{K^{-1}}\Theta_{u}^{\ell}(f,s)$$

Nota 8 *Sea M es una p-variedad $\mathcal{O}^\ell$-admisible de E, y $\iota_M : M \to E$ la inclusión canónica. Tenemos entonces la igualdad tautológica*

$$M = (\iota_M : M)$$

Una referencia de orden ℓ en M para $x_0 \in M$ es un elemento $u \in \mathcal{O}^\ell(\iota_M, x_0)$, que denotamos ahora por $\mathcal{O}^\ell(M, x_0)$ y $\Theta_u^\ell(\iota_M, x_0) = \Theta_u^\ell(M, x_0)$. Así mismo denotamos $g_{x_0}^\ell \iota_M = g_{x_0}^\ell M = T_{x_o}^\ell M$, $\sigma^\ell \iota_M = \sigma_M^\ell$, $\kappa^{\nu_\ell}\iota_M = \kappa_M^{\nu_\ell}$, ...etc

Esta notación trata de indicar que todos estos elementos están asociados a la variedad M y no dependen *de la parametrización que se use para calcularlos.*

Probaremos que de hecho $\Theta_u^\ell(M, x_0)$ depende solo de $g_{x_0}^{\ell+1}M$. La demostración necesita de un lema previo, que es consecuencia directa de la proposición 6.1.4.**2** en el epígrafe 6.1.4 (página 70)

Lema 9 *Sean M y $\overline{M}$ dos p-variedades de E, y supóngase que (M, x_0) tiene un contacto de orden $\ell+1$ con $\left(\overline{M}, x_0\right)$ $(\ell \geq 0)$. Existen entonces parametrizaciones $f, \overline{f} : S \to E$ de M y $\overline{M}$ con $x_0 = f(s_0) = \overline{f}(s_0)$, $d_{s_0}f = d_{s_0}\overline{f}$ y $d_{s_0}g^\ell f = d_{s_0}g^\ell\overline{f}$.*

Nota 10 *En las condiciones de Lema anterior, podemos suponer S abierto de $\mathbb{R}^p$. Para comprobar que dos 1-formas $\theta \in T_{x_0}^*M$, $\overline{\theta} \in T_{x_0}^*\overline{M}$ son iguales, es suficiente comprobar que $f^*\theta = \overline{f}^*\overline{\theta} \in T_{s_0}^*S$, pues $f^*\theta$ y $\overline{f}^*\overline{\theta}$ determinan la escritura de θ y $\overline{\theta}$ en la cobase común inducida por f y $\overline{f}$ en $T_{x_0}^*M = T_{x_0}^*\overline{M}$*

Proposición 11 *Sean M y $\overline{M}$ dos p-variedades $\mathcal{O}^{\ell+1}$-admisibles de E, y supóngase que (M, x_0) tiene un contacto de orden $\ell+1$ con $\left(\overline{M}, x_0\right)$. Sean $\mathbf{u} : M \to G$, $\overline{\mathbf{u}} : \overline{M} \to G$ referencias móviles ℓ-adaptadas de M y $\overline{M}$ de forma que $\overline{\mathbf{u}}(x_0) = \mathbf{u}(x_0) = u$. Entonces en $\Lambda^1(T_{x_0}M, \mathfrak{g}/\mathfrak{g}_\ell) = \Lambda^1\left(T_{x_0}\overline{M}, \mathfrak{g}/\mathfrak{g}_\ell\right)$ se verifican la ifualdad:*

$$\Theta_{\mathbf{u}}^\ell(x_0) = \Theta_u^\ell(M, x_0) = \Theta_u^\ell\left(\overline{M}, x_0\right) = \Theta_{\overline{\mathbf{u}}}^\ell(x_0)$$

además, (ver notacion en nota 8)

$$d_{x_0}\left(\sigma_M^\ell\right) = d_{x_0}\left(\sigma_{\overline{M}}^\ell\right)$$

Demostración. Sean $f, \overline{f} : S \to E$ las parametrizaciones de M y $\overline{M}$ reclamadas en el Lema 9. Tenemos pues $x_0 = f(s_0) = \overline{f}(s_0)$ y además:

$$d_{s_0}f = d_{s_0}\overline{f},\ g_{s_0}^\ell f = g_{s_0}^\ell\overline{f},\ d_{s_0}g^\ell f = d_{s_0}g^\ell\overline{f} \tag{16}$$

Observese que

$$\begin{gathered} f^*\Theta_u^\ell(M, x_0) = \Theta_u^\ell(f, s_0),\ f^*d_{x_0}\left(\sigma_M^\ell\right) = \sigma_{s_0}^\ell f \\ \overline{f}^*\Theta_u^\ell\left(\overline{M}, x_0\right) = \Theta_u^\ell\left(\overline{f}, s_0\right),\ \overline{f}^*d_{x_0}\left(\sigma_{\overline{M}}^\ell\right) = \sigma_{s_0}^\ell\overline{f} \end{gathered}$$

En virtud de la nota **??** podemos hacer la comprobación demostrando que $\Theta_u^\ell(f, s_0) = \Theta_u^\ell\left(\overline{f}, s_0\right)$ y $d_{s_0}\sigma^\ell f = d_{s_0}\sigma^\ell\overline{f}$. Aplicando el Corolario 61 en pág 91, y sustituyendo en él

$$\mathcal{E} \rightsquigarrow \mathcal{E}^\ell \quad f \rightsquigarrow g^\ell f \quad \overline{f} \rightsquigarrow g^\ell\overline{f} \quad \mathcal{O} \rightsquigarrow \mathcal{O}^\ell$$

se obtiene la descomposición:

$$\begin{gathered} d_{s_0}g^\ell f = u.\Theta_u^\ell(f, s_0) + u.d_{s_0}\sigma^\ell f \\ d_{s_0}g^\ell\overline{f} = u.\Theta_u^\ell\left(\overline{f}, s_0\right) + u.d_{s_0}\sigma^\ell\overline{f} \end{gathered}$$

y como por (16) $d_{s_0}g^\ell f = d_{s_0}g^\ell\overline{f}$, se concluye $d_{s_0}\sigma^\ell f = d_{s_0}\sigma^\ell\overline{f}$ y $\Theta_u^\ell(f, s_0) = \Theta_u^\ell\left(\overline{f}, s_0\right)$ ■

Corolario 12 *La familia $\Theta_M^\ell(x_0)$ de todas las $\Theta_u^\ell M$ (ver nota 7 en pág 19) para u referencia $(\ell+1)$-adaptada de M en x_0, depende solo de la $(\ell+1)$-escama $g_{x_0}^{\ell+1}M \in \mathcal{G}_p^{\ell+1}(E)$ y constituye un G-invariante de orden $\ell+1$.*

Nota 13 *Sea $u \in \mathcal{O}^\ell(M, x_0)$ una referencia de orden ℓ en M para $x_0 \in M$, en $\Lambda^1(T_{x_0}M, \mathfrak{g}/\mathfrak{g}_\ell)$ y para todo $A \in G$ se tiene la siguiente identidad*

$$\lambda_A^* \Theta_{Au}^\ell (AM, Ax_0) = \Theta_u^\ell (M, x_0)$$

donde se entiende que $\lambda_A : M \to AM$ es la traslación por A.

Nota 14 *Si (M, x_0) tiene un G-contacto de orden $\ell+1$ con $(\overline{M}, \overline{x}_0)$, entonces (AM, Ax_0) tiene contacto de orden $\ell+1$ con $(\overline{M}, \overline{x}_0)$, para cierto $A \in G$, y podemos aplicar ahora el argumento de la proposición anterior reemplazando M por AM. Ahora es $\mathbf{v} = A\mathbf{u}$ para para cierta $\mathbf{u} : M \to G$, $\mathcal{O}^\ell$-referencia en M, y $\mathbf{v}(x_0) = \overline{\mathbf{u}}(\overline{x}_0) = A\mathbf{u}(x_0)$. Se concluye por la proposición que*

$$\Theta_{\mathbf{v}}^\ell(\overline{x}_0) = \Theta_{\overline{\mathbf{u}}}^\ell(\overline{x}_0)$$

Pero como $\lambda_A^*\Theta_{\mathbf{v}}^\ell = \Theta_{\mathbf{u}}^\ell$ (por la nota anterior), y usando la igualdad de arriba queda

$$\lambda_A^* \Theta_{\overline{\mathbf{u}}}^\ell(\overline{x}_0) = \Theta_{\mathbf{u}}^\ell(x_0)$$

o también si $u = \mathbf{u}(x_0)$

$$\lambda_A^* \Theta_{Au}^\ell (\overline{M}, \overline{x}_0) = \Theta_u^\ell (M, \overline{x}_0)$$

por tanto, si (M, x_0) tiene un G-contacto de orden $\ell+1$ con $(\overline{M}, \overline{x}_0)$, entonces si $\mathbf{u}$ y $\overline{\mathbf{u}}$ son $(\ell+1)$-referencias de M y $\overline{M}$ con $\overline{\mathbf{u}}(\overline{x}_0) = A\mathbf{u}(x_0)$ para $A \in G$ se tiene:

$$\Theta_{\overline{\mathbf{u}}}^\ell(A.\xi) = \Theta_{\mathbf{u}}^\ell(\xi), \forall \xi \in T_{x_0}M$$

Cobase adaptada. Usando la base $(e_i : 0 \le i \le m_\ell)$ de $\mathfrak{g}/\mathfrak{g}_\ell$ y una referencia movil $\mathbf{u} \in \Gamma(\mathcal{O}^\ell(f))$, podemos escribir la forma de Frenet de orden ℓ, $\Theta_{\mathbf{u}}^\ell = \sum \theta^i e_i$ con $\theta^i \in \Omega^1(S)$. Supuesto que los p primeros θ^i son independientes podemos construir una cobase (ϕ^α) de $\Omega^1(S)$ de la forma

$$\phi^\alpha = \theta^\alpha \; 1 \le \alpha \le p$$

decimos que (ϕ^α) es una cobase $\mathcal{O}^\ell$-adaptada (inducida por $\mathbf{u}$)

Una cobase (ϕ^α) de $\Omega^1(S)$ asociada a una referencia movil de Frenet $\mathbf{u} \in \Gamma(\mathcal{O}^q(f))$, se llama cobase de Frenet.

Debemos observar que la correspondencia $\mathbf{u} \rightsquigarrow (\phi^\alpha)$ es punto a punto, de forma que $(\phi^\alpha(s))$ cobase de T_sS solo depende del valor $u = \mathbf{u}(s) \in \mathcal{O}^\ell(f, s)$ (ver nota 7).

2.2.3. Ecuaciones estructurales.

El objetivo, es probar la existencia de funciones diferenciables

$$F_\beta^{\widetilde{\alpha}_\ell}\left(\kappa^1, \ldots, \kappa^{\mu_{\ell+1}}\right), \; N_\alpha^{\nu_\ell}\left(\kappa^1, \ldots, \kappa^{\mu_{\ell+1}}\right) : \mathcal{O}^{\ell+1} \to \mathbb{R} \tag{17}$$

tales que para cualquier $\mathcal{O}^{\ell+1}$-referencia movil $\mathbf{u} : S \to G$ de cualquier $\mathcal{O}^{\ell+1}$-admisible f se tengan las identidades:

$$\left\{\begin{array}{l} \theta_{\beta}^{\widetilde{\alpha}_{\ell}}\left(s\right)=F_{\beta}^{\widetilde{\alpha}_{\ell}}\left(\kappa_{s}^{1}f,\ldots,\kappa_{s}^{\mu_{\ell+1}}f\right) \\ \sigma_{\alpha}^{\nu_{\ell}}\left(s\right)=N_{\alpha}^{\nu_{\ell}}\left(\kappa_{s}^{1}f,\ldots,\kappa_{s}^{\mu_{\ell+1}}f\right) \end{array}\right. \tag{18}$$

siendo

$$\begin{array}{l} \Theta_{\mathbf{u}}^{\ell}=\Omega_{\mathbf{u}}\left(\operatorname{mod}\mathfrak{g}_{\ell}\right)=\phi^{\alpha}e_{\alpha}+\theta^{\widetilde{\alpha}_{\ell}}e_{\widetilde{\alpha}_{\ell}},\text{ con }\theta^{\widetilde{\alpha}_{\ell}}=\theta_{\beta}^{\widetilde{\alpha}_{\ell}}\phi^{\beta}\in\Omega^{1}\left(S\right) \\ d\left(\sigma^{\ell}f\right)=\sigma^{\nu_{\ell}}\left(\partial/\partial\kappa^{\nu_{\ell}}\right)\text{ con }\sigma^{\nu_{\ell}}=\sigma_{\alpha}^{\nu_{\ell}}\phi^{\alpha}\in\Omega^{1}\left(S\right) \end{array} \tag{19}$$

y ϕ^{α} cobase adaptada en S.

Nota 15 *De hecho $\sigma^{\nu_{\ell}}(s)=d_{s}\left(\kappa^{\nu_{\ell}}f\right)$ para todo s. Hay quizás en la notación un uso abusivo de la letra σ. El contexto evita que haya lugar a confusión.*

La construcción dará lugar a un sistema final de funciones $F_{\beta}^{\widetilde{\alpha}_{q}}$, $N_{\alpha}^{\nu_{q}}$ verificando en cada nivel ℓ, las ecuaciones anteriores. El sistema completo de estas ecuaciones constituyen las ecuaciones estructurales y se obtienen para $\ell=q$.

La construcción que se hará punto a punto, es válida para cada paso ℓ con $0\leq\ell\leq q$ y no tiene carácter inductivo. De hecho podríamos suponer directamente que $\ell=q$, y obtener así el sistema completo de ecuaciones estructurales.

Vamos a definir las aplicaciones

$$F_{\beta}^{\widetilde{\alpha}_{\ell}},N_{\alpha}^{\nu_{\ell}}:\mathcal{O}^{\ell+1}\rightarrow\mathbb{R}$$

Fijado $\gamma\in\mathcal{O}^{\ell+1}$:

1. Tomamos M_{γ} p-variedad, con $o\in M_{\gamma}$ y $T_{o}^{\ell+1}M_{\gamma}=\gamma$
2. Construimos $\Theta_{\gamma}^{\ell}=\Theta_{e}^{\ell}\left(M_{\gamma},o\right)\in\Lambda^{1}\left(T_{o}M_{\gamma},\mathfrak{g}/\mathfrak{g}_{\ell}\right)$, siendo $e\in G$ el elemento identidad del grupo, como elemento $e\in\mathcal{O}^{\ell}\left(M,o\right)$. Escribamos entonces $\Theta_{\gamma}^{\ell}=\theta_{\gamma}^{i_{\ell}}e_{\alpha_{i_{\ell}}}$, con $\theta_{\gamma}^{i_{\ell}}\in T_{o}^{*}M_{\gamma}$

   En el supuesto de que las p primeras formas $\left(\theta_{\gamma}^{\alpha}\right)$ formen una base de $T_{o}^{*}M_{\gamma}$
3. Definimos $F_{\beta}^{\widetilde{\alpha}_{\ell}}\left(\gamma\right)$ mediante la identidad

$$\theta_{\gamma}^{\widetilde{\alpha}_{\ell}}=F_{\beta}^{\widetilde{\alpha}_{\ell}}\left(\gamma\right)\theta_{\gamma}^{\beta} \tag{20}$$

4. Si escribimos $d_{o}\left(\sigma_{M_{\gamma}}^{\ell}\right)=\sigma_{M}^{\nu_{\ell}}\left(o\right)\left(\partial/\partial\kappa^{\nu_{\ell}}\right)_{o}$, (i.e. $\sigma_{M_{\gamma}}^{\nu_{\ell}}\left(o\right)=d_{o}\kappa_{M}^{\nu_{\ell}}\in T_{o}^{*}M$) se define $N_{\alpha}^{\nu_{\ell}}\left(\gamma\right)$ mediante la identidad:

$$\sigma_{M_{\gamma}}^{\nu_{\ell}}\left(o\right)=N_{\alpha}^{\nu_{\ell}}\left(\gamma\right)\theta_{\gamma}^{\alpha} \tag{21}$$

Las definiciones de $F_{\beta}^{\widetilde{\alpha}_{\ell}},N_{\alpha}^{\nu_{\ell}}$ no dependen de la p-variedad M_{γ} elegida tal que $o\in M_{\gamma}$ y $T_{o}^{\ell+1}M_{\gamma}=\gamma$, ya que si $\overline{M}_{\gamma}$ es otra entonces $\left(M_{\gamma},o\right)$, y $\left(\overline{M}_{\gamma},o\right)$ tienen contacto de orden $\ell+1$, y en virtud de la proposición 11 se tiene que $\Theta_{e}^{\ell}\left(M_{\gamma},o\right)=\Theta_{e}^{\ell}\left(\overline{M}_{\gamma},o\right)$ y $d_{o}\left(\sigma_{M_{\gamma}}^{\ell}\right)=d_{o}\left(\sigma_{\overline{M}_{\gamma}}^{\ell}\right)$.

Debemos comprobar ahora que para cualquier $f:S\rightarrow E$, $\mathcal{O}^{\ell+1}$-admisible se verifican en todo $s\in S$, las identidades (18) siendo $\theta_{\beta}^{\widetilde{\alpha}_{\ell}}$, y $\sigma_{\alpha}^{\nu_{\ell}}$ las funciones construidas en (19). Por las razones explicitadas en la nota 8, es suficiente con usar la parametrición canónica $f=\iota_{M}$, $S=M$. Sea $x_{0}\in M$ y sea $\gamma=\sigma_{M}^{\ell+1}\left(x_{0}\right)$.

Entonces (M_γ, o) y (M, x_0) tienen G-contacto de orden $\ell+1$. De hecho si $u \in \mathcal{O}^{\ell+1}(M, x_0)$ entonces $(\lambda_u M_\gamma, u.o = x_0)$ y (M, x_0) tienen contacto de orden $\ell+1$. Por la proposición 11 se concluye

$$\Theta_u^\ell(M, x_0) = \Theta_u^\ell(\lambda_u M_\gamma, x_0)$$

y usando ahora la nota 14 se concluye que

$$\lambda_u^* \Theta_u^\ell(M, x_0) = \Theta_\gamma$$

es decir, si escribimos $\Theta_u^\ell(M, x_0) = \theta^{i_\ell}(x_0)\, e_{i_\ell}$ se tiene

$$\theta_\gamma^{i_\ell} = \lambda_u^* \theta^{i_\ell}(x_0)$$

sustituyendo ahora en la identidad (20) $\theta_\gamma^{i_\ell}$ por $\lambda_u^* \theta^{i_\ell}(x_0)$, y *eliminando* λ_u^* se concluye

$$\theta^{\widetilde{\alpha}_\ell}(x_0) = F_\beta^{\widetilde{\alpha}_\ell}(\gamma)\, \theta^\beta(x_0)$$

Pero como $\gamma = \sigma_M^{\ell+1}(x_0)$, y $\phi^\beta(x_0) = \theta^\beta(x_0)$ es una cobase $(\ell+1)$-adaptada a M en x_0, se concluye que

$$\theta^{\widetilde{\alpha}_\ell}(x_0) = F_\beta^{\widetilde{\alpha}_\ell}\left(\sigma_M^{\ell+1}(x_0)\right) \phi^\beta(x_0)$$

y por tanto

$$\theta_\beta^{\widetilde{\alpha}_\ell}(x_0) = F_\beta^{\widetilde{\alpha}_\ell}\left(\sigma_M^{\ell+1}(x_0)\right)$$

que es la escritura puntual en la parametrización canónica de las primeras ecuaciones de (18).

La demostración de que se verifican las segundas ecuaciones de (18) es análoga. Se tiene:

$$\kappa^{\nu_{\ell+1}}(\gamma) = \kappa_M^{\nu_{\ell+1}}(x_0) = \kappa_{M_\gamma}^{\nu_{\ell+1}}(o) = \kappa_{\lambda_u M_\gamma}^{\nu_{\ell+1}}(x_0)$$

además por el carácter G-invariante de las curvaturas:

$$\kappa_{M_\gamma}^{\nu_\ell} = \kappa_{\lambda_u M_\gamma}^{\nu_\ell} \circ \lambda_u$$

y por la proposición 11 se verifica $d_{x_0}\left(\sigma_{\lambda_u M_\gamma}^\ell\right) = d_{x_0}\left(\sigma_M^\ell\right)$ es decir

$$d_{x_0}\left(\kappa_M^{\nu_\ell}\right) = d_{x_0}\left(\kappa_{\lambda_u M_\gamma}^{\nu_\ell}\right) = \lambda_{u^{-1}}^*\left(d_o\left(\kappa_{M_\gamma}^{\nu_\ell}\right)\right)$$

y escribiendo

$$d\sigma_M^\ell = \sigma_M^{\nu_\ell} \partial_{\kappa^{\nu_\ell}}$$

se concluye que (ver nota 15):

$$\lambda_u^*\left(\sigma_M^{\nu_\ell}(x_0)\right) = \lambda_u^*\left(d_{x_0}\kappa_M^{\nu_\ell}\right) = d_o\left(\kappa_{M_\gamma}^{\nu_\ell}\right) = \sigma_\gamma^{\nu_\ell}(o)$$

Sustituyendo formalmente $\sigma_\gamma^{\nu_\ell}(o)$ por $\lambda_u^*\left(\sigma_M^{\nu_\ell}(x_0)\right)$ en (21),

$$\lambda_u^*\left(\sigma_M^{\nu_\ell}(x_0)\right) = N_\alpha^{\nu_\ell}(\gamma)\, \theta_\gamma^\alpha = N_\alpha^{\nu_\ell}(\gamma)\, \lambda_u^* \phi^\alpha(x_0)$$

eliminando el pullback λ_u^* y teniendo en cuenta que $\gamma = \sigma_M^{\ell+1}(x_0)$ queda

$$\sigma_M^{\nu_\ell}(x_0) = N_\alpha^{\nu_\ell}\left(\sigma_M^{\ell+1}(x_0)\right) \phi^\alpha(x_0)$$

pero tomando $\sigma_\alpha^{\nu_\ell}(x_0)$ tales que $\sigma_M^{\nu_\ell}(x_0) = \sigma_\alpha^{\nu_\ell}(x_0)\, \phi^\alpha(x_0)$, se concluye

$$\sigma_\alpha^{\nu_\ell}(x_0) = N_\alpha^{\nu_\ell}\left(\sigma_M^{\ell+1}(x_0)\right)$$

que es la escritura puntual en la parametrización canónica de las segundas ecuaciones de (18).

2.2.4. Teorema de Congruencia via la forma de Maurer-Cartan.

Usando el Teorema Fundamental de Integrabilidad 1.3.2 en pág 10 puede establecerse ya un teorema de congruencia para variedades sumergidas *en posición general*. Se necesita el siguiente resultado previo.

Proposición 16 *Sean $f, \overline{f} : S \to E$ son p-variedades tales que $\sigma^{\ell+1} f = \sigma^{\ell+1}\overline{f}$, y supongase que el rango de $d_s\left(\sigma^{\ell} f\right)$ es máximo, igual a p en todo $s \in S$ excepto quizás un conjunto de interior vacio. Entonces las formas de Frenet $\Theta^{\ell}_{\mathbf{u}}$, y $\Theta^{\ell}_{\overline{\mathbf{u}}}$ coinciden independientemente de las $(\ell+1)$-referencias $\mathbf{u}$ y $\overline{\mathbf{u}}$ de f y $\overline{f}$ tomadas. En particular f y $\overline{f}$ admiten en una cobase $\mathcal{O}^{\ell}$-adaptada común.*

Demostración. Denotando con *barras* los datos correspondientes a $\overline{f}$, por hipótesis se tendría (ver (18) en pág 22)

$$\overline{\sigma}^{\nu_\ell}_{\alpha}(s) = \sigma^{\nu_\ell}_{\alpha}(s) = N^{\nu_\ell}_{\alpha}\left(\kappa^{1}_{s}, \ldots, \kappa^{\mu_{\ell+1}}_{s}\right)$$

siendo $\kappa^{\nu_{\ell+1}}_{s} = \kappa^{\nu_{\ell+1}}_{s} f = \kappa^{\nu_{\ell+1}}_{s}\overline{f}$, Sea $\Phi^{\alpha}_{\beta}(s)$ la matriz de cambio de cobase: $\phi^{\beta} = \Phi^{\alpha}_{\beta}(s)\,\overline{\phi^{\alpha}}$. Como

$$d\kappa^{\nu_\ell}_{s} = \sigma^{\nu_\ell}_{\alpha}\phi^{\alpha} = \sigma^{\nu_\ell}_{\alpha}\Phi^{\alpha}_{\beta}(s)\,\overline{\phi}^{\beta} = \overline{\sigma}^{\nu_\ell}_{\beta}\overline{\phi}^{\beta}$$

y se verificaría la relación:

$$\left(\overline{\sigma}^{\nu_\ell}_{\beta}(s)\right) = \left(\sigma^{\nu_\ell}_{\alpha}(s)\right)\left(\Phi^{\alpha}_{\beta}(s)\right)$$

Pero como

$$rango\left(d_s\sigma^{\ell} f\right) = rango\left(\sigma^{\nu_\ell}_{\alpha}(s)\right)$$

se concluye que $\left(\Phi^{\alpha}_{\beta}(s)\right)$ es la matriz identidad, $\phi^{\alpha} = \overline{\phi^{\alpha}}$, y por (19) en pág 22, $\Theta^{\ell}_{\mathbf{u}} = \Theta^{\ell}_{\overline{\mathbf{u}}}$ ■

Nota 17 *En particular, cuando el rango de $d_s\left(\sigma^{\ell} f\right)$ es igual a p en todo $s \in S$, la forma de Frenet $\Theta^{\ell}_{\mathbf{u}}$ de orden ℓ para f, es independiente de la $(\ell+1)$-referencia movil $\mathbf{u}$.*

No es dificil establecer ahora un teorema de clasificación para una familia admisible$\mathcal{F}$ en posición general. Es decir, $G \supset G_o \supseteq G_1 \supseteq \ldots \supset G_q = G_{q+1}$ es su sucesión de isotropía, con $\mathfrak{g}_q = \{0\}$.

Teorema 18 *Supongase $\mathcal{F}$ en posición general $(f : S)$, $\left(\overline{f} : S\right) \in \mathcal{F}$. Supongase que para cierto $\rho \geq q$, se verifica $\sigma^{\rho+1} f = \sigma^{\rho+1}\overline{f}$ y además $rg\left(d_s\sigma^{\rho} f\right) = p$. Entonces, existe $A \in G$, tal que $\overline{f} = \lambda_A \circ f$.*

La idea es que usando la Proposición 16 se concluye que podemos tomar una cobase adaptada $\phi^{\alpha} = \overline{\phi^{\alpha}}$ para f y $\overline{f}$ simultáneamente, y además si $\mathbf{u}$ y $\overline{\mathbf{u}}$ son referencias de Frenet para f y $\overline{f}$ respectivamente, entonces

$$\Omega_{\mathbf{u}} = \Theta^{\rho+1}_{\mathbf{u}} = \Theta^{\rho}_{\mathbf{u}} = \phi^{\alpha} e_{\alpha} + F^{\widetilde{\alpha}_{\rho}}_{\alpha}\left(\kappa^{1}_{s} f, \ldots, \kappa^{\mu_{\rho+1}}_{s} f\right)\phi^{\alpha} e_{\widetilde{\alpha}_{\rho}} = \Theta^{\rho}_{\overline{\mathbf{u}}} = \Omega_{\overline{\mathbf{u}}}$$

basta usar ahora el Teorema Fundamental de Integrabilidad 1.3.2 en pág 10 para concluir que $\overline{\mathbf{u}} = A\mathbf{u}$ para algún $A \in G$, y en particular

$$\overline{f}(s) = \overline{\mathbf{u}}(s).o = A\mathbf{u}(s).o = A.f(s)$$

En el epígrafe 4 (pág 42) se obtendrán teoremas de congruencia mas generales, en donde sorprendentemente no aparecen explícitamente las formas de Frenet. Estos teoremas establecen la G-congruencia de dos p-variedades parametrizadas $f, \overline{f} : S \to E$ tales que para cierto $\rho \geq q$, se verifica $\sigma^{\rho+1} f = \sigma^{\rho+1} \overline{f}$, y que el rango de $d_s(\sigma^\rho f)$ es igual al de $d_s\left(\sigma^{\rho+1} f\right)$ es constante igual a $\widetilde{p}$. Necesariamente es $\widetilde{p} \leq p$. Cuando $\widetilde{p} = p$, se obtiene una réplica del teorema 18 anterior sin la restricción $\mathfrak{g}_q = \{0\}$.

Admitamos en lo sucesivo salvo mención explícita contraria que $\Sigma^\ell f = im\left(\sigma^\ell f\right)$ es subvariedad de $\mathcal{O}^\ell$ para $\ell \geq q$ denotemos $\rho_f = \text{mín}\left\{ \ell \geq q / \dim \Sigma^\ell f = \dim \Sigma^{\ell+1} f \right\}$. En la práctica se sigue el siguiente protocolo:

Fijada $f : S \to E$ una $p-$variedad de E que sea $\mathcal{O}^{q+1}$-admisible:

1. Calculamos sus curvaturas de orden menor o igual a $q+1$, digamos $\kappa^{\nu_{q+1}} f = k^{\nu_{q+1}} : S \to \mathbb{R}$, y tenemos $\left(k^1, \ldots, k^{\mu_{q+1}}\right)$.

2. Si el rango de $(\partial k^{\nu_q} / \partial s^\alpha)$ coincide con el de $(\partial k^{\nu_{q+1}} / \partial s^\alpha)$, (¡esto se verifica automáticamente si $rg\,(\partial k^{\nu_q} / \partial s^\alpha) = p$!) entonces cualquier $p-$variedad $\overline{f} : S \to E$ que sea $\mathcal{O}^{q+1}$-admisible con $\kappa^{\nu_{q+1}} \overline{f} = k^{\nu_{q+1}}$ es congruente con f, es decir, existe $A \in G$ con $\overline{f} = Af$.

3. En otro caso deberíamos seguir calculando curvaturas hasta encontrar el primer $\rho \geq q+1$, tal que el rango de $(\partial k^{\nu_\rho} / \partial s^\alpha)$ coincide con el de $(\partial k^{\nu_{\rho+1}} / \partial s^\alpha)$ para concluir que cualquier $p-$variedad $\overline{f} : S \to E$ que sea $\mathcal{O}^{q+1}$-admisible con $\kappa^{\nu_{\rho+1}} f = k^{\nu_{\rho+1}}$ $\overline{f}$ es congruente con f

2.2.5. Teorema de Congruencia para el caso analítico.

El tratamiento de los teoremas de congruencia para el caso analítico se basa en la siguiente resultado válido también para variedades no analíticas:

Proposición 19 *Sean $f, \overline{f} : S \to E$, p-variedades con $\sigma^\ell_{s_0} f = \sigma^\ell_{s_0} \overline{f}$ y $d_{s_0}\left(\sigma^\ell f\right) = d_{s_0}\left(\sigma^\ell \overline{f}\right)$ para cierto $s_0 \in S$ y cierto $\ell \geq q+1$. Admitamos que en s_0 admiten una cobase de Frenet común. Entonces, necesariamente es $\sigma^{\ell+1}_{s_0} f = \sigma^{\ell+1}_{s_0} \overline{f}$. En particular, si admiten cobase de Frenet común y $\sigma^{q+1} f = \sigma^{q+1} \overline{f}$, entonces $\sigma^\ell f = \sigma^\ell \overline{f}$ para todo $\ell \geq q+1$.*

Demostración. Sea $u, \overline{u}$ una referencias fijas de Frenet (i.e. de orden q) para f y $\overline{f}$ en s_0, es decir $u.\sigma^\ell_{s_0} f = g^\ell_{s_0} f$, y $\overline{u}.\sigma^\ell_{s_0} \overline{f} = g^\ell_{s_0} \overline{f}$. Tomando $\widetilde{f} = \left(u\overline{u}^{-1}\right) \overline{f}$, es $g^\ell_{s_0} \widetilde{f} = g^\ell_{s_0} f$, y u es referencia de Frenet comun para f y $\widetilde{f}$. Además, teniendo en cuenta que $\sigma^l \overline{f} = \sigma^l \widetilde{f}$ para todo l se concluye que $\sigma^\ell_{s_0} f = \sigma^\ell_{s_0} \widetilde{f}$ y $d_{s_0}\left(\sigma^\ell f\right) = d_{s_0}\left(\sigma^\ell \widetilde{f}\right)$, y usando en este contexto la fórmula (99) del apéndice (en página 90) se tiene:

$$
\begin{array}{l}
d_{s_0}\left(g^\ell f\right) = u.\Theta^\ell_u (f, s_0) + u.d_{s_0}\left(\sigma^\ell f\right) \\
d_{s_0}\left(g^\ell \widetilde{f}\right) = u.\Theta^\ell_u \left(\widetilde{f}, s_0\right) + u.d_{s_0}\left(\sigma^\ell \widetilde{f}\right)
\end{array}
$$

Sean $k^{\nu_\ell}(s_0) = \kappa^{\nu_\ell}_{s_0} f = \kappa^{\nu_\ell}_{s_0} \widetilde{f}$, y $(\phi^\alpha(s_0))$ la cobase de Frenet común. Entonces como es $\ell \geq q+1$ se tiene

$$
\begin{aligned}
\Theta^\ell_u (f, s_0) &= \Theta^{\ell-1}_u (f, s_0) \\
&= \phi^\alpha(s_0) + F^{\widetilde{\alpha}}_\alpha \left(k^1(s_0), \ldots, k^{\mu_\ell}(s_0)\right) \phi^\alpha(s_0)\, e_{\widetilde{\alpha}} \\
&= \Theta^\ell_u \left(\widetilde{f}, s_0\right)
\end{aligned}
$$

por tanto $d_{s_0}\left(g^{\ell}f\right) = d_{s_0}\left(g^{\ell}\widetilde{f}\right)$, lo que implica $g_{s_0}^{\ell+1}f = g_{s_0}^{\ell}\widetilde{f}$, y $\sigma_{s_0}^{\ell+1}f = \sigma_{s_0}^{\ell+1}\widetilde{f} = \sigma_{s_0}^{\ell+1}\overline{f}$. ∎

Admitamos que $\Sigma^{\ell}f = im\left(\sigma^{\ell}f\right)$ es subvariedad de $\mathcal{O}^{\ell}$ para $\ell \geq q$ y sea ρ_f el entero definido por

$$\rho_f = \text{mín}\left\{\, \ell \geq q / \dim \Sigma^{\ell}f = \dim \Sigma^{\ell+r}f \text{ para todo } r\right\}$$

Nota 20 *Observese que con las notaciones habituales (ver la de la proposición 16) se tiene que*

$$\dim \Sigma^{\ell}f = \dim rg\left(\left(\sigma_{\beta}^{\nu_{\ell}}(s)\right)\right)$$

En efecto, si (s^{α}) *es un sistema de coordenadas para* S *y si* $ds^{\alpha} = \psi_{\beta}^{\alpha}\phi^{\beta}$ *entonces para todo* ℓ

$$\begin{aligned} dk^{\nu_{\ell}} &= \frac{\partial k^{\nu_{\ell}}}{\partial s^{\alpha}}ds^{\alpha} = \frac{\partial k^{\nu_{\ell}}}{\partial s^{\alpha}}\psi_{\beta}^{\alpha}\phi^{\beta} = \sigma_{\beta}^{\nu_{q+1}}\phi^{\beta} \Rightarrow \\ \left(\sigma_{\beta}^{\nu_{\ell}}\right) &= \left(\frac{\partial k^{\nu_{\ell}}}{\partial s^{\alpha}}\right)\left(\psi_{\beta}^{\alpha}\right) \end{aligned}$$

y como $\left(\psi_{\beta}^{\alpha}\right)$ *es no singular*

$$\dim \Sigma^{\ell}f = rg\left(\frac{\partial k^{\nu_{\ell}}}{\partial s^{\alpha}}\right) = rg\left(\sigma_{\beta}^{\nu_{\ell}}\right)$$

Proposición 21 *Sean* $f, \overline{f} : S \to E$ *p-variedades tales que con* $\rho_f = \rho_{\overline{f}} = \rho$. *Si* $\sigma^{\rho+1}f = \sigma^{\rho+1}\overline{f}$, *entonces automáticamente se verifica que* $\sigma^{\rho+r}f = \sigma^{\rho+r}\overline{f}$. *En particular, si* f *es analítica, existe* $A \in G$, *con* $\overline{f} = Af$

Demostración. Siguiendo el mismo argumento de la proposición 16 se verificaría la relación:

$$\left(\overline{\sigma}_{\beta}^{\nu_{\ell}}(s)\right) = \left(\sigma_{\alpha}^{\nu_{\ell}}(s)\right)\left(\Phi_{\beta}^{\alpha}(s)\right) \tag{22}$$

para todo ℓ, siendo $\Phi_{\beta}^{\alpha}(s)$ la matriz de cambio de cobase: $\phi^{\beta} = \Phi_{\beta}^{\alpha}(s)\overline{\phi^{\alpha}}$.

Por otra parte, como $\sigma^{\rho+1}f = \sigma^{\rho+1}\overline{f}$, es $\kappa_s^{\nu_{\rho+1}}f = \kappa_s^{\nu_{\rho+1}}\overline{f} = k^{\nu_{\rho+1}}(s)$ y por (18)

$$\sigma_{\beta}^{\nu_{\rho}}(s) = \overline{\sigma}_{\beta}^{\nu_{\rho}}(s) = N_{\alpha}^{\nu_{\rho}}\left(k^1(s), \ldots, k^{\mu_{\rho+1}}(s)\right)$$

así que usando ahora (22) para $\ell = \rho$ se tiene

$$\left(\sigma_{\beta}^{\nu_{\rho}}(s)\right) = \left(\sigma_{\alpha}^{\nu_{\rho}}(s)\right)\left(\Phi_{\beta}^{\alpha}(s)\right) \tag{23}$$

pero esta relación se mantiene:

$$\left(\sigma_{\beta}^{\nu_{\rho+r}}(s)\right) = \left(\sigma_{\alpha}^{\nu_{\rho+r}}(s)\right)\left(\Phi_{\beta}^{\alpha}(s)\right)$$

debido a que la condición $\rho = \rho_f$ implica que (ver la nota 20 anterior)

$$\widetilde{p} = rg\left(\left(\sigma_{\beta}^{\nu_{\rho}}(s)\right)\right) = rg\left(\left(\sigma_{\beta}^{\nu_{\rho+r}}(s)\right)\right)$$

y las filas de la matriz $\left(\sigma_{\beta}^{\nu_{\rho+r}}(s)\right)$ son combinación lineal de $\widetilde{p}$ filas de las ν_{ρ} primeras que conforman la matriz $\left(\sigma_{\beta}^{\nu_{\rho}}(s)\right)$ y que pertenecen a $\ker\left(\Phi_{\beta}^{\alpha}(s) - id\right)$ por (23). Usando ahora (22) para $\ell = \rho + r$ se concluye

$$\left(\sigma_{\beta}^{\nu_{\rho+r}}(s)\right) = \left(\overline{\sigma}_{\beta}^{\nu_{\rho+r}}(s)\right)$$

La conclusión final $\sigma^{\rho+r} f = \sigma^{\rho+r} \overline{f}$ es consecuencia de que todas las curvaturas de orden mayor que $\rho + 1$ para f y $\overline{f}$ se obtienen de la colección $\left(\sigma_{\beta}^{\nu_{\rho+r}}(s)\right) = \left(\overline{\sigma}_{\beta}^{\nu_{\rho+r}}(s)\right)$ para $r \geq 1$.

Finalmente, fijado $s_0 \in S$, y referencias fijas $u, \overline{u} \in G$ de orden q para f y $\overline{f}$ en s_0 entonces por la proposición 6 en la página 18 y llamando $\sigma_0^{\ell} = \sigma_{s_0}^{\ell} f = \sigma_{s_0}^{\ell} \overline{f}$ es

$$u.\sigma_0^{\ell} = g_{s_0}^{\ell} f,\ \overline{u}.\sigma_0^{\ell} = g_{s_0}^{\ell} \overline{f} \text{ para todo } \ell \geq 0$$

y por tanto

$$g_{s_0}^{\ell} \overline{f} = \left(\overline{u} u^{-1}\right).g_{s_0}^{\ell} f, \text{ para todo } \ell \geq 0$$

lo cual indica que si $A = \overline{u} u^{-1}$, entonces $\overline{f}$ y Af tienen un contacto de orden ℓ, para todo $\ell \geq 0$.

