

Proyecto Fin de Máster en Investigación Matemática  
Facultad de Ciencias Matemáticas, Universidad Complutense de Madrid.

*Foliaciones canónicas en espacios de Lorentz de punto  
omega.*

Alfredo Bautista Santa-Cruz

Dirigido por: Javier Lafuente López

Curso 2008/2009

El abajo firmante, matriculado en el Máster en Investigación Matemática de la Facultad de Ciencias Matemáticas, autoriza a la Universidad Complutense de Madrid (UCM) a difundir y utilizar con fines académicos, no comerciales y mencionando expresamente a su autor el presente Trabajo Fin de Máster: "*Foliaciones canónicas en espacios de Lorentz de punto omega*", realizado durante el curso académico 2008-2009 bajo la dirección de Javier Lafuente López en el Departamento de Geometría y Topología, y a la Biblioteca de la UCM a depositarlo en el Archivo Institucional E-Prints Complutense con el objeto de incrementar la difusión, uso e impacto del trabajo en internet y garantizar su preservación y acceso a largo plazo.

Fdo. Alfredo Bautista Santa-Cruz

## Resumen

Un espacio de Lorentz de punto omega  $M$  se caracteriza porque el pasado cronológico de cualquier curva temporal inextensible coincide con  $M$ . Esta característica afecta fuertemente a la causalidad del espacio de Lorentz provocando la existencia de superficies de Cauchy compactas. Restringiendo  $M$  al futuro cronológico de cierta superficie de Cauchy, se demuestra que por cada punto pasa una superficie de Cauchy con curvatura media constante  $k$ . Añadiendo además la condición de convergencia temporal a un espacio de Lorentz de punto omega, se prueba que si una superficie de Cauchy tiene curvatura media constante  $k \neq 0$ , entonces resulta ser la única con esta característica. Esto determina una única función escalar  $H$  continua en  $M$  con la propiedad de que para cada  $k \neq 0$ , se tiene que  $H^{-1}(k)$  es la única superficie de Cauchy con curvatura media constante  $k$ , y que si  $\Sigma = H^{-1}(0)$  es no vacío, entonces por cualquier punto de  $\Sigma$  pasa una superficie de Cauchy maximal, es decir, de curvatura media constante nula. Todo esto permite construir una foliación global en  $M$  mediante superficies de Cauchy con curvatura media constante, que es canónica en  $M - \Sigma$ , y además la función  $H$  resulta ser una función tiempo de Cauchy en esta región de  $M$ . También se establece que las componentes conexas de la frontera  $\partial\Sigma$  (que a lo sumo son dos) son superficies de Cauchy. En el caso de que  $\Sigma$  tenga interior vacío, se tiene que  $\partial\Sigma$  es conexa y es una hoja de la foliación, que ahora es canónica en todo  $M$ . Por último, se establecen condiciones suficientes y de carácter global para que un espacio de Lorentz sea de punto omega, ofreciendo ejemplos de tales espacios.

## Abstract

A Lorentz manifold with omega point  $M$  is characterized because the chronological past of any inextensible timelike curve is  $M$  itself. This feature strongly affects to the causality of Lorentz manifold causing the existence of compact Cauchy surfaces. Restricting  $M$  to the chronological future of certain Cauchy surface, it is proven that a Cauchy surface with constant mean curvature  $k$  goes through any point. Adding the timelike convergence condition to a Lorentz manifold with omega point, it is demonstrated that if a Cauchy surface has constant mean curvature  $k \neq 0$  then it is the only one with this feature. This fact determines a unique scalar function  $H$  continuous in  $M$  with the property for any  $k \neq 0$ , the set  $H^{-1}(k)$  is the only Cauchy surface with constant mean curvature  $k$ , and if  $\Sigma = H^{-1}(0)$  is not empty, then a maximal Cauchy surface, it is said, with zero constant mean curvature, goes through any point of  $\Sigma$ . All these facts allow to build a global foliation in  $M$ , canonical in  $M - \Sigma$ , by Cauchy surfaces with constant mean curvature and, furthermore, the function  $H$  is a Cauchy time function in that region of  $M$ . It is also established that the connected components of the boundary  $\partial\Sigma$  (two at most) are Cauchy surfaces. In case that the interior of  $\Sigma$  were empty,  $\partial\Sigma$  is connected

and it is a leaf of the foliation, now being canonical in  $M$ . Finally, sufficient and global conditions are established so that a Lorentz manifold has omega point, providing with examples of such manifolds.

**2000 Mathematics Subject Classification:** 53C50, 53C12.

**Palabras clave:** Espacio de Lorentz, punto omega, superficie de Cauchy, foliación, curvatura media, crecimiento causal.

**Key words:** Lorentz manifold, omega point, Cauchy surface, foliation, mean curvature, causal increasing.

# Índice general

<b>1. Introducción</b>	<b>2</b>
<b>2. Geometría y causalidad en espacios de Lorentz</b>	<b>5</b>
2.1. Geometría en espacios de Lorentz . . . . .	5
2.2. Condiciones de causalidad . . . . .	10
2.3. La $c$ -frontera . . . . .	19
2.4. Variaciones de curvas . . . . .	26
<b>3. Espacios de Lorentz de punto omega</b>	<b>29</b>
<b>4. Foliaciones canónicas en espacios de Lorentz de punto omega</b>	<b>38</b>
<b>5. Ejemplos de espacios de Lorentz de punto omega</b>	<b>58</b>
5.1. Crecimiento causal . . . . .	58
5.2. Ejemplos de espacios de punto omega . . . . .	66
5.2.1. Un primer ejemplo . . . . .	66
5.2.2. Un ejemplo más general . . . . .	69
5.2.3. Ejemplos particulares . . . . .	72

# Capítulo 1

## Introducción

En 1994, Frank J. Tipler publicó el controvertido ensayo *La física de la inmortalidad*<sup>1</sup>, en la que expone su teoría sobre la existencia y naturaleza de Dios. En esta obra se incluye el apéndice *La teoría general de los espacios-tiempos de punto omega*, en el que se definen dichos espacio-tiempos como los que tienen su frontera causal futura formada por un único punto. También se enuncian algunas proposiciones referentes a la teoría de causalidad y los espacio-tiempos de punto omega sin dar excesivos detalles en sus demostraciones. A lo largo de su libro, Tipler hace una interpretación filosófica, cuando no teológica, de estos espacios tratando de encontrar acomodo a los conceptos de *eternidad*, *omnipresencia* y *omnisciencia* dentro de un modelo geométrico relacionándolos con las respectivas características temporales, espaciales y causales del espacio-tiempo.

En [8], R. Budic y R. K. Sachs estudiaron los llamados espacio-tiempos deterministas, que se caracterizan porque sus fronteras causal futura y pasada están formadas por un único punto. Es evidente que los espacio-tiempos deterministas son también de punto omega, pero el recíproco es falso.

El presente trabajo pretende recorrer parte del camino trazado en el apéndice de la obra de Tipler, dejando aparte sus interpretaciones filosóficas y centrando el estudio desde un punto de vista puramente matemático. Tampoco trataremos de justificar la idoneidad de los modelos de punto omega como ambientes en los que desarrollar cualquier teoría física. Este trabajo, por tanto, está orientado a estudiar las características de estos espacios con independencia de las aplicaciones físicas o de otra índole que pudieran hacerse. De todos modos, conservaremos la notación y la nomenclatura aunque éstas hagan referencia a características físicas tales como futuro, pasado, luz,....

En el capítulo 2 se establecen las bases y los convenios necesarios para desarrollar la teoría. Prácticamente la totalidad del capítulo se puede encontrar en [13], [11] y [4]. Se introducen los conceptos geométricos más básicos para hacer que este trabajo sea, en buena medida, autocontenido. Asimismo se introduce la teoría de causalidad en espacios de Lorentz sin excesivos detalles, indicando en algunos casos una referencia. Se establece una versión ligeramente más general del teorema de Geroch, Kronheimer y Penrose en

---

<sup>1</sup>*The physics of immortality: modern cosmology, God and the resurrection of the dead.* Knopf/Doubleday/Pan Macmillan ed. 1994. Una edición en español es [15].

la que se sustituye como hipótesis la condición fuerte de causalidad por la condición de distinción de pasado. También se enumeran los resultados esenciales sobre variaciones de curvas tales como la primera y la segunda fórmula variacional.

El objetivo del capítulo 3 es la demostración del teorema de Seifert, cuyo enunciado dice que, bajo la condición de distinción de pasado, los espacios de Lorentz de punto omega son globalmente hiperbólicos con superficie de Cauchy compacta. Además se demuestra que la frontera del pasado cronológico de un punto del espacio de Lorentz es una superficie de Cauchy.

En el capítulo 4, se establece la caracterización de los espacios de Lorentz  $M$  de punto omega como los espacios para los que los conjuntos  $M - [I^+(p) \cup I^-(p)]$  son compactos. Esta condición es crucial para la existencia de superficies de Cauchy con curvatura media constante, según el teorema de Bartnik. Se demuestra que existe una superficie de Cauchy  $T$  tal que, en todo punto  $p \in I^+(T)$ , se verifica que  $M - [I^+(p) \cup I^-(p)]$  es compacto. En el conjunto  $I^+(T)$ , el teorema de Bartnik nos asegura que por cualquier punto pasa una superficie de Cauchy con curvatura media constante. A partir de este teorema, restringiendo el espacio de Lorentz  $M$  al conjunto  $I^+(T)$ , imponiendo la condición de convergencia temporal y aplicando el mismo argumento que en [7, Teorema 3.3], se demuestra la unicidad en el caso en que la curvatura media es no nula. En este supuesto, existe una función tiempo de Cauchy  $H$  tal que su valor en cualquier punto  $p$  coincide con el valor de la curvatura media de la única superficie de Cauchy con curvatura media constante que pasa por  $p$ . Esto implica la existencia de una foliación canónica, dada por dichas superficies de Cauchy. Sin embargo, en el conjunto de puntos por los que pasa alguna superficie de Cauchy maximal, esto es, de curvatura media constante igual a cero, no se tiene la unicidad para tales superficies de Cauchy y será necesario imponer nuevas condiciones más restrictivas. Aún así, en el caso general, es posible extender la foliación canónica hasta un entorno de la superficie de Cauchy maximal.

La condición de ser un espacio de Lorentz de punto omega, es una característica global, por lo que para determinarla sería conveniente tener un criterio igualmente global. Es conocido el cálculo de horizontes de sucesos, que se podría utilizar para este propósito, pero desafortunadamente es un cálculo local ya que utiliza cartas de la variedad. Además, la existencia del punto omega impone restricciones importantes de carácter topológico, como la compacidad de  $M - [I^+(p) \cup I^-(p)]$  para todo  $p \in I^+(T)$ , o la hiperbolicidad global del espacio de Lorentz con superficies de Cauchy compactas. Así, cualquier espacio de punto omega es difeomorfo a  $\mathbb{R} \times N$  donde  $N$  es una variedad compacta, por lo que este será el escenario para el que buscaremos condiciones que nos aseguren que el espacio es de punto omega. Inspirados por el artículo [10] de Harris y Low, en el capítulo 5, establecemos condiciones necesarias para determinar si los espacios de Lorentz, bajo ciertas condiciones, son de punto omega. Estas condiciones consisten en la existencia de un campo vectorial temporal causalmente decreciente, es decir, que los conos luz se van abriendo a medida que nos desplazamos a lo largo del flujo de dicho campo vectorial. Finalmente este capítulo se ilustra con varios ejemplos más concretos.

El presente trabajo de investigación tiene a [3] como germen inicial, al que se han aportado nuevos resultados que no habían sido estudiados como el estudio del conjunto

$\Sigma$  de puntos de  $M$  por los que pasa una superficie de Cauchy maximal, la aplicación del crecimiento causal a los espacios de punto omega y el hecho de que si  $M - [I^+(p) \cup I^-(p)]$  es compacto entonces  $M$  es de punto omega, entre otros.



## Capítulo 2

# Geometría y causalidad en espacios de Lorentz

En este capítulo vamos a recopilar las definiciones y los resultados básicos que formarán el marco sobre el que realizaremos nuestro estudio.

Primero necesitamos fijar la notación de conceptos fundamentales. Si  $T$  es un espacio topológico y  $U \subset T$  es un subconjunto, entonces denotaremos como  $\bar{U}$  a la *clausura* de  $U$ , el conjunto  $\partial U$  será la *frontera* de  $U$  y el conjunto  $\text{Int}(U)$  será el *interior* de  $U$ .

Si  $M$  es una variedad diferenciable y  $p \in M$  es un punto cualquiera de  $M$ , entonces  $T_p M$  es el *espacio tangente* de  $M$  en  $p$  y  $\mathbf{0}_p$  su vector cero,  $TM$  denotará el *fibrado tangente* de  $M$ ,  $\mathcal{F}(M)$  es el conjunto de todas las funciones diferenciables definidas en  $M$  con valores reales,  $\mathfrak{X}(M)$  es el conjunto de campos vectoriales diferenciables en  $M$  y  $\mathfrak{T}_q^p(M)$  es el conjunto de tensores diferenciables de tipo  $(p, q)$  sobre  $M$ .

### 2.1. Geometría en espacios de Lorentz

**Definición 1** Sea  $M$  una variedad diferenciable tal que  $\dim M \geq 2$  y  $\mathbf{g} \in \mathfrak{T}_2^0(M)$  un tensor simétrico y diferenciable. Diremos que  $(M, \mathbf{g})$  es:

1. Una **variedad riemanniana** o de **Riemann** si  $\mathbf{g}$  es definido positivo en todo punto  $p \in M$ .
2. Una **variedad semirriemanniana** si  $\mathbf{g}$  es no degenerado en todo punto  $p \in M$ .
3. Un **espacio de Lorentz** si  $(M, \mathbf{g})$  es una variedad semirriemanniana y para todo  $p \in M$  existe una base de  $T_p M$  en la que  $\mathbf{g}_p = \text{diag}(-1, +1, \dots, +1)$ .

En general diremos que  $M$  es una variedad de Riemann, semirriemanniana o un espacio de Lorentz cuando  $(M, \mathbf{g})$  lo sea y no resulte necesario especificar la métrica  $\mathbf{g}$ .

Podemos clasificar los vectores según sea su **carácter causal**, esto es, un vector  $v \in T_p M$  tal que  $v \neq 0$  diremos que es:

<b>espacial</b>	si $\mathbf{g}_p(v, v) > 0$
<b>luz</b>	si $\mathbf{g}_p(v, v) = 0$
<b>temporal</b>	si $\mathbf{g}_p(v, v) < 0$
<b>causal</b>	si $\mathbf{g}_p(v, v) \leq 0$

De [13, pag. 145] obtenemos la siguiente definición:

**Definición 2** Sea  $\tau$  una función sobre  $M$  que asigna a cada  $p \in M$  una componente conexa  $\tau_p$  del conjunto de los vectores temporales de  $T_p M$ . La función  $\tau$  es diferenciable si para cada  $p \in M$  existe un campo vectorial  $V$  diferenciable en algún entorno  $U$  de  $p$  tal que  $V_q \in \tau_q$  para todo  $q \in U$ . A una función tal la llamaremos **orientación en el tiempo** de  $M$ . Diremos que  $(M, \mathbf{g})$  es **orientable en el tiempo** si admite una orientación en el tiempo. Si tenemos una orientación en el tiempo  $\tau$  en  $(M, \mathbf{g})$  entonces diremos que  $(M, \mathbf{g})$  está **orientada en el tiempo**.

Si  $(M, \mathbf{g})$  está orientado en el tiempo y  $p \in M$ ,  $v \in T_p M$ , diremos que  $v$  es un **vector futuro** (resp. **pasado**) si  $v$  está en el futuro (resp. pasado) de  $p$ .

**Observación 3** La orientabilidad en el tiempo para un espacio de Lorentz es equivalente a la existencia de un **campo vectorial  $X$  temporal**, es decir que para todo  $p \in M$  el vector  $X_p \in T_p M$  es temporal. En efecto, si  $X$  existe, entonces asignando a cada  $p \in M$  la componente conexa de  $T_p M$  que contiene a  $X_p$  tenemos una orientación en el tiempo. Por otro lado, si tenemos una orientación en el tiempo  $\tau$  en  $M$  entonces para cada punto  $p \in M$  existe un entorno  $U_p$  en el que está definido un campo vectorial temporal  $X_{U_p}$  cuyo valor para cada  $q \in U_p$  está en  $\tau_q$ . Utilizando particiones de la unidad de  $M$  se puede construir un campo  $X$  temporal definido en todo  $M$ . Los detalles pueden verse en [13, lema 5.32].

Distinguiremos las dos componentes conexas del conjunto de vectores temporales llamando a una **cono causal futuro** de  $p$  y a la otra **cono causal pasado** de  $p$ . Así, diremos que un vector en  $v \in T_p M$  es un **vector futuro** si está en el cono causal futuro de  $p$  y análogamente diremos que  $v$  es un **vector pasado** si está contenido en el cono causal pasado de  $p$ .

**Definición 4** Sea  $\gamma : \Gamma \rightarrow M$  una aplicación continua y diferenciable a trozos donde  $\Gamma$  es un intervalo contenido en  $\mathbb{R}$ , entonces diremos que  $\gamma$  es una **curva** en  $M$ . A las clases de equivalencia de curvas en  $M$  bajo la relación  $\sim$  dada por  $\gamma \sim \mu \iff \mu = \gamma \circ \varphi$  donde  $\gamma : \Gamma \rightarrow M$ ,  $\mu : \Sigma \rightarrow M$  son curvas en  $M$  y  $\varphi : \Gamma \rightarrow \Sigma$  es un difeomorfismo tal que  $\varphi' > 0$  también las llamaremos **curvas** en  $M$ .

Diremos que una curva es **causal** si sus vectores tangentes tienen carácter temporal o luz. Con esto estamos asumiendo que las curvas son regulares, es decir, que su vector tangente nunca se anula. Por esta razón, toda curva causal es o bien futura o bien

pasada, pero no puede ocurrir que tenga unos vectores tangentes futuros y otros pasados. Asimismo, diremos que una curva  $\gamma$  es una **curva temporal** (respectivamente **luz**, **espacial**) si su vector tangente es temporal (respectivamente luz, espacial) en cada uno de sus puntos. También diremos que una curva es **futura** (respectivamente **pasada**) si sus vectores tangentes son futuros (respectivamente pasados) en cada uno de sus puntos.

Si  $\gamma$  es una curva temporal tal que posee puntos  $s \in \Gamma$  en los que no es diferenciable, se deberá entender que

$$\begin{aligned} \mathbf{g}_{\gamma(s)}(\gamma'(s^+), \gamma'(s^+)) &< 0 \\ \mathbf{g}_{\gamma(s)}(\gamma'(s^-), \gamma'(s^-)) &< 0 \\ \mathbf{g}_{\gamma(s)}(\gamma'(s^+), \gamma'(s^-)) &< 0 \end{aligned}$$

donde  $\gamma'(s^+)$  representa el vector tangente por la derecha de  $s$  y  $\gamma'(s^-)$  es el tangente por la izquierda de acuerdo con la notación tradicional. Las dos primeras condiciones quieren decir que  $\gamma'(s^+)$  y  $\gamma'(s^-)$  son vectores temporales y la tercera condición significa que  $\gamma'(s^+)$  y  $\gamma'(s^-)$  son o bien ambos futuros o bien ambos pasados.

**Definición 5** Un abierto  $C \subset M$  es **convexo** si es un entorno normal de cada uno de sus puntos, es decir, que para cualquier par de puntos  $p, q \in C$  existe una única geodésica contenida en  $C$  que los une.

**Lema 6** Dado un recubrimiento abierto  $R$  de  $M$ , existe un recubrimiento  $C$  formado por abiertos convexos tales que cualquier elemento de  $C$  está contenido en uno de  $R$ .

**Demostración.** Véase [13, lema 5.10]. ■

**Definición 7** Sea  $\gamma : I \rightarrow M$  una curva en  $M$ , sea  $a = \inf(I)$  y  $b = \sup(I)$  (siendo posible que  $a = -\infty$  o  $b = +\infty$ ), entonces diremos que  $q \in M$  es un **extremo** o **punto final** de  $\gamma$  si para toda sucesión  $\{s_j\} \subset I$ ,  $s_j \rightarrow a$  implica que  $\gamma(s_j) \rightarrow q$  o bien  $s_j \rightarrow b$  implica que  $\gamma(s_j) \rightarrow q$ . Si  $\gamma$  es una curva causal futura entonces en el primer caso  $q$  es un **extremo pasado** y en el segundo caso es un **extremo futuro** de  $\gamma$ .

Si  $\gamma$  es una curva causal tal que no existe extremo futuro (pasado) de  $\gamma$  en  $M$ , entonces diremos que  $\gamma$  es **inextensible hacia el futuro (pasado)**. Si no existiesen extremos pasados ni futuros, diremos simplemente que  $\gamma$  es **inextensible**. Si una curva no es inextensible, se dice que es **extensible**. Por conveniencia y para evitar comportamientos patológicos (ver [14, sección 1]) requeriremos que todas las curvas causales extensibles contengan a sus extremos<sup>1</sup>.

**Proposición 8** Si  $C$  es un abierto convexo de  $M$ , entonces una curva causal  $\gamma$  contenida en un subconjunto  $K \subset C$  compacto es extensible.

---

<sup>1</sup>La extensibilidad de una curva no implica que ésta pueda realizarse de forma diferenciable ni tan siquiera de una forma única. Si  $\gamma : (a, b] \rightarrow M$  es una curva extensible que oscila de tal manera en  $\gamma(b) \in M$  que no existe  $\gamma'(b)$ , entonces  $\gamma$  se puede extender en un entorno convexo  $C$  de  $\gamma(b)$  extendiendo a partir de  $\gamma(b)$  la geodésica que une  $\gamma(b - \epsilon)$  con  $\gamma(b)$  para cierto  $\epsilon > 0$  tal que  $\gamma(b - \epsilon) \in C$ .

**Demostración.** Puede consultarse en [13, lema 14.2(5)]. ■

A continuación haremos un breve resumen de algunos elementos importantes de la geometría diferencial, de esta manera evitaremos posibles confusiones debido a que en la literatura podemos encontrar distintas definiciones no equivalentes de los mismos objetos geométricos.

Denotaremos mediante  $\nabla$  a la **conexión de Levi-Civita** de  $M$ , es decir, a la única conexión que verifica que

$$[X, Y] = \nabla_X Y - \nabla_Y X \quad (2.1)$$

y además

$$X \cdot \mathbf{g}(Y, Z) = \mathbf{g}(\nabla_X Y, Z) + \mathbf{g}(Y, \nabla_X Z) \quad (2.2)$$

siendo  $X, Y$  y  $Z$  campos tangentes en  $M$ , y  $[X, Y] = XY - YX$  es el **corchete de Lie** de  $X$  e  $Y$ . Recordemos que la conexión de Levi-Civita viene caracterizada por la **fórmula de Koszul**:

$$2\mathbf{g}(\nabla_X Y, Z) = X \cdot \mathbf{g}(Y, Z) + Y \cdot \mathbf{g}(Z, X) - Z \cdot \mathbf{g}(X, Y) - \mathbf{g}(X, [Y, Z]) + \mathbf{g}(Y, [Z, X]) + \mathbf{g}(Z, [X, Y])$$

Sea  $x^1, \dots, x^n$  un sistema de coordenadas de  $M$  y sean  $\frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n}$  los campos coordenados asociados a dicho sistema.

Recordemos que los **símbolos de Christoffel** son las funciones reales  $\Gamma_{ij}^k$  definidas por

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^j} = \Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial x^k}$$

Estas funciones se pueden expresar en función de la métrica  $\mathbf{g}$  mediante la siguiente fórmula:

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} g^{km} \left( \frac{\partial g_{jm}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{im}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^m} \right) \quad (2.3)$$

Vamos a definir el **tensor de curvatura o de Riemann** de la misma manera que en [13, pág. 74] como:

$$R(X, Y)Z = -\nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_Y \nabla_X Z + \nabla_{[X, Y]} Z \quad (2.4)$$

La contracción del tensor de curvatura de Riemann nos define el **tensor de Ricci**

$$Ricc(X, Y) = \sum_m \mathbf{g}(e_m, e_m) \cdot \mathbf{g}(R(X, e_m)Y, e_m) \quad (2.5)$$

donde  $\{e_m\}_{m=1, \dots, n}$  forma una base local de campos vectoriales mutuamente ortogonales y unitarios.

Dada una función  $f \in \mathcal{F}(M)$  diremos que  $\nabla f$  es el **gradiente** de  $f$  y describe el campo vectorial de  $\mathfrak{X}(M)$  métricamente equivalente a la forma  $df$ , es decir que para cualquier  $X \in \mathfrak{X}(M)$

$$\mathbf{g}(\nabla f, X) = df(X) = X(f) \in \mathcal{F}(M)$$

**Definición 9** Diremos que  $M$  verifica la **condición de convergencia temporal** si  $\text{Ricc}(v, v) \geq 0$  para todo  $v$  temporal. La interpretación física de esta condición en modelos cosmológicos es que la gravedad, en promedio, atrae (véase [13, pág. 340]).

Consideremos a  $S \subset M$  como una hipersuperficie espacial diferenciable, entonces si  $V$  y  $W$  son campos tangentes a  $S$ , definimos la **segunda forma fundamental** como

$$\chi(V, W) = \mathbf{g}(\nabla_V W, N)$$

donde  $N$  es un campo normal a  $S$ . Por las propiedades de la conexión  $\nabla$  se puede demostrar que  $\chi$  es un tensor simétrico (véase [13, lema 4.4]). Hay que notar que podemos elegir el campo  $N$  como futuro o como pasado teniendo en cuenta que obtendremos valores opuestos de  $\chi$ . Por ello vamos a fijar el convenio de elegir  $N$ , en todos los casos a partir de ahora, como el campo futuro normal a  $S$ .

Una vez que tenemos la segunda forma fundamental, definimos la **curvatura media** de  $S$  como

$$k = -\sum_{i=1}^{n-1} \mathbf{g}(\nabla_{V_i} V_i, N)$$

donde  $\{V_i\}_{i=1, \dots, n-1}$  es una base ortonormal de campos vectoriales tangentes a  $S$ . Nótese que en [13, pág. 101] se hace esta definición dividiendo entre  $n - 1$ .

**Observación 10** Por la fórmula 2.2 (pág. 8) tenemos que

$$\mathbf{g}(\nabla_{V_i} V_i, N) + \mathbf{g}(\nabla_{V_i} N, V_i) = V_i \cdot \mathbf{g}(V_i, N) = 0$$

y por tanto

$$\mathbf{g}(\nabla_{V_i} V_i, N) = -\mathbf{g}(\nabla_{V_i} N, V_i)$$

Recordemos además que para cada  $p \in S$ , la **aplicación de Weingarten** definida por  $L : T_p S \rightarrow T_p S$  es un endomorfismo ya que como  $2\mathbf{g}(\nabla_V N, N) = V \cdot \mathbf{g}(N, N) = 0$   $\stackrel{V(p) \mapsto (\nabla_V N)(p)}{\implies}$  entonces  $(\nabla_V N)(p) \in T_p S$ . Entonces como

$$k = -\sum_{i=1}^{n-1} \mathbf{g}(\nabla_{V_i} V_i, N) = \sum_{i=1}^{n-1} \mathbf{g}(\nabla_{V_i} N, V_i)$$

la curvatura media es la traza de la aplicación de Weingarten y por eso  $k$  no depende de la base vectorial elegida.

La consulta de, por ejemplo, [13], [4] o [11], se hace necesaria para profundizar en las propiedades de estos objetos geométricos que suponemos familiares para el lector.

## 2.2. Condiciones de causalidad

De ahora en adelante supondremos que todo espacio de Lorentz  $M$  está orientado en el tiempo. A partir de esta orientación es posible definir ciertos conjuntos que permiten estudiar la estructura causal de  $M$ .

**Lema 11** *Dos vectores temporales  $v, w \in T_p M$  están en el mismo cono causal si y sólo si verifican*

$$\mathbf{g}_p(v, w) < 0$$

**Demostración.** Ver demostración de [13, Lema 5.29]. ■

**Lema 12** *Los conos causales son convexos, es decir, para todo  $v, w \in T_p M$  vectores temporales en el mismo cono causal y para todo  $t \in [0, 1]$  se tiene que el vector  $z_t \in T_p M$  dado por*

$$z_t = tv + (1 - t)w$$

*pertenece al mismo cono causal que  $v$  y  $w$ .*

**Demostración.** Primero demostraremos que  $z_t$  es temporal. Para ello veremos que  $\mathbf{g}_p(z_t, z_t) < 0$ . Tenemos que

$$\mathbf{g}_p(z_t, z_t) = t^2 \mathbf{g}_p(v, v) + 2t(1 - t) \mathbf{g}_p(v, w) + (1 - t)^2 \mathbf{g}_p(w, w)$$

Como  $\mathbf{g}_p(v, v) < 0$ ,  $\mathbf{g}_p(w, w) < 0$  por ser  $v$  y  $w$  temporales y  $\mathbf{g}_p(v, w) < 0$  por pertenecer al mismo cono causal, y como además  $t^2 \geq 0$ ,  $2t(1 - t) \geq 0$  y  $(1 - t)^2 \geq 0$  para todo  $t \in [0, 1]$  entonces es claro que  $\mathbf{g}_p(z_t, z_t) < 0$ . De esta manera hemos visto que  $z_t$  es temporal para todo  $t \in [0, 1]$ .

Falta ver que  $z_t$  y  $v$  están en el mismo cono causal. Para ello aplicaremos el lema 11, es decir comprobaremos que  $\mathbf{g}_p(z_t, v) < 0$ . En efecto,

$$\mathbf{g}_p(z_t, v) = t \mathbf{g}_p(v, v) + (1 - t) \mathbf{g}_p(w, v)$$

y como además  $t \geq 0$  y  $(1 - t) \geq 0$  para todo  $t \in [0, 1]$  entonces  $\mathbf{g}_p(z_t, v) < 0$ , concluyendo la demostración. ■

**Definición 13** *Sea  $N$  un subconjunto de  $M$ , y sea  $S$  un subconjunto de  $N$ :*

1. Llamaremos **futuro** (resp. **pasado**) **cronológico de  $S$  en  $N$**  al conjunto de puntos de  $N$  que pueden ser conectados con  $S$  mediante una curva temporal futura (resp. pasada) contenida en  $N$ . Lo denotaremos con  $I^+(S, N)$  (resp.  $I^-(S, N)$ ). En el caso que  $N = M$  lo denotaremos simplemente como  $I^+(S)$  (resp.  $I^-(S)$ ).
2. Llamaremos **futuro** (resp. **pasado**) **causal de  $S$  en  $N$**  a la unión de  $S$  con el conjunto de puntos de  $N$  que pueden ser conectados con  $S$  mediante una curva causal futura (resp. pasada) contenida en  $N$ . Lo denotaremos con  $J^+(S, N)$  (resp.  $J^-(S, N)$ ). Cuando  $N = M$  lo denotaremos simplemente como  $J^+(S)$  (resp.  $J^-(S)$ ).

3. Diremos que  $S$  es un conjunto **ácrono** si para todo  $p \in S$  se verifica que  $I^+(p) \cap S = \emptyset$ .
4. Diremos que  $S$  es un conjunto **acausal** si para todo  $p, q \in S$  se verifica que no existe ninguna curva causal  $\gamma$  que conecte  $p$  con  $q$ .
5. Si  $S$  es un conjunto ácrono, llamaremos **dominio de dependencia futuro** (resp. **pasado**) al conjunto de puntos  $p \in M$  tales que cada curva causal inextensible hacia el pasado (resp. futuro) que pasa por  $p$  interseca a  $S$ . Lo denotaremos como  $D^+(S)$  (resp.  $D^-(S)$ ). Y llamaremos **dominio de dependencia** a  $D(S) = D^+(S) \cup D^-(S)$ . Frecuentemente, a los dominios de dependencia se los llama **desarrollos de Cauchy**.

**Observación 14** Equivalentemente utilizaremos la notación

$$p \ll q$$

para indicar que  $q \in I^+(p)$ , de igual manera la expresión

$$p < q$$

denota que existe una curva causal futura desde  $p$  hasta  $q$ . La notación

$$p \leq q$$

indica que o bien  $p < q$  o bien  $p = q$ .

**Proposición 15** Si  $C$  es un subconjunto convexo de  $M$  entonces  $I^+(p, C)$  y  $I^-(p, C)$  son abiertos para todo  $p \in C$ .

**Demostración.** Como  $C$  es convexo entonces es un entorno normal de cada uno de sus puntos, así pues, existe un entorno  $\tilde{C}$  de  $0 \in T_p M$  tal que  $\exp_p : \tilde{C} \rightarrow C$  es un difeomorfismo. Queremos encontrar para cada  $q \in I^+(p, C)$  un entorno  $U$  contenido en  $I^+(p, C)$ . Es claro que  $F : T_p M \rightarrow \mathbb{R}$  es una función continua (de hecho diferenciable),

si  $v = \exp_p^{-1}(q) \in \tilde{C}$  es un vector temporal futuro entonces  $F(v) = a < 0$  y por tanto se tiene que existe un entorno abierto  $I$  de  $a \in \mathbb{R}$  tal que todo vector de  $F^{-1}(I)$  es temporal futuro. Como  $F$  es continua entonces  $F^{-1}(I)$  es un entorno abierto de  $v$  contenido en  $\tilde{C}$ . Por tanto  $U = \exp_p(F^{-1}(I))$  es un entorno abierto de  $q$  contenido en  $I^+(p, C)$  por ser todo vector de  $F^{-1}(I)$  temporal futuro. De igual manera se procede con  $I^-(p, C)$ .

