SOBRE LAS CURVATURAS DE LAS VARIEDADES SUMERGIDAS EN ESPACIOS HOMOGENEOS.

Javier Lafuente &...

Octubre de 2009 (O.tex)

Índice

1. Introducción.

1.1. Geometrías de Klein

1.1.1. Definición

Una *Geometría* de *Klein* en una variedad diferenciable E, viene definida por un grupo de Lie G que actúa diferenciablemente sobre E de forma transitiva:

$$G \times E \to E, (A, x) \to \lambda_A(x) = A.x$$

Se denomina a $E = (E, G, \lambda)$ *espacio de Klein* (con grupo G de transformaciones).

Fijado un punto $o \in E$, todos los grupos de isotropía G_x de los puntos de E son conjugados con G_o. Claramente G_o es un subgrupo cerrado de G, y por tanto G/G_o tiene una única estructura de variedad diferenciable de dimensión $\dim G - \dim G_o$, que hace a la proyección canónica $\pi : G \to G/G_o$ submersión. Hay además un difeomorfismo canónico (una vez fijado fijado o):

$$\overline{\pi} : G/G_o \ni AG_o \to \lambda_A(o) \in E$$

que permite identificar ambos espacios ($E = G/G_o$). Denotando también por π a:

$$\pi : G \to E \ , \ A \longmapsto \lambda_A(o) = A.o$$

Se tiene el diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "\pi"] \arrow[dr, "\pi"'] & G/G_o \arrow[d, "\overline{\pi}"] \\ & E \end{tikzcd}$$

Así E resulta ser un espacio homogéneo en el sentido clásico. Nótese que dar el espacio homogéneo G/G_o es equivalente a dar un espacio de Klein E con un punto destacado o.

1.1.2. La acción Adjunta

Denotamos por $\mathfrak{g}$ y $\mathfrak{g}_0$ respectivamente, a las álgebras de Lie de G y G_o.

La diferencial $\pi_* = d\pi(e) : \mathfrak{g} \to T_oE$ induce por paso al cociente un isomorfismo canónico

$$\overline{\pi_*} : \mathfrak{g}/\mathfrak{g}_0 \to T_oE$$

que permite identificar ambos espacios. Todo esto se concluye cuando se aplica la diferencial en el origen al diagrama anterior

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{g} \arrow[r, "\pi_*"] \arrow[dr, "\pi_*"'] & \mathfrak{g}/\mathfrak{g}_o \arrow[d, "\overline{\pi}_*"] \\ & T_0E \end{tikzcd}$$

Recordemos que si $A \in G$, el automorfismo de conjugación $C_A : G \to G$, $a \to AaA^{-1}$ da lugar a

$$dC_A(e) = Ad_A \in GL(\mathfrak{g})$$

y la aplicación $Ad : G \to GL(\mathfrak{g})$ define una representación denominada representación adjunta. Su restricción a G_o, $Ad_{G_o} : G_o \to GL(\mathfrak{g})$, da lugar por paso al cociente a una acción sobre el espacio vectorial cociente $\mathfrak{g}/\mathfrak{g}_0$, que denotamos

$$\overline{Ad} : G_o \to GL(\mathfrak{g}/\mathfrak{g}_0) \tag{1}$$

. Vía la identificación $\overline{\pi_*}$ es fácil ver que para $K \in G$ y definiendo

$$\overline{L_K} : G/G_o \ni AG_o \to (KA)\, G_o \in G/G_o$$

los siguientes diagramas son conmutativos:

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "\lambda_K"] \arrow[d, "\overline{\pi}"'] & E \arrow[d, "\pi"] \\ G/G_o \arrow[r, "\overline{L_K}"'] & G/G_o \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "C_K"] \arrow[d, "\pi"'] & G \arrow[d, "\pi"] \\ G/G_o \arrow[r, "\overline{L_K}"'] & G/G_o \end{tikzcd}$$

Así, diferenciando en el origen (via la identificación $\overline{\pi_*}$) podemos escribir:

$$d\lambda_K(o) = \overline{Ad_K} : T_oE = \mathfrak{g}/\mathfrak{g}_0 \to \mathfrak{g}/\mathfrak{g}_0 = T_oE \tag{2}$$

Recuérdese por otro lado, que si $\Omega_G \in \Omega^1(G, \mathfrak{g})$ es la forma de Cartan de G se verifica para $A \in G$

$$(R_A)^* \, \Omega_G = Ad_{A^{-1}} \Omega_G$$

1.1.3. Homomorfismos.

Un homomorfismo entre los espacios de Klein $E = (E, G, \lambda)$, y $\overline{E} = \left(\overline{E}, \overline{G}, \overline{\lambda}\right)$ viene determinado por una aplicación diferenciable $\phi : E \to \overline{E}$, junto a un homomorfismo $\phi_* : \lambda G \to \overline{\lambda G}$ entre grupos de lie, de forma que $\phi \circ \lambda_A = (\phi_* \lambda_A) \circ \phi$, para todo $A \in G$. En el supuesto de que ϕ sea difeomorfismo, entonces $\phi_* \lambda_A = \phi \circ \lambda_A \circ \phi^{-1}$ queda unívocamente determinada, y $\phi_* : \lambda G \to \overline{\lambda G}$ es necesariamente inyectiva. Cuando además ϕ_* es sobre (y por tanto isomorfismo de grupos de Lie), se dice que ϕ es un isomorfismo y los espacios de Klein son isomorfos. Es así como (E, G, λ) y $(E, \lambda G, \lambda)$ son canónicamente isomorfos por la identidad.

En adelante supondremos que $\lambda : G \to Difeo(E)$ es inyectivo,
y entonces podemos identificar G con un subgrupo λG, y $A \in G$ con
$\lambda_A \in Difeo(E)$.

Un subespacio de Klein (o subespacio homogeneo) de $\overline{E} = \left(\overline{E}, \overline{G}, \overline{\lambda}\right)$, viene determinado por una subvariedad $j : E \hookrightarrow \overline{E}$ de forma que

$$G = \left\{ A \in \overline{G} : \lambda_A E = E \right\}$$

determina un subgrupo de Lie $j_* : G \hookrightarrow \overline{G}$ de forma que la acción restringida $G \times E \to E, (A, x) \to \overline{\lambda}_A(x) = A.x$ hace a $E = (E, G, \lambda)$ espacio homogéneo. En este caso (j, j_*) define un monomorfismo entre los espacios de Klein E y $\overline{E}$.

1.1.4. El punto de vista de Klein

La acción de G sobre E, puede inducir *de forma natural* actuaciones $G\times\mathcal{M}\ni(A,M)\rightarrow A.M\in\mathcal{M}$ sobre determinadas familias $\mathcal{M}$ de objetos deducidas del espacio E o de eventuales *estructuras* (diferenciable, métrica, conforme,...) sobre E. La propiedad que define a los objetos de $\mathcal{M}$ es conservada por el grupo G y se denomina propiedad $(G-)$geométrica. Según Klein, el estudio de la $(G-)$geometría, consiste en el análisis de las propiedades y conceptos relativos a E que permanecen invariantes por la acción del grupo G. Cada vez que tenemos una tal familia $\mathcal{M}$, queda planteado un problema de clasificación:

Dos objetos M, $\overline{M}\in\mathcal{M}$ se dicen equivalentes ($M\simeq_G\overline{M}$), si están en la misma órbita, es decir, si existe $A\in G$, tal que $A.M=\overline{M}$.

Por ejemplo el grupo G actúa de manera natural sobre el fibrado de contacto de orden ℓ :

$$G\times\mathcal{G}_p^\ell(E)\rightarrow\mathcal{G}_p^\ell(E)\,,\ (A,\sigma)\rightarrow A.\sigma=\left(\mathcal{G}_p^\ell\lambda_A\right)(\sigma)$$

(vease epígrafe 3.2.2) Cada clase se denomina escama geométrica de órden ℓ.

1.2. Generalidades sobre Curvaturas y clasificación de variedades.

Todas las variedades las supondremos de dimensión fija p contenidas en el espacio de Klein fijo E con dimensión $m>p$ y grupo G de transformaciones.

Dos p-variedades M y $\overline{M}$ sumergidas de E se dirán *G-congruentes* si existe una transformación $A\in G$, tal que $\overline{M}=\lambda_A(M)$. A la aplicación restricción $\lambda_A:M\rightarrow\overline{M}$ se le denomina *G-congruencia*. Nótese que dos variedades G-congruentes son en particular difeomorfas y tienen por tanto la misma dimensión p.

Hacer G-geometría de $p-$variedades, consiste a *groso modo* en estudiar aquellas propiedades de las variedades que permanecen inalteradas por la acción del grupo.

En particular estamos interesados en dar criterios prácticos para reconocer cuando dos $p-$variedades son G-congruentes.

Obsérvese que $M=(f:S)$, $\overline{M}=\left(\overline{f}:\overline{S}\right)$ son congruentes, si y solo si existe $\varphi:S\rightarrow\overline{S}$ difeomorfismo, y $A\in G$ tal que $\lambda_A\circ f=\overline{f}\circ\varphi$.

1.2.1. Orden de contacto geométrico

Las variedades $M,\overline{M}$ de E se dice que tienen G-contacto de orden al menos r $(r\geq 0)$ en los puntos $a\in M$, $\overline{a}\in\overline{M}$ si existe $A\in G$, con $\lambda_A(a)=\overline{a}$, y $\lambda_A(M)$ tiene contacto de orden al menos r en $\overline{a}\in\lambda_A(M)\cap\overline{M}$, por tanto

$$A.T_a^rM=T_{\overline{a}}^r\overline{M}$$

Esta relación es de equivalencia sobre la familia de variedades punteadas (M,a) Denotamos por $T_a^{[r]}M$ a la clase definida por (M,a), que es por definición la escama geométrica (o G-escama) de orden r definida por M en el punto a

Supuesto $M=(f:S)$, $\overline{M}=\left(\overline{f}:\overline{S}\right)$, $a=f(s)$, $\overline{a}=\overline{f}(\overline{s})$ la condición $T_a^{[r]}M=T_{\overline{a}}^{[r]}\overline{M}$, equivale a decir que existe un $A\in G$ tal que $A.g_s^rf=g_{\overline{s}}^r\overline{f}$ (según definición 3.2.2). Por la proposición de **3.1.4** existe un $A\in G$ y un difeomorfismo $\varphi:S\rightarrow\overline{S}$ en torno a s, con

$$\varphi(s)=\overline{s},\text{ y además } j_s^r(\lambda_A\circ f)=j_{\overline{s}}^r\left(\overline{f}\circ\varphi\right)$$

y escribimos entonces $g_s^{[r]}f = g_{\overline{s}}^{[r]}\overline{f}$ para denotar a tal escama geométrica.

1.2.2. Principio de Cartan

Un difeomorfismo $\phi : M \to \overline{M}$ define un G-contacto de orden al menos r (entre M y $\overline{M}$) si

$$T_a^{[r]}M = T_{\phi(a)}^{[r]}\overline{M} \text{ para todo } a \in M$$

Alternativamente $f, \overline{f} : S = \overline{S} \to E$ tienen G-contacto de orden al menos r si $g_s^{[r]}f = g_s^{[r]}\overline{f}$ para todo s y esto significa que que la aplicación $\phi : M \to \overline{M}$ con $\phi(f(s)) = \overline{f}(s)$ define un G-contacto de orden al menos r.

Se dice que una p-variedad M de E satisface el principio de Cartan si existe un entero ρ con la siguiente propiedad:

Para que la variedad M sea congruente con cualquier otra $\overline{M}$, es suficiente con que exista un difeomorfismo $\phi : M \to \overline{M}$ con G-contacto de orden al menos $\rho + 1$

Denominamos a ρ_M (orden cartaniano de M), al mínimo entero ρ que verifica la propiedad anterior.

Si además todo difeomorfismo $\phi : M \to \overline{M}$ con G-contacto de orden al menos $\rho_M + 1$ es congruencia decimos que M satisface el principio cartaniano fuerte.

Una de las cosas que se pretende probar es que *genéricamente* las p-variedades sumergidas en E verifican el principio cartaniano fuerte.

1.2.3. Familias geométricas.

Una familia $\mathcal{F}$ de p-variedades de E, se dice geométrica si para todo $M \in \mathcal{F}$, y todo $A \in G$, se verifica $\lambda_A(M) \in \mathcal{F}$. Tenemos entonces una acción natural $G \times \mathcal{F} \to \mathcal{F}$ que da lugar a un problema de clasificación (de variedades de $\mathcal{F}$).

Para afrontar el problema general de clasificación de p-variedades de E, conviene compartimentarlo en el análisis del problema para familias geométricas más restringidas. Cuando afrontamos el problema para una familia $\mathcal{F}$ determinada, nos referiremos a una $M \in \mathcal{F}$ diciendo que M es una variedad admisible.

1.2.4. Curvaturas.

Las curvaturas que aquí vamos a considerar provienen todas de la siguiente idea:

Sea $\mathcal{G}^r$ una subvariedad de $\mathcal{G}_p^r(E)$ que es invariante por la acción del grupo es decir que para cada $\gamma \in \mathcal{G}^r$ es $A.\gamma \in \mathcal{G}^r$ y $\kappa_\gamma = \kappa_{A.\gamma}$. Sea $\mathcal{F}_r$ la familia de p-variedades M de E tales que $T_x^rM \in \mathcal{G}^r$ $\forall x \in M$. Resulta entonces que $\mathcal{F}_r$ la *familia $\mathcal{F}_r$ es geométrica.*

Una curvatura de orden mayor o igual que r sobre las variedades de $\mathcal{F}_r$, es una aplicación diferenciable $\kappa : \mathcal{G}^r \to \mathbb{R}$. Se dice que es de orden (exactamente) r, si existen $\gamma, \overline{\gamma} \in \mathcal{G}^r$ con $\gamma \downarrow = \overline{\gamma} \downarrow \in \mathcal{G}_p^{r-1}(E)$ y sin embargo $\kappa_\gamma \neq \kappa_{\overline{\gamma}}$.

Tal curvatura κ asigna a cada variedad $M \in \mathcal{F}_r$ una función $\kappa_M \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ con

$$\kappa_M(x) = \kappa_{T_x^rM} \ \forall x \in M$$

Decir $M = (f : S) \in \mathcal{F}_r$ equivale a decir que $g_s^rf \in \mathcal{G}^r$ para todo $s \in S$, y denotamos $\kappa_f = \kappa_M \circ f : S \to \mathbb{R}$. Esto permite establecer un operador

$$f \to \kappa_f$$

que asigna a p-cada variedad $f : S \to E$ en $\mathcal{F}_r$,un *valor* $\kappa_f \in C^\infty(S, \mathbb{R})$ con la propiedad

$$\kappa_{f\circ\varphi} = \kappa_f \circ \varphi, \forall \text{ difeo } \varphi : \overline{S} \to S$$

En este sentido se dice que la asignación $f \to \kappa_f$ es (o tiene carácter de) curvatura.

Normalmente indicaremos que $M \in \mathcal{F}_r$ diciendo que existe κ_M. Más aún, cuando escribamos κ_M, estamos admitiendo de forma implícita su existencia.

Un difeomorfismo $\phi : M \to \overline{M}$ entre variedades de $\mathcal{F}_r$, se dice que respeta la curvatura κ, cuando $\kappa_M = \kappa_{\overline{M}} \circ \phi$.

Se dice que κ es un G-curvatura, si es respetado por todas las transformaciones de G. Esto significa que para cada $\gamma \in \mathcal{G}^r$ es $A.\gamma \in \mathcal{G}^r$ y $\kappa_\gamma = \kappa_{A.\gamma}$.

En presencia de una geometría de Klein E dada por G, el término curvatura significará G-curvatura o curvatura Geométrica, a no ser que se explicite lo contrario.

Si tenemos $(u_1, \dots u_p)$ parametrización (local) de S y $(x_1 \dots x_m)$ parametrización local en E, la curvatura κ es de orden r si κ_f depende de las derivadas

$$\frac{\partial^{|\alpha|}(x_j \circ f)(u_1, \dots u_p)}{\partial u_{\alpha_1} \dots \partial u_{\alpha_k}}$$

para $j = 1, \dots m$, $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_k)$ con $|\alpha| = \sum \alpha_i \leq r$: Pero no de las derivadas de orden superior a r.

Supuesto $M = (f : S)$, $\overline{M} = \left(\overline{f} : \overline{S}\right)$, $a = f(s) = \overline{f}(\overline{s})$ la condición $T_a^r M = T_a^r \overline{M}$ equivale a decir que existe un difeomorfismo $\varphi : S \to \overline{S}$ en torno a s, con

$$\varphi(s) = \overline{s}, \text{ y además } j_s^r f = j_s^r \left(\overline{f} \circ \varphi\right)$$

y entonces debería verificarse

$$\left(\kappa_{\overline{f}} \circ \varphi\right)(s) = \kappa_f(s)$$

Se tiene entonces el siguiente criterio:

Proposición. *Una curvatura $\kappa : f \to \kappa_f$ es de orden $\leq r$ si $\kappa_f(s) = \kappa_{\overline{f}}(s)$ cada vez que $f, \overline{f} : S \to E$ son p-variedades con $j_s^r f = j_s^r \overline{f}$.*

1.2.5. Sistemas independientes de curvaturas

Una curvatura κ se dice que depende de un sistema $\left(\kappa^1, \dots, \kappa^\mu\right)$ de curvaturas, si todo difeomorfismo ϕ que respete a $\kappa^1, \dots, \kappa^\mu$ respeta necesariamente a κ. Si cada κ^ν no depende de los demás elementos de la familia se dice que el sistema de curvaturas $\left(\kappa^1, \dots, \kappa^\mu\right)$ es independiente.

1.2.6. Sistemas completos

Un problema fundamental en el estudio de la G-geometría de variedades es el de su clasificación G-geométrica, que consiste en dar criterios algorítmicos para reconocer cuando dos variedades son G-congruentes.

Partimos de una familia geométrica $\mathcal{F}$ de p-variedades de E.

Naturalmente, dos variedades G-congruentes son difeomorfas. Pongamos M y $\overline{M}$ variedades difeomorfas. ¿son G-congruentes? Una buena cosa sería disponer de un sistema de G-curvaturas $\left(\kappa^1, \dots, \kappa^\mu\right)$ de manera que si existe un difeomorfismo entre dos variedades admisibles que los respete a todos, entonces las variedades son necesariamente congruentes. Un tal sistema se denomina sistema completo de curvaturas para $\mathcal{F}$. Naturalmente, si el sistema no fuera independiente, es inmediato que podría reducirse a otro mas pequeño independiente y completo.

La condición necesaria y suficiente para que $\left(\kappa^1, \ldots, \kappa^\mu\right)$ sea completo es que para $f, \overline{f} : S, \rightarrow E$ p-variedades admisibles se verifique la equivalencia:

$$\kappa_f^\nu = \kappa_{\overline{f}}^\nu \; 1 \leq \nu \leq \mu \Leftrightarrow \overline{f} \circ \varphi = \lambda_A \circ f \text{ para algún } A \in G \text{ y } \varphi \text{ difeo en } S$$

Un sistema de curvaturas $\left(\kappa^1, \ldots, \kappa^\mu\right)$ *se dice r-completo (completo para el G-contacto de orden al menos r), si cualquier difeomorfismo* $\phi : M \rightarrow \overline{M}$ *que las respete define un G-contacto de orden al menos r*

1.2.7. Gérmenes geométricos de variedades

Dos variedades punteadas (M, a) y $\left(\overline{M}, \overline{a}\right)$ de E se dicen G-congruentes, si existen entornos U de a en M y $\overline{U}$ de $\overline{a}$ en $\overline{M}$, y existe $A \in G$ tal que $A.a = \overline{a}$, y $A.U = \overline{U}$ .Esta relación de congruencia , es de equivalencia sobre la familia de todas las variedades punteadas. Denotamos por $[M, a]$ a la clase definida por (M, a), que denominamos germen geométrico (o G-germen) definido por M en el punto a.

1.2.8. Qué significa resolver el problema.

Resolver un problema de clasificación G-geométrica para una familia geométrica $\mathcal{F}$ de variedades (cuyos elementos llamamos variedades admisibles) puede entenderse según dos niveles de exigencia, y una descripción final que denominamos **ER** (**E**cuaciones **R**educidas).

Lo podíamos describir así:

Nivel 1 Encontrar un sistema independiente $\left(\kappa^1, \ldots, \kappa^\mu\right)$ de G-curvaturas con la siguiente propiedad:

Si $f, \overline{f} : \mathbb{S} \rightarrow E$ definen parametrizaciones globales de variedades admisibles $M = f(\mathbb{S})$, $\overline{M} = \overline{f}(\mathbb{S})$, se tiene la equivalencia

$$\kappa_f^\nu = \kappa_{\overline{f}}^\nu \; , \nu = 1, \ldots, \mu \iff M \text{ y } \overline{M} \text{ son congruentes}$$

Esta propiedad caracteriza en efecto, a los sistemas completos de curvaturas.