Aplicando una variante del Lema 9, podemos suponer $S = \mathbb{S}$ abierto convexo de $\mathbb{R}^p$, $s_0 = 0$, $\left(x^i\right)$ carta analítica de E en torno a $Af((0) = \overline{f}(0)$ de forma que los desarrollos de Taylor de $x^i \circ (Af)$ y $x^i \circ \overline{f}$ coincidan en 0. La analiticidad garantiza $\overline{f} = Af$. $\blacksquare$

3. El algoritmo Jensen.

3.1. Preliminares

Se define $\mathcal{G}_p^{(\ell+1)}(E)$ por $\mathcal{G}_p^{(1)}(E) = \mathcal{G}_p^1(E)$ y la fórmula inductiva

$$\mathcal{G}_p^{(\ell+1)}(E) = \mathcal{G}_p^1\left(\mathcal{G}_p^{(\ell)}(E)\right)$$

Naturalmente se tiene la sucesión de submersiones

$$\mathcal{G}_p^{(\ell+1)}(E) \xrightarrow{\downarrow} \mathcal{G}_p^{(\ell)}(E) \to \cdots \to E$$

Además hay una acción natural $G \times \mathcal{G}_p^{(\ell)}(E) \to \mathcal{G}_p^{(\ell)}(E)$ que puede definirse inductivamente de manera obvia, teniendo en cuenta que una acción de G sobre una variedad diferenciable X, da lugar a través de la fórmula (9). Nótese que usando el epígrafe 6.2.4 (pág 80) en el apéndice 1 se concluye que

Nota 22 *Hay una inyección canónica* $\mathcal{G}_p^\ell(E) \hookrightarrow \mathcal{G}_p^{(\ell)}(E)$ *que conmuta con las aplicaciones de bajada* $\downarrow$ *y con las acciones naturales* $G \times \mathcal{G}_p^\ell(E) \to \mathcal{G}_p^\ell(E)$, $G \times \mathcal{G}_p^{(\ell)}(E) \to \mathcal{G}_p^{(\ell)}(E)$.

Concretamente, la inyección $\mathcal{G}_p^\ell(E) \hookrightarrow \mathcal{G}_p^{(\ell)}(E)$ *vendría definida por la asignación* $g_s^\ell f \rightsquigarrow g_s^{(\ell)} f$ *donde se entiende que* $g_s^{(1)} f = g_s^1 f$, *y* $g_s^{(\ell+1)} f = g_s^1\left(g_s^{(\ell)} f\right) = g_s^{\ell+1} f$

Para fijar ideas, sea $\mathbf{f} : S \to E$ una p-variedad de tipo constante, y $\mathcal{F}$ la familia de p-variedades, de la misma clase de isotropía que $\mathbf{f}$. Fijemos un $\mathbf{s} \in S$, $\mathbf{f}(\mathbf{s}) = o$, a partir del cual construimos los grupos de isotropía $G_\ell = G_{g_\mathbf{s}^\ell \mathbf{f}}$ que dan lugar a la sucesión encajada de subgrupos $G_0 \supset G_1 \ldots \supset G_q = G_{q+1} = \cdots$.

Se mantienen las notaciones establecidas en el epígrafe 2.1.2 en pág 14 y en el inicio del epígrafe 2.2 en pág 18. Denotamos $\overline{Ad}_{G_\ell} : G_\ell \to GL(m_\ell, \mathbb{R})$ a la representación adjunta que se corresponde con la acción (descrita en la base $(e_i : 1 \leq i \leq m_\ell)$)

$$\overline{Ad}_{G_\ell} : G_\ell \times \mathfrak{g}/\mathfrak{g}_\ell \to \mathfrak{g}/\mathfrak{g}_\ell$$

en particular recuerdese que $\overline{Ad}_{G_0}(K) = d_o(\lambda_K) : T_oE \to T_oE$.

Intentaremos ahora otra vía para la construcción de los $\mathcal{E}^\ell$ y $\mathcal{O}^\ell$, usando inductivamente la acción del grupo sobre determinados espacios de Grassmannianas en fibrados homogeneos. El procedimiento se sostiene gracias a la inclusión canónica

$$\mathcal{G}_p^{r+1}(E) \hookrightarrow \mathcal{G}^1(\mathcal{G}^r(E))$$

definida según el esquema

$$g_s^{r+1} f \to g_s^1(g^r f)$$

para cada p-variedad $f : S \to E$. (ver sección 6.2.4).

La ventaja de este procedimiento -que llamamos *algoritmo Jensen*- es que solo depende de las algebras de Lie $\mathfrak{g}_\ell$ y de las acciones adjuntas. No requiere por ejemplo del manejo explícito de la acción de G sobre escamas de orden superior a la unidad.

3.2. Referencial.

Un referencial de orden $\ell \geq 1$ para la familia admisible $\mathcal{F}$ consiste en una G_ℓ-sección $\mathcal{O}^\ell$ de $\mathcal{G}_p^{(\ell)}(E)$ tal que:

(1) $\mathcal{O}^\ell \cap \mathcal{G}_p^\ell(E)$ es una G_ℓ-reducción local del G/G_ℓ fibrado homogeneo $\mathcal{G}_{\mathcal{F}_\ell}^\ell(E)$.

(2) $\mathcal{O}^{\ell-1} = \downarrow \mathcal{O}^\ell$,es referencial para $\mathcal{F}$ de orden $\ell - 1$..

La definición adquiere consistencia si admitimos que (fijado $o \in E$), el conjunto $\{o\}$ es un referencial de orden $\ell = 0$. Un sistema referencial $\mathcal{O}^{q+1}$ de órden $q+1$ se llama sistema referencial, y da lugar al referencial $\mathcal{O}^{q+1} \cap \mathcal{G}_{\mathcal{F}}^{q+1}(E)$.

No hay que confundir *referencial* con *referencial de contacto*, de hecho:

A partir de la sucesión $(\mathcal{O}^\ell)$ de un *referencial* se construye la sucesión $(\mathcal{O}^\ell)$ con $(\mathcal{O}^\ell \cap \mathcal{G}_p^\ell(E))$ que da lugar al un *referencial de contacto* según la definición 2 (en pág 15).

Nota 23 *Por no sobrecargar* peligrosamente *la notación, hemos mantenido el mismo nombre $\mathcal{O}^\ell$ que usamos en el referencial de contacto en la definición 2, de forma que los conceptos definiciones y notaciones que aparecen desde el epígrafe 2.1.4 en la pág 17 hasta el cuadro de variación de índices(15) en pág 19 permanecen literalmente válidos, sin dar lugar a ninguna ambigüedad.*

Nota 24 *La desventaja del algoritmo-Jensen es que solo permite fabricar en principio una familia de* secciones *$\mathcal{O}^\ell$ sumergidas el un espacio $\mathcal{G}_p^{(\ell)}(E)$ de Grassmanianas iteradas, que incluye mucha basura. Esto significa que en general la dimensión de $\mathcal{O}^\ell$ será muy superior a la sección de contacto $\mathcal{O}^\ell \cap \mathcal{G}_p^\ell(E)$*

En concreto, si $(k^\tau : 1 \leq \tau \leq \lambda_\ell)$ es el sistema de coordenadas para los $\mathcal{O}^\ell$ establecidas como en el ejercicio 3, entonces si f es $\mathcal{O}^\ell$-admisible las funciones $k_s^\tau f = k^\tau\left(\left(\sigma_s^\ell f\right)\right)$, pueden considerarse también curvaturas de f. Sin embargo la inclusión $\mathcal{O}^\ell \cap \mathcal{G}_p^\ell(E) \subset \mathcal{O}^\ell$ hace que las k^τ dependan funcionalmente de las κ^ν y escribir $k^\tau = k^\tau\left(\kappa^1, \ldots, \kappa^{\mu_\ell}\right)$, $1 \leq \tau \leq \lambda_\ell$. lo que permite conocer las curvaturas $k_s^\tau f = k^\tau\left(\kappa_s^1 f, \ldots, \kappa_s^{\mu_\ell} f\right)$ si se conocen las $\kappa_s^\nu f$.

Nota 25 *El ejercicio 3 en pág 16 mantiene su vigencia, y en adelante las $\left(\kappa^1, \ldots, \kappa^{\mu_\ell}\right)$ allí con struidas seguirán representando el sistema de coordenadas de $\mathcal{O}^\ell$. Las funciones de estructura que se irán construyendo serán denotadas también por $F_\beta^{\widetilde{\alpha}_\ell}$, $N_\alpha^{\nu_\ell}$ como en (17) en página 21.*

3.3. Construcción a primer orden.

Seguiremos aquí el criterio de variación de los indices. (15) en pág 19, pero poniendo $\widetilde{\alpha}$, $\widetilde{\beta}$ ..etc en lugar de $\widetilde{\alpha}_0$ $\widetilde{\beta}_0$, ...etc, y por supuesto asumimos el abuso de notación indicado en las notas 23 y 25.

3.3.1. Ecuaciones de la primera sección.

La acción natural $\overline{Ad}_{G_0} : G_0 \times T_oE \to T_oE$ da lugar a $\rho_0 : G_0 \times \mathbb{G}_p(T_oE) \to \mathbb{G}_p(T_oE)$ que en las coordenadas $\left(x_\alpha^{\widetilde{\alpha}}\right)$ para $\mathbb{G}_p(T_oE)$, correspondiente a las coordenadas lineales (x_i) respecto a la base (e_i) de $T_oE \simeq \mathfrak{m}_0$, (ver epígrafe 6.2.3 en página 76) se ve como

$$\rho_0 : G_0 \times \mathbb{G}_p(\mathbb{R}^m) \to \mathbb{G}_p(\mathbb{R}^m) \tag{24}$$

una reducción $\mathcal{O}^1$ del subespacio de isotropía $\mathbb{G}_p\left(T_oE\right)_{[G_1]}$ se ve como una G_1-reducción de $\mathbb{G}_p\left(\mathbb{R}^m\right)_{[G_1]}$ correspondiente a la acción (24) que es una subvariedad W^1 de $\mathbb{R}_p^{m-p}$. Pongamos $\left(\kappa^1,\ldots,\kappa^{\mu_1}\right)$ un sistema de coordenadas para $W^1 \simeq \mathcal{O}^1$ que podemos elegir entre las $x_\alpha^{\widetilde{\alpha}}\big|_{W^1}$. Así W^1 tendrá unas ecuaciones paramétricas en $\mathbb{R}_p^{m-p}$ con coordenadas $\left(x_\alpha^{\widetilde{\alpha}}\right)$ de la forma:

$$x_\beta^{\widetilde{\alpha}} = F_\beta^{\widetilde{\alpha}}\left(\kappa^1,\ldots,\kappa^{\mu_1}\right) \tag{25}$$

para ciertas funciones diferenciables $F_\beta^{\widetilde{\alpha}}\left(\kappa^1,\ldots,\kappa^{\mu_1}\right)$.Nótese que $F_\beta^{\widetilde{\alpha}} = \kappa^A$, cuando $\kappa^A = x_\alpha^{\widetilde{\alpha}}\big|_{W^1}$

3.3.2. Forma de frenet de orden cero

Vamos a aplicar literalmente los algoritmos de cálculo expuestos en la sección 6.4.4 (pág 89) del apéndice cuando tomamos el fibrado homogeneo $\mathcal{E}$ igual al espacio de Klein E, y la reducción $\mathcal{O}$ es ahora un punto $o \in E$

Para $f : S \to E$ p-variedad, ahora $\mathbf{u} \in \Gamma o\left(f\right)$ es una referencia de orden 0 para f, es decir $\mathbf{u} : S \to G$ y se tiene la igualdad

$$f\left(s\right) = \mathbf{u}\left(s\right).o$$

(ϕ_α) es ahora una paralelización de S con base dual (ϕ^α), y (e_i) es base de $\mathfrak{g}/\mathfrak{g}_0 \simeq T_oE$ Así tendremos θ_α^i, funciones de $C^\infty\left(S\right)$ de forma que si $\Omega_{\mathbf{u}} = \mathbf{u}^*\Omega$

$$\Theta_{\mathbf{u}}^0 = \Omega_{\mathbf{u}}(\mathrm{mod}\,\mathfrak{g}_0) = \theta^i e_i, \text{con } \theta^i = \theta_\alpha^i\phi^\alpha \in \Omega^1\left(S\right)$$

usando la fórmula (97) y (93) tenemos para $u = \mathbf{u}\left(s\right)$, $d_uf = d_s\left(u^{-1}.f\right)$

$$d_{\mathbf{u}}f = \Theta_{\mathbf{u}}^0 = \left(\theta_\alpha^i\phi^\alpha\right)e_i$$

tomando coordenadas $(\lambda^\alpha, s) \simeq \lambda^\alpha\phi_\alpha\left(s\right)$ en TS, y las $\left(x^i,\sigma\right) \simeq x^ie_i$ en T_oE tenemos

$$d_{\mathbf{u}}f : \underset{(\lambda^\alpha)}{\mathbb{R}^p} \times \underset{s}{S} \simeq TS \to T_oE \simeq \underset{(x^i)}{\mathbb{R}^m}$$

las ecuaciones de $d_{\mathbf{u}}f$ son

$$d_{\mathbf{u}}f : x^i = x^i\left(\lambda^\alpha, s\right) = \theta_\alpha^i\left(s\right)\lambda^\alpha$$

3.3.3. Arrastre hacia el origen.

Definimos la aplicación:

$$\begin{aligned}\widehat{\gamma}_{\mathbf{u}}^1 f : \underset{s}{S} &\to \widehat{\mathbb{G}}_p\left(T_oE\right) \simeq \underset{(x_\alpha^i)}{\widehat{\mathbb{G}}_p\left(\mathbb{R}^m\right)} \\ s &\to \widehat{\gamma}_{\mathbf{u}(s)}f = \left(d_{\mathbf{u}(s)}f\right)\left(\phi_1,\ldots,\phi_p\right)\end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que $(d_{\mathbf{u}}f)\left(\phi_\alpha\right) = \theta_\alpha^ie_i$, se obtienen en las coordenadas $\left(x_\alpha^i\right)$ las ecuaciones de $\widehat{\gamma}_{\mathbf{u}}f$

$$\widehat{\gamma}_{\mathbf{u}}^1 f : \left(x_\alpha^i\right) = \left(\theta_\alpha^i\left(s\right)\right)$$

La aplicación de arrastre de primer orden viene definida por

$$\gamma_{\mathbf{u}}^1 f : S \ni s \to \left[\widehat{\gamma}_{\mathbf{u}(s)}^1\right] \in \mathbb{G}_p\left(T_oE\right)\widehat{\mathbb{G}}_p\left(\mathbb{R}^m\right)$$

3.3.4. Cobase 0-adaptada.

Considerando la familia de 1-formas $\theta^i = \theta^i_\alpha \phi^\alpha \in \Omega^1(S)$ podemos suponer sin perdida de generalidad que las p primeras $\left(\theta^\beta\right)$ son independientes, y aún más, elegir $\phi^\beta = \theta^\beta$ para $\beta = 1, ...p$. Se llama cobase adaptada a $\mathbf{u}$. Se tiene entonces que $\left(\theta^\beta_\alpha\right) = id_{p\times p}$.

Usando la cobase adaptada Las ecuaciones de $\gamma^1_{\mathbf{u}} f$

$$\gamma^1_{\mathbf{u}} f : S \to \mathbb{G}_p(T_o E) \simeq \underset{\left(x^{\widetilde{\alpha}}_\alpha\right)}{\mathbb{R}^{m-p}_p}$$

en las coordenadas $\left(x^{\widetilde{\alpha}}_\alpha\right)$ (ver epígrafe 6.2.3 en pág 76) son :

$$\gamma^1_{\mathbf{u}} f : x^{\widetilde{\alpha}}_\alpha = \theta^{\widetilde{\alpha}}_\alpha(s)$$

3.3.5. La referencia de primer orden.

Fijada la o-referencia $\mathbf{u} \in \Gamma(o(f))$ es preciso encontrar una aplicación $\mathbf{K} : S \to G_o$ diferenciable de forma que $\overline{\mathbf{u}} = \mathbf{u}\mathbf{K}^{-1}$ sea 1-referencia es decir, $\gamma^1_{\overline{\mathbf{u}}} f = \sigma^1_s f \in \mathcal{O}^1$.

Conocidos los $\theta^{\widetilde{\alpha}}_\alpha(s)$, la cobase ϕ^α o-adaptada, y la representación adjunta $\rho : G_0 \to GL(m, \mathbb{R})$

$$Ad_{\mathbf{K}}(e_i) = \mathbf{K}^j_i e_j$$

donde $\mathbf{K}^i_j = K^i_j(s)$ son funciones a determinar, debemos calcular (en función $\mathbf{K}^i_j$) los nuevos $\overline{\theta}^i_\alpha$ asociados a $\overline{\mathbf{u}}$, por la identidad

$$\Theta^0_{\overline{\mathbf{u}}} = \overline{\theta}^i e_i, \text{con } \overline{\theta}^i = \overline{\theta}^i_\alpha \phi^\alpha \in \Omega^1(S)$$

que teniendo en cuenta la igualdad $\Theta_{\overline{\mathbf{u}}} = Ad_{\mathbf{K}}(\Theta_{\mathbf{u}})$ son:

$$\overline{\theta}^i_\alpha = K^i_\alpha(s) + K^i_{\widetilde{\alpha}}(s)\,\theta^{\widetilde{\alpha}}_\alpha$$

Las ecuaciones de $\widehat{\gamma}^1_{\overline{\mathbf{u}}} f$ son (respecto a la cobase ϕ^α adaptada a $\overline{\mathbf{u}}$) son: $\widehat{\gamma}^1_{\overline{\mathbf{u}}} f : \left\{ x^i_\alpha = \overline{\theta}^i_\alpha(s) \right.$

Por tanto, si queremos que $\gamma^1_{\overline{\mathbf{u}}} f = \left[\widehat{\gamma}^1_{\overline{\mathbf{u}}} f\right] \in \mathcal{O}^1$ debemos imponer a las funciones $\mathbf{K}^i_j = K^i_j(s)$ que verifiquen la condición:

$$\left[\left(K^i_\beta(s) + K^i_{\widetilde{\alpha}}(s)\,\theta^{\widetilde{\alpha}}_\beta\right)\right] \in W^1$$

Entonces los $\overline{\theta}^{\widetilde{\alpha}}_\alpha$, (en función de los todavía desconocidos $K^i_j(s)$) correspondientes a $\overline{\mathbf{u}}$ que determinan las ecuaciones: $\gamma^1_{\overline{\mathbf{u}}} f : \left\{ x^{\widetilde{\alpha}}_\alpha = \overline{\theta}^{\widetilde{\alpha}}_\alpha(s) \right.$ constituirían las últimas $m-p$ filas de

$$\left(K^i_\beta(s) + K^i_{\widetilde{\alpha}}(s)\,\theta^{\widetilde{\alpha}}_\beta\right)\left(K^\alpha_\beta(s) + K^\alpha_{\widetilde{\alpha}}(s)\,\theta^{\widetilde{\alpha}}_\beta\right)^{-1}$$

$$= \begin{pmatrix} I_{p\times p} \\ \overline{\theta}^{\widetilde{\alpha}}_\alpha \end{pmatrix}$$

Debemos por tanto buscar $\left(K^i_j(s)\right) \in \rho(H)$.de forma que para ciertas funciones $\kappa^{\nu_1}_s$ se tenga

$$\overline{\theta}^{\widetilde{\alpha}}_\alpha(s) = F^{\widetilde{\alpha}}_\beta\left(\kappa^1_s, \ldots, \kappa^{\mu_1}_s\right)$$

de acuerdo con las ecuaciones (**??**). Entonces necesariamente las $\kappa^{\nu_1}_s = \kappa^{\nu_1}_s f$ coinciden con las curvaturas de f.

3.3.6. Forma vertical y las curvaturas.

Una vez encontrada la referencia de primer orden $\mathbf{u}$, (y eliminando las barras) resulta $\gamma_{\mathbf{u}}^1 f = \sigma_s^1 f \in \mathcal{O}^1$, y por tanto

$$\sigma_s^1 f : x_\alpha^{\widetilde{\alpha}} = \theta_\alpha^{\widetilde{\alpha}}(s)$$

Se tiene entonces por las igualdades (25):

$$\left.\theta_\beta^{\widetilde{\alpha}}(s) = F_\beta^{\widetilde{\alpha}}\left(\kappa_s^1 f, \ldots, \kappa_s^{\mu_1} f\right)\right\}$$

Así que si (ϕ^α) es cobase 1-adaptada usando que $\Theta_{\mathbf{u}}^0 = \theta^i e_i$,con $\theta^i = \theta_\alpha^i \phi^\alpha \in \Omega^1(S)$ se tiene:

$$\Theta_{\mathbf{u}}^0 = \phi^\alpha e_\alpha + F_\beta^{\widetilde{\alpha}}\left(\kappa_s^1 f, \ldots, \kappa_s^{\mu_1} f\right)\phi^\beta e_{\widetilde{\alpha}} \tag{26}$$

Nota 26 *Esto demuestra que las funciones $\theta_\alpha^{\widetilde{\alpha}}$ no dependen de la $1-$referencia tomada, y quedan establecidas las ecuaciones estructurales para primer orden.*

3.4. Construcción a segundo orden.

Sea $\mathcal{E}^1 = G.\mathcal{O}^1$, y $\mathcal{G}_p^1\left(\mathcal{E}^1, \mathcal{O}^1\right) = \left\{\gamma \in \mathcal{G}_p^1\left(\mathcal{O}^1\right) / \downarrow \gamma \in \mathcal{O}^1\right\}$ la grassmanniana de $\mathcal{E}^1$ basada en $\mathcal{O}^1$. Obsérvese que

$$\mathcal{G}_{\mathcal{F}_2}^2\left(E, \mathcal{O}^1\right) \subset \mathcal{G}_p^2\left(E, \mathcal{O}^1\right) \subset \mathcal{G}_p^1\left(\mathcal{E}^1, \mathcal{O}^1\right)$$

y el grupo G_1, actua de forma natural sobre $\mathcal{G}_p^1\left(\mathcal{E}^1, \mathcal{O}^1\right)$,

$$G_1 \times \mathcal{G}_p^1\left(\mathcal{E}^1, \mathcal{O}^1\right) \to \mathcal{G}_p^1\left(\mathcal{E}^1, \mathcal{O}^1\right) \tag{27}$$

El subgrupo G_2 figura también en esta acción como subgrupo de isotropía. De hecho $\mathcal{G}_{\mathcal{F}_2}^2\left(E, \mathcal{O}^1\right)$ está contenido en el subespacio de isotropía $\mathcal{G}_p^1\left(\mathcal{E}^1, \mathcal{O}^1\right)_{[G_2]}$de esta acción. Buscamos en principio la construcción de una *descripción paramétrica* W^2 de una G_2-sección $\mathcal{O}^2$ de $\mathcal{G}_p^1\left(\mathcal{E}^1, \mathcal{O}^1\right)$, como subvariedad de $\mathbb{G}_p\left(\mathbb{R}^{m_1+\mu_1}\right) \simeq \mathbb{R}_p^{m_1+\mu_1} = \left\{\left(x_\alpha^{\widetilde{\alpha}_1}, y_\beta^{\nu_1}\right)\right\}$, de forma que (quizás restringiendo $\mathcal{O}^1$ a un abierto suyo)

$$\mathcal{G}_p^2\left(E, \mathcal{O}^1\right) \subset G.\mathcal{O}^2$$

con ecuaciones del tipo

$$\left\{\begin{array}{l} x_\beta^{\widetilde{\alpha}} = F_\beta^{\widetilde{\alpha}}\left(\kappa^1, \ldots, \kappa^{\mu_1}\right),\ p+1 \leq \widetilde{\alpha} \leq m \\ x_\beta^{\widetilde{\alpha}_1} = F_\beta^{\alpha_1}\left(\kappa^1, \ldots, \kappa^{\mu_2}\right),\ m_0+1 \leq \alpha_1 \leq m_1 \\ y_\alpha^{\nu_1} = N_\alpha^{\nu_1}\left(\kappa^1, \ldots, \kappa^{\mu_2}\right),\ 1 \leq \nu_1 \leq \mu_1 \end{array}\right.$$

donde las primeras ecuaciones son exactamente las (25) que describen $\mathcal{O}^1 \simeq W^1$ como subvariedad de $\mathbb{R}_p^m$.

Nota 27 *Se tiene entonces $\mathcal{O}^2 \cap \mathcal{G}_p^2\left(E, \mathcal{O}^1\right)$ es la reducción del $G/[G_2]$-fibrado $\mathcal{G}_{\mathcal{F}_2}^2(E)$.*

Esta construcción podemos describirla así (se aplicará el criterio de variación de subíndices (15) en pág 19):

1. Sea $T_{\mathcal{O}^1}\left(\mathcal{E}^1\right) = \cup\left\{T_w\mathcal{E}^1/w \in \mathcal{O}^1\right\}$ la unión de todos los espacios tangentes a $\mathcal{E}^1$ basados en puntos de $\mathcal{O}^1$. Nótese que

$$T_w\mathcal{E}^1 \simeq (\mathfrak{g}/\mathfrak{g}_1) \times T_w\mathcal{O}^1 \simeq \mathbb{R}^{m_1+\mu_1} = \left\{ \left(\begin{array}{c} (x^{i_1}) \\ (y^{\nu_1}) \end{array} \right) \right\}$$

en donde $T_w\mathcal{E}^1 \simeq \mathbb{R}^{m_1+\mu_1}$ viene dado por

$$\left(\begin{array}{c} (x^{i_1}) \\ (y^{\nu_1}) \end{array} \right) \rightsquigarrow x^{i_1}e_{i_1} + y^{\nu_1}\left(\partial/\partial\kappa^{\nu_1}\right)_w$$

siendo (e_{i_1}) una base de $\mathfrak{g}/\mathfrak{g}_1 \simeq \mathfrak{m}_0 + \mathfrak{m}_1$ ampliada de la (e_{i_0}) tomada en el paso anterior. Así

$$T_{\mathcal{O}^1}\left(\mathcal{E}^1\right) \simeq \mathcal{O}^1 \times \mathbb{R}^{m_1+\mu_1}$$

y la acción natural $G_1 \times T_{\mathcal{O}^1}\left(\mathcal{E}^1\right) \to T_{\mathcal{O}^1}\left(\mathcal{E}^1\right)$ sobre cada $T_w\left(\mathcal{E}^1\right)$ se escribe como:

$$\rho_1 \times id_{\mu_1} : G_1 \times \left(\mathbb{R}^{m_1} \times \mathbb{R}^{\mu_1}\right) \to \left(\mathbb{R}^{m_1} \times \mathbb{R}^{\mu_1}\right)$$

donde ρ_1 es la representación adjunta $\overline{Ad}_{G_1}$ en las coordenadas lineales $\left(x^{i_1}\right)$ de $\mathfrak{g}/\mathfrak{g}_1$

$$\rho_1 : G_1 \overset{\overline{Ad}_{G_1}}{\to} GL\left(\mathfrak{g}/\mathfrak{g}_1\right) \simeq GL\left(m_1, \mathbb{R}\right)$$

La Grassmanniana de $\mathcal{E}^1$ basada en $\mathcal{O}^1$ se escribe ahora como

$$\mathcal{G}_p^1\left(\mathcal{E}^1, \mathcal{O}^1\right) \simeq \mathcal{O}^1 \times \mathbb{G}_p\left(\mathbb{R}^{m_1+\mu_1}\right)$$

una acción natural

$$G_1 \times \mathcal{G}_p^1\left(\mathcal{E}^1, \mathcal{O}^1\right) \to \mathcal{G}_p^1\left(\mathcal{E}^1, \mathcal{O}^1\right)$$

La restricción esta acción a cada $\mathcal{G}_p^1\left(\mathcal{E}^1, w^1\right) = \mathbb{G}_p\left(T_{w^1}\left(\mathcal{E}^1\right)\right)$ en las coordenadas $\left(x_\alpha^{\widetilde{\alpha}_1}, y_\beta^{\nu_1}\right)$ se escribe

$$\begin{array}{rcl} \rho_1 \times id_{\mu_1} & : & G_1 \times \mathbb{G}_p\left(\mathbb{R}^{m_1+\mu_1}\right) \to \mathbb{G}_p\left(\mathbb{R}^{m_1+\mu_1}\right) \end{array} \tag{28}$$

$$\left(K, \left[\begin{array}{c} (x^{i_1}) \\ (y^{\nu_1}) \end{array} \right]\right) \to \left[\begin{array}{c} \rho_1(K)\left(x^{i_1}\right) \\ (y^{\nu_1}) \end{array} \right] \tag{29}$$

2. Tomemos en $\mathbb{G}_p\left(\mathbb{R}^{m_1+\mu_1}\right)$ las coordenadas habituales $\left(x_\alpha^{\widetilde{\alpha}_1}, y_\beta^{\nu_1}\right)$ tales que

$$\mathbb{R}_p^{m_1+\mu_1} \ni \left(x_\alpha^{\widetilde{\alpha}_1}, y_\beta^{\nu_1}\right) \rightsquigarrow \left[\begin{array}{c} (\delta_\beta^\alpha) \\ \left(x_\alpha^{\widetilde{\alpha}_1}\right) \\ \left(y_\beta^{\nu_1}\right) \end{array} \right] \in \mathbb{G}_p\left(\mathbb{R}^{m_1+\mu_1}\right)$$

La proyección natural $\mathfrak{g}/\mathfrak{g}_1 \times \mathbb{R}^{\mu_1} \to \mathfrak{g}/\mathfrak{g}_0$, $(\xi + \mathfrak{g}_1, (y^\nu)) \to \xi + \mathfrak{g}_0$ da lugar (en coordenadas) a la proyección

$$\begin{array}{rccc} \downarrow: & \mathbb{G}_p\left(\mathbb{R}^{m_1+\mu_1}\right) = \mathbb{G}_p\left(\mathfrak{g}/\mathfrak{g}_1 \times \mathbb{R}^{\mu_1}\right) & \to & \mathbb{G}_p\left(\mathfrak{g}/\mathfrak{g}_0\right) = \mathbb{G}_p\left(\mathbb{R}^{m_0}\right) \\ & \left(x_\alpha^{\widetilde{\alpha}_1}, y_\beta^{\nu_1}\right) & \to & \left(x_\alpha^{\widetilde{\alpha}}\right) \end{array}$$

que es compatible con la acción (28) en el sentido

$$\downarrow(K.\gamma) = K.\left(\downarrow\gamma\right)\ \forall K \in G_1,\ \forall\gamma \in \mathbb{G}_p\left(\mathbb{R}^{m_1+\mu_1}\right)$$

3. El conjunto $\mathbb{G}_p\left(\mathbb{R}^{m_1+\mu_1}, W^1\right) = \left\{\gamma \in \mathbb{G}_p\left(\mathbb{R}^{m_1+\mu_1}\right) : \downarrow \gamma \in W^1\right\}$ es una subvariedad de $\mathbb{G}_p\left(\mathbb{R}^{m_1+\mu_1}\right)$ invariante por la acción (28) y se identifica con cierta subvariedad $\left(\mathcal{G}_p^1\right)\left(\mathcal{E}^1, \mathcal{O}^1\right)$ de $\mathcal{G}_p^1\left(\mathcal{E}^1, \mathcal{O}^1\right)$ que viene dada por las ecuaciones (25)
$$x_\beta^{\widetilde{\alpha}} = F_\beta^{\widetilde{\alpha}}\left(\kappa^1, \ldots, \kappa^{\mu_1}\right) \text{ y } \left(x_\beta^{\alpha_1}\right)_{,\ m_0<\alpha_1\leq m_1} \left(y_\beta^{\nu_1}\right) \text{ libres} \tag{30}$$
decir para $w^1 \in W^1$:
$$\mathbb{G}_p\left(\mathbb{R}^{m_1+\mu_1}, W^1\right) = \left\{\left[\begin{array}{c} \left(\delta_\beta^\alpha\right) \\ \left(F_\beta^{\widetilde{\alpha}}\Big|_{w^1}\right) \\ \left(x_\beta^{\alpha_1}\right) \\ \left(y_\beta^{\nu_1}\right) \end{array}\right]\right\} \simeq \left(\mathcal{G}_p^1\right)\left(\mathcal{E}^1, w^1\right)$$

Nota 28 *La inclusión* $\mathcal{G}_p^2\left(E, w^1\right) \subset \left(\mathcal{G}_p^1\right)\left(\mathcal{E}^1, w^1\right)$, *queda determinada por ciertas restricciones sobre las variables libres* $\left(x_\beta^{\alpha_1}\right)_{,\ m_0<\alpha_1\leq m_1} \left(y_\beta^{\nu_1}\right)$ que podrían en principio depender del punto $w^1 \in \mathcal{O}^1$. *Es decir, no se puede garantizar .ª priori"que en las ecuaciones de* $\mathcal{G}_p^2\left(E, \mathcal{O}^1\right)$ *como subvariedad de* $\left(\mathcal{G}_p^1\right)\left(\mathcal{E}^1, \mathcal{O}^1\right)$ *con las coordenadas* $\left(\kappa^{\nu_1}, x_\beta^{\alpha_1}, y_\beta^{\nu_1}\right)$, no *intervengan intervengan las* $\left(\kappa^{\nu_1}\right)$.

Se tiene en todo caso:
$$\mathcal{G}_{\mathcal{F}_2}^2\left(E, \mathcal{O}^1\right) \subset \left(\mathcal{G}_p^1\right)\left(\mathcal{E}^1, \mathcal{O}^1\right) \simeq \mathcal{O}^1 \times \mathbb{G}_p\left(\mathbb{R}^{m_1+\mu_1}, W^1\right)$$

4. Como $\mathcal{G}_{\mathcal{F}_2}^2\left(E, \mathcal{O}^1\right) \subset \left(\mathcal{G}_p^1\right)\left(\mathcal{E}^1, \mathcal{O}^1\right)$, el subgrupo G_2 figura como isotropía de la acción
$$\rho_1 \times id_{\mu_1} : G_1 \times \mathbb{G}_p\left(\mathbb{R}^{m_1+\mu_1}, W^1\right) \to \mathbb{G}_p\left(\mathbb{R}^{m_1+\mu_1}, W^1\right) \tag{31}$$

5. Una G_2-reducción W^2 del subespacio de isotropía $\mathbb{G}_p\left(\mathbb{R}^{m_1+\mu_1}, W^1\right)_{[G_2]}$ respecto a la acción (31) da lugar a una G_2-reducción $\mathcal{O}^1 \times W^2$ de $\left(\mathcal{G}_p^1\right)\left(\mathcal{E}^1, \mathcal{O}^1\right)_{[G_2]} \simeq \mathcal{O}^1 \times \mathbb{G}_p\left(\mathbb{R}^{m_1+\mu_1}, W^1\right)_{[G_2]} \supset \mathcal{G}_{\mathcal{F}_2}^2\left(E, \mathcal{O}^1\right)$ respecto a la acción (27).

6. Como $W^2 \subset \mathbb{G}_p\left(\mathbb{R}^{m_1+\mu_1}, W^1\right)_{[G_2]}$ y la acción (31) *no mueve* W^1, podemos suponer (quizás restringiendo W^1 a un abierto suyo) que $\downarrow W^2 = W^1$.
   Podemos ampliar el sistema de coordenadas $\left(\kappa^1, \ldots, \kappa^{\mu_1}\right)$ tomado para W^1 en el epígrafe **??** a un sistema de coordenadas $\left(\kappa^1, \ldots, \kappa^{\mu_2}\right)$ en W^2. Concretamente como $\left(\kappa^1, \ldots, \kappa^{\mu_1}\right) \subset \left(x_\alpha^{\widetilde{\alpha}}\big|_{W^1}\right)$, podemos elegir las primeras μ_1 coordenadas en W^2 seleccionando las mismas coordenadas $x_\alpha^{\widetilde{\alpha}}$ restringidas a W^2, $\left(\kappa^1, \ldots, \kappa^{\mu_1}\right) \subset \left(x_\alpha^{\widetilde{\alpha}}\big|_{W^2}\right)$. Las últimas coordenadas $\left(\kappa^{\mu_1+1}, \ldots, \kappa^{\mu_2}\right)$ están incluidas en $\left(x_\beta^{\widetilde{\alpha}_1}\Big|_{W^2}\right)_{,\ m_0<\widetilde{\alpha}_1\leq m_1} \cup \left(y_\beta^{\nu_1}\Big|_{W^2}\right)$

7. Así $\left(\kappa^1, \ldots, \kappa^{\mu_2}\right)$ es un sistema de coordenadas para W^2, y constituyen las curvaturas de orden menor o igual a dos. Las $\left(\kappa^1, \ldots, \kappa^{\mu_1}\right)$ son las curvaturas de primer orden y $\left(\kappa^{\mu_1+1}, \ldots, \kappa^{\mu_2}\right)$ son las de segundo. Naturalmente se verifican unas ecuaciones del tipo:
$$\left\{\begin{array}{l} x_\beta^{\widetilde{\alpha}} = F_\beta^{\widetilde{\alpha}}\left(\kappa^1, \ldots, \kappa^{\mu_1}\right),\ p+1 \leq \widetilde{\alpha} \leq m \\ x_\beta^{\widetilde{\alpha}_1} = F_\beta^{\alpha_1}\left(\kappa^1, \ldots, \kappa^{\mu_2}\right),\ m_0+1 \leq \alpha_1 \leq m_1 \\ y_\alpha^{\nu_1} = N_\alpha^{\nu_1}\left(\kappa^1, \ldots, \kappa^{\mu_2}\right),\ 1 \leq \nu_1 \leq \mu_1 \end{array}\right. \tag{32}$$

donde podemos garantizar (usando $\downarrow W^2 = W^1$) que las ecuaciones del primer grupo coinciden con las *antiguas* dadas en (25.)

8. Un sistema de coordenadas para $\mathcal{O}^1 \times W^2$ es

$$\left(\kappa^1 \circ \sigma^1, \ldots, \kappa^{\mu_1} \circ \sigma^1, \kappa^1 \circ w^2, \ldots, \kappa^{\mu_2} \circ w^2\right) \tag{33}$$

donde $\sigma^1 : \mathcal{O}^1 \times W^2 \to \mathcal{O}^1$ se identifica ahora con la primera proyección y $w^2 : \mathcal{O}^1 \times W^2 \to W^2$ con la segunda.

Observese que las $\kappa^1, \ldots, \kappa^{\mu_1}$ están repetidas.

Si $f \in \mathcal{F}$, entonces $\sigma_s^2 f = \sigma^2\left(g_s^2 f\right)$, y $w_s^2 f = w^2\left(\sigma_s^2 f\right)$ para $s \in S$ de forma que

$$\sigma^2 f : S \to \mathcal{O}^1 \times W^2, \ s \to \sigma_s^2 f = \sigma^2\left(g_s^2 f\right) = \left(\sigma_s^1 f, w_s^2 f\right)$$

Las funciones $\kappa^{\nu_2}(f) : S \to \mathbb{R}$ definidas por

$$\kappa_s^{\nu_2}(f) = k^{\nu_2}\left(w_s^2 f\right) \text{ con } 1 \leq \nu_2 \leq \mu_2$$

son las curvaturas f de orden menor o igual a 2. Estas curvaturas determinan completamente $\sigma^2 f$.

Nota 29 *Observese que para $f \in \mathcal{F}$, las coordenadas de $\sigma_s^2 f \in \mathcal{O}^1 \times W^2$ en el sistema (33) son*

$$\left(k^1 \circ \sigma_s^1 f, \ldots, k^{\mu_1} \circ \sigma_s^1 f, \kappa_f^1(s), \ldots, \kappa_f^{\mu_2}(s)\right)$$

$k^{\nu_1}\left(\sigma_s^1 f\right)$ *no tendrían porqué coincidir con las $\kappa_f^{\nu_1}(s)$. Pero de hecho como se verá en la siguiente proposición 30* coinciden. *Además el propio argumento permite ya justificar las ecuaciones (18) para orden 2.*

Denotamos $\mathcal{O}^2 \subset \mathcal{O}^1 \times W^2$ a la subvariedad de $\mathcal{O}^1 \times W^2$ definida en las coordenadas (33) por las ecuaciones $k^{\nu_1} \circ \sigma^1 = k^1$, es decir

$$\begin{aligned}\mathcal{O}^2 &= \left\{\omega \in \mathcal{O}^1 \times W^2 : k^{\nu_1} \circ \sigma^1(\omega) = k^{\nu_1} \circ w^2(\omega)\right\} \\ &= \left\{(\theta, w) \in \mathcal{O}^1 \times W^2 : k^{\nu_1}(\theta) = k^{\nu_1}(w)\right\}\end{aligned} \tag{34}$$

Nótese que ahora (k^{ν_2}) determina un sistema de coordenadas para $\mathcal{O}^2$ y para W^2 por esto podríamos confundir ambos espacios. No obstante nos conformamos con escribir

$$\mathcal{O}^2 \simeq W^2$$

para indicar este hecho.