■

**Corolario 16** Los conjuntos  $I^+(p)$  y  $I^-(p)$  son abiertos para todo  $p \in M$ .

**Demostración.** Sea  $\{C_i\}_{i \in I}$  un recubrimiento convexo de  $M$ . Si  $q \in I^+(p)$  entonces existe una curva  $\gamma$  temporal futura que une  $p$  con  $q$ . Además existe  $j \in I$  tal que  $q \in C_j$  y tomamos  $q' \in \gamma \cap C_j$  tal que  $q' \in I^-(q) \cap I^+(p)$ . Por la proposición 15 tenemos que

existe un entorno  $U$  de  $q$  tal que  $U \subset I^+(q', C_j)$  y como  $I^+(q', C_j) \subset I^+(q') \subset I^+(p)$  entonces tenemos que  $U \subset I^+(p)$ . Por tanto  $I^+(p)$  es abierto. Con un razonamiento análogo se demuestra que  $I^-(p)$  es abierto. ■

A continuación vamos a enunciar un teorema de causalidad que es básico para poder estudiar la estructura causal de los espacios de Lorentz.

**Teorema 17** *Sea  $M$  un espacio de Lorentz, si  $\alpha$  es una curva causal que une los puntos  $p, q \in M$  y no es una geodésica luz, entonces en cualquier entorno de la curva  $\alpha$  existe una curva temporal  $\beta$  que une los puntos  $p$  y  $q$ .*

**Demostración.** Ver demostración en [13, proposición 10.46]. ■

Como consecuencia de este teorema tenemos el siguiente corolario:

**Corolario 18** *Si  $r \in J^+(q)$  y  $q \in I^+(p)$ , o bien si  $r \in I^+(q)$  y  $q \in J^+(p)$  entonces  $r \in I^+(p)$ .*

**Demostración.** En el primer caso, si  $q \in I^+(p)$  entonces existe una curva  $\alpha_1$  temporal que une  $p$  con  $q$ , y si  $r \in J^+(q)$  entonces existe una curva causal  $\alpha_2$  que une  $q$  con  $r$  (si  $q = r$  entonces  $\alpha_2$  se reduce a un punto). Entonces la curva  $\alpha = \alpha_1 \cup \alpha_2$  es una curva causal que une los puntos  $p$  con  $r$  y no es una geodésica luz ya que  $\alpha_1$  es temporal. Por el teorema 17 tenemos que existe una curva temporal  $\beta$  que une  $p$  con  $r$ , por tanto se tiene que  $r \in I^+(p)$ . En el caso en que  $r \in I^+(q)$  y  $q \in J^+(p)$  se razona de manera análoga. ■

Este corolario es igualmente cierto considerando los pasados cronológicos y causales y su demostración es análoga invirtiendo los papeles del futuro y del pasado.

**Observación 19** *Vamos a ver algunas propiedades importantes de los pasados y futuros cronológicos y causales que utilizaremos frecuentemente.*

1. *Es claro por la definición que  $I^+(p) \subset J^+(p)$ , y como consecuencia del corolario 18 (ver [11, pág. 183]) se tiene que  $\text{int}(I^+(p)) = \text{int}(J^+(p))$  y además  $\overline{I^+(p)} = \overline{J^+(p)}$ .*
2. *También se desprende de la definición que si  $A$  y  $B$  son dos conjuntos tales que  $A \subset B$  entonces es claro que  $I^+(A) \subset I^+(B)$  y que  $I^-(A) \subset I^-(B)$ .*
3. *Diremos que un conjunto  $S$  es un **conjunto futuro** (resp. **pasado**) si  $I^+(S) \subset S$  (resp.  $I^-(S) \subset S$ ) que en el caso en que  $S$  sea abierto entonces tenemos la igualdad entre estos conjuntos (ver [11, págs. 217ss]). Para cualquier  $A \subset M$  se tiene que el conjunto  $I^+(A)$  es un conjunto futuro y además  $J^+(A) = J^+(J^+(A))$ . De igual manera el conjunto  $I^-(A)$  es un conjunto pasado y además  $J^-(A) = J^-(J^-(A))$  (ver [14, sección 2]).*



4. Un hecho que utilizaremos más adelante es que tanto el futuro y el pasado cronológico de un punto,  $\partial I^+(p)$  y  $\partial I^-(p)$ , son hipersuperficies topológicas cerradas, ácronas e inmersas en  $M$ . Este resultado y su demostración puede verse en [11, proposición 6.3.1].

**Lema 20** Sean  $p, q \in M$  tales que  $p \in I^-(q)$ , entonces existen entornos disjuntos  $V_1$  de  $q$  y  $V_2$  de  $p$  tales que para todo  $s \in V_1$  se tiene que  $V_2 \subset I^-(s)$  y además para todo  $r \in V_2$  se tiene que  $V_1 \subset I^+(r)$ .

**Demostración.** Si  $p \in I^-(q)$  entonces existe una curva  $\gamma$  temporal pasada que conecta  $q$  con  $p$ . Tomamos  $u \in \gamma$  tal que  $u \in I^-(q) \cap I^+(p)$  y así se tiene que  $q \in I^+(u)$  y  $p \in I^-(u)$ . Como  $I^+(u)$  y  $I^-(u)$  son abiertos entonces existe un entorno  $V_1 \subset I^+(u)$  que contiene a  $q$  y un entorno  $V_2 \subset I^-(u)$  que contiene a  $p$ . Como  $M$  es una variedad Hausdorff podemos elegir  $V_1$  y  $V_2$  disjuntos.

Sea  $s \in V_1$ , como  $s \in I^+(u)$  entonces  $u \in I^-(s)$  y como  $V_2 \subset I^-(u)$  entonces

$$V_2 \subset I^-(u) \subset I^-(I^-(s)) = I^-(s)$$

Por otro lado si  $r \in V_2$  entonces  $r \in I^-(u)$  y así  $u \in I^+(r)$ , y como  $V_1 \subset I^+(u)$  entonces

$$V_1 \subset I^+(u) \subset I^+(I^+(r)) = I^+(r)$$

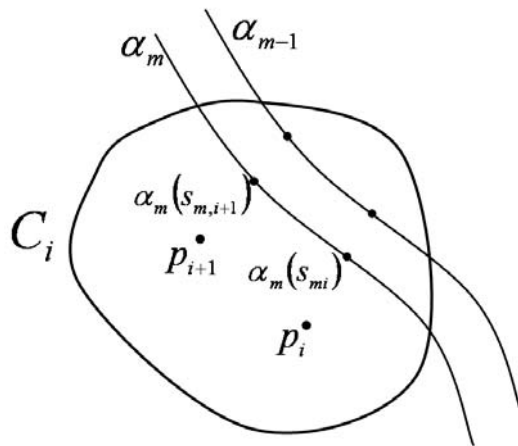
■

Para el estudio de la causalidad vamos a necesitar el concepto de límite de sucesiones de curvas causales y algún resultado de existencia. De los diversos enfoques que aparecen en la literatura vamos a destacar el concepto de *sucesión límite* aparecido en [13] y el de *curva límite* que encontramos en [11]. Ambos los utilizaremos más adelante según nuestras necesidades.

**Definición 21** Sea  $\{\alpha_n\}$  una sucesión infinita de curvas causales futuras en  $M$ , y sea  $C = \{C_i\}$  un recubrimiento convexo de  $M$ . Una **sucesión límite para  $\{\alpha_n\}$  relativa a  $C$**  es una sucesión (finita o infinita)  $p = p_0 < p_1 < \dots$  en  $M$  tal que:

1. Para cada  $p_i$  existe una subsucesión  $\{\alpha_m\}$  y, para cada  $m$  existen números  $s_{m0} < s_{m1} < \dots < s_{mi}$  tales que:
  - a)  $\lim_{m \rightarrow \infty} \alpha_m(s_{mj}) = p_j$  para cada  $j \leq i$ .
  - b) Para cada  $j < i$ , los puntos  $p_j, p_{j+1}$  y los segmentos de  $\alpha_m$  definidos en  $[s_{mj}, s_{m,j+1}]$  están contenidos en un único  $C_j \in C$  para todo  $m$ .
2. Si  $\{p_i\}$  es infinito, entonces no converge. Si  $\{p_i\}$  es finito entonces contiene más de un punto y ninguna sucesión estrictamente más larga verifica la propiedad 1.

La figura 1 trata de hacer visible este difícil concepto que viene justificado por la veracidad de la siguiente proposición:



**Figura 1:** Cuasi-límite en un entorno convexo  $C_i$ .

**Proposición 22** Sea  $\{\alpha_n\}$  una sucesión de curvas causales futuras tales que  $\{\alpha_n(0)\}$  converja a un punto  $p \in M$  y que exista un entorno de  $p$  tal que sólo contenga una cantidad finita de curvas  $\alpha_n$ , entonces relativa a cualquier recubrimiento convexo  $C$ , existe una sucesión límite comenzando en  $p$ .

**Demostración.** Véase [13, proposición 14.8]. ■

Una vez que tenemos una sucesión límite  $\{p_i\}$  y si  $\lambda_i$  es la geodésica causal futura que une  $p_i$  con  $p_{i+1}$  en un conjunto convexo  $C_i$  verificando la propiedad 1 de la definición anterior, entonces uniendo las  $\lambda_i$  obtenemos una geodésica a trozos  $\lambda = \cup \lambda_i$  conectando todos los  $p_i$ . Diremos en ese caso que  $\lambda$  es un **cuasi-límite de  $\{\alpha_n\}$  con vértices  $p_i$** . Si  $\{p_i\}$  es infinita, entonces  $\lambda$  es inextensible hacia el futuro, y si  $\{\alpha_n\}$  son inextensibles hacia el futuro, entonces  $\lambda$  será inextensible hacia el futuro. Para ver más detalles se recomienda consultar [13].

**Definición 23** Diremos que una curva  $\lambda$  es una **curva límite** de una sucesión  $\{\lambda_i\}$  de curvas si para todo punto  $p \in \lambda$  existe una subsucesión  $\{\lambda_k\}$  tal que cada entorno de  $p$  interseca a todas excepto un número finito de curvas de la subsucesión  $\{\lambda_k\}$ .

**Proposición 24** Sea  $U \subset M$  un abierto y sea  $\{\alpha_n\}$  una sucesión infinita de curvas causales inextensibles hacia el futuro tales que  $\alpha_n \subset U$  para todo  $n$ . Si  $p \in U$  es un punto de acumulación de  $\{\alpha_n\}$ , entonces existe una curva causal  $\lambda$  que pasa por  $p$  y es inextensible hacia el futuro en  $U$  tal que también es curva límite de  $\{\alpha_n\}$ .

**Demostración.** Véase [11, lema 6.2.1]. ■

Dependiendo del comportamiento de las curvas causales de  $M$ , es posible clasificar los espacios de Lorentz según verifiquen ciertas condiciones. La clasificación en las categorías que mencionaremos a continuación no es exhaustiva y en [4], [11] y [14] puede encontrarse una amplia discusión sobre estas propiedades. En la siguiente definición enunciamos algunas de ellas teniendo en cuenta que si se verifica una entonces se verifican todas las anteriores.

**Definición 25** *Sea  $M$  un espacio de Lorentz orientado en el tiempo, entonces*

1. *Diremos que  $M$  cumple la **condición cronológica** o que  $M$  es **cronológico** si no existen curvas temporales cerradas.*
2. *Diremos que  $M$  cumple la **condición de causalidad** o que  $M$  es **causal** si no existen curvas causales cerradas.*
3. *Diremos que  $M$  cumple la **condición de distinción de pasado** o que  $M$  **distingue pasado** (respectivamente **futuro**) si  $I^-(p) = I^-(q)$  (respectivamente  $I^+(p) = I^+(q)$ ) implica que  $p = q$  para todo  $p, q \in M$ .*
4. *Diremos que se cumple la **condición fuerte de causalidad** o que  $M$  es **fuertemente causal** en  $p \in M$  si para cada entorno  $U$  de  $p \in M$  existe un entorno  $V \subset U$  de  $p$  tal que cualquier segmento de una curva causal con extremos en  $V$ , está contenido enteramente en  $U$ . Esto quiere decir que no hay curvas causales casi cerradas en  $p$ , es decir, que existe un entorno  $V$  de  $p$  tal que cualquier curva causal que abandone  $V$  no regresa a dicho entorno. Diremos que  $M$  cumple la condición fuerte de causalidad si la verifica para todo  $p \in M$ .*
5. *Diremos que  $M$  es **establemente causal** si existe una función  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  cuyo gradiente es temporal para todo punto de  $M$ .*
6. *Diremos que  $M$  es **causalmente simple** si para todo conjunto compacto  $K \subset M$  se verifica que  $J^+(K)$  y  $J^-(K)$  son cerrados para todo  $p \in M$ .*
7. *Diremos que  $M$  es **globalmente hiperbólico** si se verifica la condición fuerte de causalidad y además para cualesquier puntos  $p, q \in M$  se tiene que  $J^+(p) \cap J^-(q)$  es compacto.*

**Observación 26** *La definición de estabilidad causal está tomada de [11, proposición 6.4.9] y caracteriza tales espacios de Lorentz. La estabilidad causal de un espacio de Lorentz  $M$  implica que si introducimos una pequeña perturbación en la métrica  $\mathbf{g}$  entonces  $M$  continua siendo causal.*

*Además si  $f \in \mathcal{F}(M)$  es una función tal que su campo gradiente  $\nabla f$  es temporal pasado en todo  $p \in M$ , y si  $\gamma : I \rightarrow M$  es cualquier curva diferenciable temporal futura entonces como*

$$\mathbf{g}(\nabla f, \nabla f)(p) < 0$$

para todo  $p \in M$  y como por la definición de  $\nabla f$  se tiene que

$$\mathbf{g}(\nabla f, X) = X(f)$$

para todo  $X \in \mathfrak{X}(M)$  entonces

$$\mathbf{g}(\nabla f(\gamma(t)), \gamma'(t))_{\gamma(t)} = \gamma'(t)(f) > 0$$

para todo  $t \in I$  ya que  $\nabla f(\gamma(t))$  y  $\gamma'(t)$  están en distintos conos causales de  $T_{\gamma(t)}M$  para todo  $t \in I \subset \mathbb{R}$ . Por lo tanto, como  $\gamma'(t)(f) > 0$  para todo  $t \in I$  entonces la función  $f$  es estrictamente creciente a lo largo de  $\gamma$ . El mismo resultado se obtiene si suponemos que  $\nabla f$  es temporal futuro para todo  $p \in M$  y si  $\gamma$  es temporal pasada.

Mediante el mismo razonamiento, si  $\nabla f$  y  $\gamma'$  están en el mismo cono causal de  $T_{\gamma(t)}M$  entonces se concluye que  $f$  es estrictamente decreciente a lo largo de  $\gamma$ .

**Definición 27** Una curva  $\gamma$  causal futura inextensible hacia el futuro que entra y permanece dentro de un conjunto compacto  $K$  se dice que está **totalmente aprisionada hacia el futuro** en  $K$ . Si  $\gamma$  no permanece en  $K$ , pero entra y sale continuamente entonces diremos que  $\gamma$  está **parcialmente aprisionada hacia el futuro** en  $K$ .

Este fenómeno del aprisionamiento no puede darse bajo ciertas condiciones de causalidad como puede observarse en la siguiente proposición:

**Proposición 28** Sea un compacto  $K \subset M$  donde se verifica la condición fuerte de causalidad, entonces no existe ninguna curva causal futura inextensible hacia el futuro total o parcialmente aprisionada hacia el futuro en  $K$ .

**Demostración.** Véase la demostración en [11, Proposición 6.4.7]. ■

**Definición 29** Una **superficie de Cauchy** es un conjunto  $S \subset M$  tal que cualquier curva temporal inextensible interseca a  $S$  una y sólo una vez.

**Definición 30** Una **función tiempo de Cauchy** es una función continua  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  tal que es estrictamente creciente a lo largo de toda curva temporal futura y además para todo  $r \in \text{Im } f$  se tiene que  $f^{-1}(r)$  es una superficie de Cauchy.

**Lema 31** Una superficie de Cauchy  $S$  es una hipersuperficie topológica ácrona cerrada que interseca a cada curva causal inextendible.

**Demostración.** Véase [13, Lema 14.29]. ■

**Proposición 32** Si  $M$  es globalmente hiperbólico entonces  $J^+(p)$  y  $J^-(p)$  son cerrados para todo  $p \in M$ .

**Demostración.** Como en la demostración de [4, proposición 3.16], sea  $q \in \overline{J^+(p)} - J^+(p)$  y tomemos  $r \in I^+(q)$ . Dado que  $I^-(r)$  es entorno abierto de  $q$  y además  $q \in \overline{J^+(p)}$  se puede ver que  $r \in I^+(p)$ . En efecto, tomando una sucesión  $\{q_n\} \subset J^+(p)$  tal que  $q_n \mapsto q$ , para  $n$  suficientemente grande se tiene que  $r \in I^+(q_n)$  y como  $q_n \in J^+(p)$  entonces el corolario 18 (pág. 12) implica que  $r \in I^+(p)$ . Entonces se tiene que

$$q \in \overline{J^+(p) \cap J^-(r)} - (J^+(p) \cap J^-(r))$$

pero esto es imposible ya que si  $M$  es globalmente hiperbólico entonces  $J^+(p) \cap J^-(r)$  es compacto y por tanto cerrado, por lo que  $\overline{J^+(p) \cap J^-(r)} = J^+(p) \cap J^-(r)$  y no puede existir tal punto  $q$ . ■

**Proposición 33** *Sea  $M$  un espacio de Lorentz con una superficie de Cauchy  $S \subset M$ , y sea  $X$  un campo vectorial temporal sobre  $M$ . Si  $p \in M$ , una curva integral maximal de  $X$  que pase por  $p$  corta a  $S$  en un único punto  $\sigma(p)$ . Entonces  $\sigma : M \rightarrow S$  es una aplicación abierta, continua y suprayectiva dejando  $S$  fija punto a punto. En particular,  $S$  es conexa.*

**Demostración.** Ofrecemos la demostración de [13, proposición 14.31]. Es conocido que las curvas integrales maximales de  $X$  son inextensibles. Sea  $\tilde{\Phi} : D \rightarrow M$  el flujo de  $X$  donde  $D$  es un abierto de  $M \times \mathbb{R}$ . Como  $S$  es una hipersuperficie topológica de  $M$  entonces  $D_S = (S \times \mathbb{R}) \cap D$  es una hipersuperficie topológica en  $D$  y como  $\tilde{\Phi}$  es diferenciable entonces su restricción  $\Phi : D_S \rightarrow M$  es continua. Como además  $S$  es una superficie de Cauchy, es claro que  $\Phi : D_S \rightarrow M$  es biyectiva. Como  $D_S$  y  $M$  tiene la misma dimensión, entonces  $\Phi$  es un homeomorfismo. La proyección  $\pi : S \times \mathbb{R} \rightarrow S$  es una aplicación abierta, continua y suprayectiva, por tanto, como  $\sigma = \pi \circ \Phi^{-1}$  entonces  $\sigma$  es abierta, continua y suprayectiva y además deja  $S$  fija punto a punto. Tenemos que  $M$  es conexo, entonces como  $\sigma$  es continua concluimos que  $\sigma(M) = S$  es conexa. ■

Una consecuencia importante de esta proposición es la equivalencia topológica de las superficies de Cauchy, es decir:

**Corolario 34** *Todas las superficies de Cauchy de un espacio de Lorentz  $M$  son homeomorfas.*

**Demostración.** La siguiente idea de la demostración puede verse en [13, corolario 14.32]. Sean  $S$  y  $T$  dos superficies de Cauchy de  $M$  y sea  $X$  un campo vectorial de  $M$ . Si  $\sigma_S$  y  $\sigma_T$  son las retracciones construidas en la proposición 33 para  $S$  y  $T$  respectivamente mediante el flujo de  $X$  entonces las restricciones  $\sigma_S : T \rightarrow S$  y  $\sigma_T : S \rightarrow T$  son aplicaciones inversas. ■

**Observación 35** *Un resultado importante que relaciona los dominios de dependencia definidos anteriormente con la hiperbolicidad global es el teorema 14.38 de [13] que dice que si  $A$  es un conjunto ácrono, entonces  $\text{int}D(A)$  (si no es vacío) es globalmente hiperbólico. Se puede aplicar este teorema a una superficie de Cauchy  $S$ , que por definición es un conjunto ácrono. Como  $D(S) = M$  entonces al ser  $M$  abierto se tiene que*

$\text{int}D(S) = M$  con lo que se concluye que  $M$  es globalmente hiperbólico. Esto quiere decir que la existencia de una superficie de Cauchy en  $M$  asegura la hiperbolicidad global.

**Proposición 36 (Geroch)** Si  $M$  es un espacio de Lorentz globalmente hiperbólico, entonces existe un difeomorfismo<sup>2</sup>  $\Psi : M \longrightarrow S \times \mathbb{R}$  donde  $S$  es una hipersuperficie diferenciable<sup>3</sup> tal que para todo  $a \in \mathbb{R}$  se tiene que  $\Psi^{-1}(S \times \{a\})$  es una superficie de Cauchy.

**Demostración.** Ver demostración en [11, proposición 6.6.8], o preferentemente, en [5]. ■

**Observación 37** Recordemos que se puede demostrar que las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1.  $M$  es globalmente hiperbólico.
2. Existe una función tiempo de Cauchy en  $M$ .
3.  $M$  posee una superficie de Cauchy.

Para ver que 1)  $\Rightarrow$  2) basta con aplicar la proposición 36 de Geroch que nos construye el difeomorfismo  $\Psi$  y comprobar que la función  $f = \pi \circ \Psi$  es una función tiempo de Cauchy donde  $\pi : S \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$  es la proyección natural. En efecto,  $f$  es continua porque tanto  $\pi$  como  $\Psi$  también lo son. La nota al pie de página de la proposición 36 nos indica que  $f$  también es estrictamente creciente a lo largo de cualquier curva temporal futura. Por último, si  $r \in \mathbb{R}$  entonces

$$f^{-1}(r) = (\pi \circ \Psi)^{-1}(r) = \Psi^{-1} \circ \pi^{-1}(r) = \Psi^{-1}(S \times \{r\})$$

es una superficie de Cauchy como asegura la proposición 36. Es trivial que 2)  $\Rightarrow$  3) y por la observación 35 tenemos que 3)  $\Rightarrow$  1).

**Lema 38** Si  $S$  es una superficie de Cauchy en un espacio de Lorentz globalmente hiperbólico, entonces  $J^+(S) \cap I^-(S) = \emptyset$  y  $J^-(S) \cap I^+(S) = \emptyset$ .

**Demostración.** Supongamos que existe  $p \in J^+(S) \cap I^-(S)$ . Es claro que  $p \notin S$  ya que en caso contrario tendríamos que  $p \in S \cap I^-(S)$  y esto contradice que  $S$  sea acronal. Descartada esta posibilidad, existen curvas  $\gamma_1$  causal futura y  $\gamma_2$  temporal futura tales que  $\gamma_1$  une  $r \in S$  con  $p$  y  $\gamma_2$  une  $p$  con  $q \in S$ . Entonces la curva  $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2$  es una curva causal futura que conecta los puntos  $r, q \in S$ . Por el teorema 17 existe una curva temporal  $\eta$  que conecta los puntos  $r, q \in S$ , lo que está en contradicción con que  $S$  es superficie de Cauchy. Así tenemos que  $J^+(S) \cap I^-(S) = \emptyset$ . Análogamente se puede demostrar que  $J^-(S) \cap I^+(S) = \emptyset$ . ■

<sup>2</sup>En la demostración de esta proposición el difeomorfismo  $\Psi$  es tal que si  $\Psi(p) = (\Psi_1(p), \Psi_2(p)) \in S \times \mathbb{R}$  entonces  $\Psi_2$  es una función estrictamente creciente a lo largo de cualquier curva temporal futura.

<sup>3</sup>La demostración de la existencia de una superficie de Cauchy diferenciable  $S$  en un espacio de Lorentz globalmente hiperbólico puede verse en [5]. Para más detalles sobre la proposición 36, puede consultarse [6].

## 2.3. La c-frontera

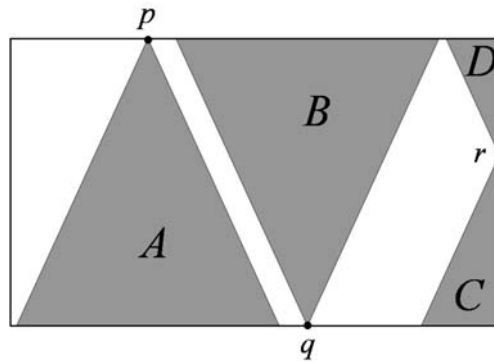
Por definición las curvas inextensibles no tienen puntos inicial ni final, pero si pudiéramos asociar un "inicio" y un "final" de forma unívoca a dichas curvas, podríamos estudiar el comportamiento a gran escala del espacio de Lorentz. Estos "extremos" de curvas inextensibles no serán puntos del espacio de Lorentz sino puntos ideales. Veamos la forma de hacerlo.

**Definición 39** Diremos que  $W$  es un **conjunto pasado irreducible**<sup>4</sup>, y lo abreviaremos mediante sus siglas en inglés como **IP**, si cumple las siguientes propiedades:

1.  $W$  es abierto no vacío.
2.  $W$  es un conjunto pasado, es decir,  $I^-(W) = W$ .
3.  $W$  no se puede expresar como unión de dos conjuntos que verifiquen las propiedades dos anteriores y que no estén contenidos el uno en el otro.

Diremos que  $W$  es un **IP propio**<sup>5</sup> si se puede expresar como el pasado cronológico de algún punto de  $M$ , en caso contrario lo llamaremos **IP terminal**<sup>6</sup>. Abreviaremos esta nomenclatura denotándolos como **PIP** y **TIP** respectivamente. De la misma manera se puede dar una definición dual de **conjunto futuro irreducible**, así tendremos los **IF** divididos en **PIF** y **TIF**.

En la siguiente figura se puede ver un ejemplo trivial de cómo se asocian los IP y los IF a la frontera del espacio de Lorentz. En un rectángulo abierto de  $\mathbb{R}^2$  dotado de la métrica  $\mathbf{g} = -dy \otimes dy + dx \otimes dx$  los puntos del borde tales como  $p$  se asocian a TIP de la forma de  $A$ . El punto  $q$  se relaciona con el TIF  $B$ , y al punto  $r$  se le asocia o bien el TIP  $C$  o bien el TIF  $D$ .



**Figura 2:** TIFs y TIPs.

<sup>4</sup>En inglés: *indescomposable past set*.

<sup>5</sup>En inglés: *proper IP*.

<sup>6</sup>En inglés: *terminal IP*.

**Definición 40** *Introduzcamos las siguientes definiciones fundamentales:*

1. Llamaremos **frontera causal futura** (resp. **pasada**) o **c-frontera del futuro** (resp. **pasado**) de  $M$  al conjunto de todos los TIP (resp. TIF). A la unión de la c-frontera del futuro y la del pasado la llamaremos simplemente **frontera causal** o **c-frontera**.
2. Diremos que  $M$  es un **espacio de Lorentz de punto omega** si la c-frontera del futuro está compuesta por un único TIP.

En la figura 2 se observa fácilmente que la c-frontera está formada por el borde del rectángulo.

Una vez recordadas estas definiciones, el objetivo del resto de esta sección es dar una caracterización de los TIP mediante curvas temporales inextensibles hacia el futuro. Esta caracterización no es gratuita y tendremos que pagar el precio de perder generalidad en las condiciones de causalidad. Se resume en una versión ligeramente más fuerte del teorema de Geroch, Kronheimer y Penrose (ver [4, proposición 6.14]) que enunciaremos al final de la presente sección. Las demostraciones de las siguientes proposiciones 41 y 42 están inspiradas en [11, proposición 6.8.1].

**Proposición 41**  $I^-(q)$  es un IP para todo  $q \in M$ .

**Demostración.** Es claro que  $I^-(q)$  es un conjunto abierto y pasado. Veamos que si se puede descomponer en dos conjuntos abiertos y pasados no contenidos el uno en el otro obtendremos una contradicción. Supongamos que  $I^-(q) = U \cup V$  donde  $U$  y  $V$  son abiertos y pasados tal que  $U \not\subseteq V$  y tampoco  $V \not\subseteq U$ . Tomemos entonces dos puntos  $r$  y  $p$  tales que  $r \in U \setminus V$  y  $p \in V \setminus U$ . Entonces tendremos que  $q \in I^+(r) \cap I^+(p)$  y por tanto existe  $W$  entorno de  $q$  tal que para todo  $Z \subset W$  entorno de  $q$  tenemos que  $Z \subset I^+(r) \cap I^+(p)$ . Así pues, para todo  $s \in Z \cap I^-(q)$  tenemos que  $r, p \in I^-(s)$ . Si  $s \in U$  entonces como  $U$  es un conjunto pasado y además  $r, p \in I^-(s)$  tendríamos que  $r, p \in U$  contradiciendo que  $p \notin U$ . Por tanto necesariamente  $s \in V$ , pero en ese caso  $r, p \in V$  ya que  $r, p \in I^-(s)$  y de nuevo hay una contradicción ya que  $r \notin V$ . Así pues no existen tales  $r$  y  $p$  y por tanto no es posible encontrar  $U$  y  $V$  abiertos y pasados tales que  $I^-(q) = U \cup V$  que no estén contenidos el uno en el otro. ■

**Proposición 42**  $W$  es un IP si y sólo si existe una curva causal  $\gamma$  tal que  $I^-(\gamma) = W$ .

**Demostración.** Supongamos primero que  $W$  es un IP, entonces tenemos que  $W$  puede ser un PIP o un TIP. Supongamos que es un PIP, entonces  $W = I^-(q)$  para cierto  $q \in M$ . Cualquier curva temporal  $\gamma$  que tenga a  $q$  como punto final en el futuro verifica que  $I^-(q) = I^-(\gamma)$ . Por tanto  $\gamma$  es una curva temporal, por tanto causal, tal que  $W = I^-(\gamma)$ . Supongamos ahora que  $W$  es un TIP. Tomemos un punto  $p \in W$ , entonces

$$W = (W \cap I^+(p)) \cup (W \setminus I^+(p))$$



y por tanto como  $W = I^-(W)$  tenemos que

$$W = I^-(W \cap I^+(p)) \cup I^-(W \setminus I^+(p))$$

Veamos que  $p \notin I^-(W \setminus I^+(p))$ . Si no fuera el caso, entonces existiría un  $q \in W \setminus I^+(p)$  tal que  $p \in I^-(q)$  o lo que es lo mismo  $q \in I^+(p)$  pero eso no puede ser ya que entonces  $q$  estaría y no estaría en  $I^+(p)$  a la vez. Así pues  $p \notin I^-(W \setminus I^+(p))$ . Como  $W$  es un TIP, no puede ser la unión de dos abiertos pasados no contenidos el uno en el otro, entonces  $W = I^-(W \cap I^+(p))$  ya que  $p \notin I^-(W \setminus I^+(p))$ . Si tomamos dos puntos cualesquiera  $r, q \in W$  entonces podemos suponer que  $W = I^-(W \cap I^+(r))$  y así existe  $q_1 \in W \cap I^+(r)$  tal que  $q_1 \in I^+(q)$ . Por tanto  $W \cap I^+(q) \cap I^+(r) \neq \emptyset$  y por tanto existe un punto  $s \in W$  tal que  $r, q \in I^-(s)$ . Es decir, que para cualquier par de puntos  $r, q \in W$  existe algún punto  $s \in W$  en el futuro de ambos. Mediante esta propiedad vamos a construir una curva  $\gamma$  temporal e inextensible hacia el futuro tal que  $I^-(\gamma) = W$ . Sea  $\{p_n\}$  una familia numerable de puntos de  $W$  densa en  $W$ . Elijamos un punto  $q_0 \in W$ , entonces para  $q_0$  y  $p_0$  existe un punto  $q_1 \in W \cap I^+(q_0) \cap I^+(p_0)$ . Consideremos ahora los puntos  $q_1$  y  $p_1$ , entonces existe  $q_2 \in W \cap I^+(q_1) \cap I^+(p_1)$ . Continuando de esta manera obtenemos una sucesión  $\{q_n\} \subset W$  tal que  $q_{n+1} \in I^+(q_n)$  para todo  $n$ . Por tanto podemos encontrar una curva temporal inextensible hacia el futuro que pase por todos los  $q_n$ . Dado un punto  $p \in W$  tenemos que como  $W \cap I^+(p)$  es abierto y no vacío entonces debe contener algún  $p_k$  ya que  $\{p_n\}$  es denso en  $W$ . Para cada  $k$ ,  $p_k$  está en el pasado de  $q_k$  por tanto  $p$  está en el pasado de  $\gamma$ . Esto implica que  $W \subset I^-(\gamma)$  y como además  $\gamma \subset W$  que es abierto y pasado, entonces tenemos que  $I^-(\gamma) = W$ .