Nivel 2 Encontrar las ecuaciones de compatibilidad. Es decir, fijados un abierto $\mathbb{S}$ (simplemente conexo) de $\mathbb{R}^p$ y funciones k^ν $\nu = 1, \ldots \mu$ en $\mathbb{S}$, determinar condiciones *computables* digamos (C) necesarias y suficientes para que exista una inmersión f de forma que $k^\nu = \kappa_f^\nu$ $\nu = 1, \ldots \mu$. Denotemos por

$$\mathfrak{F}(\mathbb{S}) = \{\{k^\nu : 1 \leq \nu \leq \mu\} : \text{verifican las condiciones } (C)\}$$

donde $k^\nu : \mathbb{S} \rightarrow \mathbb{R}$ son funciones diferenciables. Una vez determinada una *solución* $f : \mathbb{S} \rightarrow E$ todas las demás son de la forma $\lambda_A \circ f$ cuando $A \in G$. Por tanto, supuesto $0 = (0, \ldots, 0) \in \mathbb{S}$, y fijado $a \in E$ (por ejemplo el origen o) los *datos* k^ν determinan un único germen geométrico, digamos $G_a M$

Queda aún por aclarar cuando otra familia de datos $\left(\overline{k}^{\nu}\right) \in \mathfrak{F}(\mathbb{S})$ determinan el mismo germen. De hecho, si $\varphi : \mathbb{S}_0 \rightarrow \mathbb{S}$ es un monomorfismo con $\mathbb{S}_0 \subset \mathbb{S}$, y $\varphi(0) = 0$, y $(k^{\nu}) \in \mathfrak{F}(\mathbb{S})$, entonces $(k^{\nu} \circ \varphi) \in \mathfrak{F}(\mathbb{S})$ induce el mismo germen geométrico. Además si $\left(\overline{k}^{\nu}\right) \in \mathfrak{F}(\mathbb{S})$ determinan el mismo germen (k^{ν}) entonces existe una tal φ con $(k^{\nu} \circ \varphi) = \left(\overline{k}^{\nu}\right)$.

ER Elegir una familia de *Ecuaciones reducidas* digamos $\{P_{\zeta}\}$.
Esto significa que cada P_{ζ} es una p-variedad admisible que contiene al origen $o \in E$, y

1. Dos ecuaciones reducidas distintas inducen gérmenes geométricos distintos en el origen o. Es decir
$$[P, o] \neq \left[\widetilde{P}, o\right], \text{ si } P, \widetilde{P} \in \{P_{\zeta}\} \text{ con } P \neq \widetilde{P}$$
2. Para cualquier p-variedad admisible M y todo punto $a \in M$ existe $P \in \{P_{\zeta}\}$ con $G_a M = G_o P$

Naturalmente debería existir un procedimiento algorítmico para calcular P a partir de $G_a M$.

Nota 1 *Si ρ es el orden cartaniano común de todas las variedades de $\mathcal{F}$ (ver epígrafe 1.2.2 en página 6)la familia $\{P_{\zeta}\}$ se construye en la práctica a partir de cierta subvariedad $\mathcal{R} \subset \mathcal{G}_p^{\rho}(E, o)$ con $(G.\gamma) \cap \mathcal{R}\ \forall \gamma \in \mathcal{R}$ de forma que $P \in \{P_{\zeta}\} \iff T_o^{\rho} P \in \mathcal{R}$, donde el orden . Se denomina a $\mathcal{R}$ sistema de ecuaciones reducidas o referencial de Frenet. (Ver epígrafe 1.3.4 en página 12 para una definición precisa)*

Podríamos identificar $\{P_{\zeta}\}$ con una familia de parametrizaciones $\zeta : \mathbb{S}_{\varepsilon} \rightarrow E$ sobre la bola $\mathbb{S}_{\varepsilon}$ de $\mathbb{R}^p$ centrada en el origen $0 = (0, \ldots, 0)$ y de radio ε, con $\zeta(0) = o$, y $g_0 \zeta \in \mathcal{R}$. Por ejemplo en el caso de superficies sumergidas en el espacio euclideo $E = \mathbb{R}^3$ estas son de la forma

$$\zeta(x, y) = k_1 x^2 + k_2 y^2 + ...$$

y el valor del orden cartaniano es $\rho = 2$. En la geometría equiafín el sistema de ecuaciones reducidas podría tomarse de la forma

$$\begin{array}{l} \zeta(x, y) = x^2 + y^2 + C\left(x^3 - 3xy^2\right) + ... \\ \zeta(x, y) = x^2 - y^2 + C\left(x^3 + 3xy^2\right) + ... \\ \zeta(x, y) = x^2 - y^2 + C\left(y^3 + 3x^2 y\right) + ... \end{array}$$

y el valor del orden cartaniano es $\rho = 3$.

1.3. Sobre el método de la referencia móvil.

1.3.1. La forma de Maurer-Cartan.

Sea G un grupo de Lie y $\mathfrak{g}$ su álgebra de Lie.

La aplicación $G \times \mathfrak{g} \to TG$, $(A, X) \to AX = (L_A)_* X$ define una sección canónica global del fibrado tangente TG cuya aplicación inversa $TG \to G \times \mathfrak{g}$ viene definida por $X_A \to (A, \Omega_G(X_A))$, siendo $\Omega_G \in \Omega^1(G, \mathfrak{g})$ la forma de Maurer-Cartan. Nótese que

$$(L_A)_*^{-1} = \Omega_G : T_A G \to \mathfrak{g} \tag{3}$$

Además un cálculo de la diferencial exterior de Ω_G da

$$d\Omega_G(X, Y) = X(\Omega_G(Y)) - Y(\Omega_G(X)) - \Omega_G([X, Y])$$

Si tomamos X, Y campos invariantes por la izquierda, los dos primeros sumandos se anulan y queda

$$d\Omega_G(X, Y) + [\Omega_G(X), \Omega_G(Y)] = 0$$

pero esto es verdad punto a punto sobre vectores tangentes, por lo que se tiene la ecuación estructural

$$d\Omega_G + \frac{1}{2}[\Omega_G, \Omega_G] = 0 \tag{4}$$

Por otra parte, Ω_G es invariante por traslaciones a la izquierda, es decir si $A \in G$

$$(L_A)^* \Omega_G = \Omega_G \tag{5}$$

1.3.2. Derivada de Darboux. Condiciones de integrabilidad

Sea S es una variedad diferenciable G un grupo de Lie y $\mathbf{u} : S \to G$ aplicación diferenciable. Se denomina derivada de Darboux de $\mathbf{u}$ a la 1-forma $\Omega_{\mathbf{u}} = \mathbf{u}^* \Omega_G \in \Omega^1(S, \mathfrak{g})$.

Fijada $\omega \in \Omega^1(S, \mathfrak{g})$ se plantea el siguiente problema

1) Establecer condiciones necesarias y suficientes para que exista $\mathbf{u} : S \to G$ diferenciable con $\Omega_{\mathbf{u}} = \omega$

2) Determinar todas las funciones $\mathbf{u}$.

La solución al problema constituye (una generalización de) el Teorema Fundamental del Cálculo, que tiene como caso particular el bien conocido teorema para la determinación de primitivas $F(x)$ de $f(x)dx$ para funciones reales de variable real.

Usando (**??**) y (**??**), se ve que también se verifica

$$d\Omega_{\mathbf{u}} + \frac{1}{2}[\Omega_{\mathbf{u}}, \Omega_{\mathbf{u}}] = 0 \tag{6}$$

Por otra parte, usando (5) es fácil probar que si $A \in G$

$$\Omega_{A\mathbf{u}} = \Omega_{\mathbf{u}} \tag{7}$$

ya que $\Omega_{A\mathbf{u}} = (L_A \circ \mathbf{u})^* \Omega_G = \mathbf{u}^* (L_A)^* \Omega_G = \mathbf{u}^* \Omega_G = \Omega_{\mathbf{u}}$.

Tenemos el siguiente

Teorema Fundamental de Integrabilidad *Sea S variedad diferenciable, G grupo de Lie con álgebra de lie $\mathfrak{g}$ y sea $\omega \in \Omega^1(S,\mathfrak{g})$. Se plantea encontrar todas las soluciones $\mathbf{u} : S \to G$ (si existen) de la ecuación*

$$\Omega_{\mathbf{u}} = \omega \tag{8}$$

Entonces:

(a) La condición necesaria y suficiente para que exista $\mathbf{u} : S \to G$ diferenciable tal que $\Omega_{\mathbf{u}} = \omega$ es que se verifique

$$d\omega + \frac{1}{2}[\omega,\omega] = 0$$

(b) Supuesto que existe $\mathbf{u}_0 : S \to G$ diferenciable solución de (8) todas las soluciones de (8) son de la forma

$$\mathbf{u} = A\mathbf{u}_0 \text{ con } A \in G$$

En particular, cualquier solución $\mathbf{u} : S \to G$ viene unívocamente determinada por el valor que toma sobre un punto dado de S.

1.3.3. Referencias en un espacio de Klein.

En lo que sigue $E = (E, G, \lambda)$ es una geometría fiel de Klein. Fijado un origen $o \in E$, es $G_o = \{A \in G : A.o = o\}$ su grupo de isotropía. La proyección $\pi : G \ni A \to \lambda_A(o) = A.o \in E$, induce en G una estructura natural de fibrado principal (con base E y grupo $G_o = \{A \in G : \lambda_A(o) = o\}$), (ver definición y notaciones en 1.1.1). G se puede considerar como un fibrado de referencias en el siguiente sentido:

Referencias en un punto Una referencia (o mas exactamente o-referencia) en un punto (o con origen en) $a \in E$, es un elemento $u \in G$, tal que $\pi(u) = a$. Así $\pi^{-1}(a)$ es el conjunto de las referencias en el punto a. Cuando se ve a G como el conjunto de todas las referencias. Lo denotamos por $o(E) = \{u : u \in G\}$ y la proyección $\pi : o(E) \to E$, que hace corresponder a cada referencia u, su origen $a = u.o \in E$, es entonces un fibrado (de referencias) con fibra G_o. Así $o(E, a) = \{uK : K \in G_o\}$

Si $u \in o(E, a)$, y $A \in G$ transforma a en $\lambda_A(a) = b$, entonces se entiende que A transforma la referencia u en la $(\lambda_A)_* u = Au \in o(E, b)$. Recíprocamente si $u \in o(E, a)$, y $\overline{u} \in o(E, \overline{a})$ existe una única transformación λ_A con $A = u^{-1}\overline{u}$ que transforma la referencia u en la $\overline{u}$.

Referencias móviles. Una referencia móvil (local) en torno a un punto $a \in E$, es una sección local del fibrado de referencias $\pi : o(E) \to E$, es decir, es una aplicación diferenciable $\mathbf{u} : \mathcal{U} \to G$ donde $\mathcal{U}$ es un entorno de a en E, y $u(x) \in o(E, x)$ para todo $x \in \mathcal{U}$. De hecho, E admite referencias móviles $\mathbf{u}$ en torno a cada punto a con un valor predeterminado $\mathbf{u}(a) = u \in o(E, a)$. Esta afirmación, equivale justamente a admitir que $o(E)$ es fibrado principal de base E y grupo G_o

Referencias en variedades. Sea $f : S \to E$ variedad diferenciable sumergida en el espacio de Klein $E = (E, G, \lambda)$

El conjunto de las referencias a lo largo de f, $o(f)$ se construye como el pullback por f del fibrado de referencias $o(E)$, es decir $o(f) = \cup_{s \in S} o(f,s) = f^* G(E) \to S$ donde para cada $s \in S$ es

$$o(f,s) = o(E, f(s)) = \{u \in o(E) : \pi(u) \in f(s)\}$$

y tiene por tanto estructura natural de fibrado principal $o(f) \to S$ con fibra el grupo G_o

Referencias móviles en variedades. Una referencia (móvil) a lo largo de f es una sección (local) $\mathbf{u}$ del fibrado $o(f) \to S$ de referencias en f. Por tanto $\mathbf{u} : S \to G$ es una aplicación diferenciable, tal que $\pi(\mathbf{u}(s)) = f(s)$ para todo $s \in S$. Denotamos por $\Gamma(o(f))$ la familia de tales referencias.

La forma de Darboux de una referencia movil. Si $\mathbf{u} \in \Gamma(o(f))$ la 1-forma $\Omega_{\mathbf{u}} = \mathbf{u}^* \Omega_G \in \Omega^1(S, \mathfrak{g})$.se denomina forma Maurer Cartan asociada a $\mathbf{u}$. El Teorema Fundamental 1.3.2 es la clave que nos permitirá usar la forma Darboux como potente herramienta para la clasificación de variedades.

1.3.4. Referencias de Frenet.

Supondremos ahora que todas las p-variedades de $\mathcal{F}$ verifican el principio de Cartan (ver página 6) y ρ es el orden cartaniano común de todas las variedades de $\mathcal{F}$

De acuerdo con el principio de Cartan, un sistema r-completo de curvaturas será un sistema completo, si r es suficientemente alto ($r \geq \rho + 1$). Veremos que todo esto es válido para familias geométricas $\mathcal{F}$ de p-variedades suficientemente generales.

Un referencial de Frenet (o sistema de ecuaciones reducidas) de la familia admisible $\mathcal{F} = \{(f : S)\}$ con indice cartaniano ρ, consiste en una subvariedad $\mathcal{R} \subset \mathcal{G}_p^\rho(E)$ de p-variedades de E, verificando las propiedades:

0) Si $(f : S) \in \mathcal{F}$ entonces $g_s^\rho f \in G.\mathcal{R}$ para todo $s \in S$.

1) $(G.\gamma) \cap \mathcal{R} = \gamma$, $\forall \gamma \in \mathcal{R}$.

2) El grupo de isotropía $G_\infty = G_\gamma$ es común a todos y cada uno de los elementos $\gamma \in \mathcal{R}$.

Supongamos que disponemos de un procedimiento algorítmico para construir a partir de cada f la familia $\{\mathbf{u}_f\}$ de referencias móviles llamadas *referencias de Frenet* (elementos de $\Gamma(o(f))$), caracterizada por la condición

$$\mathbf{u} \in \{\mathbf{u}_f\} \Leftrightarrow \mathbf{u}(s)^{-1} g_s^\rho f \in \mathcal{R}, \forall s \in S$$

Todas ellas se pueden determinar a partir de una dada $\mathbf{u} \in \{\mathbf{u}_f\}$ por traslación a la derecha respecto a elementos del subgrupo $G_\infty \subset G_0$ es decir

$$\{\mathbf{u}_f\} = \{\mathbf{uK} : \mathbf{K} : S \to G_\infty \text{ diferenciable}\}$$

Naturalmente las referencias de Frenet no dependen de la parametrización en el sentido de que si $\overline{f} : \overline{S} \to E$, variedad p-dimensional sumergida, $\varphi : S \to \overline{S}$ es difeomorfismo y $f = \overline{f} \circ \varphi$ (i.e.$(f : S) = (\overline{f} : \overline{S})$) entonces $\{\mathbf{u}_f\} = \left\{\mathbf{u}_{\overline{f}} \circ \varphi\right\}$. Además se verifica la siguiente propiedad:

$$\widetilde{f} = \lambda_A \circ f \text{ para } A \in G, \text{ y } \mathbf{u} \in \{\mathbf{u}_f\} \Rightarrow A\mathbf{u} = \widetilde{\mathbf{u}} \in \left\{\mathbf{u}_{\widetilde{f}}\right\}$$

Denotamos $\{\Omega_f\} = \left\{\Omega_{\{\mathbf{u}_f\}}\right\}$.

De esta forma nos aseguramos que la asignación $f \rightsquigarrow \{\Omega_f\}$ constituye un invariante geométrico, es decir

$$\{\Omega_f\} = \{\Omega_{\lambda_A \circ f}\}, \forall A \in G$$

Teorema. La asignación $f \rightsquigarrow \{\Omega_f\}$ constituye un invariante completo para la clasificación de variedades de $\mathcal{F}$ en el siguiente sentido:

Sean $f, \widetilde{f} : S \to E$, variedades admisibles entonces:

$$\{\Omega_f\} = \left\{\Omega_{\widetilde{f}}\right\} \Longleftrightarrow \exists A \in G \text{ con } \widetilde{f} = \lambda_A \circ f$$

Demostración.

La afirmación $\Rightarrow$ es consecuencia directa del TFC 1.3.2 pues si $\Omega_{\mathbf{u}} = \Omega_{\widetilde{\mathbf{u}}}$ para ciertos $\mathbf{u} \in \{\mathbf{u}_f\}$, $\widetilde{\mathbf{u}} \in \left\{\mathbf{u}_{\widetilde{f}}\right\}$ entonces

$$\Omega_{\mathbf{u}} = \Omega_{\widetilde{\mathbf{u}}} \Rightarrow \exists A \in G \text{ con } \widetilde{\mathbf{u}} = A\mathbf{u} \Rightarrow \widetilde{f} = \widetilde{\mathbf{u}}.o = (A\mathbf{u}).o = \lambda_A \circ f$$

La implicación $\Leftarrow$, es consecuencia de que si $\mathbf{u} \in \{\mathbf{u}_f\} \Rightarrow A\mathbf{u} = \widetilde{\mathbf{u}} \in \left\{\mathbf{u}_{\widetilde{f}}\right\}$, y por TCF 1.3.2 es $\Omega_{\mathbf{u}} = \Omega_{\widetilde{\mathbf{u}}}$ y $\{\Omega_f\} = \left\{\Omega_{\widetilde{f}}\right\}$.

Corolario. *Sean $f : S \to E$, $\overline{f} : \overline{S} \to E$ subvariedades de $\mathcal{F}$, $M = (f : S)$, $\overline{M} = \left(\overline{f} : \overline{S}\right)$ entonces son equivalentes*

i) $\exists \varphi : S \to \overline{S}$ *difeomorfismo tal que* $\varphi^* \left\{\Omega_{\overline{f}}\right\} = \{\Omega_f\}$

ii) *La aplicación $\varphi : M \to \overline{M}$, $f(s) \to \overline{f}(\varphi s)$ es una congruencia.*

En el caso $G_\infty = \{id\}$, entonces $\{\Omega_f\}$ consta de un único elemento Ω_f, y hay una única referencia móvil de Frenet $\mathbf{u}_f$ para cada $f \in \mathcal{F}$, y la asignación $f \to \Omega_f$ constituye un invariante completo, es decir

$$\Omega_f = \Omega_{\widetilde{f}} \Longleftrightarrow \exists A \in G \text{ con } \widetilde{f} = \lambda_A \circ f$$

Esto también es así en el caso G_∞ discreto, donde la colección de las $\{\Omega_f\} = \{Ad_K \Omega_f : K \in G_\infty\}$ es *calculable* a partir de cualquier $\Omega_f \in \{\Omega_f\}$

1.3.5. Referencial de Cartan.

Un referencial de Cartan asociado al referencial de Frenet $\mathcal{R}$ de la familia admisible $\mathcal{F} = \{(f : S)\}$ de p-variedades de E consiste en una subvariedad $\mathcal{C} \subset \mathcal{G}_p^{\rho+1}(E)$ verificando las propiedades:

0) Si $(f : S) \in \mathcal{F}$ y $\mathbf{u} \in \{\mathbf{u}_f\}$ es referencia de Frenet para f, entonces $\mathbf{u}(s)^{-1} g_s^{\rho+1} f \in \mathcal{C}$, $\forall s \in S$

1) $(G.\gamma) \cap \mathcal{C} = \gamma$, $\forall \gamma \in \mathcal{C}$.

2) $G_\gamma = G_\infty$ para todo $\gamma \in \mathcal{C}$, siendo G_∞ el grupo común de isotropía de todos y cada uno de lo elementos de $\mathcal{R}$.

Denotamos $\sigma_s f = \left(G.g_s^{\rho+1} f\right) \cap \mathcal{C} = \mathbf{u}(s)^{-1} g_s^{\rho+1} f$.

Un sistema de coordenadas $\left(\kappa^1, \ldots, \kappa^\mu\right)$ de $\mathcal{C}$ induce de forma natural un sistema de completo curvaturas por la condición $S \ni s \to \kappa_f^\nu(s) = \kappa^\nu(\sigma_s f) \in \mathbb{R}$. En efecto:

Si f, $\overline{f} : S \to E$ son p-variedades admisibles, con $\kappa_f^\nu(s) = \kappa_{\overline{f}}^\nu(s)$ $\forall s$, $1 \leq \nu \leq \mu$ entonces $\sigma_s f = \mathbf{u}(s)^{-1} g_s^{\rho+1} f = \overline{\mathbf{u}}(s)^{-1} g_s^{\rho+1} \overline{f} = \sigma_s \overline{f}$ $\forall s$, siendo $\mathbf{u}$, $\overline{\mathbf{u}}$

referencias de Frenet para f y $\overline{f}$ respectivamente, y se concluye que $g_s^{[\rho+1]} f = g_s^{[\rho+1]} \overline{f}$ para todo s y esto significa que la aplicación $\phi : M \to \overline{M}$ con $\phi\left(f\left(s\right)\right) = \overline{f}\left(s\right)$ define un G-contacto de orden al menos $\rho + 1$. De acuerdo con el principio cartaniano (ver epígrafe 1.2.2 en página 6) son congruentes.