Proposición 30 *Sea $f \in \mathcal{F}$, entonces*

$$k^{\nu_1}\left(\sigma_s^1 f\right) = k^{\nu_1}\left(w_s^2 f\right)$$

es decir que las coordenadas de $\sigma_s^2 f \in \mathcal{O}^1 \times W^2$ en el sistema (33) son

$$\sigma_s^2 f \rightsquigarrow \left(\kappa_s^{\nu_1}(f), \kappa_s^{\nu_2}(f)\right)$$

En particular si $f \in \mathcal{F}$, entonces $g_S^2 f \subset G.\mathcal{O}^2$.

Demostración:
Como $g_S^2 f \subset G.\left(\mathcal{O}^1 \times W^2\right)$, podemos tomar una $\mathcal{O}^2$-referencia movil, es decir una $\mathbf{u} : S \to G$ diferenciable tal que

$$g_s^2 f = \mathbf{u}(s).\sigma_s^2 f \text{ con } \sigma_s^2 f \in \mathcal{O}^2 = \left(\mathcal{O}^1 \times W^2\right) \cap \mathcal{G}_{\mathcal{F}_2}^2\left(E, \mathcal{O}^1\right)$$

En particular $\mathbf{u} \in \Gamma\mathcal{O}^1(f)$ es una $\mathcal{O}^1$-referencia movil para f es decir $g^1 f(s) = \mathbf{u}(s).\sigma_s^1 f$. Sea (ϕ^α) la cobase adaptada con dual (ϕ_α), y $\varepsilon_{\nu_1} = \partial/\partial\kappa^{\nu_1}$. Así tendremos $\theta_\alpha^{i_1}$, $\sigma_\alpha^{\nu_1}$ funciones de $C^\infty(S)$ de forma que

$$\begin{array}{l} \Theta_{\mathbf{u}}^1 = \Omega_{\mathbf{u}}(\operatorname{mod}\mathfrak{g}_1) = \theta^{i_1} e_{i_1}, \text{ con } \theta^{i_1} = \theta_\alpha^{i_1}\phi^\alpha \in \Omega^1(S) \\ d\left(\sigma^1 f\right) = \sigma^{\nu_1}\varepsilon_{\nu_1} \text{ con } \sigma^{\nu_1} = \sigma_\alpha^{\nu_1}\phi^\alpha \in \Omega^1(S) \end{array} \tag{35}$$

usando la fórmula (97) y (93) tenemos

$$d_{\mathbf{u}}\left(g^1 f\right) = \Theta_{\mathbf{u}}^1 + d\left(\sigma^1 f\right) = \left(\theta_\alpha^{i_1}\phi^\alpha\right) e_{i_1} + \left(\sigma_\alpha^{\nu_1}\phi^\alpha\right)\varepsilon_{\nu_1} \tag{36}$$

tomando coordenadas $(\lambda^\alpha, s) \simeq \lambda^\alpha\phi_\alpha(s)$ en TS, y las $\left(x^{i_1}, y^{\nu_1}, \sigma\right) \simeq x^{i_1} e_{i_1} + y^{\nu_1}\varepsilon_{\nu_1}(\sigma)$ en $T_{\mathcal{O}^1}\mathcal{E}^1$ tenemos

$$d_{\mathbf{u}}\left(g^1 f\right) : \underset{(\lambda^\alpha)}{\mathbb{R}^p} \times \underset{s}{S} \simeq TS \to T_{\mathcal{O}^1}\mathcal{E}^{\mathbf{1}} \simeq \underset{(x^{i_1}, y^{\nu_1})}{\mathbb{R}^{m_1+\mu_1}} \times \underset{\sigma}{\mathcal{O}^1}$$

las ecuaciones de $d_{\mathbf{u}}\left(g^1 f\right)$ son

$$d_{\mathbf{u}}\left(g^1 f\right) : \left\{ \begin{array}{l} x^{i_1} = x^{i_1}(\lambda^\alpha, s) = \theta_\alpha^{i_1}(s)\lambda^\alpha \\ y^{\nu_1} = y^{\nu_1}(\lambda^\alpha, s) = \sigma_\alpha^{\nu_1}(s)\lambda^\alpha \\ \sigma^1 = \sigma^1(\lambda^\alpha, s) = \sigma_s^1 f \end{array} \right. \tag{37}$$

Como hemos tomado (ϕ^α) adaptada, se tiene entonces que $\left(\theta_\alpha^\beta\right) = id_{p\times p}$ y las ecuaciones de

$$S \ni s \to \sigma_s^2 f = \left[\left(d_{\mathbf{u}(s)}\left(g^1 f\right)\right)(\phi_1, \ldots, \phi_p)\right] \in \mathcal{O}^1 \times W^2$$

en la parametrización (**??**) son

$$\sigma^2 f : \left\{ \begin{array}{r} x_\alpha^{\widetilde{\alpha}_1} = \theta_\alpha^{\widetilde{\alpha}_1}(s) \\ y_\alpha^{\nu_1} = \sigma_\alpha^{\nu_1}(s) \\ \sigma = \sigma_s^1 f \end{array} \right. \tag{38}$$

Se tienen entonces por (32) las identidades:

$$\left\{ \begin{array}{l} \theta_\beta^{\widetilde{\alpha}_0}(s) = F_\beta^{\widetilde{\alpha}_0}\left(\kappa_s^1(f), \ldots, \kappa_s^{\mu_1}(f)\right), \; p+1 \le \widetilde{\alpha} \le m_0 \\ \theta_\beta^{\alpha_1}(s) = F_\beta^{\alpha_1}\left(\kappa_s^1(f), \ldots, \kappa_s^{\mu_2}(f)\right), \; m_0+1 \le \alpha_1 \le m_1 \\ \sigma_\alpha^{\nu_1}(s) = N_\alpha^{\nu_1}\left(\kappa_s^1(f), \ldots, \kappa_s^{\mu_2}(f)\right), \; 1 \le \nu_1 \le \mu_1 \end{array} \right. \tag{39}$$

De acuerdo con la observación 26 (pág 32) los $\theta_\beta^{\widetilde{\alpha}_0}(s)$ del primer grupo coinciden con los de (26) Como las curvaturas $\kappa^{\nu_1}\left(\sigma_s^1 f\right)$ se seleccionan entre las $\theta_\beta^{\widetilde{\alpha}_0}(s)$, lo mismo que las $\kappa^{\nu_1}\left(w_s^2 f\right)$, queda probado que $\kappa^{\nu_1}\left(\sigma_s^1 f\right) = \kappa^{\nu_1}\left(w_s^2 f\right) = \kappa_s^{\nu_1}(f)$, y esto concluye la demostración.
&&

3.5. Construcción inductiva.

Supongamos construido para cierto $\ell > 0$ y para cada $l \leq \ell$, $\mathcal{O}^l \simeq W^l \subset \mathbb{R}_p^{m_{l-1}+\mu_{l-1}}$, que en las coordenadas $\left(x_\alpha^{\widetilde{\alpha}_{l-1}}, y_\alpha^{\nu_{l-1}}\right)$, se escribe en forma paramétrica como:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_\beta^{\widetilde{\alpha}_{l-1}} = F_\beta^{\widetilde{\alpha}_{l-1}}\left(\kappa^1, \ldots, \kappa^{\mu_l}\right) \\ y_\alpha^{\nu_{l-1}} = N_\alpha^{\nu_{l-1}}\left(\kappa^1, \ldots, \kappa^{\mu_l}\right) \end{array} \right. \tag{40}$$

las funciones $F_\beta^{\widetilde{\alpha}_{\ell-1}}\left(\kappa^1, \ldots, \kappa^{\mu_\ell}\right)$, $N_\alpha^{\nu_{\ell-1}}\left(\kappa^1, \ldots, \kappa^{\mu_\ell}\right) : \mathcal{O}^\ell \to \mathbb{R}$, verificando para todo f $\mathcal{O}^\ell$-admisible y para cualquier $\mathbf{u} \in \Gamma o\left(f\right)$ referencia de orden ℓ para f las relaciones:

$$\left\{ \begin{array}{l} \theta_\beta^{\widetilde{\alpha}_{\ell-1}}\left(s\right) = F_\beta^{\widetilde{\alpha}_{\ell-1}}\left(\kappa_s^1 f, \ldots, \kappa_s^{\mu_\ell} f\right) \\ \sigma_\alpha^{\nu_{\ell-1}}\left(s\right) = N_\alpha^{\nu_{\ell-1}}\left(\kappa_s^1 f, \ldots, \kappa_s^{\mu_\ell} f\right) \end{array} \right. \tag{41}$$

siendo

$$\begin{array}{l} \Theta_{\mathbf{u}}^{\ell-1} = \Omega_{\mathbf{u}}\left(\operatorname{mod} \mathfrak{g}_{\ell-1}\right) = \phi^\alpha e_\alpha + \theta^{\widetilde{\alpha}_{\ell-1}} e_{\widetilde{\alpha}_\ell}, \text{ con } \theta^{\widetilde{\alpha}_{\ell-1}} = \theta_\beta^{\widetilde{\alpha}_{\ell-1}} \phi^\beta \in \Omega^1\left(S\right) \\ d\left(\sigma^{\ell-1} f\right) = \sigma^{\nu_{\ell-1}}\left(\partial/\partial\kappa^{\nu_{\ell-1}}\right) \text{ con } \sigma^{\nu_{\ell-1}} = \sigma_\alpha^{\nu_{\ell-1}} \phi^\alpha \in \Omega^1\left(S\right) \end{array}$$

y ϕ^α cobase adaptada en S.

Se entiende que también se han construido para cada $l \leq \ell$, $\mathcal{O}^l \simeq W^l \subset \mathbb{R}_p^{m_{l-1}+\mu_{l-1}}$, que en las coordenadas $\left(x_\alpha^{\widetilde{\alpha}_{l-1}}, y_\alpha^{\nu_{l-1}}\right)$, se escribe en forma paramétrica como

$$\left\{ \begin{array}{l} x_\beta^{\widetilde{\alpha}_{l-1}} = F_\beta^{\widetilde{\alpha}_{l-1}}\left(\kappa^1, \ldots, \kappa^{\mu_l}\right) \\ y_\alpha^{\nu_{l-1}} = N_\alpha^{\nu_{l-1}}\left(\kappa^1, \ldots, \kappa^{\mu_l}\right) \end{array} \right. \tag{42}$$

Sea $\mathcal{E}^\ell = G.\mathcal{O}^\ell$. Si $w \in \mathcal{O}^\ell$, entonces podemos escribir $T_w\left(\mathcal{E}^\ell\right) \simeq T_w\mathcal{O}^\ell \oplus \mathfrak{g}/\mathfrak{g}_\ell \simeq \mathbb{R}^{m_\ell+\mu_\ell} = \left\{\left(x^{i_\ell}\right), \left(y^{\nu_\ell}\right)\right\}$ cuando se toman en $T_w\left(\mathcal{E}^\ell\right)$ coordenadas respecto de la base $\left\{\left(e_{i_\ell}\right), \left(\partial/\partial\kappa^{\nu_\ell}\right)\right\}$.

La esencia del algoritmo radica en la construción de $W^{\ell+1}$ como una $G_{\ell+1}$-reducción de $\mathbb{G}_p\left(\mathbb{R}^{m_\ell+\mu_\ell}, W^\ell\right)_{[G_{\ell+1}]}$ respecto de la acción

$$\rho_\ell \times id_{\mu_\ell} : G_\ell \times \mathbb{G}_p\left(\mathbb{R}^{m_\ell+\mu_\ell}, W^\ell\right) \to \mathbb{G}_p\left(\mathbb{R}^{m_\ell+\mu_\ell}, W^\ell\right) \tag{43}$$

obtenida por restricción de

$$\rho_\ell \times id_{\mu_\ell} : G_\ell \times \mathbb{G}_p\left(\mathbb{R}^{m_\ell+\mu_\ell}\right) \to \mathbb{G}_p\left(\mathbb{R}^{m_\ell+\mu_\ell}\right) \tag{44}$$

(definida análogamente a (28)) siendo $\mathbb{G}_p\left(\mathbb{R}^{m_\ell+\mu_\ell}, W^\ell\right)$ la subvariedad correspondiente a

$$\mathbb{G}_p\left(\mathbb{R}^{m_\ell+\mu_\ell}, W^\ell\right) = \left\{\gamma \in \mathbb{G}_p\left(\mathbb{R}^{m_\ell+\mu_\ell}\right) : \downarrow \gamma \in W^\ell\right\} \tag{45}$$

donde $\downarrow$ denota la proyección natural:

$$\begin{array}{cccc} \downarrow: & \mathbb{G}_p\left(\mathbb{R}^{m_\ell+\mu_\ell}\right) & \to & \mathbb{G}_p\left(\mathfrak{g}/\mathfrak{g}_0\right) = \mathbb{G}_p\left(\mathbb{R}^{m_{\ell-1}+\mu_{\ell-1}}\right) \\ & \left(x_\alpha^{\widetilde{\alpha}_\ell}, y_\beta^{\nu_\ell}\right) & \to & \left(x_\alpha^{\widetilde{\alpha}_{\ell-1}}, y_\beta^{\nu_{\ell-1}}\right) \end{array}$$

Como la acción (43) no mueve W^ℓ podemos suponer (restringiendo quizás W^ℓ a un abierto suyo) que

$$\downarrow W^{\ell+1} = W^\ell \tag{46}$$

En realidad la acción (44) describe la acción

$$G_\ell \times \mathcal{G}_p^1\left(\mathcal{E}^\ell, \mathcal{O}^\ell\right) \rightarrow \mathcal{G}_p^1\left(\mathcal{E}^\ell, \mathcal{O}^\ell\right) \tag{47}$$

sobre cada $\mathcal{G}_p^1\left(\mathcal{E}^\ell, w\right) = \mathbb{G}_p\left(T_w\left(\mathcal{E}^\ell\right)\right)$, $w \in \mathcal{O}^\ell$, cuando se toman en $T_w\left(\mathcal{E}^\ell\right)$ las coordenadas lineales $\left(x^{i_\ell}, y^{\nu_\ell}\right)$ correspondientes a la base

$$\left(e_1, \ldots, e_{m_\ell}, \frac{\partial}{\partial \kappa^1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial \kappa^{\mu_\ell}},\right),$$

y las correspondientes $\left(x_\alpha^{\widetilde{\alpha}_\ell}, y_\beta^{\nu_\ell}\right)$ para $\mathbb{G}_p\left(T_w\left(\mathcal{E}^\ell\right)\right)$.

Denotando

$$\mathcal{O}^\ell \times \mathbb{G}_p\left(\mathbb{R}^{m_\ell+\mu_\ell}, W^\ell\right) \simeq \left(\mathcal{G}_p^1\right)\left(\mathcal{E}^\ell, \mathcal{O}^\ell\right) \subset \mathcal{G}_p^1\left(\mathcal{E}^\ell, \mathcal{O}^\ell\right) \simeq \mathcal{O}^\ell \times \mathbb{G}_p\left(\mathbb{R}^{m_\ell+\mu_\ell}\right)$$

entonces $\mathcal{O}^\ell \times W^{\ell+1}$ se interpreta como una $G_{\ell+1}$-sección de

$$\left(\mathcal{G}_p^1\right)\left(\mathcal{E}^\ell, \mathcal{O}^\ell\right) \supset \mathcal{G}_p^{\ell+1}\left(E, \mathcal{O}^\ell\right) \supset \mathcal{G}_{\mathcal{F}}^{\ell+1}\left(E, \mathcal{O}^\ell\right)$$

respecto a la acción restringida a $\left(\mathcal{G}_p^1\right)\left(\mathcal{E}^\ell, \mathcal{O}^\ell\right)$ de (47), que es una $G_{\ell+1}$-reducción del $G/\left[G_{\ell+1}\right]$ fibrado homogeneo $\left(\mathcal{G}_p^1\right)\left(\mathcal{E}^\ell, \mathcal{O}^\ell\right)_{\left[G_{\ell+1}\right]}$.

Usando (46) podemos ampliar el sistema de coordenadas $\left(\kappa^1, \ldots, \kappa^{\mu_\ell}\right)$ tomado para W^ℓ a un sistema de coordenadas $\left(\kappa^1, \ldots, \kappa^{\mu_{\ell+1}}\right)$ en $W^{\ell+1}$. Las últimas coordenadas $\left(\kappa^{1+\mu_\ell}, \ldots, \kappa^{\mu_{\ell+1}}\right)$ están incluidas en $\left(x_\beta^{\alpha_\ell}\Big|_{W^{\ell+1}}\right)_{m_{\ell-1}<\alpha_\ell\leq m_\ell}$ $\cup \left(y_\beta^{\nu_\ell}\Big|_{W^{\ell+1}}\right)$ y se verifican unas ecuaciones del tipo:

$$\left\{\begin{array}{l} x_\beta^{\widetilde{\alpha}_\ell} = F_\beta^{\widetilde{\alpha}_\ell}\left(\kappa^1, \ldots, \kappa^{\mu_{\ell+1}}\right) \\ y_\alpha^{\nu_\ell} = N_\alpha^{\nu_\ell}\left(\kappa^1, \ldots, \kappa^{\mu_\ell+1}\right) \end{array}\right. \tag{48}$$

que *incluyen* a las ecuaciones (40).

Además $\left(\kappa^{\nu_\ell} \circ \sigma^\ell, \kappa^{\nu_{\ell+1}} \circ w^{\ell+1}\right)$ es un sistema de $\mu_\ell + \mu_{\ell+1}$ coordenadas para $\mathcal{O}^\ell \times W^{\ell+1}$ donde $\sigma^\ell : \mathcal{O}^\ell \times W^{\ell+1} \rightarrow \mathcal{O}^\ell$, y $w^{\ell+1} : \mathcal{O}^\ell \times W^{\ell+1} \rightarrow W^{\ell+1}$ son las proyecciones.

Finalmente podemos definir $\mathcal{O}^{\ell+1} \subset \mathcal{O}^\ell \times W^{\ell+1}$por la condición $\kappa^{\nu_\ell} \circ \sigma^\ell = \kappa^{\nu_\ell} \circ w^{\ell+1}$ y concluir que si $g_S^{\ell+1} f \subset G.\left(\mathcal{O}^\ell \times W^{\ell+1}\right)$ entonces necesariamente $g_S^{\ell+1} f \subset \mathcal{E}^{\ell+1} = G.\mathcal{O}^{\ell+1}$. El argumento es el mismo que en la proposición 30 (pág 35), ya que respecto a una $\mathcal{O}^{\ell+1}$-referencia movil $\mathbf{u} : S \rightarrow G$ el cálculo de $\sigma_s^{\ell+1} f = \mathbf{u}^{-1}.g_s^{\ell+1} f \in \mathcal{O}^{\ell+1}$ da lugar a las identidades (18) y (**??**) que se pedían, es decir:

$$\left\{\begin{array}{l} \theta_\beta^{\widetilde{\alpha}_\ell}(s) = F_\beta^{\widetilde{\alpha}_\ell}\left(\kappa_s^1(f), \ldots, \kappa_s^{\mu_{\ell+1}}(f)\right) \\ \sigma_\alpha^{\nu_\ell}(s) = N_\alpha^{\nu_\ell}\left(\kappa_s^1(f), \ldots, \kappa_s^{\mu_{\ell+1}}(f)\right) \end{array}\right.$$

donde $\kappa_s^{\nu_{\ell+1}}(f) = \kappa^{\nu_{\ell+1}}\left(\sigma_s^{\ell+1} f\right)$ y

$$\begin{array}{l} \Theta_{\mathbf{u}}^\ell = \Omega_{\mathbf{u}}(\operatorname{mod} \mathfrak{g}_\ell) = \phi^\alpha e_\alpha + \theta^{\widetilde{\alpha}_\ell} e_{\widetilde{\alpha}_\ell}, \text{ con } \theta^{\widetilde{\alpha}_\ell} = \theta_\beta^{\widetilde{\alpha}_\ell}\phi^\beta \in \Omega^1(S) \\ d\left(\sigma^\ell f\right) = \sigma^{\nu_\ell}\left(\partial/\partial\kappa^{\nu_\ell}\right) \text{ con } \sigma^{\nu_\ell} = \sigma_\alpha^{\nu_\ell}\phi^\alpha \in \Omega^1(S) \end{array}$$

Las ecuaciones (18) prueban que $\sigma_s^{\ell+1} f \in \mathcal{O}^{\ell+1}$. Nótese que $\mathcal{O}^{\ell+1} \simeq W^{\ell+1}$ pues $\left(\kappa^1, \ldots, \kappa^{\mu_{\ell+1}}\right)$ es un sistema de coordenadas común para ambos espacios.

Esto concluye la demostración del Teorema 2.2, y de las ecuaciones estructurales (18)

Nota 31 *Las* nuevas *curvaturas* $\left(\kappa^{1+\mu_\ell},\ldots,\kappa^{\mu_{\ell+1}}\right)$ *podrían haberse tomado como* las restricciones *a* $\mathcal{O}^{\ell+1}$ *de ciertas* $x_\beta^{\widetilde{\alpha}_\ell}$ $y_\alpha^{\nu_\ell}$, *pero debido su independencia funcional con* $\left(\kappa^1,\ldots,\kappa^{\mu_\ell}\right)$ *y en vista de las relaciones (42) la selección está entre las* $x_\beta^{\alpha_\ell}$ $y_\alpha^{\widetilde{\nu}_\ell}$

Nota 32 *Observese que podríamos repetir la construcción inductiva para* $\ell = q+1$. *En este caso, si.*$\left(\kappa^1,\ldots,\kappa^{\mu_{q+2}}\right)$ *son las coordenadas de* $\mathcal{O}^{q+2}$, *y* f *es* $\mathcal{O}^{q+2}$*-admisible, las últimas* $\mu_{q+2}-\mu_{q+1}$ *funciones* $\left(\kappa_s^{1+\mu_{q+1}}f,\ldots,\kappa_s^{\mu_{q+2}}f\right)$ se deducen *de las* μ_{q+1} *primeras. La razón de esto es que las coordenadas* $\left(\kappa^{1+\mu_{q+1}},\ldots,\kappa^{\mu_{q+2}}\right)$ *podemos suponerlas tomadas en* $\left(y_\beta^{\nu_{q+1}}\Big|_{\mathcal{O}^{q+2}}\right)$ *(pues no hay elementos en* $(x_\beta^{\alpha_{q+1}}\Big|_{\mathcal{O}^{q+2}})_{m_q<\alpha_{q+1}\leq m_{q+1}}$ *ya que* $m_q = m_{q+1}$*). Así si* $\mathbf{u}\in\Gamma\mathcal{O}^q(f) = \Gamma\mathcal{O}^{q+1}(f) = \Gamma\mathcal{O}^{q+2}(f)$, *entonces como* $\mathfrak{g}_q = \mathfrak{g}_{q+1}$ *se tiene:*

$$\Theta_{\mathbf{u}}^{q+1} = \Theta_{\mathbf{u}}^q = \phi^\alpha e_\alpha + F_\alpha^{\widetilde{\alpha}_q}\left(\kappa_s^1 f,\ldots,\kappa_s^{\mu_{q+1}}f\right)\phi^\alpha e_{\widetilde{\alpha}_q}$$

y las curvaturas $\left(\kappa_s^{1+\mu_{q+1}}f,\ldots,k_s^{\mu_{q+2}}f\right)$ *de orden* $q+2$ *de* f *están tomadas de la colección* $\left(\sigma_\alpha^{\nu_{q+1}}(s)\right)$ *que dependen de la diferencial de* $\sigma^{q+1}f$ *en la forma*

$$d\left(\sigma^{q+1}f\right) = \sigma^{\nu_{q+1}}\left(\partial/\partial k^{\nu_{q+1}}\right) \text{ con } \sigma^{\nu_{q+1}} = \sigma_\alpha^{\nu_{q+1}}\phi^\alpha \in \Omega^1(S)$$

siendo $\sigma^{\nu_{q+1}} = d\left(\kappa^{\nu_{q+1}}f\right)$. *Así que conocidas las funciones de curvatura*

$$\left(\kappa^1 f,\ldots,\kappa^{\mu_{q+1}}f\right)$$

en torno a un $s\in S$, *podemos conocer (calculando las componentes de las* $d\left(\kappa^{\nu_{q+1}}f\right)$ *en la cobase* (ϕ^α) *) las*

$$\left(\kappa_s^{1+\mu_{q+1}}f,\ldots,\kappa_s^{\mu_{q+2}}f\right)$$

Esto significa también que para dos variedades $\mathcal{O}^{q+1}$*-admisibles* $(f:S)$, *y* $\left(\overline{f}:S\right)$ *-que admiten una cobase de Frenet comun* (ϕ^α)*- y* $\sigma^{q+1}f = \sigma^{q+1}\overline{f}$ *entonces* $\sigma^{q+2}f = \sigma^{q+2}\overline{f}$, *y en general es* $\sigma^{q+r}f = \sigma^{q+r}\overline{f}$ *para todo* r.

3.6. Algoritmo Jensen (para autómatas).

$E = (E, G, \lambda)$ es una geometría (fiel) de Klein con dimensión $m = m_0$. Se ha fijado un origen $o\in E$, y $G_o = \{A\in G : A.o = o\}$ es su grupo de isotropía.Nos disponemos a describir esquemáticamente el proceso algoritmico para clasificar *a lo Jensen* las p-variedades de E. Mantenemos por supuesto el convenio de variación de índices dado en (15) pág 19.

1. *Determinada la acción* $Ad : G\to GL(\mathfrak{g})$, *se busca* $\mathfrak{m}_0 = [(e_{i_0})]$ *subespacio vectorial de* $\mathfrak{g}$, *a ser posible Ad-invariante, tal que*

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{m}_0 \oplus \mathfrak{g}_0$$

   Así $(e_{i_0}) = (e_{\alpha_0})$ puede considerarse base de $\mathfrak{m}_0 \simeq \mathfrak{g}/\mathfrak{g}_0 \simeq .\mathbb{R}^{m_0}$.

2. *Calculamos las* $\boldsymbol{\theta}^{\alpha_0}\in\Omega^1(G)$

$$\Omega = \Theta_0 + \Omega_0 \text{ con } \begin{cases} \Theta_0 = \boldsymbol{\theta}^{\alpha_0}e_{\alpha_0}\in\Omega^1(G,\mathfrak{m}_0) \\ \Omega_0\in\Omega^1(G,\mathfrak{g}_0) \end{cases}$$

3. *Se calcula el grupo de matrices* $\rho_0(G_0)$, siendo $\rho_0 : G_0 \to GL(m_0, \mathbb{R})$ la representación $\overline{Ad} : G_0 \to GL(\mathfrak{m}_0)$ en coordenadas:

$$\rho_0(K) = K^{i_0}_{j_0} \Leftrightarrow \overline{Ad}_K(e_{j_0}) = K^{i_0}_{j_0} e_{i_0}$$

4. *Se estudian las posibles secciones* $W^1 \subset R^{m_0-p}_p \simeq G_{p,m_0}$ *de la acción* $\rho_0 : \rho_0(G_0) \times \mathbb{R}^{m_0-p}_p \to \mathbb{R}^{m_0-p}_p$ *dada por*

$$\left(K^{i_0}_{j_0}\right) \bullet \left(x^{\widetilde{\alpha}_0}_\alpha\right) = \left[\left(K^{i_0}_{j_0}\right) \left(\begin{array}{c} \left(\delta^\alpha_\beta\right) \\ \left(x^{\widetilde{\alpha}_0}_\alpha\right) \end{array} \right)\right]$$

5. *Fijada una sección* W^1*de ecuaciones*

$$x^{\widetilde{\alpha}_0}_\alpha = F^{\widetilde{\alpha}_0}_\alpha\left(k^1, \ldots, k^{\mu_1}\right) \quad \left(\begin{array}{c} \text{Se supone que las } (k^{\nu_1}) \text{ están} \\ \text{seleccionadas entre las } \left(x^{\widetilde{\alpha}_0}_\alpha\right) \end{array} \right)$$

se calcula su grupo de isotropía $G_1 \subset G_0$ (es decir, $\left(K^{i_0}_{j_0}\right) \bullet \left(F^{\widetilde{\alpha}_0}_\alpha\right) = \left(F^{\widetilde{\alpha}_0}_\alpha\right)$ para todo $\left(K^{i_0}_{j_0}\right) \in \rho_0(G_1)$) y *un subespacio vectorial* $\mathfrak{m}_1 = [(e_{\alpha_1})]$ *de* $\mathfrak{g}_1$*, (a ser posible Ad-invariante) tal que*

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{m}_0 \oplus \mathfrak{g}_0 = \mathfrak{m}_0 \oplus \mathfrak{m}_1 \oplus \mathfrak{g}_1$$

Así (e_{i_1}) puede considerarse base de $\mathfrak{m}_0 \oplus \mathfrak{m}_1 \simeq \mathfrak{g}/\mathfrak{g}_1 \simeq \mathbb{R}^{m_1}$ y

6. *Calculamos las* $\boldsymbol{\theta}^{\alpha_1} \in \Omega^1(G)$ *tales que*

$$\Omega_0 = \Theta_1 + \Omega_1 \text{ con } \left\{ \begin{array}{l} \Theta_1 = \boldsymbol{\theta}^{\alpha_1} e_{\alpha_1} \in \Omega^1(G, \mathfrak{m}_0) \\ \Omega_1 \in \Omega^1(G, \mathfrak{g}_1) \end{array} \right.$$

(tenemos así $\Omega = \Theta^1 + \Omega_1$ con $\Theta^1 = \Theta_0 + \Theta_1 \simeq \Omega \,(\mathrm{mod}\, \mathfrak{g}_1)$)

7. *Se calcula el grupo de matrices* $\rho_1(G_1)$ *siendo* $\rho_1 : G_1 \to GL(m_1, \mathbb{R})$ *la representación* $\overline{Ad} : G_1 \to GL(\mathfrak{m}_0 \oplus \mathfrak{m}_1)$ *en coordenadas*:

$$\rho_1(K) = \left(K^{i_1}_{j_1}\right) \Leftrightarrow \overline{Ad}_K(e_{j_1}) = K^{i_1}_{j_1} e_{i_1}$$

8. *Determínese la acción* $\rho_1 \times id_{\mu_1} : \rho_1(G_1) \times \mathbb{R}^{n_1+\mu_1}_p \to \mathbb{R}^{n_1+\mu_1}_p$ *dada por la condición* (ver apartado 2 de epígrafe 3.4 en página 33)

$$\left[\left(\begin{array}{cc} \left(K^{i_1}_{j_1}\right) & 0 \\ 0 & \left(\delta^{\nu_1}_{\tau_1}\right) \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} \left(\delta^\alpha_\beta\right) \\ \left(F^{\widetilde{\alpha}_0}_\alpha\left(k^1, \ldots, k^{\mu_1}\right)\right) \\ \left(\begin{array}{c} x^{\alpha_1}_\alpha \\ y^{\nu_1}_\beta \end{array} \right) \end{array} \right)\right]$$

$$= \left[\begin{array}{c} \left(\delta^\alpha_\beta\right) \\ \left(F^{\widetilde{\alpha}_0}_\alpha\left(k^1, \ldots, k^{\mu_1}\right)\right) \\ \left(K^{i_1}_{j_1}\right) \bullet \left(\begin{array}{c} x^{\alpha_1}_\alpha \\ y^{\nu_1}_\beta \end{array} \right) \end{array} \right]$$

9. **¿Hay alguien ahí?**
Las variables $\left(y^{\nu_1}_\beta\right)$ son libres, y las $(x^{\alpha_1}_\alpha)$ *pueden estar* sometidas a ciertas restricciones, provocadas por las ecuaciones *formales* de Maurer Cartan. Denotamos por $(\mathbb{R})^{n_1+\mu_1}_p$ a esta familia restringida de matrices en $\mathbb{R}^{n_1+\mu_1}_p$.

Explícitamente:
Aplíquense formalmente las ecuaciones de Maurer-Cartan a (ver sección 4.4 en página 56) a

$$\begin{cases} \phi^{\alpha} = \theta^{\alpha} \\ \theta^{\widetilde{\alpha}_0} = F_{\beta}^{\widetilde{\alpha}_0}\left(k^1, \ldots, k^{\mu_1}\right)\phi^{\beta} \\ \theta^{\alpha_1} = x_{\beta}^{\alpha_1}\phi^{\beta} \end{cases}$$

donde se supone que para cierta (referencia de orden 1 de cierta $f : S \to E$) $\mathbf{u} : S \to G$ *diferenciable se ha tomado*

$$\theta^{i_1} = \mathbf{u}^* \boldsymbol{\theta}^{i_1} \in \Omega^1(S)$$

Siendo $\boldsymbol{\theta}^{i_1} \in \Omega^1(G)$ *las* 1*-formas obtenidas En los pasos* 2*,y* 6, y teniendo en cuenta que los (k^{ν_1}) son μ_1 elementos seleccionados de la colección de los $\theta_{\beta}^{\widetilde{\alpha}_0}$ tales que $\theta^{\widetilde{\alpha}_0} = \theta_{\beta}^{\widetilde{\alpha}_0}\phi^{\beta}$.
Extraiganse a ser posible de aquí, las relaciones buscadas entre las variables $x_{\beta}^{\alpha_1}$ *(¡ya libres del parámetro s!).*Nótese que si

$$\gamma_{\mathbf{u}}^1 f = (e_{\alpha_0}) \begin{bmatrix} (\delta_{\beta}^{\alpha}) \\ \left(F_{\alpha}^{\widetilde{\alpha}_0}\left(\kappa^1, \ldots, \kappa^{\mu_1}\right)\right) \end{bmatrix}$$

entonces

$$\mathbf{u}^*\Omega \pmod{\mathfrak{g}_1} = \Theta_{\mathbf{u}}^1 = \phi^{\alpha} e_{\alpha} + F_{\beta}^{\widetilde{\alpha}_0}\left(\kappa^1, \ldots, \kappa^{\mu_1}\right)\phi^{\beta} e_{\widetilde{\alpha}_0} + \left(x_{\beta}^{i_1}\phi^{\beta}\right) e_{i_1}$$

10. *Se fija una sección* W_2 *en la acción restringida* $\rho_1 \times id_{\mu_1} : \rho_1(G_1) \times (\mathbb{R})_p^{n_1+\mu_1} \to (\mathbb{R})_p^{n_1+\mu_1}$ *y sus ecuaciones*:

$$\begin{cases} x_{\alpha}^{\widetilde{\alpha}_1} = F_{\alpha}^{\widetilde{\alpha}_1}\left(k^{1+\mu_1}, \ldots, k^{\mu_2}\right) \\ y_{\beta}^{\nu_1} = N^{\nu_1}\left(k^{1+\mu_1}, \ldots, k^{\mu_2}\right) \end{cases}, \quad \begin{array}{l} \text{Se supone que } \left(k^{\mu_1+1}, \ldots, k^{\mu_2}\right) \\ \text{están seleccionadas entre las } \left(x_{\beta}^{\widetilde{\alpha}_1}, y_{\beta}^{\nu_1}\right). \end{array}$$

y se define $W^2 = W_1 \times W_2$

11. *Se continúa inductivamente con el proceso pasando del nivel* ℓ *al* $\ell + 1$*, hasta alcanzar el orden* $q + 1$*, en donde* $n_{q+1} = 0$

Una p-variedad en E, $f : S \to E$, se dice de tipo $W^{\ell+1} = W_1 \times \cdots \times W_{\ell+1}$, si admite una $W^{\ell+1}$-referencia móvil es decir una $\mathbf{u} : S \to G$ diferenciable con $\mathbf{u}.o = f$ y $\kappa^{\nu} : S \to \mathbb{R}$ con $1 \leq \nu \leq \mu_{\ell+1}$tales que

$$\mathbf{u}^*\Omega \pmod{\mathfrak{g}_{\ell}} = \Theta_{\mathbf{u}}^{\ell} = \phi^{\alpha} e_{\alpha} + F_{\beta}^{\widetilde{\alpha}_{\ell}}\left(\kappa^1, \ldots, \kappa^{\mu_{\ell+1}}\right)\phi^{\beta} e_{\widetilde{\alpha}_{\ell}}$$

donde $\phi^{\alpha} = \theta^{\alpha} = \mathbf{u}^*\boldsymbol{\theta}^{\alpha}$, es la cobase adaptada. Las $(\kappa^{\nu_{\ell+1}})$ son las curvaturas de órden $\leq \ell + 1$ de f.

Nota 33 *El resultado final es que las curvaturas* $\kappa^1, \ldots, \kappa^{\mu_{\ell+1}}$ *de una p-variedad en E,* $f : S \to E$*, de tipo* $W^{\ell+1}$ *no dependen de la* $W^{\ell+1}$*-referencia móvil tomada, y en el caso* $\ell = q$*, el sistema de curvaturas de orden* $\leq q + 1$ *es un sistema completo de invariantes para variedades de tipo* W^{q+1}

Nota 34 *A lo largo del proceso, y en cada paso* ℓ *se va decidiendo cual es la sección* W_{ℓ} *elegida con su isotropía* G_{ℓ}*. Esto da lugar a un árbol cuyas ramas que* deben dejarse crecer *hasta el final del proceso (*$n_q = 0$*). Los extremos finales de estas ramas proporcionan distintos tipos* W^{q+1} *de p-variedades, y dentro de cada tipo las curvaturas son las que deciden la congruencia.*

4. Teoremas de Congruencia.

Se supone ahora fijado en espacio homogeneo $E = (E, G, \lambda)$ una familia admisible $\mathcal{F}$, y un sistema referencial $\left(\mathcal{O}^{\ell}\right)$ asociado. Los argumentos que se van a exponer, sirven indistintamente tanto si el referencial es de contacto como si no lo es (ver epígrafe 3.2 en la página 29).

En lo que sigue $f : S \to E$ es una $p-$variedad $\mathcal{O}^{\ell}$-admisible (i.e. $g_S^{\ell} f \subset G.\mathcal{O}^{\ell} = \mathcal{E}^{\ell}$), y que se asumen las hipótesis y notaciones del párrafo 2.1.3

Supondremos que la imagen $\sigma_S^{\ell} f = im\left(\sigma^{\ell} f\right)$ es una variedad de $\mathcal{O}^{\ell}$ que denominamos variedad de invariantes de orden ℓ para f.y construimos para f el entero

$$\rho_f = \text{mín}\left\{\ell \geq q \,/ \dim\left(\sigma_S^{\ell} f\right) = \dim\left(\sigma_S^{\ell+1} f\right)\right\}$$

Nota 35 *Es esperable que $q \leq \rho_f \leq q+1$, aunque no hemos conseguido demostrarlo. Se observará no obstante que en algunos párrafos de este* survey *hemos asumido (por razones de simplicidad) como si fuera cierta esta afirmación. Pero de hecho, por el momento no disponemos de ninguna acotación para el valor de ρ_f.*

Se denominan a $\left(\kappa^1 f, \ldots, \kappa^{\mu_{\rho_f+1}} f\right)$ introducidas en el epígrafe 2.1.5 sistema de curvaturas para f.

- Sean $f, \overline{f} : S \to E$ dos p-variedades admisibles. Supongamos que tienen el mismo sistema de curvaturas, es decir $\rho_f = \rho_{\overline{f}} = \rho$, y

  $$\sigma^{\rho+1} f = \sigma^{\rho+1} \overline{f} : S \to \mathcal{O}^{\rho+1}$$

  Esto equivale a decir que

  $$\kappa^{\nu} f = \kappa^{\nu}\ \overline{f},\ 1 \leq \nu \leq \mu_{\rho+1}$$

  ¿Podemos asegurar que las parametrizaciones f y $\overline{f}$ son congruentes (existe $K \in G$, con $\lambda_K \circ f = \overline{f}$)?.