Veamos el recíproco. Supongamos primero que  $\gamma$  tiene un punto final  $p \in M$  en el futuro, entonces claramente se tiene que  $I^-(p) = I^-(\gamma)$  que por la proposición 41 es un IP. Supongamos ahora que  $\gamma$  es inextensible hacia el futuro, tenemos que ver que no existen  $U$  y  $V$  abiertos pasados y no contenidos el uno en el otro tales que  $I^-(\gamma) = U \cup V$ . Supongamos que sí existen. Podemos tomar entonces  $r \in U \setminus V$  y  $q \in V \setminus U$ . Como  $r, q \in I^-(\gamma)$  entonces existen  $r_1, q_1 \in \gamma$  tales que  $r \in I^-(r_1)$  y  $q \in I^-(q_1)$ . Como  $\gamma$  es inextensible hacia el futuro entonces existe  $p \in \gamma$  tal que  $r_1, q_1 \in I^-(p)$ . Ahora bien, si  $p \in U$  entonces  $r, q \in U$  ya que  $U$  es un conjunto pasado, lo que contradice que  $q \notin U$ , pero si  $p \in V$  entonces  $r, q \in V$  y se contradice que  $r \notin V$ . Por tanto, no existen  $U$  ni  $V$  con las condiciones mencionadas y así tenemos que  $I^-(\gamma)$  es un IP. ■

Hay que observar en la demostración anterior que si  $W$  es un IP entonces existe una curva temporal tal que su pasado cronológico coincide con  $W$ , es decir, es posible restringir en la parte directa de la proposición 42 el resultado a curvas temporales. Pero nos interesa darnos cuenta de que el recíproco podemos generalizarlo para el conjunto de las curvas causales.

Es interesante investigar en qué condiciones el pasado cronológico de una curva temporal inextensible hacia el futuro puede coincidir con el pasado cronológico de un punto del espacio de Lorentz. Que eso no suceda impone ciertas condiciones de causalidad como podemos ver en la siguiente proposición. Primero necesitaremos un lema.

**Lema 43** *Sea  $\gamma$  una curva temporal inextensible hacia el futuro, sea  $p \in M$  tal que  $I^-(\gamma) = I^-(p)$ . Si para todo entorno  $W$  relativamente compacto  $\gamma$  entra y sale continuamente de  $W$ , entonces se incumple la condición de distinción de pasado.*

**Demostración.** Vamos a construir una sucesión de curvas temporales  $\{\gamma_n\}$  a partir de  $\gamma$  que tenga una sucesión límite con la que demostraremos que existen puntos  $q$  de dicha sucesión tales que  $I^-(q) = I^-(p)$ . Tomemos una sucesión de entornos de  $p$  relativamente compactos  $\{W_m\}$  tales que  $W_{k+1} \subset W_k$  y además  $W_m \rightarrow p$ . Por hipótesis  $\gamma$  entra y sale continuamente de cada  $W_k$ . Tomemos ahora una sucesión de puntos  $\{q_m\}$  tal que  $q_k \in \gamma \cap W_k$ . Es claro que  $q_m \rightarrow p$  ya que  $q_m \in W_m \rightarrow p$ . Definimos ahora la sucesión de curvas  $\{\gamma_n\}$  como  $\gamma_n = \gamma$  a partir de  $q_n$  hacia el futuro y  $q_n$  será el extremo pasado de  $\gamma_n$ . Sin perder generalidad podemos suponer que el parámetro de  $\gamma_n$  comienza en 0, es decir,  $\gamma_n(0) = q_n$ . Por tanto  $\gamma_n(0) \rightarrow p$  y además  $\gamma_n$  no converge a  $p$  ya que  $\gamma_n$  también entra y sale de cualquier entorno relativamente compacto. Se cumplen entonces las hipótesis de la proposición 22 (pág. 14) y por tanto existe una sucesión límite de  $\{\gamma_n\}$  relativa a un recubrimiento convexo  $\{C_i\}$ . Sea ésta  $p = p_0 < p_1 < p_2 < \dots$ . Si escogemos de la sucesión límite cualquier  $p_k \neq p$ , veamos que  $I^-(p_k) = I^-(p)$ . Sea  $s \in I^-(p)$ , como  $p \in J^-(p_k)$  entonces por el teorema 17 (pág. 12) es claro que  $s \in I^-(p_k)$  por lo que  $I^-(p) \subset I^-(p_k)$ . Por otro lado, si consideramos  $s \in I^-(p_k)$ , y como  $p_k$  es un punto de la sucesión límite, entonces por la propiedad 1.a) de la definición de sucesión límite existe un pequeño entorno  $V$  de  $p_k$  totalmente contenido en  $I^+(s)$  y existe  $n$  tal que  $V \cap \gamma_n \neq \emptyset$ . Sea  $r \in V \cap \gamma_n$ , entonces por la construcción de  $\{\gamma_n\}$  se tiene  $r \in V \cap \gamma$  y como  $s \in I^-(r)$  entonces  $s \in I^-(\gamma) = I^-(p)$ . Así concluimos que  $I^-(p_k) = I^-(p)$  y no se verifica la condición de distinción del pasado. ■

**Proposición 44** *Si  $\gamma$  es una curva temporal inextensible hacia el futuro tal que  $I^-(\gamma) = I^-(p)$  para algún  $p \in M$  entonces  $M$  incumple la condición de distinción del pasado.*

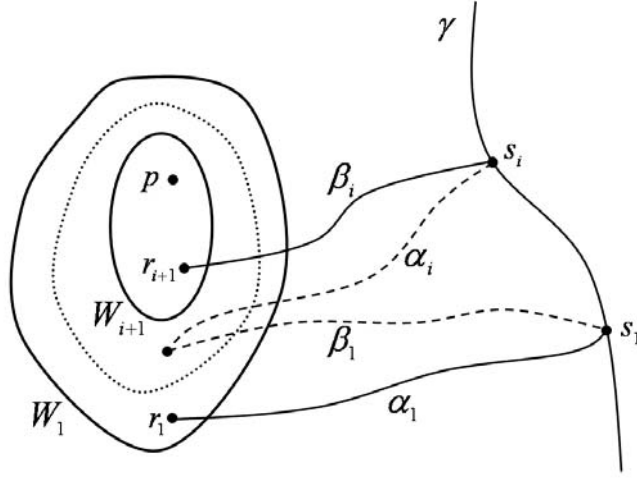
**Demostración.** Tenemos que estudiar dos casos distintos:

Caso 1: Supongamos que para todo  $W$  entorno de  $p$  convexo y relativamente compacto se tiene que  $\gamma \cap W \neq \emptyset$  entonces:

- Si  $p \in \gamma$  entonces existe  $r \in \gamma$  tal que  $r \in I^+(p)$ . Como  $\gamma$  es inextensible hacia el futuro y  $r \in \gamma$  tenemos que  $r \in I^-(\gamma) = I^-(p)$  y entonces  $r \in I^+(p) \cap I^-(p)$ . Así pues no se verifica la condición cronológica y por tanto tampoco la condición de distinción del pasado.
- Si  $p \notin \gamma$  entonces  $\gamma$  se aproxima a  $p$  tanto como queramos. De esta manera tenemos dos posibilidades:
  1. Supongamos que  $\gamma$  entra y permanece dentro de un entorno  $W$  de  $p$  convexo y relativamente compacto. Pero eso es imposible ya que entonces  $\gamma$  permanecería en  $\overline{W}$  que es compacto y por la proposición 8 (pág. 7) tendríamos que  $\gamma$  es extensible, contradiciendo su inextensibilidad.

2. Por el contrario, supongamos que no existe ningún entorno  $W$  de  $p$  convexo y relativamente compacto en el que  $\gamma$  entre y no salga de él. Eso es lo mismo que decir que para todo entorno  $W$  de  $p$  en el que  $\gamma$  entre, entonces tiene que volver a salir. Como  $\gamma \cap W \neq \emptyset$  para todo  $W$  convexo y relativamente compacto, entonces  $\gamma$  tiene que entrar y salir continuamente de  $W$ . Por el lema 43 (pág. 21) se tiene que  $M$  incumple la condición de distinción del pasado.

Caso 2: Supongamos que existe  $W_1$  entorno de  $p$  relativamente compacto tal que  $\gamma \cap W_1 = \emptyset$ . Nuestra intención es construir una curva  $\lambda$  temporal inextensible en las hipótesis del lema 43. Para ello vamos a usar fuertemente la condición  $I^-(\gamma) = I^-(p)$ . Tomemos una sucesión de entornos  $\{W_n\}$  de tal forma que  $W_{k+1} \subset W_k$  para todo entero  $k$  y además  $W_n \rightarrow p$ . Tomemos también un punto  $r_1 \in I^-(p, W_1) \subset I^-(p) = I^-(\gamma)$  entonces existe  $s_1 \in \gamma$  tal que  $r_1 \in I^-(s_1)$ , es decir, que existe una curva  $\alpha_1$  temporal que une  $r_1$  con  $s_1$ . Como  $s_1 \in I^-(\gamma) = I^-(p)$  entonces existe un punto  $r_2 \in I^-(p, W_2)$  tal que  $s_1 \in I^-(r_2)$ , es decir, una curva  $\beta_1$  temporal que une  $s_1$  con  $r_2$ . Repitiendo este proceso (ver figura 3) obtenemos unos puntos  $r_k \in I^-(p, W_k) \subset I^-(p) = I^-(\gamma)$  y  $s_k \in \gamma$  tales que  $r_k \in I^-(s_k)$  y  $s_k \in I^-(r_{k+1})$ . Es decir, existen curvas  $\alpha_k$  y  $\beta_k$  temporales futuras que unen  $r_k$  con  $s_k$  y  $s_k$  con  $r_{k+1}$  respectivamente. Por tanto la unión de todas esas curvas  $\lambda = \bigcup_k (\alpha_k \cup \beta_k)$  es una curva temporal hacia el futuro que entra y sale continuamente de cada  $W_k$  por lo que además es inextensible. Para poder aplicar el lema 43 necesitamos ver que  $I^-(\lambda) = I^-(p)$ . Si  $s \in I^-(\lambda)$  entonces existe  $r \in \lambda$  tal que  $s \in I^-(r)$ , entonces  $r \in \alpha_k \cup \beta_k$  para cierto  $k$ . Por tanto  $r \in I^-(s_{k+1})$  y entonces  $s \in I^-(s_{k+1})$ . Así pues tenemos que  $s \in I^-(\gamma)$  y por tanto  $I^-(\lambda) \subset I^-(\gamma) = I^-(p)$ . Veamos la inclusión inversa. Si  $s \in I^-(p)$ , como  $I^+(s)$  es abierto,  $p \in I^+(s)$  y además  $W_n \rightarrow p$  entonces existe  $k$  tal que  $W_k \subset I^+(s)$ . Como hemos visto antes, tenemos que  $r_k \in I^-(p, W_k) \cap \lambda$ , por tanto  $r_k \in W_k \cap \lambda$  y así  $r_k \in I^+(s) \cap \lambda$ , por lo tanto tenemos que  $s \in I^-(r_k) \subset I^-(\lambda)$ . De esta manera vemos que  $I^-(p) \subset I^-(\lambda)$  y concluimos que  $I^-(\lambda) = I^-(p)$ . Ahora estamos en condiciones de aplicar el lema 43 para la curva  $\lambda$ , por tanto en este caso también se incumple la condición de distinción de pasado. ■



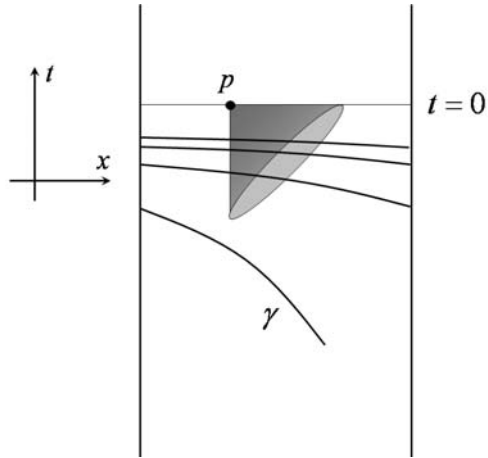
**Figura 3:** Construcción de  $\lambda$  en la demostración de la proposición 44.

Esta proposición equivale a decir que en un espacio de Lorentz  $M$  que verifica la condición de distinción del pasado, el pasado cronológico de cualquier curva temporal inextensible hacia el futuro es un TIP. Como corolario de estas proposiciones podemos obtener una versión ligeramente más fuerte del teorema de Geroch, Kronheimer y Penrose no sólo para espacios de Lorentz fuertemente causales sino para los que cumplen la condición de distinción del pasado. El resultado es el siguiente:

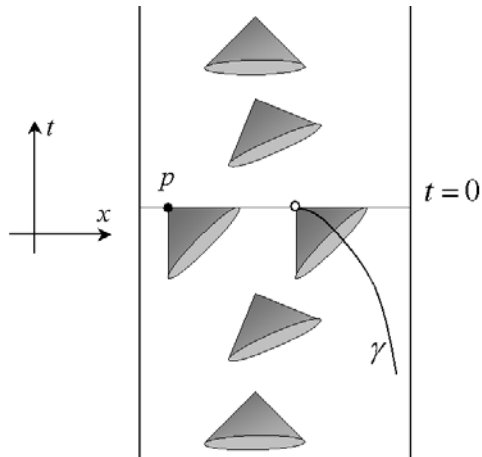
**Corolario 45** *Si  $M$  cumple la condición de distinción del pasado, entonces un conjunto  $W$  es un TIP si y sólo si existe una curva  $\gamma$  temporal inextensible hacia el futuro tal que  $I^-(\gamma) = W$ .*

**Demostración.** Es consecuencia directa de las proposiciones 42 y 44. ■

Este corolario no es cierto en general para espacios de Lorentz causales. A continuación se dan ejemplos en los que existen curvas temporales inextensible hacia el futuro para las que su pasado cronológico coincide con el pasado cronológico de un punto del espacio de Lorentz. Tomemos como  $M$  un cilindro 2-dimensional. En la figura 4 escogemos la métrica  $ds^2 = dxdt$  y así  $M$  verifica la condición cronológica pero no la causal ya que  $t = cte$  es una curva causal cerrada. Además elegimos como  $\gamma$  a la curva dada por  $\gamma(s) = (s, \exp(-s))$ ,  $s \in [a, \infty)$  que es temporal e inextensible hacia el futuro. Para la figura 5 tomamos la métrica  $ds^2 = (\cosh t - 1)^2(dt^2 - dx^2) + dxdt$  y quitamos el punto  $(0, 0) \in M$ , de esta manera el espacio de Lorentz  $M$  verifica la condición de causalidad pero no la de distinción del pasado. Consideramos una curva temporal  $\gamma$  tal que  $\gamma(s) \rightarrow (0, 0)$  cuando  $s \rightarrow \infty$ . En estos dos ejemplos tenemos que  $I^-(p) = I^-(\gamma)$ .



**Figura 4:** Espacio de Lorentz que verifica la condición cronológica tal que  $I^-(p) = I^-(\gamma)$ .



**Figura 5:** Espacio de Lorentz que cumple la condición causal y en el que  $I^-(p) = I^-(\gamma)$ .

Una propiedad que usaremos más adelante viene dada por el siguiente lema:

**Lema 46** *Si  $M$  verifica la condición de distinción de pasado y es de punto omega entonces el único TIP es el propio  $M$ .*

**Demostración.** Como  $M$  verifica la condición de distinción de pasado entonces existe una curva temporal  $\gamma$  inextensible hacia el futuro tal que  $I^-(\gamma)$  es el único TIP de  $M$  por ser de punto omega. Si suponemos que  $p \in M - I^-(\gamma)$  entonces cualquier curva temporal inextensible hacia el futuro que pase por  $p$  definirá un TIP distinto de  $I^-(\gamma)$ , lo que contradice que  $M$  es de punto omega. Por tanto  $M = I^-(\gamma)$ . ■

## 2.4. Variaciones de curvas

Recordemos ahora algunos conceptos básicos del cálculo de variaciones, que es una herramienta fundamental para la demostración de la unicidad de superficies de Cauchy con curvatura media constante. Inspirados en [13, sección 8 y 10] vamos a mencionar los resultados más importantes.

**Definición 47** *Una **variación de un segmento de curva**  $\alpha : [a, b] \rightarrow M$  es una aplicación diferenciable  $\varphi : [a, b] \times (-\delta, \delta) \rightarrow M$  tal que  $0 < \delta \in \mathbb{R}$  y además  $\alpha(t) = \varphi(t, 0)$ ,  $\forall t \in [a, b]$ . Dado  $u_0 \in (-\delta, \delta)$ , la curva  $\varphi^{u_0} : [a, b] \rightarrow M$  diremos que  $\varphi^{u_0} : [a, b] \rightarrow M$  es una **curva longitudinal** de la variación y dado  $t_0 \in [a, b]$ , diremos que la curva  $\varphi^{t_0} : (-\delta, \delta) \rightarrow M$  es una **curva transversal** a la variación. A la curva  $\alpha$  se la denomina **curva base** de la variación, y llamaremos **campo variacional** de  $\varphi$  al campo  $V$  sobre la curva  $\alpha$  tal que  $V(t) = \varphi_u(t, 0)$ , donde  $\varphi_u$  denota la derivada de  $\varphi$  en la dirección transversal, es decir, que para cada  $t \in [a, b]$ ,  $V(t)$  es el vector velocidad de la curva  $\varphi^t$  en el punto  $u = 0$ .*

Nos interesa estudiar la longitud de las curvas longitudinales de una variación para determinar cuándo una curva base temporal es la que maximiza la separación temporal entre sus extremos.

Denotemos como  $\mathcal{L}(\gamma)$  a la longitud de una curva  $\gamma$ , y denotemos también  $\mathcal{L}_V(u)$  a la longitud de la curva longitudinal  $\varphi^u$ , entonces  $\mathcal{L}_V(0) = \mathcal{L}(\alpha)$ , donde  $\alpha$  es la curva base de  $\varphi$ . Es decir,  $\mathcal{L}_V : (-\delta, \delta) \rightarrow \mathbb{R}$  y además escribiremos  $\mathcal{L}'_V = \frac{d\mathcal{L}_V}{du}$  y  $\mathcal{L}''_V = \frac{d^2\mathcal{L}_V}{du^2}$ .

Una variación  $\varphi$  de una curva diferenciable a trozos  $\alpha : [a, b] \rightarrow M$  es también diferenciable a trozos. Sean  $a = t_0 < t_1 < \dots < t_k < t_{k+1} = b$  los puntos en los que  $\alpha$  no es diferenciable, entonces la restricción de  $\varphi$  a cada  $[t_i, t_{i+1}] \times (-\delta, \delta)$  para  $i = 1, \dots, k$  es diferenciable. El campo variacional  $V$  es siempre diferenciable a trozos y podemos suponer que  $\alpha$  y  $\varphi$  tienen los mismos puntos en los que no son diferenciables. Por otro lado, el campo tangente a  $\alpha$  tendrá discontinuidades en  $\{t_i\}_{i=1, \dots, k}$ . Denotaremos  $\Delta\alpha'(t_i) = \alpha'(t_i^+) - \alpha'(t_i^-) \in T_{\alpha(t_i)}M$  donde  $\alpha'(t_i^\pm)$  denota el vector tangente a  $\alpha$  por la

derecha, i.e. por  $[t_i, t_{i+1}]$ , y  $\alpha'(t_i^-)$  denota el vector tangente de  $\alpha$  por la izquierda, i.e. por  $[t_{i-1}, t_i]$  para  $i = 1, \dots, k-1$ .

Con esta notación tenemos la fórmula de la primera variación de la longitud de arco:

**Proposición 48** *Sea  $\alpha : [a, b] \rightarrow M$  un segmento de curva, diferenciable a trozos, tal que  $|\alpha'| = |g(\alpha', \alpha')|^{\frac{1}{2}} = 1$ . Si  $\varphi$  es una variación de  $\alpha$  con campo variacional  $V$ , se tiene que:*

$$\mathcal{L}'_V(0) = \int_a^b g(\nabla_{\alpha'} \alpha', V) dt + \sum_{i=1}^{k-1} g(\Delta \alpha'(t_i), V(t_i)) - [g(\alpha', V)]_a^b$$

donde  $\nabla$  representa la conexión de Levi-Civita.

**Demostración.** Véase [13, proposición 10.2]. ■

Una variación  $\varphi$  con campo variacional  $V$  es de **extremos fijos** si  $V(a) = 0 \in T_{\alpha(a)}M$  y  $V(b) = 0 \in T_{\alpha(b)}M$ , es decir, la primera y la última curvas transversales son constantes.

**Corolario 49** *Un segmento  $\alpha$  de curva diferenciable a trozos, con velocidad constante  $|\alpha'| > 0$  es una geodésica diferenciable si y sólo si la primera variación de la longitud de arco  $\mathcal{L}'_V(0) = 0$  para toda variación  $\varphi$  de extremos fijos con campo variacional  $V$ .*

**Demostración.** Véase [13, corolario 10.3]. ■

**Observación 50** *Sea  $S$  una hipersuperficie diferenciable y  $\alpha : [a, b] \rightarrow M$  una curva diferenciable que maximiza la separación temporal entre  $S$  y un punto  $p \in M$ , es decir,  $\alpha(a) \in S$  y  $\alpha(b) = p$ , con  $p \in I^+(S)$ . Entonces es claro que  $\alpha$  también maximiza la separación temporal entre  $\alpha(a)$  y  $p$ . Por tanto, si tomamos una variación  $\varphi$  con campo variacional  $V$  de extremos fijos se tiene que*

$$0 = \mathcal{L}'_V(0) = \int_a^b g(\nabla_{\alpha'} \alpha', V) dt$$

para todo  $\varphi$  (y por tanto para todo  $V$ ) lo que implica que  $\nabla_{\alpha'} \alpha' = 0$  y por tanto  $\alpha$  es geodésica. Ahora bien, si tomamos otra variación  $\tilde{\varphi}$  de  $\alpha$  con campo variacional  $\tilde{V}$  tal que  $0 \neq \tilde{V}(a) \in T_{\alpha(a)}S$  y además  $\tilde{V}(b) = 0 \in T_{\alpha(b)}M$ , es decir, la variación  $\tilde{\varphi}$  tiene como único extremo fijo a  $p = \alpha(b)$  y por tanto

$$0 = \mathcal{L}'_{\tilde{V}}(0) = \int_a^b g(\nabla_{\alpha'} \alpha', \tilde{V}) dt - [g(\alpha', \tilde{V})]_a^b = g(\alpha'(a), \tilde{V}(a))$$

entonces se tiene que  $\alpha'(a)$  es ortogonal a  $\tilde{V}(a)$ . Podemos repetir este argumento para ver que si una curva  $\alpha$  maximiza la separación temporal entre dos hipersuperficies  $S$  y  $S'$  entonces se tiene que  $\alpha'(a)$  es ortogonal a  $S$  y  $\alpha'(b)$  es ortogonal a  $S'$ .

Por otro lado, si  $\alpha$  es una geodésica diferenciable tal que  $\mathcal{L}'_V(0) = 0$  entonces esto implica que  $\alpha$  es tal que su longitud  $\mathcal{L}(\alpha)$  es extrema entre  $\alpha(a)$  y  $\alpha(b)$ . En este caso tenemos la fórmula de la segunda variación de longitud de arco del teorema 51.

**Teorema 51** Sea  $\alpha : [a, b] \longrightarrow M$  una geodésica tal que  $|\alpha'| = 1$ . Si  $\varphi$  es una variación de  $\alpha$  con campo variacional  $V$  entonces

$$\mathcal{L}_V''(0) = \int_a^b [-g(\nabla_{\alpha'} V, \nabla_{\alpha'} V) + g(R(V, \alpha')V, \alpha')] dt - [g(\nabla_V V, \alpha')]_a^b$$

donde  $R$  es el tensor de curvatura.

**Demostración.** Véase [13, teorema 10.4] ■

A continuación y siguiendo [13, capítulo 14] vamos a introducir la noción de **separación temporal**. Este concepto relaciona estrechamente el cálculo de variaciones con la estructura causal de un espacio de Lorentz.

**Definición 52** Sean  $p, q \in M$  tales que  $p \leq q$ , entonces se define la separación temporal entre  $p$  y  $q$  como

$$\tau(p, q) = \sup \{ \mathcal{L}(\gamma) : \gamma \text{ segmento de curva causal futura desde } p \text{ hasta } q \}$$

considerando las siguientes convenciones:

$$\begin{aligned} \tau(p, q) &= \infty \text{ si el conjunto de longitudes no está acotado} \\ \tau(p, q) &= 0 \text{ si } p \text{ y } q \text{ son tales que } q \notin J^+(p) \end{aligned}$$

**Lema 53** La separación temporal  $\tau(p, q)$  entre  $p$  y  $q$  verifica las siguientes propiedades:

1.  $\tau(p, q) > 0$  si y sólo si  $q \in I^+(p)$ .
2. Si  $p \leq q \leq r$  entonces se tiene que  $\tau(p, q) + \tau(q, r) \leq \tau(p, r)$ . Esta propiedad se denomina **desigualdad inversa del triángulo**.

**Demostración.** La demostración puede verse en [13, lema 14.16]. ■

**Lema 54** La función separación temporal  $\tau$  es semicontinua inferior.

**Demostración.** Véase [13, lema 14.17]. ■

**Proposición 55** Sean  $p, q \in M$  tales que  $p < q$ . Si  $M$  globalmente hiperbólico entonces existe una geodésica causal  $\gamma$  uniendo  $p$  con  $q$  tal que  $\mathcal{L}(\gamma) = \tau(p, q)$ .

**Demostración.** Puede consultarse en [13, proposición 14.19]. ■

**Proposición 56** Si  $M$  es globalmente hiperbólico entonces la función separación temporal  $\tau$  es continua.

**Demostración.** Véase [13, lema 14.21]. ■



## Capítulo 3

# Espacios de Lorentz de punto omega

En este capítulo vamos a demostrar un teorema de Seifert que afirma la existencia de una superficie de Cauchy en un espacio de Lorentz de punto omega que cumpla la condición de distinción del pasado. Para ello vamos a demostrar una serie de lemas que compondrán la demostración completa del teorema. También vamos a caracterizar, bajo las mismas hipótesis, algunas de las superficies de Cauchy contenidas en estos espacios.

**Lema 57** *Si  $(M, g)$  cumple la condición cronológica entonces  $I^+(\partial I^+(p)) = I^+(p)$  para todo  $p \in M$ .*

**Demostración.** Demostremos primero que  $I^+(p) \subset I^+(\partial I^+(p))$ . Si se cumple la condición cronológica entonces se tiene que  $I^+(p) \cap I^-(p) = \emptyset$  y además  $p \notin I^+(p)$ . Si  $W$  es cualquier entorno de  $p$  se cumple que  $I^+(p) \cap W \neq \emptyset$  y  $I^-(p) \cap W \neq \emptyset$ . Por tanto  $p \in \partial I^+(p)$  y así tenemos que  $I^+(p) \subset I^+(\partial I^+(p))$ .

Veamos la inclusión inversa. Sea  $q \in I^+(\partial I^+(p))$ , entonces existe  $r \in \partial I^+(p)$  tal que  $q \in I^+(r)$  o lo que es lo mismo  $r \in I^-(q)$  y por tanto existe un entorno  $W$  de  $r$  tal que  $W \subset I^-(q)$ . Como además  $W \cap I^+(p) \neq \emptyset$  entonces existe  $s \in W \cap I^+(p)$  tal que  $q \in I^+(s)$ . Entonces como  $q \in I^+(s)$  y  $s \in I^+(p)$  se tiene que  $q \in I^+(p)$ . Por tanto  $I^+(\partial I^+(p)) \subset I^+(p)$ . ■

Por tanto queda demostrado que  $I^+(\partial I^+(p)) = I^+(p)$ .

**Lema 58** *Si  $(M, g)$  es un espacio de Lorentz de punto omega donde se cumple la condición de distinción del pasado entonces se tiene la descomposición  $M = \partial I^+(p) \cup I^+(p) \cup I^-(\partial I^+(p))$  para todo punto  $p \in M$  tal que es una unión disjunta.*

**Demostración.** Veamos primero que son disjuntos dos a dos:

a)  $\partial I^+(p) \cap I^+(p) = \emptyset$ .

Es trivial ya que  $I^+(p)$  es abierto.

$$b) I^+(p) \cap I^-(\partial I^+(p)) = \emptyset.$$

Sea  $q \in I^-(\partial I^+(p))$  entonces existe  $r \in \partial I^+(p)$  tal que  $r \in I^+(q)$ . Si suponemos que  $q \in I^+(p)$  entonces tendríamos que  $r \in I^+(p)$ . Así pues habríamos encontrado un punto  $r \in \partial I^+(p) \cap I^+(p)$ . Pero esto es una contradicción por lo visto en el apartado a).

$$c) \partial I^+(p) \cap I^-(\partial I^+(p)) = \emptyset.$$

Esto es obvio ya que  $\partial I^+(p)$  es un conjunto ácrono. Si  $q \in I^-(\partial I^+(p))$  entonces existe  $r \in \partial I^+(p)$  tal que  $r \in I^+(q)$ . Si suponemos además que  $q \in \partial I^+(p)$  entonces tanto  $r$  como  $q$  pertenecen a  $\partial I^+(p)$ , pero esto y el hecho de que  $r \in I^+(q)$  contradice que  $\partial I^+(p)$  sea un conjunto ácrono.

Continuemos ahora viendo la descomposición. Supongamos que existe un punto

$$q \in M \setminus [\partial I^+(p) \cup I^+(p) \cup I^-(\partial I^+(p))]$$

Tomemos unas curvas  $\gamma$  y  $\beta$  temporales inextensibles hacia el futuro que pasen por  $q$  y  $p$  respectivamente. Queremos ver que  $q \notin I^-(\beta)$ . Supongamos lo contrario, que  $q \in I^-(\beta)$ , entonces existe  $r \in \beta$  tal que  $r \in I^+(q)$ . Como el punto  $r$  pertenece a la curva  $\beta$  entonces o bien  $r \in I^+(p)$  o bien  $r \in I^-(p)$ . Entonces para toda curva  $\alpha$  temporal que una  $q$  con  $r$  se tiene:

- a) si  $r \in I^+(p)$ ,  $\alpha$  corta a  $\partial I^+(p)$  ya que  $q \notin I^+(p)$ , entonces tenemos que  $q \in I^-(\partial I^+(p))$ . Pero esto contradice que el punto  $q$  pertenece a  $M \setminus [\partial I^+(p) \cup I^+(p) \cup I^-(\partial I^+(p))]$ .
- b) si  $r \in I^-(p)$  entonces  $q \in I^-(p)$  y como se cumple la condición de distinción del pasado se tiene que  $p \in \partial I^+(p)$ , por tanto  $q \in I^-(\partial I^+(p))$ . Con lo que se vuelve a contradecir que  $q \in M \setminus [\partial I^+(p) \cup I^+(p) \cup I^-(\partial I^+(p))]$ .

Así pues, tenemos que  $q \notin I^-(\beta)$ . Ahora bien, como  $q \in I^-(\gamma)$  entonces  $I^-(\beta) \neq I^-(\gamma)$  y por tanto las curvas  $\beta$  y  $\gamma$  definen diferentes puntos en la c-frontera del futuro, lo que contradice la hipótesis del único punto omega. Así pues no existe ningún punto

$$q \in M \setminus [\partial I^+(p) \cup I^+(p) \cup I^-(\partial I^+(p))]$$

Por tanto hemos demostrado que podemos descomponer  $M$  como  $M = \partial I^+(p) \cup I^+(p) \cup I^-(\partial I^+(p))$ . ■

**Lema 59** Si  $(M, g)$  es un espacio de Lorentz de punto omega que cumple la condición de distinción del pasado entonces para todo punto  $p \in M$  se tiene que  $\partial I^-(\partial I^+(p)) = \partial I^+(p)$ .

**Demostración.** Es claro que  $I^-(\partial I^+(p)) \cap \partial I^-(\partial I^+(p)) = \emptyset$  ya que  $I^-(\partial I^+(p))$  es abierto y por tanto no contiene ningún punto de su frontera. Entonces por el lema 58 (pág. 29) tenemos que  $\partial I^-(\partial I^+(p)) \subset \partial I^+(p) \cup I^+(p)$ . Supongamos que tenemos un punto  $q \in \partial I^-(\partial I^+(p)) \cap I^+(p)$ , entonces existe  $W$  entorno de  $q$  tal que para todo

$V$  entorno de  $q$ ,  $V \subset W$ , se tiene que  $I^-(\partial I^+(p)) \cap V \neq \emptyset$  porque  $q \in \partial I^-(\partial I^+(p))$ , pero esto es imposible ya que para todo  $V$  entorno de  $q$  suficientemente pequeño se verifica que  $V \subset I^+(p)$  debido a que  $q \in I^+(p)$  y, de nuevo por el lema 58, sabemos que  $I^+(p) \cap I^-(\partial I^+(p)) = \emptyset$ . Por tanto no puede existir ningún  $q \in \partial I^-(\partial I^+(p)) \cap I^+(p)$ . Así pues  $\partial I^-(\partial I^+(p)) \subset \partial I^+(p)$ .