2. Método de las Ecuaciones reducidas.

2.1. Familias admisibles de p-variedades.

El grupo G actúa de manera natural sobre el fibrado de contacto de orden ℓ :

$$G \times \mathcal{G}_p^\ell(E) \to \mathcal{G}_p^\ell(E)\,,\ \left(A, g_s^\ell f\right) \to A.g_s^\ell f = g_s^\ell(Af) \tag{9}$$

(vease epígrafe 3.2.2) y se verifica la condición de compatibilidad con $\downarrow$: $\mathcal{G}_p^\ell(E) \to \mathcal{G}_p^{\ell-1}(E)$ es decir

$$\downarrow (A.\sigma) = A.(\downarrow \sigma) \text{ para todo } A \in G,\, \sigma \in \mathcal{G}_p^\ell(E) \tag{10}$$

También es cierto que esta acción se restringe a una acción de G_o sobre el espacio de escamas de orden ℓ apoyadas en o , $\mathcal{G}_p^\ell(E,o)$

$$G_o \times \mathcal{G}_p^\ell(E,o) \to \mathcal{G}_p^\ell(E,o)\,,\ (A,\sigma) \to A.\sigma = \left(\mathcal{G}_p^\ell \lambda_A\right)(\sigma)$$

Si $\mathcal{S} \subset \mathcal{G}_p^\ell(E)$, denotamos por $G.\mathcal{S} = \{A.\sigma : A \in G,\, \sigma \in \mathcal{S}\}$. Si $\mathcal{S} = G.\mathcal{S}$ diremos que $\mathcal{S}$ es geométrico. Por otra parte se define el *grupo de isotropía* de $\mathcal{S}$:

$$G_{\mathcal{S}} = \{A \in G : A.\sigma = \sigma \text{ para todo } \sigma \in \mathcal{S}\}$$

Trataremos de delimitar el contexto en el que es posible aplicar ciertos protocolos (que más adelante se expondrán) para la clasificación de p-variedades.

Supondremos en lo sucesivo que G_0 es compacto

2.1.1. Variedades de tipo constante

Una p-variedad $f : S \to E$ se dice de *tipo constante*, (brevemente, f es TC) si para cada $\ell = 1, ...$ y todo $s \in S$, los grupos de isotropía $G_{g_s^\ell f}$ en la acción $G \times \mathcal{G}_p^\ell(E) \to \mathcal{G}_p^\ell(E)$, están en la misma clase de conjugación $[G_\ell]$.

Nótese que la propiedad TC es una propiedad geométrica.

Así si f es TC, entonces para cada $s \in S$ tenemos una sucesión

$$G_{g_s^1 f} \supset \ldots \supset G_{g_s^q f} = G_{g_s^{q+1} f} = \cdots$$

y la sucesión o tipo (de isotropía) de f es

$$\left([G_{g_s^\ell f}]\right)_{1 \le \ell \le q}$$

donde $[H]$ denota la clase de conjugación en G de uno de sus subgrupos H.

Al entero mínimo q a partir del cual se estabiliza la sucesión se denomina orden (de estabilidad) para f. Si G_q es discreto diremos que $M = (f : S)$ es de Frenet.

Nota 2 *Se probará que genéricamente toda variedad M de tipo constante con orden q de estabilidad verifica el principio de Cartan con indice $\rho_M \geq q$ (ver epígrafe 1.2.2 en página 6). Además si M es de Frenet (G_q es discreto) entonces verifica el principio cartaniano fuerte.*

2.1.2. Familias admisibles.

Dos p-variedades TC $\overline{f}, f : S \to E$, $\overline{f} : \overline{S} \to E$ se dice que son del mismo tipo (de isotropía) si tienen la misma sucesión de isotropía. La relación anterior es de equivalencia sobre la familia de p-variedades sumergidas en E, y cada clase de equivalencia determina una familia geométrica $\mathcal{F}$ que denominamos familia admisible.

Obviamente cada familia admisible está asociada a una sucesión de isotropía fija $([G_\ell])_{1\le\ell\le q}$ con

$$G_1 \supset \ldots \supset G_q = G_{q+1} = \cdots \tag{11}$$

Construimos la sucesión $\mathcal{F}_0 \supset \mathcal{F}_1 \supset \cdots \supset \mathcal{F}_\ell \supset \mathcal{F}_{\ell+1} \supset \cdots \supset \mathcal{F}$ de la siguiente forma:

a) Sea $\mathcal{F}_0 = \left\{(f : S)\ p\text{-variedad de } E \big/ G_{f(s)} \in [G_0] \right\}$ obviamente $\mathcal{F}_0$ es el conjunto de todas las p-variedades de E.

b) Supuesto construido $\mathcal{F}_\ell$, se toma $\mathcal{F}_{\ell+1} = \left\{(f : S) \in \mathcal{F}_\ell \Big/ G_{g_s^{\ell+1} f} \in [G_{\ell+1}]\ \forall s\right\}$

Se define

$$\mathcal{E}^\ell = \mathcal{G}^\ell_{\mathcal{F}_\ell}(E) = \left\{g^\ell_s f \in \mathcal{G}^\ell_p(E) : (f : S) \in \mathcal{F}_\ell,\ s \in S\right\}$$

Ejercicio 3 *Para $\ell \geq 1$ probar que:*

1. *$\mathcal{E}^\ell$ coincide con $\mathcal{G}^\ell_p\left(E, \mathcal{E}^{\ell-1}\right)_{[G_\ell]}$ que es el subespacio de los elementos $\gamma \in \mathcal{G}^\ell_p(E)$ tales que $\gamma \downarrow\in \mathcal{E}^{\ell-1}$,y $G_\gamma \in [G_\ell]$ en la acción natural $G \times \mathcal{G}^\ell_p(E) \to \mathcal{G}^\ell_p(E)$*
2. *$\mathcal{E}^\ell_o = \mathcal{G}^\ell_{\mathcal{F}_\ell}(E, o)$ coincide con $\left(\mathcal{G}^\ell_p\left(E, \mathcal{E}^{\ell-1}_o\right)\right)_{[G_\ell]}$ en la acción $G_0 \times \mathcal{G}^\ell_p(E, o) \to \mathcal{G}^\ell_p(E, o)$.*
3. *$\mathcal{E}^\ell$ es un G/G_ℓ- fibrado homogeneo, si se supone G_0 compacto.*
   Observese que $\mathcal{E}^\ell = G\mathcal{E}^\ell_o$
   a) *El fibrado $\mathcal{E}^\ell$ se escribe como $\mathcal{E}^\ell = G\mathcal{E}^\ell_o$*
   b) *Si $\gamma \in \mathcal{G}^\ell_p(E, o)$, y $A \in G$, con $A.\gamma = \gamma$ es $A.o = o$, por tanto*
   $$\{K \in G_0 : K.\gamma = \gamma\} = \{A \in G : A.\gamma = \gamma\}$$
4. *Se tiene la sucesión de epimorfismos (submersiones):*
   $$\ldots \xrightarrow{\downarrow} \mathcal{E}^{\ell+1} \xrightarrow{\downarrow} \mathcal{E}^\ell \xrightarrow{\downarrow} \ldots \xrightarrow{\downarrow} \mathcal{E}^1 \xrightarrow{\downarrow} \mathcal{E}^0 = E$$

Se denomina a cada $\mathcal{F}_\ell$ familia admisible de orden ℓ (asociada a la familia admisible$\mathcal{F}$). De hecho se verá que la sucesión $\mathcal{F}_0 \supset \mathcal{F}_1 \supset \cdots \supset \mathcal{F}_\rho = \mathcal{F}_{\rho+1} = \ldots$ se estabiliza para un cierto ρ con $\rho \leq q + 1$, y $\mathcal{F}_\rho = \mathcal{F}$.

Por tanto para $1 \leq \ell$ se verifican las siguientes propiedades

A1) El conjunto $\mathcal{E}^\ell = \left\{g^\ell_s(f) : (f : S) \in \mathcal{F}_\ell,\ s \in S\right\}$ es una subvariedad de $\mathcal{G}^\ell_p(E)$

A2) La acción $G \times \mathcal{E}^\ell \to \mathcal{E}^\ell$ restringida de la natural $G \times \mathcal{G}^\ell_p(E) \to \mathcal{G}^\ell_p(E)$, da a $\mathcal{E}^\ell$ estructura de $G/[G_\ell]$-fibrado homogeneo.

2.1.3. Referenciales de contacto: Ecuaciones reducidas.

Supondremos inicialmente que G_o es compacto. No obstante la construcción que vamos a exponer aquí podría ser válida en un contexto más general. Lo que necesitamos esencialmente es que la acción de G_0 induzca estructura de G_0-variedad (ver epígrafe 3.3.3 en página 56) sobre las variedades de escamas en las que actua.

Sea $\mathbf{f} : S \to E$ una p-variedad TC, y $\mathcal{F}$ la familia de p-variedades, de la misma clase de isotropía que $\mathbf{f}$. Fijemos un $\mathbf{s} \in S$, $\mathbf{f}(\mathbf{s}) = o$, a partir del cual construimos los grupos de isotropía $G_\ell = G_{g_{\mathbf{s}}^\ell \mathbf{f}}$ que dan lugar a la sucesión encajada de subgrupos $G_0 \supset G_1 \ldots \supset G_q = G_{q+1} = \cdots$.

Nuestro objetivo es explicitar un algoritmo preciso para la construcción para cada ℓ con $0 \le \ell \le q+1$ de una G_ℓ-reducción $\mathcal{O}^\ell$ del $G/[G_\ell]$ fibrado $\mathcal{E}^\ell$ de manera que se tenga la siguiente sucesión de epimorfismos

$$.. \xrightarrow{\downarrow} \mathcal{O}^{\ell+1} \xrightarrow{\downarrow} \mathcal{O}^\ell \xrightarrow{\downarrow} ... \xrightarrow{\downarrow} \mathcal{O}^1 \xrightarrow{\downarrow} \mathcal{O}^0 = o$$

esto nos permitirá construir un sistema de coordenadas $\left(\kappa^1, \ldots \kappa^{\mu_{\ell+1}}\right)$ para $\mathcal{O}^{\ell+1}$ de forma que $\downarrow \left(\kappa^1, \ldots \kappa^{\mu_\ell}\right) = \left(\kappa^1, \ldots \kappa^{\mu_\ell}\right)$ es sistema de coordenadas para $\mathcal{O}^\ell$, $1 \le \ell$, y este sistema determina un sistema ℓ-completo de curvaturas para la familia $\mathcal{F}_\ell^0 = \left\{(f : S) \in \mathcal{F}_\ell : g_s^\ell f \in G.\mathcal{O}^\ell\right\}$ mediante el siguiente procedimiento:

Para cada ν con $1 \le \nu \le \ell$ se define

$$\mathcal{F}_\ell^0 \ni (f : S) \to \kappa_f^\nu = \kappa^\nu \left(\sigma^\ell f\right) : S \to \mathcal{O}^{\ell+1}$$

Siendo $\sigma^\ell : G.\mathcal{O}^\ell \ni \gamma \to (G.\gamma) \cap \mathcal{O}^\ell \in \mathcal{O}^\ell$ la proyección natural.

$$\boxed{\text{En adelante no haremos distinción explícita entre } \mathcal{F}_\ell^0 \text{ y } \mathcal{F}.}$$

De acuerdo con el principio de Cartan (epígrafe 1.2.2 en página 6) para $\ell = \rho + 1$ suficientemente grande $\mathcal{O}^\ell = \mathcal{C}$ debería ser un referencial de Cartan (epígrafe 1.3.5 en página 13) para la familia restringida *proxima a* $\mathbf{f}$ *en* $\mathbf{s}$:

$$\mathcal{F}_{\rho+1}^0 = \left\{f,\ p\text{-variedad de } E : im(\left(g^{\rho+1} f\right) \subset G.\mathcal{O}^{\rho+1}\right\}$$

Definición 4 *Llamamos a esta sucesión* $\left(\mathcal{O}^\ell\right)_{0\le\ell}$ *un referencial de contacto (para $\mathcal{F}$).*

El algoritmo general de construcción de un referencial de contacto $\left(\mathcal{O}^\ell\right)_{0\le\ell}$ (para $\mathcal{F}$).podría ser el siguiente

1. Partimos de $\mathcal{O}^0 = \{o\}$, que puede considerarse G_o-reducción de $\mathcal{E}^0 = E$.
2. Supóngase construidas para cada $l \le \ell$ una G_l-reducción $\mathcal{O}^l$ de $\mathcal{E}^l$ de forma que se tengan los epimorfismos

$$\mathcal{O}^\ell \xrightarrow{\downarrow} \mathcal{O}^{\ell-1} \xrightarrow{\downarrow} ... \xrightarrow{\downarrow} \mathcal{O}^1 \xrightarrow{\downarrow} \mathcal{O}^0 = o \tag{12}$$

   Construimos $\mathcal{O}^{\ell+1}$ de la siguiente forma:

   a) El conjunto $\mathcal{G}_{\mathcal{F}_\ell}^{\ell+1}\left(E, \mathcal{O}^\ell\right) = \left\{\gamma \in \mathcal{G}_{\mathcal{F}_\ell}^{\ell+1}(E) : \downarrow \gamma \in \mathcal{O}^\ell\right\}$ es un abierto G_ℓ-invariante de $\mathcal{G}_{\mathcal{F}_\ell}^{\ell+1}(E)$

   b) En la acción $G_\ell \times \mathcal{G}_{\mathcal{F}_{\ell+1}}^{\ell+1}\left(E, \mathcal{O}^\ell\right) \to \mathcal{G}_{\mathcal{F}_{\ell+1}}^{\ell+1}\left(E, \mathcal{O}^\ell\right)$ aparece $[G_{\ell+1}]$ como única isotropía. Una $G_{\ell+1}$ reducción $\mathcal{O}^{\ell+1}$ del $G_\ell/[G_{\ell+1}]$ fibrado $\mathcal{G}_{\mathcal{F}_{\ell+1}}^{\ell+1}\left(E, \mathcal{O}^\ell\right)$ es $G_{\ell+1}$-reducción de $\mathcal{E}^{\ell+1}$ como $G/G_{\ell+1}$ fibrado

c) La aplicación $\mathcal{O}^{\ell+1} \overset{\downarrow}{\to} \mathcal{O}^{\ell}$ es una submersión, cuya imagen es un abierto de $\mathcal{O}^{\ell}$.
podemos suponer sin pérdida de generalidad $\downarrow \mathcal{O}^{\ell+1} = \mathcal{O}^{\ell}$ y hacer (si fuera necesario) una restricción abierta en la sucesión (12)

3. Tomando $\ell = q$, como $G_q = G_{q+1}$ se concluye que

$$\begin{aligned} \mathcal{O}^{q+1} &= \left\{\gamma \in \mathcal{G}^{q+1}_{\mathcal{F}_q}(E, \mathcal{O}^q) : A.\gamma = \gamma \ \forall A \in G_q\right\} \\ &= \mathcal{G}^{q+1}_{\mathcal{F}_{q+1}}(E, \mathcal{O}^q) \end{aligned} \tag{13}$$

es la reducción correspondiente de $\mathcal{E}^{q+1}$

4. A partir de aquí se continua $\mathcal{O}^{q+2} = \mathcal{G}^{q+2}_{\mathcal{F}_{q+2}}\left(E, \mathcal{O}^{q+1}\right)$....etc

En la práctica el cálculo y manejo de las acciones $G \times \mathcal{G}^{\ell}_p(E) \to \mathcal{G}^{\ell}_p(E)$ suele ser complicado.

Intentaremos mas adelante otra vía para la construcción de los $\mathcal{E}^{\ell}$ y $\mathcal{O}^{\ell}$, usando inductivamente la acción del grupo sobre sobre determinados espacios de Grassmannianas de fibrados homogeneos.

Ejercicio 5 *Probar que la sucesión de epimorfismos* $\mathcal{O}^{\ell+1} \overset{\downarrow}{\to} \mathcal{O}^{\ell} \overset{\downarrow}{\to} \cdots \overset{\downarrow}{\to} \mathcal{O}^{2} \overset{\downarrow}{\to} \mathcal{O}^{1} \overset{\downarrow}{\to} o$ *permite construir inductivamente, un sistema de coordenadas* $\left(\kappa^1, \dots \kappa^{\mu_{\ell+1}}\right)$ *para* $\mathcal{O}^{\ell+1}$ *de forma que* $\left(\kappa^1, \dots \kappa^{\mu_{\ell+1}}\right) = \downarrow_{\ell} \left(\kappa^1, \dots \kappa^{\mu_{\ell}}\right)$ *es sistema de coordenadas para* $\mathcal{O}^{\ell}$ *para* $1 \leq \ell$.

En principio se necesita establecer coordenadas para los fibrados de escamas $\mathcal{G}^{\ell}_p(E, o)$, que podrían identificarse con el modelo analítico $J^r_p(\mathbb{R}^c, 0) \to \mathbb{G}^r_{p,m}$ con la ayuda de una carta $(x_1, \dots, x_m)$ centrada en el origen $o \in E$. (ver epígrafe 3.2.4 en pág 52)...esto da lugar a las coordenadas

$$\left(\left(x^{\lambda}_{\alpha_1}\right), \left(x^{\lambda}_{\alpha_1\alpha_2}\right), \dots, \ \left(x^{\lambda}_{\alpha_1\dots\alpha_\ell}\right)\right)^{p<\lambda\leq m}_{1\leq\alpha_1\dots\leq\alpha_\ell\leq p}$$

donde

$$x^{\lambda}_{\alpha_1\dots\alpha_r} = \left.\frac{\partial^{(\Sigma\alpha_i)}\zeta_\lambda}{\partial u_{\alpha_1}\cdots\partial u_{\alpha_r}}\right|_0$$

según el esquema de las fórmulas (34) en pág 51. Es decir, un *punto* de $\mathcal{G}^{\ell}_p(E, o)$ con las coordenadas anteriores, está representado por el contacto de orden ℓ en el origen dado por la variedad M que se describe en las coordenadas $(x_1, \dots, x_m)$ por

$$\left\{\begin{array}{l} x_\alpha = u_\alpha \\ x_\lambda = \zeta_\lambda(u_1, \dots u_p) \end{array}\right.$$

$$\zeta_\lambda = \sum_{r=1}^{\ell} \sum_{1\leq\alpha_1\dots\leq\alpha_r\leq p} \frac{1}{(\Sigma\alpha_i)!} x^{\lambda}_{\alpha_1\dots\alpha_r} u_{\alpha_1}\cdots u_{\alpha_r}$$

Una vez fijado el sistema de coordenadas $\left(\kappa^1, \dots \kappa^{\mu_\ell}\right)$ para los $\mathcal{O}^{\ell}$ según el esquema del ejercicio 5, las ecuaciones paramétricas de cada $\mathcal{O}^r$ $1 \leq r \leq \ell$, como subvariedad de $\mathcal{G}^r_p(E, o)$ en las anteriores coordenadas, podrán describirse como funciones:

$$x^{\lambda}_{\alpha_1\dots\alpha_r} = \chi^{\lambda}_{\alpha_1\dots\alpha_r}\left(\kappa^1, \dots \kappa^{\mu_r}\right)$$

y un punto genérico $\gamma \in \mathcal{O}^\ell$ se identifica con las *ecuaciones reducidas*

$$\begin{cases} x_\alpha = u_\alpha \\ x_\lambda = \zeta_\lambda\left(u_1, \ldots u_p\right) \end{cases}$$

$$\zeta_\lambda = \sum_{r=1}^{\ell} \sum_{1 \leq \alpha_1 \ldots \leq \alpha_r \leq p} \frac{1}{(\Sigma \alpha_i)!} \chi^\lambda_{\alpha_1 \ldots \alpha_r}\left(\kappa^1 \gamma, \ldots \kappa^{\mu_r} \gamma\right) u_{\alpha_1} \cdots u_{\alpha_r}$$

Una p-variedad $(f : S)$ de E se dice $\mathcal{O}^\ell$-admisible si $g^\ell_s f \in G.\mathcal{O}^\ell$ $\forall s$, y entonces $\sigma^\ell_s f = \sigma^\ell\left(g^\ell_s f\right) \in \mathcal{O}^\ell$ representa en este sentido la *ecuación reducida* de orden ℓ para f en s.

2.1.4. Referencias adaptadas.

Supongamos fijado de una vez por todas un referencial $\left(\mathcal{O}^\ell\right)$

Nótese que una referencia $\mathcal{O}^\ell$-adaptada, $u \in o(f, s)$, es exactamente una referencia $u \in \mathcal{O}^\ell\left(g^\ell f, s\right)$ de $G.\mathcal{O}^\ell$. (Ver epígrafe 3.3.5). Por tanto, el espacio $\mathcal{O}^\ell\left(g^\ell f\right) \to S$ constituye un fibrado sobre S y grupo G_ℓ

Si denotamos por $\mathcal{O}^\ell(f) = \mathcal{O}^\ell\left(g^\ell f\right)$ al fibrado de referencias $\mathcal{O}^\ell$-adaptadas, se tiene:

$$\mathcal{O}^\ell(f) \subset \mathcal{O}^{\ell-1}(f) \subset \cdots \subset o(f)$$

Denotamos en general para $u \in o(f, s)$

$$\gamma^\ell_u f = u^{-1}.g^\ell_s(f)$$

observese la siguiente identidad:

$$\gamma^\ell_{uK}(f) = K^{-1}.\left(\gamma^\ell_u f\right) \text{ para todo } K \in G_o \tag{14}$$

y además, debido a la igualdad (10), para todo $\ell = 1, \ldots$, se tiene

$$\downarrow\left(\gamma^\ell_u f\right) = \gamma^{\ell-1}_u f \tag{15}$$

2.1.5. Ecuaciones reducidas y orden de contacto geométrico.

La proyección (ver (41)):

$$\sigma^\ell : G.\mathcal{O}^\ell \to \mathcal{O}^\ell,\ x \to (G.x) \cap \mathcal{O}^\ell$$

permite definir para $(f : S)$ variedad admisible la aplicación

$$\sigma^\ell f : S \to \mathcal{O}^\ell,\ s \to \sigma^\ell_s f = \sigma^\ell\left(g^\ell_s f\right)$$

llamamos a $\sigma^\ell_s f$ *ecuación reducida de orden* ℓ de f en s.