Podemos reformular la pregunta anterior de la siguiente manera:

- Sean $f, : S \to E$, $\overline{f} : \overline{S} \to E$ dos p-variedades admisibles con $\rho_f = \rho_{\overline{f}} = \rho$. Supongamos que existe un difeomorfismo $\phi : \overline{S} \to S$ de forma que

  $$\kappa_f^{\nu} \circ \phi = \kappa_{\overline{f}}^{\nu}\ 1 \leq \nu \leq \mu_{\rho+1}$$

  En estas condiciones: ¿existe $A \in G$ con $\lambda_A \circ (f \circ \phi) = \overline{f}$)?

Hay una tercera forma de formular todavía la misma pregunta:

- Sean M y $\overline{M}$ p-variedades admisibles, con $\rho_M = \rho_{\overline{M}} = \rho$, y $\Phi : \overline{M} \to M$ un difeomorfismo tal que

  $$\kappa_M^{\nu} \circ \Phi = \kappa_{\overline{M}}^{\nu},\ 1 \leq \nu \leq \mu_{\rho+1}$$

¿Es necesariamente Φ una congruencia (i.e.$\Phi = \lambda_K|_{\overline{M}}$ para algún $K \in G$?
Empezamos probando el siguiente teorema:

4.1. Caso general.

Teorema 36 *Sean $f, \overline{f} : S \to E$ dos p-variedades admisibles, con $\rho_f = \rho_{\overline{f}} = \rho$. Supongamos que tienen los mismos invariantes hasta el orden $\rho + 1$. Es decir*

$$\sigma^{\rho+1} f = \sigma^{\rho+1} \overline{f} : S \to \mathcal{O}^{q+1}$$

Admitamos que $\sigma^{q+1} f : S \to \mathcal{O}^{q+1}$ es una p-variedad. Entonces existe $A \in G$, con $\lambda_A \circ f = \overline{f}$.

Sin pérdida de generalidad, podemos suponer a $\sigma^\rho f$ inyectiva. Sea $\Sigma = im\,(\sigma^\rho f)$, considérese la variedad

$$G.\Sigma = \{A.\sigma : A \in G,\ \sigma \in \Sigma\} \approx G/G_q \times \Sigma$$

y definimos sobre ella una distribución $\Pi : G.\Sigma \to \mathcal{G}^1_p\,(G.\Sigma)$ (que es una sección del fibrado Grassmaniano $\downarrow \mathcal{G}^1_p\,(G.\Sigma) \to G.\Sigma$), mediante la siguiente construcción:

Fijado $s \in S$, tomamos $u \in \mathcal{O}^q\,(f,s) = \mathcal{O}^\rho\,(f,s) = \mathcal{O}^{\rho+1}\,(f,s)$ referencia de Frenet auxiliar y definimos

$$\Pi\,(A.\sigma^\rho_s f) = g^1_s \left(g^\rho \left(\left(Au^{-1}\right).f\right)\right) \tag{49}$$

1. Veamos que la definición (49) es consistente.

   a) *La aplicación $g^\rho \left(\left(Au^{-1}\right).f\right)$ definida en S tiene su imagen en $G.\Sigma$.*
   Dem: Como $\left(Au^{-1}\right).f$ y f son congruentes , es $\sigma^\rho \left(\left(Au^{-1}\right).f\right) = \sigma^\rho f$, si $\mathbf{v}$ es referencia de frenet para $\left(Au^{-1}\right).f$ se tiene

   $$g^\rho \left(\left(Au^{-1}\right).f\right) = \mathbf{v}.\sigma^\rho f : S \to G.\Sigma$$

   b) *La definición de $\Pi\,(\gamma) = \Pi\,(A.\sigma^\rho_s f)$ en (49) para $\gamma = A.\sigma^\rho_s f$ no depende del $A \in G$ utilizado.*
   Dem: Si $\gamma = A.\sigma^\rho_s f = B.\sigma^\rho_s f \in G.\Sigma$, entonces $g^1_s \left(g^\rho \left(\left(Au^{-1}\right).f\right)\right) = g^1_s \left(g^\rho \left(\left(Bu^{-1}\right).f\right)\right)$. En efecto, tenemos que $B^{-1}A \in G_\rho = G_{\rho+1}$, que es grupo de isotropía de $\mathcal{O}^{\rho+1}$ a donde pertenece justamente $\sigma^{\rho+1}_s f$ que coincide con $g^{\rho+1}_s \left(u^{-1}.f\right)$, ya que u es también referencia $(\rho+1)$-adaptada. En consecuencia $\left(B^{-1}A\right).g^{\rho+1}_s \left(u^{-1}.f\right) = g^{\rho+1}_s \left(u^{-1}.f\right)$ y por tanto

   $$A.g^{\rho+1}_s \left(u^{-1}.f\right) = B.g^{\rho+1}_s \left(u^{-1}.f\right)$$

   el final del argumento ya se deja caer:

   $$\begin{aligned} g^1_s \left(g^\rho \left(\left(Au^{-1}\right).f\right)\right) &= g^{\rho+1}_s \left(\left(Au^{-1}\right).f\right) \\ &= A.g^{\rho+1}_s \left(u^{-1}.f\right) \\ &= B.g^{\rho+1}_s \left(u^{-1}.f\right) \\ &= ...g^1_s \left(g^\rho \left(\left(Bu^{-1}\right).f\right)\right) \end{aligned}$$

   c) *Si $u, v \in \mathcal{O}^\rho\,(f,s)$, entonces $g^1_s \left(g^\rho \left(\left(Au^{-1}\right).f\right)\right) = g^1_s \left(g^\rho \left(\left(Av^{-1}\right).f\right)\right)$.*
   Dem: Sean, u v son referencias $(\rho+1)$-adaptadas, por el argumento anterior

   $$g^{\rho+1}_s \left(u^{-1}.f\right) = \sigma^{\rho+1}_s f = g^{\rho+1}_s \left(v^{-1}.f\right)$$

así:

$$\begin{aligned} g_s^1\left(g^\rho\left(\left(Au^{-1}\right).f\right)\right) &= g_s^{\rho+1}\left(\left(Au^{-1}\right).f\right) \\ &= A.g_s^{\rho+1}\left(u^{-1}.f\right) \\ &= A.g_s^{\rho+1}\left(v^{-1}.f\right) = \\ &= \ldots = g_s^1\left(g^\rho\left(\left(Av^{-1}\right).f\right)\right) \end{aligned}$$

2. *La distribución definida por* (49) *es diferenciable y la p-variedad* $g^\rho f : S \to G.\Sigma$ *es una hoja .*
Dem: Si $\mathbf{u}$:$S \to G$ es una referencia móvil de Frenet, y $A \in G$, se tiene la identidad:
$$\Pi\left(A.\sigma_s^\rho f\right) = \left(A\mathbf{u}\left(s\right)^{-1}\right).g_s^{\rho+1}\left(.f\right)$$
y la aplicación
$$G \times S \to \mathcal{G}^{\rho+1}\left(E\right),\ \left(A, s\right) \to \left(A\mathbf{u}\left(s\right)^{-1}\right).g_s^{\rho+1}\left(f\right)$$
es claramente diferenciable. Por otro lado, fijando $s \in S$, y tomando en la fórmula (49) $A = u \in \mathcal{O}^\rho\left(f, s\right)$ como $g_s^\rho f = u.\sigma_s^\rho f$ queda:
$$\Pi\left(g_s^\rho f\right) = \Pi\left(u.\sigma_s^\rho f\right) = g_s^1\left(g^\rho f\right)$$

3. *La distribución definida por* (49) *es invariante por la acción del grupo.*
Dem: Si $\gamma = A.\sigma_s^\rho f$, y $B \in G$, entonces
$$\begin{aligned} \Pi\left(B.\gamma\right) &= \Pi\left(\left(BA\right).\sigma_s^\rho f\right) \\ &= g_s^{\rho+1}\left(\left(BA\right)u^{-1}f\right) \\ &= B.g_s^{\rho+1}\left(Au^{-1}f\right) \\ &= B.\Pi\left(\gamma\right) \end{aligned}$$

4. *La distribución* $\Pi_f = \Pi$ *construida en* (49) *para* f *coincide con la correspondiente* $\Pi_{\overline{f}}$*.para* $\overline{f}$.
Dem: Fijado $s \in S$, $u \in \mathcal{O}^\rho(f, s)$, y $\overline{u} \in \mathcal{O}^\rho(\overline{f}, s)$, como $\sigma^{\rho+1} f = \sigma^{\rho+1}\overline{f}$ queda
$$g_s^{\rho+1}\left(u^{-1}f\right) = \sigma_s^{\rho+1} f = \sigma_s^{\rho+1}\overline{f} = g_s^{\rho+1}\left(\overline{u}^{-1}\overline{f}\right)$$
además, $\sigma_s^\rho f = \sigma_s^\rho \overline{f}$ por tanto
$$\begin{aligned} \Pi_f\left(A.\sigma_s^\rho f\right) &= g_s^1\left(g^\rho\left(\left(Au^{-1}\right).f\right)\right) \\ &= A.g_s^{\rho+1}\left(u^{-1}f\right) \\ &= A.g_s^{\rho+1}\left(\overline{u}^{-1}\overline{f}\right) \\ &= \Pi_{\overline{f}}\left(A.\sigma_s^\rho f\right) \end{aligned}$$

Demostración. (**Teorema**.36)

En consecuencia $g^\rho\overline{f}$, $g^\rho f : S \to G.\Sigma$ son hojas de la misma distribución $\Pi_f = \Pi_{\overline{f}} = \Pi$. Fijado un $\overline{s} \in S$, tomemos $A \in G$, tal que $A.g_{\overline{s}}^\rho f = g_{\overline{s}}^\rho \overline{f}$ (concretamente $A = \overline{u}u^{-1}$, con $u \in \mathcal{O}^\rho(f, \overline{s})$, y $\overline{u} \in \mathcal{O}^\rho(\overline{f}, \overline{s})$), así como la distribución Π es invariante por traslaciones a la izquierda, también $A.g^\rho f : S \to G.\Sigma$ es una hoja por el punto $A.g_{\overline{s}}^\rho f = g_{\overline{s}}^\rho \overline{f}$. Esto significa por la unicidad, que existe un diefomorfismo (en torno a $\overline{s}$) $\phi : S \to S$ ..tal que
$$A.g_{\phi(s)}^\rho f = g_s^\rho \overline{f} \text{ para todo } s \in S \tag{50}$$

pero entonces denotando $\sigma^\rho(s) = \sigma^\rho_s f = \sigma^\rho_s \overline{f}$, y teniendo en cuenta que $\sigma^\rho : S \to \mathcal{O}^\rho$ es una p-variedad se concluye para todo $s \in S$

$$\sigma^\rho(s) = \sigma^\rho (\phi (s)) \Rightarrow s = \phi (s)$$

y por tanto $\phi = id$. De (50) se concluye ahora que $A.g^\rho_s f = g^\rho_s \overline{f}$, y en particular esta relación se mantiene para los puntos de apoyo, es decir $\lambda_A \circ f(s) = \overline{f}(s)$ para todo $s \in S$. ■

4.2. Casos especiales: Variedades con simetrías.

Sea $f : S \to E$ p-variedad en $\mathcal{O}^\rho$-admisible Sea $\rho = \rho_f$, y admitamos que se verifica que

$$\sigma^\rho = \sigma^\rho f : S \to \mathcal{O}^\rho$$

es una submersión cuya imagen $im\,(\sigma^\rho)$ es una $\widetilde{p}$-variedad. Teniendo en cuenta la definición de ρ_f, se concluye que la imagen $im\left(\sigma^{\rho+1}\right) \subset \mathcal{O}^{\rho+1}$ de $\sigma^{\rho+1} = \sigma^{\rho+1} f : S \to \mathcal{O}^{\rho+1}$ es también $\widetilde{p}$-variedad, y podemos suponer por tanto que existen

- Variedades $\widetilde{S}$ y $\widehat{S}$, (de dimensiones $\widetilde{p}$ y $\widehat{p}$ respectivamente)
- Un difeomorfismo $\phi : \widetilde{S} \times \widehat{S} \to S$
- Una parametrización $\widetilde{\sigma}^{\rho+1} : \widetilde{S} \to \mathcal{O}^{\rho+1}$, de la $\widetilde{p}$-variedad $im\left(\sigma^{\rho+1}\right)$ de manera que para todo $(\widetilde{s}, \widehat{s}) \in \widetilde{S} \times \widehat{S}$ se tenga

$$\sigma^{\rho+1} \circ \phi \left((\widetilde{s}, \widehat{s})\right) = \widetilde{\sigma}^{\rho+1} (\widetilde{s}) \tag{51}$$

Sustituyendo ahora f por $f \circ \phi$, podemos suponer sin pérdida de generalidad que $\phi = id$, y $S = \widetilde{S} \times \widehat{S}$ por tanto

$$\sigma^{\rho+1} (\widetilde{s}, \widehat{s}) = \widetilde{\sigma}^{\rho+1} (\widetilde{s})$$

en particular la función $\sigma^\rho =\downarrow \sigma^{\rho+1}$, no depende de $\widehat{s}$, pues $\widetilde{\sigma}^\rho =\downarrow \widetilde{\sigma}^{\rho+1} : \widetilde{S} \to \mathcal{O}^{\rho+1}$ verifica

$$\sigma^\rho_{(\widetilde{s},\widehat{s})} f = \widetilde{\sigma}^\rho (\widetilde{s}) \tag{52}$$

Sin pérdida de generalidad, tambien podemos suponer a $\widetilde{\sigma}^\rho$ inyectiva. Sea $\Sigma = im\,(\sigma^\rho) = im\,(\widetilde{\sigma}^\rho)$, considérese la variedad

$$G.\Sigma = \{A.\sigma : A \in G,\ \sigma \in \Sigma\} \approx G/G_q \times \Sigma$$

Definimos sobre $G.\Sigma$ la distribución $\Pi : G.\Sigma \to \mathcal{G}^1_p\,(G.\Sigma)$ (que es una sección del fibrado Grassmaniano $\downarrow \mathcal{G}^1_p\,(G.\Sigma) \to G.\Sigma$): mediante la siguiente construcción:

Fijado $s = (\widetilde{s}, \widehat{s}) \in S$, tomamos $u \in \mathcal{O}^q\,(f, s)$ referencia de Frenet auxiliar y definimos

$$\Pi\,(A.\widetilde{\sigma}^\rho\,(\widetilde{s})) = g^1_{(\widetilde{s},\widehat{s})} \left(g^\rho \left(\left(Au^{-1}\right).f\right)\right) \tag{53}$$

Nota 37 *La definición de* Π *no depende del* $\widehat{s}$ *que acompaña al* $\widetilde{s}$*, ya que por (52), es posible garantizar a priori que* $\sigma^{\rho+1}_{(\widetilde{s},\widehat{s}_1)} f = \sigma^{\rho+1}_{(\widetilde{s},\widehat{s}_2)} f$ *aunque sea* $\widehat{s}_1 \neq \widehat{s}_2$*, y por tanto se tiene* $g^\rho_{(\widehat{s},\widehat{s}_1)} \left(\left(Au_1^{-1}\right).f\right) = g^\rho_{(\widehat{s},\widehat{s}_2)} \left(\left(Au_2^{-1}\right).f\right)$*, para* $u_i \in \mathcal{O}^q\,(f, (\widetilde{s}, \widehat{s}_i))$ *.*

El argumento de $1a$ en 4.1, prueba que la aplicación $g^{\rho}\left(\left(Au^{-1}\right).f\right)$ definida en S tiene su imagen en $G.\Sigma$ por tanto $g^{\rho}\left(\left(Au^{-1}\right).f\right) : S \to (G.\Sigma)$. Salvada ya la posible inconsistencia sugerida en la Nota anterior, los argumentos de los asertos $1b$ y $1c$ en 4.1 permiten comprobar de forma inmediata la consistencia de la nueva definición (53) de Π. El mismo argumento del aserto 2 permite probar que la p-variedad $g^{\rho}f : S \to (G.\Sigma) \times \widehat{S}$ es una hoja de la distribución.

El grupo G actua sobre $G.\Sigma$ de forma la forma natural. El argumento del aserto 3 permite probar ahora que la distribución Π de (53) es invariante por la acción del grupo. Estamos en condiciones de probar el siguiente

Teorema 38 *Sean $f, \overline{f} : \widetilde{S} \times \widehat{S} \to E$ dos p-variedades admisibles con $\rho_f = \rho_{\overline{f}} = \rho$, y tales que:*

$$\sigma^{\rho+1} f = \sigma^{\rho+1}\overline{f} : \widetilde{S} \times \widehat{S} \to \mathcal{O}^{q+1}$$

Admitamos que $\sigma^{\rho+1} f = \sigma^{\rho+1}\overline{f} = \sigma^{\rho+1} : \widetilde{S} \times \widehat{S} \to \mathcal{O}^{q}$ con $\sigma^{\rho+1}(\widetilde{s}, \widehat{s}) = \widetilde{\sigma}^{\rho+1}(\widetilde{s})$ y que $\widetilde{\sigma}^{\rho+1} : \widetilde{S} \to \mathcal{O}^{\rho+1}$ es $\widetilde{p}$-variedad. Existe entonces $A \in G$, y $\phi : \widetilde{S} \times \widehat{S} \to \widetilde{S} \times \widehat{S}$ difeomorfismo con $\phi(\widetilde{s}, \widehat{s}) = (\widetilde{s}, \widehat{\phi}(\widetilde{s}, \widehat{s}))$ tal que $\overline{f} = \lambda_A \circ (f \circ \phi)$

Demostración. La distribución $\Pi_f = \Pi$ construida en (53) para f coincide con la correspondiente $\Pi_{\overline{f}}$ para $\overline{f}$, ya que fijado $s \in S$, $u \in G_q(f, s)$, y $\overline{u} \in G_q(\overline{f}, s)$, usando el mismo argumento de la afirmación 4 queda

$$g_s^1\left(g^{\rho}\left(\left(Au^{-1}\right).f\right)\right) = g_s^1\left(g^{\rho}\left(\left(A\overline{u}^{-1}\right).\overline{f}\right)\right)$$

y se concluye $\Pi_f = \Pi_{\overline{f}}$ .En consecuencia $g^{\rho}\overline{f}$, $g^{\rho}f : S \to G.\Sigma$ son hojas de la misma distribución $\Pi_f = \Pi_{\overline{f}} = \Pi$. Fijado un $s_0 = (\widetilde{s}_0, \widehat{s}_0) \in S$, tomemos $A \in G$, tal que $A.g^{\rho}_{s_0} f = g^{\rho}_{s_0}\overline{f}$ (concretamente $A = \overline{u}u^{-1}$, con $u \in G_q(f, s_0)$, y $\overline{u} \in G_q(\overline{f}, s_0)$), así como la distribución Π es invariante por traslaciones a la izquierda, también $A.g^{\rho}f : S \to (G.\Sigma)$ es una hoja por el punto $A.g^{\rho}_{s_0} f = g^{\rho}_{s_0}\overline{f}$. Esto significa por la unicidad, que existe un difeomorfismo (en torno a s_0) $\phi : S \to S$ ..tal que

$$A.g^{\rho}_{\phi(s)} f = A.g^{\rho}_{\phi(s)} f = g^{\rho}_{s}\overline{f} \text{ para todo } s \in S \tag{54}$$

pero entonces

$$\widetilde{\sigma}^{\rho}(\widetilde{s}) = \sigma^{\rho}_{\widetilde{s}}\overline{f} = \sigma^{\rho}_{\widetilde{\phi(s)}} f = \widetilde{\sigma}^{\rho}(\widetilde{\phi(s)})$$

y teniendo en cuenta que $\widetilde{\sigma}^{\rho} : \widetilde{S} \to \mathcal{O}^{\rho}$ es una $\widetilde{p}$-variedad (inyectiva) se concluye para todo $s \in S$

$$\widetilde{\phi(s)} = \widetilde{s}$$

y por tanto $\widetilde{\phi} = id$. Como la igualdad (54) se mantiene para f y $\overline{f}$ se concluye la demostración. ■

Hemos demostrado por tanto el siguiente:

Teorema 39 (Fundamental) *Sean $f, \overline{f} : S \to E$ dos p-variedades admisibles, con $\rho_f = \rho_{\overline{f}} = \rho$. Supongamos que tienen los mismos invariantes hasta el orden $\rho + 1$. Es decir*

$$\sigma^{\rho+1} f = \sigma^{\rho+1}\overline{f} : S \to \mathcal{O}^{\rho+1}$$

Entonces existe $A \in G$, con $\lambda_A.(f : S) = \left(\overline{f} : S\right)$.

4.3. Teoremas de homogeneidad

Se ha fijado un espacio homogeneo $(E,\, G,\, \lambda)$, un sistema referencial $\mathcal{O}^{q+1}$. Sea M una subconjunto de E. Se denota por

$$G^M = \{A \in G : A.M \subset M\}$$

al grupo de las transformaciones de G que dejan invariante M.

Nota 40 *Sea M una p-variedad de E*

1. *Si M es cerrada, entonces necesariamente G^M es cerrado, y por tanto subgrupo de Lie de G.*

2. *Si $M = (f : S)$, entonces $A \in G^M$, si y solo si existe $\phi : S \to S$ difeomorfismo con $\lambda_A \circ f = f \circ \phi$*

4.3.1. Subvariedades homogeneas

Sea M subvariedad de E, y. Se dice que M es *homogenea* si existe $\widehat{G}$ subgrupo de Lie de G contenido en G^M de forma que la acción inducida $\widehat{G} \times M \to M$ es transitiva. Se dice que M es *fibrada-homogenea* si G^M es subgrupo de Lie de G, y la acción inducida $G^M \times M \to M$ da a M estructura de fibrado homogeneo.

Proposición 41 *Sea $M = (f : S)$ p-variedad homogenea de E que es $\mathcal{O}^{q+1}$-admisible. Entonces la aplicación $\sigma^{q+1} f : S \to \mathcal{O}^{q+1}$ es constante.*

Demostración. Fijados $s_0, s_1 \in S$, sea $A \in G^M$, tal que $\lambda_A \circ f\,(s_0) = f\,(s_1)$, y sea $\phi : S \to S$ difeomorfismo tal que $\lambda_A \circ f = f \circ \phi$, en particular $\phi\,(s_0) = s_1$, y por la proposición 6.2.2 (pág 76) se tiene

$$g_{s_1}^{q+1} f = g_{\phi(s_0)}^{q+1}\,(f) = g_{s_o}^{q+1}\,(f \circ \phi) = g_{s_o}^{q+1}\,(\lambda_A \circ f) = A.g_{s_o}^{q+1}\,(f)$$

como $\sigma^{q+1}\,(\gamma) = \sigma^{q+1}\,(A.\gamma)$ para todo $A \in G$, se concluye la demostración. ■

4.3.2. Teorema fundamental de homogeneidad

El resultado relevante de esta sección muestra como una p-variedad M ($\mathcal{O}^{q+1}$-admisible) que proyecta en una $\widetilde{p}$ variedad sobre $\mathcal{O}^{\rho_M}$ puede obtenerse como un abierto de una p-variedad fibrada-homogenea $\overline{M}$ unívocamente determinada por M con dimensión de la fibra igual a $\widehat{p} = p - \widetilde{p}$.

Teorema 42 *Sea M una p-variedad conexa $\mathcal{O}^{q+1}$-admisible sumergida en un espacio de Klein $(E,\, G,\, \lambda)$. Sea $\rho = \rho_M$, y $\widetilde{p}$ la dimensión de la variedad $\sigma_M^{\rho}\,(i_M) \subset \mathcal{O}^{\rho}$, de valores de los invariantes de orden ρ de M.*
Existe entonces una única p- variedad fibrado-homogenea conexa $\overline{M}$ que contiene a M como abierto, y tiene a $\widehat{p} = p - \widetilde{p}$ como dimensión de la fibra.

Corolario 43 *En particular si $M = (f : S)$ es p-variedad $\mathcal{O}^{q+1}$-admisible, y $\sigma^{\rho} f : S \to \mathcal{O}^{\rho}$ es constante entonces M es un abierto de una p-variedad homogenea.*

Para probar el teorema, es suficiente demostrar una versión mas local, dada en la siguiente proposición

Proposición 44 *Con las hipótesis del teorema 42, y fijado $\widehat{o} \in M$, existe entonces un $\widehat{G}$ subgrupo de lie conexo de G, y una $\widetilde{p}$ variedad conexa $\widetilde{M}$ contenida en M con $\widehat{o} \in \widetilde{M}$, de forma que:*

1. *$\widehat{M} = \widehat{G}.\widehat{o}$ es una $\widehat{p}$-variedad (homogenea) de E contenida en M.*
2. *El conjunto*

$$\overline{M} = \widehat{G}.\widetilde{M} = \left\{ \widehat{A}.\widetilde{x} : \widehat{A} \in \widehat{G},\ \widetilde{x} \in \widetilde{M} \right\} = \cup_{\widehat{A} \in \widehat{G}} \widehat{A}.\widetilde{M}$$

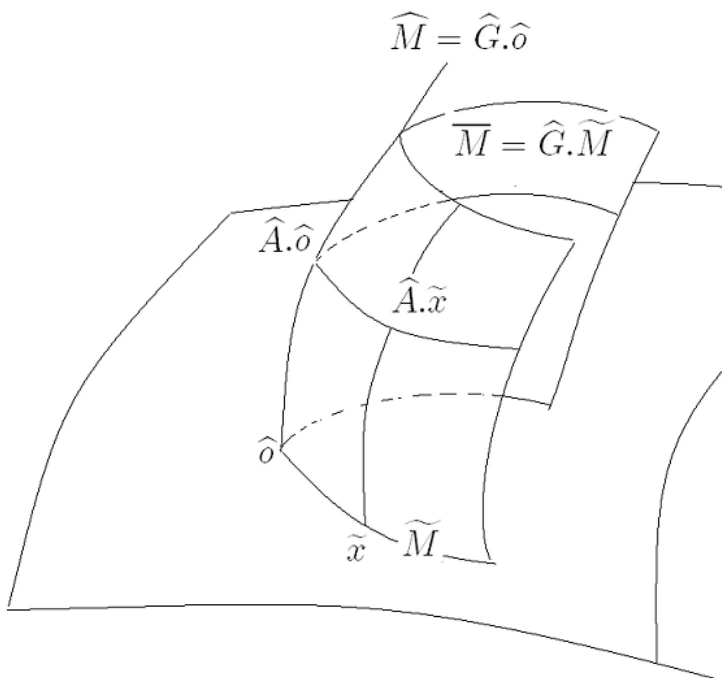
.es una p-variedad conexa de E, y $\overline{M} \cap M$ es un abierto de M y de $\overline{M}$

3. *La aplicación $\widetilde{\pi} : \overline{M} \to \widetilde{M}$ definida por*

$$\widetilde{\pi}\left(\widehat{A}.\widetilde{x}\right) = \widetilde{x}$$

está bien definida e induce en $\overline{M}$ una fibración de fibra tipo $\widehat{M}$.

4. *El algebra de Lie del grupo $\widehat{G}$, es exactamente la del grupo de las transformaciones de G que dejan invariante $\overline{M}$*



Para la demostración del teorema 42 comenzamos con un Lema técnico.

Lema 45 *Sean $F_i : S = \widetilde{S} \times \widehat{S}_i \to \mathcal{E}$ p-variedades, $i = 1, 2$. Entonces fijado $\widehat{s}_i \in \widehat{S}_i$, la aplicación $F_i(., \widehat{s}_i) : \widetilde{S}_i \to \mathcal{E}$ define una $\widetilde{p}$-variedad, y*

$$g^k_{(\widetilde{s}, \widehat{s}_1)} F_1 = g^k_{(\widetilde{s}, \widehat{s}_2)} F_2 \Rightarrow g^k_{\widetilde{s}} \left(F_1(., \widehat{s}_1)\right) = g^k_{\widetilde{s}} \left(F_2(., \widehat{s}_2)\right)$$

Hipótesis de partida. Vamos a trabajar en un entorno abierto en M (convenientemente pequeño, y denotado también por M) en torno a nuestro punto inicial de referencia $\widehat{o} \in M$. Podemos suponer sin pérdida de generalidad, que $\widehat{o}$ coincide con el origen $o \in E$, sobre el que está *montado* el referencial $\mathcal{O}^{q+1}$.

Pongamos $M = (f : S)$. Como $\sigma^\rho = \sigma^\rho f : S \to \mathcal{O}^\rho$ es una submersión cuya imagen es una $\widetilde{p}$-variedad. Entonces por la definición de $\rho = \rho_f$ la imagen de $\sigma^{\rho+1} = \sigma^{\rho+1} f$ es también $\widetilde{p}$-variedad, y podemos suponer (tras quizás un cambio de coordenadas, y una reducción del entorno) que $S = \widetilde{S} \times \widehat{S}$, donde $\widetilde{S}$ y $\widehat{S}$ son variedades (de dimensiones $\widetilde{p}$ y $\widehat{p}$ respectivamente) de forma que $\sigma^{\rho+1}$ no depende de $\widehat{S}$ es decir, $\sigma^{\rho+1}(\widetilde{s}, \widehat{s}) = \widetilde{\sigma}^{\rho+1}(\widetilde{s})$ para cierta $\widetilde{\sigma}^{\rho+1} : \widetilde{S} \to \mathcal{O}^{\rho+1}$ que es una parametrización de que supondremos inyectiva. Además si $\widetilde{\sigma}^\rho =\downarrow \widetilde{\sigma}^{\rho+1}$ es $\sigma^\rho(\widetilde{s}, \widehat{s}) = \widetilde{\sigma}^\rho(\widetilde{s})$

Sin pérdida de generalidad, podemos suponer a $\widetilde{\sigma}^\rho$ inyectiva. Sea $\Sigma = im(\sigma^\rho) = im(\widetilde{\sigma}^\rho)$, considérese la variedad

$$G.\Sigma = \{A.\sigma : A \in G, \, \sigma \in \Sigma\} \approx G/G_q \times \Sigma$$

Distribución $\widetilde{\Pi}$. Definimos sobre $G.\Sigma$ la distribución $\widetilde{\Pi} : G.\Sigma \to \mathcal{G}^1_p(G.\Sigma)$ (que es una sección del fibrado Grassmaniano $\downarrow G^1_{\widetilde{p}}(G.\Sigma) \to G.\Sigma$), mediante la siguiente construcción:

Fijado $s = (\widetilde{s}, \widehat{s}) \in S$, tomamos $u \in \mathcal{O}^q(f, s)$ referencia de Frenet auxiliar y definimos

$$\widetilde{\Pi}\left(A.\widetilde{\sigma}^\rho(\widetilde{s})\right) = g^1_{\widetilde{s}}\left(g^\rho_{(.,\widehat{s})}\left(\left(Au^{-1}\right).f\right)\right) \tag{55}$$

1. Veamos que la definición (55) es consistente.

   - *La aplicación* $g^\rho_{(.,\widehat{s})}\left(\left(Au^{-1}\right).f\right) : \widetilde{s} \to g^\rho_{(\widetilde{s},\widehat{s})}\left(\left(Au^{-1}\right).f\right)$ *definida en* $\widetilde{S}$ *tiene su imagen en* $G.\Sigma$. En efecto, pues como $\left(Au^{-1}\right).f$ y f son congruentes , es $\sigma^\rho\left(\left(Au^{-1}\right).f\right) = \sigma^\rho f$, si $\mathbf{v}$ es referencia de frenet en torno a $(\widetilde{s}, \widehat{s})$ para $\left(Au^{-1}\right).f$ se tiene

     $$g^\rho_{(.,\widehat{s})}\left(\left(Au^{-1}\right).f\right) = \mathbf{v}(., \widehat{s}).\sigma^\rho_{(.,\widehat{s})} f : \widetilde{S} \to G.\Sigma$$

   - La definición de $\widetilde{\Pi}(\gamma)$ para $\gamma = A.\widetilde{\sigma}^\rho(\widetilde{s})$ no depende del $A \in G$ utilizado.
     En efecto, si $\gamma = A.\widetilde{\sigma}^\rho(\widetilde{s}) = B.\widetilde{\sigma}^\rho(\widetilde{s}) \in G.\Sigma$, entonces por (51) tenemos que $\left(B^{-1}A\right).\sigma^\rho(\widetilde{s}, \widehat{s}) = \sigma^\rho(\widetilde{s}, \widehat{s})$ y por tanto $B^{-1}A \in G_\rho = G_{\rho+1}$, que es grupo de isotropía de $\mathcal{O}^{\rho+1}$, a donde pertenece justamente $\sigma^{\rho+1}_{(\widetilde{s},\widehat{s})} f$ que coincide con $g^{\rho+1}_{(\widetilde{s},\widehat{s})}\left(u^{-1}.f\right)$, ya que u es también referencia $(\rho+1)$-adaptada. En consecuencia $\left(B^{-1}A\right).g^{\rho+1}_{(\widetilde{s},\widehat{s})}\left(u^{-1}.f\right) = g^{\rho+1}_{(\widetilde{s},\widehat{s})}\left(u^{-1}.f\right)$ y por tanto

     $$\left(B^{-1}A\right).g^1_{(\widetilde{s},\widehat{s})}\left(g^\rho\left(u^{-1}.f\right)\right) = g^1_{(\widetilde{s},\widehat{s})}\left(g^\rho\left(u^{-1}.f\right)\right)$$

     y así:

     $$g^1_{(\widetilde{s},\widehat{s})}\left(A.g^\rho\left(u^{-1}.f\right)\right) = g^1_{(\widetilde{s},\widehat{s})}\left(B.g^\rho\left(u^{-1}.f\right)\right)$$

     En particular por el lema (para $k = 1$)

     $$g^1_{\widetilde{s}}\left(A.g^\rho_{(.,\widehat{s})}\left(u^{-1}.f\right)\right) = g^1_{\widetilde{s}}\left(B.g^\rho_{(.,\widehat{s})}\left(u^{-1}.f\right)\right)$$

     de donde se concluye el resultado.

- Si $u, v \in \mathcal{O}^q(f, s)$, entonces
$$g^1_{\widetilde{s}}\left(g^\rho_{(.,\widehat{s})}\left(\left(Au^{-1}\right).f\right)\right) = g^1_{\widetilde{s}}\left(g^\rho_{(.,\widehat{s})}\left(\left(Av^{-1}\right).f\right)\right)$$
pues u v son referencias $(\rho+1)$-adaptadas, y por el argumento anterior
$$g^{\rho+1}_{(\widetilde{s},\widehat{s})}\left(u^{-1}.f\right) = \sigma^{\rho+1}_{(\widetilde{s},\widehat{s})} f = g^{\rho+1}_{(\widetilde{s},\widehat{s})}\left(v^{-1}.f\right)$$
así:
$$\begin{aligned} g^1_{(\widetilde{s},\widehat{s})}\left(g^\rho\left(\left(Au^{-1}\right).f\right)\right) &= g^{\rho+1}_{(\widetilde{s},\widehat{s})}\left(\left(Au^{-1}\right).f\right) \\ &= A.g^{\rho+1}_{(\widetilde{s},\widehat{s})}\left(u^{-1}.f\right) \\ &= A.g^{\rho+1}_{(\widetilde{s},\widehat{s})}\left(v^{-1}.f\right) = \\ &= \ldots = g^1_{(\widetilde{s},\widehat{s})}\left(g^\rho\left(\left(Av^{-1}\right).f\right)\right) \end{aligned}$$
aplicando el lema 45 (pág 48) para
$$k = 1, F_1 = g^\rho\left(\left(Au^{-1}\right).f\right), \text{ y } F_2 = g^1_{(\widetilde{s},\widehat{s})}\left(g^\rho\left(\left(Av^{-1}\right).f\right)\right)$$
se concluye el resultado.
- La definición (55) $\widetilde{\Pi}(\gamma)$ para $\gamma = A.\widetilde{\sigma}^\rho(\widetilde{s})$ no depende de $\widehat{s}$. En efecto, sea $s_i = (\widetilde{s}, \widehat{s}_i)$, $i = 1, 2$, y $u_i \in \mathcal{O}^\rho(f, s_i)$ se tiene entonces $u_i^{-1}.g^{\rho+1}_{s_i} f = \sigma^\rho(\widetilde{s}, \widehat{s}_i) = \widetilde{\sigma}^\rho(\widetilde{s})$, y así
$$g^{\rho+1}_{s_1}\left(\left(Au_1^{-1}\right).f\right) = g^{\rho+1}_{s_1}\left(\left(Au_1^{-1}\right).f\right)$$
por tanto
$$g^1_{s_1}\left(g^\rho\left(\left(Au_1^{-1}\right).f\right)\right) = g^1_{s_2}\left(g^\rho\left(\left(Au_2^{-1}\right).f\right)\right) g^{\rho+1}_{s_2}$$
nuevamente aplicando el lema queda
$$g^1_{\widetilde{s}}\left(g^\rho_{(.,\widehat{s})}\left(\left(Au_1^{-1}\right).f\right)\right) = g^1_{\widetilde{s}}\left(g^\rho_{(.,\widehat{s})}\left(\left(Au_2^{-1}\right).f\right)\right)$$
- La distribución definida por (55) es diferenciable y la $\widetilde{p}$-variedad $g^\rho f_{(.,\widehat{s})} : \widetilde{S} \to G.\Sigma$ es una hoja para todo $\widehat{s} \in \widehat{S}$.
En efecto, si $\mathbf{u} : S \to G$ es una referencia móvil de Frenet, y $A \in G$, se tiene la identidad:
$$\widetilde{\Pi}\left(A.\widetilde{\sigma}^\rho(\widetilde{s})\right) = A\mathbf{u}(s)^{-1}.g^1_{\widetilde{s}}\left(g^\rho_{(.,\widehat{s})} f\right)$$
que depende diferenciablemente de A y $\widetilde{s}$. Por otro lado, fijando $s \in S$, y tomando en la fórmula (55) $A = u \in \mathcal{O}^\rho(f, s)$ como $g^\rho_s f = u.\widetilde{\sigma}^\rho(\widetilde{s})$ queda:
$$\widetilde{\Pi}\left(g^\rho_s f\right) = \widetilde{\Pi}\left(u.\widetilde{\sigma}^\rho(\widetilde{s})\right) = g^1_{\widetilde{s}}\left(g^\rho_{(.,\widehat{s})}\left(\left(uu^{-1}\right).f\right)\right) = g^1_{\widetilde{s}}\left(g^\rho_{(.,\widehat{s})} f\right)$$

2. La distribución definida por (55) es invariante por la acción del grupo. En efecto, si $\gamma = A.\widetilde{\sigma}^\rho(\widetilde{s})$, y $B \in G$, entonces
$$\begin{aligned} \widetilde{\Pi}(B.\gamma) &= \widetilde{\Pi}\left((BA).\widetilde{\sigma}^\rho(\widetilde{s})\right) \\ &= g^1_{\widetilde{s}}\left(g^\rho_{(.,\widehat{s})}\left(\left(BAu^{-1}\right).f\right)\right) \\ &= B.g^1_{\widetilde{s}}\left(g^\rho_{(.,\widehat{s})}\left(\left(Au^{-1}\right).f\right)\right) \\ &= B.\widetilde{\Pi}(\gamma) \end{aligned}$$

Hemos probado por tanto el siguiente resultado bajo las **Hipótesis de partida** (pág 49):

Lema 46 *Existe sobre $G.\Sigma$ una $\widetilde{p}$-distribución $\widetilde{\Pi}: G.\Sigma \to \mathcal{G}^1_{\widetilde{p}}(G.\Sigma)$ que verifica*

a) Es invariante por la acción del grupo G

b) Para cada $\widehat{s} \in \widehat{S}$, es $g^\rho_{(.,\widehat{s})} f : \widetilde{S} \to G.\Sigma$ una hoja de la distribución $\widetilde{\Pi}$

c) Si $f' : \widetilde{S} \times \widehat{S}' \to E$ es otra p-variedad con $\sigma^{\rho+1}_{(\widetilde{s},\widehat{s}')} f' = \widetilde{\sigma}^{\rho+1}(\widetilde{s})\ \forall (\widetilde{s},\widehat{s}') \in \widetilde{S} \times \widehat{S}'$, entonces $g^\rho_{(.,\widehat{s}')} f' : \widetilde{S} \to G.\Sigma$ es también una hoja una hoja de la distribución $\widetilde{\Pi}$

Demostración. Solo queda por demostrar **c)**:

La distribución $\widetilde{\Pi}_f = \widetilde{\Pi}$ construida en (55) para f coincide con la correspondiente $\widetilde{\Pi}_{f'}$ para f', ya que fijados $s = (\widetilde{s},\widehat{s}) \in \widetilde{S} \times \widehat{S}$, y $s' = (\widetilde{s},\widehat{s}') \in \widetilde{S} \times \widehat{S}'$, sean $u \in \mathcal{O}^q(f,s)$, y $u' \in \mathcal{O}^q(f',s)$, como $\sigma^{\rho+1}_s f = \sigma^{\rho+1}_{s'} f' = \widetilde{\sigma}^{\rho+1}(\widetilde{s})$ queda

$$g^1_s\left(g^\rho\left(u^{-1}f\right)\right) = g^{\rho+1}_s\left(u^{-1}f\right) = \widetilde{\sigma}^{\rho+1}(\widetilde{s}) = g^{\rho+1}_{s'}\left(u'^{-1}f'\right) = g^1_{s'}\left(g^\rho\left(u'^{-1}f'\right)\right)$$

y usando además, por el lema 45 (en pág 48, para $k=1$, $F_1 = g^\rho\left(u^{-1}f\right)$, $F_2 = g^\rho\left(u'^{-1}f'\right)$)

$$g^1_{\widetilde{s}}\left(g^\rho_{(.,\widehat{s})}\left(u^{-1}.f\right)\right) = g^1_{\widetilde{s}}\left(g^\rho_{(.,\widehat{s}')}\left(u'^{-1}.f'\right)\right)$$

por tanto

$$\begin{aligned}\widetilde{\Pi}_f\left(A.\widetilde{\sigma}^\rho(\widetilde{s})\right) &= A.g^1_{\widetilde{s}}\left(g^\rho_{(.,\widehat{s})}\left(u^{-1}.f\right)\right)\\ &= A.g^1_{\widetilde{s}}\left(g^\rho_{(.,\widehat{s})}\left(u'^{-1}.f'\right)\right)\\ &= \widetilde{\Pi}_{f'}\left(A.\widetilde{\sigma}^\rho(\widetilde{s})\right)\end{aligned}$$

■

Corolario 47 *Sea $A \in G$, con $\left(\lambda_A \circ f : \widetilde{S} \times \widehat{S}\right) = \left(f' : \widetilde{S} \times \widehat{S}'\right)$, entonces*

1. *Fijado $\widetilde{s}_0 \in \widetilde{S}$, entonces $\left(f(\widetilde{s}_0,.) : \widehat{S}\right)$ es una $\widehat{p}$-variedad de E que es enviada por λ_A, a $\left(f'(\widetilde{s}_0,.) : \widehat{S}'\right)$*

2. *Hay un difeomorfismo $\psi : \widehat{S} \to \widehat{S}'$ de forma que*

$$\lambda_A \circ f(\widetilde{s},\widehat{s}) = f'(\widetilde{s},\psi(\widehat{s}))$$

Demostración. Probemos el Corolario:

1. Por hipótesis, existe $\varphi : \widetilde{S} \times \widehat{S} \to \widetilde{S} \times \widehat{S}'$ difeomorfismo tal que $\lambda_A \circ f(s) = f'(\varphi(s))$. Si $\lambda_A\ f(\widetilde{s}_0,\widehat{s}) = f(\widetilde{s}_1,\widehat{s}')$, es $\varphi(\widetilde{s}_0,\widehat{s}) = (\widetilde{s}_1,\widehat{s}')$ y por la proposición 6.2.2 (pág 76) se tiene $g^\rho_s(f\circ\varphi) = g^\rho_{\varphi(s)}(f')$, se tiene en particular $A.g^\rho_{(\widetilde{s}_0,\widehat{s})} f = g^\rho_{(\widetilde{s}_1,\widehat{s}')} f'$, y así

$$\widetilde{\sigma}^\rho(\widetilde{s}_0) = \sigma^\rho_{(\widetilde{s}_0,\widehat{s})} f = \sigma^\rho_{(\widetilde{s}_1,\widehat{s}')} f' = \widetilde{\sigma}^\rho(\widetilde{s}_1)$$

por la inyectividad de $\widetilde{\sigma}^\rho$ se concluye que $\widetilde{s}_0 = \widetilde{s}_1$.