Veamos la inclusión inversa. Sea un punto  $q \in \partial I^+(p)$  entonces para todo  $W$  entorno de  $q$  se tiene que  $W \cap I^-(q) \neq \emptyset$ , así pues tenemos que  $W \cap I^-(\partial I^+(p)) \neq \emptyset$ . Entonces  $q \in \overline{I^-(\partial I^+(p))}$  y como  $q \notin \text{int}(I^-(\partial I^+(p)))$  entonces  $q \in \partial I^-(\partial I^+(p))$ . Así pues tenemos  $\partial I^+(p) \subset \partial I^-(\partial I^+(p))$  y por tanto concluimos que  $\partial I^-(\partial I^+(p)) = \partial I^+(p)$ . ■

Posiblemente este lema 59 es cierto para espacios de Lorentz más generales, sin la necesidad de que se verifique la condición de distinción de pasado ni que la  $c$ -frontera del futuro sea un único punto, pero para nuestras necesidades actuales es suficiente este resultado y, se expone por la necesidad para resolver un pequeño detalle técnico en la demostración del lema 60.

**Lema 60** *Si  $(M, g)$  es un espacio de Lorentz de punto omega que cumple la condición de distinción del pasado entonces la frontera ácrona  $\partial I^+(p)$  es una superficie de Cauchy para todo  $p \in M$ .*

**Demostración.** La observación 19 afirma que  $\partial I^+(p)$  es una hipersuperficie topológica cerrada, ácrona e inmersa en  $M$ . Por el lema 58 tenemos la descomposición  $M = \partial I^+(p) \cup I^+(p) \cup I^-(\partial I^+(p))$  para todo  $p \in M$ . Supongamos que  $\partial I^+(p)$  no es una superficie de Cauchy, entonces existe una curva  $\gamma$  temporal inextensible que no corta a  $\partial I^+(p)$ , entonces se tiene que  $\gamma \subset I^+(p) \cup I^-(\partial I^+(p))$  y como por el lema 59 hemos visto que  $\partial I^-(\partial I^+(p)) = \partial I^+(p)$  entonces o bien  $\gamma \subset I^-(\partial I^+(p))$  o bien  $\gamma \subset I^+(p)$ .

Supongamos primero que  $\gamma \subset I^-(\partial I^+(p))$ , entonces considerando sus pasados cronológicos se tiene que  $I^-(\gamma) \subset I^-(I^-(\partial I^+(p)))$  y, por el lema 46 (pág. 26) se tiene que

$$M = I^-(\gamma) \subset I^-(I^-(\partial I^+(p))) = I^-(\partial I^+(p))$$

contradiciendo la descomposición del lema 58. Así pues no es posible que la curva  $\gamma$  esté contenida en  $I^-(\partial I^+(p))$ .

Supongamos ahora que  $\gamma \subset I^+(p)$ . Como  $\gamma$  es inextensible, podemos tomar una sucesión de puntos  $\{q_m\}_{m \in \mathbb{N}} \subset \gamma$  tal que  $q_m \gg q_{m+1}$  para todo  $m$  de modo que no existan subsucesiones  $\{q_i\}$  que converjan a  $p$  y además para todo  $r \in \gamma$  existe un número  $k$  tal que  $q_k \in I^-(r)$ . Consideremos sucesiones de curvas  $\{\gamma_n\}$  y  $\{\beta_n\}$  tales que

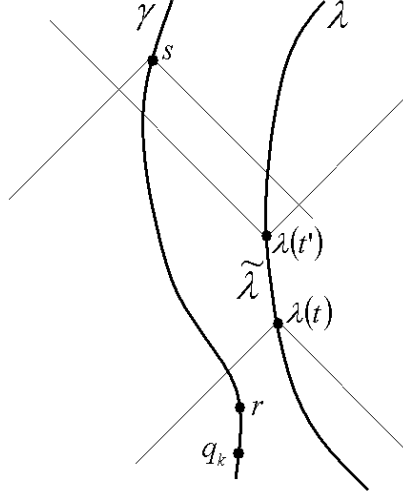
$$\gamma_n = \gamma \text{ restringida al conjunto } I^+(q_n)$$

$\beta_n$  es una curva temporal futura que une  $p$  con  $q_n$

Así pues, la sucesión de curvas  $\{\alpha_n\}$  tal que

$$\alpha_n = \beta_n \cup \gamma_n$$

es una sucesión de curvas temporales inextensibles hacia el futuro tales que  $\alpha_n(0) = p$  para todo  $n$ , y por lo tanto  $p$  es un punto de acumulación de  $\{\alpha_n\}$ , aunque el límite de  $\alpha_n$  no se reduce a  $p$ , es decir,  $\{\alpha_n\} \not\rightarrow p$ . Por tanto, por la proposición 24 (pág. 14) tenemos que existe una curva límite  $\lambda$  causal inextensible hacia el futuro que pasa por  $p$ . Demostremos entonces que  $\gamma \cap I^-(\lambda) = \emptyset$ .



**Figura 6:** Esquema de la demostración del lema 60.

Supongamos, por el contrario, que existe  $r \in \gamma \cap I^-(\lambda)$ , entonces existe  $k \in \mathbb{N}$  tal que  $q_i \in I^-(r)$  para todo  $i \geq k$  y, por tanto,  $q_i \in \gamma \cap I^-(\lambda)$ . Como  $\lambda$  es inextensible hacia el futuro, existe  $t$  tal que  $q_k \in I^-(\lambda(t))$  y entonces los puntos de acumulación de  $\{\beta_n\}$  están contenidos en  $\overline{I^-(q_k)}$ . Llamemos  $\tilde{\lambda}$  al segmento de  $\lambda$  contenido en  $I^+(\lambda(t))$ , que también será inextensible hacia el futuro. Supongamos que  $\lambda(t) \in \overline{I^-(q_k)}$ , como  $M$  es cronológico y  $q_k \in I^-(\lambda(t))$ , se tiene que  $\lambda(t) \in \partial I^-(q_k)$ . Como  $I^+(q_k)$  es un entorno de  $\lambda(t)$ , entonces existe  $s \in \overline{I^-(q_k)} \cap I^+(q_k)$ , lo que contradice la condición cronológica. Luego, tenemos que  $\lambda(t) \notin \overline{I^-(q_k)}$ . Por este motivo, los puntos de  $\tilde{\lambda}$  serán puntos de acumulación de  $\{\gamma_n\}$  y, por tanto, también lo serán de  $\gamma$ . Así,  $\gamma$  se acumula en  $\tilde{\lambda}$  a medida que se mueve hacia el futuro. Por otro lado, si tomamos un punto  $\lambda(t')$  de  $\tilde{\lambda}$ , como  $M$  es de punto omega, tenemos que la curva  $\gamma$  intersecará a  $I^+(\lambda(t'))$  y por tanto existe un punto  $s \in \gamma \cap I^+(\lambda(t'))$ . De esto se deduce, por el corolario 18 (pág. 12), que existe un segmento abierto  $\lambda_0 \subset \tilde{\lambda}$  tal que  $\lambda_0 \subset I^-(s)$ . Pero esto es contradictorio ya que los puntos de acumulación de  $\gamma$  se tienen que encontrar en  $I^+(s)$  y por tanto los puntos de  $\lambda_0$  no pueden ser puntos de acumulación de  $\gamma$  (ver figura 6) con lo que entonces  $\lambda_0$  no sería curva límite de  $\{\alpha_n\}$ . Así tenemos que  $\gamma \cap I^-(\lambda) = \emptyset$ , pero como  $M$  es de punto omega entonces esto no es posible ya que  $I^-(\lambda) = M$ . Por tanto, no existe  $\gamma$  totalmente contenida en  $I^+(p)$ . Veamos ahora que  $\gamma \cap \partial I^+(p)$  es un único punto. En efecto, sean  $r, s \in \gamma \cap \partial I^+(p)$  tales que  $s \in I^+(r)$ , pero esto es imposible ya que la observación 19 implica que  $\partial I^+(p)$  es una hipersuperficie ácrona y no existe curva temporal que conecte

los puntos  $r, s \in \partial I^+(p)$ . Hemos demostrado que dicha curva  $\gamma$  no puede existir y por tanto cualquier curva  $\gamma$  temporal inextensible debe cortar a  $\partial I^+(p)$  una única vez y, por tanto  $\partial I^+(p)$  es una superficie de Cauchy. ■

Existe un teorema debido a Penrose (ver [14, teorema 3.20]) que afirma que para todo  $q \in \partial I^+(p)$  se tiene que existe una geodésica nula  $\beta$  contenida en  $\partial I^+(p)$  con punto final futuro en  $q$  que bien es inextensible hacia el pasado o bien tiene punto final pasado en  $p$ . Diremos entonces que esas geodésicas nulas son **geodésicas nulas generadoras** de  $\partial I^+(p)$ .

**Lema 61** *Si  $M$  es de punto omega y cumple la condición de distinción del pasado entonces  $\partial I^+(p)$  es compacto y distinto del vacío para todo  $p \in M$ .*

**Demostración.** Observemos primero que como por el lema 60,  $M$  es globalmente hiperbólico, entonces es claro que  $\partial I^+(p) \neq \emptyset$  ya que se tiene que  $p \in \partial I^+(p)$ . Además también tenemos que para todo  $p \in M$ , el futuro causal  $J^+(p)$  es un conjunto cerrado y como  $\partial I^+(p) = \partial J^+(p)$ , así pues se tiene que

$$\partial I^+(p) = J^+(p) - I^+(p)$$

Entonces para cada  $q \in \partial I^+(p)$  existe una curva causal futura desde  $p$  hasta  $q$  que por el teorema de causalidad debe ser una geodésica nula generadora ya que  $q \notin I^+(p)$ .

Veamos ahora que toda geodésica nula generadora de  $\partial I^+(p)$  (inextensible hacia el futuro) abandona  $\partial I^+(p)$  para entrar en  $I^+(p)$ . Supongamos, por el contrario, que existe  $\beta$  geodésica nula generadora que no abandona  $\partial I^+(p)$ , es decir  $\beta \subset \partial I^+(p)$ . Entonces, tomando sus pasados cronológicos, tenemos que  $I^-(\beta) \subset I^-(\partial I^+(p))$ , y como  $M$  es de punto omega entonces  $I^-(\beta) = M$ . Así pues  $M = I^-(\beta) \subset I^-(\partial I^+(p))$  contradice la descomposición del lema 58. Por tanto no existe  $\beta \subset \partial I^+(p)$  geodésica nula generadora inextensible hacia el futuro.

Siguiendo la demostración<sup>1</sup> de [8, lema 5.1] definamos  $C(p) \subset \partial I^+(p)$  como el conjunto de puntos donde las geodésicas nulas generadoras abandonan  $\partial I^+(p)$ <sup>2</sup>. Sea  $X$  un campo temporal futuro y sea

$$\hat{O}(p) = \{u \in T_p M : g(u, u) = 0, g(u, X) = -1\}$$

Cada  $u \in \hat{O}(p)$  define una dirección nula futura a partir de  $p$  y se tiene además que  $\hat{O}(p)$  es compacto, de hecho es homeomorfo<sup>3</sup> a la esfera  $S^{n-2}$ . Si  $l_0 \in \mathbb{R}$  es tal que  $\exp_p(l_0 u) \in C(p)$  entonces diremos que  $l_0$  es **la distancia de  $p$  a  $C(p)$  en la dirección  $u$**  denotándola como  $l_0(u)$ . Es claro que  $l_0(u)$  está definido para todo  $u \in \hat{O}(p)$  ya que

<sup>1</sup>La demostración de Budic y Sachs es más general que la que se expone aquí.

<sup>2</sup>A  $C(p)$  se le denomina en inglés *future null cut locus* de  $p$  y es un conjunto bien definido. Está formado por los primeros puntos conjugados de cada geodésica nula generadora. Para más detalles se puede consultar [4, capítulo 9] y [8].

<sup>3</sup>En el caso en que  $n = 2$ ,  $\hat{O}(p)$  consiste simplemente en un par de puntos.

toda geodésica generadora abandona  $\partial I^+(p)$  desde cualquier dirección. Definamos ahora el conjunto

$$O(p) = \left\{ \xi u \in T_p M : u \in \hat{O}(p), 0 \leq \xi \leq l_0(u) \right\}$$

Es trivial que  $\partial I^+(p) = \exp_p O(p)$ , así que si demostramos que  $O(p)$  es compacto entonces como la aplicación  $\exp_p$  es continua se tiene que  $\partial I^+(p)$  es compacto.

En efecto, tomemos una sucesión  $\{v_n\} \subset O(p)$ , ésta define otra sucesión  $\{u_n\} \subset \hat{O}(p)$  de tal manera que  $v_n = \xi_n u_n$  para algún  $\xi_n \leq l_0(u_n)$ . Como  $\hat{O}(p)$  es compacto entonces  $u_n \mapsto u \in \hat{O}(p)$ . Como  $l_0(u)$  es finito, queremos ver que  $\{\xi_n\}$  tiene un límite  $\xi \in [0, l_0(u)]$  ya que entonces  $\xi u \in O(p)$  es un límite para la sucesión  $\{v_n\}$ . Supongamos por el contrario que  $\{\xi_n\}$  no tiene ningún límite en el intervalo  $[0, l_0(u)]$ , entonces podemos encontrar un número  $\eta$  y una subsucesión  $\{\xi_k\}$  tales que  $\xi_k > \eta > l_0(u)$  para todo  $k$ . Ahora bien, como  $\eta > l_0(u)$  entonces  $p' = \exp_p \eta u \in I^+(p)$ . Para cualquier  $q \in I^+(p) \cap I^-(p')$  se tiene que  $I^+(q)$  y  $I^-(q)$  son entornos de  $p'$  y  $p$  respectivamente. Para un  $k$  suficientemente grande se tiene que  $\exp_p v_k \in I^+(q) \subset I^+(p)$  y como  $v_n = \xi_n u_n$  entonces se contradice que  $\xi_n \leq l_0(u_n)$ . En resumen, cualquier sucesión  $\{v_n\} \subset O(p)$  tiene límite en  $O(p)$  y por tanto  $O(p)$  es compacto y entonces  $\partial I^+(p) = \exp_p O(p)$  es compacto. ■

**Teorema 62** (Seifert) *Si  $M$  es un espacio de Lorentz de punto omega que verifica la condición de distinción del pasado entonces  $M$  es globalmente hiperbólico y las superficies de Cauchy son compactas.*

**Demostración.** Es una consecuencia directa de los lemas 60 y 61. ■

Este teorema 62 y el lema 61 nos permiten demostrar que además de ser  $\partial I^+(p)$  una superficie de Cauchy para todo  $p \in M$ , tenemos que  $\partial I^-(q)$  es superficie de Cauchy siempre y cuando  $q$  esté suficientemente cerca del punto omega. Para demostrar este resultado y entender el significado de "suficientemente cerca del punto omega" necesitamos unos lemas previos.

En todo lo que sigue a continuación y hasta el final de esta sección vamos a considerar que  $M$  es un espacio de Lorentz de punto omega que verifica la condición de distinción de pasado.

Por el teorema 62 se tiene que  $M$  es globalmente hiperbólico y que sus superficies de Cauchy son compactas. Así pues, la proposición 36 nos asegura la existencia de una foliación  $S(t)$  de superficies de Cauchy espaciales, diferenciables donde  $t$  se incrementa en la dirección temporal futura. Esto es equivalente a la existencia de una función tiempo de Cauchy diferenciable  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $f^{-1}(t) = S(t)$ . El campo vectorial

$$X = \frac{\nabla f}{\mathbf{g}(\nabla f, \nabla f)} \tag{3.1}$$

es ortogonal a cada  $S(t)$ , es decir, todas las curvas integrales de  $X$  cortan ortogonalmente a todas las  $S(t)$  y además si  $\lambda$  es una curva integral entonces  $f \circ \lambda(t) = t$ , es decir que

las curvas integrales se pueden parametrizar mediante el parámetro de la foliación. En efecto,

$$\begin{aligned} (f \circ \lambda)'(t) &= df \cdot (\lambda'(t)) = df \cdot (X(\lambda(t))) = \\ &= \mathbf{g}(\nabla f, X(\lambda(t))) = \mathbf{g}\left(\nabla f, \frac{\nabla f}{\mathbf{g}(\nabla f, \nabla f)}\right) = 1 \end{aligned}$$

por tanto  $f \circ \lambda(t) = t + c$  donde  $c$  es la constante de integración que podemos normalizar para que  $f \circ \lambda(t) = t$ .

**Lema 63** *Sea  $M$  un espacio de Lorentz de punto omega que verifica la condición de distinción de pasado. Si  $\gamma \subset M$  es una curva temporal inextensible hacia el futuro entonces no existe  $p \in M$  tal que  $\gamma \subset I^-(p)$ .*

**Demostración.** Este es un resultado trivial. Supongamos que existiese  $p \in M$  tal que  $\gamma \subset I^-(p)$ , entonces tendríamos que  $I^-(\gamma) \subset I^-(I^-(p)) = I^-(p)$  y como  $M$  es de punto omega  $I^-(\gamma) = M$  y entonces  $M \subset I^-(p)$  lo que es una contradicción por la proposición 44. ■

**Corolario 64** *Sea  $M$  un espacio de Lorentz de punto omega que verifica la condición de distinción de pasado y sea  $p \in M$ , entonces toda curva  $\gamma \subset M$  temporal inextensible hacia el futuro tal que  $\gamma \cap I^-(p) \neq \emptyset$  interseca a  $\partial I^-(p)$ .*

**Demostración.** Como por el lema 63  $\gamma \not\subset I^-(p)$  entonces  $\gamma$  debe salir de  $I^-(p)$  y por tanto tiene que intersecar a su frontera  $\partial I^-(p)$ . ■

**Lema 65** *Sea  $M$  un espacio de Lorentz de punto omega que verifica la condición de distinción de pasado. Sea  $\gamma$  una curva temporal inextensible. Si existe  $p \in M$  tal que  $\gamma \cap \partial I^-(p) \neq \emptyset$  entonces para todo  $q \in I^+(p)$  se tiene que  $\gamma \cap \partial I^-(q) \neq \emptyset$ .*

**Demostración.** Sabemos que  $M$  es globalmente hiperbólico, entonces si  $q \in I^+(p)$  se tiene que  $I^-(p) \subset I^-(q)$ . Además es fácil ver que  $\partial I^-(p) \cap \partial I^-(q) = \emptyset$ . En efecto, supongamos que existe  $r \in \partial I^-(p) \cap \partial I^-(q)$  entonces como  $\partial I^-(p) = J^-(p) - I^-(p)$  se tiene que

$$r \in J^-(p)$$

y como  $p \in I^-(q)$  entonces por el corolario 18 (pág. 12) tenemos que  $r \in I^-(q)$  contradiciendo que  $r \in \partial I^-(q) = J^-(q) - I^-(q)$ . Por tanto  $\partial I^-(p) \cap \partial I^-(q) = \emptyset$ . Ahora bien, si  $I^-(p) \subset I^-(q)$  son abiertos tales que  $\partial I^-(p) \cap \partial I^-(q) = \emptyset$  entonces esto implica que

$$\partial I^-(p) \subset I^-(q)$$

Por hipótesis  $\gamma \cap \partial I^-(p) \neq \emptyset$  y por tanto  $\gamma \cap I^-(q) \neq \emptyset$ . Por el corolario 64 concluimos que

$$\gamma \cap \partial I^-(q) \neq \emptyset$$

como queríamos demostrar. ■

**Corolario 66** Sea  $M$  un espacio de Lorentz de punto omega que verifica la condición de distinción de pasado y sea  $X$  el campo vectorial definido en 3.1. Sean  $\lambda$  curva integral de  $X$  y  $\gamma$  una curva temporal inextensible. Si existe  $t$  tal que  $\gamma \cap \partial I^-(\lambda(t)) = \emptyset$  entonces  $\gamma \cap \partial I^-(\lambda(t')) = \emptyset$  para todo  $t' \leq t$ .

**Demostración.** Este corolario es un caso particular del lema 65, basta tomar  $p = \lambda(t')$ , negar la tesis y así se obtiene la negación de la hipótesis. ■

**Lema 67** Sea  $M$  un espacio de Lorentz de punto omega que verifica la condición de distinción de pasado y sea  $X$  el campo vectorial definido en 3.1. Sea  $\lambda$  una curva integral de  $X$ . Si para toda  $\mu$  curva integral de  $X$  se tiene que  $\mu \cap \partial I^-(\lambda(t_0)) \neq \emptyset$  entonces  $\partial I^-(\lambda(t_0))$  es una superficie de Cauchy.

**Demostración.** Por la observación 19 (pág. 12) sabemos que  $\partial I^-(\lambda(t_0))$  es una superficie topológica ácrona, cerrada e inmersa en  $M$ . Consideremos una superficie  $S_0$  de la foliación  $S(t)$ . Para cada punto  $p \in S_0$  existe  $\mu_p$  curva integral de  $X$  tal que  $p \in \mu_p$ . Por hipótesis sabemos que toda curva integral  $\mu_p$  de  $X$  corta a  $\partial I^-(\lambda(t_0))$  y como  $\partial I^-(\lambda(t_0))$  es un conjunto ácrono sólo cortará en un único punto  $q_p$ . Definimos la función  $\varphi : S_0 \rightarrow \mathbb{R}$  donde  $t_p$  es el valor de  $t$  para el que  $q_p \in S(t)$ . La función  $\varphi$  es continua ya que  $\partial I^-(\lambda(t_0))$  es una hipersuperficie y cualquier curva integral de  $X$  la interseca. Como  $S_0$  es compacto existe  $m_-$  el mínimo de  $\varphi$ . De esta manera tenemos que existe  $m_* < m_-$  tal que

$$S(m_-) \subset I^+(S(m_*))$$

y además como toda curva integral de  $X$  corta a  $\partial I^-(\lambda(t_0))$  por hipótesis y a  $S(m_*)$  por ser ésta superficie de Cauchy, entonces

$$S(m_*) \subset I^-(\partial I^-(\lambda(t_0))) = I^-(\lambda(t_0))$$

Como toda curva  $\gamma$  temporal inextensible corta a  $S(m_*)$  y como  $S(m_*) \subset I^-(\lambda(t_0))$  entonces por el corolario 64 tenemos que  $\gamma \cap \partial I^-(\lambda(t_0)) \neq \emptyset$  como queríamos demostrar. ■

**Lema 68** Sea  $M$  un espacio de Lorentz de punto omega que verifica la condición de distinción de pasado y sea  $X$  el campo vectorial definido en 3.1. Sea  $\lambda$  una curva integral de  $X$ . Si para todo  $t$  existe una curva integral  $\mu_t$  de  $X$  tal que  $\mu_t \cap \partial I^-(\lambda(t)) = \emptyset$  entonces existe  $\mu$  curva integral de  $X$  tal que  $\mu \cap \partial I^-(\lambda(t)) = \emptyset$  para todo  $t$ .

**Demostración.** Como  $M$  es un espacio-tiempo de punto omega, se tiene que  $\bigcup_u I^-(\lambda(u))$  es un recubrimiento de  $M$  y además como las superficies de Cauchy de la foliación  $S(u)$  son compactas, si fijamos una superficie de Cauchy  $S_0$  perteneciente a la familia  $S(u)$ , entonces podemos encontrar un subrecubrimiento finito de  $S_0$  y por tanto un valor  $T$  tal que  $S_0 \subset I^-(\lambda(T))$ . Si  $s \in \partial I^-(\lambda(T))$ , cualquier curva temporal inextensible que pase por  $s$  intersecará a  $S_0$  y como  $S_0 \subset I^-(\lambda(T))$  entonces  $s \in I^+(S_0)$ . Así pues tenemos



que  $\partial I^-(\lambda(T)) \subset I^+(S_0)$ . Si  $p \in S_0$  llamaremos  $\mu_p$  a la curva integral de  $X$  que pasa por  $p$ . Definimos en  $S_0$  los siguientes conjuntos:

$$A(t) = \{p \in S_0 : \mu_p \cap \partial I^-(\lambda(t)) = \emptyset\}$$

El corolario 66 nos indica que  $A(t) \subseteq A(t')$  cuando  $t \geq t'$  y por hipótesis como para todo  $t$  existe  $\mu_t$  tal que  $\mu_t \cap \partial I^-(\lambda(t)) = \emptyset$  entonces es claro que  $A(t) \neq \emptyset$  para todo  $t$ . Si demostramos que  $A(t)$  es cerrado para todo  $t \geq T$ , entonces tendremos que  $\bigcap_{t \geq T} A(t) \neq \emptyset$

por ser  $S_0$  compacto (ver [12, teorema 5.9]) y por tanto existe una curva integral  $\mu_r$  con  $r \in \bigcap_{t \geq T} A(t)$  tal que se tiene que  $\mu_r \cap \partial I^-(\lambda(t)) = \emptyset$  para todo  $t \geq T$  y con el corolario

66 podemos concluir que  $\mu_r \cap \partial I^-(\lambda(t)) = \emptyset$  para todo  $t$ .

Veamos que  $A(t)$  es cerrado o equivalentemente que  $S_0 - A(t)$  es abierto para todo  $t \geq T$ . En efecto, sea  $t \geq T$  y sea  $q \in S_0 - A(t)$ , entonces la curva  $\mu_q$  interseca a  $\partial I^-(\lambda(t))$  en un punto  $r \in I^+(q)$ . Entonces el conjunto  $U = I^-(r) \cap (S_0 - A(t))$  es un entorno de  $q$  en  $S_0$ . Por el corolario 64 (pág. 35) obtenemos que cualquier curva integral  $\mu_q$  con  $q \in U$  intersecará a  $\partial I^-(r)$  en un punto  $s \in \mu_q \cap \partial I^-(r)$ . Entonces  $s \in J^-(r)$  y como  $r \in J^-(\lambda(t))$  entonces tenemos que  $s \in J^-(\lambda(t))$ . Ahora bien, como  $J^-(\lambda(t)) = \partial I^-(\lambda(t)) \cup I^-(\lambda(t))$  siendo esta unión disjunta, si  $s \in \partial I^-(\lambda(t))$  concluimos que para todo  $q \in U$  la curva integral  $\mu_q$  corta a  $\partial I^-(\lambda(t))$ . Si por el contrario  $s \in I^-(\lambda(t))$  entonces el corolario 64 nos permite concluir que  $\mu_q \cap \partial I^-(\lambda(t)) \neq \emptyset$ . Así pues  $S_0 - A(t)$  es abierto y por tanto  $A(t)$  es un cerrado en  $S_0$ . ■

Ahora estamos en disposición de demostrar la siguiente proposición:

**Proposición 69** *Si  $M$  es un espacio de Lorentz de punto omega que verifica la condición de distinción de pasado entonces existe una superficie de Cauchy  $S \subset M$  tal que para todo  $p \in I^+(S)$  se tiene que  $\partial I^-(p)$  es una superficie de Cauchy.*

**Demostración.** Como  $M$  es globalmente hiperbólico, por el teorema 62, entonces existe una función tiempo de Cauchy  $f \in \mathcal{F}(M)$ . Sea  $X = \frac{\nabla f}{\mathbf{g}(\nabla f, \nabla f)} \in \mathfrak{X}(M)$  y sea  $\lambda$  una curva integral de  $X$ , entonces afirmamos que existe  $t$  tal que  $\partial I^-(\lambda(t))$  es superficie de Cauchy. Supongamos que no es cierto, es decir, que  $\partial I^-(\lambda(t))$  no es superficie de Cauchy para ningún  $t$ . Entonces por el lema 67 tenemos que para cada  $t$  existe una curva integral  $\mu_t$  tal que  $\mu_t \cap \partial I^-(\lambda(t)) = \emptyset$ . Pero por el lema 68 tenemos que existe una curva integral  $\mu$  tal que  $\mu \cap \partial I^-(\lambda(t)) = \emptyset$  para todo  $t$  y esto implica que  $\mu \cap I^-(\lambda) = \emptyset$  por lo que se contradeciría que  $M$  es de punto omega. Así pues existe  $t$  tal que  $\partial I^-(\lambda(t))$  es superficie de Cauchy. Entonces cualquier curva  $\gamma$  temporal inextensible es tal que  $\gamma \cap \partial I^-(\lambda(t)) \neq \emptyset$  y por el lema 65 tenemos que para todo  $q \in I^+(\lambda(t)) = I^+(\partial I^-(\lambda(t)))$  se verifica que  $\gamma \cap \partial I^-(q) \neq \emptyset$ . Así pues tenemos que si  $S = \partial I^+(\lambda(t))$  entonces para todo  $q \in I^+(S)$  se verifica que  $\partial I^-(q)$  es una superficie de Cauchy. ■

## Capítulo 4

# Foliaciones canónicas en espacios de Lorentz de punto omega

**Lema 70** *Si  $M$  es un espacio de Lorentz de punto omega que verifica la condición de distinción del pasado, entonces existe una superficie de Cauchy  $S$  tal que se verifica que  $M - [I^+(p) \cup I^-(p)]$  es compacto para todo  $p \in I^+(S)$ .*

**Demostración.** Por la proposición 69 tenemos que existe una superficie de Cauchy  $S$  tal que para todo  $p \in I^+(S)$  se tiene que  $\partial I^-(p)$  es una superficie de Cauchy. Tomemos entonces  $p \in I^+(S)$ . Como los conjuntos  $I^+(p)$  y  $I^-(p)$  son abiertos entonces  $M - [I^+(p) \cup I^-(p)]$  es un conjunto cerrado. Como  $M$  es globalmente hiperbólico, por la proposición 36 (pág. 18) existe una foliación  $S(t)$  de  $M$  tal que  $S(a)$  es una superficie de Cauchy espacial para todo  $a \in \mathbb{R}$ . Además sabemos que  $\partial I^-(p)$  y  $\partial I^+(p)$  son superficies de Cauchy compactas, por tanto existen  $t_0, t_1 \in \mathbb{R}$  tales que  $t_0 < t_1$  y

$$\partial I^+(p) \subset I^-(S(t_1)) \quad (4.1)$$

$$\partial I^-(p) \subset I^+(S(t_0)) \quad (4.2)$$

Demostremos que  $I^+(S(t_1)) \subset I^+(p)$ . En efecto, si  $s \in I^+(S(t_1))$  existe  $r \in S(t_1)$  tal que  $s \in I^+(r)$ . Como  $\partial I^+(p)$  es superficie de Cauchy y como se verifica 4.1 entonces cualquier curva  $\gamma$  temporal inextensible que pase por  $r$  intersecará a  $\partial I^+(p)$  en un punto  $u \in \partial I^+(p) \cap \gamma$ . Es decir,  $s \in I^+(u)$  y  $u \in \partial I^+(p)$ . Tomemos un entorno  $W$  de  $u$  tal que  $W \subset I^-(s)$  y como  $u \in \partial I^+(p)$  se tiene que  $W \cap I^+(p) \neq \emptyset$ . Por tanto, existe  $w \in W \cap I^+(p)$  lo que implica que  $w \in I^-(s) \cap I^+(p)$  y por tanto  $s \in I^+(p)$ . Esto concluye que  $I^+(S(t_1)) \subset I^+(p)$ . De forma análoga se puede ver usando 4.2 que  $I^-(S(t_0)) \subset I^-(p)$ . Así pues

$$M - [I^+(p) \cup I^-(p)] \subset M - [I^+(S(t_1)) \cup I^-(S(t_0))]$$

y como  $M \simeq S(t_0) \times \mathbb{R}$  se tiene que

$$M - [I^+(S(t_1)) \cup I^-(S(t_0))] \simeq S(t_0) \times [t_0, t_1]$$

que es un producto de conjuntos compactos y por tanto compacto. Como  $M - [I^+(p) \cup I^-(p)]$  es un cerrado dentro de un compacto entonces también es compacto. ■

**Teorema 71** (Bartnik) *Sea  $M$  un espacio de Lorentz globalmente hiperbólico con superficie de Cauchy compacta que verifica la condición de convergencia temporal. Si  $M - [I^+(p) \cup I^-(p)]$  es compacto para algún  $p \in M$  entonces existe una superficie de Cauchy  $S$  diferenciable<sup>1</sup>, con curvatura media constante tal que  $p \in S$ .*

**Demostración.** La demostración de Bartnik utiliza técnicas y argumentos analíticos que exceden el propósito de este trabajo por lo que la omitimos. Esta demostración puede verse en [2]. ■

La propiedad de que el conjunto  $M - [I^+(p) \cup I^-(p)]$  sea compacto es determinante para que un espacio de Lorentz sea de punto omega, como se puede comprobar en la siguiente proposición.