Proposición 6 *La aplicación $\sigma^\ell f : S \to \mathcal{O}^\ell$ $s \to \sigma^\ell_s f$ es diferenciable, y la asignación $f \to \sigma^\ell f$ constituye un invariante de orden ℓ para las p-variedades admisibles de E.*

Proposición 7 *Sean $M = (f : S)$, $\overline{M} = \left(\overline{f} : \overline{S}\right)$ dos variedades admisibles de dimensión de E, y sean $a = f(s)$, y $\overline{a} = \overline{f}(\overline{s})$. Entonces, el orden de contacto geométrico (ver apartado 1.2.1) de M y $\overline{M}$ en a, es al menos ℓ, si y solo si $\sigma^\ell_s f = \sigma^\ell_{\overline{s}} \overline{f}$.*

Demostración. Si existe $A \in G$, tal que $g_s^\ell (\lambda_A \circ f) = g_{\overline{s}}^\ell \overline{f}$, usando proposición 6 se tiene:

$$\begin{aligned} \sigma_s^\ell f &= \sigma_s^\ell (\lambda_A \circ f) = \sigma^\ell \left(g_s^\ell (\lambda_A \circ f) \right) \\ &= \sigma^{\ell+1} \left(g_{\overline{s}}^\ell \overline{f} \right) = \sigma_{\overline{s}}^\ell \overline{f} \end{aligned}$$

Recíprocamente, supongamos $\sigma = \sigma_s^\ell f = \sigma_{\overline{s}}^\ell \overline{f}$, y fijemos $u \in \mathcal{O}^\ell (f, s)$, $\overline{u} \in \mathcal{O}^\ell \left(\overline{f}, \overline{s} \right)$ sendas referencias de orden ℓ en $a \in M$, y $\overline{a} \in \overline{M}$ respectivamente. Entonces

$$u.\sigma = g_s^\ell f,\ \overline{u}.\sigma = g_{\overline{s}}^\ell \overline{f}$$

y existe $K \in G_\ell$, tal que $\gamma_u^{\ell+1} (\lambda_K \circ f) = \gamma_{\overline{u}}^{\ell+1} \overline{f}$. Llamando $v = uK^{-1} \in \mathcal{O}^\ell (f, s)$ se tiene por (14)

$$\gamma_v^{\ell+1} (f) = \gamma_{\overline{u}}^{\ell+1} \overline{f} \Rightarrow \left(\overline{u} v^{-1} \right) . \left(g_s^{\ell+1} f \right) = g_{\overline{s}}^{\ell+1} \overline{f}$$

Esto significa que $A.g_s^\ell f = g_{\overline{s}}^\ell \overline{f}$ para $A = \overline{u} u^{-1}$, y se tiene que $(\lambda_A \circ f : S)$, $\left(\overline{f} : \overline{S} \right)$ tiene contacto de orden ℓ en s y $\overline{s}$. ■

2.1.6. Referencias de Frenet.

Una referencia $\mathcal{O}^q$-adaptada a f en $s \in S$ se denomina referencia de Frenet. Así

$$\mathcal{O}^q (f, s) = \{ u \in o (f, s) : \gamma_u^q f \in \mathcal{O}^q \}$$

constituye el conjunto de referencias de Frenet en s, y $\mathcal{O}^q (f) \to S$ es un fibrado principal de grupo G_q. y sus secciones $\mathbf{u} \in \Gamma (\mathcal{O}^q (f))$ son las referencias móviles de Frenet.

El hecho relevante ahora es que si $f \in \mathcal{F}$ y $u \in \mathcal{O}^q (f, s)$ entonces $g_s^q \left(u^{-1} f \right) \in \mathcal{O}^q$ entonces como $u^{-1} f \in \mathcal{F}$

$$G_{g_s^q (u^{-1} f)} = G_q = G_{q+1} = G_{g_s^{q+1} (u^{-1} f)}$$

se verifica: $\sigma_s^{q+1} f = g_s^{q+1} \left(u^{-1} f \right) \in \mathcal{O}^{q+1}$ por tanto $u \in \mathcal{O}^{q+1} (f, s)$. Usando definición de $\mathcal{O}^{q+r}$ en página 18 se tiene:

Proposición 8 *Si $\mathbf{u} : S \to G$ es una $\mathcal{O}^q$-referencia movil para $f \in \mathcal{F}_{q+r}$, entonces también es $\mathcal{O}^{q+r}$-referencia movil para todo $r \geq 1$. O tambien*

$$\mathcal{O}^q (f, s) = \mathcal{O}^{q+r} (f, s) \ \ \forall s \in S$$

En el caso en que $G_q = \{e\}$, tenemos que $\mathcal{O}^q (f, s) = \{ \mathbf{u}_f (s) \}$ se reduce a un punto para cada $s \in S$, y se denomina f-referencia de Frenet en s. Así las cosas, existe una única $\mathbf{u}_f : S \to \mathcal{O}^q (f)$ diferenciable, que es referencia móvil de Frenet,y que denotamos por $\mathbf{u}_f$

En el caso general, nótese que fijada una referencia móvil de Frenet $\mathbf{u}$, todas las demás se obtienen a partir de ella a través de una aplicación diferenciable $\mathbf{K} : S \to G_q$ mediante la fórmula:

$$\mathbf{v} (s) = \mathbf{u} (s) \mathbf{K} (s)$$

En el caso *genérico* la aplicación $\mathbf{K} : S \to G_q$ es (localmente) constante, pues G_q es discreto.

2.2. Ecuaciones estructurales.

Sea $\mathcal{F}$ una familia admisible de p-variedades y sucesión de isotropía generada por $G_0 \supset G_1 \ldots \supset G_q = G_{q+1} = \cdots$

Sean $\mathfrak{g}_0 \supset \mathfrak{g}_1 \ldots \supset \mathfrak{g}_q = \mathfrak{g}_{q+1}$ las correspondientes álgebras de Lie. Se toman entonces complementarios $\mathfrak{m}_\ell$ con $\mathfrak{g}_{\ell-1} = \mathfrak{m}_\ell \oplus \mathfrak{g}_\ell$ para $\ell \geq 1$, y $\mathfrak{m}_0$ con $\mathfrak{g} = \mathfrak{m}_0 \oplus \mathfrak{g}_0$, de forma que al final se tiene la descomposición

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{m}_0 \oplus \mathfrak{m}_1 \oplus \cdots \mathfrak{m}_q \oplus \mathfrak{g}_q$$

Tenemos entonces

$$\mathfrak{g}/\mathfrak{g}_\ell \simeq \mathfrak{m}_0 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{m}_\ell, \; \mathfrak{g}_{\ell-1}/\mathfrak{g}_\ell \simeq \mathfrak{m}_\ell$$

Sea $\dim \mathfrak{m}_\ell = m_\ell - m_{\ell-1}$ y $m_0 = m = \dim \mathfrak{m}_0 = \dim E$.

Se supone construida una base $(e_1 \ldots, e_r)$ de $\mathfrak{g}$ de forma que $(e_i : 0 < i \leq m_0)$ es base de $\mathfrak{g}/\mathfrak{g}_0 \simeq \mathfrak{m}_0 \simeq T_oE$, y en general $(e_i : 1 \leq i \leq m_\ell)$ en es una base de $\mathfrak{m}_0 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{m}_\ell \simeq \mathfrak{g}/\mathfrak{g}_\ell$. Obsérvese $(e_i + \mathfrak{g}_\ell : 0 \leq i \leq m_\ell)$ es base de $\mathfrak{g}/\mathfrak{g}_\ell$. Sin embargo en lo sucesivo no se hará distinción explícita entre las dos bases.

2.2.1. Definiciones y Notaciones preliminares.

Si $(f : S)$ es $\mathcal{O}^\ell$-admisible se define para $\mu_{\ell-1} \leq \nu \leq \mu_\ell$ las curvaturas de orden ℓ:

$$\kappa^\nu f : S \to \mathbb{R}, \; s \to \kappa^\nu_s f = \kappa^\nu \left(\sigma^\ell_s f\right)$$

Siendo las (κ^ν) el sistema de coordenadas para los $\mathcal{O}^\ell$ establecidas en el ejercicio 5

Así $(\kappa^\nu_s(f) : 1 \leq \nu \leq \mu_\ell)$ son las coordenadas de $\sigma^\ell_s f \in \mathcal{O}^\ell$ en este sistema y se concluye que localmente los invariantes σ^ℓ y $(\kappa^\nu : 1 \leq \nu \leq \mu_\ell)$ son esencialmente los mismos. Así decir que dos variedades admisibles f $\overline{f} : S \to E$, tienen los mismos invariantes hasta el orden ℓ significa que $\sigma^\ell f = \sigma^\ell \overline{f}$ o también que $\kappa^\nu f = \kappa^\nu \overline{f}$ para $1 \leq \nu \leq \mu_\ell$. Entonces por la proposición 6 tienen en cada $s \in S$, orden de contacto geométrico al menos ℓ.

Si $f \in \mathcal{F}_q$ es $\mathcal{O}^q$-admisible, entonces por (13), es $\mathcal{O}^{q+1}$-admisible y

$$\left(\kappa^\nu(f) : 1 \leq \nu \leq \mu_{q+1}\right)$$

es el sistema de curvaturas de f.

Como criterio de variación de subíndices adoptamos el siguiente que complementa el cuadro (**??**)

Nombre	Intervalo
a, b, c	$1 \leq \bigstar \leq r$
$\widetilde{a}, \widetilde{b}, \widetilde{c}$	$p+1 \leq \bigstar \leq r$
α, β, γ	$1 \leq \bigstar \leq p$
$\widetilde{\alpha}_\ell, \widetilde{\beta}_\ell, \widetilde{\gamma}_\ell$	$p+1 \leq \bigstar \leq m_\ell$
$\alpha_\ell, \beta_\ell, \gamma_\ell$	$m_{\ell-1} < \bigstar \leq m_\ell$
i_ℓ, j_ℓ	$1 \leq \bigstar \leq m_\ell$
ν_ℓ, τ_ℓ	$1 \leq \bigstar \leq \mu_\ell$

$$\left\{ \begin{array}{l} r = \dim G \\ p = \dim S \\ m_\ell = \dim \mathfrak{g}/\mathfrak{g}_\ell \\ \mu_\ell = \dim W^\ell \\ n_\ell = m_\ell - m_{\ell-1} \\ m_0 = m, \; m_{-1} = 0 \end{array} \right. \tag{16}$$

Así por ejemplo, escribiremos (e_{i_ℓ}) en lugar de $(e_i : 1 \leq i \leq m_\ell)$

2.2.2. Forma de Frenet y cobases ℓ-adaptadas.

Una referencia móvil $\mathbf{u} \in \Gamma(o(f))$ se dice $\mathcal{O}^\ell$-adaptada (o de orden ℓ) si lo es $\mathbf{u}(s)$ para todo $s \in S$. Es decir $\mathbf{u}(s)^{-1} .g_s^\ell(f) \in \mathcal{O}^\ell$ para todo $s \in S$. Esto significa que $\mathbf{u} \in \Gamma\left(\mathcal{O}^\ell(f)\right)$ es una sección del fibrado $\mathcal{O}^\ell(f) \to S$.

Nótese que una referencia (móvil) $\mathcal{O}^\ell$-adaptada es $\mathcal{O}^l$-adaptada para $1 \leq l \leq \ell$.

Forma de Frenet Asociada a $\mathbf{u} \in \Gamma\left(\mathcal{O}^\ell(f)\right)$ podemos construir la forma vertical $\Omega_{\mathbf{u}}(\operatorname{mod}\mathfrak{g}_\ell)$=$\Theta_{\mathbf{u}}^\ell \in \Omega^1(S, \mathfrak{g}/\mathfrak{g}_\ell)$ introducida en el párrafo 3.4.4 donde $\Omega \in \Omega^1(G, \mathfrak{g})$ es la forma de Cartan de G, y $\Omega_{\mathbf{u}} = \mathbf{u}^*\Omega \in \Omega^1(S, \mathfrak{g})$.

Se denomina a $\Theta_{\mathbf{u}}^\ell$ forma de Frenet de orden ℓ.

Nota 9 *De hecho $\Theta_{\mathbf{u}}^\ell(s)$ solo depende de $u = \mathbf{u}(s) \in \mathcal{O}^\ell(f,s)$ en virtud de la proposición 35 (pág 61). De acuerdo con esto denotamos $\Theta_{\mathbf{u}}^\ell(s) = \Theta_u^\ell(f,s)$. Usando (46) en pág 62, se concluye que para cualquier otra referencia $\overline{u} = uK \in \mathcal{O}^\ell(f,s)$ $(K \in G_\ell)$ se tiene*

$$\Theta_{\overline{u}}^\ell(f,s) = \Theta_{uK}^\ell(f,s) = Ad_{K^{-1}}\Theta_u^\ell(f,s)$$

Nota 10 *Sea M es una p-variedad $\mathcal{O}^\ell$-admisible de E, y $\iota_M : M \to E$ la inclusión canónica. Tenemos entonces la igualdad tautológica*

$$M = (\iota_M : M)$$

Una referencia de orden ℓ en M para $x_0 \in M$ es un elemento $u \in \mathcal{O}^\ell(\iota_M, x_0)$, que denotamos ahora por $\mathcal{O}^\ell(M, x_0)$ y $\Theta_u^\ell(\iota_M, x_0) = \Theta_u^\ell(M, x_0)$. Así mismo denotamos $g_{x_0}^\ell \iota_M = g_{x_0}^\ell M = T_{x_o}^\ell M$, $\sigma^\ell\iota_M = \sigma_M^\ell$, $\kappa^{\nu_\ell}\iota_M = \kappa_M^{\nu_\ell}$, ...etc

Esta notación trata de indicar que todos estos elementos están asociados a la variedad M y no dependen *de la parametrización que se use para calcularlos.*

Probaremos que de hecho $\Theta_u^\ell(M, x_0)$ depende solo de $g_{x_0}^{\ell+1}M$. La demostración necesita de un lema previo, que es consecuencia directa de la proposición 3.1.4.**2** en el epígrafe 3.1.4 (página 42)

Lema 11 *Sean M y $\overline{M}$ dos p-variedades de E, y supóngase que (M, x_0) tiene un contacto de orden ℓ+1 con $\left(\overline{M}, x_0\right)$ $(\ell \geq 0)$. Existen entonces parametrizaciones $f, \overline{f} : S \to E$ de M y $\overline{M}$ con $x_0 = f(s_0) = \overline{f}(s_0)$, $d_{s_0}f = d_{s_0}\overline{f}$ y $d_{s_0}g^\ell f = d_{s_0}g^\ell\overline{f}$.*

Nota 12 *En las condiciones de Lema anterior, podemos suponer S abierto de $\mathbb{R}^p$. Para comprobar que dos 1-formas $\theta \in T_{x_0}^*M$, $\overline{\theta} \in T_{x_0}^*\overline{M}$ son iguales, es suficiente comprobar que $f^*\theta = \overline{f}^*\overline{\theta} \in T_{s_0}^*S$, pues $f^*\theta$ y $\overline{f}^*\overline{\theta}$ determinan la escritura de θ y $\overline{\theta}$ en la cobase común inducida por f y $\overline{f}$ en $T_{x_0}^*M = T_{x_0}^*\overline{M}$*

Proposición 13 *Sean M y $\overline{M}$ dos p-variedades $\mathcal{O}^{\ell+1}$-admisibles de E, y supóngase que (M, x_0) tiene un contacto de orden ℓ+1 con $\left(\overline{M}, x_0\right)$. Sean $\mathbf{u} : M \to G$, $\overline{\mathbf{u}} : \overline{M} \to G$ referencias móviles ℓ-adaptadas de M y $\overline{M}$ de forma que $\overline{\mathbf{u}}(x_0) = \mathbf{u}(x_0) = u$. Entonces en $\Lambda^1(T_{x_0}M, \mathfrak{g}/\mathfrak{g}_\ell) = \Lambda^1\left(T_{x_0}\overline{M}, \mathfrak{g}/\mathfrak{g}_\ell\right)$ se verifican la ifualdad:*

$$\Theta_{\mathbf{u}}^\ell(x_0) = \Theta_u^\ell(M, x_0) = \Theta_u^\ell\left(\overline{M}, x_0\right) = \Theta_{\overline{\mathbf{u}}}^\ell(x_0)$$

además, (ver notacion en nota 10)

$$d_{x_0}\left(\sigma_M^\ell\right) = d_{x_0}\left(\sigma_{\overline{M}}^\ell\right)$$

Demostración. Sean $f, \overline{f} : S \to E$ las parametrizaciones de M y $\overline{M}$ reclamadas en el Lema 11. Tenemos pues $x_0 = f(s_0) = \overline{f}(s_0)$ y además:

$$d_{s_0} f = d_{s_0} \overline{f},\ g^{\ell}_{s_0} f = g^{\ell}_{s_0} \overline{f},\ d_{s_0} g^{\ell} f = d_{s_0} g^{\ell} \overline{f} \tag{17}$$

Observese que

$$\begin{array}{c} f^* \Theta^{\ell}_u (M, x_0) = \Theta^{\ell}_u (f, s_0),\ f^* d_{x_0} \left(\sigma^{\ell}_M\right) = \sigma^{\ell}_{s_0} f \\ \overline{f}^* \Theta^{\ell}_u \left(\overline{M}, x_0\right) = \Theta^{\ell}_u \left(\overline{f}, s_0\right),\ \overline{f}^* d_{x_0} \left(\sigma^{\ell}_{\overline{M}}\right) = \sigma^{\ell}_{s_0} \overline{f} \end{array}$$

En virtud de la nota 12 podemos hacer la comprobación demostrando que $\Theta^{\ell}_u (f, s_0) = \Theta^{\ell}_u \left(\overline{f}, s_0\right)$ y $d_{s_0} \sigma^{\ell} f = d_{s_0} \sigma^{\ell} \overline{f}$. Aplicando el Corolario 38 en pág 63, y sustituyendo en él

$$\mathcal{E} \rightsquigarrow \mathcal{E}^{\ell} \quad f \rightsquigarrow g^{\ell} f \quad \overline{f} \rightsquigarrow g^{\ell} \overline{f} \quad \mathcal{O} \rightsquigarrow \mathcal{O}^{\ell}$$

se obtiene la descomposición:

$$\begin{array}{c} d_{s_0} g^{\ell} f = u.\Theta^{\ell}_u (f, s_0) + u.d_{s_0} \sigma^{\ell} f \\ d_{s_0} g^{\ell} \overline{f} = u.\Theta^{\ell}_u \left(\overline{f}, s_0\right) + u.d_{s_0} \sigma^{\ell} \overline{f} \end{array}$$

y como por (17) $d_{s_0} g^{\ell} f = d_{s_0} g^{\ell} \overline{f}$, se concluye $d_{s_0} \sigma^{\ell} f = d_{s_0} \sigma^{\ell} \overline{f}$ y $\Theta^{\ell}_u (f, s_0) = \Theta^{\ell}_u \left(\overline{f}, s_0\right)$ ■

Corolario 14 *La familia $\Theta^{\ell}_M (x_0)$ de todas las $\Theta^{\ell}_u M$ (ver nota 9 en pág 22) para u referencia $(\ell + 1)$-adaptada de M en x_0, depende solo de la $(\ell + 1)$-escama $g^{\ell+1}_{x_0} M \in \mathcal{G}^{\ell+1}_p (E)$ y constituye un G-invariante de orden $\ell + 1$.*

Nota 15 *Sea $u \in \mathcal{O}^{\ell} (M, x_0)$ una referencia de orden ℓ en M para $x_0 \in M$, en $\Lambda^1 (T_{x_0} M, \mathfrak{g}/\mathfrak{g}_{\ell})$ y para todo $A \in G$ se tiene la siguiente identidad*

$$\lambda^*_A \Theta^{\ell}_{Au} (AM, Ax_0) = \Theta^{\ell}_u (M, x_0)$$

donde se entiende que $\lambda_A : M \to AM$ es la traslación por A.