2. Por tanto, existe $\psi : \widehat{S} \to \widehat{S}'$ difeomorfismo tal que

$$\lambda_A \circ f(\widetilde{s}_0, \widehat{s}) = f'(\widetilde{s}_0, \psi(\widehat{s}))$$

Observese ahora que por el **c)** del Lema, fijado $\widehat{s} \in \widehat{S}$, resulta que $A.g^{\rho}_{(.,\widehat{s})}f$ y $g^{\rho}_{(.,\psi(\widehat{s}))}f'$ son dos hojas de la misma distribución $\widetilde{\Pi}$ que pasan por el mismo punto $A.g^{\rho}_{(\widetilde{s}_0,\widehat{s})}f = g^{\rho}_{(\widetilde{s}_0,\psi(\widehat{s}))}f'$. Esto significa por la unicidad, que existe un difeomorfismo (en torno a $\widetilde{s}$) $\phi : \widetilde{S} \to \widetilde{S}$ tal que

$$A.g^{\rho}_{(\widetilde{s},\widehat{s})}f = g^{\rho}_{(\phi(\widetilde{s}),\psi(\widehat{s}))}f \text{ para todo } \widetilde{s} \in \widetilde{S} \tag{56}$$

y teniendo en cuenta que $\widetilde{\sigma}^{\rho} : \widetilde{S} \to \mathcal{O}^{\rho}$ es una $\widetilde{p}$-variedad se concluye para todo $\widetilde{s} \in \widetilde{S}$

$$\widetilde{\sigma}^{\rho}(\widetilde{s}) = \widetilde{\sigma}^{\rho}(\phi(\widetilde{s})) \Rightarrow \widetilde{s} = \phi(\widetilde{s})$$

y por tanto $\phi = id$. De la relación (56) se concluye ahora que $A.g^{\rho}_{(\widetilde{s},\psi(\widehat{s}))}f = g^{\rho}_{(\widetilde{s},\widehat{s})}f$, y en particular esta relación se mantiene para los puntos de apoyo, es decir $\lambda_A \circ f(\widetilde{s},\widehat{s}) = \overline{f}(\widetilde{s},\psi(\widehat{s}))$ para todo $(\widetilde{s},\widehat{s}) \in \widetilde{S} \times \widehat{S}$.

■

Distribución $\widehat{\Pi}$. Mantenemos las **Hipótesis de partida** de la página 49**.**

Sea $\widetilde{s}_0 \in \widetilde{S}$, entonces $\sigma^{\rho+1}(\widetilde{s}_0,\widehat{s}) = \widetilde{\sigma}^{\rho+1}(\widetilde{s}_0) = \sigma_0 \in \mathcal{O}^{\rho+1}$ para todo $\widehat{s} \in \widehat{S}$. Sea

$$\widehat{\mathcal{O}}_{\widetilde{s}_0}(f,\widehat{s}) = \mathcal{O}^{\rho+1}(f,(\widetilde{s}_0,\widehat{s})) = \mathcal{O}^{\rho+1}(f,(\widetilde{s}_0,\widehat{s})) = \left\{u \in G : u.\sigma_0 = g^{\rho+1}_{(\widetilde{s}_0,\widehat{s})}f\right\}$$

claramente,

$$\cup_{\widehat{s}\in\widehat{S}}\widehat{\mathcal{O}}_{\widetilde{s}_0}(f,\widehat{s}) = \widehat{\mathcal{O}}_{\widetilde{s}_0}(f) \to \widehat{S}$$

es un fibrado principal de grupo G_q. En estas condiciones se tiene

Lema 48 *La variedad $\widehat{\mathcal{O}}_{\widetilde{s}_0}(f) \subset G$, es hoja de una distribución $\widehat{\Pi} : G \to \mathcal{G}^1_{\widehat{p}+r-m_q}(G)$, en G que es invariante por traslaciones a la izquierda, y viene determinada por cierta subálgebra de Lie $\widehat{\mathfrak{g}}$ de $\mathfrak{g}$ que contiene a $\mathfrak{g}_q$, mediante*

$$\widehat{\Pi}(A) = (L_A)_*\widehat{\mathfrak{g}}$$

Demostración. Como $\sigma^{\rho+1}f$, depende solo de $\widetilde{s}$, se concluye que las curvaturas $\kappa^{\nu}_{(\widetilde{s},\widehat{s})}f = \kappa^{\nu}(\widetilde{s})$ $1 \leq \nu \leq \mu_{\rho+1}$ también dependen solo de $\widetilde{s}$. En particular si $\sigma^{\nu_\rho} = d(\kappa^{\nu_\rho})$ y (ϕ^{α}) es la cobase adaptada es

$$d(\sigma^{\rho}f) = \sigma^{\nu_\rho}(\partial/\partial k^{\nu_\rho}) \text{ con } \sigma^{\nu_\rho} = \sigma^{\nu_\rho}_{\alpha}\phi^{\alpha} \in \Omega^1(S)$$

y las $\sigma^{\nu_\rho}_{\alpha}$ que se escriben (ver ecuaciones (18)):

$$\sigma^{\nu_\rho}_{\alpha} = N^{\nu_\rho}_{\alpha}\left(\kappa^1(\widetilde{s}),\ldots,\kappa^{\mu_{\rho+1}}(\widetilde{s})\right)$$

dependen solo de $\widetilde{s}$.

Análogamente $\Omega_{\mathbf{u}}(\mathrm{mod}\,\mathfrak{g}_q) = \Theta^q_{\mathbf{u}} = \phi^{\alpha}e_{\alpha} + \theta^{\widetilde{\alpha}_q}_{\alpha}\phi^{\alpha}e_{\widetilde{\alpha}_q}$ y por (18)

$$\theta^{\widetilde{\alpha}_q}_{\alpha} = F^{\widetilde{\alpha}_q}_{\alpha}\left(\kappa^1(\widetilde{s}),\ldots,\kappa^{\mu_{q+1}}(\widetilde{s})\right)$$

depende solo de $\widetilde{s}$. (ya que tanto si $\rho = q$, como si $\rho = q+1$ las $\left(\kappa^1, \ldots, \kappa^{\mu_{q+1}}\right)$ dependen solo de $\widetilde{s}$)

Escribamos $\Omega = \boldsymbol{\theta}^a e_a$ y $\theta^a = \mathbf{u}^* \boldsymbol{\theta}^a$ para $\mathbf{u} \in \Gamma \mathcal{O}^q(f)$. Sea $\widehat{\mathfrak{g}}$ el subespacio vectorial de $\mathfrak{g}$ definido por:

$$\widehat{\mathfrak{g}} = \left\{ X \in \mathfrak{g} \Big/ \begin{array}{l} \left(\boldsymbol{\theta}^{\widetilde{\alpha}_q} - \theta_\alpha^{\widetilde{\alpha}_q}(\widetilde{s}_0)\, \boldsymbol{\theta}^\alpha\right)(X) = 0 \\ \left(\sigma_\alpha^{\nu_\rho}(\widetilde{s}_0)\, \boldsymbol{\theta}^\alpha\right)(X) = 0 \end{array} \right\} \tag{57}$$

Veamos que $\widehat{\mathcal{O}}_{\widetilde{s}_0}(f) \subset G$ es una hoja de la distribución invariante por traslaciones a la izquierda, inducida por $\widehat{\mathfrak{g}}$ en G (esto probaría además que En efecto, es suficiente para esto demostrar:

a) *Para todo* $\widehat{u} \in \widehat{\mathcal{O}}_{\widetilde{s}_0}(f)$ *es* $T_{\widehat{u}}\left(\widehat{\mathcal{O}}_{\widetilde{s}_0}(f)\right) \subset (L_{\widehat{u}})_* \widehat{\mathfrak{g}}$.

Dem. Construimos $\widehat{\mathbf{u}} : \widehat{S} \to \widehat{\mathcal{O}}_{\widetilde{s}_0}(f)$, aplicación diferenciable con $\widehat{\mathbf{u}}(\widehat{s}) \in \widehat{\mathcal{O}}_{\widetilde{s}_0}(f, \widehat{s})\ \forall \widehat{s}$, y con valor inicial $\widehat{u} = \widehat{\mathbf{u}}(\widehat{s}_1)$Se construye entonces $\mathbf{u} \in \Gamma(\mathcal{O}^q(f))$ tal que $\mathbf{u}(\widetilde{s}_0, .) = \widehat{\mathbf{u}}$. Debemos entonces demostrar que

$$\left\{ \begin{array}{l} \widehat{\mathbf{u}}^* \left(\boldsymbol{\theta}^{\widetilde{\alpha}_q} - \theta_\alpha^{\widetilde{\alpha}_q}(\widetilde{s}_0)\, \boldsymbol{\theta}^\alpha\right) = 0 \\ \widehat{\mathbf{u}}^* \left(\sigma_\alpha^{\nu_\rho}(\widetilde{s}_0)\, \boldsymbol{\theta}^\alpha\right) = 0 \end{array} \right.$$

Nótese que para $\psi \in \Omega^1(G)$ se tiene

$$\left(\widehat{\mathbf{u}}^* \psi\right)\big|_{T_{(\widetilde{s}_0, \widehat{s})}\widehat{S}} = \left(\mathbf{u}^* \psi\right)\big|_{T_{(\widetilde{s}_0, \widehat{s})}\widehat{S}}$$

donde $T_{(\widetilde{s}_0, \widehat{s})}\widehat{S}$ es la imagen de $T_{\widehat{s}}\widehat{S}$ en $T_{(\widetilde{s}_0, \widehat{s})}S$ mediante la inclusión $i_* : T_{\widehat{s}}\widehat{S} \hookrightarrow T_{(\widetilde{s}_0, \widehat{s})}S$ siendo $i : \widehat{S} \to \{\widetilde{s}_0\} \times \widehat{S}$. En particular:

$$\begin{aligned} & \widehat{\mathbf{u}}^* \left(\boldsymbol{\theta}^{\widetilde{\alpha}_q} - \theta_\alpha^{\widetilde{\alpha}_q}(\widetilde{s}_0)\, \boldsymbol{\theta}^\alpha\right)\Big|_{\widetilde{s} = \widetilde{s}_0} \\ = \ & \mathbf{u}^* \left(\boldsymbol{\theta}^{\widetilde{\alpha}_q}\right)\Big|_{\widetilde{s} = \widetilde{s}_0} - \theta_\alpha^{\widetilde{\alpha}_q}(\widetilde{s}_0)\, \phi^\alpha \\ = \ & 0 \text{ (por (\textbf{??}) en pág \textbf{??})} \end{aligned}$$

Por otra parte, si $\xi \in T_{(\widetilde{s}_0, \widehat{s})}\widehat{S} \simeq T_{\widehat{s}}\widehat{S}$, entonces

$$\begin{aligned} \widehat{\mathbf{u}}^* \left(\sigma_\alpha^{\nu_\rho}(\widetilde{s}_0)\, \boldsymbol{\theta}^\alpha\right)\big|_\xi &= \mathbf{u}^* \left(\sigma_\alpha^{\nu_\rho}(\widetilde{s}_0)\, \boldsymbol{\theta}^\alpha\right)\big|_\xi \\ &= \sigma_\alpha^{\nu_\rho}((\widetilde{s}_0))\, \phi^\alpha(\xi) \end{aligned}$$

pero como $\sigma^\rho f$ no depende de $\widehat{s}$, se concluye que

$$0 = \left(d\left(\sigma^\rho f\right)\right)(\xi) = \sigma^{\nu_\rho}(\xi)\left(\partial / \partial k^{\nu_\rho}\right)$$

y por tanto $\sigma_\alpha^{\nu_\rho}((\widetilde{s}_0))\, \phi^\alpha(\xi) = 0$

b) $\dim \widehat{\mathcal{O}}_{\widetilde{s}_0}(f) = \dim \widehat{\mathfrak{g}}$

Dem. Como $\widehat{\mathcal{O}}_{\widetilde{s}_0}(f) \to \widehat{S}$ es un fibrado principal de grupo G_q se concluye que

$$\dim \widehat{\mathcal{O}}_{\widetilde{s}_0}(f) = \widehat{p} + \dim \mathfrak{g}_q = \widehat{p} + r - m_q$$

La dimensión de $\widehat{\mathfrak{g}}$ es igual a $r = \dim \mathfrak{g}$ menos el número de ecuaciones independientes que aparacen en la definición (57) de $\widehat{\mathfrak{g}}$, que coincide con $m_q - p + \widetilde{p}$ según el siguiente recuento:

- Las $m_q - p$ ecuaciones $\left(\boldsymbol{\theta}^{\widetilde{\alpha}_q} - \theta_{\alpha}^{\widetilde{\alpha}_q}(\widetilde{s}_0)\,\boldsymbol{\theta}^{\alpha}\right)(X) = 0$ son todas independientes, por ser las $\left(\boldsymbol{\theta}^{i_q}\right)$ independientes
- En las ecuaciones $\left(\sigma_{\alpha}^{\nu_\rho}(\widetilde{s}_0)\,\boldsymbol{\theta}^{\alpha}\right)(X)$ hay $\widetilde{p}$ independientes ya que

$$\widetilde{p} = \dim\left(\sigma_S^{\rho} f\right) = rg\left(d\sigma^{\rho} f\right) = rg\left(\sigma_{\alpha}^{\nu_\rho}(\widetilde{s}_0)\right)$$

■

Detalles finales. Podemos suponer sin pérdida de generalidad que para cierto $\widehat{s}_0 \in \widehat{S}$ es $\sigma_0 = g_{s_0}^{\rho} f$, siendo $s_0 = (\widetilde{s}_0, \widehat{s}_0)$, y que f es parametrización de M en torno al punto $o = \widehat{o} = f(s_0)$ prefijado en el enunciado

En particular podemos suponer por el Lema 48 que $\widehat{\mathcal{O}}_{\widetilde{s}_0}(f)$ es un abierto de cierto subgrupo de Lie $\widehat{G}$ con $G_q \subset \widehat{G} \subset G$, y $\widehat{N} = \left(f(\widetilde{s}_0, .) : \widehat{S}\right) = \widehat{\mathcal{O}}_{\widetilde{s}_0}(f).o$ es un abierto de $\widehat{M} = \widehat{G}.o$, que es un espacio de Klein de grupo $\widehat{G}$, y por tanto $\widehat{p}$-variedad homogenea de E.

Sea $\widetilde{M} = \left(f(., \widehat{s}_0) : \widetilde{S}\right)$. Entonces:

- *Podemos admitir que la variedad $M = (f : S)$ es un abierto de la variedad conexa*
$$\overline{M} = \widehat{G}.\widetilde{M} = \left\{\widehat{A}.\widetilde{x} : \widehat{A} \in \widehat{G},\, \widetilde{x} \in \widetilde{M}\right\}$$

Demostración. Como $\widehat{\mathcal{O}}_{\widetilde{s}_0}(f)$ es abierto de $\widehat{G}$, claramente $\widehat{\mathcal{O}}_{\widetilde{s}_0}(f).\widetilde{M}$ es abierto de $\overline{M}$. Restringiendo $\widehat{S}$ en torno a $\widehat{s}_0$, podemos suponer que $M = (f : S)$, es abierto de $\widehat{\mathcal{O}}_{\widetilde{s}_0}(f).\widetilde{M}$. ■

- *El álgebra de Lie $\widehat{\mathfrak{g}}$ de $\widehat{G}$ coincide con el álgebra de Lie $\overline{\mathfrak{g}}$ de $G^{\overline{M}}$.*

Demostración. Sea$X \in \overline{\mathfrak{g}}$, entonces $A_t = \exp(tX) \in G$, verifica $\lambda_{A_t}\left(\overline{M}\right) \subset \overline{M}$, y se tiene$\left(\lambda_{A_t} f : \widetilde{S} \times \widehat{S}\right) = \left(f_t : \widetilde{S} \times \widehat{S}_t\right)$ donde $f_t : \widetilde{S} \times \widehat{S}_t \to E$ y se verifican las hipótesis del Corolario 47 **c)** (pág 51) en consecuencia $\widehat{N} = \left(f(\widetilde{s}_0, .) : \widehat{S}\right)$ es una $\widehat{p}$-variedad de E que es enviada por λ_{A_t}, a $\left(f_t(\widetilde{s}_0, .) : \widehat{S}'\right)$. Tomando t suficientemente pequeño es $\lambda_{A_t}(o) \in \widehat{N}$, y $A_t.\sigma_0 = g_{(\widetilde{s}_0, \widehat{s})}^{\rho+1} f$ para algún $\widehat{s} \in \widehat{S}$. En particular $A_t \in \widehat{\mathcal{O}}_{\widetilde{s}_0}(f)$, y $X = (d/dt)|_{t=0} A_t \in \widehat{\mathfrak{g}}$. ■

- *La aplicación $\widetilde{M} \times \widehat{M} \to \overline{M}, \left(\widetilde{x}, \widehat{A}.o\right) \to \widehat{A}.\widetilde{x}$ está bien definida y es difeomorfismo.*

Demostración. Probemos primero que está bién definida. Sea $\widetilde{x} = f(\widetilde{s}, \widehat{s}_0)$. Si $\widehat{A}.o = \widehat{B}.o$, para $\widehat{A}, \widehat{B} \in \widehat{G}$, entonces,

$\widehat{C} = \widehat{B}^{-1}\widehat{A} \in \widehat{G}$, y $\lambda_{\widehat{C}} : \overline{M} \to \overline{M}$ deja fijo $o = \widehat{o} = f(s_0)$, y lleva un entorno o en $\overline{M}$, a otro entorno de o en $\overline{M}$. Esto significa que $\widehat{C}.g_{s_0}^{\ell} f = .g_{s_0}^{\ell} f$ para rodo ℓ, y en particular, tomando $\ell = \rho$, se concluye que $\widehat{A}.g_{(.,\widehat{s}_0)}^{\rho} f$, $\widehat{B}.g_{(.,\widehat{s}_0)}^{\rho} f : \widetilde{S} \to G.\widetilde{\Sigma}$, son hojas de la misma distribución $\widetilde{\Pi}$, con punto común $\widehat{A}.g_{s_0}^{\rho} f = \widehat{B}.g_{s_0}^{\rho} f$. Esto supone (ver el argumento de la demostración del apartado 1 del corolario 47 en pág 51) que $\widehat{A}.g_{(\widetilde{s}, \widehat{s}_0)}^{\rho} f$, $\widehat{B}.g_{(\widetilde{s}, \widehat{s}_0)}^{\rho} f$, y en particular $\widehat{A}.\widetilde{x} = \widehat{B}.\widetilde{x}$. El mismo argumento (leido de atrás adelante) prueba que la aplicación es inyectiva. La sobreyectividad es evidente. La diferenciabilidad queda a cargo del lector. ■

Final de la demostración. Queda el pequeño detalle -que dejamos al cuidado del lector-de pasar de la situación local descrita más arriba al enunciado global del teorema 42.

Corolario 49 *Sean M y $\overline{M}$ dos p-variedades homogeneas de tipo $\mathcal{O}^\rho$, que tienen un contacto de orden ρ en un punto $x \in E$. Entonces $M \cap \overline{M}$ es un abierto común de ambas variedades. En particular, si además son cerradas y conexas, entonces es $M = \overline{M}$.*

4.4. Condiciones de compatibilidad.

Nos preguntamos que relaciones imponen las ecuaciones de Maurer-Cartan sobre las curvaturas $\left(\kappa^1(s), \ldots, \kappa^{\mu_\ell}(s)\right) = \left(\kappa_s^{\nu_\ell}(f)\right)$

En todo momento nos ceñimos al criterio de variación de índices dado en (15) de la pág 19.

Sean C^c_{ab} las constantes de estructura, y Ω la forma de Maurer-Cartan de G. Tenemos:

$$[e_a, e_b] = C^c_{ab} e_c$$
$$\Omega = \boldsymbol{\theta}^a e_a$$

y la ecuación de Maurer Cartan $d\Omega + \frac{1}{2}[\Omega, \Omega] = 0$ se escribe ahora:

$$\left\{ d\boldsymbol{\theta}^c + \frac{1}{2} C^c_{ab} \boldsymbol{\theta}^a \wedge \boldsymbol{\theta}^b \right\} e_c = 0$$

lo que significa

$$d\boldsymbol{\theta}^c = -\frac{1}{2} C^c_{ab} \boldsymbol{\theta}^a \wedge \boldsymbol{\theta}^b \tag{58}$$

En particular si $\mathbf{u}$ es una referencia movil de $f : S \to E$, tomando ϕ^α cobase en S

$$\mathbf{u}^* \boldsymbol{\theta}^a = \theta^a = \theta^a_\alpha \phi^\alpha \in \Omega^1(S) \tag{59}$$

queda

$$d\theta^c = -\frac{1}{2} C^c_{ab} \theta^a_\alpha \theta^b_\beta \left(\phi^\alpha \wedge \phi^\beta\right) \tag{60}$$

y supuesto que hemos tomado $\phi^\alpha = \theta^\alpha$se tiene usando (60)

$$d\phi^\gamma = -\frac{1}{2} C^\gamma_{ab} \theta^a_\alpha \theta^b_\beta \left(\phi^\alpha \wedge \phi^\beta\right) \tag{61}$$

Por otra parte teniendo en cuenta (59) y que $d\theta^{\widetilde{a}}_\gamma = \theta^{\widetilde{a}}_{\gamma;\beta} \phi^\beta$, se concluye por un lado (sustituyendo $d\phi^\gamma$ según (61))

$$\begin{aligned} d\theta^{\widetilde{a}} &= \left(d\theta^{\widetilde{a}}_\gamma\right) \wedge \phi^\gamma + \theta^{\widetilde{a}}_\gamma \left(d\phi^\gamma\right) \\ &= \left(\theta^{\widetilde{a}}_{\beta;\alpha} - \frac{1}{2} \theta^{\widetilde{a}}_\gamma C^\gamma_{ab} \theta^a_\alpha \theta^b_\beta\right) \phi^\alpha \wedge \phi^\beta \end{aligned}$$

además nuevamente de (60) se concluye

$$-d\theta^{\widetilde{a}} = \frac{1}{2} C^{\widetilde{a}}_{ab} \theta^a_\alpha \theta^b_\beta \left(\phi^\alpha \wedge \phi^\beta\right)$$

y sumando se tiene

$$0 = \left(\theta^{\widetilde{a}}_{\beta;\alpha} - \frac{1}{2} \theta^{\widetilde{a}}_\gamma C^\gamma_{ab} \theta^a_\alpha \theta^b_\beta + \frac{1}{2} C^{\widetilde{a}}_{ab} \theta^a_\alpha \theta^b_\beta\right) \phi^\alpha \wedge \phi^\beta$$

y esto supone

$$\theta^{\widetilde{a}}_{\beta;\alpha} - \theta^{\widetilde{a}}_{\alpha;\beta} = -C^{\widetilde{a}}_{ab} \theta^a_\alpha \theta^b_\beta + \theta^{\widetilde{a}}_\gamma C^\gamma_{ab} \theta^a_\alpha \theta^b_\beta \tag{62}$$

(reescribiendo (61) y (62), teniendo en cuenta que $\left(\theta^\alpha_\beta\right)$ es la matriz identidad y denotando

$$D^c_{\alpha\beta} = C^c_{\alpha\beta} + C^c_{\alpha\widetilde{b}} \theta^{\widetilde{b}}_\beta + C^c_{\widetilde{a}\beta} \theta^{\widetilde{a}}_\alpha + C^c_{\widetilde{a}\widetilde{b}} \theta^{\widetilde{a}}_\alpha \theta^{\widetilde{b}}_\beta \tag{63}$$

tenemos

$$\left\{ \begin{array}{l} \theta^{\widetilde{c}}_{\beta;\alpha} - \theta^{\widetilde{c}}_{\alpha;\beta} = D^{\widetilde{c}}_{\alpha\beta} + \theta^{\widetilde{c}}_\gamma D^\gamma_{\alpha\beta} \\ d\phi^\gamma = -\frac{1}{2} D^\gamma_{\alpha\beta} \left(\phi^\alpha \wedge \phi^\beta\right) \end{array} \right. \tag{64}$$

Nota 50 *Las ecuaciones (64) constituyen las llamadas ecuaciones de ℓ-estructura, cuando se toma una $\mathcal{O}^{\ell}$-referencia de movil $\mathbf{u}$ (i.e. $\mathbf{u} \in \Gamma\mathcal{O}^{\ell}(f)$). Las ecuaciones (64) pueden expresarse finalmente como condiciones impuestas sobre las curvaturas $\kappa_s^{\nu} f = \kappa^{\nu}(s)$, $1 \leq \nu \leq \mu_{\ell+1}$ a través de las igualdades*

$$\theta_{\widetilde{\beta}}^{\widetilde{\alpha}}(s) = F_{\widetilde{\beta}}^{\widetilde{\alpha}}\left(\kappa^1(s), \ldots, \kappa^{\mu_{\ell+1}}(s)\right)$$

Donde se supone que para evitar sobrecarga en los indices suponemos que $\widetilde{\alpha} = \widetilde{\alpha}_{\ell}$, $\widetilde{\beta} = \widetilde{\beta}_{\ell}$,...etc. varían entre $p+1$ y m_{ℓ}. Así por ejemplo,

$$\begin{aligned} d\theta_{\widetilde{\beta}}^{\widetilde{\gamma}} &= \theta_{\widetilde{\beta};\alpha}^{\widetilde{\gamma}}\phi^{\alpha} = \frac{\partial F_{\widetilde{\beta}}^{\widetilde{\gamma}}}{\partial k^{\nu}} d\kappa^{\nu} = \frac{\partial F_{\widetilde{\beta}}^{\widetilde{\gamma}}}{\partial k^{\nu}} \kappa_{;\alpha}^{\nu}\phi^{\alpha} \\ &\Longrightarrow \theta_{\widetilde{\beta};\alpha}^{\widetilde{\gamma}} = \frac{\partial F_{\widetilde{\beta}}^{\widetilde{\gamma}}}{\partial k^{\nu}} \kappa_{;\alpha}^{\nu} \end{aligned}$$

Si admitimos para los índices λ, y λ' el rango $m_{\ell} < \lambda$, $\lambda' \leq r$ y definimos

$$\Delta_{\alpha\beta}^{c} = C_{\alpha\widetilde{\beta}}^{c} F_{\beta}^{\widetilde{\beta}} + C_{\widetilde{\alpha}\beta}^{c} F_{\alpha}^{\widetilde{\alpha}} + C_{\widetilde{\alpha}\widetilde{\beta}}^{c} F_{\alpha}^{\widetilde{\alpha}} F_{\beta}^{\widetilde{\beta}}$$

y queda entonces

$$D_{\alpha\beta}^{c} = C_{\alpha\beta}^{c} + \Delta_{\alpha\beta}^{c} + C_{\alpha\lambda}^{c}\theta_{\beta}^{\lambda} + C_{\lambda\beta}^{c}\theta_{\alpha}^{\lambda} + C_{\lambda\lambda'}^{c}\theta_{\alpha}^{\lambda}\theta_{\beta}^{\lambda'}$$

las ecuaciones (64) se escriben

$$\begin{array}{l} \frac{\partial F_{\widetilde{\beta}}^{\widetilde{\alpha}}}{\partial k^{\nu}} \kappa_{;\alpha}^{\nu} - \frac{\partial F_{\alpha}^{\widetilde{\alpha}}}{\partial k^{\nu}} \kappa_{;\beta}^{\nu} = -D_{\alpha\beta}^{\widetilde{\alpha}} + F_{\gamma}^{\widetilde{\alpha}} D_{\alpha\beta}^{\gamma} \\ \theta_{\beta;\alpha}^{\lambda} - \theta_{\alpha;\beta}^{\lambda} = -D_{\alpha\beta}^{\lambda} + \theta_{\gamma}^{\lambda} D_{\alpha\beta}^{\gamma} \\ d\phi^{\gamma} = -\frac{1}{2} D_{\alpha\beta}^{\gamma}\left(\phi^{\alpha} \wedge \phi^{\beta}\right) \end{array} \tag{65}$$

Supuesto que $\mathfrak{g}_{\ell} = \{0\}$, (tomando $\ell = q+1$, es $m_{\ell} = r$) desaparecen los $\theta_{\gamma}^{\lambda}$ y queda $D_{\alpha\beta}^{c} = C_{\alpha\beta}^{c} + \Delta_{\alpha\beta}^{c}$. Por tanto:

$$\begin{array}{l} \frac{\partial F_{\widetilde{\beta}}^{\widetilde{\alpha}}}{\partial k^{\nu}} \kappa_{;\alpha}^{\nu} - \frac{\partial F_{\alpha}^{\widetilde{\alpha}}}{\partial k^{\nu}} \kappa_{;\beta}^{\nu} = -C_{\alpha\beta}^{\widetilde{\alpha}} - \Delta_{\alpha\beta}^{\widetilde{\alpha}} + F_{\gamma}^{\widetilde{\alpha}}\left(C_{\alpha\beta}^{\gamma} + \Delta_{\alpha\beta}^{\gamma}\right) \\ d\phi^{\gamma} = -\frac{1}{2}\left(C_{\alpha\beta}^{\gamma} + \Delta_{\alpha\beta}^{\gamma}\right)\left(\phi^{\alpha} \wedge \phi^{\beta}\right) \end{array} \tag{66}$$

4.4.1. Teorema de integrabilidad

Suponemos construido el referencial $\mathcal{O}^{q+1}$

Teorema. *Supongamos que S es un dominio abierto de $\mathbb{R}^p$ que contiene al origen, sobre el que se han dado una cobase (ϕ^{α}), y funciones $\kappa^{\nu} = \kappa^{\nu}(s)$, $\theta_{\alpha}^{\lambda} = \theta_{\alpha}^{\lambda}(s)$ con $1 \leq \nu \leq \mu_{q+1}$, $m_q < \lambda \leq r$. Supóngase que se verifican las ecuaciones de integrabilidad* (65) *o las ecuaciones* (66) *en el caso $\mathfrak{g}_q = \{0\}$.. En estas condiciones existe una $f : S \to \mathcal{E}$ definida sobre un entorno $\mathbb{S} \subset S$ del origen con curvaturas $\kappa^A = \kappa^A(s)$, $\theta_{\alpha}^{l} = \theta_{\alpha}^{l}(s)$ y cobase de Frenet (ϕ^{α})*

Nota 51 *Si además de suponer $\mathfrak{g}_q = \{0\}$, suponemos que*

$$rang\left(d\kappa^{\nu} : 1 \leq \nu \leq \mu_{\rho}\right) = p$$

para cierto $\rho \geq q$ entonces siguiendo el esquema del Teorema de congruencia 18 (en pág 24) podrían reescribirse las ecuaciones (66) en función de $\left(\kappa^1(s), \ldots, \kappa^{\mu_{\rho+1}}(s)\right)$

y sus derivadas parciales en un sistema de coordenadas dado (s^α) *de* S*. Obteniendo así unas ecuaciones* equivalentes *a las (66) donde solo aparecen* $\left(\kappa^1, \ldots, \kappa^{\mu_{q+2}}\right)$ *y en donde ha desaparecido ya la cobase adaptada. Esto da lugar a otra versión del teorema de integrabilidad.*

5. Ejemplos.

5.1. Acción de Grupos lineales.

Considérese el espacio $E = \mathbb{R}^3$ y un subgrupo de Lie G_0 del grupo lineal general $GL(3, \mathbb{R})$. Denotamos por G el al grupo de Lie formado por matrices reales del tipo

$$(a; A) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & A \end{pmatrix}, \; a = \begin{pmatrix} a^1 \\ a^2 \\ a^3 \end{pmatrix} \in E, \; A \in G$$

Visto así, G es un subgrupo cerrado de Lie de $GL(4, \mathbb{R})$, cuya regla de producto es

$$(a; A)(b; B) = (Ab + a; AB)$$

$$(a; A)^{-1} = \left(A^{-1}a; A^{-1}\right)$$

Los elementos x de E, son ternas ordenadas de números, que serán considerados filas o columnas dependiendo del contexto.

El grupo G actua fiel y transitivamente sobre E de la forma

$$(a; A) . x = Ax + a, \text{ para } (a; A) \in G, \; x \in E$$

y la matriz $(a; A) \in G$, puede considerarse una transformación afín de E con ecuaciones respecto al sistema de referencia canónico

$$\begin{pmatrix} 1 \\ \overline{x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \end{pmatrix}$$

Si fijamos como punto base $o = (0, 0, 0) \in E$, podemos interpretar $(a; A) = (a; A_1, A_2, A_3)$

$$A = (A_1, A_2, A_3) \;\; A_i = \begin{pmatrix} a_i^1 \\ a_i^2 \\ a_i^3 \end{pmatrix}$$

como un sistema de referencia (cartesiano), con origen $(a; A) . o = a$ En particular la matriz identidad $(o; I)$ es el sistema de referencia canónico.

El grupo de isotropía de o es

$$\{(o; A) : A \in G_0\} = G_0$$

la última igualdad se obtiene al identificar

$$(o; A) = A$$

5.1.1. Acción sobre la Grassmaniana de 2-planos.

El álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ de G está formada por matrices tipo

$$\mathfrak{g} = \left\{ (x|w) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ x & w \end{pmatrix} \text{ con } x \in \mathbb{R}^3, \; w \in \mathfrak{g}_0 \right\}$$

siendo $\mathfrak{g}_0 = \left\{ w \in \mathbb{R}_3^3 \text{ con } w^t + w = 0 \right\}$ es decir:

$$w = \begin{pmatrix} w_1^1 & w_2^1 & w_3^1 \\ w_1^2 & w_2^2 & w_3^2 \\ w_1^3 & w_2^3 & w_3^3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}_3^3$$

El álgebra de Lie de G_0, que se identifica con

$$\mathfrak{g}_0 = \{(0|w) : w \in \mathfrak{g}_0\} \subset \mathfrak{g}$$

con complementario

$$\mathfrak{m}_0 = \left\{(x|0) : x \in \mathbb{R}^3\right\}$$

que es invariante por la acción adjunta $Ad_{(o,A)} : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ de G_0 en $\mathfrak{g}$:

$$Ad_{(o,A)}\,(x|w) = (o,A)\,(x|w)\,(o,A)^{-1} = \left(Ax|AwA^{-1}\right)$$

Si $a \in E$, y $x \in \mathbb{R}^3$ denotamos $x_a = (x,a) \in T_xE$ al vector x *apoyado* en a, de manera que

$$T_aE = \left\{x_a : x \in \mathbb{R}^3\right\}$$

Se identifica $\mathfrak{m}_0 = T_oE = \mathbb{R}^3$, cuando escribimos

$$(x|0) = x_o = x = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix}$$

Así $\mathfrak{g} = \mathfrak{m}_0 \oplus \mathfrak{g}_0$ y elegimos $((e_1|0)\,,(e_2|0)\,,(e_2|0))$ con

$$(e_1,e_2,e_3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

como base de $\mathfrak{m}_0$.