**Proposición 72** *Sea  $M$  un espacio de Lorentz globalmente hiperbólico. Si existe una superficie de Cauchy  $T$  verificando que*

$$M - [I^+(p) \cup I^-(p)]$$

*es compacto para todo  $p \in I^+(T)$ , entonces  $M$  es de punto omega.*

**Demostración.** Procedamos por reducción al absurdo. Si  $M$  no es de punto omega, entonces existen una curva  $\gamma : [a, b) \rightarrow M$  temporal futura inextensible hacia el futuro y un punto  $q \in M$  tales que  $q \notin I^-(\gamma)$  y, por tanto,  $\gamma \cap I^+(q) = \emptyset$ . Sea  $T$  cualquier superficie de Cauchy y sea  $\beta$  una curva temporal inextensible tal que  $q \in \beta$ . Como  $T$  es una superficie de Cauchy, existe  $p \in \beta \cap I^+(T) \cap I^+(q)$  y, por tanto, como  $p \in I^+(q)$  entonces  $I^+(p) \subset I^+(q)$ , por lo que  $\gamma \cap I^+(p) = \emptyset$ . Sea  $\mu : (c, a] \rightarrow M$  una curva temporal futura inextensible hacia el pasado tal que  $\mu(a) = \gamma(a)$ , entonces la curva  $\tilde{\gamma}$  definida como

$$\tilde{\gamma}(s) = \begin{cases} \mu(s) & \text{si } s \in (c, a] \\ \gamma(s) & \text{si } s \in [a, b) \end{cases}$$

es temporal futura e inextensible. Sea  $S$  una superficie de Cauchy que contiene al punto  $p$ , entonces  $\tilde{\gamma} \cap S \neq \emptyset$  y como  $\tilde{\gamma}$  es temporal inextensible existe  $s_0 \in (c, b)$  tal que  $\tilde{\gamma}(s_0) \in I^+(S)$  y por tanto también existe  $s_1 \in [a, b)$  tal que  $\tilde{\gamma}(s_1) = \gamma(s_1) \in I^+(S)$ . A partir de este valor  $s_1$  podemos tomar una sucesión  $\{s_k\}_{k=1}^{\infty}$  creciente tal que  $\lim_{k \rightarrow \infty} s_k = b$ . Como  $\gamma \cap I^+(p) = \emptyset$  entonces para todo  $k$  se tiene que

$$\gamma(s_k) \notin I^+(p)$$

---

<sup>1</sup>El enunciado de Bartnik de [2] dice que la superficie debe ser  $C^{2,\alpha}$  ya que trabaja con la clase  $C^2$ . En la demostración utiliza [1, teorema 4.1] donde se indica que si consideramos la clase  $C^k$  entonces la superficie es  $C^{k,\alpha}$  para  $k \geq 1$ . Como nosotros estamos trabajando con la clase  $C^\infty$  entonces nuestra superficie será también  $C^\infty$ .

y como  $\gamma(s_k) \in I^+(S)$  para todo  $k$  y  $p \in S$  entonces

$$\gamma(s_k) \notin I^-(p)$$

por lo que

$$\gamma(s_k) \in M - [I^+(p) \cup I^-(p)]$$

Además, como  $\gamma$  es inextensible hacia el futuro, entonces la sucesión  $\{\gamma(s_k)\}$  no tiene límite. Luego hemos encontrado una sucesión

$$\{\gamma(s_k)\} \subset M - [I^+(p) \cup I^-(p)]$$

no convergente. Esto implica que para toda superficie de Cauchy  $T$  existe  $p \in I^+(T)$  tal que el conjunto  $M - [I^+(p) \cup I^-(p)]$  no es compacto, como queríamos demostrar. ■

**Lema 73** *Sea  $S$  una hipersuperficie diferenciable, espacial y compacta, y sea  $\tilde{N}$  el campo vectorial normal a  $S$  unitario y futuro. Entonces existe  $\epsilon > 0$  tal que la aplicación*

$$\Phi(p, t) = \exp_p(t\tilde{N}(p))$$

está definida para todo  $p \in S$  y todo  $t$  con  $|t| < \epsilon$ . Además el conjunto

$$S_t = \left\{ \exp_q(t\tilde{N}(q)) : q \in S \right\} \quad (4.3)$$

es una hipersuperficie diferenciable, espacial y compacta.

**Demostración.** Vamos a extender  $\tilde{N}$  a un campo  $N$  en un entorno  $U$  de  $S$ . Para cada punto  $p \in S$  existe un entorno  $\mathcal{U}^p$  de  $p$  en  $S$  y un  $\delta_p > 0$  tales que para todo  $x \in \mathcal{U}^p$  la curva geodésica  $\gamma_x(t) \equiv \exp_x(t\tilde{N}(x))$  está definida para todo  $t \in (-\delta_p, \delta_p)$  y no tiene puntos conjugados. Como  $S$  es compacta entonces existen  $p_1, p_2, \dots, p_m$  tales que  $S = \bigcup_{i=1}^m \mathcal{U}^{p_i}$ , es decir,  $S$  tiene un recubrimiento finito formado por  $\{\mathcal{U}^{p_i}\}_{i=1, \dots, m}$ . Tomando entonces  $\delta = \min_{i=1, \dots, m} \{\delta_{p_i}\} > 0$  se verifica que para todo  $p \in S$  la curva  $\gamma_p(t)$  está definida para  $t \in (-\delta, \delta)$ , por lo que entonces la aplicación

$$\begin{aligned} \Phi : S \times (-\delta, \delta) &\longrightarrow M \\ (q, t) &\longmapsto \Phi(q, t) = \exp_q(t\tilde{N}(q)) \end{aligned}$$

está definida en  $S \times (-\delta, \delta)$ . Así, si  $q = \Phi(p, t) = \gamma_p(t)$  podemos definir  $N(q) \equiv \gamma'_p(t)$  que resulta ser una extensión del campo  $\tilde{N}$  en  $U = \Phi(S \times (-\delta, \delta)) \subset M$  que es un abierto que contiene a  $S$ . Elegimos ahora  $\{\tilde{V}_i\}_{i=1, \dots, n-1}$  campos vectoriales sobre  $S$  tales que  $\{\tilde{V}_i(p)\}_{i=1, \dots, n-1}$  sean base ortonormal de  $T_p S$  para todo  $p \in S$ . Podemos extender estos campos a campos  $V_i$  en el entorno  $U$  transportando paralelamente  $\tilde{V}_i(p)$  a lo largo

de  $\gamma_p(t)$  para todo  $p \in S$ . Como para cada  $(p, 0) \in S \times (-\delta, \delta)$  tenemos que la diferencial de  $\Phi$  es un difeomorfismo local ya que

$$d\Phi_{(p,0)} \left( \left( \mathbf{0}_p, \frac{\partial}{\partial u} \Big|_0 \right) \right) = \tilde{N}(p) \in T_p M$$

$$d\Phi_{(p,0)} \left( \tilde{V}_i(p), \mathbf{0}_0 \right) = \tilde{V}_i(p) \in T_p M$$

donde  $\frac{\partial}{\partial u}$  es el campo tangente a las curvas  $\alpha_q(u) = (q, u) \in S \times (-\delta, \delta)$ , es decir,  $d\Phi_{(p,0)}$  es un isomorfismo por transformar una base de  $T_{(p,0)}(S \times \mathbb{R}) \approx T_p S \times T_0 \mathbb{R}$  en una base de  $T_p M$ . Entonces existe un entorno  $\mathcal{W}^p \times (-\epsilon_p, \epsilon_p)$  de  $(p, 0) \in S \times (-\delta, \delta)$  con  $0 < \epsilon_p \leq \delta$  en el que  $\Phi$  es un difeomorfismo local. Del recubrimiento  $\{\mathcal{W}^p\}_{p \in S}$  de  $S$  se puede extraer un subrecubrimiento finito ya que  $S$  es compacta, así  $S = \bigcup_{i=1}^k \mathcal{W}^k$  y, por tanto, considerando  $\epsilon$  tal que  $0 < \epsilon \leq \min_{i=1, \dots, k} \{\epsilon_i\}$  tenemos que

$$S \times (-\epsilon, \epsilon) = \bigcup_{i=1}^k \mathcal{W}^k \times (-\epsilon, \epsilon)$$

Así, para cualquier  $(p, t) \in S \times (-\epsilon, \epsilon)$ , la aplicación  $\Phi$  es un difeomorfismo local. Si llamamos  $W = \Phi(S \times (-\epsilon, \epsilon))$ , la biyectividad de  $\Phi : S \times (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow W$  se obtiene debido a la inexistencia de puntos conjugados en las geodésicas  $\gamma_q$  definidas en el intervalo  $(-\epsilon, \epsilon)$ .

Si fijamos  $t \in (-\epsilon, \epsilon)$ , entonces el conjunto

$$S_t = \left\{ \exp_q \left( t \tilde{N}(q) \right) : q \in S \right\}$$

es una hipersuperficie diferenciable y compacta ya que es la imagen de  $S \times \{0\}$  mediante el difeomorfismo  $\Phi$ . Por otro lado, como para todo  $p \in S$  se tiene que  $\{\tilde{V}_i(p)\}_{i=1, \dots, n-1}$  es una base ortonormal de  $T_p S$  de vectores espaciales, su transporte paralelo a lo largo de la geodésica  $\gamma_p$  hasta  $\gamma_p(t)$ , es decir, los vectores  $\{V_i(\gamma_p(t))\}_{i=1, \dots, n-1}$  siguen siendo espaciales y forman una base ortonormal de  $T_{\gamma_p(t)} S_t$ , por lo que  $S_t$  es espacial. ■

**Proposición 74** *Sea  $S$  una superficie de Cauchy diferenciable, espacial y compacta. Si  $S_t$  es una de las hipersuperficies 4.3 construidas en el lema 73 a partir de  $S$ , entonces  $S_t$  es una superficie de Cauchy.*

**Demostración.** Consideremos el abierto  $W$  que contiene a la superficie de Cauchy  $S$  y que es diferomorfo a  $S \times (-\epsilon, \epsilon)$  mediante la aplicación

$$\Phi(q, t) = \exp_q \left( t \tilde{N}(q) \right)$$

donde el campo vectorial  $N$  es la extensión del normal a  $S$  construido en la proposición 73. Supongamos que  $t$  es tal que  $0 < t < \epsilon$  entonces se tiene que si  $\Phi_t(q) = \exp_q \left( t \tilde{N}(q) \right)$

entonces se tiene que  $\Phi_t(S) = S_t$ . Considerando el conjunto compacto  $S \times [0, t]$ , tenemos que  $Z = \Phi(S \times [0, t])$  es un compacto en el espacio de Lorentz  $M$  cuya frontera es

$$\partial Z = \partial\Phi(S \times [0, t]) = \Phi(S \times \{0\}) \cup \Phi(S \times \{t\}) = S \cup S_t$$

Así, cualquier curva temporal inextensible  $\gamma$  contiene puntos en  $\text{int}(Z)$  ya que  $\gamma$  interseca previamente a  $S$  en un punto  $\{r\} = \gamma \cap S$ . Como  $M$  es globalmente hiperbólico, por la proposición 28 tenemos que  $\gamma$  no puede estar ni total ni parcialmente aprisionada en  $Z$ , por lo que, una vez que ha entrado, tiene que salir de  $Z$ , y como  $S$  es una superficie de Cauchy, entonces no puede salir de  $Z$  intersectando otra vez a  $S$ , sino a la otra componente conexa de  $\partial Z$ , esta es  $S_t$ . Luego cualquier curva temporal inextensible  $\gamma$  interseca a  $S_t$ . Supongamos que existen dos puntos distintos  $p, q \in \gamma \cap S_t$  que podemos suponer que  $q \in I^+(p)$ . Como  $S_t$  es una hipersuperficie espacial y cualquier curva temporal futura que atraviese  $S_t$  lo hace saliendo del conjunto  $Z$ , entonces en los puntos  $p$  y  $q$  la curva  $\gamma$  abandona  $Z$  cuando la recorremos en sentido futuro. Por esta razón debe existir  $s \in \gamma \cap S_t$  distinto de  $p$  y  $q$  que verifica que  $s \in I^+(p) \cap I^-(q)$  y por el que la curva  $\gamma$  entra en  $Z$  cuando la recorremos en sentido futuro, pero esto es imposible ya que por cualquier punto de  $S_t$  toda curva temporal futura abandona  $Z$ . Por lo que no puede existir más de un punto de intersección entre  $\gamma$  y  $S_t$ . Por tanto  $S_t$  es una superficie de Cauchy.

Para el caso en que  $t$  sea tal que  $0 < -t < \epsilon$  y con el mismo razonamiento se demuestra que  $S_t$  es también una superficie de Cauchy. ■

**Lema 75** Sea  $S$  una hipersuperficie diferenciable, espacial y compacta y sean  $N, V_1, \dots, V_{n-1}$  los campos vectoriales y  $S_t$  la hipersuperficie contruidos en el lema 73. Si  $K = \sum_{i=1}^{n-1} g(\nabla_{V_i} N, V_i)$  y  $k_t$  es la curvatura media de  $S_t$ , entonces

$$K|_{S_t} = k_t$$

**Demostración.** Como  $\{\tilde{V}_i\}_{i=1, \dots, n-1}$  es una paralelización ortonormal de  $S$  y como  $\{V_i\}_{i=1, \dots, n-1}$  es su extensión a  $W$  mediante el transporte paralelo a lo largo de las geodésicas  $\gamma_q(s) = \exp_q(s\tilde{N}(q))$ , entonces fijado un  $t \in (-\epsilon, \epsilon)$  se tiene que  $\{V_i(\gamma_q(t))\}_{i=1, \dots, n-1}$  es una base de  $T_{\gamma_q(t)}S_t$ . Como  $N(\gamma_q(t))$  es el vector normal a  $S_t$  en  $r = \gamma_q(t)$ , entonces la curvatura media de  $S_t$  en el punto  $r$  viene dada por

$$k_t(r) = \sum_{i=1}^{n-1} g(\nabla_{V_i} N, V_i)(r) = K(r)$$

para todo  $r \in S_t$ , por tanto  $K|_{S_t} = k_t$ . ■

**Lema 76** Sea  $S$  una hipersuperficie diferenciable, espacial y compacta, con curvatura media  $k$ . Si  $\tilde{N}$  es el campo vectorial normal a  $S$  y  $\{\tilde{V}_i\}_{i=1, \dots, n-1}$  una paralelización

ortonormal de  $S$ , entonces si  $p \in S$

$$\tilde{N}(k)\Big|_p = - \left( Ricc(\tilde{N}, \tilde{N})(p) + \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=1}^{n-1} [\chi(\tilde{V}_i, \tilde{V}_j)]^2(p) \right) \quad (4.4)$$

**Demostración.** Sean  $N$  y  $\{V_i\}_{i=1, \dots, n-1}$  las respectivas extensiones a  $W$  de  $\tilde{N}$  y  $\{\tilde{V}_i\}_{i=1, \dots, n-1}$  construidas en el lema 73. De esta manera para cualquier  $p \in S$  tenemos que como  $\gamma_p$  es geodésica entonces  $(\nabla_N N)(p) = 0$ , como  $V_i$  es paralelo a lo largo de  $\gamma_p$  entonces  $(\nabla_N V_i)(p) = 0$  y además  $g(N(q), N(q)) = -1$  para todo  $q \in W$ . Así, vamos a calcular  $\tilde{N}(k)$  en el punto  $p \in S$ :

$$\begin{aligned} \tilde{N}(k)\Big|_p &= N \left( \sum_{i=1}^{n-1} g(\nabla_{V_i} N, V_i) \right) (p) = \sum_{i=1}^{n-1} N(g(\nabla_{V_i} N, V_i))(p) = \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} (g(\nabla_N \nabla_{V_i} N, V_i) + g(\nabla_{V_i} N, \nabla_N V_i))(p) = \sum_{i=1}^{n-1} g(\nabla_N \nabla_{V_i} N, V_i)(p) = \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} g(-R(N, V_i)N + \nabla_{V_i} \nabla_N N + \nabla_{[N, V_i]} N, V_i)(p) = \sum_{i=1}^{n-1} g(-R(N, V_i)N, V_i)(p) + \\ &\quad + \sum_{i=1}^{n-1} g(\nabla_{[N, V_i]} N, V_i)(p) = \sum_{i=1}^{n-1} g(-R(N, V_i)N, V_i) + g(R(N, N)N, N) - \\ &\quad - g(R(N, N)N, N)(p) + \sum_{i=1}^{n-1} g(\nabla_{[N, V_i]} N, V_i)(p) = -Ricc(N, N)(p) + \sum_{i=1}^{n-1} g(\nabla_{[N, V_i]} N, V_i)(p) = \\ &= -Ricc(\tilde{N}, \tilde{N})(p) + \sum_{i=1}^{n-1} g(\nabla_{(\nabla_N V_i)} N - \nabla_{(\nabla_{V_i} N)} N, V_i)(p) = \\ &= -Ricc(\tilde{N}, \tilde{N})(p) - \sum_{i=1}^{n-1} g(\nabla_{(\nabla_{V_i} N)} N, V_i)(p) \end{aligned} \quad (4.5)$$

donde  $R$  representa el tensor de Riemann. Usando ahora que

$$\nabla_{V_i} N = \sum_{j=1}^{n-1} g(\nabla_{V_i} N, V_j) V_j + g(\nabla_{V_i} N, N) N$$

y además  $g(\nabla_{V_i} N, N) = 0$  se tiene que

$$\nabla_{V_i} N = \sum_{j=1}^{n-1} g(\nabla_{V_i} N, V_j) V_j \quad (4.6)$$

En efecto, utilizando la fórmula de Koszul tenemos que

$$2g(\nabla_{V_i}N, N) = V_i(g(N, N))$$

y como  $g(N, N) = -1$  constante en todo punto  $q \in W$  entonces

$$g(\nabla_{V_i}N, N) = 0$$

y por tanto queda demostrado que la ecuación 4.6 es cierta. Retomando ahora la ecuación 4.5 tenemos que

$$\begin{aligned} \tilde{N}(k)\Big|_p &= -Ricc(\tilde{N}, \tilde{N})(p) - \sum_{i=1}^{n-1} g(\nabla_{(\nabla_{V_i}N)}N, V_i)(p) = \\ &= -Ricc(\tilde{N}, \tilde{N})(p) - \sum_{i=1}^{n-1} g\left(\nabla\left(\sum_{j=1}^{n-1} g(\nabla_{V_i}N, V_j)V_j\right)N, V_i\right)(p) = \\ &= -Ricc(\tilde{N}, \tilde{N})(p) - \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=1}^{n-1} g(\nabla_{V_i}N, V_j)(p) \cdot g(\nabla_{V_j}N, V_i)(p) = \\ &= -Ricc(\tilde{N}, \tilde{N})(p) - \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=1}^{n-1} \chi(V_i, V_j)(p) \cdot \chi(V_j, V_i)(p) = \\ &= -Ricc(\tilde{N}, \tilde{N})(p) - \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=1}^{n-1} [\chi(V_i, V_j)]^2(p) = \\ &= -Ricc(\tilde{N}, \tilde{N})(p) - \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=1}^{n-1} [\chi(\tilde{V}_i, \tilde{V}_j)]^2(p) = \end{aligned}$$

en conclusión:

$$\tilde{N}(k)\Big|_p = - \left( Ricc(\tilde{N}, \tilde{N})(p) + \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=1}^{n-1} [\chi(\tilde{V}_i, \tilde{V}_j)]^2(p) \right) \quad (4.7)$$

■

**Lema 77** *Sea  $M$  un espacio de Lorentz que posee una hipersuperficie  $S \subset M$  diferenciable, espacial, compacta, con curvatura media constante  $k$  y que verifica la condición de convergencia temporal, entonces en cualquier entorno  $W \subset M$  de  $S$  existen hipersuperficies  $S_+$  y  $S_-$  con curvaturas media  $k_+$  y  $k_-$  respectivamente tales que  $k_+ \leq k \leq k_-$ , obteniéndose las desigualdades estrictas en caso de que  $k \neq 0$ .*



**Demostración.** Sean  $\tilde{N}$  el campo vectorial normal a  $S$  y  $\{\tilde{V}_i\}_{i=1,\dots,n-1}$  la paralelización ortogonal de  $S$  y sean los campos vectoriales normales  $N$  y  $\{V_i\}_{i=1,\dots,n-1}$  sus respectivas extensiones a  $W$  construidas en el lema 73. Por el lema 76 tenemos que

$$\tilde{N}(k)\Big|_p = - \left( Ricc(\tilde{N}, \tilde{N})(p) + \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=1}^{n-1} [\chi(\tilde{V}_i, \tilde{V}_j)]^2(p) \right)$$

Como  $M$  verifica la condición de convergencia temporal, es decir, se tiene que  $Ricc(v, v) \geq 0$  para todo vector  $v$  temporal, y además como

$$\sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=1}^{n-1} [\chi(V_i, V_j)]^2 \geq 0$$

entonces

$$\tilde{N}(k)\Big|_p = - \left( Ricc(\tilde{N}, \tilde{N})(p) + \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=1}^{n-1} [\chi(\tilde{V}_i, \tilde{V}_j)]^2(p) \right) \leq 0$$

Esto significa que la curvatura media no crece a medida que desplazamos la superficie  $S$  a lo largo del campo  $N$  hacia el futuro. Por el lema 75, como  $K|_{S_t} = k_t$  para todo  $t \in (-\epsilon, \epsilon)$  entonces existe  $t_1 \in (0, \epsilon)$  tal que la hipersuperficie  $S_+ \equiv S_{t_1}$  contenida en  $W \cap I^+(S)$  con curvatura media  $k_+$  no necesariamente constante verifica que  $k_+ \leq k$ . De manera análoga podemos demostrar que existe  $t_2 \in (-\epsilon, 0)$  tal que la hipersuperficie  $S_- \equiv S_{t_2}$  con curvatura media  $k_-$  no necesariamente constante es tal que  $k \leq k_-$ .

Si la curvatura  $k \neq 0$ , entonces como  $k = \sum_{i=1}^{n-1} \chi(V_i, V_i) \neq 0$  entonces

$$\tilde{N}(k)\Big|_p = - \left( Ricc(\tilde{N}, \tilde{N})(p) + \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=1}^{n-1} [\chi(\tilde{V}_i, \tilde{V}_j)]^2(p) \right) < 0$$

y repitiendo el mismo razonamiento se tiene que las hipersuperficies  $S_+$  y  $S_-$  verifican que

$$k_+ < k < k_-$$

como queríamos demostrar. ■

**Lema 78** *Sea  $M$  un espacio de Lorentz que posee una hipersuperficie  $S \subset M$  diferenciable, espacial, compacta, con curvatura media constante  $k$  y que verifica la condición de convergencia temporal, entonces para todo  $\eta > 0$  es posible construir hipersuperficies  $S_+$  y  $S_-$  con curvaturas media  $k_+$  y  $k_-$  respectivamente tales que  $|k - k_+| < \eta$  y  $|k - k_-| < \eta$ .*

**Demostración.** En efecto, fijemos primero  $\eta > 0$ . Sean  $N, V_1, \dots, V_{n-1}$  los campos vectoriales definidos en el lema 73. De su construcción se observa que son campos diferenciables y por tanto la función  $K = \sum_{i=1}^{n-1} g(\nabla_{V_i} N, V_i)$  del lema 75 es diferenciable y por tanto continua en cada  $p \in S$ . Luego, con la misma notación que en el lema 73, existe un entorno  $U_p = \Phi(\mathcal{W}^p \times (-\epsilon_p, \epsilon_p)) \subset W$  conteniendo a  $p$  que es difeomorfo a  $\mathcal{W}^p \times (-\epsilon_p, \epsilon_p) \subset S \times (-\epsilon, \epsilon)$  tal que si  $q \in U_p$  entonces

$$|K(q) - K(p)| < \eta$$

La colección  $\mathcal{B} = \{U_p : p \in S\}$  es un recubrimiento abierto de  $S$  y como  $S$  es compacto, existe un subrecubrimiento finito  $\mathcal{B}_0 = \{U_i\}_{i=1, \dots, m}$  de  $S$ . De igual forma podemos suponer que cada  $U_i$  es difeomorfo a cierto  $\mathcal{W}^i \times (-\delta_i, \delta_i) \subset S \times (-\epsilon, \epsilon)$  tal que  $\delta_i > 0$  para todo  $i = 1, \dots, m$ . Tomando  $\delta$  tal que  $0 < \delta \leq \min_{i=1, \dots, m} \delta_i$  entonces cada abierto  $\mathcal{W}^i \times (-\delta, \delta) \subset S \times (-\epsilon, \epsilon)$  es difeomorfo a un abierto  $\tilde{U}_i \subset U$  que también verifica que para cada  $p \in \tilde{U}_i \cap S$  y cada  $q \in \tilde{U}_i$  se tiene que  $|K(q) - K(p)| < \eta$ .

Tomemos ahora  $t \in (-\delta, \delta)$ , por lo que así las hipersuperficies  $S_+$  y  $S_-$  están contenidas en  $W = \bigcup_{i=1}^m \tilde{U}_i$ . Consideremos los puntos  $p \in S$  y  $q \in S_+ \subset W$  (respectivamente  $q \in S_- \subset W$ ). Como  $q \in W$  entonces existen un número entero  $m_0$  tal que  $q \in \tilde{U}_{m_0}$  y también un punto  $p_0 \in S \cap \tilde{U}_{m_0}$  tal que  $q = \exp_{p_0}(tN(p_0))$ . Además, por el lema 75, se tiene que

$$K|_S = k$$

$$K|_{S_+} = k_+$$

$$\text{(respectivamente } K|_{S_-} = k_-)$$

y por tanto como  $K(p) = K(p_0) = k$  entonces

$$|k_+(q) - k(p)| = |K(q) - K(p)| = |K(q) - K(p_0)| < \eta$$

$$\text{(respectivamente } |k_-(q) - k(p)| = |K(q) - K(p)| = |K(q) - K(p_0)| < \eta)$$

como queríamos comprobar. ■

**Proposición 79** *Sea  $M$  un espacio de Lorentz con superficie de Cauchy compacta y que satisface la condición de convergencia temporal. Si  $S \subset M$  es una hipersuperficie diferenciable, compacta, espacial, con curvatura media constante  $k_0 \neq 0$ , entonces no existe otra hipersuperficie  $\tilde{S}$  diferenciable, compacta, espacial, tal que  $\tilde{S} \cap I^+(S) \neq \emptyset$  con la misma curvatura media constante  $k_0$ .*

**Demostración.** Supongamos que existe  $\tilde{S} \subset M$  hipersuperficie diferenciable, compacta, espacial y con curvatura media constante  $k_0$  tal que  $\tilde{S} \cap I^+(S) \neq \emptyset$ . Entonces existe  $q \in \tilde{S} \cap I^+(S)$  y, por tanto, existe  $p \in S$  tal que  $q \in I^+(p)$ . Consideremos dos

entornos  $W$  y  $\tilde{W}$  de  $S$  y  $\tilde{S}$  respectivamente tales que  $q \notin W$  y  $p \notin \tilde{W}$ . Por el lema 77, tenemos que existen  $S_+$  y  $\tilde{S}_-$  hipersuperficies diferenciables, espaciales, compactas tales que

$$\sup_{S_+} k_{S_+} < k_0 < \inf_{\tilde{S}_-} k_{\tilde{S}_-} \quad (4.8)$$

donde  $k_{S_+}$  y  $k_{\tilde{S}_-}$  son las respectivas curvaturas medias de  $S_+$  y  $\tilde{S}_-$  respectivamente. Como  $M$  posee una superficie de Cauchy entonces es globalmente hiperbólico y por proposición 56 (pág. 28) la separación temporal  $\tau : M \times M \rightarrow \mathbb{R}$  es una función continua y por tanto la restricción (que seguiremos llamando igual)  $\tau : S_+ \times \tilde{S}_- \rightarrow \mathbb{R}$  también es continua. Tanto  $S_+$  como  $\tilde{S}_-$  son compactas, luego también lo es  $S_+ \times \tilde{S}_-$ . Así pues,  $\tau : S_+ \times \tilde{S}_- \rightarrow \mathbb{R}$  alcanza un máximo. Esto quiere decir que existen  $p_0 \in S_+$ ,  $q_0 \in \tilde{S}_-$  y una curva temporal futura  $\gamma : [a, b] \rightarrow M$  tal que

$$\mathcal{L}(\gamma) = \tau(p_0, q_0) = \tau(S_+, \tilde{S}_-) \geq \tau(p', q')$$

para todo  $p' \in S_+$ ,  $q' \in \tilde{S}_-$ , es decir que  $\gamma$  es la curva temporal futura de mayor longitud entre  $S_+$  y  $\tilde{S}_-$ . Como hemos visto en la sección anterior,  $\gamma$  tiene que ser una geodésica temporal futura tal que  $\gamma'(a)$  es ortogonal a  $S_+$  y  $\gamma'(b)$  es ortogonal a  $\tilde{S}_-$ . Sea  $\varphi$  una variación de  $\gamma$  cuyo campo variacional  $V$  es tal que  $V(a) \in T_{p_0}S_+$  y  $V(t)$  es el transportado paralelamente de  $V(a)$  a lo largo de  $\gamma$  para todo  $t \in [a, b]$  (por lo que  $V(b) \in T_{q_0}\tilde{S}_-$ ), por tanto, como  $\gamma$  maximiza  $\tau$  se tiene que  $\mathcal{L}''_V(0) \leq 0$ . Si tomamos ahora  $n-1$  variaciones  $\{\varphi_i\}_{i=1, \dots, n-1}$  con campos variacionales  $\{V_i\}_{i=1, \dots, n-1}$  respectivamente tales que  $\{V_i(a)\}_{i=1, \dots, n-1}$  forman base ortonormal de  $T_{p_0}S_+$  y  $\{V_i(t)\}_{i=1, \dots, n-1}$  son los transportados paralelamente de  $\{V_i(a)\}_{i=1, \dots, n-1}$  a lo largo de  $\gamma$  para todo  $t \in [a, b]$ , entonces se tiene que  $\mathcal{L}''_{V_i}(0) \leq 0$  para todo  $i = 1, \dots, n-1$  y además

$$\begin{aligned} 0 &\geq \sum_{i=1}^{n-1} \mathcal{L}''_{V_i}(0) = \sum_{i=1}^{n-1} \int_a^b [-\mathbf{g}(\nabla_{\gamma'} V_i, \nabla_{\gamma'} V_i) + g(R(V_i, \gamma') V_i, \gamma')] dt - \sum_{i=1}^{n-1} [\mathbf{g}(\nabla_{V_i} V_i, \gamma')]_a^b = \\ &= \int_a^b Ricc(\gamma', \gamma') dt + k_{\tilde{S}_-}(q_0) - k_{S_+}(p_0) \end{aligned}$$

siendo  $Ricc(\gamma', \gamma') = \sum_{i=1}^{n-1} \mathbf{g}(R(V_i, \gamma') V_i, \gamma') - \mathbf{g}(R(\gamma', \gamma') \gamma', \gamma')$  el tensor de Ricci ya que  $\{V_i(t)\}_{i=1, \dots, n-1}$  y  $\gamma'(t)$  forman base de  $T_{\gamma(t)}M$ . Además se ha usado que  $g(R(\gamma', \gamma') \gamma', \gamma') = 0$  directamente de la definición de  $R$ . Por la desigualdad 4.8, se tiene que

$$k_{\tilde{S}_-}(q_0) - k_{S_+}(p_0) > 0$$

Como se verifica la condición de convergencia temporal, entonces  $Ricc(v, v) \geq 0$  para todo  $v$  temporal entonces

$$0 \geq \sum_{i=1}^{n-1} \mathcal{L}''_{V_i}(0) = \int_a^b Ricc(\gamma', \gamma') dt + k_{\tilde{S}_-}(q_0) - k_{S_+}(p_0) > 0$$

contradiendo la maximalidad de  $\gamma$ . Por consiguiente, no existe tal hipersuperficie  $\tilde{S}$ , compacta, espacial con curvatura media constante  $k_0$ . ■

**Proposición 80** *Sea  $M$  un espacio de Lorentz con superficie de Cauchy compacta que satisface la condición de convergencia temporal y sean  $S_1$  y  $S_2$  dos hipersuperficies diferenciables, compactas, espaciales, con curvaturas media  $k_1$  y  $k_2$  respectivamente tales que  $\sup_{S_1} k_1 < \inf_{S_2} k_2$ , entonces*

$$I^+(S_1) \cap S_2 = \emptyset \quad y \quad S_1 \cap I^-(S_2) = \emptyset$$

**Demostración.** Supongamos que el resultado no es cierto, es decir, que existe  $p \in I^+(S_1) \cap S_2$ , entonces siguiendo el mismo argumento de la demostración de la proposición 79 podemos suponer que existe  $\gamma$  con la propiedad de hacer máxima la longitud entre curvas temporales uniendo  $S_1$  con  $S_2$ . De esta manera tendremos que

$$0 \geq \sum_{i=1}^{n-1} \mathcal{L}_{V_i}''(0) = \int_a^b Ricc(\gamma', \gamma') dt + k_2(\gamma(b)) - k_1(\gamma(a))$$

y como  $\sup_{S_1} k_1 < \inf_{S_2} k_2$  entonces

$$k_2(\gamma(b)) - k_1(\gamma(a)) > 0$$

Como además se verifica la condición de convergencia temporal, es decir,  $Ricc(v, v) \geq 0$  para todo  $v$  temporal tenemos que

$$0 \geq \sum_{i=1}^{n-1} \mathcal{L}_{V_i}''(0) = \int_a^b Ricc(\gamma', \gamma') dt + k_2(\gamma(b)) - k_1(\gamma(a)) > 0$$

es una contradicción. Por tanto no existe  $p \in I^+(S_1) \cap S_2$ . Como  $I^+(S_1) \cap S_2 = \emptyset$  entonces no existen  $q \in S_1$  y  $p \in S_2$  tal que  $p \in I^+(q)$ , lo que equivale a  $S_1 \cap I^-(S_2) = \emptyset$ . ■