Nota 16 *Si (M, x_0) tiene un G-contacto de orden $\ell + 1$ con $\left(\overline{M}, \overline{x}_0\right)$, entonces (AM, Ax_0) tiene contacto de orden $\ell + 1$ con $\left(\overline{M}, \overline{x}_0\right)$, para cierto $A \in G$, y podemos aplicar ahora el argumento de la proposición anterior reemplazando M por AM. Ahora es $\mathbf{v} = A\mathbf{u}$ para para cierta $\mathbf{u} : M \to G$, $\mathcal{O}^{\ell}$-referencia en M, y $\mathbf{v}(x_0) = \overline{\mathbf{u}}(\overline{x}_0) = A\mathbf{u}(x_0)$. Se concluye por la proposición que*

$$\Theta^{\ell}_{\mathbf{v}} (\overline{x}_0) = \Theta^{\ell}_{\overline{\mathbf{u}}} (\overline{x}_0)$$

Pero como $\lambda^*_A \Theta^{\ell}_{\mathbf{v}} = \Theta^{\ell}_{\mathbf{u}}$ (por la nota anterior), y usando la igualdad de arriba queda

$$\lambda^*_A \Theta^{\ell}_{\overline{\mathbf{u}}} (\overline{x}_0) = \Theta^{\ell}_{\mathbf{u}} (x_0)$$

o también si $u = \mathbf{u}(x_0)$

$$\lambda^*_A \Theta^{\ell}_{Au} \left(\overline{M}, \overline{x}_0\right) = \Theta^{\ell}_u (M, \overline{x}_0)$$

por tanto, si (M, x_0) tiene un G-contacto de orden $\ell + 1$ con $\left(\overline{M}, \overline{x}_0\right)$, entonces si $\mathbf{u}$ y $\overline{\mathbf{u}}$ son $(\ell + 1)$-referencias de M y $\overline{M}$ con $\overline{\mathbf{u}}(\overline{x}_0) = A\mathbf{u}(x_0)$ para $A \in G$ se tiene:

$$\Theta^{\ell}_{\overline{\mathbf{u}}} (A.\xi) = \Theta^{\ell}_{\mathbf{u}} (\xi),\ \forall \xi \in T_{x_0} M$$

Cobase adaptada. Usando la base $(e_i : 0 \leq i \leq m_\ell)$ de $\mathfrak{g}/\mathfrak{g}_\ell$ y una referencia movil $\mathbf{u} \in \Gamma\left(\mathcal{O}^\ell(f)\right)$, podemos escribir la forma de Frenet de orden ℓ, $\Theta^\ell_{\mathbf{u}} = \sum \theta^i e_i$ con $\theta^i \in \Omega^1(S)$. Supuesto que los p primeros θ^i son independientes podemos construir una cobase (ϕ^α) de $\Omega^1(S)$ de la forma

$$\phi^\alpha = \theta^\alpha \; 1 \leq \alpha \leq p$$

decimos que (ϕ^α) es una cobase $\mathcal{O}^\ell$-adaptada (inducida por $\mathbf{u}$)

Una cobase (ϕ^α) de $\Omega^1(S)$ asociada a una referencia movil de Frenet $\mathbf{u} \in \Gamma(\mathcal{O}^q(f))$, se llama cobase de Frenet.

Debemos observar que la correspondencia $\mathbf{u} \rightsquigarrow (\phi^\alpha)$ es punto a punto, de forma que $(\phi^\alpha(s))$ cobase de T_sS solo depende del valor $u = \mathbf{u}(s) \in \mathcal{O}^\ell(f, s)$ (ver nota 9).

2.2.3. Ecuaciones estructurales.

El objetivo, es probar la existencia de funciones diferenciables

$$F^{\widetilde{\alpha}_\ell}_\beta\left(\kappa^1, \ldots, \kappa^{\mu_{\ell+1}}\right), \; N^{\nu_\ell}_\alpha\left(\kappa^1, \ldots, \kappa^{\mu_{\ell+1}}\right) : \mathcal{O}^{\ell+1} \to \mathbb{R} \tag{18}$$

tales que para cualquier $\mathcal{O}^{\ell+1}$-referencia movil $\mathbf{u} : S \to G$ de cualquier $\mathcal{O}^{\ell+1}$-admisible f se tengan las identidades:

$$\left\{\begin{array}{l} \theta^{\widetilde{\alpha}_\ell}_\beta(s) = F^{\widetilde{\alpha}_\ell}_\beta\left(\kappa^1_s f, \ldots, \kappa^{\mu_{\ell+1}}_s f\right) \\ \sigma^{\nu_\ell}_\alpha(s) = N^{\nu_\ell}_\alpha\left(\kappa^1_s f, \ldots, \kappa^{\mu_{\ell+1}}_s f\right) \end{array}\right. \tag{19}$$

siendo

$$\begin{array}{l} \Theta^\ell_{\mathbf{u}} = \Omega_{\mathbf{u}}\,(\operatorname{mod}\mathfrak{g}_\ell) = \phi^\alpha e_\alpha + \theta^{\widetilde{\alpha}_\ell} e_{\widetilde{\alpha}_\ell}, \text{ con } \theta^{\widetilde{\alpha}_\ell} = \theta^{\widetilde{\alpha}_\ell}_\beta \phi^\beta \in \Omega^1(S) \\ d\left(\sigma^\ell f\right) = \sigma^{\nu_\ell}\left(\partial/\partial\kappa^{\nu_\ell}\right) \text{ con } \sigma^{\nu_\ell} = \sigma^{\nu_\ell}_\alpha \phi^\alpha \in \Omega^1(S) \end{array} \tag{20}$$

y ϕ^α cobase adaptada en S.

Nota 17 *De hecho $\sigma^{\nu_\ell}(s) = d_s(\kappa^{\nu_\ell} f)$ para todo s. Hay quizás en la notación un uso abusivo de la letra σ. El contexto evita que haya lugar a confusión.*

La construcción dará lugar a un sistema final de funciones $F^{\widetilde{\alpha}_q}_\beta$, $N^{\nu_q}_\alpha$ verificando en cada nivel ℓ, las ecuaciones anteriores. El sistema completo de estas ecuaciones constituyen las ecuaciones estructurales y se obtienen para $\ell = q$.

La construcción que se hará punto a punto, es válida para cada paso ℓ con $0 \leq \ell \leq q$ y no tiene carácter inductivo. De hecho podríamos suponer directamente que $\ell = q$, y obtener así el sistema completo de ecuaciones estructurales.

Vamos a definir las aplicaciones

$$F^{\widetilde{\alpha}_\ell}_\beta, N^{\nu_\ell}_\alpha : \mathcal{O}^{\ell+1} \to \mathbb{R}$$

Fijado $\gamma \in \mathcal{O}^{\ell+1}$:

1. Tomamos M_γ p-variedad, con $o \in M_\gamma$ y $T^{\ell+1}_o M_\gamma = \gamma$
2. Construimos $\Theta^\ell_\gamma = \Theta^\ell_e(M_\gamma, o) \in \Lambda^1(T_o M_\gamma, \mathfrak{g}/\mathfrak{g}_\ell)$, siendo $e \in G$ el elemento identidad del grupo, como elemento $e \in \mathcal{O}^\ell(M, o)$. Escribamos entonces $\Theta^\ell_\gamma = \theta^{i_\ell}_\gamma e_{\alpha_{i_\ell}}$, con $\theta^{i_\ell}_\gamma \in T^*_o M_\gamma$

   En el supuesto de que las p primeras formas $\left(\theta^\alpha_\gamma\right)$ formen una base de $T^*_o M_\gamma$

3. Definimos $F_{\beta}^{\widetilde{\alpha}_\ell}(\gamma)$ mediante la identidad
$$\theta_{\gamma}^{\widetilde{\alpha}_\ell} = F_{\beta}^{\widetilde{\alpha}_\ell}(\gamma)\,\theta_{\gamma}^{\beta} \tag{21}$$

4. Si escribimos $d_o\left(\sigma_{M_\gamma}^{\ell}\right) = \sigma_M^{\nu_\ell}(o)\,(\partial/\partial\kappa^{\nu_\ell})_\gamma$, (i.e. $\sigma_{M_\gamma}^{\nu_\ell}(o) = d_o\kappa_M^{\nu_\ell} \in T_o^*M$) se define $N_\alpha^{\nu_\ell}(\gamma)$ mediante la identidad:
$$\sigma_{M_\gamma}^{\nu_\ell}(o) = N_\alpha^{\nu_\ell}(\gamma)\,\theta_\gamma^\alpha \tag{22}$$

Las definiciones de $F_{\beta}^{\widetilde{\alpha}_\ell}, N_\alpha^{\nu_\ell}$ no dependen de la p-variedad M_γ elegida tal que $o \in M_\gamma$ y $T_o^{\ell+1}M_\gamma = \gamma$, ya que si $\overline{M}_\gamma$ es otra entonces (M_γ, o), y $\left(\overline{M}_\gamma, o\right)$ tienen contacto de orden $\ell+1$, y en virtud de la proposición 13 se tiene que $\Theta_e^\ell(M_\gamma, o) = \Theta_e^\ell\left(\overline{M}_\gamma, o\right)$ y $d_o\left(\sigma_{M_\gamma}^\ell\right) = d_o\left(\sigma_{\overline{M}_\gamma}^\ell\right)$.

Debemos comprobar ahora que para cualquier $f: S \to E$, $\mathcal{O}^{\ell+1}$-admisible se verifican en todo $s \in S$, las identidades (19) siendo $\theta_{\beta}^{\widetilde{\alpha}_\ell}$, y $\sigma_\alpha^{\nu_\ell}$ las funciones construidas en (20). Por las razones explicitadas en la nota 10, es suficiente con usar la parametrición canónica $f = \iota_M$, $S = M$. Sea $x_0 \in M$ y sea $\gamma = \sigma_M^{\ell+1}(x_0)$. Entonces (M_γ, o) y (M, x_0) tienen G-contacto de orden $\ell+1$. De hecho si $u \in \mathcal{O}^{\ell+1}(M, x_0)$ entonces $(\lambda_u M_\gamma, u.o = x_0)$ y (M, x_0) tienen contacto de orden $\ell+1$. Por la proposición 13 se concluye
$$\Theta_u^\ell(M, x_0) = \Theta_u^\ell(\lambda_u M_\gamma, x_0)$$
y usando ahora la nota 16 se concluye que
$$\lambda_u^*\Theta_u^\ell(M, x_0) = \Theta_\gamma$$
es decir, si escribimos $\Theta_u^\ell(M, x_0) = \theta^{i_\ell}(x_0)\,e_{i_\ell}$ se tiene
$$\theta_\gamma^{i_\ell} = \lambda_u^*\theta^{i_\ell}(x_0)$$
sustituyendo ahora en la identidad (21) $\theta_\gamma^{i_\ell}$ por $\lambda_u^*\theta^{i_\ell}(x_0)$, y *eliminando* λ_u^* se concluye
$$\theta^{\widetilde{\alpha}_\ell}(x_0) = F_{\beta}^{\widetilde{\alpha}_\ell}(\gamma)\,\theta^\beta(x_0)$$
Pero como $\gamma = \sigma_M^{\ell+1}(x_0)$, y $\phi^\beta(x_0) = \theta^\beta(x_0)$ es una cobase $(\ell+1)$-adaptada a M en x_0, se concluye que
$$\theta^{\widetilde{\alpha}_\ell}(x_0) = F_{\beta}^{\widetilde{\alpha}_\ell}\left(\sigma_M^{\ell+1}(x_0)\right)\phi^\beta(x_0)$$
y por tanto
$$\theta_{\beta}^{\widetilde{\alpha}_\ell}(x_0) = F_{\beta}^{\widetilde{\alpha}_\ell}\left(\sigma_M^{\ell+1}(x_0)\right)$$
que es la escritura puntual en la parametrización canónica de las primeras ecuaciones de (19).

La demostración de que se verifican las segundas ecuaciones de (19) es análoga. Se tiene:
$$\kappa^{\nu_{\ell+1}}(\gamma) = \kappa_M^{\nu_{\ell+1}}(x_0) = \kappa_{M_\gamma}^{\nu_{\ell+1}}(o) = \kappa_{\lambda_u M_\gamma}^{\nu_{\ell+1}}(x_0)$$
además por el carácter G-invariante de las curvaturas:
$$\kappa_{M_\gamma}^{\nu_\ell} = \kappa_{\lambda_u M_\gamma}^{\nu_\ell} \circ \lambda_u$$

y por la proposición 13 se verifica $d_{x_0}\left(\sigma^{\ell}_{\lambda_u M_\gamma}\right) = d_{x_0}\left(\sigma^{\ell}_M\right)$ es decir

$$d_{x_0}\left(\kappa^{\nu_\ell}_M\right) = d_{x_0}\left(\kappa^{\nu_\ell}_{\lambda_u M_\gamma}\right) = \lambda^*_{u^{-1}}\left(d_o\left(\kappa^{\nu_\ell}_{M_\gamma}\right)\right)$$

y escribiendo

$$d\sigma^{\ell}_M = \sigma^{\nu_\ell}_M \partial_{\kappa^{\nu_\ell}}$$

se concluye que (ver nota 17):

$$\lambda^*_u\left(\sigma^{\nu_\ell}_M(x_0)\right) = \lambda^*_u\left(d_{x_0}\kappa^{\nu_\ell}_M\right) = d_o\left(\kappa^{\nu_\ell}_{M_\gamma}\right) = \sigma^{\nu_\ell}_\gamma(o)$$

Sustituyendo formalmente $\sigma^{\nu_\ell}_\gamma(o)$ por $\lambda^*_u\left(\sigma^{\nu_\ell}_M(x_0)\right)$ en (22),

$$\lambda^*_u\left(\sigma^{\nu_\ell}_M(x_0)\right) = N^{\nu_\ell}_\alpha(\gamma)\,\theta^\alpha_\gamma = N^{\nu_\ell}_\alpha(\gamma)\,\lambda^*_u\phi^\alpha(x_0)$$

eliminando el pullback λ^*_u y teniendo en cuenta que $\gamma = \sigma^{\ell+1}_M(x_0)$ queda

$$\sigma^{\nu_\ell}_M(x_0) = N^{\nu_\ell}_\alpha\left(\sigma^{\ell+1}_M(x_0)\right)\phi^\alpha(x_0)$$

pero tomando $\sigma^{\nu_\ell}_\alpha(x_0)$ tales que $\sigma^{\nu_\ell}_M(x_0) = \sigma^{\nu_\ell}_\alpha(x_0)\,\phi^\alpha(x_0)$, se concluye

$$\sigma^{\nu_\ell}_\alpha(x_0) = N^{\nu_\ell}_\alpha\left(\sigma^{\ell+1}_M(x_0)\right)$$

que es la escritura puntual en la parametrización canónica de las segundas ecuaciones de (19).

Si $\gamma \in \mathcal{G}^{\ell+1}(E)$ denotamos $\gamma = \gamma_{\ell+1}$ y $\gamma_{l+1}\downarrow = \gamma_l$ para $\ell \geq l \geq 0$.

En este contexto, se tiene el siguiente resultado

Lema 18 *Si $\gamma, \overline{\gamma} \in \mathcal{O}^{\ell+1}$ tales que $F^{\widetilde{\alpha}_\ell}_\beta(\gamma) = F^{\widetilde{\alpha}_\ell}_\beta(\overline{\gamma})$, y $N^{\nu_\ell}_\alpha(\gamma) = N^{\nu_\ell}_\alpha(\overline{\gamma})$ y $\gamma_1 = \overline{\gamma}_1$ entonces $\gamma = \overline{\gamma}$.*

Demostración. En efecto, fijado $\gamma \in \mathcal{O}^{\ell+1}$, sea $M_\gamma = (f : S)$ p-variedad, con $o = f(s_0) \in M_\gamma$ y $T^{\ell+1}_o M_\gamma = \gamma$ y escribamos

$$\Theta^\ell_e(M_\gamma, o) = \Theta^\ell_\gamma = \theta^{i_\ell} e_{i_\ell} \in \Lambda^1\left(T_0 M_\gamma, \mathfrak{m}_0 \oplus \ldots \oplus \mathfrak{m}_\ell\right)$$

usando la notación $\gamma = \gamma_{\ell+1} \in \mathcal{O}^{\ell+1}$, es $\gamma_{l+1}\downarrow = \gamma_l = T^l_o M_\gamma = g^l_{s_0} f$ para $\ell \geq l \geq 0$. Entonces se tiene tambien para cada l:

$$\Theta^l_{\gamma_{l+1}} = \theta^{i_l} e_{i_l} \in \Lambda^1\left(T_o M_\gamma, \mathfrak{m}_0 \oplus \ldots \oplus \mathfrak{m}_l\right)$$

La razón de esto es que [en virtud de la proposición 35 (pág 61)] para cualquier $(\ell+1)$-referencia $\mathbf{u}$ de f con $e = \mathbf{u}(s_0)$, la forma de Frenet $\Theta^l_{\mathbf{u}}(s_0)$ vale siempre lo mismo $\Theta^l_{\mathbf{u}}(s_0) = \Theta^l_e(f, s_0)$ pues solo depende de $e = \mathbf{u}(s_0) \in \mathcal{O}^l(f, s_0)$.

Como $\gamma_1 = \overline{\gamma}_1$, es $T_o M_\gamma = T_o M_{\overline{\gamma}}$ y M_γ $M_{\overline{\gamma}}$ tienen contacto de orden 1 en o. Por el lema 11 es $\Theta^0_\gamma = \Theta^0_{\overline{\gamma}}$, por lo que admiten la misma cobase $\phi^\alpha = \theta^\alpha = \overline{\theta}^\alpha$, y por ser $F^{\widetilde{\alpha}_\ell}_\beta(\gamma) = F^{\widetilde{\alpha}_\ell}_\beta(\overline{\gamma})$ se concluye

$$\theta^{\widetilde{\alpha}_\ell} = F^{\widetilde{\alpha}_\ell}_\beta(\gamma)\,\phi^\beta = F^{\widetilde{\alpha}_\ell}_\beta(\overline{\gamma})\,\phi^\beta = \overline{\theta}^{\widetilde{\alpha}_\ell}$$

por lo que $\Theta^\ell_\gamma = \phi^\alpha e_\alpha + \theta^{\widetilde{\alpha}_\ell} e_{\widetilde{\alpha}_\ell} = \phi^\alpha e_\alpha + \overline{\theta}^{\widetilde{\alpha}_\ell} e_{\widetilde{\alpha}_\ell} = \Theta^\ell_{\overline{\gamma}}$.

Además por ser $N_\alpha^{\nu_\ell}(\gamma) = N_\alpha^{\nu_\ell}(\overline{\gamma})$, se concluye para $M_{\overline{\gamma}} = (f : S)$ p-variedad, con $o = f(s_0) \in M_{\overline{\gamma}}$ y $T_o^{\ell+1} M_{\overline{\gamma}} = \overline{\gamma}$

$$d_{s_0}\sigma^\ell f = \left(N_\alpha^{\nu_\ell}(\gamma)\phi^\alpha\right)\left(\partial/\partial\kappa^{\nu_\ell}\right)_\gamma = d_{s_0}\sigma^\ell \overline{f}$$

Por tanto

$$d_{s_0}\left(g^\ell f\right) = \Theta_\gamma^\ell + d_{s_0}\left(\sigma^\ell f\right) = \Theta_{\overline{\gamma}}^\ell + d_{s_0}\left(\sigma^\ell \overline{f}\right) = d_{s_0}\left(g^\ell \overline{f}\right)$$

lo que implica $\gamma = g_{s_0}^{\ell+1} f = g_{s_0}^{\ell+1}\overline{f} = \overline{\gamma}$. ■

Nota 19 *Las ecuaciones estructurales (19) demuestran que si se conocen las curvaturas* $\left(\kappa_s^{\nu_{\ell+1}} f\right)$ *para* $(f : S)$ *quedan determinadas las* $\theta_\beta^{\widetilde{\alpha}_\ell}(s)$ *y las* $\sigma_\alpha^{\nu_\ell}(s)$. *Por otra parte el lema anterior demuestra el recíproco, es decir, que si se conocen las* $\theta_\beta^{\widetilde{\alpha}_\ell}(s)$ *y las* $\sigma_\alpha^{\nu_\ell}(s)$ *para* $(f : S)$, *se conocen* $\left(\kappa_s^1 f, \ldots, \kappa_s^{\mu_{\ell+1}} f\right)$. *Esto significa además que las curvaturas* $\left(\kappa_s^{1+\mu_\ell} f, \ldots, \kappa_s^{\mu_{\ell+1}} f\right)$ *de orden* $\ell + 1$ *podrían haberse tomado entre las* $\theta_\beta^{\alpha_\ell}(s)$ $\sigma_\alpha^{\nu_\ell}(s)$ *(*$m_{\ell-1} < \alpha_\ell \leq m_\ell$*,)*

2.2.4. Teorema de Congruencia via la forma de Maurer-Cartan.

Usando el Teorema Fundamental de Integrabilidad 1.3.2 en pág 11 puede establecerse ya un teorema de congruencia para familias admisibles de Frenet (G_q discreto) *en posición general*. Se necesita el siguiente resultado previo.