La acción de G_o sobre T_oE es la natural dada por la multiplicación matricial

$$G_0 \times T_oE \to T_oE,\ (A,x) \to Ax = Ad_{(o,A)}\,(x|0)$$

También $\mathcal{G}_2^1\,(E,o) = \mathbb{G}_2\,(T_oE) = \mathbb{G}_2\,(\mathfrak{m}_0) =$

$$\begin{aligned} \mathbb{G}_{2,3} &= \left\{ \begin{bmatrix} x_1^1 & x_1^1 \\ x_1^2 & x_1^2 \\ x_1^3 & x_1^3 \end{bmatrix} : rg \begin{pmatrix} x_1^1 & x_2^1 \\ x_1^2 & x_2^2 \\ x_1^3 & x_2^3 \end{pmatrix} = 2 \right\} \\ &\simeq \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ x_1^3 & x_2^3 \end{bmatrix} : \begin{pmatrix} x_1^3 & x_1^3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \right\} = \mathbb{R}^2 \end{aligned}$$

La acción de G_0 sobre $\mathbb{G}_2\,(T_oE)$ está descrita por

$$A.\,[\xi,\eta] = [A\xi, A\eta] = [A\,(\xi,\eta)]$$

y se escribe en coordenadas por la acción $\rho_0 : G_0 \times \mathbb{G}_{2,3} \to \mathbb{G}_{2,3}$ de G_0 sobre $\mathbb{G}_{2,3}$ está dada por

$$A. \begin{bmatrix} x_1^1 & x_1^1 \\ x_1^2 & x_1^2 \\ x_1^3 & x_1^3 \end{bmatrix} = \left[A \begin{pmatrix} x_1^1 & x_2^1 \\ x_1^2 & x_2^2 \\ x_1^3 & x_2^3 \end{pmatrix} \right]$$

En los casos equiafín y euclídeo esta acción es transitiva

El plano

$$o^1 = [I_1, I_2] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

nos sirve por tanto como referencial de orden 1

usando las coordenadas $\left(\begin{array}{cc} x_1^3 & x_2^3 \end{array}\right)$ de $\mathbb{G}_{2,3}$ se ve que $o^1 = (0,0) \subset \mathbb{R}^2$ y $W^1 = \left\{o^1\right\}$ tiene ecuaciones:

$$W^1 : \begin{cases} x_1^3 = 0 \\ x_2^3 = 0 \end{cases}$$

Nótese que en general la acción de G sobre $\mathcal{G}_2^1(E)$ viene descrita por

$$(a;A)\,[\xi,\eta]_x = [A(\xi,\eta)]_{Ax+a}$$

5.1.2. Forma de Maurer-Cartan

Analizemos la forma de Maurer-Cartan $\Omega \in \Omega^1(G,\mathfrak{g})$:

$$\Omega = \left(\left(\begin{array}{c} \boldsymbol{\theta}^1 \\ \boldsymbol{\theta}^2 \\ \boldsymbol{\theta}^3 \end{array}\right) \middle| \left(\begin{array}{ccc} \boldsymbol{\omega}_1^1 & \boldsymbol{\omega}_2^1 & \boldsymbol{\omega}_3^1 \\ \boldsymbol{\omega}_1^2 & \boldsymbol{\omega}_2^2 & \boldsymbol{\omega}_3^2 \\ \boldsymbol{\omega}_1^3 & \boldsymbol{\omega}_2^3 & \boldsymbol{\omega}_3^3 \end{array}\right)\right)$$

Fijado $(a;A) \in G$ es

$$T_{(a;A)}G = \{(a;A)\,(x|w) = (Ax|Aw) : w \in \mathfrak{g}\}$$

y por definición $\Omega\,(Ax|Aw) = (x|w)$. Tomando coordenadas canónicas (en $GL(4,\mathbb{R})$) y restringiendolas a G quedan

$$x^i, x_j^i : G \to \mathbb{R},\ x^i(a;A) = a^i,\ x_j^i(a;A) = a_j^i$$

si $\left(\left(x^{-1}\right)_j^i\right) = \left(x_j^i\right)^{-1}$ es la matriz inversa de $\left(x_j^i\right)$

$$\begin{array}{c} \Omega = (\boldsymbol{\theta}|\boldsymbol{\omega}) = \left(\left(x_j^i\right)^{-1} dx | \left(x_j^i\right)^{-1}\left(dx_j^i\right)\right) \\ \boldsymbol{\theta}^i = \sum \left(x^{-1}\right)_k^i dx^k,\ \boldsymbol{\omega}_j^i = \sum \left(x^{-1}\right)_k^i dx_j^k \in \Omega^1(G_0) \end{array},$$

Una interpretación de la forma de Maurer-Cartan es la siguiente

Si $\mathbf{A}(t) = (a(t), A(t)) \in G$, $t \in I$ es una referencia movil a lo largo de la curva $a(t)$, entonces

$$\mathbf{A}'(t) = \mathbf{A}(t)\,\Omega\,(\mathbf{A}'(t))$$

que se puede desdoblar en

$$\begin{array}{c} a'(t) = \sum \boldsymbol{\theta}^i(t)\,A_i(t) \text{ con } \boldsymbol{\theta}^i(t) = \boldsymbol{\theta}^i(\mathbf{A}'(t)) \\ A'(t) = A(t)\,\boldsymbol{\omega}(t) \text{ con } \boldsymbol{\omega}(t) = \boldsymbol{\omega}(\mathbf{A}'(t)) \end{array}$$

Más general, si $u{=}(f,u) : S \to G$ es una aplicación diferenciable, $u(s) = (f(s), u(s))$, entonces la derivada de Darboux de u es

$$\mathbf{u}^*\Omega = (\theta|\omega) \in \Omega^1(S,\mathfrak{g})$$

donde $\theta^i = \mathbf{u}^*\boldsymbol{\theta}^i, \omega_j^i = \mathbf{u}^*\boldsymbol{\omega}_j^i \in \Omega^1(S)$ tienen la siguiente interpretación $du{=}u(\theta|\omega)$ que equivale a las igualdades

$$\begin{aligned} df &= \sum \theta^i u_i \\ du_j &= \sum \omega_j^k u_k \end{aligned} \tag{67}$$

en donde df, y du_j son las diferenciales de las aplicaciones $f, u_j : S \to \mathbb{R}^3$

Tomando $\mathbf{X} = (x, X) = id : G \to G$ queda $d\mathbf{X} = \mathbf{X}\Omega_G$

$$\begin{array}{c} dx = \sum \boldsymbol{\theta}^i X_i \\ dX_j = \sum \boldsymbol{\omega}_j^k X_k \end{array} \tag{68}$$

5.1.3. Ecuaciones de Maurer Cartan.

Las ecuaciones de Maurer-Cartan se obtienen por manipulación formal de (68) al imponer: $d^2a = 0$, y $d^2A_j = 0$ el resultado es el siguiente:

$$\begin{array}{r} d\boldsymbol{\theta}^i + \sum \boldsymbol{\omega}^i_j \wedge \boldsymbol{\theta}^j = 0 \\ d\boldsymbol{\omega}^i_j + \sum \boldsymbol{\omega}^i_k \wedge \boldsymbol{\omega}^k_j = 0 \end{array} \tag{69}$$

Naturalmente estas ecuaciones se transforman por pullback en

$$\begin{array}{r} d\theta^i + \sum \omega^i_j \wedge \theta^j = 0 \\ d\omega^i_j + \sum \omega^i_k \wedge \omega^k_j = 0 \end{array} \tag{70}$$

cuando se toma $\mathbf{u} : S \to G$.

5.1.4. Escamas en el origen

En lo que sigue, y para descargar notación, escribimos $\mathcal{G}^k(E)$ en lugar de $\mathcal{G}^k_2(E)$ (suprimimos el subíndice 2 que será en adelante sobre entendido).

Para cada $l = (l_1, l_2) \in \mathbb{R}^2$ se considera la parametrización $\widetilde{\zeta_l} : \mathbb{R}^2 \to E$ de la gráfica de la función $z = \zeta_l(x, y) = l_1 x + l_2 y$, dada por

$$\widetilde{\zeta_l}(x, y) = (x, y, \zeta_l(x, y))$$

y la aplicación

$$\gamma^1 : \mathbb{R}^2 \to \mathcal{G}^1(E, o), \, l \to \gamma^1(l) = g^2_o \widetilde{\zeta_l}$$

define una parametrización local de $\mathcal{G}^1(E, o)$ en un entorno de $.\gamma^1(0, 0)$ (que representa la escama definida en el origen por el plano $z = 0$)

Análogamente para cada $q = (q_1, q_2, q_3) \in \mathbb{R}^3$ se considera la parametrización $\widetilde{\zeta_q} : \mathbb{R}^2 \to E$

$$\widetilde{\zeta_q}(x, y) = \big(x, y, \zeta_q(x, y)\big)$$

de la gráfica de la función $z = \zeta_q(x, y) = q_1 x^2 + 2q_2 xy + q_3 y^2$. Identificando

$$q = \begin{pmatrix} q_1 & q_2 \\ q_2 & q_3 \end{pmatrix}$$

queda

$$\zeta_q(x, y) = (x, y)\, q \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Si $\zeta_{l,q} = \zeta_l + \zeta_q$ la aplicación

$$\begin{array}{ccc} & & \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^3 \xrightarrow{\gamma^2} \mathcal{G}^2(E, o) \\ (l, q) & \to & \gamma^2(l, q) = g^2_o \widetilde{\zeta_{l,q}} \end{array}$$

define una parametrización local de $\mathcal{G}^2_2(E, o)$, en un entorno de o^1. En estas coordenadas la proyección $\mathcal{G}^2_2(E, o) \to \mathcal{G}^1_2(E, o)$ viene dada por la proyección canónica

$$\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, \;\; (l, q) \to l$$

5.2. Geometría afín euclidea.

La geometría afín euclidea sobre E, se obtiene cuando se toma $G_0 = SO(3,\mathbb{R})$ formado por matrices $A = (A_1, A_2, A_3)$ que forman base ortonormal positivamente orientada, es decir $A^t A = id$, $\det A = 1$.

la acción de

$$SO(3) = G_0 = \{(o; A) : A \in SO(3)\} \subset G$$

sobre la Grassmanniana de planos $\mathbb{G}_{2,3} \simeq \mathcal{G}_2^1(E, o)$ es la natural,

$$A.[X_1, X_2] = [AX_1, AX_2]\,,\ A \in SO(3)\,, [X_1, X_2] \in \mathbb{G}_{2,3}$$

y resulta ser transitiva. Se fija $w^1 = o^1 = [I_1, I_2]$ como origen, y el grupo de isotropía de o^1 resulta ser

$$O(2) = G_1 = \left\{ A_1 = \left(o, \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & \det A \end{pmatrix} \right) : A \in O(2) \right\} \tag{71}$$

así una referencia $u(s) = (f(s), u(s))$ de orden 1 en la p-variedad $f : S \to E$ debe verificar $u(s).[I_1, I_2] = f_* T_s S$, que equivale a que $u(s) = (u_1(s), u_2(s))$, genere $f_* T_s S$.

Nótese (ver párrafo 5.1.4) que la aplicación

$$\mathbb{R}^3 \to \mathcal{G}^2\left(E, o^1\right), \ q \to g_o^2 \widetilde{\zeta_q}$$

define una parametrización global de $\mathcal{G}^2\left(E, o^1\right)$.

La acción $G_1 \times \mathcal{G}^2\left(E, o^1\right) \to \mathcal{G}^2\left(E, o^1\right)$, puede entonces describirse así:

Dada la escama $g_o^2 \widetilde{\zeta_{\overline{q}}}$ de coordenadas $\overline{q}$, y $A \in O(2)$, para calcular $A^{-1}.g_o^2 \widetilde{\zeta_{\overline{q}}}$, hacemos sustitución formal en la igualdad $\overline{z} = \zeta_{\overline{q}}(\overline{x}, \overline{y})$ de $\overline{x}, \overline{y}, \overline{z}$ por

$$\begin{pmatrix} \overline{x} \\ \overline{y} \\ \overline{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & \det A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

de forma que si q son las coordenadas de $A^{-1}.g_o^2 \widetilde{\zeta_{\overline{q}}}$ se tiene: $q = (\det A)\, A^t \overline{q} A$. Por tanto

$$A.g_o^2 \widetilde{\zeta_q} = g_o^2 \widetilde{\zeta_{\overline{q}}} \text{ con } \overline{q} = (\det A)\, A q A^t = \pm A q A^t$$

5.2.1. Acción inducida de O(2) en $\mathbb{R}^3$.

En lo que sigue identificamos $O(2)$ con $G_1 \subset G = SO(3)$, identificando $A \in O(2)$ con $A_1 \in SO(3)$ tal y como se indica en (71)

Formalmente por tanto debemos analizar la acción

$$O(2) \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ A.q = (\det A)\, A q A^t \text{ con } q = \begin{pmatrix} q_1 & q_2 \\ q_2 & q_3 \end{pmatrix} \tag{72}$$

bien conocida del álgebral lineal. Se sabe que fijado q, es posible encontrar $A \in SO(2)$ de forma que

$$A.q = k \text{ con } k = \begin{pmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{pmatrix}$$

Es facil ver que al hacer actuar diversas matrices de $O(2)$ sobre k, se obtienen:

$$\begin{pmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -k_1 & 0 \\ 0 & -k_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} k_2 & 0 \\ 0 & k_1 \end{pmatrix}$$

por lo que todas están en la misma órbita.

5.2.2. Familias admisibles.

Una sección de la acción (72) viene dada por

$$W^{2a} = \left\{ \left(\begin{array}{cc} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{array} \right) : |k_2| < k_1 \right\}$$

que se corresponde para $\zeta_{(k_1,k_2)} = k_1 x^2 + k_2 y^2$

$$\mathcal{O}^{2a} = \left\{ g_o^2 \left(\widetilde{\zeta}_{(k_1,k_2)} \right) : |k_2| < k_1 \right\}$$

Cada elemento de W^{2a}, tiene el mismo grupo de isotropía:

$$H^{2a} = \left\{ \pm \left(\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{array} \right) \right\}$$

Resulta por tanto que la familia $G.\mathcal{O}^{2a} = \mathcal{D}_{\pm id}(E)$ es la familia de escamas genéricas de orden 2, y $\mathcal{F}_{\pm id}$ es la familia admisible de las superficies sin puntos umbílicos ni parabólicos.

Otra sección de la acción (72) viene dada por:

$$W^{2b} = \left\{ \left(\begin{array}{cc} k & 0 \\ 0 & -k \end{array} \right) : 0 < k \right\}$$

que se corresponde con

$$\mathcal{O}^{2b} = \left\{ g_o^2 \left(\widetilde{\zeta}_{(k,-k)} \right) : 0 < k \right\}$$

Cada elemento de W^{2b}, tiene el mismo grupo de isotropía:

$$H^{2b} = \left\{ \pm \left(\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{array} \right), \pm \left(\begin{array}{cc} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{array} \right) \right\} \tag{73}$$

y la familia $G.\mathcal{O}^{2b} = \mathcal{D}^2_{[H^{2b}]}$.son las escamas minimales que definen la familia admisible de las superficies minimales.

Otra sección de la acción (72) viene dada por:

$$W^{2c} = \left\{ \left(\begin{array}{cc} k & 0 \\ 0 & k \end{array} \right) : 0 < k \right\}$$

Cada elemento de W^{2c}, tiene el mismo grupo de isotropía:

$$H^{2c} = SO(2)$$

Se corresponde con la familia admisible de las esferas.

La última sección de la acción (72) es

$$W^{2d} = \left\{ \left(\begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{array} \right) \right\}$$

con grupo de isotropía:

$$H^{2c} = O(2)$$

Observese que

R1) No existen escamas genéricas de orden inferior a 2, es decir:

$$Gen\left(\mathcal{G}^1(E)\right) = \varnothing$$

R2) Las escamas genéricas de orden 2, $G.\mathcal{O}^{2a} \subset Gen\left(\mathcal{G}^2(E)\right)$, forman un abierto denso del espacio total $\mathcal{G}^2(E)$ de escamas de orden 2.

Por esto decimos que la geometría afín euclidea es (2-)regular de orden 2.

Una superficie $f : S \to E$ se dice de tipo W^{2x} si $g_s^2 f \in G.\mathcal{O}^{2x}$ para todo $s \in S$ (sea $x = a, b, c$) y constituyen cada una de ellas familias admisibles.

- A las de tipo W^{2a} se les llama genéricas
- A las de tipo W^{2b} se les llama minimales
- Las de tipo W^{2c} son las esferas
- Las de tipo W^{2d} son los planos.

5.2.3. Desde el algoritmo Jensen

Esta es una continuación del epígrafe 5.1.1 adaptado a la geometría euclidea.

El álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ de G está formada por matrices tipo

$$\begin{aligned} \mathfrak{g} &= \left\{ (x|w) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ x & w \end{pmatrix} \text{ con } x \in \mathbb{R}^3,\ w \in \mathfrak{g}_0 \right\} \\ &= \mathfrak{m}_0 \oplus \mathfrak{g}_0 \end{aligned}$$

siendo $\mathfrak{g}_0 = \left\{(0|w) = w \in \mathbb{R}_3^3 \text{ con } w^t + w = 0\right\}$ es decir:

$$w = \begin{pmatrix} 0 & -w_2^1 & -w_3^1 \\ w_2^1 & 0 & -w_3^2 \\ w_3^1 & w_3^2 & 0 \end{pmatrix}$$

y $\mathfrak{m}_0 = \left\{(x|0) : x \in \mathbb{R}^3\right\} = \left\{x^1 e_1 + x^2 e_1 + x^3 e_3 : x^i \in \mathbb{R}\right\}$, y usando las coordenadas $\begin{pmatrix} x_1^3 & x_2^3 \end{pmatrix}$ de $\mathbb{G}_{2,3}$ se ve que W^1 con ecuaciones:

$$W^1 : \begin{cases} x_1^3 = 0 \\ x_2^3 = 0 \end{cases}$$

nos sirve como sección de la acción $\rho_0 : G_0 \times \mathbb{G}_{2,3} \to \mathbb{G}_{2,3}$ con isotropía el grupo

$$O(2) = G_1 = \left\{ A_1 = \left(o, \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & \det A \end{pmatrix} \right) : A \in O(2) \right\}$$

dado en (71) y álgebra de Lie

$$\mathfrak{g}_1 = \left\{ w_2^1 e_6 : w_2^1 \in \mathbb{R} \right\} \text{ con } e_6 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

y tomamos como complementario $\mathfrak{m}_1$ de $\mathfrak{g}_1$en $\mathfrak{g}_0$

$$\mathfrak{m}_1 = \left\{ w_3^1 e_4 + w_3^2 e_5 : w_3^1,\ w_3^2 \in \mathbb{R} \right\}$$

donde

$$e_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \; e_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Tenemos así $\mathfrak{g} = \mathfrak{m}_0 \oplus \mathfrak{g}_0 = \mathfrak{m}_0 \oplus \mathfrak{m}_1 \oplus \mathfrak{g}_1$, y

$$\begin{cases} m_1 = \dim\left(\mathfrak{g}/\mathfrak{g}_1\right) = \dim \mathfrak{m}_0 + \dim \mathfrak{m}_1 = 5 \\ \mu_1 = \dim W^1 = 0 \end{cases}$$

y por tanto

$$\mathbb{G}_2\left(\mathbb{R}^5, W^1\right) = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ x_1^4 & x_2^4 \\ x_1^5 & x_2^5 \end{bmatrix} \simeq \begin{pmatrix} x_1^4 & x_2^4 \\ x_1^5 & x_2^5 \end{pmatrix} \right\} \simeq \mathbb{R}_2^2 \tag{74}$$

La acción $\rho_1 : O(2) \times \mathbb{R}_2^2 \to \mathbb{R}_2^2$ viene dada por

$$A.\begin{pmatrix} x_1^4 & x_2^4 \\ x_1^5 & x_2^5 \end{pmatrix} = (\det A)\, A \begin{pmatrix} x_1^4 & x_2^4 \\ x_1^5 & x_2^5 \end{pmatrix} A^t$$

Referencias de orden 1. Una referencia de orden cero a lo largo de una p-variedad $f : S \to E$ es una aplicación diferenciable u: $S \to G$ con $u(s) = (f(s), u(s))$.

La forma de Maurer-Cartan es por tanto del tipo

$$\begin{aligned} \Omega &= \left(\begin{pmatrix} \boldsymbol{\theta}^1 \\ \boldsymbol{\theta}^2 \\ \boldsymbol{\theta}^3 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} \mathbf{0} & -\boldsymbol{\omega}_1^2 & -\boldsymbol{\omega}_1^3 \\ \boldsymbol{\omega}_1^2 & \mathbf{0} & -\boldsymbol{\omega}_2^3 \\ \boldsymbol{\omega}_1^3 & \boldsymbol{\omega}_2^3 & \mathbf{0} \end{pmatrix} \right) \\ &= \sum_1^3 \boldsymbol{\theta}^i e_i + \boldsymbol{\omega}_1^3 e_4 + \boldsymbol{\omega}_2^3 e_5 + \boldsymbol{\omega}_1^2 e_6 \end{aligned}$$

Si $u^*\Omega = (\theta|\omega) \in \Omega^1(S, \mathfrak{g})$, se tiene por (67)

$$\begin{aligned} df &= \sum \theta^i u_i \\ du_j &= \sum \omega_j^k u_k \end{aligned} \tag{75}$$

y podemos conseguir $\theta^3 = 0$, si tomamos $(u_1(s), u_2(s))$, generando $f_* T_s S$, para todo s, o de forma equivalente

$$\mathbf{u}(s) \,.\, [I_1, I_2] = [u(s)(I_1, I_2)]_{f(s)} = [u_1(s), u_2(s)]_{f(s)} = f_* T_s S$$

Por tanto $\theta^3 = 0$ es el criterio de las referencias de orden 1 o (1-adaptadas).

La primera de las ecuaciones (75) se escribe ahora para cada $s \in S$, $\xi \in T_s S$

$$f_* \xi = \theta^1(\xi)\, u_1(s) + \theta^2(\xi)\, u_2(s) \tag{76}$$

lo que indica que $f_*\left(\theta^1, \theta^2\right)$ es base dual de (u_1, u_2).

La forma vertical queda

$$\Omega_{\mathbf{u}}\,(\operatorname{mod} \mathfrak{g}_1) = \Theta_{\mathbf{u}}^1 = \phi^1 e_1 + \phi^2 e_2 + \theta^3 e_3 + \theta^4 e_4 + \theta^5 e_5$$

donde

$$\left\{\begin{array}{l} \theta^1 = \phi^1 \\ \theta^2 = \phi^2 \\ \theta^3 = 0 \\ \theta^4 = \omega_1^3 = \theta_1^4\phi^1 + \theta_2^4\phi^2 \\ \theta^5 = \omega_2^3 = \theta_1^5\phi^1 + \theta_2^5\phi^2 \end{array}\right. \tag{77}$$

y por tanto

$$\gamma^1_{\mathbf{u}(s)} f = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ \theta_1^4(s) & \theta_2^4(s) \\ \theta_1^5(s) & \theta_2^5(s) \end{bmatrix} \in \mathbb{G}_2\left(\mathbb{R}^5, W^1\right), \ \forall s \in S$$

La primera de las ecuaciones (70), $d\theta^i + \sum \omega_j^i \wedge \theta^j = 0$ aplicada a $\theta^3 = 0$, da

$$\theta^4 \wedge \phi^1 + \theta^5 \wedge \phi^2 = 0$$

de donde fácilmente se deduce sustituyendo por (77) que $\theta_2^4 = \theta_1^5$. Esto supone que podemos restringir $\mathbb{G}_2\left(\mathbb{R}^5, W^1\right) \simeq \mathbb{R}_2^2$ dado en (74) por

$$\mathbb{G}_2^{\#}\left(\mathbb{R}^5, W^1\right) \simeq \left\{\begin{pmatrix} q_1 & q_2 \\ q_2 & q_3 \end{pmatrix} : q_i \in \mathbb{R}\right\} \simeq \mathbb{R}^3$$

y aplicar con la acción (72). Esto enlaza ya con el epígrafe 5.2.2 (en pág 64)

Analicemos el caso

$$W^{2a} = \left\{\begin{pmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{pmatrix} : |k_2| < k_1\right\}$$

El grupo de isotropía G_2 asociado a esta sección es ya la identidad...etc.

6. Apéndices.

6.1. Elementos infinitesimales de contacto

Se dice que el orden de contacto en un punto x entre dos variedades M y $\overline{M}$ de la misma dimensión $p \geq 1$, sumergidas en una variedad ambiente.E de dimensión $m > p$ es al menos 1, si el punto x está en $M \cap \overline{M}$ y además los espacios tangentes $T_x M$ y $T_x\ \overline{M}$ coinciden.

Hay sin embargo en la literatura diferentes puntos de vista, a la hora de establecer el concepto de *contacto de orden superior*, dependiendo del uso que se quiera dar a tal definición.

Una posibilidad consiste en definir el contacto en x de orden al menos $r \geq 1$ entre M, y $\overline{M}$, por la condición de que exista una carta $(x_1 \ldots x_m)$ de E en torno a x, y parametrizaciones locales $\varphi, \overline{\varphi} : \mathbb{R}^p \to E$ de M y $\overline{M}$ respectivamente con $\varphi(0) = \overline{\varphi}(0) = x$, de forma que todas las derivadas parciales de orden menor o igual a r de $x_i \circ \varphi$ y $x_i \circ \overline{\varphi}$ coincidan en el origen.

Otra posibilidad, si queremos evitar las coordenadas, es considerar las inmersiones naturales de los fibrados tangentes TM y $T\overline{M}$ como subvariedades p-dimensionales en el fibrado Grassmaniano $\mathcal{G}_p(E)$. Se definine entonces el contacto entre M, y $\overline{M}$ de orden al menos 2 en el punto x de E, como un contacto de orden al menos 1 de TM y $T\overline{M}$ en el *punto* $T_x M = T_x\ \overline{M}$ de $\mathcal{G}_p(E)$.

El proceso se continua inductivamente para definir ordenes mayores de contacto. Esta construcción que puede ser útil en algunas aplicaciones, tiene el defecto de aumentar exponencialmente las dimensiones de los sucesivos espacios ambiente $\mathcal{G}_p(E)$, $\mathcal{G}_p(\mathcal{G}_p(E))$, $\mathcal{G}_p(\mathcal{G}_p(\mathcal{G}_p(E)))$ ... etc. (para más detalles ver [Jensen] págs 1-4).

En lo que sigue, E es una variedad diferenciable de dimensión $m > 1$.

Se presentan a continuación los elementos infinitesimales de orden superior, que intervienen en el desarrollo.

6.1.1. Vectores tangentes de orden superior.

Dos curvas $\alpha = \alpha(t)$, $\beta = \beta(t)$ de la variedad diferenciable E, definen el mismo $r-$jet en $t = 0$, si $\alpha(0) = \beta(0) = a$, y en algún sistema de coordenadas locales $(x_1, \ldots, x_m)$ en torno a a, se verifica para todo k con $1 \leq k \leq r$:

$$\left.\frac{d^k(x_i \circ \alpha)}{dt^k}\right|_{t=0} = \left.\frac{d^k(x_i \circ \beta)}{dt^k}\right|_{t=0}$$

La propiedad, no depende del sistema local de coordenadas utilizado. La relación anterior es de equivalencia, y denotamos por

$$\left.\frac{d^r \alpha(t)}{dt^r}\right|_{t=0} = \alpha^{(r)}(0) = j_0^r \alpha$$

a la clase de equivalencia definida por la curva α, y se denomina vector tangente de orden r en a. Se denota por $T_a^r E$ al conjunto de todos ellos. La unión $T^r E = J_1^r(E)$ constituye el fibrado tangente de orden r sobre E. El vector tangente de orden r definido por α en $t = t_0$ es:

$$j_{t_0}^r \alpha = \alpha^{(r)}(t_0) = \left.\frac{d^r \alpha(t + t_0)}{dt^r}\right|_{t=0} \in T_{\alpha(t_0)}^r E$$

$T^r E$ es una variedad diferenciable. De hecho, a partir del sistema de coordenada locales $(x_1, \ldots, x_m) = (x_i)$ se puede construir un sistema de coordenadas para T^rE, $(x_i, x_i^1, \ldots x_i^r)$, en donde se entiende que

$$x_i^k\left(\alpha^{(r)}(0)\right) = \left.\frac{d^k\left(x_i \circ \alpha\right)}{dt^k}\right|_{t=0}$$

Además el operador T^r es funtorial, en el siguiente sentido:

Si $\phi : E_1 \to E_2$ es una aplicación diferenciable queda inducida $\phi_* = \phi^{(r)} : T^rE_1 \to T^rE_2$ por la condición:

$$\phi^{(r)}\left(\alpha^{(r)}(0)\right) = (\phi \circ \alpha)^{(r)}(0)$$

Además $(\psi \circ \phi)^{(r)} = \phi^{(r)} \circ \psi^{(r)}$.para ψ, ϕ aplicaciones diferenciables entre variedades.

Se construyen así las proyecciones naturales:

$$T^{r+1}E \overset{\pi^{(r)}}{\to} T^rE \to \cdots \to T^1E = TE \overset{\pi}{\to} E$$

6.1.2. Fibrados de Jets

Si $f, \overline{f} : S \to E$ son aplicaciones diferenciales entre variedades, diremos que f y $\overline{f}$ definen el mismo jet de orden r en $s \in S$ y escribimos $j_s^r f = j_s^r \overline{f}$, si para alguna parametrización local $(u_1, \ldots u_p)$ de S en torno a s y alguna parametrización local $(x_1 \ldots x_m)$ en torno a $f(s)$ en E se tiene que para todo $j = 1, \ldots m$, todo $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$ con $|\alpha| = \sum \alpha_i \leq r$:

$$\left.\frac{\partial^{|\alpha|}\left(x_j \circ f\right)\left(u_1, \ldots u_p\right)}{\partial u_{\alpha_1} \ldots \partial u_{\alpha_k}}\right|_{u(s)} = \left.\frac{\partial^{|\alpha|}\left(x_j \circ \overline{f}\right)\left(u_1, \ldots u_p\right)}{\partial u_{\alpha_1} \ldots \partial u_{\alpha_k}}\right|_{u(s)}$$

Esta propiedad es independiente de las parametrizaciones locales tomadas.

En particular, tomando $S = \mathbb{R}^p$, si $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^p, E)$ denota al conjunto de las funciones $\varphi : \mathbb{R}^p \to E$ diferenciables en un entorno del origen, podemos construir el fibrado de Jets

$$J_p^r(E) = \{j_0^r\varphi : \varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^p, E)\}$$

sobre E, con proyección $J_p^r(E) \to E$, $j_0^r\varphi \to \varphi(0)$. Se denota $J_p^r(E, a)$ a la fibra sobre $a \in E$. Nótese la identidad $J_1^r(E, a) = T_a^rE$

6.1.3. Variedades sumergidas

Una variedad p-dimensional (sumergida) en E viene definida por una inmersión[1] $f : S \to E$ donde S es una variedad diferenciable (abstracta) p-dimensional. Dos inmersiones $f_1 : S_1 \to E$, $f_2 : S_2 \to E$ se dice definen la misma variedad M (de E), si existe un difeomorfismo $\phi : S_1 \to S_2$ tal que $f_1 = f_2 \circ \phi$. En este caso, denotamos $M = (f_1 : S_1) = (f_2 : S_2)$. A f_1 y f_2 se denominan representaciones paramétricas (o parametrizaciones) de M. Si $\lambda : E \to E$ es un difeomorfismo, entonces $\lambda(M) = (\lambda \circ f : S)$.

Si la variedad M admite una parametrización $f : S \to E$ que es incrustamiento[2], entonces todas sus parametrizaciones lo son, y se dice que M es una variedad (sumergida) *regular* en E. En este caso M puede identificarse con la imagen $f(S) = M$ que admite una única estructura de variedad diferenciable (abstracta) que hace a $f : S \to M$ difeomorfismo. La inclusión $M \hookrightarrow E$ resulta

[1] Es decir, aplicación diferenciable con diferencial inyectiva en cada punto

[2] Es decir, inmersión inyectiva que induce homeomorfismo sobre su imagen

ser entonces la representación paramétrica distinguida. Además la propiedad de ser M variedad regular de E, depende solo del conjunto $M \subset E$

Por otra parte, si $f : S \to E$ es una variedad de E, para cada $s_0 \in S$, existe un entorno S_0 de s_0 en S tal que $(f : S_0) = M_0$ es variedad regular de E. Como estamos interesados sólo en cuestiones de tipo local, supondremos en adelante que todas las variedades son regulares (o equivalentemente que trabajamos en el entorno regular de un punto). En coordenadas locales locales se tiene el siguiente resultado:

Proposición 6.1.3

Si $f : S \to E$ es una variedad p-dimensional (sumergida) en E, entonces para cada punto $s \in S$, existen un sistema de coordenadas $x = (\widetilde{x}, \widehat{x})$ de E en torno a $a = f(s)$ con $\widetilde{x} = (x_1, \ldots, x_p)$, $\widehat{x} = (x_{p+1}, \ldots, x_m)$ y $x(a) = 0$, y otro $u = (u_1, \ldots, u_p)$ en torno a s con $u(s) = \widetilde{0}$, de forma que las ecuaciones de f son

$$f : \begin{cases} \widetilde{x} = u \\ \widehat{x} = \widehat{0} \end{cases}$$

6.1.4. Orden de contacto

Proponemos una definición de que el orden de contacto sea (al menos) r en un punto, para dos variedades sumergidas en un mismo espacio ambiente. Se trata de imponer la propiedad de que los espacios tangentes de orden r de ambas variedades coincidan en el punto.

Demostramos que esta definición coincide con otras más habituales, en donde intervienen los jets de orden r de ciertas parametrizaciones de las variedades. Pero llamamos la atención de que el concepto de orden de contacto, es en todo caso, un concepto relativo a las variedades *desparametrizadas*. Concretamente:

Definición 6.1.4

Dado un punto $a = f(s) \in M$, el conjunto $T_a^r M = f^{(r)}(T_s^r S) \subset T_a^r E$ es independiente del f, S tales que $M = (f : S)$. Las variedades M, $\overline{M} = (\overline{f} : \overline{S})$ se dice que tienen un contacto de orden al menos r ($r \geq 0$) en el punto a, si $a = f(s) = \overline{f}(\overline{s}) \in M \cap \overline{M}$ y $T_a^r M = T_a^r \overline{M}$, es decir $f^{(r)}(T_s^r S) = \overline{f}^{(r)}\left(T_{\overline{s}}^r \overline{S}\right)$.Para indicar esta circunstancia escribimos $g_s^r f = g_s^r \overline{f}$.

Supuesto $m - p = c > 0$, sea $\zeta \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^c)$ el grafo de ζ es

$$M(\zeta) = \{(u, \zeta(u)) : u \in \mathbb{R}^p\}$$

define en torno a 0 una p-variedad sumergida en $\mathbb{R}^m$. Descomponiendo:

$$\mathbb{R}^m = \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^c = \left\{ x = (\widetilde{x}, \widehat{x}) \middle/ \begin{array}{c} \widetilde{x} = (x_1, \ldots, x_p) \in \mathbb{R}^p \\ \widehat{x} = (x_{p+1}, \ldots, x_m) \in \mathbb{R}^c \end{array} \right\} \tag{78}$$

Observación 6.1.4.1

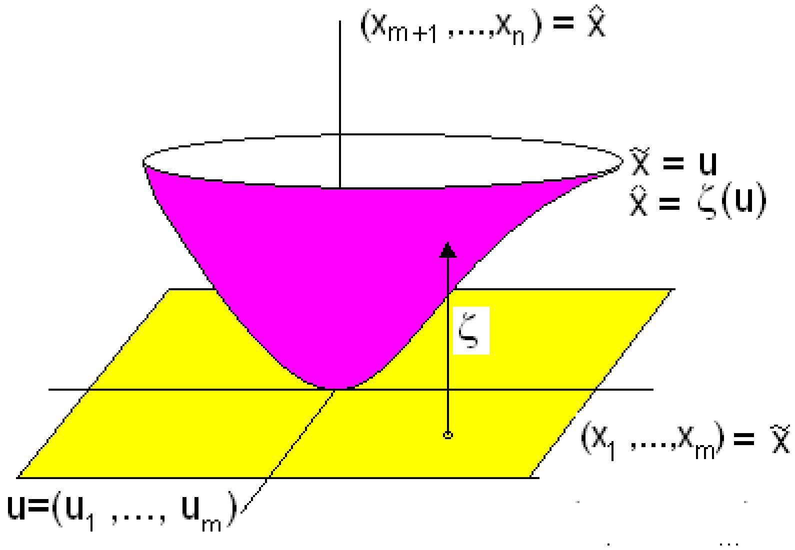
De forma más general, debemos admitir que el operador "$\widetilde{\ }$"puede obtenerse seleccionando p posiciones de las coordenadas (no necesariamente consecutivas) y el "$\widehat{\ }$"las restantes. Sin embargo, por razones de simplicidad siempre exhibiremos la descomposición dada en (78)

Se tiene el siguiente resultado

Proposición 6.1.4.1

Sea $\zeta \in \mathcal{C}_{\widetilde{0}}^\infty(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^c)$. Entonces, el orden de contacto en el origen de $M(\zeta)$ y $\mathbb{R}^p \times \left\{\widehat{0}\right\}$ es al menos r ($r \geq 0$) si y solo si $j_0^r \zeta = 0$. Es decir:

$$T_0^r M(\zeta) = T_0^r\left(\mathbb{R}^p \times \left\{\widehat{0}\right\}\right) \Leftrightarrow j_0^r \zeta = 0$$



Demostración:
Obviamente la condición $T_0 M(\zeta) = T_0\left(\mathbb{R}^p \times \left\{\widehat{0}\right\}\right)$ equivale a decir

$$\zeta\left(\widetilde{0}\right) = \widehat{0},\ \left.\frac{\partial \zeta_i}{\partial u_j}\right|_{u=0} = 0$$

En efecto, supongamos $T_0^2 M(\zeta) = T_0^2\left(\mathbb{R}^p \times \left\{\widehat{0}\right\}\right)$. Una curva en $\mathbb{R}^p \times \left\{\widehat{0}\right\}$ por el origen es de la forma

$$\begin{cases} \widetilde{x} = u(t) \\ \widehat{x} = \widehat{0} \end{cases} \quad u(0) = \widetilde{0}$$

y por tanto

$$T_0^2\left(\mathbb{R}^p \times \left\{\widehat{0}\right\}\right) = \left\{\left(0, x^{(1)}, x^{(2)}\right) : \widehat{x^1} = \widehat{x^2} = \widehat{0}\right\}$$

Una curva arbitraria por el origen contenida en $M(\zeta)$ tiene por ecuaciones

$$\begin{cases} \widetilde{x} = u(t) \\ \widehat{x} = \zeta(u(t)) \end{cases} \quad u(0) = \widetilde{0}$$

y debemos imponer $\widehat{x}'(0) = \widehat{x}''(0) = \widehat{0}$. Se tiene para $i = 1, \dots, c$

$$0 = \left.\frac{dx_{p+i}}{dt}\right|_{t=0} = \sum_{j=1}^{p} \left.\frac{\partial \zeta_i}{\partial u_j}\right|_{u=0} \left.\frac{du_j}{dt}\right|_{t=0} = \sum_{j=1}^{p} \left.\frac{\partial \zeta_i}{\partial u_j}\right|_{u=0} x_j^1$$

donde $x_j^{(1)} = u_j'(0)$ son arbitrarios. Por tanto (como ya sabíamos)

$$\left.\frac{\partial \zeta_i}{\partial u_j}\right|_{u=0} = 0,\ i = 1, \dots, c,\ j = 1, \dots, p$$

Por otra parte usando nuevamente la regla de la cadena y suprimiendo los sumandos nulos obtenidos al particularizar en $t=0$ se tiene

$$0=\left.\frac{d^2 x_{i+c}}{dt^2}\right|_{t=0}=\sum_{j,h=1}^{p}\left.\frac{\partial^2\zeta_i}{\partial u_j\partial u_k}\right|_{u=0}x_j^1 x_k^1$$

y como antes se concluye

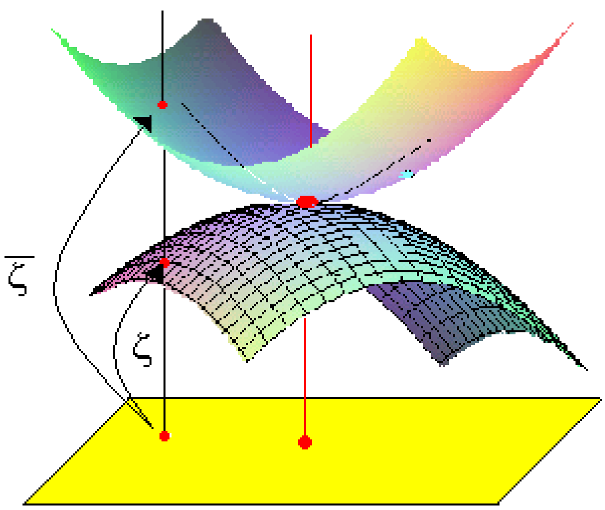
$$\left.\frac{\partial^2\zeta_i}{\partial u_j\partial u_k}\right|_{u=0}=0,\ ,\ i=1,\ldots,c,\quad j,k=1,\ldots,p$$

El razonamiento puede concluirse inductivamente.