**Corolario 81** *Sea  $M$  un espacio de Lorentz con superficie de Cauchy compacta que satisface la condición de convergencia temporal y sean  $S_1$  y  $S_2$  dos superficies de Cauchy con respectivas curvaturas media  $k_1$  y  $k_2$  tales que  $\sup_{S_1} k_1 < \inf_{S_2} k_2$  entonces  $S_1 \subset I^+(S_2)$ .*

**Demostración.** Como  $M$  es globalmente hiperbólico y  $S_2$  es una superficie de Cauchy entonces tenemos que  $M = I^+(S_2) \cup S_2 \cup I^-(S_2)$ . Por la proposición 80 tenemos que  $S_1 \subset I^+(S_2) \cup S_2$ . Supongamos que existe  $p \in S_1 \cap S_2$ , entonces por el lema 77 podemos encontrar una hipersuperficie  $\tilde{S}$  con curvatura media  $\tilde{k}$  tal que  $\tilde{S} \subset I^+(S_2)$  y

$$\sup_{S_1} k_1 < \tilde{k} < \inf_{S_2} k_2$$

Por la proposición 80 se tiene que  $S_1 \cap I^-(\tilde{S}) = \emptyset$ , pero esto contradice que  $p \in S_1 \cap I^-(\tilde{S})$ . Luego no puede existir  $p \in S_1 \cap S_2$  y por tanto se tiene que  $S_1 \subset I^+(S_2)$ . ■

**Corolario 82** *Sea  $M$  un espacio de Lorentz con superficie de Cauchy compacta que satisface la condición de convergencia temporal y sean  $S_1$  y  $S_2$  dos superficies de Cauchy con respectivas curvaturas media  $k_1$  y  $k_2$  constantes tales que  $S_1 \subset I^+(S_2)$ , entonces se tiene que  $k_1 \leq k_2$ .*

**Demostración.** Supongamos que  $k_2 < k_1$ , entonces por el corolario 81 tenemos que  $S_2 \subset I^+(S_1)$  contradiciendo la hipótesis ya que  $M$  es globalmente hiperbólico. Por tanto se debe cumplir que  $k_1 \leq k_2$ . ■

**Corolario 83** *Sea  $M$  un espacio de Lorentz con superficie de Cauchy compacta que satisface la condición de convergencia temporal y sean  $S_1$  y  $S_2$  dos superficies de Cauchy con respectivas curvaturas media  $k_1 = k_2 = 0$ . Si  $S$  es una superficie de Cauchy con curvatura media  $k$  constante que contiene a un punto  $p$  tal que  $p \in [I^+(S_1) \cap I^-(S_2)] \cup [I^+(S_2) \cap I^-(S_1)]$  entonces se tiene que  $k = 0$ .*

**Demostración.** Supongamos primero que  $p \in I^+(S_1) \cap I^-(S_2)$ . Si  $k < 0$  entonces por el corolario 81 tenemos que  $S \subset I^+(S_1) \cap I^+(S_2)$ , pero esto es imposible ya que  $I^+(S_2) \cap I^-(S_2) = \emptyset$ . Por otro lado, si  $k > 0$  entonces, de nuevo por el corolario 81, tenemos que  $S \subset I^-(S_1) \cap I^-(S_2)$ , pero esto contradice que  $p \in I^+(S_1) \cap I^-(S_2)$  ya que  $I^+(S_1) \cap I^-(S_1) = \emptyset$ . Por tanto no puede existir  $p \in S \cap I^+(S_1) \cap I^-(S_2)$ . La demostración de que no puede existir  $p \in S \cap I^+(S_2) \cap I^-(S_1)$  es análoga. ■

**Corolario 84** *Sea  $M$  un espacio de Lorentz con superficie de Cauchy compacta que satisface la condición de convergencia temporal y sean  $S_1$  y  $S_2$  dos superficies de Cauchy con respectivas curvaturas media  $k_1$  y  $k_2$  constantes. Si existe  $p \in S_1 \cap S_2$  entonces se tiene que  $k_1 = k_2 = 0$ .*

**Demostración.** Supongamos que  $k_1 < k_2$ , entonces por el corolario 81 se tiene que  $S_1 \subset I^+(S_2)$  y por tanto no puede existir un punto  $p \in S_1 \cap S_2$ . De igual forma, si  $k_1 > k_2$ , entonces, otra vez por el corolario 81, tenemos que  $S_1 \subset I^-(S_2)$  y no existe  $p \in S_1 \cap S_2$  contradiciendo la hipótesis. Por lo tanto  $k_1 = k_2$ , y por la proposición 79 se tiene que verificar que  $k_1 = k_2 = 0$  como queríamos demostrar. ■

Sea  $T$  la superficie de Cauchy de la proposición 69 tal que si  $p \in I^+(T)$  entonces  $\partial I^-(p)$  es también superficie de Cauchy. Como consecuencia de los corolarios anteriores, podemos definir el subconjunto de  $I^+(T)$  por el que pasa alguna superficie de Cauchy  $S$  con curvatura media  $k_S = 0$ , es decir

$$\Sigma = \{p \in I^+(T) : \text{existe } S \text{ superficie de Cauchy con } p \in S \text{ y } k_S = 0\} \quad (4.9)$$

Llamemos  $\Sigma^c$  al conjunto complementario de  $\Sigma$  en  $I^+(T)$ , es decir,

$$\Sigma^c = I^+(T) - \Sigma$$

**Lema 85** Si  $M$  es un espacio de Lorentz con punto omega que satisface la condición de convergencia temporal entonces  $\Sigma$  es cerrado.

**Demostración.** Demostremos que  $\Sigma^c = I^+(T) - \Sigma$  es abierto. Sea  $p \in \Sigma^c$  y sea  $S$  la superficie de Cauchy con curvatura media constante  $k \neq 0$  que pasa por  $p$ . Por el lema 77 tenemos que existen hipersuperficies  $S_+$  y  $S_-$  tales que sus curvaturas media  $k_+$  y  $k_-$  verifican que  $k_+ < k < k_-$  y todas con el mismo signo. Por la proposición 80 y el corolario 81 se tiene que  $S \subset I^+(S_-) \cap I^-(S_+)$  y además  $S_+ \subset I^+(S_-)$ . Por ningún punto  $q \in I^+(S_-) \cap I^-(S_+)$  puede pasar una superficie de Cauchy  $\tilde{S}$  con curvatura media constante  $\tilde{k} = 0$ , ya que contradeciría el corolario 81. Así, el abierto  $I^+(S_-) \cap I^-(S_+)$ , que contiene al punto  $p$ , está totalmente contenido en  $\Sigma^c$ , por lo que  $\Sigma^c$  es abierto y por tanto  $\Sigma$  es cerrado. ■

Podemos descomponer  $I^+(T)$  como

$$I^+(T) = \Sigma^+ \cup \Sigma \cup \Sigma^-$$

donde

$$\Sigma^+ = \{p \in I^+(T) : \text{existe } S \text{ superficie de Cauchy con } p \in S \text{ y } k_S < 0\}$$

$$\Sigma^- = \{p \in I^+(T) : \text{existe } S \text{ superficie de Cauchy con } p \in S \text{ y } k_S > 0\}$$

Obsérvese que los signos  $+$  y  $-$  indican que  $\Sigma^+$  y  $\Sigma^-$  están en el futuro y en el pasado de  $\Sigma$  respectivamente, como sugiere el corolario 81, y no hacen referencia al signo de la curvatura media de las superficies de Cauchy que pasan por sus puntos.

**Lema 86** Sea  $M$  un espacio de Lorentz con punto omega que satisface la condición de convergencia temporal. Si  $\gamma : [a, b] \rightarrow I^+(T) \subset M$  es una curva temporal futura tal que  $\gamma(a) \in \Sigma$  y  $\gamma(b) \in \Sigma$ , entonces  $I^+(\gamma(a)) \cap I^-(\gamma(b)) \subset \text{int}(\Sigma)$ . En particular, si  $t \in (a, b)$  entonces se tiene que  $\gamma(t) \in \text{int}(\Sigma)$ .

**Demostración.** Como  $\gamma(a) \in \Sigma$  y  $\gamma(b) \in \Sigma$ , entonces existen superficies de Cauchy  $S_1$  y  $S_2$  con curvatura media  $k_{S_1} = k_{S_2} = 0$  constante tales que  $\gamma(a) \in S_1$  y  $\gamma(b) \in S_2$ . Por el corolario 83, cualquier superficie de Cauchy  $S$  que pase por  $q \in A = [I^+(S_1) \cap I^-(S_2)] \cup [I^+(S_2) \cap I^-(S_1)]$  tiene curvatura media  $k_S = 0$ , por lo tanto  $q \in \Sigma$ . Como  $A$  es abierto, entonces  $A \subset \text{int}(\Sigma)$ . De esta manera tenemos que

$$I^+(\gamma(a)) \cap I^-(\gamma(b)) \subset A \subset \text{int}(\Sigma)$$

como queríamos demostrar. En particular, si  $t \in (a, b)$  entonces

$$\gamma(t) \in I^+(\gamma(a)) \cap I^-(\gamma(b)) \subset \text{int}(\Sigma)$$

■

**Lema 87** *Sea  $M$  un espacio de Lorentz con punto omega que satisface la condición de convergencia temporal. Si  $p \in \partial\Sigma^+$ , entonces  $I^+(p) \cap \Sigma = \emptyset$ .*

**Demostración.** Supongamos que existe  $q \in I^+(p) \cap \Sigma$ , entonces existe una curva  $\gamma$  temporal futura tal que  $\gamma(0) = p$  y  $\gamma(1) = q$ . Por el lema 86 tenemos que  $\gamma(t) \in \text{int}(\Sigma)$  para todo  $t \in (0, 1)$ . Tomando  $t \in (0, 1)$  existe una superficie de Cauchy  $S$  con curvatura media  $k_S = 0$  constante tal que  $\gamma(t) \in S$  y  $p \in I^-(S)$ . Por el corolario 81, es claro que  $\Sigma^+ \subset I^+(S)$  y como  $M$  es globalmente hiperbólico (por tanto causalmente simple) entonces  $J^+(S)$  es cerrado por ser  $S$  compacto. Así tenemos que  $\partial\Sigma^+ \subset \overline{I^+(S)} = J^+(S)$  y entonces  $p \in J^+(S) \cap I^-(S)$ , pero esto es una contradicción en virtud del lema 38. Por tanto tenemos que  $I^+(p) \cap \Sigma = \emptyset$ . ■

**Observación 88** *Si  $p \in \partial\Sigma^-$ , de manera análoga, es posible demostrar que entonces  $I^-(p) \cap \Sigma = \emptyset$ .*

**Proposición 89** *Sea  $M$  un espacio de Lorentz con punto omega que satisface la condición de convergencia temporal. Los conjuntos  $\partial\Sigma^+$  y  $\partial\Sigma^-$ , si son no vacíos, entonces son superficies de Cauchy.*

**Demostración.** Consideremos  $\gamma$  una curva temporal inextensible que podemos suponer futura. Veamos primero que  $\gamma$  corta a  $\partial\Sigma^+$ . Como  $\Sigma$  es cerrado, entonces se tiene que  $\partial\Sigma^+ \subset \Sigma$ , y si  $\partial\Sigma^+ \neq \emptyset$  entonces  $\Sigma \neq \emptyset$  y además  $\Sigma^+ \neq \emptyset$ . Por tanto existen superficies de Cauchy  $S_1$  y  $S_2$  con curvaturas media constantes  $k_{S_1} = 0$  y  $k_{S_2} < 0$  respectivamente. La curva  $\gamma$  entonces intersecará tanto a  $S_1$  como a  $S_2$ . Si  $\gamma(t_1) \in S_1$  y  $\gamma(t_2) \in S_2$  entonces  $\gamma(t_1) \in \Sigma$  y  $\gamma(t_2) \in \Sigma^+$ , por lo que tiene que existir  $t \in [t_1, t_2]$  tal que  $\gamma(t) \in \partial\Sigma^+$  como queríamos comprobar.

Comprobemos que  $\gamma$  no corta más de una vez a  $\partial\Sigma^+$ . Supongamos, por el contrario, que existen  $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$  tales que  $t_1 < t_2$  y  $\gamma(t_i) \in \partial\Sigma^+$  para  $i = 1, 2$ . Por el lema 87, como  $\gamma(t_1) \in \partial\Sigma^+$ , entonces  $I^+(\gamma(t_1)) \cap \Sigma = \emptyset$  por lo que  $\gamma(t_2) \notin \Sigma$  contradiciendo que  $\gamma(t_2) \in \partial\Sigma^+ \subset \Sigma$ . Así  $\gamma$  no puede intersecar a  $\partial\Sigma^+$  más de una vez.

La tesis para  $\partial\Sigma^-$  se demuestra de forma análoga.

Como cualquier curva temporal inextensible corta a  $\partial\Sigma^+$  y a  $\partial\Sigma^-$  una única vez, entonces  $\partial\Sigma^+$  y  $\partial\Sigma^-$  son superficies de Cauchy. ■

**Lema 90** *Sea  $M$  un espacio de Lorentz con punto omega que satisface la condición de convergencia temporal tal que  $\Sigma^+ \neq \emptyset$  y  $\Sigma^- \neq \emptyset$  entonces  $\Sigma$  es compacto.*

**Demostración.** Como  $M$  es globalmente hiperbólico, por la proposición 36 de Geroch, podemos identificarlo con  $S \times \mathbb{R}$  donde  $S$  es una superficie de Cauchy. Si  $\Sigma$  no es compacto entonces existe una sucesión  $\{p_k\}$  con  $p_k = (q_k, t_k) \in \Sigma \subset S \times \mathbb{R}$  para todo  $k \in \mathbb{N}$  tal que  $\lim_{k \rightarrow \infty} t_k = \pm\infty$ . Consideremos la aplicación

$$\begin{aligned} \sigma : S \times \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (q, t) &\longmapsto t \end{aligned}$$

y consideremos  $p \in \Sigma^+$  y  $S_1$  una superficie de Cauchy que pasa por  $p$  con curvatura media constante  $k_{S_1} < 0$ . Como  $S_1$  es compacta y  $\sigma$  es continua, entonces la restricción  $\sigma|_{S_1}$  alcanza su máximo absoluto. Sea  $m = \max_{p \in S_1} \sigma(p)$ , entonces por el corolario 82, tenemos que si  $q \in S \times (m, \infty)$  entonces  $q \in \Sigma^+$ , por lo que entonces  $S \times (m, \infty) \subset \Sigma^+$  y no puede existir la sucesión  $\{p_k\}$  tal que  $\lim_{k \rightarrow \infty} t_k = \infty$ . Por el mismo razonamiento, tenemos que si  $p \in \Sigma^-$  y  $S_2$  una superficie de Cauchy que pasa por  $p$  con curvatura media constante  $k_{S_2} > 0$ . Sea ahora  $m' = \min_{p \in S_2} \sigma(p)$  y por tanto  $S \times (-\infty, m') \subset \Sigma^-$  y no puede existir la sucesión  $\{p_k\}$  tal que  $\lim_{k \rightarrow \infty} t_k = -\infty$ . Así, como  $S \times [m', m]$  es compacto y  $\Sigma$  es cerrado, entonces como  $\Sigma \subset S \times [m', m]$  hemos demostrado que  $\Sigma$  es compacto. ■

**Lema 91** *Sea  $M$  un espacio de Lorentz con punto omega que satisface la condición de convergencia temporal tal que  $\Sigma \neq \emptyset$  y  $\text{int}(\Sigma) = \emptyset$  entonces  $\Sigma$  es la única superficie de Cauchy con curvatura media  $k = 0$ .*

**Demostración.** Supongamos que existen dos superficies de Cauchy distintas  $S_1$  y  $S_2$  con curvaturas media  $k_1 = k_2 = 0$  constantes. Como  $S_1 \neq S_2$  entonces existe  $p \in [I^+(S_1) \cap I^-(S_2)] \cup [I^+(S_2) \cap I^-(S_1)]$ . El teorema 71 de Bartnik nos asegura que existe una superficie de Cauchy  $S$  con curvatura media  $k$  constante que contiene a  $p$  y por el corolario 83 se tiene que verificar que  $k = 0$ . Por tanto  $p \in \Sigma$ . Como esto es cierto para todo punto del abierto  $[I^+(S_1) \cap I^-(S_2)] \cup [I^+(S_2) \cap I^-(S_1)]$ , entonces  $p \in \text{int}(\Sigma)$  contradiciendo que  $\text{int}(\Sigma) = \emptyset$ . Por tanto sólo puede existir una única superficie de Cauchy  $S_0$  con curvatura media constante  $k_0 = 0$ . La proposición 89 nos dice que  $\partial\Sigma^+$  y  $\partial\Sigma^-$  son superficies de Cauchy, y como  $\Sigma = \partial\Sigma = \partial\Sigma^+ \cup \partial\Sigma^-$ , entonces se tiene que

$$\Sigma = \partial\Sigma = \partial\Sigma^+ = \partial\Sigma^- = S_0$$

■

**Proposición 92** *Sea  $M$  un espacio de Lorentz de punto omega que verifica la condición de distinción de pasado y la condición de convergencia temporal. Sea  $T$  una superficie de Cauchy tal que para todo  $p \in I^+(T)$  se tiene que  $M - [I^+(p) \cup I^-(p)]$  es compacto. Sea  $\Sigma$  el subconjunto de  $I^+(T)$  definido en 4.9, entonces existe  $F(t)$  una foliación de  $\Sigma^c$  formada por superficies de Cauchy diferenciables, espaciales, compactas y con curvatura media constante.*

**Demostración.** Por el teorema 62 de Seifert (pág. 34) sabemos que  $M$  es globalmente hiperbólico y las superficies de Cauchy son compactas. Si aplicamos ahora el teorema 71 de Bartnik (pág. 39) tenemos que para todo  $p \in I^+(T)$  existe una superficie de Cauchy diferenciable, espacial y con curvatura media constante que lo contiene. La proposición 79 (pág. 46) nos asegura la unicidad de tales superficies siempre que la curvatura media constante sea  $k \neq 0$ . Es decir, por cada  $p \in \Sigma^c$  pasa una superficie de Cauchy, diferenciable, espacial, compacta y con curvatura media constante. Veamos ahora que para cada  $p \in \Sigma^c$  no existe más de una de tales superficies. En efecto, supongamos



que existen dos de ellas  $S_0$  y  $S_1$  con curvaturas media  $k_0$  y  $k_1$  respectivamente tales que  $k_0 > k_1$ . Por el corolario 81 tenemos que  $S_1 \in I^+(S_0)$  y como  $M$  es globalmente hiperbólico entonces  $S_0 \cap S_1 = \emptyset$ . En resumen, para cada  $p \in \Sigma^c$  existe una única superficie de Cauchy diferenciable, espacial con curvatura media constante tal que no existe otra con tales características y con la misma curvatura media. Esto establece la existencia de la foliación  $F$  buscada. ■

Consideremos la función  $h : \Sigma^c \rightarrow \mathbb{R}$ , donde  $k_p$  denota la curvatura media del miembro de la foliación que pasa por el punto  $p \in \Sigma^c$ . Podemos definir la función

$$H(p) = \begin{cases} 0 & \text{si } p \in \Sigma \\ h(p) & \text{si } p \in \Sigma^c \end{cases}$$

en  $I^+(T)$ .

**Proposición 93** *La función  $H$  es continua.*

**Demostración.** Veamos que  $h$  es continua. Sea  $p \in \Sigma^c$  entonces existe una superficie  $S$  de la foliación  $F$  con curvatura media constante  $k$ , dado  $\epsilon > 0$  construimos a partir de  $S$  unas superficies  $S_+$  y  $S_-$  tal y como se hace en el lema 77 (pág. 44). Por el lema 78 sus curvaturas medias  $k_+$  y  $k_-$  son tales que

$$|k_+ - k| < \epsilon$$

$$|k_- - k| < \epsilon$$

Vamos a ver que existe un entorno  $W$  de  $p$  tal que para todo  $q \in W$  se tiene que

$$|h(p) - h(q)| \leq \epsilon$$

En efecto, para todo  $q \in W = I^+(S_-) \cap I^-(S_+)$  existe una superficie  $\tilde{S}$  de la foliación con curvatura media constante  $\tilde{k}$ . Si  $q \in I^+(S)$  entonces  $\tilde{k} < k$ . Supongamos en este caso que  $\tilde{k} < k - \epsilon$  entonces

$$\tilde{k} < \inf_{S_+} k_+$$

y por tanto el corolario 81 nos dice que  $\tilde{S} \subset I^+(S_+)$ , lo que contradice el hecho de que  $q \in I^-(S_+)$ . Por tanto

$$\tilde{k} \geq k - \epsilon$$

y como  $\tilde{k} < k$  se tiene que  $k + \epsilon > \tilde{k} \geq k - \epsilon$  y entonces

$$|k - \tilde{k}| = |h(p) - h(q)| \leq \epsilon$$

Si  $q \in I^-(S)$  entonces  $\tilde{k} > k$ . Supongamos de igual manera que  $\tilde{k} > k + \epsilon$  entonces

$$\tilde{k} > \sup_{S_-} k_-$$

y de nuevo por el corolario 81 tenemos que  $S_- \subset I^+(\tilde{S})$ , pero esto es una contradicción ya que  $q \in I^+(S_-)$ . Por tanto

$$\tilde{k} \leq k + \epsilon$$

y como  $\tilde{k} > k$  encontramos que  $k + \epsilon \geq \tilde{k} > k - \epsilon$  y por tanto

$$|k - \tilde{k}| = |h(p) - h(q)| \leq \epsilon$$

El caso en que  $q \in S$  es trivial ya que

$$|k - \tilde{k}| = |k - k| = 0 < \epsilon$$

Por consiguiente, hemos visto que  $h$  es continua.

Por otro lado, como  $\Sigma$  es cerrado, sólo nos falta demostrar que  $H$  es continua en  $\partial\Sigma$ , ya que en  $\text{int}(\Sigma)$  la función  $H$  es idénticamente igual a 0 coincidiendo con el valor en cualquier punto de  $\partial\Sigma$ . Procedamos por reducción al absurdo y supongamos que  $H$  no es continua en  $p \in \partial\Sigma$ . Sea  $S$  la superficie de Cauchy que pasa por  $p$  con curvatura media  $H(p) = 0$ . Sea  $S_t$  la superficie de Cauchy definida como en la proposición 74, que existe para  $t < |\epsilon|$ . Si  $H$  no es continua en  $p$ , entonces existe una sucesión  $\{p_j\} \subset M$  tal que  $p_j \rightarrow p$  que verifica que  $\lim_{j \rightarrow \infty} H(p_j) \neq 0 = H(p)$ . En este caso, existe  $\delta > 0$  tal que para todo  $n_0 \in \mathbb{N}$  existe  $j > n_0$  tal que  $|H(p_j)| \geq \delta$ . Tenemos que contemplar dos casos análogos:

1.  $\{p_j\} \subset I^+(S)$ .
2.  $\{p_j\} \subset I^-(S)$ .

En el primer caso, consideremos  $\eta$  tal que  $0 < \eta < \delta$ . En virtud del lema 78, para este  $\eta$  existe  $t \in (0, \epsilon)$  tal que la curvatura media  $k_t$  de la superficie de Cauchy  $S_t \subset I^+(S)$  verifica que  $-\eta < k_t \leq 0$ . Como  $p_j \rightarrow p$  entonces también existe  $j_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $p_{j_0} \in I^+(S) \cap I^-(S_t)$  y  $H(p_{j_0}) \leq -\delta$ . Sea  $\tilde{S}$  la superficie de Cauchy de curvatura media  $k = H(p_{j_0})$  constante que pasa por  $p_{j_0}$ , entonces como

$$H(p_{j_0}) \leq -\delta \leq -\eta < k_t \leq 0$$

tenemos que  $H(p_{j_0}) < k_t$  y por la proposición 80 tenemos que  $\tilde{S} \cap I^-(S_t) = \emptyset$  lo que contradice que  $p_{j_0} \in \tilde{S} \cap I^-(S_t)$ . Por tanto  $H$  debe ser continua en  $p \in \partial\Sigma$ .

La demostración para el caso en que  $\{p_j\} \subset I^-(S)$  es análoga. ■

**Proposición 94** *Sea  $M$  un espacio de Lorentz con punto omega que satisface la condición de convergencia temporal tal que  $\Sigma \neq \emptyset$  con  $\text{int}(\Sigma) = \emptyset$ , entonces la función  $\tau = -H$  es una función tiempo de Cauchy*

**Demostración.** Por el lema 91 tenemos que existe una única superficie de Cauchy  $S$  con curvatura media  $k = 0$  constante, por lo que la función  $H$  sólo puede tomar el

valor  $H = 0$  en los puntos de  $S$ . Sea  $\gamma$  cualquier segmento de curva temporal futura y sean  $p_1, p_2 \in \gamma$  tales que  $p_2 \in I^+(p_1)$ . El teorema 71 de Bartnik nos asegura que existen superficies de Cauchy  $S_i$  con curvatura media  $k_i$  constante que contiene al punto  $p_i$ , para  $i = 1, 2$ . Como  $S_1 \neq S_2$ , la proposición 79 implica que  $k_1 \neq k_2$ , y por el corolario 81 se tiene que  $k_1 > k_2$ , por lo que entonces tenemos que  $H(p_1) > H(p_2)$ . Así hemos visto que  $H$  es decreciente para cualquier curva temporal futura y por tanto  $\tau = -H$  es creciente. Además, por la definición de  $H$ , es trivial que si  $r \in \text{Im } H$  entonces  $H^{-1}(r)$  es la superficie de Cauchy con curvatura media  $r$  constante. ■

**Definición 95** Sea  $S$  una hipersuperficie diferenciable y espacial. Un punto  $p \in S$  se dice  $\Sigma$ -singular si verifica

$$\chi_S(p) = 0 \quad \text{y} \quad \text{Ricc}(N(p), N(p)) = 0$$

donde  $\chi_S$  denota la segunda forma fundamental de  $S$  y  $N(p)$  es el vector normal a  $S$  en  $p$ .

**Proposición 96** Sea  $M$  un espacio de Lorentz con punto omega que satisface la condición de convergencia temporal y sea  $S$  una superficie de Cauchy con curvatura media  $k = 0$  constante sin puntos  $\Sigma$ -singulares, entonces  $\Sigma = S$  y la función  $\tau = -H$  es una función tiempo de Cauchy.

**Demostración.** Consideremos un punto  $p \in I^+(S)$ , entonces existe una superficie de Cauchy  $S'$  con curvatura media  $k'$  constante que contiene a  $p$ . Como  $S$  no tiene puntos  $\Sigma$ -singulares, entonces la expresión 4.4 del lema 76

$$\tilde{N}(k) \Big|_p = - \left( \text{Ricc}(\tilde{N}, \tilde{N})(p) + \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=1}^{n-1} [\chi(\tilde{V}_i, \tilde{V}_j)]^2(p) \right)$$

implica que  $\tilde{N}(k) \Big|_p < 0$  para todo  $p \in S$ , ya que no se puede verificar que  $\tilde{N}(k) \Big|_p = 0$ . La geodésica temporal futura  $\alpha : [a, b] \rightarrow M$  que maximiza la separación temporal entre  $p$  y  $S$ , por la observación 50, es ortogonal a  $S$ , por lo que, reparametrizando  $\alpha$  si fuese necesario, existe un punto  $s = \alpha(a) \in S$  tal que  $\tilde{N}(s) = \alpha'(a)$ . Utilizando el mismo razonamiento que en el lema 77, para  $t \in (a, b)$  podemos construir una superficie de Cauchy  $S_t \subset I^+(S)$  con curvatura media  $k_t < 0$  no necesariamente constante. Por la expresión 4.3 del lema 73 tenemos que

$$\alpha(t) = \exp_s(t\tilde{N}(s)) \in S_t$$

y como  $a < t < b$  entonces  $\alpha(t) \in I^+(S) \cap I^-(S') \cap S_t$ . Entonces, es necesario que  $k' \neq 0$ , ya que en otro caso se contradeciría el corolario 81. De igual manera, si  $p \in I^-(S)$  y  $S''$  es la superficie de Cauchy con curvatura media  $k''$  constante que pasa por  $p$ , entonces  $k'' > 0$ . Como  $M = I^-(S) \cup S \cup I^+(S)$ , la única superficie de Cauchy con curvatura

media  $k = 0$  tiene que ser  $S$  ya que no puede tener puntos en  $I^-(S) \cup I^+(S)$  como acabamos de ver. Así, como en la proposición 94, existe una única superficie de Cauchy  $S$  con curvatura media  $k = 0$  constante, por lo que la función  $H$  sólo se anula en  $S$ . Sea  $\gamma$  cualquier segmento de curva temporal futura y sean  $p_1, p_2 \in \gamma$  puntos tales que  $p_2 \in I^+(p_1)$ . Si para  $j = 1, 2$  tenemos que  $S_j$  es la superficie de Cauchy con curvatura media  $k_j$  constante y que contiene al punto  $p_j$ , entonces como  $S_1 \neq S_2$ , la proposición 79 implica que  $k_1 \neq k_2$ , y por el corolario 81 se tiene que  $k_1 > k_2$ , luego tenemos que  $\tau(p_1) = -H(p_1) < -H(p_2) = \tau(p_2)$ . De esta manera hemos demostrado que la función  $\tau$  es creciente a lo largo de cualquier curva temporal futura y por la definición de  $H$ , y por tanto de  $\tau$ , si  $r \in \text{Im } \tau$  entonces  $\tau^{-1}(r)$  es la superficie de Cauchy con curvatura media constante  $-r$ . ■

**Teorema 97** *Sea  $M$  un espacio de Lorentz que satisface la condición de convergencia temporal y sea  $S$  una superficie de Cauchy maximal. Existe un entorno  $U$  de  $S$  y una foliación  $\mathcal{F} = \{F_t\}_{t \in I}$  de  $U$  donde cada  $F_t$  es una superficie de curvatura media constante.*

**Demostración.** La demostración puede verse en el lema de [2]. ■

**Corolario 98** *Las superficies de Cauchy  $\partial\Sigma^+$  y  $\partial\Sigma^-$  son maximales.*

**Demostración.** Sea  $p \in \partial\Sigma^+$ , entonces existe una superficie de Cauchy maximal  $S$  que pasa por  $p$ . Por el teorema 97 existe un entorno  $U$  de  $S$  y una foliación  $\mathcal{F} = \{F_t\}_{t \in I}$  tal que  $F_0 = S$ . Consideremos cualquier punto  $q \in S$ . Como  $p$  y  $q$  están sobre la misma hoja  $F_0$  de la foliación, entonces para entornos  $V_p$  y  $V_q$  cualesquiera de  $p$  y  $q$  existe  $t$  tal que

$$F_t \cap V_p \cap I^+(p) \neq \emptyset \quad \text{y} \quad F_t \cap V_q \cap I^+(q) \neq \emptyset$$

Sean  $p_0 \in F_t \cap V_p \cap I^+(p)$  y  $q_0 \in F_t \cap V_q \cap I^+(q)$ , entonces como  $p \in \partial\Sigma^+$ , por el lema 87, se tiene que  $p_0 \notin \Sigma$  y por el corolario 81 entonces  $p_0 \in \Sigma^+$ . Luego por  $p_0$  pasa una superficie de Cauchy  $S'$  de curvatura media constante negativa y por la proposición 79 tenemos que es la única con tal curvatura media y así se tiene que  $S' = F_t$ . Esto implica que  $q_0 \in \Sigma^+$ , lo que quiere decir que arbitrariamente cerca de  $q \in S$  existe un punto  $q_0 \in \Sigma^+$ , luego  $q \in \partial\Sigma^+$  y por tanto  $S = \partial\Sigma^+$  que es una hipersuperficie maximal.

La demostración para  $\partial\Sigma^-$  es análoga. ■

**Corolario 99** *Las foliaciones de  $\Sigma^+$  y  $\Sigma^-$  mediante superficies de Cauchy de curvatura media constante puede extenderse hasta el interior de  $\Sigma$ .*

**Demostración.** Tomando  $S = \partial\Sigma^+$  y aplicando el teorema 97 tenemos que existe un entorno  $U$  de  $S$  y una foliación  $\mathcal{F} = \{F_t\}_{t \in I}$  de  $U$  donde cada  $F_t$  es una superficie de curvatura media constante, por lo que la foliación se extiende hasta  $\text{int}(\Sigma)$ .