Proposición 20 *Sean* $f, \overline{f} : S \to E$ *son* p*-variedades tales que* $\sigma^{\ell+1} f = \sigma^{\ell+1}\overline{f}$, *y supongase que el rango de* $d_s\left(\sigma^\ell f\right)$ *es máximo, igual a* p *en todo* $s \in S$ *excepto quizás un conjunto de interior vacio. Entonces las formas de Frenet* $\Theta_{\mathbf{u}}^\ell$, *y* $\Theta_{\overline{\mathbf{u}}}^\ell$ *coinciden independientemente de las* $(\ell+1)$*-referencias* $\mathbf{u}$ *y* $\overline{\mathbf{u}}$ *de* f *y* $\overline{f}$ *tomadas. En particular* f *y* $\overline{f}$ *admiten en una cobase* $\mathcal{O}^\ell$*-adaptada común.*

Demostración. Denotando con *barras* los datos correspondientes a $\overline{f}$, por hipótesis se tendría (ver (19) en pág 24)

$$\overline{\sigma}_\alpha^{\nu_\ell}(s) = \sigma_\alpha^{\nu_\ell}(s) = N_\alpha^{\nu_\ell}\left(\kappa_s^1, \ldots, \kappa_s^{\mu_{\ell+1}}\right)$$

siendo $\kappa_s^{\nu_{\ell+1}} = \kappa_s^{\nu_{\ell+1}} f = \kappa_s^{\nu_{\ell+1}}\overline{f}$, Sea $\Phi_\beta^\alpha(s)$ la matriz de cambio de cobase: $\phi^\beta = \Phi_\beta^\alpha(s)\overline{\phi^\alpha}$. Como

$$d\kappa_s^{\nu_\ell} = \sigma_\alpha^{\nu_\ell}\phi^\alpha = \sigma_\alpha^{\nu_\ell}\Phi_\beta^\alpha(s)\overline{\phi}^\beta = \overline{\sigma}_\beta^{\nu_\ell}\overline{\phi}^\beta$$

y se verificaría la relación:

$$\left(\overline{\sigma}_\beta^{\nu_\ell}(s)\right) = \left(\sigma_\alpha^{\nu_\ell}(s)\right)\left(\Phi_\beta^\alpha(s)\right)$$

Pero como

$$rango\left(d_s\sigma^\ell f\right) = rango\left(\sigma_\alpha^{\nu_\ell}(s)\right)$$

se concluye que $\left(\Phi_\beta^\alpha(s)\right)$ es la matriz identidad, $\phi^\alpha = \overline{\phi^\alpha}$, y por (20) en pág 24, $\Theta_{\mathbf{u}}^\ell = \Theta_{\overline{\mathbf{u}}}^\ell$ ■

Nota 21 *En particular, cuando el rango de* $d_s\left(\sigma^\ell f\right)$ *es igual a* p *en todo* $s \in S$, *la forma de Frenet* $\Theta_{\mathbf{u}}^\ell$ *de orden* ℓ *para* f, *es independiente de la* $(\ell+1)$*-referencia movil* $\mathbf{u}$.

No es dificil establecer ahora un teorema de clasificación para una familia admisible $\mathcal{F}$ de Frenet, entendiendo por tal una familia admisible con sucesión de isotropía $G \supset G_o \supseteq G_1 \supseteq \ldots \supset G_q$ tal que $\mathfrak{g}_q = \{0\}$ (pero no necesariamente $G_q = G_{q+1}$).

Teorema 22 *Supongase $\mathcal{F}$ de Frenet ($\mathfrak{g}_q = \{0\}$) y sean $(f : S)$, $\left(\overline{f} : S\right) \in \mathcal{F}$ y $\rho \geq q$, con $rg\,(d_s\sigma^\rho f) = p$. Supongase además que $\sigma^{\rho+1} f = \sigma^{\rho+1}\overline{f}$. Entonces existe $A \in G$, tal que $\overline{f} = \lambda_A \circ f$.*

Demostración. La idea es que usando la Proposición 20 se concluye que podemos tomar una cobase adaptada $\phi^\alpha = \overline{\phi^\alpha}$ para f y $\overline{f}$ simultáneamente, y además si $\mathbf{u}$ y $\overline{\mathbf{u}}$ son referencias de Frenet para f y $\overline{f}$ respectivamente, entonces

$$\Omega_{\mathbf{u}} = \Theta_{\mathbf{u}}^{\rho+1} = \Theta_{\mathbf{u}}^{\rho} = \phi^\alpha e_\alpha + F_\alpha^{\widetilde{\alpha}_\rho}\left(\kappa_s^1 f, \ldots, \kappa_s^{\mu_{\rho+1}} f\right)\phi^\alpha e_{\widetilde{\alpha}_\rho} = \Theta_{\overline{\mathbf{u}}}^{\rho} = \Omega_{\overline{\mathbf{u}}}$$

basta usar ahora el Teorema Fundamental de Integrabilidad 1.3.2 en pág 11 para concluir que $\overline{\mathbf{u}} = A\mathbf{u}$ para algún $A \in G$, y en particular

$$\overline{f}\,(s) = \overline{\mathbf{u}}\,(s)\,.o = A\mathbf{u}\,(s)\,.o = A.f\,(s)$$

■

Nota 23 *Usando el mismo argumento se prueba la conclusión de congruencia (existe $A \in G$, tal que $\overline{f} = \lambda_A \circ f$) bajo las hipótesis G_ρ discreto, $\sigma^{\rho+1} f = \sigma^{\rho+1}\overline{f}$ y la existencia de referencias de Frenet $\mathbf{u}$ y $\overline{\mathbf{u}}$ de orden $\rho+1$ para f y $\overline{f}$ que den lugar a identicas cobases $\phi^\alpha = \overline{\phi}^\alpha$.*

En el epígrafe **??** (pág **??**) se obtendrán teoremas de congruencia mas generales, en donde sorprendentemente no aparecen explícitamente las formas de Frenet. Estos teoremas establecen la G-congruencia de dos p-variedades parametrizadas $f, \overline{f} : S \to E$ tales que para cierto $\rho \geq q$, se verifica $\sigma^{\rho+1} f = \sigma^{\rho+1}\overline{f}$, y que el rango de $d_s\,(\sigma^\rho f)$ es igual al de $d_s\left(\sigma^{\rho+1} f\right)$ es constante igual a $\widetilde{p}$. Necesariamente es $\widetilde{p} \leq p$. Cuando $\widetilde{p} = p$, se obtiene una réplica del teorema 22 sin la restricción $\mathfrak{g}_q = \{0\}$.

Admitamos en lo sucesivo salvo mención explícita contraria que $\Sigma^\ell f = im\left(\sigma^\ell f\right)$ es subvariedad de $\mathcal{O}^\ell$ para $\ell \geq q$ denotemos

$$\rho_f = \min\left\{\, \ell \geq q / \dim \Sigma^\ell f = \dim \Sigma^{\ell+1} f \,\right\}$$

En la prácica se sigue el siguiente protocolo:

Fijada $f : S \to E$ una $p-$variedad de E que sea $\mathcal{O}^{q+1}$-admisible:

1. Calculamos sus curvaturas de orden menor o igual a $q+1$, digamos $\kappa^{\nu_{q+1}} f = k^{\nu_{q+1}} : S \to \mathbb{R}$, y tenemos $\left(k^1, \ldots, k^{\mu_{q+1}}\right)$.

2. Si el rango de $(\partial k^{\nu_q} / \partial s^\alpha)$ coincide con el de $(\partial k^{\nu_{q+1}} / \partial s^\alpha)$, (¡esto se verifica automáticamente si $rg\,(\partial k^{\nu_q} / \partial s^\alpha) = p$!) entonces cualquier $p-$variedad $\overline{f} : S \to E$ que sea $\mathcal{O}^{q+1}$-admisible con $\kappa^{\nu_{q+1}}\overline{f} = k^{\nu_{q+1}}$ es congruente con f, es decir, existe $A \in G$ con $\overline{f} = Af$.

3. En otro caso deberíamos seguir calculando curvaturas hasta encontrar el primer $\rho \geq q+1$, tal que el rango de $(\partial k^{\nu_\rho} / \partial s^\alpha)$ coincide con el de $(\partial k^{\nu_{\rho+1}} / \partial s^\alpha)$ para concluir que cualquier $p-$variedad $\overline{f} : S \to E$ que sea $\mathcal{O}^{q+1}$-admisible con $\kappa^{\nu_{\rho+1}} f = k^{\nu_{\rho+1}}\ \overline{f}$ es congruente con f.

2.2.5. Teorema de Congruencia para el caso analítico.

Admitamos que $\Sigma^\ell f = im\left(\sigma^\ell f\right)$ es subvariedad de $\mathcal{O}^\ell$ para $\ell \geq q$ y sea ρ_f el entero definido por

$$\rho_f = \text{mín}\left\{ \ell \geq q / \dim \Sigma^\ell f = \dim \Sigma^{\ell+r} f \text{ para todo } r \right\}$$

Nota 24 *Observese que con las notaciones habituales (ver la de la proposición 20) se tiene que*

$$\dim \Sigma^\ell f = \dim rg\left(\left(\sigma_\beta^{\nu_\ell}(s)\right)\right)$$

En efecto, si (s^α) *es un sistema de coordenadas para* S *y si* $ds^\alpha = \psi_\beta^\alpha \phi^\beta$ *entonces para todo* ℓ

$$\begin{aligned} dk^{\nu_\ell} &= \frac{\partial k^{\nu_\ell}}{\partial s^\alpha} ds^\alpha = \frac{\partial k^{\nu_\ell}}{\partial s^\alpha} \psi_\beta^\alpha \phi^\beta = \sigma_\beta^{\nu_{q+1}} \phi^\beta \Rightarrow \\ \left(\sigma_\beta^{\nu_\ell}\right) &= \left(\frac{\partial k^{\nu_\ell}}{\partial s^\alpha}\right)\left(\psi_\beta^\alpha\right) \end{aligned}$$

y como $\left(\psi_\beta^\alpha\right)$ *es no singular*

$$\dim \Sigma^\ell f = rg\left(\frac{\partial k^{\nu_\ell}}{\partial s^\alpha}\right) = rg\left(\sigma_\beta^{\nu_\ell}\right)$$

Proposición 25 *Sean* $f, \overline{f} : S \to E$ *p-variedades tales que con* $\rho_f = \rho_{\overline{f}} = \rho$*. Si* $\sigma^{\rho+1} f = \sigma^{\rho+1}\overline{f}$*, entonces automáticamente se verifica que* $\sigma^{\rho+r} f = \sigma^{\rho+r}\overline{f}$*. En particular, si* f *es analítica, las variedades* $(f : S)$ *y* $\left(\overline{f} : S\right)$ *son conguentes.*

Demostración. Siguiendo el mismo argumento de la proposición 20 en pág 27, se verificaría la relación:

$$\left(\overline{\sigma}_\beta^{\nu_\ell}(s)\right) = \left(\sigma_\alpha^{\nu_\ell}(s)\right)\left(\Phi_\beta^\alpha(s)\right) \tag{23}$$

para todo ℓ, siendo $\Phi_\beta^\alpha(s)$ la matriz de cambio de cobase: $\phi^\beta = \Phi_\beta^\alpha(s)\,\overline{\phi^\alpha}$.

Por otra parte, como $\sigma^{\rho+1} f = \sigma^{\rho+1}\overline{f}$, es $\kappa_s^{\nu_{\rho+1}} f = \kappa_s^{\nu_{\rho+1}}\overline{f} = k^{\nu_{\rho+1}}(s)$ y por (19)

$$\sigma_\beta^{\nu_\rho}(s) = \overline{\sigma}_\beta^{\nu_\rho}(s) = N_\alpha^{\nu_\rho}\left(k^1(s), \ldots, k^{\mu_{\rho+1}}(s)\right)$$

así que usando ahora (23) para $\ell = \rho$ se tiene

$$\left(\sigma_\beta^{\nu_\rho}(s)\right) = \left(\sigma_\alpha^{\nu_\rho}(s)\right)\left(\Phi_\beta^\alpha(s)\right) \tag{24}$$

pero esta relación se mantiene:

$$\left(\sigma_\beta^{\nu_{\rho+r}}(s)\right) = \left(\sigma_\alpha^{\nu_{\rho+r}}(s)\right)\left(\Phi_\beta^\alpha(s)\right)$$

debido a que la condición $\rho = \rho_f$ implica que (ver la nota 24 anterior)

$$\widetilde{p} = rg\left(\left(\sigma_\beta^{\nu_\rho}(s)\right)\right) = rg\left(\left(\sigma_\beta^{\nu_{\rho+r}}(s)\right)\right)$$

y las filas de la matriz $\left(\sigma_\beta^{\nu_{\rho+r}}(s)\right)$ son combinación lineal de $\widetilde{p}$ filas de las ν_ρ primeras que conforman la matriz $\left(\sigma_\beta^{\nu_\rho}(s)\right)$ y que pertenecen a $\ker\left(\Phi_\beta^\alpha(s) - id\right)$ por (24). Usando ahora (23) para $\ell = \rho + r$ se concluye

$$\left(\sigma_\beta^{\nu_{\rho+r}}(s)\right) = \left(\overline{\sigma}_\beta^{\nu_{\rho+r}}(s)\right)$$

La conclusión final $\sigma^{\rho+r}f = \sigma^{\rho+r}\overline{f}$ es consecuencia de que todas las curvaturas de orden mayor que $\rho+1$ para f y $\overline{f}$ se obtienen de la colección $\left(\sigma_{\beta}^{\nu_{\rho+r}}(s)\right) = \left(\overline{\sigma}_{\beta}^{\nu_{\rho+r}}(s)\right)$ para $r \geq 1$ (ver nota 19 en página 27)

Finalmente, fijado $s_0 \in S$, y referencias fijas $u, \overline{u} \in G$ de orden q para f y $\overline{f}$ en s_0 entonces por la proposición 8 en la página 20 y llamando $\sigma_0^{\ell} = \sigma_{s_0}^{\ell} f = \sigma_{s_0}^{\ell}\overline{f}$ es

$$u.\sigma_0^{\ell} = g_{s_0}^{\ell} f,\ \overline{u}.\sigma_0^{\ell} = g_{s_0}^{\ell}\overline{f} \text{ para todo } \ell \geq 0$$

y por tanto

$$g_{s_0}^{\ell}\overline{f} = \left(\overline{u}u^{-1}\right).g_{s_0}^{\ell} f, \text{ para todo } \ell \geq 0$$

lo cual indica que si $A = \overline{u}u^{-1}$, entonces $\overline{f}$ y Af tienen un contacto de orden ℓ, para todo $\ell \geq 0$.

Aplicando una variante del Lema 11, podemos elegir las parametrizaciones f y $\overline{f}$ de $(f : S)$ y $\left(\overline{f} : S\right)$ con $S = \mathbb{S}$ abierto convexo de $\mathbb{R}^p$, $s_0 = 0$, $\left(x^i\right)$ carta analítica de E en torno a $Af((0) = \overline{f}(0)$ de forma que los desarrollos de Taylor de $x^i \circ (Af)$ y $x^i \circ \overline{f}$ de cualquier orden coincidan en 0. La analiticidad garantiza $\overline{f} = Af$. ■

2.3. Una propuesta: Sobre las variedades genéricas.

Sea $E = (E, G, \lambda)$ espacio de Klein con acción fiel $G \times E \to E, (A, x) \to \lambda_A(x) = A.x$. Fijado un punto $o \in E$, supongamos G_o (grupo de isotropía de o) compacto y conexo. Una escama $\gamma \in \mathcal{G}_p^\ell(E)$, se dice que es genérica, si

- Su grupo de isotropía G_γ en la acción natural de G en $\mathcal{G}_p^\ell(E)$ es un grupo discreto (o equivalentemente su álgebra de Lie $\mathfrak{g}_\gamma = \{0\}$).
- Para todo $f : S \to E$ p-variedad con $g_{s_0}^\ell f = \gamma$, la variedad $f : S_0 \to E$ es de tipo constante para algún entorno S_0 de s_0.

Una p-variedad $f : S \to E$ se dice genérica en $s \in S$ existe ℓ tal que $g_s^\ell f$ es genérica y $g^\ell f : S \to \mathcal{G}_p^\ell(E)$ es transversal a la órbita $G.g_s^\ell f$. Es decir si $\gamma = g_s^\ell f$, es $im\left(d_s g^\ell f\right) \cap T_\gamma(G.\gamma) = \{0\}$. Se dice que f es generica si lo es en cada $s \in S$

Para cada ℓ y p enteros con $\ell \geq 0$, $1 \leq p < m = \dim E$, sea $\mathcal{D}_p^\ell(E)$ el conjunto de escamas genéricas de orden ℓ.

En relación con el problema de clasificación geométrica de p-variedades $f : S \to E$ (conexas) se pide dicutir las afirmaciones que siguen.

1. Si $g_{s_0}^\ell f = \gamma$ es genérica para cierta $f : S \to E$ p-variedad entonces $g_{s_0}^{\ell+1} f$ tambien lo es. Además si f es generica en s_0, lo es en un entorno de s_0. El concepto de variedad y escama genérica es geométrico.

2. Existe un único entero q con $\mathcal{D}_p^\ell(E) = \varnothing$ para todo ℓ con $1 \leq \ell < q$, pero $\mathcal{D}_p^q(E)$ es abierto y denso en $\mathcal{G}_p^q(E)$.

   En particular una variedad $f : S \to E$ es genérica si y solo si $g_s^q f \in \mathcal{D}_p^q(E)$ y $g^q f$ es transversal a $G.g_s^q f$.para todo s.

3. Sea $\mathcal{G}^q$ una componente conexa de $\mathcal{D}_p^q(E)$, entonces la familia

   $$\mathcal{F} = \left\{ f : S \to E, \begin{array}{l} p\text{-variedad} \\ \text{conexa} \end{array} / g_s^q f \in \mathcal{G}^q, \forall s \in S \right\}$$

   es una familia admisible de p-variedades con el mismo tipo de isotropía digamos $([G_\ell])_{1 \leq \ell}$ con G_q discreto y

   $$G_0 \supset G_1 \supset \ldots \supset G_q \supseteq G_{q+1}..$$

   Se denomina a $\mathcal{F}$ *familia de Frenet.* A la familia $\mathcal{F}_\pitchfork = \{f \in \mathcal{F} : f \text{ es genérica}\}$ se denomina *familia genérica de Frenet.*

4. La familia $\mathcal{F}_\pitchfork$ satisface el principio fuerte de Cartan con orden $\rho = q$, si $G_q = G_{q+1}$ y $\rho = q + 1$ en otro caso. Es decir, fijado un $M \in \mathcal{F}$: *Todo difeomorfismo $\phi : M \to \overline{M}$ con G-contacto de orden al menos $\rho + 1$ es congruencia.*

   La familia unión de todas las familias genéricas de Frenet$\mathcal{F}_\pitchfork$, se denomina *familia genérica*, y está formada por todas las $p-$variedades genéricas de E.

   Sería interesante determinar las familias genéricas de Frenet en ejemplos conocidos, tales como curvas en el plano euclideo, o equiafín, o superficies en el espacio euclídeo o equiafín...etc.

5. El grupo G actua sobre el conjunto $\mathcal{R} = \mathcal{G}_p^q(E) - \mathcal{D}_p^q(E)$ de *escamas residuales*, y si H es un subgrupo de isotropía correspondiente a esta acción (es decir $\mathcal{R}_{[H]} = \{\gamma \in \mathcal{R} : G_\gamma \text{ es conjugado con } H\} \neq \varnothing$), entonces $\mathcal{R}_{[H]}$ es una variedad diferenciable, y la familia

$$\mathcal{F} = \left\{ f : S \to E, \begin{array}{l} p\text{-variedad} \\ \text{conexa} \end{array} \Big/ g_s^q f \in \mathcal{R}_{[H]}, \forall s \in S \right\}$$

denominada familia residual, es admisible (ver epígrafe 2.1.2).

2.4. Ejemplos.

2.4.1. Geometría euclidea de superficies.

Considérese el espacio $E = \mathbb{R}^3$ y un subgrupo de Lie G_0 del grupo lineal general $GL(3, \mathbb{R})$. Denotamos por G el al grupo de Lie formado por matrices reales del tipo

$$(a;A) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & A \end{pmatrix}, \; a = \begin{pmatrix} a^1 \\ a^2 \\ a^3 \end{pmatrix} \in E, \; A \in G$$

Visto así, G es un subgrupo cerrado de Lie de $GL(4, \mathbb{R})$, cuya regla de producto es

$$(a;A)(b;B) = (Ab + a; AB)$$
$$(a;A)^{-1} = \left(A^{-1}a; A^{-1}\right)$$

Los elementos x de E, son ternas ordenadas de números, que serán considerados filas o columnas dependiendo del contexto.

El grupo G actua fiel y transitivamente sobre E de la forma

$$(a;A).x = Ax + a, \text{ para } (a;A) \in G, \; x \in E$$

y la matriz $(a;A) \in G$, puede considerarse una transformación afín de E con ecuaciones respecto al sistema de referencia canónico

$$\begin{pmatrix} 1 \\ \overline{x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \end{pmatrix}$$

Si fijamos como punto base $o = (0,0,0) \in E$, podemos interpretar $(a;A) = (a; A_1, A_2, A_3)$

$$A = (A_1, A_2, A_3) \;\; A_i = \begin{pmatrix} a_i^1 \\ a_i^2 \\ a_i^3 \end{pmatrix}$$

como un sistema de referencia (cartesiano), con origen $(a;A).o = a$ En particular la matriz identidad $(o;I)$ es el sistema de referencia canónico.