Corolario 6.1.4.1

Sean $\zeta,\overline{\zeta}\in\mathcal{C}^{\infty}_{\widetilde{0}}(\mathbb{R}^p,\mathbb{R}^c)$. Entonces, el orden de contacto en el origen $\widetilde{0}$ de $M(\zeta)$ y $M\left(\overline{\zeta}\right)$ es al menos r $(r\geq 0)$ si y solo si $j_0^r\zeta=j_0^r\overline{\zeta}$. Es decir:

$$T_0^r M(\zeta)=T_0^r M\left(\overline{\zeta}\right)\Leftrightarrow j_0^r\zeta=j_0^r\overline{\zeta}$$



Proposición 6.1.4.2

Sean $f:S\to E$, $\overline{f}:\overline{S}\to E$, p-variedades,con $f(s)=\overline{f}(\overline{s})$, existe entonces un difeomorfismo $\phi:S\to\overline{S}$ en torno a s, con $\phi(s)=\overline{s}$ verificando la siguiente propiedad

$$f^{(r)}T_s^r S=\overline{f}^{(r)}T_{\overline{s}}^r\overline{S}\Longleftrightarrow\ j_s^r f=j_s^r\left(\overline{f}\circ\phi\right)$$

Demostración:

Usando para f la proposición 6.1.3, podemos tomar una carta $x=(\widetilde{x},\widehat{x})$ de E en torno a $a=f(s)=\overline{f}(\overline{s})$ con $\widetilde{x}=(x_1,\ldots,x_p)$, $\widehat{x}=(x_{p+1},\ldots,x_m)$ y otra carta $u=(u_1,\ldots,u_p)$ en torno a s con $x(a)=0$, $u(s)=\widetilde{0}$, de forma que las ecuaciones de f son

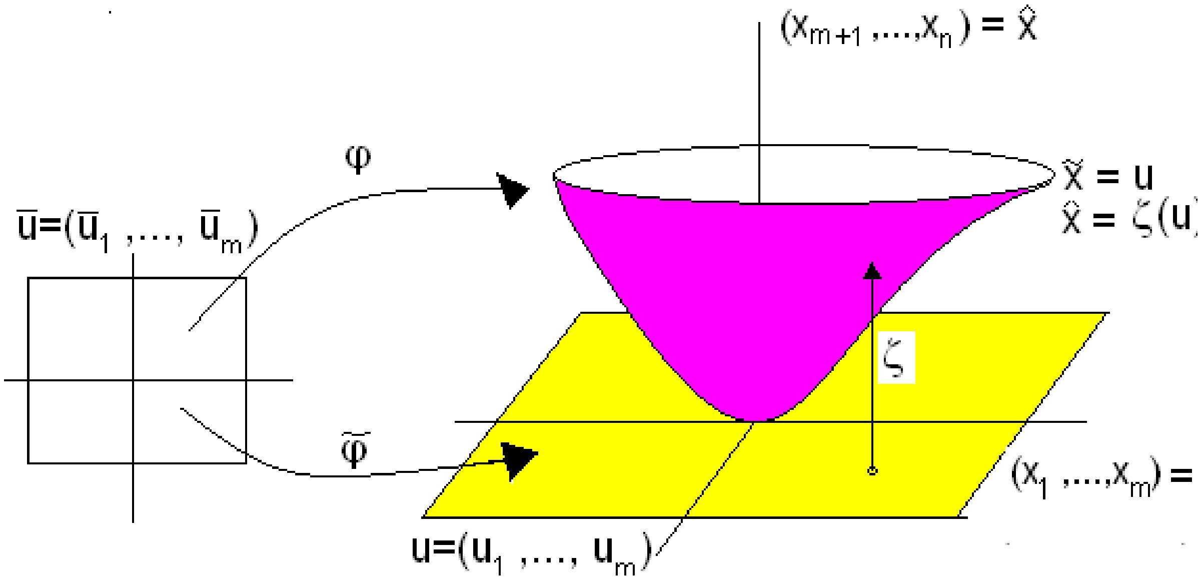
$$f:\left\{\begin{array}{l}\widetilde{x}=u\\ \widehat{x}=\widehat{0}\end{array}\right.$$

Una carta arbitraria $\overline{u} = (\overline{u}_1, \ldots, \overline{u}_p)$ por $\overline{s}$ proporciona unas ecuaciones de $\overline{f}$ de la forma $x = \varphi(\overline{u})$, y necesariamente

$$\det\left(\frac{\partial(\varphi_1, \ldots \varphi_p)}{\partial(\overline{u}_1, \ldots \overline{u}_p)}\right)_{\overline{u}=0} \neq 0$$

puesto que $f_* T_s S = \overline{f}_* T^r_{\overline{s}} \overline{S}$. Podemos construir el difeomorfismo $\widetilde{\varphi} = (\varphi_1, \ldots \varphi_p)$ en torno al origen que da lugar al difeomorfismo $\phi : S \to \overline{S}$ que respecto a las cartas u y $\overline{u}$ tiene por ecuaciones:

$$u = \widetilde{\varphi}(\overline{u})$$



y las ecuaciones de $\overline{f} \circ \phi : S \to E$ son ahora de la forma:

$$\overline{f} \circ \phi : \varphi \circ \widetilde{\varphi}^{-1} = \begin{cases} \widetilde{x} = u \\ \widehat{x} = \zeta(u) \end{cases}$$

donde $\zeta = (\zeta_1, \ldots, \zeta_c)$, ($c = m - p$ es la codimensión) es una aplicación diferenciable $\mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^c$ en torno al origen, con

$$\zeta\left(\widetilde{0}\right) = \widehat{0}$$

Nótese que $f_* T_s S = \overline{f}_* T_{\overline{s}} \overline{S}$ si y solo si

$$\left.\frac{\partial \zeta_i}{\partial u_j}\right|_{u=0} = 0$$

La demostración se concluye ahora usando la proposición **6.1.4.1**

Definición 6.1.4.

Sean $f : S \to E$, $\overline{f} : \overline{S} \to E$, p-variedades,con $f(s) = \overline{f}(\overline{s})$, al difeomorfismo $\phi : S \to \overline{S}$ en torno a s, con $\phi(s) = \overline{s}$ verificando la propiedad

$$f^{(r)}T_s^rS = \overline{f}^{(r)}T_{\overline{s}}^r\overline{S} \Longleftrightarrow j_s^rf = j_{\overline{s}}^r\left(\overline{f}\circ\phi\right)$$

se dice que está $\left[f(s) = \overline{f}(\overline{s})\right]$-adaptado.

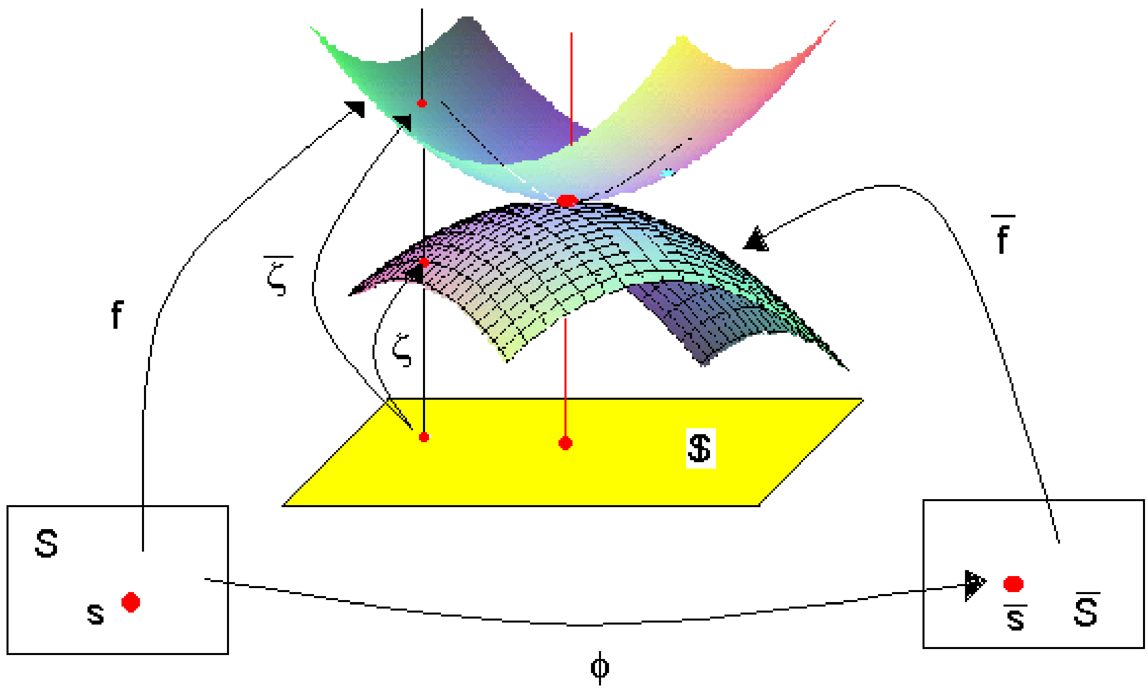
Nótese que por la demostración de la proposición **6.1.4.2** se ve que ϕ es $\left[f(s) = \overline{f}(\overline{s})\right]$-adaptado si y solo si pueden exhibirse sistemas de coordenadas $x = (x_1, \ldots x_m)$ en $E, u = (u_1, \ldots u_p)$ en S de forma que:

$$f : \left\{\begin{array}{l}\widetilde{x} = u\\ \widehat{x} = \widehat{0}\end{array}\right. ;\ \overline{f}\circ\phi : \left\{\begin{array}{l}\widetilde{x} = u\\ \widehat{x} = \zeta(u)\end{array}\right.$$

Corolario 6.1.4.2

Las variedades $M = (f : S) \to E$, $\overline{M} = \left(\overline{f} : \overline{S}\right)$ tienen orden de contacto al menos $r \geq 1$ en un punto $a \in M\cap\overline{M}$ si y solo si existe un entorno $\mathcal{U}$ de a en E coordenado por $(x_{1,\ldots,} x_m)$, un abierto $\mathbb{S}$ de $\mathbb{R}^p$ y $\zeta, \overline{\zeta} : \mathbb{S} \to E$ $(i = 1, 2)$ *de forma que $M\cap\mathcal{U} = (\zeta : \mathbb{S})$, $\overline{M}\cap\mathcal{U} = \left(\overline{\zeta} : \mathbb{S}\right)$, $\overline{\zeta}(0) = \zeta(0) = a$* y $j_o^r\zeta = j_o^r\overline{\zeta}$ *es decir, para cada $j = 1, \ldots, m$, para todo $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$ con $|\alpha| = \sum\alpha_i \leq r$ se tiene*

$$\left.\frac{\partial^{|\alpha|}(x_j\circ\zeta)}{\partial u_{\alpha_1}\ldots\partial u_{\alpha_k}}\right|_{u=0} = \left.\frac{\partial^{|\alpha|}\left(x_j\circ\overline{\zeta}\right)}{\partial u_{\alpha_1}\ldots\partial u_{\alpha_k}}\right|_{u=0}$$



6.2. Fibrados de contacto.

Lo que sigue es continuación inmediata del epígrafe 6.1.4, y constituye en nuestra opinión una herramienta imperscindible para manejar la geometría local de variedades sumergidas en un espacio homogéneo, e intuir un procedimiento genérico para abordar el problema de la clasificación.

6.2.1. Escamas de orden superior.

Se construye el fibrado $\mathcal{G}_p^r(E) \to E$ de contacto de orden r, cuya fibra en cada punto de E está constituida por todas las clases de contacto de orden al menos r en el punto, de variedades p-dimensionales. Cuando $r = 1$, obtenemos el fibrado Grassmaniano:

Fijado $a \in E$, y $\mathcal{M}_p(a, E)$ es la familia de todas las variedades p-dimensionales sumergidas en E que contienen al punto a. Entonces

$$\mathcal{G}_p^r(E; a) = \{T_a^r M : M \in \mathcal{M}_p(a, E)\}$$

es la fibra de contactoen a. Un elemento $T_a^r M \in \mathcal{G}_p^r(E; a)$ se llama escama p-dimensional de orden r, en a, y representa una clase, en la relación de equivalencia definida en $\mathcal{M}_p(a, E)$ por el contacto de orden al menos r. La fibra de contactoen a es difeomorfa a la fibra tipo

$$\mathbb{G}_{p,m}^r = \mathcal{G}_p^r(\mathbb{R}^m, 0) \tag{79}$$

Usando el corolario **6.1.4.1** es inmediata la siguiente proposición

Proposición 6.2.1.1

Supuesto $m - p = c > 0$, la aplicación

$$J_p^r(\mathbb{R}^c, 0) \to \mathbb{G}_{p,m}^r,\ j_0^r\zeta \to T_0^r M(\zeta)$$

está bien definida y da lugar a un difeomorfismo de sobre un abierto denso de $\mathbb{G}_{p,m}^r$. En particular $\mathbb{G}_{p,m}^r$ es variedad diferenciable localmente difeomorfa a $J_p^r(\mathbb{R}^c, 0)$.

Y en consecuencia se tiene:

Corolario 6.2.1.1

El espacio de contacto $\mathcal{G}_p^r(E; a)$ tiene estructura natural de variedad diferenciable, y

$$\mathcal{G}_p^r(E) = \cup_{a\in E}\mathcal{G}_p^r(E; a) \to E$$

tiene estructura natural de fibrado sobre E. Es el fibrado p-escamas de orden r sobre E (con fibra tipo $\mathbb{G}_{p,m}^r$).

Notaciones 6.2.1

- Fijado $a \in E$, hay una sucesión natural de fibrados:

$$\mathcal{G}_p^{r+1}(E; a) \xrightarrow{\downarrow} \mathcal{G}_p^r(E; a) \to \cdots \xrightarrow{\downarrow} \mathcal{G}_p^1(E; a) \to \{a\}$$

  y también

$$\mathcal{G}_p^{r+1}(E) \xrightarrow{\downarrow} \mathcal{G}_p^r(E) \to \cdots \xrightarrow{\downarrow} \mathcal{G}_p^1(E) \to E$$

- Fijado un subconjunto $\mathcal{A} \subset E$ denotamos

$$\mathcal{G}_p^r(E; \mathcal{A}) = \cup_{a\in\mathcal{A}}\mathcal{G}_p^r(E; a)$$

- Fijado un subconjunto $\mathcal{O}^k \subset \mathcal{G}_p^k(E)$ y supuesto $r \geq k$ se denota por

$$\mathcal{G}_p^r\left(E; \mathcal{O}^k\right) = \left\{\sigma \in \mathcal{G}_p^r(E) : \downarrow^{r-k} \sigma \in \mathcal{O}^k\right\}$$

6.2.2. Carácter funtorial

Si $f : S \to E$ donde S es una variedad diferenciable p-dimensional, para cada $s \in S$, denotamos $g_s^r f = f^{(r)}(T_s^r S) \in \mathcal{G}_p^r(E, f(s))$.

Así si $\overline{f} : \overline{S} \to E$ es otra variedad escribir $g_s^r f = g_{\overline{s}}^r \overline{f}$ equivale a decir que tienen contacto de orden al menos r.

Proposición 6.2.2

Fijada la variedad $f : S \to E$ se considera la aplicación $g^r f : S \to \mathcal{G}_p^r(E)$, $s \to g_s^r f$ .Si $\overline{f} : \overline{S} \to E$ es otra variedad se tiene:

1. *Si $\phi : S \to \overline{S}$ es difeomorfismo, entonces*
$$g_s^r\left(\overline{f} \circ \phi\right) = g_{\phi(s)}^r\left(\overline{f}\right) \tag{80}$$
2. *Si $\Phi : E \to E'$ es una inmersión entre variedades (de dimensiones $> p$) y $g_s^r f = g_{\overline{s}}^r \overline{f}$ entonces $g_s^r(\Phi \circ f) = g_{\overline{s}}^r\left(\Phi \circ \overline{f}\right)$*
Por tanto la inmersión $\Phi : E \to E'$ induce de forma natural una inmersión $\mathcal{G}_p^r \Phi : \mathcal{G}_p^r(E) \to \mathcal{G}_p^r(E')$, definida sin ambigüedad por
$$\left(\mathcal{G}_p^r \Phi\right)(T_a^r M) = T_{\Phi(a)}^r \Phi(M) \tag{81}$$
con la propiedad funtorial correspondiente
$$\mathcal{G}_p^r(\Psi \circ \Phi) = \mathcal{G}_p^r \Phi \circ \mathcal{G}_p^r \Psi$$
para $\Psi : E' \to E''$, $\Phi : E \to E'$inmersiones entre variedades. En particular, si Φ es difeomorfismo, entonces $\mathcal{G}_p^r \Phi$ lo es.

6.2.3. Grassmanianas

Nótese que $\mathcal{G}_p^1(E; a) = \{T_a M : M \in \mathcal{M}_p(a, E)\}$ es exactamente la Grassmaniana $\mathbb{G}_p(T_a E)$ de p-planos de $T_a E$. Veamos como pueden darse parametrizaciones locales del fibrado Grassmanniano $\mathcal{G}_p^1(E)$

La fibra modelo $\mathbb{G}_{p,m} = \mathbb{G}_{p,m}^1 = \mathbb{G}_p(\mathbb{R}^m)$ es una variedad diferenciable de dimensión $p(m-p)$. Una p-étupla $(X_1, \dots X_p)$ de vectores de $\mathbb{R}^m$ (l.ind.) puede describirse por las columnas de una matriz $m \times p$ de rango máximo p

$$(X_1, \dots X_p) = X = \begin{pmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{m1} & \cdots & x_{mp} \end{pmatrix}$$

denotando por $[X] \in \mathbb{G}_{p,m}^r$ el $p-$plano generado por X se tiene_

$$[X] = [Y] \Leftrightarrow \exists A \in \mathbb{R}^{p \times p} \text{ no singular con } XA = Y$$

escribiendo

$$X = \begin{pmatrix} \widetilde{X} \\ \widehat{X} \end{pmatrix} \text{ con } \widetilde{X} = \begin{pmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{p1} & \cdots & x_{pp} \end{pmatrix}, \widehat{X} = \begin{pmatrix} x_{p+1,1} & \cdots & x_{p+1,p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{m1} & \cdots & x_{mp} \end{pmatrix}$$

y suponiendo $\det \widetilde{X} \neq 0$ tenemos

$$[X] = \begin{bmatrix} I \\ \widehat{X}\widetilde{X}^{-1} \end{bmatrix} \text{ con } I = \text{ matriz identidad en } \mathbb{R}^{p \times p}$$

Llamando $k = m - p$ La aplicación

$$\mathbb{R}^{(m-p)\times m} \ni Z \to \begin{bmatrix} I \\ Z \end{bmatrix} \in \mathbb{G}_{p,m}$$

constituye una parametrización (no global!) de $\mathbb{G}_{p,m}$. Otras parametrizaciones análogas se obtienen por selección de otros menores de rango máximo.

Con este criterio, si $x = (x_1, \ldots, x_m)$ es un sistema de coordenadas locales para E entonces es posible construir a partir de él, un sistema de coordenadas (x, X) , con $X = (x_{i\lambda}) = 1 \leq i \leq m,\ 1 \leq \lambda \leq m - p$ en $\mathcal{G}_p^1(E)$ donde para $\sigma \in \mathbb{G}_p(T_a E)$ es $x(\sigma) = x(a)$ y

$$\sigma = Spam\left(\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_m}\right)_a \begin{pmatrix} I \\ X(\sigma) \end{pmatrix}\right)$$

Proposición 6.2.3.1

a) *Si $f : S \to E$ es $p-$variedad, entonces $g^1 f : S \to \mathcal{G}_p^1(E)$ es $p-$variedad.*

b) *Si $f, \widetilde{f} : S \to E$* son *$p-$variedades, se tiene para $k \geq 1$,*

$$j_s^{k+1} f = j_s^{k+1} \widetilde{f} \Longrightarrow j_s^k\left(g^1 f\right) = j_s^k\left(g^1 \widetilde{f}\right)$$

Demostración:

a) Por la proposición 6.1.3 existen un sistema de coordenadas $x = (\widetilde{x}, \widehat{x})$ de E en torno a $a = f(s)$ con $\widetilde{x} = (x_1, \ldots, x_p)$, $\widehat{x} = (x_{p+1}, \ldots, x_m)$ y $x(a) = 0$, y otro $u = (u_1, \ldots, u_p)$ en torno a s con $u(s) = \widetilde{0}$, de forma que las ecuaciones de f son

$$f : \begin{cases} \widetilde{x} = u \\ \widehat{x} = \widehat{0} \end{cases}$$

Tomando las coordenadas (x, X) para $\mathcal{G}_p^1(E)$ como en el apartado 6.2.3 se concluye que las ecuaciones de $g^1 f : S \to \mathcal{G}_p^1(E)$ en estas coordenadas son

$$g^1 f : \begin{cases} \widetilde{x} = u \\ \widehat{x} = \widehat{0} \\ X = 0 \end{cases}$$

y por tanto $g^1 f : S \to \mathcal{G}_p^1(E)$ es p-variedad.

b) Tomando para f las coordenadas $x = (\widetilde{x}, \widehat{x})$ de E en torno a $a = f(s)$ y las $u = (u_1, \ldots, u_p)$ en torno a s del apartado a) al ser $j_s^1 f = j_s^1 \widetilde{f}$ se concluye como en la proposición 6.1.3 (ver también la figura) que las ecuaciones de $\widetilde{f}$ en estas coordenadas es de la forma

$$\widetilde{f} = \begin{cases} \widetilde{x} = u \\ \widehat{x} = \zeta(u) \end{cases}$$

donde $\zeta = (\zeta_1, \ldots, \zeta_c)$, $(c = m - p)$ es una aplicación diferenciable $\mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^k$ en torno al origen, con

$$\zeta\left(\widetilde{0}\right) = \widehat{0},\ \left.\frac{\partial \zeta_\lambda}{\partial u_\alpha}\right|_{u=0} = 0$$

Las ecuaciones en las coordenadas (x, X) y u de $g^1\widetilde{f}$ son

$$g^1\widetilde{f}: \begin{cases} \widetilde{x} = u \\ \widehat{x} = \zeta(u) \\ X = D\zeta \end{cases}, \text{ con } D\zeta = \begin{pmatrix} \frac{\partial \zeta_1}{\partial u_1} & \cdots & \frac{\partial \zeta_1}{\partial u_p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \zeta_c}{\partial u_1} & \cdots & \frac{\partial \zeta_c}{\partial u_p} \end{pmatrix}$$

Por tanto

$$j_s^{k+1} f = j_s^{k+1}\widetilde{f} \Leftrightarrow j_{\widetilde{0}}^{k+1}\zeta = 0 \Leftrightarrow j_{\widetilde{0}}^{k}(D\zeta) = 0 \Leftrightarrow j_s^k\left(g^1 f\right) = j_s^k\left(g^1\widetilde{f}\right)$$

En particular, hemos demostrado tambien que:

Corolario 6.2.3.1

Sean $f : S \to E$, $\overline{f} : \overline{S} \to E$ p-variedades, tales que $g_s^1 f = g_{\overline{s}}^1 \overline{f}$ y sea $\phi : S \to \overline{S}$ un difeomorfismo $\left[f(s) = \overline{f}(\overline{s})\right]$-adaptado (según Definición **6.1.4**). *Entonces también ϕ está $\left[g_s^1 f = g_{\overline{s}}^1 \overline{f}\right]$-adaptado, es decir:*

$$g_s^k\left(g^1 f\right) = g_{\overline{s}}^k\left(g^1 \overline{f}\right) \Rightarrow j_s^k\left(g^1 f\right) = j_s^k\left(g^1\left(\overline{f}\circ\phi\right)\right)$$

Corolario 6.2.3.2

Para $k \geq 1$ son equivalentes las siguientes afirmaciones:

i) $g_s^{k+1} f = g_{\overline{s}}^{k+1} \overline{f}$

ii) $g_s^k\left(g^1 f\right) = g_{\overline{s}}^k\left(g^1 \overline{f}\right)$

Demostración:

Sea $\phi : S \to \overline{S}$ un difeomorfismo $\left[f(s) = \overline{f}(\overline{s})\right]$-adaptado. (según Definición **6.1.4**)

$\Leftrightarrow$

$$\begin{array}{l} g_s^{k+1} f = g_{\overline{s}}^{k+1} \overline{f} \\ \Updownarrow \text{ Prop } \mathbf{6.1.4} \\ j_s^{k+1} f = j_s^{k+1}\left(\overline{f}\circ\phi\right) \\ \Updownarrow \text{ Prop } \mathbf{6.2.3.1\ b)} \\ j_s^k\left(g^1 f\right) = j_s^k\left(g^1\left(\overline{f}\circ\phi\right)\right) = j_s^k\left(g^1\left(\overline{f}\right)\circ\phi\right) \\ \Updownarrow \text{ Cor.}\mathbf{6.2.3.1} \\ g_s^k\left(g^1 f\right) = g_{\overline{s}}^k\left(g^1 \overline{f}\right) \end{array}$$

Proposición 6.2.3.2

La aplicación $\mathcal{G}_p^{k+1}(E) \to \mathcal{G}_p^k\left(\mathcal{G}_p^1(E)\right)$ definida por $g_s^{k+1} f \to g_s^k\left(g^1 f\right)$ (para $f : S \to E$, p-variedad) está bien definida y sumerge canónicamente a $\mathcal{G}_p^{k+1}(E)$ como subvariedad de $\mathcal{G}_p^k\left(\mathcal{G}_p^1(E)\right)$.

Demostración:

La aplicación $\mathcal{G}_p^{k+1}(E) \to \mathcal{G}_p^k\left(\mathcal{G}_p^1(E)\right)$ definida por $g_s^{k+1} f \to g_s^k\left(g^1 f\right)$ está bien definida ya que si $g_s^{k+1} f = g_{\overline{s}}^{k+1} \overline{f}$ para otra $\overline{f} : \overline{S} \to E$, entonces por la Prop. **6.1.4.2** existe un difeomorfismo $\phi : S \to \overline{S}$ en torno a s, con $\phi(s) = \overline{s}$ verificando la propiedad $j_s^{k+1} f = j_s^{k+1}\left(\overline{f}\circ\phi\right)$ y por la Prop. **6.2.3.1 b)** es $j_s^k\left(g^1 f\right) = j_s^k\left(g^1\left(\overline{f}\circ\phi\right)\right) = j_s^k\left(g^1\left(\overline{f}\right)\circ\phi\right)$, y esto implica que $g_s^k\left(g^1 f\right) = g_s^k\left(g^1\left(\overline{f}\right)\circ\phi\right) = g_{\phi(s)}^k\left(g^1\left(\overline{f}\right)\right)$

Probémoslo (para tantear) para la aplicación $\mathcal{G}_p^2(E) \to \mathcal{G}_p^1\left(\mathcal{G}_p^1(E)\right)$ definida por $g_s^2 f \to g_s^1\left(g^1 f\right)$

En lo que sigue los indices i, j varían de 1 a m. Mientras que α, β varían de 1 a p, y los λ, μ de 1 a $c = m - p$.

A partir de un sistema de coordenadas $(x_i) = (\widetilde{x}, \widehat{x})$ de E donde $\widetilde{x} = (x_\alpha)$ $\widehat{x} = \left(x^\lambda\right)$ en torno a $a = f(s)$ puede construirse un sistemas de coordenadas en $\mathcal{G}_p^2(E)$ de la forma $\left(\left(x_a, x^\lambda\right), \left(x_\alpha^\lambda\right), \left(x_{\alpha\beta}^\lambda\right)_{\alpha\leq\beta}\right)$, de manera que fijado un sistema de coordenadas $u = (u_\alpha)$ en S en torno a s respecto al cual f tiene por ecuaciones

$$f : \begin{cases} x_\alpha = u_\alpha \\ x^\lambda = \zeta_\lambda(u_\alpha) \end{cases}$$

Así $g^1 f$ y $g^2 f$ se escriben

$$g^1 f : \begin{cases} x_\alpha = u_\alpha \\ x^\lambda = \zeta_\lambda(u_\alpha) \\ x_\alpha^\lambda = \frac{\partial\zeta_\lambda}{\partial u_\alpha} \end{cases} \quad , \; g^2 f : \begin{cases} x_\alpha = u_\alpha \\ x^\lambda = \zeta_\lambda(u_\alpha) \\ x_\alpha^\lambda = \frac{\partial\zeta_\lambda}{\partial u_\alpha} \\ x_{\alpha\beta}^\lambda = \frac{\partial^2\zeta_\lambda}{\partial u_\alpha \partial u_\beta} \end{cases} \tag{82}$$

Por otra parte, las coordenadas $\left(\left(x_\alpha, x^\lambda\right), \left(x_\alpha^\lambda\right)\right)$ de $\mathcal{G}_p^1(E)$ permiten fabricar por reiteración coordenadas en $\mathcal{G}_p^1\left(\mathcal{G}_p^1(E)\right)$, que las denotamos por $\left(\left(y_\alpha, y^\lambda\right), \left(y^{\lambda\gamma}\right), \left(y_\alpha^{\lambda\gamma}\right)\right)$, de forma que para una inmersión $F : S \to \mathcal{G}_p^1(E)$ general con ecuaciones

$$F : \begin{cases} x_\alpha = u_\alpha \\ x^\lambda = \zeta_\lambda(u_\alpha) \\ x_\alpha^\lambda = \zeta_{\lambda\gamma}(u_\alpha) \end{cases}$$

las cuaciones de $g^1 F : S \to \mathcal{G}_p^1\left(\mathcal{G}_p^1(E)\right)$ sean:

$$g^1 F : \begin{cases} y_\alpha = u_\alpha \\ y^\lambda = \zeta_\lambda(u_\alpha) \\ y^{\lambda\gamma} = \zeta_{\lambda\gamma}(u_\alpha) \\ y_\alpha^\lambda = \frac{\partial\zeta_\lambda}{\partial u_\alpha} \\ y_\alpha^{\lambda\gamma} = \frac{\partial^2\zeta_{\lambda\gamma}}{\partial u_\alpha} \end{cases}$$

En particular $g^1\left(g^1 f\right)$ tendrá ecuaciones de la forma:

$$g^1\left(g^1 f\right) : \begin{cases} y_\alpha = u_\alpha \\ y^\lambda = \zeta_\lambda(u_\alpha) \\ y^{\lambda\gamma} = \frac{\partial\zeta_\lambda}{\partial u_\gamma} \\ y_\alpha^\lambda = \frac{\partial\zeta_\lambda}{\partial u_\alpha} \\ y_\alpha^{\lambda\gamma} = \frac{\partial^2\zeta_\lambda}{\partial u_\alpha \partial u_\gamma} \end{cases} \tag{83}$$

Así teniendo en cuenta (82) y (83) las ecuaciones locales de la aplicación $\mathcal{G}_p^2(E) \to \mathcal{G}_p^1\left(\mathcal{G}_p^1(E)\right)$, $g_s^2 f \to g_s^1\left(g^1 f\right)$

$$\left(\left(x_\alpha, x^\lambda\right), \left(x_\alpha^\lambda\right), \left(x_{\alpha\beta}^\lambda\right)_{\alpha\leq\beta}\right) \to \left(\left(y_\alpha, y^\lambda\right), \left(y^{\lambda\gamma}\right), \left(y_\alpha^\lambda\right), \left(y_\alpha^{\lambda\gamma}\right)_{\alpha\leq\beta}\right)$$

queda

$$y_\alpha = x_\alpha,\; y^\lambda = x^\lambda,\; y^{\lambda\gamma} = x_\gamma^\lambda,\; y_\alpha^\lambda = x_\alpha^\lambda,\; y_\alpha^{\lambda\gamma} = x_{\alpha\gamma}^\lambda$$

y los elementos $\mathcal{G}_p^1\left(\mathcal{G}_p^1(E)\right)$ que *son* escamas de orden 2 se caracterizan por la condición

$$y^{\lambda\gamma} = y_\gamma^\lambda$$

Este argumento se generaliza fácilmente para un valor de k arbitrario, en donde las ecuaciones finales de la transformación $\mathcal{G}_p^{k+1}(E) \to \mathcal{G}_p^k\left(\mathcal{G}_p^1(E)\right)$ serían:

$y_\alpha = x_\alpha$	$y^\lambda = x^\lambda$	$y^{\lambda\gamma} = x_\gamma^\lambda$	$y_\alpha^\lambda = x_\alpha^\lambda$
$y_\alpha^{\lambda\gamma} = x_{\alpha\gamma}^\lambda$	$\ldots$	$y_{\alpha_1\ldots\alpha_k}^\lambda = x_{\alpha_1\ldots\alpha_k}^\lambda$	$y_{\alpha_1\ldots\alpha_k}^{\lambda\gamma} = x_{\alpha_1\ldots\alpha_k\gamma}^\lambda$

y efectivamente dan lugar a una inmersión (local).

6.2.4. Escamas y Grassmanianas

Veremos que el fibrado de contactode orden $r+1$, $\mathcal{G}_p^{r+1}(E)$ puede sumergirse canonicamente en la Grassmaniana de las escamas de órden anterior $\mathcal{G}_p^1(\mathcal{G}^r(E))$ gracias a la identificación $g^1(g^r f) = g^{r+1} f$. La formalización de este hecho viene establecida en el siguiente teorema:

Teorema 6.2.4

a) *Si $f : S \to E$ es $p-$variedad, entonces $g^r f : S \to \mathcal{G}_p^r(E)$ es $p-$variedad.*

b) *Sean $f, \widetilde{f} : S \to E$, definiendo p-variedades. Se tiene la implicación*

$$j_s^{r+1} f = j_s^{r+1} \widetilde{f} \Longrightarrow j_s^1(g^r f) = j_s^1\left(g^r \widetilde{f}\right)$$

c) *Hay una inmersión canónica:*

$$\mathcal{G}_p^{r+1}(E) \hookrightarrow \mathcal{G}^1(\mathcal{G}^r(E))$$

definida según el esquema

$$g_s^{r+1} f \to g_s^1(g^r f)$$

para cada p-variedad $f : S \to E$

Demostración:

Se hace por inducción sobre r. La prueba del Teorema para $r = 1$ está ya concluida:

a) Ver Proposición **6.2.3.1 a)**

b) Ver Proposición **6.2.3.1 b)**

c) Ver Corolario **6.2.3.2** para $k = 1$

Supuesto probado el Teorema, para $r \geq 1$, probemos el Teorema para $r+1$. Tenemos

a) Si $f : S \to E$ es $p-$variedad, entonces por la proposición **6.2.3.1 a)** es $g^1 f : S \to \mathcal{G}_p^1(E)$ es variedad. Por la hipótesis de inducción y la proposición **6.2.3.2** se tiene que $g^r\left(g^1 f\right) = g^{r+1} f : S \to \mathcal{G}_p^{r+1}(E) \hookrightarrow \mathcal{G}_p^r\left(\mathcal{G}_p^1(E)\right)$ es variedad.

b) Sean $f, \widetilde{f} : S \to E$, definiendo p-variedades. Tenemos:

$$j_s^{r+2} f = j_s^{r+2} \widetilde{f}$$
$$\Downarrow \text{ Prop. } \mathbf{6.2.3.1\ b)}$$
$$j_s^{r+1}\left(g^1 f\right) = j_s^{r+1}\left(g^1 \widetilde{f}\right)$$
$$\Downarrow \text{ Hip. Induc.}$$
$$j_s^1\left(g^r\left(g^1 f\right)\right) = j_s^1\left(g^r\left(g^1 \widetilde{f}\right)\right)$$
$$\Downarrow \text{ Prop.} \mathbf{6.2.3.2}$$
$$j_s^1\left(g^{r+1} f\right) = j_s^1\left(g^{r+1} \widetilde{f}\right)$$

c) Por la hipótesis de inducción tenemos para $1 \leq k \leq r$ la inclusión $g_s^{k+1}f \rightarrow g_s^1\left(g^k f\right)$

$$\mathcal{G}_p^{k+1}(E) \hookrightarrow \mathcal{G}_p^1\left(\mathcal{G}_p^k(E)\right),\ g_s^{k+1}f \rightarrow g_s^1\left(g^k f\right)$$

que da lugar, por la proposición **6.2.2** a la inclusión

$$\begin{array}{c} \mathcal{G}_p^{r-k}\left(\mathcal{G}_p^{k+1}(E)\right) \hookrightarrow \mathcal{G}_p^{r-k}\left(\mathcal{G}_p^1\left(\mathcal{G}_p^k(E)\right)\right) \\ g_s^{r-k}\left(g^{k+1}f\right) \rightarrow g_s^{r-k}\left(g^1\left(g^k f\right)\right) \end{array} \tag{84}$$

Por la Prop. **6.2.3.2** tenemos

$$\begin{array}{c} \mathcal{G}_p^{r-k+1}\left(\mathcal{G}_p^k(E)\right) \hookrightarrow \mathcal{G}_p^{r-k}\left(\mathcal{G}_p^1\left(\mathcal{G}_p^k(E)\right)\right) \\ g_s^{r-k+1}\left(g^k f\right) \rightarrow g_s^{r-k}\left(g^1\left(g^k f\right)\right) \end{array}$$

lo cual significa que la imagen de la inclusión (84) cae en $\mathcal{G}_p^{r-k+1}\left(\mathcal{G}_p^k(E)\right)$ y se tienen así la cadena de inmersiones canónicas

$$\mathcal{G}_p^{r+1}(E) \hookrightarrow \mathcal{G}_p^r\left(\mathcal{G}_p^1(E)\right) \hookrightarrow \cdots \hookrightarrow \mathcal{G}_p^{r-k}\left(\mathcal{G}_p^{k+1}(E)\right) \hookrightarrow \cdots \hookrightarrow \mathcal{G}_p^1\left(\mathcal{G}_p^r(E)\right) \tag{85}$$

definidas según el esquema

$$g_s^{r+1}f \rightarrow g_s^r\left(g^1 f\right) \rightarrow \cdots \rightarrow g_s^{r-k}\left(g^{k+1}f\right) \rightarrow \cdots \rightarrow g_s^1\left(g^r f\right)$$

Nuevamente por la Prop. **6.2.3.2** tenemos

$$\mathcal{G}_p^{r+2}(E) \hookrightarrow \mathcal{G}_p^{r+1}\left(\mathcal{G}_p^1(E)\right) \tag{86}$$

Aplicando e(85) en el paso inicial $g^1 f : S \rightarrow \mathcal{G}^1(E)$ y teniendo en cuenta (86) se tiene:

$$\begin{array}{l} \mathcal{G}_p^{r+2}(E) \hookrightarrow \mathcal{G}_p^{r+1}\left(\mathcal{G}_p^1(E)\right) \hookrightarrow \mathcal{G}_p^r\left(\mathcal{G}_p^1\left(\mathcal{G}_p^1(E)\right)\right) \hookrightarrow \\ \cdots \hookrightarrow \mathcal{G}_p^{r-k}\left(\mathcal{G}_p^{k+1}\left(\mathcal{G}_p^1(E)\right)\right) \hookrightarrow \cdots \hookrightarrow \mathcal{G}_p^1\left(\mathcal{G}_p^r\left(\mathcal{G}_p^1(E)\right)\right) \end{array}$$

y por composición queda una inmersión $\mathcal{G}_p^{r+2}(E) \hookrightarrow \mathcal{G}_p^1\left(\mathcal{G}_p^r\left(\mathcal{G}_p^1(E)\right)\right)$ con $g_s^{r+2}f \rightarrow g_s^1\left(g^r\left(g^1 f\right)\right) = g_s^1\left(g^{r+1}f\right)$, (la última igualdad justificada de nuevo por la Prop. **6.2.3.2**), y tenemos ya la inmersión:

$$\mathcal{G}_p^{r+2}(E) \hookrightarrow \mathcal{G}_p^1\left(\mathcal{G}_p^{r+1}(E)\right),\ g_s^{r+2}f \rightarrow g_s^1\left(g^{r+1}f\right)$$

6.3. Acciones y fibrados homogeneos

6.3.1. Acción. Tipos de acción.

Un grupo G actúa (por la izquierda) sobre un conjunto X, si hay definida una aplicación

$$\lambda : G \times X \ni (A, x) \to \lambda (A, x) = A.x \in X \tag{87}$$

verificando las propiedades habituales

a) $(AB).x = A.(B.x)$, para todo $A, B \in G$ y todo $x \in X$

b) $e.x = x$, para todo $x \in X$, siendo $e \in G$ el elemento neutro del grupoHay un homomorfismo natural también denominado λ, del grupo G sobre el grupo $X!$ de biyecciones de X que hace corresponder a cada $A \in G$, $\lambda_A \in X!$ con $\lambda_A (x) = A.x$ para todo $x \in X$.