La demostración para la foliación de  $\Sigma^-$  es análoga. ■

**Proposición 100** *Si  $\partial\Sigma^+ \cap \partial\Sigma^- \neq \emptyset$  entonces  $\text{int}(\Sigma) = \emptyset$ .*

**Demostración.** Por el corolario 98,  $\partial\Sigma^+$  es una superficie de Cauchy maximal y por el teorema 97 existe un entorno  $U$  de  $\partial\Sigma^+$  que está foliado mediante superficies de Cauchy con curvatura media constante. Sea  $p \in \partial\Sigma^+ \cap \partial\Sigma^-$  y consideremos cualquier punto  $q \in \partial\Sigma^+$ . Si  $V_p \subset U$  es un entorno de  $p$  y  $V_q \subset U$  es un entorno de  $q$ , podemos encontrar una superficie de Cauchy  $S_0$  con curvatura media constante  $k_0 > 0$  tal que  $V_p \cap S_0 \neq \emptyset$  ya que  $p \in \partial\Sigma^-$ , de tal modo que  $V_q \cap S_0 \neq \emptyset$ . Esto implica que  $q \in \partial\Sigma^-$ , por lo que  $\partial\Sigma^+ \subset \partial\Sigma^-$ . De forma análoga se demuestra que  $\partial\Sigma^- \subset \partial\Sigma^+$ , por lo que entonces  $\partial\Sigma^+ = \partial\Sigma^- = \Sigma$ , luego  $\text{int}(\Sigma) = \emptyset$ . ■

**Proposición 101** *int*( $\Sigma$ ) es conexo.

**Demostración.** Si  $\text{int}(\Sigma) = \emptyset$  no hay nada que demostrar. Supongamos que  $\text{int}(\Sigma) \neq \emptyset$ . Vamos a demostrar que  $\text{int}(\Sigma)$  es conexo por caminos. Sea  $U$  un entorno de  $\partial\Sigma^+$  que está foliado mediante superficies de Cauchy con curvatura media constante, cuya existencia está asegurada por el teorema 97. Sean  $p, q \in \text{int}(\Sigma)$  y sean  $\alpha, \beta$  curvas temporales inextensibles tales que  $p \in \alpha$  y  $q \in \beta$ . Como  $U$  está foliado mediante superficies de Cauchy con curvatura media constante entonces existe una superficie de Cauchy maximal  $S \subset U \cap \text{int}(\Sigma)$ . Sean  $r_1 = \alpha \cap S$  y  $r_2 = \beta \cap S$ . Como  $S$  es conexa, entonces existe una curva  $\gamma \subset S$  que une los puntos  $r_1$  y  $r_2$ . Aplicando el lema 86 se tiene que la unión del segmento de  $\alpha$  entre  $p$  y  $r_1$  con la curva  $\gamma$  y con el segmento de  $\beta$  entre  $r_2$  y  $q$ , es un camino contenido en  $\text{int}(\Sigma)$  que une  $p$  con  $q$ . Luego  $\text{int}(\Sigma)$  es conexo por caminos y, por tanto, es conexo. ■

## Capítulo 5

# Ejemplos de espacios de Lorentz de punto omega

### 5.1. Crecimiento causal

En esta sección vamos a buscar un ejemplo más general de espacio de Lorentz de punto omega. Para conseguir este objetivo es necesario emplear argumentos globales y evitar así los problemas de cambiar de carta para demostrar que  $I^-(\gamma) = M$  para cualquier curva  $\gamma$  temporal inextensible. Para este propósito utilizaremos el mismo punto de vista que en [10].

**Definición 102** Sean  $X \in \mathfrak{X}(M)$  y  $\Phi_s : M \rightarrow M$  el flujo de  $X$ . Sea el tensor  $B \in \mathfrak{T}_2^0(M)$ , entonces se define la **derivada de Lie** de  $B$  a lo largo de  $X$  como

$$\mathcal{L}_X B = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\Phi_s^*(B) - B}{s}$$

**Lema 103** Sean  $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$  y sea el tensor  $B \in \mathfrak{T}_2^0(M)$  entonces

$$(\mathcal{L}_X B)(Y, Z) = X(B(Y, Z)) - B(\mathcal{L}_X Y, Z) - B(Y, \mathcal{L}_X Z)$$

**Demostración.** Véase [13, Proposición 9.21]. ■

**Corolario 104** Sean  $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$  y sea  $\mathbf{g} \in \mathfrak{T}_2^0(M)$  una métrica de Lorentz de  $M$ , entonces

$$(\mathcal{L}_X \mathbf{g})(Y, Y) = 2\mathbf{g}(\nabla_Y X, Y)$$

**Demostración.** Aplicando el lema 103 tenemos que

$$(\mathcal{L}_X \mathbf{g})(Y, Y) = X(\mathbf{g}(Y, Y)) - 2\mathbf{g}([X, Y], Y) = 2(\mathbf{g}(\nabla_X Y, Y)) - 2\mathbf{g}([X, Y], Y)$$

y considerando la relación entre el corchete de Lie y la conexión de Levi-Civita (2.1) obtenemos que

$$(\mathcal{L}_X \mathbf{g})(Y, Y) = 2(\mathbf{g}(\nabla_X Y, Y)) - 2\mathbf{g}(\nabla_X Y - \nabla_Y X, Y) =$$

$$= 2(\mathbf{g}(\nabla_X Y, Y)) - 2\mathbf{g}(\nabla_X Y, Y) + 2\mathbf{g}(\nabla_Y X, Y) = 2\mathbf{g}(\nabla_Y X, Y)$$

como queríamos demostrar. ■

**Definición 105** Se dice que un difeomorfismo  $f : M_1 \rightarrow M_2$  es **causalmente decreciente** si toda curva causal de  $M_1$  se transforma mediante  $f$  en una curva causal de  $M_2$  y toda curva temporal de  $M_1$  en una curva temporal de  $M_2$ . Diremos que  $f$  es **estrictamente causalmente decreciente** si toda curva causal de  $M_1$  se transforma mediante  $f$  en una curva temporal de  $M_2$ .

**Definición 106** Se dice que un campo vectorial temporal  $U \in \mathfrak{X}(M)$  es **causalmente decreciente** si para cualquier vector luz  $N$  se tiene que

$$(\mathcal{L}_U \mathbf{g})(N, N) \leq 0$$

Diremos que  $U$  es **estrictamente causalmente decreciente** si para cualquier vector luz  $N$  se tiene que

$$(\mathcal{L}_U \mathbf{g})(N, N) < 0$$

**Observación 107** Sea  $f : M_1 \rightarrow M_2$  un difeomorfismo entre espacios de Lorentz. Entonces se puede demostrar que:

1.  $f$  es causalmente decreciente si y sólo si para todo  $p \in M_1$  y para todo vector  $v \in T_p M_1$  causal se tiene que el vector  $df_p(v) \in T_{f(p)} M_2$  es causal.
2.  $f$  es estrictamente causalmente decreciente si y sólo si para todo  $p \in M_1$  y para todo vector  $v \in T_p M_1$  causal se tiene que el vector  $df_p(v) \in T_{f(p)} M_2$  es temporal.

En efecto, supongamos primero que  $f$  es causalmente decreciente. Dado  $p \in M_1$  y el vector causal  $v \in T_p M_1$  existe una curva  $\gamma$  causal<sup>1</sup> tal que  $\gamma(0) = p$  y  $\gamma'(0) = v$ . Como  $f$  es causalmente decreciente,  $\gamma$  se transforma mediante  $f$  en una curva causal y como en  $f(p) \in M_2$  su vector tangente es  $df_p(v) \in T_{f(p)} M_2$ , se tiene que  $df_p(v)$  es causal como queríamos demostrar. Recíprocamente, si  $\gamma$  es una curva causal, entonces  $\gamma'(s) \in T_{\gamma(s)} M_1$  es un vector causal para todo  $s$ . Así pues, por hipótesis,  $df_{\gamma(s)}(\gamma'(s)) \in T_{f(\gamma(s))} M_2$  es un vector causal para todo  $s$ . Por tanto se tiene que, mediante  $f$ , la curva  $\gamma$  se transforma en una curva causal y esto implica que  $f$  es causalmente decreciente. Para el caso en que  $f$  es estrictamente causalmente decreciente, la demostración es análoga.

---

<sup>1</sup>Siempre existe una geodésica  $\gamma$  que pasa por  $p \in M$  con velocidad inicial  $v \in T_p M$  (ver, por ejemplo, [13, Lema 3.22]). Si  $v$  es causal (temporal) entonces  $\gamma$  es causal (temporal) ya que por ser geodésica se tiene que  $\mathbf{g}(\gamma'(s), \gamma'(s))$  es constante para todo  $s$  (ver demostración de [13, Lema 3.20]), entonces

$$\mathbf{g}(\gamma'(s), \gamma'(s)) = \mathbf{g}(\gamma'(0), \gamma'(0)) = \mathbf{g}(v, v) \leq 0$$

(o bien  $\mathbf{g}(\gamma'(s), \gamma'(s)) = \mathbf{g}(\gamma'(0), \gamma'(0)) = \mathbf{g}(v, v) < 0$  en el caso de que  $v$  sea temporal).

En [10, Teorema 2.1] podemos encontrar la proposición 110 que relaciona las definiciones de difeomorfismo y campo vectorial causalmente decrecientes. Para su demostración necesitamos algunos lemas previos.

**Lema 108** *Sea  $X \in \mathfrak{X}(M)$  un campo vectorial y sea  $\gamma_p$  la curva integral de  $X$  tal que  $\gamma_p(0) = p$ , entonces dado  $Y_p \in T_pM$  existen un entorno  $I \subset \mathbb{R}$  de 0 y un campo vectorial  $Y$  definido sobre  $\gamma_p(I)$  que es invariante por el flujo de  $X$ .*

**Demostración.** Si  $\Phi : V \times I \rightarrow M$  es el flujo local de  $X$  en  $p$ , entonces se puede definir el campo vectorial  $Y$  sobre  $\gamma_p(I)$  como

$$Y(t) = (d\Phi_t)_p(Y_p)$$

Veamos que  $Y$  es invariante por el flujo de  $X$ . En efecto

$$\begin{aligned} (d\Phi_s)_{\gamma_p(t)}(Y(t)) &= (d\Phi_s)_{\gamma_p(t)}(d\Phi_t)_p(Y_p) = \\ &= (d(\Phi_s \circ \Phi_t))_p(Y_p) = (d\Phi_{s+t})_p(Y_p) = Y(s+t) \end{aligned}$$

siempre que  $s$ ,  $t$  y  $s+t$  pertenezcan a  $I$ . ■

**Lema 109** *Sea  $M$  un espacio de Lorentz establemente causal. Sea  $U \in \mathfrak{X}(M)$  un campo vectorial temporal, completo y estrictamente causalmente decreciente, entonces para todo  $s > 0$  el flujo  $\Phi_s$  de  $U$  es estrictamente causalmente decreciente.*

**Demostración.** Ofrecemos la demostración de [10, Teorema 2.1]. Consideremos cualquier punto  $p \in M$  y un vector luz  $N_p \in T_pM$  que por el lema 108 tiene una extensión  $N$  invariante por el flujo  $\Phi_s$  a lo largo de la curva integral  $\gamma_p$  de  $U$ , es decir,  $d\Phi_s(N_{\gamma_p(r)}) = N_{\gamma_p(s+r)}$ . Como

$$(\mathcal{L}_U \mathbf{g})(N_p, N_p) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s} [\mathbf{g}(d\Phi_s(N_p), d\Phi_s(N_p)) - \mathbf{g}(N_p, N_p)] = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s} [\mathbf{g}(d\Phi_s(N_p), d\Phi_s(N_p))]$$

y por ser  $U$  estrictamente causalmente decreciente entonces

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s} [\mathbf{g}(d\Phi_s(N_p), d\Phi_s(N_p))] < 0$$

por tanto existe  $\epsilon > 0$  tal que si  $s \in (0, \epsilon)$  entonces  $\mathbf{g}(d\Phi_s(N_p), d\Phi_s(N_p)) < 0$ , es decir  $d\Phi_s(N_p)$  es temporal, y si  $s \in (-\epsilon, 0)$  entonces  $\mathbf{g}(d\Phi_s(N_p), d\Phi_s(N_p)) > 0$ , es decir  $d\Phi_s(N_p)$  es espacial. De hecho, para todo  $s > 0$  tenemos que  $\mathbf{g}(d\Phi_s(N_p), d\Phi_s(N_p)) < 0$ , ya que en caso contrario existiría un primer  $s_0 \geq \epsilon$  tal que  $\mathbf{g}(d\Phi_{s_0}(N_p), d\Phi_{s_0}(N_p)) = 0$ , y por tanto  $d\Phi_{s_0}(N_p)$  sería un vector luz con el que se podría repetir el argumento anterior, y así existiría  $\tilde{\epsilon} > 0$  tal que si  $\tau < s_0 - \tilde{\epsilon}$  entonces  $\mathbf{g}(d\Phi_\tau(N_p), d\Phi_\tau(N_p)) > 0$  contradiciendo que  $s_0$  es el primer valor para el que  $d\Phi_{s_0}(N_p)$  es luz. Así pues, para todo  $p \in M$  y todo vector luz  $N_p \in T_pM$  se tiene que para todo  $s > 0$  el vector  $d\Phi_s(N_p)$  es temporal, y aplicando ahora la proposición 107 se tiene que  $\Phi_s$  es estrictamente causalmente decreciente. ■



**Proposición 110** Sea  $M$  un espacio de Lorentz establemente causal y sea  $U \in \mathfrak{X}(M)$  un campo vectorial completo y temporal. Entonces el flujo  $\Phi_s$  de  $U$  es causalmente decreciente para  $s > 0$  si y sólo si  $U$  es causalmente decreciente.

**Demostración.** La demostración puede verse en [10, Teorema 2.1] y utiliza el lema 109. ■

**Teorema 111** Sea  $M$  un espacio de Lorentz establemente causal. Sea  $U \in \mathfrak{X}(M)$  un campo vectorial completo, causalmente decreciente y temporal orientado hacia el futuro, entonces cualquier curva integral  $\alpha$  de  $U$  verifica que  $I^-(\alpha) = M$ .

**Demostración.** Ampliamos detalladamente la demostración de [10, Teorema 2.3]. Sea  $p \in M$  un punto cualquiera y sea  $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow M$  una curva integral de  $U$ , que podemos suponer temporal futura. El flujo completo de  $U$  lo denotaremos como  $\Phi$ . Queremos demostrar que  $p \in I^-(\alpha)$ . Sea  $\sigma : [0, 1] \rightarrow M$  una curva diferenciable tal que  $\sigma(0) = p$  y  $\sigma(1) = \alpha(0)$ . A partir de estas curvas definimos

$$\begin{aligned} \mu : \mathbb{R} \times [0, 1] &\longrightarrow M \\ (t, s) &\longmapsto \mu(t, s) = \Phi(\sigma(s), t) \end{aligned}$$

y los campos vectoriales  $T$  y  $S$  definidos en la imagen de  $\mu$  tales que

$$\begin{aligned} T(\mu(t, s)) &= (d\mu)_{(t,s)} \left( \frac{\partial}{\partial t} \right)_{(t,s)} \\ S(\mu(t, s)) &= (d\mu)_{(t,s)} \left( \frac{\partial}{\partial s} \right)_{(t,s)} \end{aligned}$$

Es claro que  $T(\mu(t, s)) = U(\mu(t, s))$  y por tanto,  $\mathbf{g}(T, T)_{\mu(0,s)} < 0$  para todo  $s \in [0, 1]$ . Consideremos las funciones  $f, h : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  definidas como

$$\begin{aligned} f(s) &= \frac{\mathbf{g}(T, S)_{\mu(0,s)}^2 - \mathbf{g}(T, T)_{\mu(0,s)} \mathbf{g}(S, S)_{\mu(0,s)}}{\mathbf{g}(T, T)_{\mu(0,s)}^2} \\ h(s) &= \frac{\mathbf{g}(T, S)_{\mu(0,s)}}{-\mathbf{g}(T, T)_{\mu(0,s)}} \end{aligned}$$

que son continuas para todo  $s \in [0, 1]$  y por tanto alcanzan sus máximos en  $[0, 1]$ . Tomamos los valores  $f_0 > 0$  tal que  $f_0 > \max_{s \in [0,1]} f(s)$  y  $h_0 > \max_{s \in [0,1]} h(s)$  y, a partir de éstos, elegimos un valor  $m > 0$  tal que  $m > h_0 + \sqrt{f_0}$ . De esta manera tenemos que para todo  $s \in [0, 1]$

$$\begin{aligned} m &> h_0 + \sqrt{f_0} > h(s) + \sqrt{f_0} \\ m - h(s) &> h_0 - h(s) + \sqrt{f_0} > \sqrt{f_0} > 0 \\ (m - h(s))^2 &> f_0 > 0 \end{aligned}$$

y, por lo tanto

$$-(m - h(s))^2 < -f_0 \quad (5.1)$$

Con esta elección del valor  $m$ , el campo vectorial  $mT + S$  es temporal en cualquier punto  $\mu(0, s)$  para todo  $s \in [0, 1]$ . En efecto, como  $-\mathbf{g}(T, T)_{\mu(0,s)} > 0$  vemos que

$$\frac{1}{-\mathbf{g}(T, T)_{\mu(0,s)}} \cdot \mathbf{g}(mT + S, mT + S)_{\mu(0,s)} < 0$$

Así, desarrollando y utilizando 5.1 se tiene lo siguiente

$$\begin{aligned} \frac{1}{-\mathbf{g}(T, T)_{\mu(0,s)}} \cdot \mathbf{g}(mT + S, mT + S)_{\mu(0,s)} &= -m^2 + 2m \frac{\mathbf{g}(T, S)_{\mu(0,s)}}{-\mathbf{g}(T, T)_{\mu(0,s)}} + \frac{\mathbf{g}(S, S)_{\mu(0,s)}}{-\mathbf{g}(T, T)_{\mu(0,s)}} = \\ &= -(m - h(s))^2 + f(s) < -(m - h(s))^2 + f_0 < -f_0 + f_0 = 0 \end{aligned}$$

por lo que para todo  $s \in [0, 1]$  se verifica que

$$\mathbf{g}(mT + S, mT + S)_{\mu(0,s)} < 0$$

y así  $mT + S$  es temporal en  $\mu(0, s)$  para todo  $s \in [0, 1]$ .

Por otro lado, como  $U$  es causalmente decreciente, entonces por la proposición 110 el flujo  $\Phi_t$  es causalmente decreciente para todo  $t > 0$  y así, por la proposición 107, se tiene que  $(d\Phi_t)_{\mu(0,s)}(mT + S)_{\mu(0,s)}$  es causal. Como  $mT + S$  es invariante por el flujo de  $U$  ya que si  $g \in \mathcal{F}(M)$

$$\begin{aligned} (d\Phi_t)_{\mu(0,s)}(mT + S)_{\mu(0,s)}(g) &= (mT + S)_{\mu(0,s)}(g \circ \Phi_t) = (d\mu)_{(0,s)} \left( m \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial s} \right)_{(0,s)} (g \circ \Phi_t) = \\ &= \left( m \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial s} \right)_{(0,s)} (g \circ \Phi_t \circ \mu)_{(0,s)} = \left( m \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial s} \right)_{(t,s)} (g \circ \mu)_{(t,s)} = \\ &= (d\mu)_{(t,s)} \left( m \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial s} \right)_{(t,s)} (g) = (mT + S)_{\mu(t,s)}(g) \end{aligned}$$

entonces también  $(mT + S)_{\mu(t,s)}$  es causal para todo  $t > 0$ . Como la curva  $\eta : [0, 1] \rightarrow M$  dada por  $\eta(r) = \mu(mr, r)$  es curva integral de  $mT + S$  ya que

$$\eta'(r) = (d\eta)_r \left( \frac{\partial}{\partial r} \right)_r = (d\mu)_{(mr,r)} \left( m \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial s} \right)_{(mr,r)} = (mT + S)_{\mu(mr,r)} = (mT + S)_{\eta(r)}$$

entonces es una curva causal futura que verifica

$$\begin{aligned} \eta(0) &= \mu(0, 0) = \Phi(\sigma(0), 0) = p \\ \eta(1) &= \mu(m, 1) = \Phi(\sigma(1), m) = \alpha(m) \end{aligned}$$

es decir, conecta  $p$  con  $\alpha(m)$  y de esta manera  $p \in J^-(\alpha(m))$ . Si tomamos  $\tau > 0$  entonces  $\alpha(m) \in I^-(\alpha(m+\tau))$  y por el teorema 18 podemos concluir que  $p \in I^-(\alpha(m+\tau)) \subset I^-(\alpha)$  y así hemos demostrado que la curva integral  $\alpha$  verifica que  $I^-(\alpha) = M$ . ■

Por el teorema 62 sabemos que un espacio de punto omega  $M$  es globalmente hiperbólico con superficies de Cauchy compactas y en [9] se demuestra que por ser globalmente hiperbólico,  $M$  es difeomorfo a  $\mathbb{R} \times N$  donde las hipersuperficies  $\{t\} \times N$  son superficies de Cauchy (compactas) para todo  $t \in \mathbb{R}$  y las curvas  $\mathbb{R} \times \{p\}$  son temporales para todo  $p \in N$ . Si  $T \in \mathfrak{X}(M)$  es un campo vectorial completo, tangente a cada curva  $\mathbb{R} \times \{p\}$  y causalmente decreciente, es posible demostrar que  $M$  es de punto omega. Lo vemos en la siguiente proposición 113.

**Lema 112** *Sea  $\Phi$  el flujo completo del campo vectorial  $T \in \mathfrak{X}(M)$  definido anteriormente y sea  $(t, p) \in \mathbb{R} \times N$  un punto cualquiera. Existe un entorno  $W$  de  $(t, p)$  tal que existen  $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$  de manera que  $\Phi_{r_1}(W) \subset I^-(t, p)$  y  $\Phi_{r_2}(W) \subset I^+(t, p)$ .*

**Demostración.** Sea  $\alpha$  la curva integral de  $T$  tal que  $\alpha(0) = (t, p)$ . Tomemos  $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$  tales que  $r_1 < 0 < r_2$  y tomemos  $W_1$  un entorno de  $\alpha(r_1)$  contenido en el abierto  $I^-(t, p)$ . De igual manera, consideramos  $W_2$  un entorno de  $\alpha(r_2)$  contenido en  $I^+(t, p)$ , entonces

$$W = \Phi_{-r_1}(W_1) \cap \Phi_{-r_2}(W_2)$$

es un entorno de  $(t, p)$ . Si  $(\tau, q) \in W$  entonces se verifica que

$$\Phi_{r_1}(\tau, q) \subset \Phi_{r_1}(W) \subset \Phi_{r_1}(\Phi_{-r_1}(W_1)) \subset \Phi_0(W_1) = W_1 \subset I^-(t, p)$$

$$\Phi_{r_2}(\tau, q) \subset \Phi_{r_2}(W) \subset \Phi_{r_2}(\Phi_{-r_2}(W_2)) \subset \Phi_0(W_2) = W_2 \subset I^+(t, p)$$

concluyendo la demostración. ■

**Proposición 113** *Sea  $M$  un espacio de Lorentz y  $h \in \mathcal{F}(M)$  una función tiempo de Cauchy donde las superficies de Cauchy  $S_\eta = h^{-1}(\eta)$  son compactas. Si existe un campo vectorial  $T \in \mathfrak{X}(M)$  completo, causalmente decreciente y proporcional a  $\nabla h$  entonces  $M$  es de punto omega.*

**Demostración.** Podemos suponer sin pérdida de generalidad que  $\text{Im } h = \mathbb{R}$ . Como  $h$  es una función tiempo de Cauchy entonces  $\nabla h$  es un campo temporal que podemos normalizar como  $X = \frac{\nabla h}{\mathbf{g}(\nabla h, \nabla h)} \in \mathfrak{X}(M)$ . Veamos que el flujo  $\Phi$  de  $X$  verifica que  $\Phi_s(S_\eta) = S_{s+\eta}$ . Si  $\sigma$  es una curva integral de  $X$  tal que  $h(\sigma(0)) = 0$ , como

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} h(\sigma(s)) &= dh(\sigma'(s)) = \mathbf{g}(\nabla h(\sigma(s)), \sigma'(s)) = \\ &= \mathbf{g}(\nabla h, X)_{\sigma(s)} = \mathbf{g}\left(\nabla h, \frac{\nabla h}{\mathbf{g}(\nabla h, \nabla h)}\right)_{\sigma(s)} = 1 \end{aligned}$$

por lo que entonces  $h(\sigma(s)) = s + c$  siendo  $c$  una constante. Como hemos tomado  $\sigma$  de forma que  $h(\sigma(0)) = 0$  entonces  $c = 0$  y por tanto se tiene que

$$h(\sigma(s)) = s$$

para toda curva integral  $\sigma$  de  $X$  con valor inicial en la superficie de Cauchy  $S_0$ . Podemos definir entonces la aplicación

$$\begin{aligned} \Psi : \mathbb{R} \times S_0 &\longrightarrow M \\ (s, q) &\longmapsto \Phi(s, q) \end{aligned}$$

Tenemos que  $\Psi$  es inyectiva ya que si  $\Phi(s_1, q_1) = \Phi(s_2, q_2)$  entonces

$$\Phi(s_1, q_1) = \Phi(s_2, q_2) \implies \Phi(s_1 - s_2, q_1) = \Phi(0, q_2) = q_2 \in S_0$$

y como  $S_0$  es una superficie de Cauchy, es necesario que  $q_1 = q_2$  y  $s_1 = s_2$  ya que en caso contrario la curva  $\sigma(s) = \Phi(s, q_1)$  que es temporal, intersecaría más de una vez a  $S_0$ , lo que es imposible. También es sobreyectiva porque para cualquier punto  $p \in M$  existe  $\eta \in \mathbb{R}$  tal que  $p \in S_\eta$  y como  $\Phi_\eta(S_0) = S_\eta$  entonces existe  $q \in S_0$  tal que  $\Psi(\eta, q) = p$ . Como  $\Psi$  está definida mediante el flujo de un campo vectorial, entonces es un difeomorfismo local y, al ser biyectiva, tenemos que  $\Psi$  es un difeomorfismo global. De esta manera, vamos a considerar que  $M = \mathbb{R} \times S_0$ .

Como existen superficies de Cauchy entonces  $M$  es globalmente hiperbólico y, por tanto, también establemente causal. Además, por ser  $T \in \mathfrak{X}(M)$  proporcional a  $\nabla h$  entonces se tiene que  $T$  es temporal y tiene las mismas curvas integrales (salvo reparametrización) que  $\nabla h$ . Aplicando el teorema 111 se tiene que cualquier curva integral  $\alpha$  de  $T$  verifica que  $I^-(\alpha) = M$ . Vamos a ver que para cualquier curva  $\gamma$  temporal inextensible hacia el futuro se tiene que  $I^-(\gamma) = M$ .

Consideremos  $(\tau, q) \in \mathbb{R} \times S_0$  un punto cualquiera y sea

$$\gamma = (\gamma_1, \gamma_2) : [a, b) \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \times S_0$$

una curva temporal futura inextensible hacia el futuro tal que

$$\gamma(a) = (\gamma_1(a), \gamma_2(a)) = (t_0, q_0)$$

Como  $M = \mathbb{R} \times S_0$  es establemente causal, entonces también verifica la condición fuerte de causalidad y así,  $\gamma$  no puede estar ni total ni parcialmente aprisionada hacia el futuro en ningún conjunto compacto. Como para cualquier  $t > 0$  se tiene que  $[t_0 - t, t_0 + t] \times S_0$  es compacto y como la hipersuperficie  $\{t_0 - t\} \times S_0$  es espacial, entonces para todo  $t > 0$  existe  $s_t \in [a, b)$  tal que se verifica que

$$\gamma_1(s) \in (t_0 + t, +\infty) \text{ para todo } s > s_t.$$

Así, si  $s \mapsto b$  entonces  $\gamma_1(s) \mapsto +\infty$ . Por otro lado, como  $S_0$  es compacta entonces  $\gamma_2$  tiene un punto de acumulación que podemos nombrar como  $p \in S_0$ , por lo que existe una sucesión creciente  $\{s_n\} \subset [a, b)$  tal que  $s_n \mapsto b$  y

$$\gamma(s_n) = (\gamma_1(s_n), \gamma_2(s_n)) = (t_n, p_n)$$

que verifica

$$\begin{aligned} p_n &\mapsto p \\ t_n &\mapsto +\infty \end{aligned}$$

Sea  $\alpha$  la curva integral del campo vectorial  $T$  definida como

$$\alpha(u) = (u, p)$$

Dado que  $I^-(\alpha) = M$  entonces

$$(\tau, q) \in I^-(\alpha)$$

por lo que existe  $u_q \in \mathbb{R}$  tal que

$$(\tau, q) \in I^-(\alpha(u_q))$$

Por el lema 112 existe un entorno  $W$  de  $\alpha(u_q)$  tal que, si  $\Phi$  es el flujo de  $T$ , entonces existe  $r_1 \in \mathbb{R}$  verificando que

$$\Phi_{r_1}(W) \subset I^+(\alpha(u_q))$$

y por tanto para cualquier  $r > r_1$  se tiene que

$$\Phi_r(W) \subset I^+(\alpha(u_q))$$

Por simplicidad y sin pérdida de generalidad podemos considerar

$$W = I \times W_0$$

donde  $I = (\alpha(u_q) - \epsilon, \alpha(u_q) + \epsilon)$  con  $\epsilon > 0$  suficientemente pequeño y  $W_0 \subset S_0$ . Así tenemos que para  $(\tilde{t}, r) \in W$  y para todo  $\delta \in \mathbb{R}$  se tiene que

$$\Phi_\delta(\tilde{t}, r) = (h(\delta, \tilde{t}, r) + \tilde{t}, r) \in \mathbb{R} \times W_0$$

para cierta función  $h(\delta, \tilde{t}, r)$  que, por ser parte del flujo de  $T$ , debe verificar que

$$\begin{aligned} h(0, \tilde{t}, r) &= 0 \\ h(\delta, \tilde{t}, r) &> 0 \text{ si } \delta > 0 \\ h(\delta, \tilde{t}, r) &< 0 \text{ si } \delta < 0 \end{aligned}$$

En particular, para  $\tilde{t} \in I$  se tiene que  $\Phi_{r_2}(\{\tilde{t}\} \times W_0)$  es una sección de  $\mathbb{R} \times W_0$  y el abierto  $W_0$  es un entorno de  $p$ , entonces a partir de cierto  $m \in \mathbb{N}$  se tiene que  $p_n \in W_0$  para todo  $n > m$ . Luego, como  $p_n \mapsto p$  y  $t_n \mapsto +\infty$  entonces se pueden encontrar  $r_2 \in \mathbb{R}$  y  $k \in \mathbb{N}$  tales que  $r_2 > r_1$  y  $(t_k, p_k) \in \Phi_{r_2}(W)$  y, de esta manera, se verifica que

$$(t_k, p_k) \in \Phi_{r_2}(W) \subset I^+(\alpha(u_q)) \subset I^+(\tau, q)$$

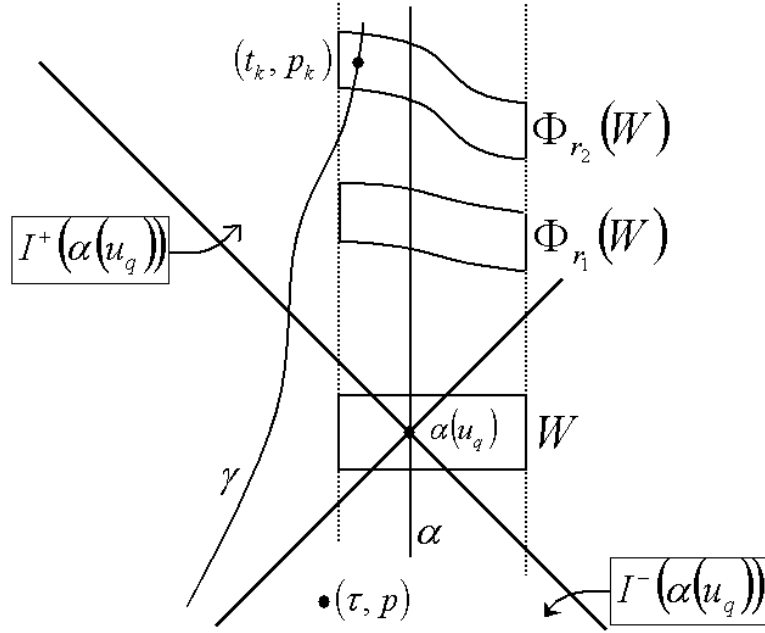
es decir,

$$(\tau, q) \in I^-(t_k, p_k)$$

y como  $(t_k, p_k) \in \gamma$  entonces concluimos que

$$(\tau, q) \in I^-(\gamma)$$

como queríamos demostrar. ■



**Figura 7:** Esquema de la demostración de la proposición 113.

## 5.2. Ejemplos de espacios de punto omega

### 5.2.1. Un primer ejemplo

Con los resultados de la sección anterior estamos en condiciones de exponer un primer ejemplo de espacio de Lorentz que resultará ser de punto omega.