El grupo de isotropía de o es

$$\{(o;A) : A \in G_0\} = G_0$$

la última igualdad se obtiene al identificar

$$(o;A) = A$$

Acción sobre la Grassmaniana de 2-planos. El álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ de G está formada por matrices tipo

$$\mathfrak{g} = \left\{ (\xi|X) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \xi & X \end{pmatrix} \text{ con } \xi \in \mathbb{R}^3, \; X \in \mathfrak{g}_0 \right\}$$

Siendo $\mathfrak{g}_0$ el álgebra de Lie de G_0, que se identifica con

$$\mathfrak{g}_0 = \{(0|X) : X \in \mathfrak{g}_0\} \subset \mathfrak{g}$$

con complementario

$$\mathfrak{m}_0 = \left\{(\xi|0) : \xi \in \mathbb{R}^3\right\}$$

que es invariante por la acción adjunta de G_0 en $\mathfrak{g}$:

$$Ad_{(o,A)}\left(\xi|X\right) = (o,A)\left(\xi|X\right)(o,A)^{-1} = \left(A\xi|AXA^{-1}\right)$$

Si $x \in E$, y $\xi \in \mathbb{R}^3$ denotamos $\xi_x = (x,\xi) \in T_xE$ al vector ξ *apoyado* en x, de manera que

$$T_xE = \left\{\xi_x : \xi \in \mathbb{R}^3\right\}$$

Se identifica $\mathfrak{m}_0 = T_oE = \mathbb{R}^3$, cuando escribimos

$$(\xi|0) = \xi_o = \xi$$

y se identifica por tanto también $\mathcal{G}_2^1(E,o) = \mathbb{G}_2(T_oE) = \mathbb{G}_2(\mathfrak{m}_0) = \mathbb{G}_{2,3}$.

La acción de G_o sobre T_oE es la natural dada por la multiplicación matricial

$$G_0 \times T_oE \to T_oE,\ (A,\xi) \to A\xi$$

y en general la acción $G \times TE \to TE$ viene descrita por

$$(a;A).\xi_x = (A\xi)_{Ax+a}$$

La acción de G_0 sobre $\mathcal{G}_2^1(E,o)$ está descrita por

$$A.[\xi,\eta] = [A\xi, A\eta] = [A(\xi,\eta)]$$

Nótese que en general la acción de G sobre $\mathcal{G}_2^1(E)$ viene descrita por

$$(a;A)[\xi,\eta]_x = [A(\xi,\eta)]_{Ax+a}$$

En el caso $G_0 = SO(3)$ tenemos la geometría afín euclidea, y la acción de $SO(3)$ sobre $\mathcal{G}_2^1(E,o)$ es transitiva

El plano

$$o^1 = [I_1, I_2] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

nos sirve por tanto como referencial de orden 1.

Acción euclidea sobre las escamas de segundo orden. Tal y como se vió en el epígrafe 2.4.1, la acción de

$$SO(3) = G_0 = \{A_o = (o;A) : A \in SO(3)\} \subset G$$

sobre $\mathbb{G}_{2,3} \simeq \mathbb{G}_2(\mathfrak{m}_0) \simeq \mathbb{G}_2(T_oE) = \mathcal{G}_2^1(E,o)$ es la natural,

$$A.[X_1,X_2] = [AX_1, AX_2],\ A \in SO(3),\ \ [X_1,X_2] \in \mathbb{G}_{2,3}$$

y resulta ser transitiva. Se había fijado $w^1 = o^1 = [I_1, I_2]$ como origen, y el grupo de isotropía de o^1 resulta ser

$$O(2) = G_1 = \left\{A_1 = \left(o, \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & \det A \end{pmatrix}\right) : A \in O(2)\right\} \tag{25}$$

así una referencia $\mathbf{U}(s) = (f(s), U(s))$ de orden 1 en la p-variedad $f : S \to E$ debe verificar $\mathbf{U}(s).[I_1,I_2] = f_*T_sS$, que equivale a que $U(s) = (U_1(s), U_2(s))$, genere f_*T_sS.

Desde el punto de vista de los fibrados de contacto esto se ve así:

Para cada $l = (l_1, l_2) \in \mathbb{R}^2$ se considera la parametrización $\widetilde{\zeta_l} : \mathbb{R}^2 \to E$ de la gráfica de la función $z = \zeta_l (x, y) = l_1 x + l_2 y$, dada por

$$\widetilde{\zeta_l} (x, y) = (x, y, \zeta_l (x, y))$$

y la aplicación

$$\mathbb{R}^2 \to \mathcal{G}^1 \left(E, o^1\right), \; l \to g_o^2 \widetilde{\zeta_l}$$

define una parametrización local de $\mathcal{G}^1 (E, o)$ que asigna a o^1 coordenadas $(0, 0)$.

En lo que sigue, y para descargar notación, escribimos $\mathcal{G}^k (E)$ en lugar de $\mathcal{G}_2^k (E)$ (suprimimos el subíndice 2 que será en adelante sobre entendido).

Análogamente para cada $q = (q_1, q_2, q_3) \in \mathbb{R}^3$ se considera la parametrización $\widetilde{\zeta_q} : \mathbb{R}^2 \to E$

$$\widetilde{\zeta_q} (x, y) = \left(x, y, \zeta_q (x, y)\right)$$

de la gráfica de la función $z = \zeta_q (x, y) = q_1 x^2 + 2q_2 xy + q_3 y^2$. Identificando

$$q = \begin{pmatrix} q_1 & q_2 \\ q_2 & q_3 \end{pmatrix}$$

queda

$$\zeta_q (x, y) = (x, y)\, q \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Si $\zeta_{l,q} = \zeta_l + \zeta_q$ la aplicación

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^3 & \to & \mathcal{G}^2 (E, o) \\ (l, q) & \to & g_o^2 \widetilde{\zeta_{l,q}} \end{array}$$

define una parametrización local de $\mathcal{G}_2^2 (E, o)$, en un entorno de o^1. En estas coordenadas la proyección $\mathcal{G}_2^2 (E, o) \to \mathcal{G}_2^1 (E, o)$ viene dada por la proyección canónica

$$\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, \; (l, q) \to l$$

Por tanto, la aplicación

$$\mathbb{R}^3 \to \mathcal{G}^2 \left(E, o^1\right), \; q \to g_o^2 \widetilde{\zeta_q}$$

define una parametrización global de $\mathcal{G}^2 \left(E, o^1\right)$.

La acción $G_1 \times \mathcal{G}^2 \left(E, o^1\right) \to \mathcal{G}^2 \left(E, o^1\right)$, puede entonces describirse así:

Dada la escama $g_o^2 \widetilde{\zeta_{\overline{q}}}$ de coordenadas $\overline{q}$, y $A \in O(2)$, para calcular $A^{-1}.g_o^2 \widetilde{\zeta_{\overline{q}}}$, hacemos sustitución formal en la igualdad $\overline{z} = \zeta_{\overline{q}} (\overline{x}, \overline{y})$ de $\overline{x}, \overline{y}, \overline{z}$ por

$$\begin{pmatrix} \overline{x} \\ \overline{y} \\ \overline{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & \det A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

de forma que si q son las coordenadas de $A^{-1}.g_o^2 \widetilde{\zeta_{\overline{q}}}$ se tiene: $q = (\det A)\, A^t \overline{q} A$. Por tanto

$$A.g_o^2 \widetilde{\zeta_q} = g_o^2 \widetilde{\zeta_{\overline{q}}} \text{ con } \overline{q} = (\det A)\, A q A^t = \pm A q A^t$$

Acción inducida de O(2) en $\mathbb{R}^3$. En lo que sigue identificamos $O(2)$ con $G_1 \subset G = SO(3)$, identificando $A \in O(2)$ con $A_1 \in SO(3)$ tal y como se indica en (25)

Formalmente por tanto debemos analizar la acción

$$O(2) \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ A.q = (\det A)\, AqA^t \text{ con } q = \begin{pmatrix} q_1 & q_2 \\ q_2 & q_3 \end{pmatrix} \tag{26}$$

bien conocida del álgebral lineal. Se sabe que fijado q, es posible encontrar $A \in SO(2)$ de forma que

$$A.q = r \text{ con } r = \begin{pmatrix} r_1 & 0 \\ 0 & r_2 \end{pmatrix}$$

Es facil ver que al hacer actuar diversas matrices de $O(2)$ sobre r, se obtienen:

$$\begin{pmatrix} r_1 & 0 \\ 0 & r_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -r_1 & 0 \\ 0 & -r_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} r_2 & 0 \\ 0 & r_1 \end{pmatrix}$$

por lo que todas están en la misma órbita.

Familias admisibles. Una sección de la acción (26) viene dada por

$$W^{2a} = \left\{ \begin{pmatrix} r_1 & 0 \\ 0 & r_2 \end{pmatrix} : |r_2| < r_1 \right\}$$

que se corresponde para $\zeta_{(r_1,r_2)} = r_1 x^2 + r_2 y^2$

$$\mathcal{O}^{2a} = \left\{ g_o^2 \left(\widetilde{\zeta}_{(r_1,r_2)} \right) : |r_2| < r_1 \right\}$$

Cada elemento de W^{2a}, tiene el mismo grupo de isotropía:

$$H^{2a} = \left\{ \pm \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Resulta ahora que la familia $G.\mathcal{O}^{2a} = \mathcal{D}^2$ que es un abierto conexo y denso de $\mathcal{G}^2(E)$ y es el conjunto de escamas genéricas elementales. La familia de superficies de Frenet asociada $\mathcal{D}^2$ está formada por las superficies donde no se anula la curvatura media y sin puntos umbílicos.

Las escamas residuales son $\mathcal{R}^2 = \mathcal{G}^2(E) - \mathcal{D}^2(E)$, y G actua sobre ellas según la acción (26) originando las siguientes secciones:

- $$W^{2b} = \left\{ \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & -r \end{pmatrix} : 0 < r \right\}$$

  que se corresponde con

  $$\mathcal{O}^{2b} = \left\{ g_o^2 \left(\widetilde{\zeta}_{(r,-r)} \right) : 0 < r \right\}$$

  Cada elemento de W^{2b}, tiene el mismo grupo de isotropía:

  $$H^{2b} = \left\{ \pm \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \pm \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\} \tag{27}$$

  y la familia $G.\mathcal{O}^{2b} \subset \mathcal{R}^2$, define la familia residual formada por las superficies minimales cuya curvatura de Gauss $K = -r^2$ es no nula (y por supuesto negativa)

- $$W^{2c} = \left\{ \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & r \end{pmatrix} : 0 < r \right\}$$

  que se corresponde con

  $$\mathcal{O}^{2b} = \left\{ g_o^2 \left(\widetilde{\zeta}_{(r,r)} \right) : 0 < r \right\}$$

  Cada elemento de W^{2c}, tiene el mismo grupo de isotropía:

  $$H^{2c} = SO\,(2)$$

  y la familia $G.\mathcal{O}^{2c} \subset \mathcal{R}^2$, define la familia residual formada por las superficies con puntos umbílicos cuya curvatura de Gauss $K = r^2$ es no nula (y por supuesto positiva). Son las esferas.

- La última sección de la acción (26) es

  $$W^{2d} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

  que se corresponde con

  $$\mathcal{O}^{2d} = \left\{ g_o^2 \left(\widetilde{\zeta}_{(0,0)} \right) \right\}$$

  con grupo de isotropía:

  $$H^{2d} = O\,(2)$$

  y la familia $G.\mathcal{O}^{2d} \subset \mathcal{R}^2$, define la familia residual formada por las superficies con todos sus puntos planos. Son los planos.

2.4.2. Curvas en el plano euclideo.

El grupo $G = \mathbb{R}^2 \rtimes SO\,(2)$ actua fiel y transitivamente sobre $E = \mathbb{R}^2$ de la forma

$$(a; A)\,.x = Ax + a, \text{ para } (a; A) \in G,\ x \in E$$

y la matriz $(a; A) \in G$, puede considerarse una transformación afín de E con ecuaciones respecto al sistema de referencia canónico

$$\begin{pmatrix} 1 \\ \overline{x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \end{pmatrix}$$

Si fijamos como punto base $o = (0,0) \in E$, podemos interpretar $(a; A) = (a; A_1, A_2)$

$$A = (A_1, A_2) \;\; A_i = \begin{pmatrix} a_i^1 \\ a_i^2 \end{pmatrix}$$

como un sistema de referencia (cartesiano), con origen $(a; A)\,.o = a$ En particular la matriz identidad $(o; I)$ es el sistema de referencia canónico.

El grupo de isotropía de o

$$G_0 = \{(o; A) : A \in SO\,(2)\} = SO\,(2)$$

la última igualdad se obtiene al identificar

$$(o; A) = A$$

Acción sobre la Grassmaniana de 1-lineas. Si $x \in E$, y $\xi \in \mathbb{R}^2$ denotamos $\xi_x = (x, \xi) \in T_x E$ al vector ξ *apoyado* en x, de manera que

$$T_x E = \left\{ \xi_x : \xi \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

y se identifica por tanto también $\mathcal{G}_1^1 (E, o) = \mathbb{G}_1 (T_o E) = \mathbb{G}_{1,2}$.

La acción de G_o sobre $T_o E$ es la natural dada por la multiplicación matricial

$$G_0 \times T_o E \to T_o E, \ (A, \xi) \to A\xi$$

y en general la acción $G \times TE \to TE$ viene descrita por

$$(a; A) . \xi_x = (A\xi)_{Ax+a}$$

La acción de G_0 sobre $\mathcal{G}_1^1 (E, o)$ está descrita por

$$A. [\xi] = [A\xi] = [A (\xi)]$$

y es transitiva. La recta

$$o^1 = [I_1] = \left[\begin{array}{c} 1 \\ 0 \end{array} \right]$$

nos sirve por tanto como referencial de orden 1.y el grupo de isotropía de o^1 resulta ser $G_1 = \{I, -I\}$ con

$$I = \left(o, \left(\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{array} \right) \right)$$

así una referencia $\mathbf{U} (s) = (f (s), U (s)) : S \to G$ de orden 1 en la curva $f : S \to E$ debe verificar $\mathbf{U} (s) . [I_1] = f_* T_s S$, que equivale a que $U (s)$, sea un vector tangente a la curva, es decir $U (s)$ es proporcional a $f' (s)$.

La acción de G_1 sobre $\mathcal{G}^2 \left(E, o^1\right)$ se ve así:

Para cada $q \in \mathbb{R}$ se considera la parametrización $\widetilde{\zeta_q} : \mathbb{R}^2 \to E$

$$\widetilde{\zeta_q} (x) = \left(x, \zeta_q (x)\right)$$

de la gráfica de la función $y = \zeta_q (x) = qx^2$. La aplicación

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathcal{G}_1^2 \left(E, o^1\right) \\ q & \to & g_o^2 \widetilde{\zeta_q} \end{array} \tag{28}$$

define una parametrización global de $\mathcal{G}^2 \left(E, o^1\right)$ en un entorno de o^1.

La acción

$$G_1 \times \mathcal{G}^2 \left(E, o^1\right) \to \mathcal{G}^2 \left(E, o^1\right) \tag{29}$$

puede entonces describirse así:

Dada la escama $g_o^2 \widetilde{\zeta_{\overline{q}}}$ de coordenadas $\overline{q}$, y $A = -I \in O(2)$, para calcular $A^{-1} . g_o^2 \widetilde{\zeta_{\overline{q}}}$, hacemos sustitución formal en la igualdad $\overline{y} = \zeta_{\overline{q}} (\overline{x}) = \overline{q x}^2$ de $\overline{x}, \overline{y}$ por

$$\left(\begin{array}{c} \overline{x} \\ \overline{y} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{cc} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} x \\ y \end{array} \right)$$

se obtiene $-y = \overline{q} x^2$ de forma que si q son las coordenadas de $A^{-1} . g_o^2 \widetilde{\zeta_{\overline{q}}}$ se tiene: $q = -\overline{q}$. Por tanto

$$A . g_o^2 \widetilde{\zeta_q} = g_o^2 \widetilde{\zeta_{-q}}$$

Así en las coordenadas (28) la acción 29 se reduce a la acción natural $\{I, -I\} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Familias admisibles. Una sección de esta acción viene dada por

$$W^{2a} = \{r : r > 0\}$$

que se corresponde para $\zeta_r(x) = rx^2$

$$\mathcal{O}^{2a} = \left\{ g_o^2 \left(\widetilde{\zeta}_r \right) : r > 0 \right\}$$

Cada elemento de W^{2a}, tiene el mismo grupo de isotropía:

$$H^{2a} = \{I\}$$

$\mathcal{D}^2 = G.\mathcal{O}^{2a}$ constituye el conjunto de escamas genéricas que es un abierto conexo de $\mathcal{G}^2(E)$. La familia de Frenet asociada a $\mathcal{D}^2$ está formada por todas las curvas del plano con *curvatura* (tradicional) no nula.

Nota 26 *De hecho si $f : S \to E$ es una curva de Frenet, su curvatura $r(s)$ viene dada por la fórmula*

$$r(s) = \left| \frac{\det(f', f'')}{2|f'|^3} \right| = \frac{1}{2} |\kappa(s)|$$

Lamentablemente según este esquema dejan de ser curvas de Frenet, las que son regulares pero tienen algún punto de inflexión ($r(s) = 0$). La teoría clásica de curvas planas trata de curvas regulares orientadas (i.e. se ha fijado un sentido de recorrido) y su curvatura κ cambia de signo en los puntos de inflexión. El signo de la curvatura en cada punto depende de la orientación elegida.

Otra sección es $W^{2b} = \{0\}$ que se corresponde con

$$\mathcal{O}^{2b} = \left\{ g_o^2 \left(\widetilde{\zeta}_0 \right) \right\}$$

Cada elemento de W^{2b}, tiene el mismo grupo de isotropía:

$$H^{2b} = \{I, -I\}$$

y la familia $G.\mathcal{O}^{2b}$ es la familia de escamas residuales de orden 2. Es la familia de las rectas, que son todas congruentes.

Nota 27 *Si hubieramos trabajado con la geometría dada por el grupo $G = \mathbb{R}^2 \rtimes O(2)$, habríamos detectado para las curvas de Frenet: $G_0 = O(2)$, $G_1 = \{\sigma_x, \sigma_y, I, -I\}$, $G_2 = \{\sigma_y, I\}$, $G_3 = \{I\}$ donde σ_x, σ_y son las simetrías respecto a los ejes.*

Ejercicio 28 *Demostrar que la aplicación σ_y induce un difeomorfismo la curvas $y = 1/x^2$, ($x > 0$) y la curva $y = 1/x^2$, ($x < 0$) con $\left(\mathbb{R}^2 \rtimes SO(2)\right)$-contacto 2 (pero no 3) y sin embargo no son $\left(\mathbb{R}^2 \rtimes SO(2)\right)$-congruentes. Pero obviamente son $\left(\mathbb{R}^2 \rtimes O(2)\right)$-congruentes. ¿Podrías indicar un fenómeno análogo en esta última geometría?.*

3. Apéndices.

3.1. Elementos infinitesimales de contacto

Se dice que el orden de contacto en un punto x entre dos variedades M y $\overline{M}$ de la misma dimensión $p \geq 1$, sumergidas en una variedad ambiente.E de dimensión $m > p$ es al menos 1, si el punto x está en $M \cap \overline{M}$ y además los espacios tangentes $T_x M$ y $T_x\ \overline{M}$ coinciden.

Hay sin embargo en la literatura diferentes puntos de vista, a la hora de establecer el concepto de *contacto de orden superior*, dependiendo del uso que se quiera dar a tal definición.

Una posibilidad consiste en definir el contacto en x de orden al menos $r \geq 1$ entre M, y $\overline{M}$, por la condición de que exista una carta $(x_1 \ldots x_m)$ de E en torno a x, y parametrizaciones locales $\varphi, \overline{\varphi} : \mathbb{R}^p \to E$ de M y $\overline{M}$ respectivamente con $\varphi(0) = \overline{\varphi}(0) = x$, de forma que todas las derivadas parciales de orden menor o igual a r de $x_i \circ \varphi$ y $x_i \circ \overline{\varphi}$ coincidan en el origen.

Otra posibilidad, si queremos evitar las coordenadas, es considerar las inmersiones naturales de los fibrados tangentes TM y $T\overline{M}$ como subvariedades p-dimensionales en el fibrado Grassmaniano $\mathcal{G}_p(E)$. Se definine entonces el contacto entre M, y $\overline{M}$ de orden al menos 2 en el punto x de E, como un contacto de orden al menos 1 de TM y $T\overline{M}$ en el *punto* $T_x M = T_x\ \overline{M}$ de $\mathcal{G}_p(E)$.

El proceso se continua inductivamente para definir ordenes mayores de contacto. Esta construcción que puede ser útil en algunas aplicaciones, tiene el defecto de aumentar exponencialmente las dimensiones de los sucesivos espacios ambiente $\mathcal{G}_p(E)$, $\mathcal{G}_p(\mathcal{G}_p(E))$, $\mathcal{G}_p(\mathcal{G}_p(\mathcal{G}_p(E)))$ ... etc. (para más detalles ver [Jensen] págs 1-4).

En lo que sigue, E es una variedad diferenciable de dimensión $m > 1$.

Se presentan a continuación los elementos infinitesimales de orden superior, que intervienen en el desarrollo.