Acción fiel. La acción se dice *fiel* si el elemento neutro $e \in G$, es el único elemento del grupo que deja fijos todos los elementos de X. En este caso y solo en este caso, λ es un monomorfismo que permite identificar G con un subgrupo de $X!$.

Acción libre. Se dice que la acción es *libre* si el elemento neutro $e \in G$ es el único elemento del grupo que deja fijo algún elemento de X, es decir, $\exists x$, $A.x = B.x \Longrightarrow A = B$

Acción transitiva. Diremos que la acción es *transitiva* si para todo $x, y \in X$, existe $A \in G$ con $A.x = y$..

Acción trivial. Un punto x se dice G-estacionario si $G.x = \{x\}$. X^G denota el conjunto de puntos G-estacionarios. La acción es *trivial* si $X^G = X$.

Acción diferenciable. La acción se dice diferenciable en el supuesto de que G sea un grupo de Lie, y X sea una variedad diferenciable, y la aplicación (87) sea diferenciable. La aplicación $\lambda : A \to \lambda_A$ define entonces un homomorfismo de G en el grupo $Difeo(E)$ de difeomorfismos de E. El grupo $\lambda G = im\lambda$ es un grupo de Lie canónicamente difeomorfo al grupo de lie $G/Ker\lambda$ mediante la aplicación (denotada también por λ) $\lambda : G/Ker\lambda \ni AKer\lambda \to \lambda_A \in G$.

Representación lineal. Si $X = V$ es espacio vectorial y $\lambda_A \in GL(V)$, para todo A, se denomina a $\lambda : G \to GL(V)$ representación lineal. Si $\mathbf{x} : V \to \mathbb{R}^m$ es un sistema de coordenadas lineales de V, entonces $\lambda^{\mathbf{x}} : G \to GL(\mathbb{R}^m)$ es la representación lineal en coordenadas inducida por las coordenadas $\mathbf{x}$, es decir $\lambda_A^{\mathbf{x}} (\mathbf{x}v) = \lambda_A (v)$.

6.3.2. G-espacios.

Tenemos ahora una acción fija $\lambda : G \times X \to X$ como en (87). Se dice entonces que X es un G-espacio y es diferenciable (ó topológico) si la acción es diferenciable (ó topológica).

Órbitas y espacio de órbitas. Fijado $x \in X$ llamamos a

$$G.x = \{A.x : A \in G\}$$

órbita de x. Denotamos por $G \backslash X$ al espacio de las órbitas

Subconjuntos G-invariantes. Un subconjunto $\mathcal{E}$ de X se llama G-invariante, si $A.x \in \mathcal{E}$, para todo $A \in G$ y todo $x \in \mathcal{E}$. Es decir $G.\mathcal{E} \subset \mathcal{E}$. Nótese que entonces tenemos una acción restringida $G \times \mathcal{E} \ni (A, x) \to A.x \in \mathcal{E}$, y $G \backslash \mathcal{E} \subset G \backslash X$
.

Grupo de isotropía. El grupo de isotropía de un punto $x \in X$, es el subgrupo G_x de las transformaciones de G que dejan fijo el punto x, es decir:

$$G_x = \{A \in G : A.x = x\}$$

Nótese que si $A \in G$, es tal que $A.x = y$ entonces $G_y = AG_xA^{-1}$, y todos los grupos de isotropía de una misma órbita $E \in G \backslash X$ son conjugados.

Subespacios tipo G/[H]. Un subgrupo H de G, es de isotropía si lo es para algún $x \in X$. Denotamos por $[H]_G$ (o simplemente $[H]$, si se sobrentiende G) a la familia de todos los subgrupos de G conjugados con H.

Cabe pensar en el conjunto $X_{[H]}$ de todos los elementos de X cuyo grupo de isotropía (respecto a la acción (87)) es G-conjugado con H. Se denomina a $X_{[H]}$ subespacio de $[H]$- isotropía de X. Nótese que $X_{[H]}$ es necesariamente G-invariante.

Si $X = X_{[H]}$ se dice que X es un G-espacio tipo $G/[H]$

6.3.3. G-variedades.

Supóngase ahora que X es un G-espacio diferenciable, bajo la acción (87).

Secciones locales. Una subvariedad W de X, se llama H-sección local de la acción si

1. H es grupo de isotropia de cada punto de W (es decir $G_w = H$ para todo $w \in W$)
2. W corta transversalmente a lo más una vez a cada órbita, es decir:

$$\left.\begin{array}{l}(G.w) \cap W = \{w\} \\ T_w(G.w) \cap T_wW = \{0\}\end{array}\right\}, \forall w \in W$$

Observese que entonces $G.W = \{A.w : A \in G, w \in W\}$ es una subvariedad G-invariante difeomorfa a $G/H \times W$ mediante el difeomorfismo:

$$G/H \times W \ni (AH, o) \to G.W$$

Nótese que si W es una H-sección de X , y W_1 es subvariedad de W entonces W_1 también es H-sección de X.

Subespacios fibrados homogeneos?? Una subvariedad G-invariante $\mathcal{E}$ de X se llama subespacio fibrado homogeneo, si $\mathcal{E}$ está contenido en algún subespacio de isotropía $X_{[H]}$ y para cada punto $e \in \mathcal{E}$ existe una H-sección $\mathcal{O}$ de la acción tal que $G.\mathcal{O}$ es abierto de $\mathcal{E}$. Se dice entonces que $\mathcal{O}$ es una H-reducción (local) de $\mathcal{E}$. Nótese que en este caso la aplicación

$$G/H \times \mathcal{O} \ni (AH, o) \to A.o \in \mathcal{E}$$

define una reducción (o trivialización) local.

Definición de G-variedad. Se dice el G-espacio diferenciable X es una G-variedad si para cualquier subgrupo de isotropía H de G , $X_{[H]}$ es un subespacio fibrado homogeneo.

Proposición 52 *Si G es un grupo de Lie compacto, y X es G-espacio diferenciable, entonces X es G-variedad.*

6.3.4. Fibrados homogeneos.

Técnicamente, un fibrado homogeneo tipo $G/[H]$ es una G-variedad $\mathcal{E}$, cuyos grupos de isotropía son todos conjugados con H. Recuerdese que denotamos por $[H]$ a la familia de subgrupos G-conjugados con H.

Sea $G \times \mathcal{E} \ni (A, x) \to \lambda_A(x) = A.x \in \mathcal{E}$ una acción diferenciable por la izquierda del grupo de Lie G sobre la variedad diferenciable $\mathcal{E}$, y H subgrupo cerrado de G. Diremos que es un G-espacio tipo $G/[H]$ si todos los grupos de isotropía están en $[H]$. En estas condiciones, fijado un $H \in [H]$, una subvariedad $\mathcal{O}$ de $\mathcal{E}$, se llama H-reducción local de $\mathcal{E}$ si es H-sección local de la acción y $G.\mathcal{O}$ es abierto de $\mathcal{E}$, es decir:

1. H es grupo de isotropia de cada punto de $\mathcal{O}$ (es decir $G_o = H$ para todo $o \in \mathcal{O}$)
2. $G.\mathcal{O} = \{A.o : A \in G\}$ es un abierto de $\mathcal{E}$.
3. $\mathcal{O}$ corta transversalmente a lo más una vez a cada órbita, es decir: $(G.o) \cap \mathcal{O} = \{o\}$, y $T_o(G.o) \cap T_o\mathcal{O} = \{0\}$ para todo $o \in \mathcal{O}$

Se prueba entonces que la aplicación

$$G/H \times \mathcal{O} \ni (AH, o) \to A.o \in \mathcal{E}$$

es un difeomorfismo local.

Finalmente se dice que $\mathcal{E}$ es un fibrado homogeneo con isotropía $[H]$ (brevemente un $G/[H]$-fibrado homogeneo) si se ha dado una acción de G en $\mathcal{E}$, que hace a $\mathcal{E}$ G-espacio tipo $G/[H]$, y

4. Por cada punto $x_0 \in \mathcal{E}$, existe un $H \in [H]$ y una H-reducción local $\mathcal{O}$ de la acción, tal que $x_0 \in G.\mathcal{O}$

Nota 53 *Si G es compacto, un G-espacio tipo $G/[H]$, entonces es necesariamente $G/[H]$-fibrado homogeneo.*

Proposición 54 *Sea $\mathcal{E}$ un $G/[H]$-fibrado homogeneo, y $A \in G$. Entonces si $\mathcal{O}$ una H-reducción local, $A.\mathcal{O}$ es una AHA^{-1}-reducción local. En particular, fijado $o \in \mathcal{E}$, existe una G_o-reducción local $\mathcal{O}$ con $o \in \mathcal{O}$*

Proposición 55 *Sea $\mathcal{E}$ un $G/[H]$-fibrado homogeneo y $\mathcal{O}$ una H-reducción local. Entonces la aplicación*

$$\sigma : G.\mathcal{O} \to \mathcal{O},\ x \to (G.x) \cap \mathcal{O}$$

es una submersión. Además la aplicación

$$\varphi : G/H \times \mathcal{O} \ni (AH, a) \to A.a \in G.\mathcal{O} \tag{88}$$

es un difeomorfismo, y

$$\mathcal{O} \ni o \to G.o \in G\backslash\mathcal{E}$$

define una parametrización local sobre el espacio de órbitas $G\backslash\mathcal{E}$ dotado de la topología final para la aplicación

$$\mathcal{E} \ni x \overset{\lambda_G}{\to} G.x \in G\backslash\mathcal{E}$$

En particular, el espacio de órbitas $G\backslash\mathcal{E}$ tiene una estructura diferenciable, que hace diferenciable a la la proyección canónica $\lambda_G : \mathcal{E} \ni x \to G.x \in G\backslash\mathcal{E}$.

Por tanto el fibrado homogeneo $\mathcal{E}$ tiene estructura de fibrado con fibra tipo G/H base $B = G\backslash\mathcal{E}$, y grupo G. Nótese que cada fibra de $\mathcal{E}$ tiene estructura natural de espacio de Klein.

6.3.5. Referencias.

Se definen en el contexto de una H-reducción $\mathcal{O}$ de un $G/[H]$-fibrado homogeneo $\mathcal{E}$. Si $\mathcal{E} = G.\mathcal{O}$, a partir de la acción $G \times \mathcal{E} \to \mathcal{E}$, el espacio $\mathcal{E}$ se ve como un fibrado sobre $\mathcal{O}$ con proyección

$$\sigma : \mathcal{E} \ni x \to \sigma(x) = G.x \cap \mathcal{O} \in \mathcal{O} \tag{89}$$

y con fibras tipo G/H: Cada fibra $\sigma^{-1}(o) = \mathcal{E}_o = G.o$, $o \in \mathcal{O}$ es un espacio punteado de Klein de grupo G e isotropía H.

Referencias en un punto. Una $\mathcal{O}$-referencia con origen en $x \in \mathcal{E}$ es un elemento $u \in G$ tal que $u.\sigma(x) = x$. Así el producto cartesiano $G \times \mathcal{O}$ describe el conjunto de todas las referencias con origen en $\mathcal{E}$, y tiene estructura de fibrado principal de grupo H respecto a la proyección

$$G \times \mathcal{O} \to G.\mathcal{O} = \mathcal{E}, \ (u, o) \to u.o$$

que hace corresponder a cada referencia su origen. Denotamos por $\mathcal{O}(\mathcal{E}) = G \times \mathcal{O}$ visto como tal fibrado.

Nótese que en el contexto de un espacio punteado de Klein se tiene $o(E) = o(E) = G \times o$

Referencias móviles. Una $\mathcal{O}$-referencia móvil, es una reducción (en un abierto $\mathcal{U}$ de $\mathcal{E}$) del fibrado de referencias $\mathcal{O}(\mathcal{E})$ y consiste entonces en una aplicación diferenciable $\mathbf{u} : \mathcal{U} \to G$ con la propiedad para todo $x \in \mathcal{U}$

$$\mathbf{u}(x).\sigma(x) = x$$

Naturalmente, existe un teorema de existencia de $\mathcal{O}$-referencias móviles $\mathbf{u}$ en torno a cada punto $x \in X$ con un valor predeterminado $u = \mathbf{u}(x) \in G$ en el punto x. Este teorema, equivale justamente a admitir que $G \times \mathcal{O} = \mathcal{O}(\mathcal{E})$ es fibrado principal de base $\mathcal{E}$ y grupo H.

6.3.6. Homomorfismos

Consideremos la *categoría* de los fibrados homogeneos de grupo fijo G. Un homomorfismo entre dos de ellos, digamos $\mathcal{E}$ y $\overline{\mathcal{E}}$ es una aplicación diferenciable $\phi : \mathcal{E} \to \overline{\mathcal{E}}$ de forma que para todo $A \in G$, el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{E} \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "\lambda_A"'] & \overline{\mathcal{E}} \arrow[d, "\overline{\lambda}_A"] \\
\mathcal{E} \arrow[r, "\phi"'] & \overline{\mathcal{E}}
\end{tikzcd}$$

Nótese que $\phi(G.x) \subset G.\phi(x)$, por tanto el homomorfismo $\phi : \mathcal{E} \to \overline{\mathcal{E}}$ da lugar a una única aplicación diferenciable denotada también por $\phi : B = G\backslash\mathcal{E} \to G\backslash\overline{\mathcal{E}} = \overline{B}$, que hace conmutativo el diagrama

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{E} \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "\lambda_G"'] & \overline{\mathcal{E}} \arrow[d, "\overline{\lambda}_G"] \\
B \arrow[r, "\phi"'] & \overline{B}
\end{tikzcd}$$

En estas condiciones, se tiene el siguiente resultado:

Proposición 56 *Fijado $o \in \mathcal{E}$, Para toda $\overline{H}$-reducción local $\overline{\mathcal{O}}$ de $\overline{\mathcal{E}}$ con $\phi(o) \in \overline{\mathcal{O}}$, existe $H \in [H]$ con $H \subset \overline{H}$, y una H-reducción local $\mathcal{O}$ de $\mathcal{E}$, con $o \in \mathcal{O}$, y $\phi\mathcal{O} \subset \overline{\mathcal{O}}$ de forma que la representación analitica local $\overline{\varphi}^{-1}\phi\varphi : G/H\times\ \mathcal{O} \to G/\overline{H}\times\ \overline{\mathcal{O}}$ de ϕ respecto a φ y $\overline{\varphi}$ (ver(88)) es*

$$(AH, a) \to \left(A\overline{H}, \phi a\right)$$

Naturalmente la composición de homomorfismos es homomorfismo.

6.3.7. Subfibrados y secciones

Un subfibrado del $G/[H]$-fibrado homogeneo $\overline{\mathcal{E}}$, es una subvariedad $\mathcal{E}$ de $\overline{\mathcal{E}}$ que es invariante por la acción del grupo G. Esto significa que con la acción inducida $G \times \mathcal{E} \to \mathcal{E}$, $\mathcal{E}$ es también $G/[H]$-fibrado homogeneo, y la inclusión $i : \mathcal{E} \to \overline{\mathcal{E}}$ es monomorfismo de fibrados homogeneos La proposición 56 (pág 87)aplicada a este caso nos dice que si $\overline{\mathcal{O}}$ es una reducción de $\overline{\mathcal{E}}$ entonces $\mathcal{O} = \mathcal{E} \cap \overline{\mathcal{O}}$, si es no vacio, es una reducción de $\mathcal{E}$. De hecho, si $\mathcal{O}$ es una subvariedad arbitraria de $\overline{\mathcal{O}}$, entonces $\mathcal{E} = G.\mathcal{O}$ es subfibrado de $\overline{\mathcal{E}}$.

Recíprocamente si $\mathcal{O}$ es una H-sección de $\overline{\mathcal{E}}$, entonces $\mathcal{O}$ es una H-reducción de $G.\mathcal{O} = \mathcal{E}$ que es un subfibrado de $\overline{\mathcal{E}}$. Se denomina a $\mathcal{O}$, un H-corte de $\overline{\mathcal{E}}$.

6.4. Variedades en un fibrado homogeneo.

Estamos en el contexto de una H-reducción $\mathcal{O}$ de un $G/[H]$-fibrado homogeneo $\mathcal{E}$. Si $\mathcal{E} = G.\mathcal{O}$, a partir de la acción H-regular $G \times \mathcal{E} \to \mathcal{E}$, el espacio $\mathcal{E}$ se ve como un fibrado sobre $\mathcal{O}$ con proyección $\sigma : \mathcal{E} \ni x \to \sigma(x) = G.x \cap \mathcal{O} \in \mathcal{O}$ y con fibras tipo G/H: Cada fibra $\sigma^{-1}(o) = G.o$, $o \in \mathcal{O}$ es un espacio punteado de Klein de grupo G e isotropía H. Se supone que $f : S \to \mathcal{E}$ es una p-variedad.

6.4.1. Referencias móviles.

El conjunto de las referencias $\mathcal{O}(f)$ a lo largo de f, es técnicamente el pullback $\mathcal{O}(f) = f^*(\mathcal{O}(\mathcal{E})) = \left\{(u, s) \in G \times S : u^{-1}.f(s) \in \mathcal{O}\right\}$ por f, del fibrado de referencias $\mathcal{O}(\mathcal{E}) \simeq G \times \mathcal{O}$ (ver epígrafe 6.3.5). Es decir $\mathcal{O}(f) = \cup_{s\in S}\mathcal{O}(f, s)$ donde para cada $s \in S$ es

$$\begin{aligned} \mathcal{O}(f, s) &= \{(u, \sigma) \in G \times \mathcal{O} : u.\sigma \in f(s)\} \\ &\simeq \left\{(u, s) \in G \times \{s\} : u^{-1}.f(s) \in \mathcal{O}\right\} \end{aligned}$$

Nótese que $\mathcal{O}(f) \simeq \left\{(u, s) \in G \times S : u^{-1}.f(s) \in \mathcal{O}\right\} \subset G \times S$, y tiene por tanto estructura natural de fibrado principal $\mathcal{O}(f) \to S$ sobre S, con fibra el grupo H.

La aplicación $\sigma : \mathcal{E} \to \mathcal{O}$ induce $\sigma_s f = \sigma(f(s))$ que define a $\sigma f : S \to \mathcal{O}$ como los invariantes iniciales de f. Se verifica la identidad

$$u.\sigma_s f = f(s)\,, \text{ si } u \in \mathcal{O}(f, s)$$

En el contexto de un espacio punteado de Klein se tiene $o(f) = o(f)$

Una referencia móvil a lo largo de f es una reducción (local) $\mathbf{u}$ del fibrado $\mathcal{O}(f) \to S$ de referencias en f. Es por tanto esencialmente una aplicación diferenciable $\mathbf{u} : S \to G$, tal que $\sigma(s) = \mathbf{u}(s)^{-1}.f(s) \in \mathcal{O}$ para todo $s \in S$. Denotamos por $\Gamma(\mathcal{O}(f))$ la familia de tales referencias.

6.4.2. Forma de Darboux de una referencia movil.

Se denomina forma de Darboux de una referencia movil $\mathbf{u} : S \to G$, $\mathbf{u} \in \Gamma(\mathcal{O}(f))$ a la derivada de Darboux de $\mathbf{u}$:

$$\Omega_{\mathbf{u}} = \mathbf{u}^* \Omega_G \in \Omega^1(S, \mathfrak{g})$$

Sabemos por (7) que si $A \in G$ entonces $A\mathbf{u} \in \Gamma\mathcal{O}(\lambda_A \circ f)$ y

$$\Omega_{A\mathbf{u}} = \Omega_{\mathbf{u}}$$

Sin embargo, cuando $A \in H$ es $\mathbf{u}A \in \Gamma\mathcal{O}(f)$ y se verifica

$$\Omega_{\mathbf{u}A} = Ad_{A^{-1}} \Omega_{\mathbf{u}} \tag{90}$$

En efecto, fijado $\xi \in T_s S$ se tiene

$$\begin{aligned} \Omega_{\mathbf{u}A}(\xi) &= \left((R_A \circ \mathbf{u})^* \Omega_G\right)(\xi) \\ &= \mathbf{u}^* \left((R_A)^* \Omega_G\right)(\xi) \\ &= Ad_{A^{-1}}(\Omega_G(\mathbf{u}_* \xi)) \\ &= Ad_{A^{-1}} \Omega_{\mathbf{u}}(\xi) \end{aligned}$$

Más general si $\mathbf{K} : S \to H$ es diferenciable entonces

$$\Omega_{\mathbf{uK}} = \Omega_{\mathbf{K}} + Ad_{\mathbf{K}^{-1}}(\Omega_{\mathbf{u}}) \tag{91}$$

En efecto, partiendo de la identidad

$$\mathbf{u}_* \xi = \mathbf{u}(s) . \Omega_{\mathbf{u}}(\xi)$$

se tiene:

$$\begin{aligned} (\mathbf{uK})_* \xi &= (\mathbf{u}_* \xi) . \mathbf{K}(s) + \mathbf{u}(s) . \mathbf{K}_* \xi \\ &= \mathbf{u}(s) . \Omega_{\mathbf{u}}(\xi) . \mathbf{K}(s) + \mathbf{u}(s) \mathbf{K}(s) \Omega_{\mathbf{K}}(\xi) \\ &= \mathbf{u}(s) \mathbf{K}(s) \left(\mathbf{K}(s)^{-1} . \Omega_{\mathbf{u}}(\xi) . \mathbf{K}(s) + \Omega_{\mathbf{K}}(\xi)\right) \\ &= (\mathbf{uK})(s) \left((Ad_{\mathbf{K}^{-1}}) \Omega_{\mathbf{u}}(\xi) + \Omega_{\mathbf{K}}(\xi)\right) \end{aligned}$$

6.4.3. Derivación de referencias a lo largo de curvas

Una referencia a lo largo de una curva diferenciable $\alpha : I \to \mathcal{E}$, viene a ser una aplicación diferenciable
$\mathbf{u} : I \to G$ tal que $\mathbf{u}(t) . \sigma(\alpha((t))) = \alpha(t)$ (es decir $\mathbf{u}(t)$ es una referencia en $\alpha(t)$ para el espacio de Klein $G.\sigma(\alpha(t))$). La derivada de Darboux de $\mathbf{u}$ es $\Omega_{\mathbf{u}} = \mathbf{u}^* \Omega_G \in \Omega^1(I, \mathfrak{g})$ que tiene el siguiente significado geométrico:

$$\mathbf{u}'(t) = \mathbf{u}(t) . \Omega_{\mathbf{u}}(t)$$

donde $\Omega_{\mathbf{u}}(t) = \Omega(\mathbf{u}'(t)) = \Omega_{\mathbf{u}}(\partial/\partial t|_t)$, y $\mathbf{u}(t) . \Omega_{\mathbf{u}}(t)$ se interpreta según la acción $G \times \mathfrak{g} \to TG$, $(A, \xi) \to A.\xi = (L_A)_* \xi$
Denotamos

$$\Theta_{\mathbf{u}}(t) = \Omega_{\mathbf{u}}(t) + \mathfrak{h}$$

donde $\mathfrak{g}$ es el álgebra de Lie de G y $\mathfrak{h}$ la de H. En estas condiciones, el resultado fundamental es el siguiente:

Teorema 57 *Sea* $\mathbf{u}$*, una referencia a lo largo de* $\alpha : I \to \mathcal{E}$*, y* $\sigma(t) = \sigma(\alpha((t)))$ *Entonces:*

$$\alpha'(t) = \mathbf{u}(t) . \Theta_{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{u}(t) . \sigma'(t)$$

en particular, si $\mathbf{v}$ *es otra* $\mathbf{u}(t_0) = \mathbf{v}(t_0)$ *para cierto* $t_0 \in I$*, entonces* $\Omega_{\mathbf{u}}(t_0) = \Omega_{\mathbf{v}}(t_0)$ $(mod\ \mathfrak{h})$

Demostración. Para cada $t \in I$, $\alpha(t)$ está en el espacio de Klein $E(t) = G.\alpha(t)$, con origen en $\sigma(t) = \sigma(\alpha((t)))$, y

$$\pi(t) : G \to E(t)\,,\ A \to A.\sigma(t)$$

es la proyección correspondiente. Nótese primero que para t fijo:

$$\pi(t)_* \Omega_{\mathbf{u}}(t) = \Omega_{\mathbf{u}}(t) + \mathfrak{h} \in \mathfrak{g}/\mathfrak{h} \simeq T_{\sigma(t)}E(t) \subset T_{\sigma(t)}\mathcal{E}$$

y Lo anterior así como los cálculos que siguen para un $t = t_0$ arbitrario utilizan libremente resultados del epígrafe 1.1.2:

$$\alpha'(t_0) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=t_0} (\mathbf{u}(t) . \sigma(t)) = \mathbf{u}'(t_0) . \sigma(t_0) + \mathbf{u}(t_0) . \sigma'(t_0)$$

Analicemos el valor del primer sumando

$$\begin{aligned}
\mathbf{u}'(t_0) . \sigma(t_0) &= \pi(t_0)_* \mathbf{u}'(t_0) \\
&= (\pi(t_0))_* \circ \left(L_{\mathbf{u}(t_0)}\right)_* (\Omega_{\mathbf{u}}(t_0)) \\
&= \left(\pi(t_0) \circ L_{\mathbf{u}(t_0)}\right)_* (\Omega_{\mathbf{u}}(t_0)) \\
&= \left(\lambda_{\mathbf{u}(t_0)}\right)_* (\pi(t_0)_* \Omega_{\mathbf{u}}(t_0)) \\
&= \left(\lambda_{\mathbf{u}(t_0)}\right)_* \Theta_{\mathbf{u}}(t_0)
\end{aligned}$$

Esto prueba nuestra afirmación ■

6.4.4. Forma vertical de una referencia fija de una variedad.

Se supone ahora que $f : S \to \mathcal{E}$ es una p-variedad, y sea $\mathbf{u} \in \Gamma\mathcal{O}(f)$, $\mathbf{u} : S \to G$ una referencia móvil a lo largo de f. La forma de Darboux de $\Omega_{\mathbf{u}} \in \Omega^1(S, \mathfrak{g})$ de $\mathbf{u}$ admite la siguiente interpretación geométrica:

Sea $\beta : I \to S$ una curva diferenciable. Entonces $\mathbf{u}{\circ}\beta$ es una referencia a lo largo de $\alpha = f \circ \beta : I \to \mathcal{E}$ y se verifica

$$\Omega_{\mathbf{u}\circ\beta}(t) = \Omega_{\mathbf{u}}\left(\beta'(t)\right) \text{ es decir } (\mathbf{u}{\circ}\beta)'(t) = (\mathbf{u}{\circ}\beta)(t) . \Omega_{\mathbf{u}}\left(\beta'(t)\right) \tag{92}$$

Se denomina forma vertical asociada a $\mathbf{u}$

$$\Omega_{\mathbf{u}} \text{ (mod } \mathfrak{h}) = \Theta_{\mathbf{u}} \in \Omega^1(S, \mathfrak{g}/\mathfrak{h})$$

Fijada una referencia $u \in \mathcal{O}(f, s_0)$ fija estamos interesados en probar que Θ_u está bien definida, con ayuda del siguiente resultado :

Proposición 58 *Sean* $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \Gamma\mathcal{O}(f)$ *referencias móviles a lo largo de* f*, entonces:*

$$\overline{Ad}_{\mathbf{v}^{-1}\mathbf{u}} \Theta_{\mathbf{u}} = \Theta_{\mathbf{v}}$$

en particular, si $u = \mathbf{u}(s) = \mathbf{v}(s)$ *en algún punto* s *se tiene* $\Theta_{\mathbf{u}}|_s = \Theta_{\mathbf{v}}|_s$ *y se denomina* $\Theta_u f$ *a este valor común.*

Demostración. Pongamos $\mathbf{v} = \mathbf{uK}$ con $\mathbf{K} : S \to H$ diferenciable. se tiene por (91) que $\Omega_{\mathbf{uK}} = \Omega_{\mathbf{K}} + Ad_{\mathbf{K}^{-1}} (\Omega_{\mathbf{u}})$. Pero $\Omega_{\mathbf{K}}$ toma valores en $\mathfrak{h}$, y la fórmula anterior módulo $\mathfrak{h}$ queda

$$\Theta_{\mathbf{uK}} = Ad_{\mathbf{K}^{-1}} (\Theta_{\mathbf{u}})$$

■

Denotamos entonces

$$\Theta_u f = \Theta_{\mathbf{u}} (s)$$

cuando $\mathbf{u}, \in \Gamma\mathcal{O}(f)$ con $\mathbf{u}(s) = u$ y se denomina $\Theta_u f$ *forma vertical* de la referencia adaptada u.

Nótese que $\Theta_u f \in \Lambda^1 (T_s S, \mathfrak{g}/\mathfrak{h})$ solo depende de la referencia fija $u \in \mathcal{O}(f, s)$. Sin embargo dada $\mathbf{u} \in \Gamma\mathcal{O}(f)$, para cada $s \in S$ se tiene la igualdad

$$\Theta_{\mathbf{u}(s)} f = \Theta_{\mathbf{u}} (s) \tag{93}$$

además se verifica para todo $K \in H$:

$$\Theta_{uK} f = Ad_{K^{-1}} (\Theta_u f) \tag{94}$$

Denotando

$$d_u f = d_s \left(\lambda_u^{-1} f\right) : T_s S \to T_{\sigma_s f} \mathcal{E} \tag{95}$$

se tiene la identidad

$$u. (d_u f) = d_s f \tag{96}$$

Se llega la siguientes conclusión:

Proposición 59 *Si $f : S \to \mathcal{E}$ es p-variedad, $s \in S$, $\xi \in T_s S$ y $u \in \mathcal{O}(f, s)$ se verifica la identidad*

$$(d_u f)(\xi) = ((\Theta_u f)(\xi))_{\sigma_s f} + (\sigma f)_* \xi$$

De forma algo mas imprecisa (eliminando s y ξ), si $\mathbf{u} \in \Gamma(\mathcal{O}(f))$ se tiene la descomposición:

$$d_{\mathbf{u}} f = \Theta_{\mathbf{u}} + d(\sigma f), \; con \; \Theta_{\mathbf{u}} = \Omega_{\mathbf{u}} (\mathrm{mod}\, \mathfrak{h}) \tag{97}$$

Demostración. Tomando $\mathbf{u} \in \Gamma\mathcal{O}(f)$, con $\mathbf{u}(s) = u$, un procedimiento geométrico para el cálculo de $\Theta_u f|_\xi$ para $\xi \in T_s S$ es el siguiente:Tomemos $\beta : I \to S$ una curva diferenciable con $\beta'(0) = \xi$. Entonces

$$\Theta_u f|_\xi = \Omega\left((\mathbf{u} \circ \beta)'(0)\right) \; (\mathrm{mod}\; \mathfrak{h}.)$$

Si en el teorema 57 (pág 89) tomamos $\alpha = f \circ \beta$, es $\Theta_{\mathbf{u}\circ\alpha}(0) = \Theta_u f(\xi)$, y $\alpha'(0) = f_* \xi$, $\sigma'(0) = (\sigma f)_* \xi$, por lo que se tiene

$$f_* \xi = (\lambda_u)_* \Theta_u f(\xi) + (\lambda_u)_* . ((\sigma f)_* \xi)$$

■

Nótese que y si $K \in H$, y $u \in \mathcal{O}(f, s)$ entonces $uK \in \mathcal{O}(f, s)$ y Ad_K deja invariante $\mathfrak{h}$. Por tanto induce $\overline{Ad_K} : \mathfrak{g}/\mathfrak{h} \to \mathfrak{g}/\mathfrak{h}$, y se verifica (véase (90))

$$\Theta_{uK} f = \overline{Ad_K}^{-1} \Theta_u f \tag{98}$$

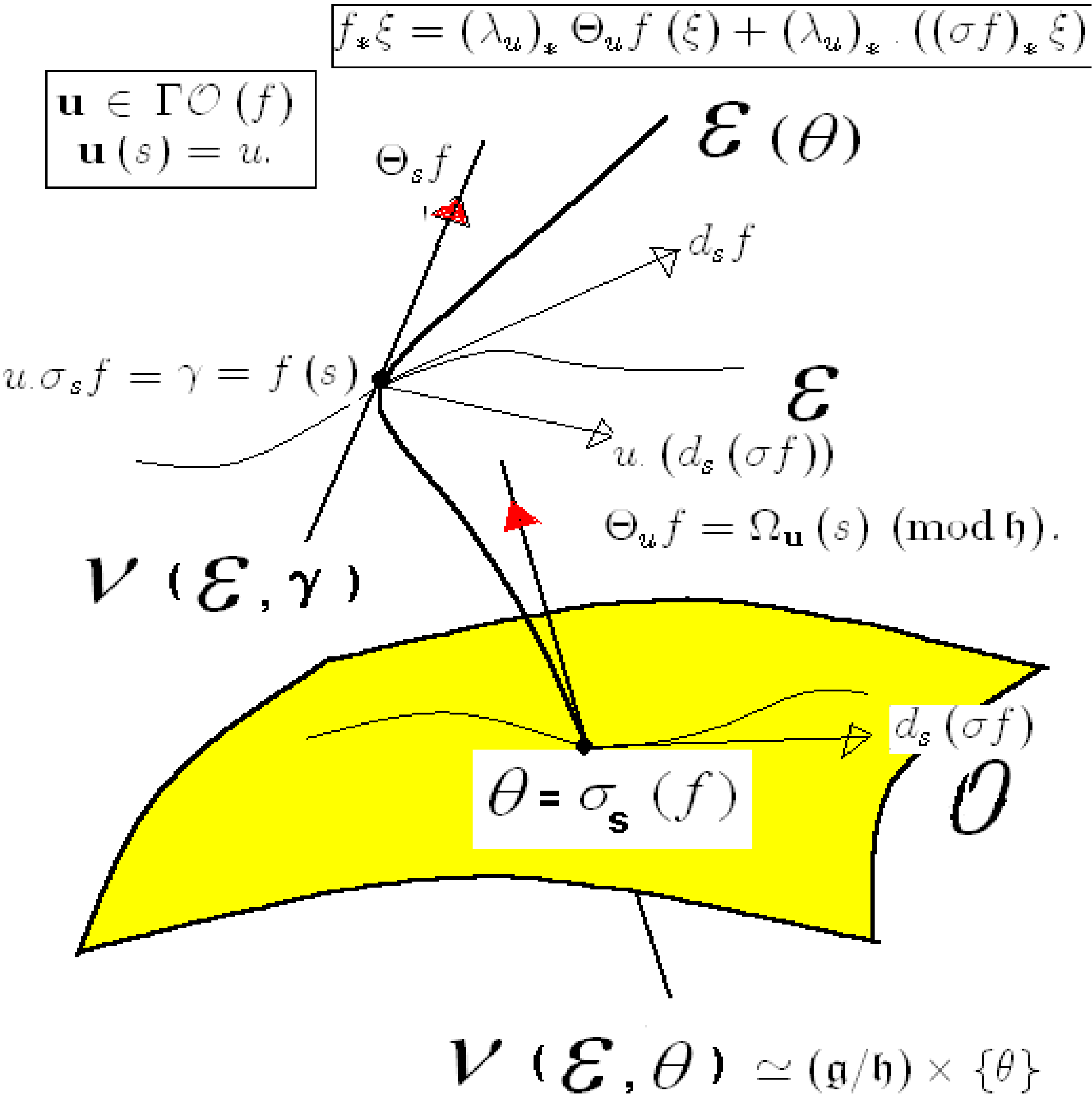
Corolario 60 *Fijado $s \in S$, y $u \in \mathcal{O}(f, s)$, entonces $\Theta_s f = u.\Theta_u f$ no depende de $u \in \mathcal{O}(f, s)$ y se tiene la identidad:*

$$d_s f = \Theta_s f + u. (d_s (\sigma f)) : T_s S \to T_{f(s)} (\mathcal{E}) \tag{99}$$

Demostración. Pongamos $v = uK$ con $K \in H$. Entonces:

$$\begin{aligned} v.\Theta_v f &= (uK).\Theta_{uK} f = (uK)\,\overline{Ad}_K^{-1}\Theta_u f \\ &= u.\overline{Ad}_K.\overline{Ad}_K^{-1}.\Theta_u f \\ &= u.\Theta_u f \end{aligned}$$

para obtener la última fórmula, multipliquese ambos miembros de (97) por u^{-1} teniendo en cuenta (96). ■



Corolario 61 *Sean $f, \overline{f} : S \to \mathcal{E}$ dos p-variedades con $f(s_0) = \overline{f}(s_0)$, , y $d_{s_0} f = d_{s_0}\overline{f}$ para cierto $s_0 \in S$, y sea $u \in \mathcal{O}(f, s_0)$. Entonces $\sigma_{s_0} f = \sigma_{s_0}\overline{f}$ y*

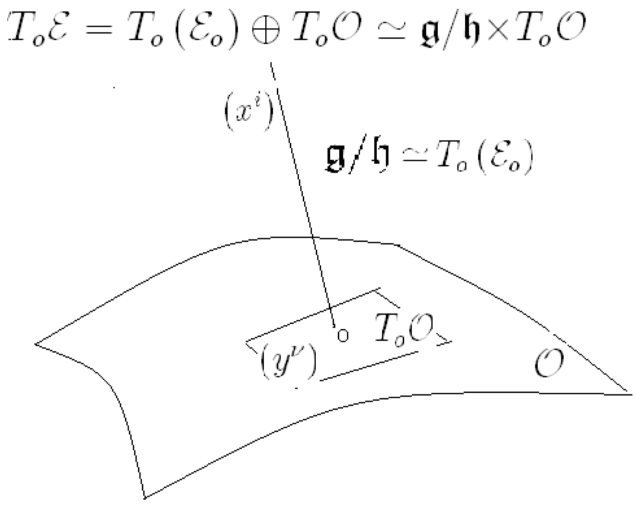


Figura 1:

se tiene

$$\begin{array}{l} \Theta_{s_0} f = \Theta_{s_0} \overline{f} \\ d_{s_0}(\sigma f) = d_{s_0}\left(\sigma \overline{f}\right) \end{array}$$

En particular si $u \in \mathcal{O}(f, s_0)$, *entonces* $u \in \mathcal{O}\left(\overline{f}, s_0\right)$ *y* $\Theta_u f = \Theta_u \overline{f}$.

Demostración. Si $u \in \mathcal{O}(f, s_0)$, entonces $f(s_0) = u.\sigma_{s_0} f = \overline{f}(s_0)$, y $u^{-1}\overline{f}(s_0)$ por tanto $\sigma_{s_0} f = \sigma_{s_0} \overline{f}$ y $u \in \mathcal{O}\left(\overline{f}, s_0\right)$. Además usando el corolario anterior

$$\begin{array}{rcl} d_{s_0} f &=& \Theta_{s_0} f + u.\left(d_{s_0}(\sigma f)\right) = \\ d_{s_0} \overline{f} &=& \Theta_{s_0} \overline{f} + u.\left(d_{s_0}\left(\sigma \overline{f}\right)\right) \end{array} \tag{100}$$

pero estas fórmulas expresan la descomposición de $d_{s_0} f = d_{s_0} \overline{f}$ en los dos sumandos que se corresponden con la suma directa

$$T_{x_0}\mathcal{E} = \mathcal{V}_{x_0} \oplus u.T_o\mathcal{O}$$

siendo $x_0 = f(s_0) = \overline{f}(s_0)$, $o = \sigma_{s_0} f = \sigma_{s_0} \overline{f}$, y $\mathcal{V}_{x_0} = \ker(d_{x_0}\sigma)$, donde $\sigma : \mathcal{E} \ni x \to \sigma(x) = G.x \cap \mathcal{O} \in \mathcal{O}$ es la proyección sobre la sección (definida en (89)). Por tanto los sumandos correspondientes en (100) coinciden. ■

Nota 62 *La descomposición anterior es exactamente la* trasladada *mediante u de*

$$\begin{array}{c} G/H \times \mathcal{O} \approx \mathcal{E},\ G/H \times o \approx G.o \\ \mathfrak{g}/\mathfrak{h} \times T_o\mathcal{O} \approx T_o\mathcal{E} \end{array}$$