Consideremos  $N$  una variedad diferenciable compacta e  $I \subset \mathbb{R}$  un abierto conexo. Sean

$$\pi_1 : I \times N \rightarrow I$$

$$\pi_2 : I \times N \rightarrow N$$

las respectivas proyecciones canónicas de la variedad producto  $M = I \times N$  sobre sus componentes.

Para cada punto  $(t, q) \in M = I \times N$  podemos considerar los subespacios

$$T_{(t,q)}I \equiv T_{(t,q)}(I \times \{q\}) \subset T_{(t,q)}M$$

$$T_{(t,q)}N \equiv T_{(t,q)}(\{t\} \times N) \subset T_{(t,q)}M$$

entonces según [13, Lema 1.43] se tiene que

$$T_{(t,q)}I \oplus T_{(t,q)}N = T_{(t,q)}M$$

Así para cada  $w \in T_{(t,q)}M$  hay una única descomposición

$$w = x + v$$

con  $x \in T_{(t,q)}I$  y  $v \in T_{(t,q)}N$ . Diremos que  $x \in T_{(t,q)}I$  es la **elevación vertical** sobre  $I$  en  $(t, q)$  de  $\tilde{x} \in T_t I$  si  $x$  es el único vector que verifica que  $d\pi_1(x) = \tilde{x}$ . De igual modo se puede definir la **elevación horizontal** sobre  $N$  en  $(t, q)$  de  $\tilde{v} \in T_q N$  como el único vector  $v \in T_{(t,q)}N$  que verifica  $d\pi_2(v) = \tilde{v}$ . Sea  $\tilde{V} \in \mathfrak{X}(I)$  entonces  $V \in \mathfrak{X}(M)$  es la elevación vertical de  $\tilde{V}$  si  $d\pi_1(V(t, q)) = \tilde{V}(t)$  para todo  $(t, q) \in M$  y de igual manera, si  $\tilde{X} \in \mathfrak{X}(N)$  entonces  $X \in \mathfrak{X}(M)$  es la elevación horizontal de  $\tilde{X}$  si  $d\pi_2(X(t, q)) = \tilde{X}(q)$  para todo  $(t, q) \in M$ .

**Notación 114** *Al conjunto de todas las elevaciones verticales de campos vectoriales de  $I$  y al conjunto de todas las elevaciones horizontales de campos vectoriales de  $N$  los denotaremos como  $\mathcal{L}(I)$  y  $\mathcal{L}(N)$  respectivamente.*

**Notación 115** *Sea  $J \subset \mathbb{R}$  un abierto conexo y consideremos a la aplicación identidad  $Id : J \rightarrow J$  como una carta global de  $J$ , denotando al campo vectorial coordenado asociado como  $\frac{\partial}{\partial r}$ . Vamos a denominar  $\mathbf{g}_{E(J)}$  a la métrica euclídea sobre el intervalo  $J \subset \mathbb{R}$ , es decir, a la métrica que verifica*

$$\mathbf{g}_{E(J)} \left( \frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial r} \right) = 1$$

Para dotar de una métrica a la variedad  $M = I \times N$ , consideramos primero la métrica euclídea  $\mathbf{g}_{E(I)}$  en  $I$  y una familia de métricas de Riemann  $\mathbf{g}_\lambda$  sobre  $N$  con  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Construimos así, la métrica  $\mathbf{g}$  en  $M$  como

$$\mathbf{g} = -(f \circ \pi_1)^2 \pi_1^* (\mathbf{g}_{E(I)}) + \pi_2^* (\mathbf{g}_{h \circ \pi_1}) \quad (5.2)$$

donde  $f, h \in \mathcal{F}(I) \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $f > 0$ . Es fácil ver que estos espacios de Lorentz son establemente causales ya que el campo vectorial gradiente de la función  $\pi_1$  es temporal. En efecto, podemos descomponer el campo vectorial  $\nabla \pi_1$  como

$$\nabla \pi_1 = R + S$$

donde  $R \in \mathcal{L}(I)$  y  $S \in \mathcal{L}(N)$ . Luego, por las propiedades del campo gradiente tenemos que

$$\mathbf{g}(\nabla \pi_1, S) = S(\pi_1) = 0$$

y por tanto, para cualquier  $(t, q) \in I \times N$

$$\mathbf{g}(\nabla \pi_1, \nabla \pi_1) = \mathbf{g}(\nabla \pi_1, R) + \mathbf{g}(\nabla \pi_1, S) = \mathbf{g}(\nabla \pi_1, R) =$$

$$= \mathbf{g}(R, R) + \mathbf{g}(R, S) = \mathbf{g}(R, R) = -f(t)^2 < 0$$

por lo que  $\nabla\pi_1$  es temporal y así, la definición 25 nos dice que  $M = I \times N$  es establemente causal.

**Lema 116** Sean  $R \in \mathcal{L}(I)$  y  $S \in \mathcal{L}(N)$ , entonces se tiene que

1.  $\mathbf{g}(\nabla_R R, R) = \frac{1}{2}R(\mathbf{g}(R, R))$
2.  $\mathbf{g}(\nabla_S R, R) = 0$
3.  $\mathbf{g}(\nabla_R R, S) = 0$
4.  $\mathbf{g}(\nabla_S R, S) = \frac{1}{2}R(\mathbf{g}(S, S))$

**Demostración.** La igualdad 1 es una consecuencia directa de la fórmula de Koszul. Para demostrar 2, 3 y 4 basta combinar la fórmula de Koszul con que  $[S, R] = 0$  (como se demuestra en [13, Corolario 1.44]) y  $S(\mathbf{g}(R, R)) = 0$ . ■

Con estos resultados previos, estamos en disposición de presentar el primer ejemplo.

Vamos a considerar el caso en que  $I = \mathbb{R}$ , por lo que construimos la variedad  $\mathbb{R} \times N$  dotada de la métrica

$$\mathbf{g} = -(f \circ \pi_1)^2 \pi_1^*(\mathbf{g}_{E(\mathbb{R})}) + \pi_2^*(\mathbf{g}_{h \circ \pi_1}) \quad (5.3)$$

Podemos considerar en  $\mathbb{R}$  una carta global dada por la aplicación identidad  $t(r) = r$  para todo  $r \in \mathbb{R}$  y entonces el campo coordenado  $\frac{\partial}{\partial t}$  es completo en  $\mathbb{R}$ . Llamando, por lo tanto,  $T \in \mathfrak{X}(M)$  a la elevación vertical del campo  $\frac{\partial}{\partial t} \in \mathfrak{X}(\mathbb{R})$ , es trivial ver que  $T$  es completo y temporal.

Supongamos ahora que  $Z$  es un campo vectorial luz que podemos decomponer como

$$Z = aT + S$$

donde  $S \in \mathcal{L}(N)$  y  $a \in \mathcal{F}(M)$ . Así

$$0 = \mathbf{g}(Z, Z) = a^2 \mathbf{g}(T, T) + 2a \mathbf{g}(T, S) + \mathbf{g}(S, S) = -a^2 f^2 + \mathbf{g}(S, S)$$

por lo que entonces

$$a^2 = \frac{\mathbf{g}(S, S)}{f^2}$$

Supongamos que para cualquier elevación horizontal  $S \in \mathcal{L}(N)$  se verifica que

$$\frac{T(\mathbf{g}(S, S))}{\mathbf{g}(S, S)} \leq \frac{2f'}{f} \quad (5.4)$$



entonces, aplicando el lema 116, se tiene que

$$\begin{aligned}
(\mathcal{L}_T \mathbf{g})(Z, Z) &= 2\mathbf{g}(\nabla_Z T, Z) = \\
&= 2a^2 \mathbf{g}(\nabla_T T, T) + 2a\mathbf{g}(\nabla_S T, T) + 2a\mathbf{g}(\nabla_T T, S) + 2\mathbf{g}(\nabla_S T, S) = \\
&= 2a^2 \mathbf{g}(\nabla_T T, T) + 2\mathbf{g}(\nabla_S T, S) = \\
&= \frac{\mathbf{g}(S, S)}{f^2} \cdot T(\mathbf{g}(T, T)) + T(\mathbf{g}(S, S)) = \\
&= \frac{\mathbf{g}(S, S)}{f^2} \cdot (-2) \cdot f \cdot f' + T(\mathbf{g}(S, S)) = \\
&= \mathbf{g}(S, S) \left[ \frac{-2f'}{f} + \frac{T(\mathbf{g}(S, S))}{\mathbf{g}(S, S)} \right] \leq 0
\end{aligned}$$

y por la definición 106 se tiene que  $T \in \mathfrak{X}(M)$  es un campo temporal causalmente decreciente.

Estamos ahora en condiciones de aplicar el teorema 111 para obtener que cualquier curva integral  $\alpha$  del campo vectorial  $T$  verifica que  $I^-(\alpha) = M$ .

**Ejemplo 117** *El espacio de Lorentz  $M = \mathbb{R} \times N$  dotado de la métrica*

$$\mathbf{g} = -(f \circ \pi_1)^2 \pi_1^*(\mathbf{g}_{E(\mathbb{R})}) + \pi_2^*(\mathbf{g}_{h \circ \pi_1})$$

donde  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $f > 0$  y verificando la condición 5.4 para toda elevación horizontal  $S \in \mathcal{L}(N)$  es un espacio de Lorentz de punto omega. En efecto, si  $T \in \mathfrak{X}(M)$  es la elevación vertical del campo  $\frac{\partial}{\partial t} \in \mathfrak{X}(\mathbb{R})$ , hemos comprobado que  $T$  es completo y temporal. Al verificarse la condición 5.4, se tiene que  $T$  es causalmente decreciente. Por otro lado, también hemos comprobado que  $M$  es establemente causal, por tanto no existen curvas temporales inextensibles aprisionadas en compactos, y no deben salir de cualquier compacto  $I \times N$ . Así cualquier curva temporal inextensible debe cortar, al menos una vez, a cada hipersuperficie  $\{t\} \times N$ , y por ser estas espaciales, las curvas temporales no pueden cortar más de una vez. Esto implica que las hipersuperficies  $\{t\} \times N$  son superficies de Cauchy y por tanto  $M$  es globalmente hiperbólico. Aplicando ahora la proposición 113, se concluye que  $M$  es de punto omega.

### 5.2.2. Un ejemplo más general

A continuación vamos a generalizar la variedad producto anterior al caso  $I \times N$  donde  $I$  es cualquier intervalo de  $\mathbb{R}$ . Para ello conservaremos la notación del caso anterior añadiendo la que nos sea necesaria.

**Lema 118** *Sea  $I \subset \mathbb{R}$  un abierto conexo, si  $\mathbf{g}_I$  es una métrica de Riemann en  $I$ , entonces existe  $\phi \in \mathcal{F}(I)$  tal que los espacios de Riemann  $(I, \mathbf{g}_I)$  y  $(I, \phi^2 \mathbf{g}_{E(I)})$  son isométricos.*

**Demostración.** Basta tomar  $\phi \in \mathcal{F}(I)$  como  $\phi(r) = [\mathbf{g}_I(\frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial r})_r]^{1/2}$ , así

$$\mathbf{g}_I\left(\frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial r}\right)_r = \phi^2(r) = \phi^2(r) \cdot \mathbf{g}_{E(I)}\left(\frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial r}\right)_r$$

por lo que entonces  $(I, \mathbf{g}_I)$  y  $(I, \phi^2 \mathbf{g}_{E(I)})$  son isométricos. ■

Supongamos ahora que tenemos  $I \subset \mathbb{R}$  un abierto conexo dotado de una métrica de Riemann  $\mathbf{g}_I$ , que por el lema 118 podemos considerar que  $\mathbf{g}_I = \tilde{\phi}^2 \mathbf{g}_{E(I)}$  para cierta función  $\tilde{\phi} \in \mathcal{F}(I)$ . Como cualquier abierto conexo  $I \subset \mathbb{R}$  es difeomorfo a  $\mathbb{R}$ , entonces existe un difeomorfismo

$$z : \mathbb{R} \rightarrow I$$

que, sin pérdida de generalidad, podemos suponer que  $z' > 0$ . Consideremos en  $\mathbb{R}$  y en  $I$  la aplicación identidad correspondiente, que es una carta global de  $\mathbb{R}$  e  $I$  respectivamente, y sean  $\frac{\partial}{\partial t} \in \mathfrak{X}(\mathbb{R})$  y  $\frac{\partial}{\partial \tau} \in \mathfrak{X}(I)$  sus campos coordenado asociados. Podemos definir una métrica  $\mathbf{g}_{\mathbb{R}}$  en  $\mathbb{R}$  como

$$\mathbf{g}_{\mathbb{R}} = z^*(\mathbf{g}_I) \tag{5.5}$$

y de esta manera  $z$  es una isometría entre  $(\mathbb{R}, \mathbf{g}_{\mathbb{R}})$  y  $(I, \mathbf{g}_I)$ .

Así pues, para  $u \in \mathbb{R}$  tal que  $z(u) = v \in I$  tenemos que

$$\begin{aligned} \mathbf{g}_{\mathbb{R}}\left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial t}\right)_u &= z^*(\mathbf{g}_I)\left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial t}\right)_u = z^*(\tilde{\phi}^2 \mathbf{g}_{E(I)})\left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial t}\right)_u = \\ &= (\tilde{\phi} \circ z(u))^2 \mathbf{g}_{E(I)}\left(dz\left(\frac{\partial}{\partial t}\right), dz\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)\right)_{z(u)} = (\tilde{\phi} \circ z(u))^2 \mathbf{g}_{E(I)}\left(z'(u) \frac{\partial}{\partial \tau}, z'(u) \frac{\partial}{\partial \tau}\right)_{z(u)} = \\ &= [(\tilde{\phi} \circ z(u)) \cdot z'(u)]^2 \mathbf{g}_{E(I)}\left(\frac{\partial}{\partial \tau}, \frac{\partial}{\partial \tau}\right)_{z(u)} = [(\tilde{\phi} \circ z) \cdot z']^2(u) \end{aligned}$$

por lo que entonces, llamando  $\phi = \tilde{\phi} \circ z$ , tenemos que

$$\mathbf{g}_{\mathbb{R}} = [\phi \cdot z']^2 \mathbf{g}_{E(\mathbb{R})} \tag{5.6}$$

Por otro lado, si llamamos  $\tilde{\pi}_1$  y  $\tilde{\pi}_2$  a las respectivas proyecciones canónicas de  $I \times N$  y si la aplicación  $\tilde{z} : \mathbb{R} \times N \rightarrow I \times N$  es el difeomorfismo definido como  $\tilde{z}(u, q) = (z(u), q) = (v, q)$ , entonces tenemos que

$$\tilde{\pi}_1 \circ \tilde{z} = z \circ \pi_1 \tag{5.7}$$

$$\tilde{\pi}_2 \circ \tilde{z} = \pi_2 \tag{5.8}$$

siendo  $\pi_1$  y  $\pi_2$  las proyecciones canónicas de  $\mathbb{R} \times N$ .

Supongamos que  $I \times N$  está dotado de la métrica de Lorentz

$$\tilde{\mathbf{g}} = -\tilde{\pi}_1^*(\mathbf{g}_I) + \tilde{\pi}_2^*(\mathbf{g}_{\tilde{h} \circ \tilde{\pi}_1})$$

donde, al igual que en el caso anterior,  $\mathbf{g}_I$  es métrica de Riemann en  $I$ ,  $\mathbf{g}_{\tilde{\lambda}}$  es una familia de métricas riemannianas en  $N$  con  $\tilde{\lambda} \in \mathbb{R}$  y  $\tilde{h} \in \mathcal{F}(I)$ , entonces determinemos la métrica  $\mathbf{g} = \tilde{z}^*(\tilde{\mathbf{g}})$  que hace de  $\tilde{z}$  una isometría. Sean  $X, Y \in \mathfrak{X}(\mathbb{R} \times N)$  y sea  $(u, q) \in \mathbb{R} \times N$  tal que  $\tilde{z}(u, q) = (v, q)$ , entonces

$$\begin{aligned}
\mathbf{g}(X, Y)_{(u, q)} &= \tilde{z}^*(\tilde{\mathbf{g}})(X, Y)_{(u, q)} = \tilde{\mathbf{g}}(d\tilde{z}(X), d\tilde{z}(Y))_{\tilde{z}(u, q)} = \\
&= -\tilde{\pi}_1^*(\mathbf{g}_I)(d\tilde{z}(X), d\tilde{z}(Y))_{\tilde{z}(u, q)} + \tilde{\pi}_2^*\left(\mathbf{g}_{\tilde{h} \circ \tilde{\pi}_1}\right)(d\tilde{z}(X), d\tilde{z}(Y))_{\tilde{z}(u, q)} = \\
&= -\mathbf{g}_I(d\tilde{\pi}_1 \circ d\tilde{z}(X), d\tilde{\pi}_1 \circ d\tilde{z}(Y))_{\tilde{\pi}_1 \circ \tilde{z}(u, q)} + \mathbf{g}_{\tilde{h} \circ \tilde{\pi}_1}(v, q)(d\tilde{\pi}_2 \circ d\tilde{z}(X), d\tilde{\pi}_2 \circ d\tilde{z}(Y))_{\tilde{\pi}_2 \circ \tilde{z}(u, q)} = \\
&= -\mathbf{g}_I(dz \circ d\pi_1(X), dz \circ d\pi_1(Y))_{z \circ \pi_1(u, q)} + \mathbf{g}_{\tilde{h} \circ \tilde{\pi}_1 \circ \tilde{z}}(u, q)(d\pi_2(X), d\pi_2(Y))_{\pi_2(u, q)} = \\
&= -z^*(\mathbf{g}_I)(d\pi_1(X), d\pi_1(Y))_{\pi_1(u, q)} + \mathbf{g}_{\tilde{h} \circ z \circ \pi_1}(u, q)(d\pi_2(X), d\pi_2(Y))_{\pi_2(u, q)} = \\
&= -[\phi(u) \cdot z'(u)]^2 \mathbf{g}_{E(\mathbb{R})}(d\pi_1(X), d\pi_1(Y))_u + \mathbf{g}_{h \circ \pi_1}(u, q)(d\pi_2(X), d\pi_2(Y))_{\pi_2(u, q)} = \\
&= -\pi_1^*\left([\phi \cdot z'] \circ \pi_1\right)^2 \mathbf{g}_{E(\mathbb{R})}(X, Y)_{(u, q)} + \pi_2^*(\mathbf{g}_{h \circ \pi_1})(X, Y)_{(u, q)} = \\
&= \left(-[\phi \cdot z'] \circ \pi_1\right)^2 \pi_1^*(\mathbf{g}_{E(\mathbb{R})}) + \pi_2^*(\mathbf{g}_{h \circ \pi_1})(X, Y)_{(u, q)}
\end{aligned}$$

donde hemos utilizado las expresiones 5.5, 5.6, 5.7 y 5.8 y hemos llamado  $h = \tilde{h} \circ z$ . Así hemos visto que

$$\mathbf{g} = -\left([\phi \cdot z'] \circ \pi_1\right)^2 \pi_1^*(\mathbf{g}_{E(\mathbb{R})}) + \mathbf{g}_{h \circ \pi_1} \quad (5.9)$$

por lo tanto, llamando  $f = \phi \cdot z'$ , la expresión 5.9 de  $\mathbf{g}$  coincide con la métrica 5.3 estudiada en el ejemplo 117.

La elevación vertical  $T \in \mathfrak{X}(\mathbb{R} \times N)$  del campo  $\frac{\partial}{\partial t} \in \mathfrak{X}(\mathbb{R})$  será causalmente decreciente cuando se verifique la condición 5.4, que como

$$f' = \phi' \cdot z' + \phi \cdot z''$$

entonces

$$\frac{2f'}{f} = \frac{2(\phi' \cdot z' + \phi \cdot z'')}{\phi \cdot z'} = 2\left(\frac{\phi'}{\phi} + \frac{z''}{z'}\right)$$

por lo que la condición 5.4 se transforma en

$$\frac{T(\mathbf{g}(S, S))}{\mathbf{g}(S, S)} \leq 2\left(\frac{\phi'}{\phi} + \frac{z''}{z'}\right) \quad (5.10)$$

### 5.2.3. Ejemplos particulares

Apoyándonos en la proposición 113, tenemos ahora un criterio para determinar si los espacios de Lorentz  $I \times N$  dotados de métricas del tipo

$$\tilde{\mathbf{g}} = -\tilde{\pi}_1^*(\mathbf{g}_I) + \tilde{\pi}_2^*(\mathbf{g}_{\tilde{h} \circ \tilde{\pi}_1})$$

son de punto omega.

**Ejemplo 119** Con la misma notación de la sección 5.2.1, consideremos la variedad  $\mathbb{R} \times N$  dotada de la métrica de Lorentz

$$\mathbf{g} = -(f \circ \pi_1)^2 \pi_1^*(\mathbf{g}_{E(\mathbb{R})}) + \pi_2^*(\mathbf{g}_N)$$

donde  $\mathbf{g}_N$  es una métrica de Riemann en la variedad compacta  $N$ . Como  $T(\mathbf{g}(S, S)) = 0$  para toda elevación horizontal  $S \in \mathcal{L}(N)$ , entonces la condición 5.4 consiste en

$$0 \leq \frac{2f'}{f}$$

Así, si la función  $f$  verifica que  $f' \geq 0$ , entonces el campo  $T$  es causalmente decreciente y por la proposición 113 tenemos que el espacio de Lorentz  $\mathbb{R} \times N$  con la métrica  $\mathbf{g}$  es de punto omega.

**Ejemplo 120** Vamos a utilizar la misma notación que en la sección 5.2.2. Consideremos la variedad  $\mathbb{R}_- \times N$  donde  $N$  es una variedad compacta y  $\mathbb{R}_- = \{t \in \mathbb{R} : t < 0\}$  y sean  $\mathbf{g}_N$  una métrica de Riemann en  $N$  y  $\tilde{\phi}^2 \mathbf{g}_{E(\mathbb{R}_-)}$  una métrica de Riemann en  $\mathbb{R}_-$  donde  $\tilde{\phi}(t) = \frac{1}{|t|^\alpha}$  con  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Entre  $\mathbb{R}$  y  $\mathbb{R}_-$  tenemos el difeomorfismo

$$\begin{aligned} z: \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}_- \\ \tau &\longmapsto -e^{-\tau} \end{aligned}$$

Hemos visto que  $\mathbb{R}_- \times N$  con la métrica

$$\tilde{\mathbf{g}} = -\tilde{\phi}^2 \tilde{\pi}_1^*(\mathbf{g}_{E(\mathbb{R}_-)}) + \tilde{\pi}_2^*(\mathbf{g}_N)$$

es isomorfo a  $\mathbb{R}_- \times N$  dotado de la métrica

$$\mathbf{g} = -(\phi \cdot z')^2 \pi_1^*(\mathbf{g}_{E(\mathbb{R})}) + \pi_2^*(\mathbf{g}_N)$$

donde  $\phi(\tau) = \tilde{\phi} \circ z(\tau) = e^{\alpha\tau}$ . La condición 5.10 se verifica para todo  $\alpha \geq 1$ , por lo que para estos valores, el campo  $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R})$  es causalmente decreciente. En efecto, como  $T(\mathbf{g}(S, S)) = 0$  para toda elevación horizontal  $S \in \mathcal{L}(N)$ , entonces la condición 5.10 queda como

$$0 \leq 2 \left( \frac{\phi'}{\phi} + \frac{z''}{z'} \right) = 2(\alpha - 1)$$

que se verifica cuando  $\alpha \geq 1$ . Aplicando entonces la proposición 113, se tiene que  $\mathbb{R}_- \times N$  con la métrica  $\tilde{\mathbf{g}}$  es un espacio de Lorentz de punto omega.

**Observación 121** Por cada punto de los espacios de Lorentz de los ejemplos 119 y 120 anteriores, por cada punto existe una superficie de Cauchy  $S_t = \{t\} \times N$  con curvatura media constante  $k_t = 0$ . En efecto, sean  $Z \in \mathcal{L}(I)$  y  $\{V_i\} \subset \mathcal{L}(N)$  tales que

$$\mathbf{g}(Z, Z) = 1 \quad \mathbf{g}(V_i, V_j) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

entonces, por la observación 10 tenemos que la curvatura media de  $S_t$  es

$$k_t = \sum_{i=1}^{n-1} \mathbf{g}(\nabla_{V_i} Z, V_i)$$

por lo que aplicando 4 del lema 116 tenemos que

$$k_t = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n-1} Z(\mathbf{g}(V_i, V_i)) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n-1} 0 = 0$$

como habíamos afirmado.

**Ejemplo 122** Supongamos ahora que  $M = \mathbb{R} \times N$  con  $N$  compacto dotada de la métrica de Lorentz

$$\mathbf{g} = -(f \circ \pi_1)^2 \pi_1^*(\mathbf{g}_{E(\mathbb{R})}) + (h \circ \pi_1)^2 \pi_2^*(\mathbf{g}_N)$$

donde  $f, h \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$ . Para poder aplicar la proposición 113 a  $M$  es necesario que se verifique la condición 5.4 dada por

$$\frac{T(\mathbf{g}(S, S))}{\mathbf{g}(S, S)} \leq \frac{2f'}{f}$$

para todo  $S \in \mathcal{L}(N)$ . Como  $T \in \mathcal{L}(I)$  es la elevación vertical del campo  $\frac{\partial}{\partial t} \in T_t \mathbb{R}$  entonces

$$\begin{aligned} T(\mathbf{g}(S, S)) &= T(h^2 \pi_2^*(\mathbf{g}_N)(S, S)) = 2h \cdot T(h) \cdot \pi_2^*(\mathbf{g}_N)(S, S) = \\ &= 2h^2 \cdot \frac{T(h)}{h} \cdot \pi_2^*(\mathbf{g}_N)(S, S) = 2 \frac{T(h)}{h} \cdot \mathbf{g}(S, S) = 2 \frac{h'}{h} \cdot \mathbf{g}(S, S) \end{aligned} \quad (5.11)$$

entonces la condición 5.4 es equivalente a

$$\frac{h'}{h} \leq \frac{f'}{f} \quad (5.12)$$

Si se verifica la condición 5.12 entonces, por la proposición 113 se tiene que  $M$  es de punto omega.

**Observación 123** Consideremos el espacio de Lorentz del ejemplo 122 y los campos vectoriales  $Z \in \mathcal{L}(I)$  y  $\{V_i\} \subset \mathcal{L}(N)$  tales que

$$\mathbf{g}(Z, Z) = 1 \quad \mathbf{g}(V_i, V_j) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

en este caso tenemos que  $Z = \frac{1}{f}T$ . Las superficies de Cauchy  $S_t = \{t\} \times N$  tienen la siguiente curvatura media  $k_t$

$$k_t = \sum_{i=1}^{n-1} \mathbf{g}(\nabla_{V_i} Z, V_i) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n-1} Z(\mathbf{g}(V_i, V_i)) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n-1} 2 \frac{h'}{f \cdot h} \cdot \mathbf{g}(V_i, V_i) = (n-1) \frac{h'}{f \cdot h}$$

donde hemos aplicado 4 del lema 116 y la igualdad 5.11.

En el caso en el que  $f = 1$  constante tenemos que  $M$  es un espacio de Robertson-Walker.

# Bibliografía

- [1] R. Bartnik. *Regularity of variational maximal surfaces*. Acta Mathematica 161. Impreso el 27 de diciembre de 1988.
- [2] R. Bartnik. *Remarks on cosmological spacetimes and constant mean curvature surfaces*. Commun. Math. Phys. 117; 615-624, 1988.
- [3] A. Bautista Santa-Cruz. *Espacio-tiempos de punto omega*. Trabajo de investigacin. Dpto. de Geometra y Topologa de la Universidad Complutense de Madrid, 2001.
- [4] J.K. Beem, P.E. Ehrlich y K.L. Easley. *Global lorentzian geometry*. Marcel Dekker. Nueva York, 1996.
- [5] A.N. Bernal, y M. Snchez. *On smooth Cauchy hypersurfaces and Gerochs splitting theorem*. Commun. Math. Phys. 243, 461-470, 2003.
- [6] A.N. Bernal, y M. Snchez. *Smoothness of time functions and the metric splitting of globally hyperbolic spacetimes*. Commun. Math. Phys. 257, 43-50, 2005.
- [7] D. Brill, y F. Flaherty. *Isolated maximal surfaces in spacetime*. Commun. Math. Phys. 50, 157-165, 1976.
- [8] R. Budic, y R.K. Sachs. *Deterministic space-times*. General Relativity and Gravitation. Vol.7, n.1; 21-29, 1976.
- [9] J. Dieckmann. *Cauchy surfaces in a globally hyperbolic space-time*. J.Math.Phys. 29 (3) Marzo, 1988.
- [10] S.G. Harris y R.J. Low. *Causal monotonicity, omniscient foliations and the shape of space*. Class. Quantum Grav., 18 27-43, 2001.
- [11] S.W. Hawking y G.F.R. Ellis. *The large scale structure of space-time*. Cambridge University Press, Londres, 1973.
- [12] J.R. Munkres. *Topology*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, Nueva Jersey, 1975.
- [13] B. O'Neill. *Semi-riemannian geometry with applications to relativity*. Academic Press Inc., 1983.

- [14] R. Penrose. *Techniques of differential topology in relativity*. Conference series in Applied Mathematics. Conference board of the Mathematical Sciences. University of London, Londres, 1972.
- [15] F. Tipler. *La física de la inmortalidad*. Alianza Editorial, Madrid, 1996.



# Índice alfabético

- aplicación
  - Weingarten, 9
- c-frontera, 20
  - futuro, 20
  - pasado, 20
- campo
  - temporal, 6
  - variacional, 26
    - de extremos fijos, 27
- campo vectorial
  - causalmente decreciente, 59
  - estrictamente causalmente decreciente, 59
- carácter causal, 6
  - causal, 6
  - espacial, 6
  - luz, 6
  - temporal, 6
- clausura, 5
- condición
  - convergencia temporal, 9
  - cronológica, 15
  - de causalidad, 15
  - de distinción de futuro, 15
  - de distinción de pasado, 15
  - fuerte de causalidad, 15
- conexión
  - Levi-Civita, 8
- conjunto
  - ácrono, 11
  - acausal, 11
  - convexo, 7
  - futuro, 12
    - irreducible, 19
  - pasado, 12
    - irreducible, 19
- cono causal
  - futuro, 6
  - pasado, 6
- corchete
  - Lie, 8
- cuasi-límite, 14
  - vértices de, 14
- curva, 6
  - aprisionada
    - parcialmente, 16
    - totalmente, 16
  - base, 26
  - causal, 6
  - espacial, 7
  - extensible, 7
  - extremo
    - futuro, 7
    - pasado, 7
  - extremo de, 7
  - futura, 7
  - inextensible, 7
    - hacia el futuro, 7
    - hacia el pasado, 7
  - límite, 14
  - longitudinal, 26
  - luz, 7
  - pasada, 7
  - punto final de, 7
  - temporal, 7
  - transversal, 26
- curvatura
  - media, 9

- derivada de Lie, 58
- desarrollo de Cauchy, 11
- desigualdad
  - inversa del triángulo, 28
- difeomorfismo
  - causalmente decreciente, 59
  - estrictamente causalmente decreciente, 59
- dominio de dependencia, 11
  - futuro, 11
  - pasado, 11
- elevación
  - horizontal, 67
  - vertical, 67
- espacio
  - de Lorentz, 5
    - causal, 15
    - causalmente simple, 15
    - cronológico, 15
    - de punto omega, 20
    - establemente causal, 15
    - fuertemente causal, 15
    - globalmente hiperbólico, 15
  - tangente, 5
- fórmula
  - Koszul, 8
- fibrado
  - tangente, 5
- frontera, 5
- frontera causal, 20
  - futura, 20
  - pasada, 20
- función
  - tiempo de Cauchy, 16
- futuro
  - causal, 10
  - cronológico, 10
- geodésicas
  - nulas generadoras, 33
- gradiente, 8
- IF, 19
  - propio, 19
  - terminal, 19
- interior, 5
- IP, 19
  - propio, 19
  - terminal, 19
- orientable en el tiempo, 6
- orientación en el tiempo, 6
- orientado en el tiempo, 6
- pasado
  - causal, 10
  - cronológico, 10
- PIF, 19
- PIP, 19
- punto omega, 20
- segunda forma fundamental, 9
- separación temporal, 28
- sigma-singular, 55
- simbolos
  - Christoffel, 8
- singular, 55
- sucesión límite, 13
- superficie
  - Cauchy, 16
- tensor
  - curvatura Riemann, 8
  - Ricci, 8
  - Riemann, 8
- TIF, 19
- TIP, 19
- variación
  - de curva, 26
- variedad
  - de Riemann, 5
  - semirriemanniana, 5
- vector
  - causal, 6
  - espacial, 6
  - futuro, 6
  - luz, 6

pasado, 6  
temporal, 6