3.1.1. Vectores tangentes de orden superior.

Dos curvas $\alpha = \alpha(t)$, $\beta = \beta(t)$ de la variedad diferenciable E, definen el mismo $r-$jet en $t = 0$, si $\alpha(0) = \beta(0) = a$, y en algún sistema de coordenadas locales $(x_1, \ldots, x_m)$ en torno a a, se verifica para todo k con $1 \leq k \leq r$:

$$\left.\frac{d^k(x_i \circ \alpha)}{dt^k}\right|_{t=0} = \left.\frac{d^k(x_i \circ \beta)}{dt^k}\right|_{t=0}$$

La propiedad, no depende del sistema local de coordenadas utilizado. La relación anterior es de equivalencia, y denotamos por

$$\left.\frac{d^r \alpha(t)}{dt^r}\right|_{t=0} = \alpha^{(r)}(0) = j_0^r \alpha$$

a la clase de equivalencia definida por la curva α, y se denomina vector tangente de orden r en a. Se denota por $T_a^r E$ al conjunto de todos ellos. La unión $T^r E = J_1^r(E)$ constituye el fibrado tangente de orden r sobre E. El vector tangente de orden r definido por α en $t = t_0$ es:

$$j_{t_0}^r \alpha = \alpha^{(r)}(t_0) = \left.\frac{d^r \alpha(t + t_0)}{dt^r}\right|_{t=0} \in T_{\alpha(t_0)}^r E$$

$T^r E$ es una variedad diferenciable. De hecho, a partir del sistema de coordenada locales $(x_1, \ldots, x_m) = (x_i)$ se puede construir un sistema de coordenadas para $T^r E$, $(x_i, x_i^1, \ldots x_i^r)$, en donde se entiende que

$$x_i^k \left(\alpha^{(r)}(0)\right) = \left.\frac{d^k (x_i \circ \alpha)}{dt^k}\right|_{t=0}$$

Además el operador T^r es funtorial, en el siguiente sentido:

Si $\phi : E_1 \to E_2$ es una aplicación diferenciable queda inducida $\phi_* = \phi^{(r)} : T^r E_1 \to T^r E_2$ por la condición:

$$\phi^{(r)} \left(\alpha^{(r)}(0)\right) = (\phi \circ \alpha)^{(r)} (0)$$

Además $(\psi \circ \phi)^{(r)} = \phi^{(r)} \circ \psi^{(r)}$.para ψ, ϕ aplicaciones diferenciables entre variedades.

Se construyen así las proyecciones naturales:

$$T^{r+1} E \stackrel{\pi^{(r)}}{\to} T^r E \to \cdots \to T^1 E = TE \stackrel{\pi}{\to} E$$

3.1.2. Fibrados de Jets

Si $f, \overline{f} : S \to E$ son aplicaciones diferenciales entre variedades, diremos que f y $\overline{f}$ definen el mismo jet de orden r en $s \in S$ y escribimos $j_s^r f = j_s^r \overline{f}$, si para alguna parametrización local $(u_1, \ldots u_p)$ de S en torno a s y alguna parametrización local $(x_1 \ldots x_m)$ en torno a $f(s)$ en E se tiene que para todo $j = 1, \ldots m$, todo $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$ con $|\alpha| = \sum \alpha_i \leq r$:

$$\left.\frac{\partial^{|\alpha|} (x_j \circ f)(u_1, \ldots u_p)}{\partial u_{\alpha_1} \ldots \partial u_{\alpha_k}}\right|_{u(s)} = \left.\frac{\partial^{|\alpha|} \left(x_j \circ \overline{f}\right)(u_1, \ldots u_p)}{\partial u_{\alpha_1} \ldots \partial u_{\alpha_k}}\right|_{u(s)}$$

Esta propiedad es independiente de las parametrizaciones locales tomadas.

En particular, tomando $S = \mathbb{R}^p$, si $\mathcal{C}_0^\infty (\mathbb{R}^p, E)$ denota al conjunto de las funciones $\varphi : \mathbb{R}^p \to E$ diferenciables en un entorno del origen, podemos construir el fibrado de Jets

$$J_p^r (E) = \{j_0^r \varphi : \varphi \in \mathcal{C}_0^\infty (\mathbb{R}^p, E)\}$$

sobre E, con proyección $J_p^r (E) \to E$, $j_0^r \varphi \to \varphi(0)$. Se denota $J_p^r (E, a)$ a la fibra sobre $a \in E$. Nótese la identidad $J_1^r (E, a) = T_a^r E$

3.1.3. Variedades sumergidas

Una variedad p-dimensional (sumergida) en E viene definida por una inmersión[1] $f : S \to E$ donde S es una variedad diferenciable (abstracta) p-dimensional. Dos inmersiones $f_1 : S_1 \to E$, $f_2 : S_2 \to E$ se dice definen la misma variedad M (de E), si existe un difeomorfismo $\phi : S_1 \to S_2$ tal que $f_1 = f_2 \circ \phi$. En este caso, denotamos $M = (f_1 : S_1) = (f_2 : S_2)$. A f_1 y f_2 se denominan representaciones paramétricas (o parametrizaciones) de M. Si $\lambda : E \to E$ es un difeomorfismo, entonces $\lambda(M) = (\lambda \circ f : S)$.

Si la variedad M admite una parametrización $f : S \to E$ que es incrustamiento[2], entonces todas sus parametrizaciones lo son, y se dice que M es una variedad (sumergida) *regular* en E. En este caso M puede identificarse con la imagen $f(S) = M$ que admite una única estructura de variedad diferenciable (abstracta) que hace a $f : S \to M$ difeomorfismo. La inclusión $M \hookrightarrow E$ resulta

[1] Es decir, aplicación diferenciable con diferencial inyectiva en cada punto

[2] Es decir, inmersión inyectiva que induce homeomorfismo sobre su imagen

ser entonces la representación paramétrica distinguida. Además la propiedad de ser M variedad regular de E, depende solo del conjunto $M \subset E$

Por otra parte, si $f : S \to E$ es una variedad de E, para cada $s_0 \in S$, existe un entorno S_0 de s_0 en S tal que $(f : S_0) = M_0$ es variedad regular de E. Como estamos interesados sólo en cuestiones de tipo local, supondremos en adelante que todas las variedades son regulares (o equivalentemente que trabajamos en el entorno regular de un punto). En coordenadas locales locales se tiene el siguiente resultado:

Proposición 3.1.3

Si $f : S \to E$ es una variedad p-dimensional (sumergida) en E, entonces para cada punto $s \in S$, existen un sistema de coordenadas $x = (\widetilde{x}, \widehat{x})$ de E en torno a $a = f(s)$ con $\widetilde{x} = (x_1, \ldots, x_p)$, $\widehat{x} = (x_{p+1}, \ldots, x_m)$ y $x(a) = 0$, y otro $u = (u_1, \ldots, u_p)$ en torno a s con $u(s) = \widetilde{0}$, de forma que las ecuaciones de f son

$$f : \left\{ \begin{array}{l} \widetilde{x} = u \\ \widehat{x} = \widehat{0} \end{array} \right.$$

3.1.4. Orden de contacto

Proponemos una definición de que el orden de contacto sea (al menos) r en un punto, para dos variedades sumergidas en un mismo espacio ambiente. Se trata de imponer la propiedad de que los espacios tangentes de orden r de ambas variedades coincidan en el punto.

Demostramos que esta definición coincide con otras más habituales, en donde intervienen los jets de orden r de ciertas parametrizaciones de las variedades. Pero llamamos la atención de que el concepto de orden de contacto, es en todo caso, un concepto relativo a las variedades *desparametrizadas*. Concretamente:

Definición 3.1.4

Dado un punto $a = f(s) \in M$, el conjunto $T_a^r M = f^{(r)}(T_s^r S) \subset T_a^r E$ es independiente del f, S tales que $M = (f : S)$. Las variedades M, $\overline{M} = \left(\overline{f} : \overline{S}\right)$ se dice que tienen un contacto de orden al menos r $(r \geq 0)$ en el punto a, si $a = f(s) = \overline{f}(\overline{s}) \in M \cap \overline{M}$ y $T_a^r M = T_a^r \overline{M}$, es decir $f^{(r)}(T_s^r S) = \overline{f}^{(r)}\left(T_{\overline{s}}^r \overline{S}\right)$.Para indicar esta circunstancia escribimos $g_s^r f = g_{\overline{s}}^r \overline{f}$.

Supuesto $m - p = c > 0$, sea $\zeta \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^c)$ el grafo de ζ es

$$M(\zeta) = \{(u, \zeta(u)) : u \in \mathbb{R}^p\}$$

define en torno a 0 una p-variedad sumergida en $\mathbb{R}^m$. Descomponiendo:

$$\mathbb{R}^m = \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^c = \left\{ x = (\widetilde{x}, \widehat{x}) \Big/ \begin{array}{c} \widetilde{x} = (x_1, \ldots, x_p) \in \mathbb{R}^p \\ \widehat{x} = (x_{p+1}, \ldots, x_m) \in \mathbb{R}^c \end{array} \right\} \tag{30}$$

Observación 3.1.4.1

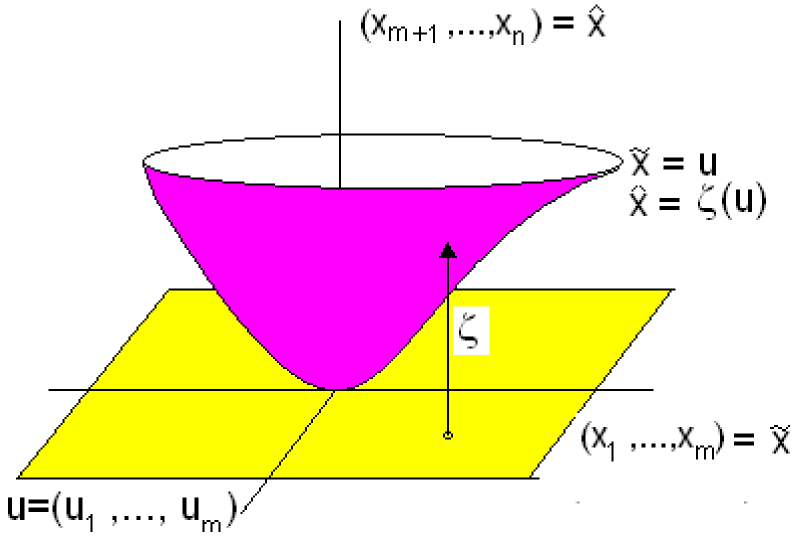
De forma más general, debemos admitir que el operador "$\widetilde{\ }$"puede obtenerse seleccionando p posiciones de las coordenadas (no necesariamente consecutivas) y el "$\widehat{\ }$"las restantes. Sin embargo, por razones de simplicidad siempre exhibiremos la descomposición dada en (30)

Se tiene el siguiente resultado

Proposición 3.1.4.1

Sea $\zeta \in \mathcal{C}_{\widetilde{0}}^\infty(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^c)$. Entonces, el orden de contacto en el origen de $M(\zeta)$ y $\mathbb{R}^p \times \left\{\widehat{0}\right\}$ es al menos r $(r \geq 0)$ si y solo si $j_0^r \zeta = 0$. Es decir:

$$T_0^r M(\zeta) = T_0^r \left(\mathbb{R}^p \times \left\{\widehat{0}\right\}\right) \Leftrightarrow j_0^r \zeta = 0$$



Demostración:
Obviamente la condición $T_0 M(\zeta) = T_0 \left(\mathbb{R}^p \times \left\{\widehat{0}\right\}\right)$ equivale a decir

$$\zeta\left(\widetilde{0}\right) = \widehat{0},\ \left.\frac{\partial \zeta_i}{\partial u_j}\right|_{u=0} = 0$$

En efecto, supongamos $T_0^2 M(\zeta) = T_0^2\left(\mathbb{R}^p \times \left\{\widehat{0}\right\}\right)$. Una curva en $\mathbb{R}^p \times \left\{\widehat{0}\right\}$ por el origen es de la forma

$$\left\{\begin{array}{l} \widetilde{x} = u(t) \\ \widehat{x} = \widehat{0} \end{array}\right. \quad u(0) = \widetilde{0}$$

y por tanto

$$T_0^2\left(\mathbb{R}^p \times \left\{\widehat{0}\right\}\right) = \left\{\left(0, x^{(1)}, x^{(2)}\right) : \widehat{x^1} = \widehat{x^2} = \widehat{0}\right\}$$

Una curva arbitraria por el origen contenida en $M(\zeta)$ tiene por ecuaciones

$$\left\{\begin{array}{l} \widetilde{x} = u(t) \\ \widehat{x} = \zeta(u(t)) \end{array}\right. \quad u(0) = \widetilde{0}$$

y debemos imponer $\widehat{x}'(0) = \widehat{x}''(0) = \widehat{0}$. Se tiene para $i = 1, \dots, c$

$$0 = \left.\frac{dx_{p+i}}{dt}\right|_{t=0} = \sum_{j=1}^{p} \left.\frac{\partial \zeta_i}{\partial u_j}\right|_{u=0} \left.\frac{du_j}{dt}\right|_{t=0} = \sum_{j=1}^{p} \left.\frac{\partial \zeta_i}{\partial u_j}\right|_{u=0} x_j^1$$

donde $x_j^{(1)} = u_j'(0)$ son arbitrarios. Por tanto (como ya sabíamos)

$$\left.\frac{\partial \zeta_i}{\partial u_j}\right|_{u=0} = 0,\ i = 1, \dots, c,\ j = 1, \dots, p$$

Por otra parte usando nuevamente la regla de la cadena y suprimiendo los sumandos nulos obtenidos al particularizar en $t = 0$ se tiene

$$0 = \left.\frac{d^2 x_{i+c}}{dt^2}\right|_{t=0} = \sum_{j,h=1}^{p} \left.\frac{\partial^2 \zeta_i}{\partial u_j \partial u_k}\right|_{u=0} x_j^1 x_k^1$$

y como antes se concluye

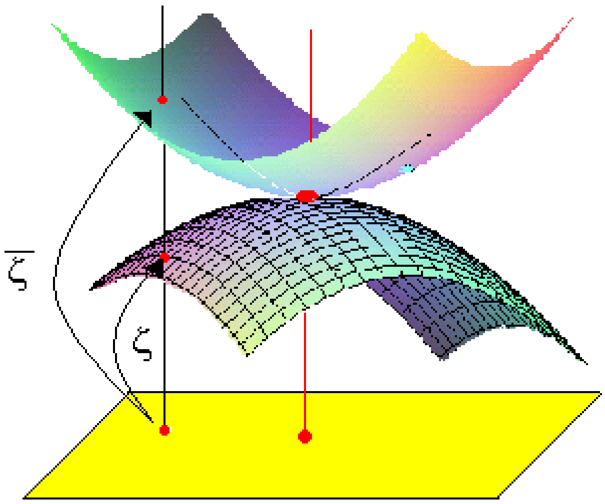
$$\left.\frac{\partial^2 \zeta_i}{\partial u_j \partial u_k}\right|_{u=0} = 0, \ , \ i = 1, \ldots, c, \quad j, k = 1, \ldots, p$$

El razonamiento puede concluirse inductivamente.

Corolario 3.1.4.1

Sean $\zeta, \overline{\zeta} \in \mathcal{C}^{\infty}_{\widetilde{0}}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^c)$. Entonces, el orden de contacto en el origen $\widetilde{0}$ de $M(\zeta)$ y $M(\overline{\zeta})$ es al menos r $(r \geq 0)$ si y solo si $j_0^r \zeta = j_0^r \overline{\zeta}$. Es decir:

$$T_0^r M(\zeta) = T_0^r M(\overline{\zeta}) \Leftrightarrow j_0^r \zeta = j_0^r \overline{\zeta}$$



Proposición 3.1.4.2

Sean $f : S \to E$, $\overline{f} : \overline{S} \to E$, p-variedades,con $f(s) = \overline{f}(\overline{s})$, existe entonces un difeomorfismo $\phi : S \to \overline{S}$ en torno a s, con $\phi(s) = \overline{s}$ verificando la siguiente propiedad

$$f^{(r)} T_s^r S = \overline{f}^{(r)} T_{\overline{s}}^r \overline{S} \Longleftrightarrow j_s^r f = j_s^r \left(\overline{f} \circ \phi\right)$$

Demostración:

Usando para f la proposición 3.1.3, podemos tomar una carta $x = (\widetilde{x}, \widehat{x})$ de E en torno a $a = f(s) = \overline{f}(\overline{s})$ con $\widetilde{x} = (x_1, \ldots, x_p)$, $\widehat{x} = (x_{p+1}, \ldots, x_m)$ y otra carta $u = (u_1, \ldots, u_p)$ en torno a s con $x(a) = 0$, $u(s) = \widetilde{0}$, de forma que las ecuaciones de f son

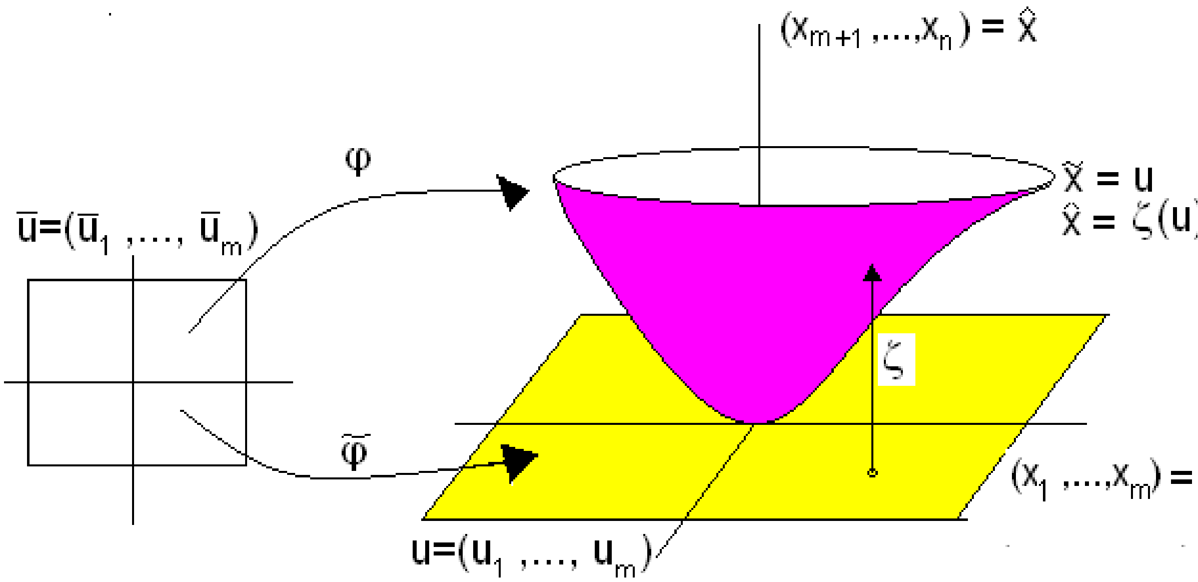
$$f : \begin{cases} \widetilde{x} = u \\ \widehat{x} = \widehat{0} \end{cases}$$

Una carta arbitraria $\overline{u} = (\overline{u}_1, \ldots, \overline{u}_p)$ por $\overline{s}$ proporciona unas ecuaciones de $\overline{f}$ de la forma $x = \varphi(\overline{u})$, y necesariamente

$$\det\left(\frac{\partial(\varphi_1, \ldots \varphi_p)}{\partial(\overline{u}_1, \ldots \overline{u}_p)}\right)_{\overline{u}=0} \neq 0$$

puesto que $f_* T_s S = \overline{f}_* T_{\overline{s}}^r \overline{S}$. Podemos construir el difeomorfismo $\widetilde{\varphi} = (\varphi_1, \ldots \varphi_p)$ en torno al origen que da lugar al difeomorfismo $\phi : S \to \overline{S}$ que respecto a las cartas u y $\overline{u}$ tiene por ecuaciones:

$$u = \widetilde{\varphi}(\overline{u})$$



y las ecuaciones de $\overline{f} \circ \phi : S \to E$ son ahora de la forma:

$$\overline{f} \circ \phi : \varphi \circ \widetilde{\varphi}^{-1} = \begin{cases} \widetilde{x} = u \\ \widehat{x} = \zeta(u) \end{cases}$$

donde $\zeta = (\zeta_1, \ldots, \zeta_c)$, ($c = m - p$ es la codimensión) es una aplicación diferenciable $\mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^c$ en torno al origen, con

$$\zeta\left(\widetilde{0}\right) = \widehat{0}$$

Nótese que $f_* T_s S = \overline{f}_* T_{\overline{s}} \overline{S}$ si y solo si

$$\left.\frac{\partial \zeta_i}{\partial u_j}\right|_{u=0} = 0$$

La demostración se concluye ahora usando la proposición **3.1.4.1**

Definición 3.1.4.

Sean $f : S \to E$, $\overline{f} : \overline{S} \to E$, p-variedades,con $f(s) = \overline{f}(\overline{s})$, al difeomorfismo $\phi : S \to \overline{S}$ en torno a s, con $\phi(s) = \overline{s}$ verificando la propiedad

$$f^{(r)} T_s^r S = \overline{f}^{(r)} T_{\overline{s}}^r \overline{S} \Longleftrightarrow j_s^r f = j_{\overline{s}}^r \left(\overline{f} \circ \phi \right)$$

se dice que está $\left[f(s) = \overline{f}(\overline{s}) \right]$-adaptado.

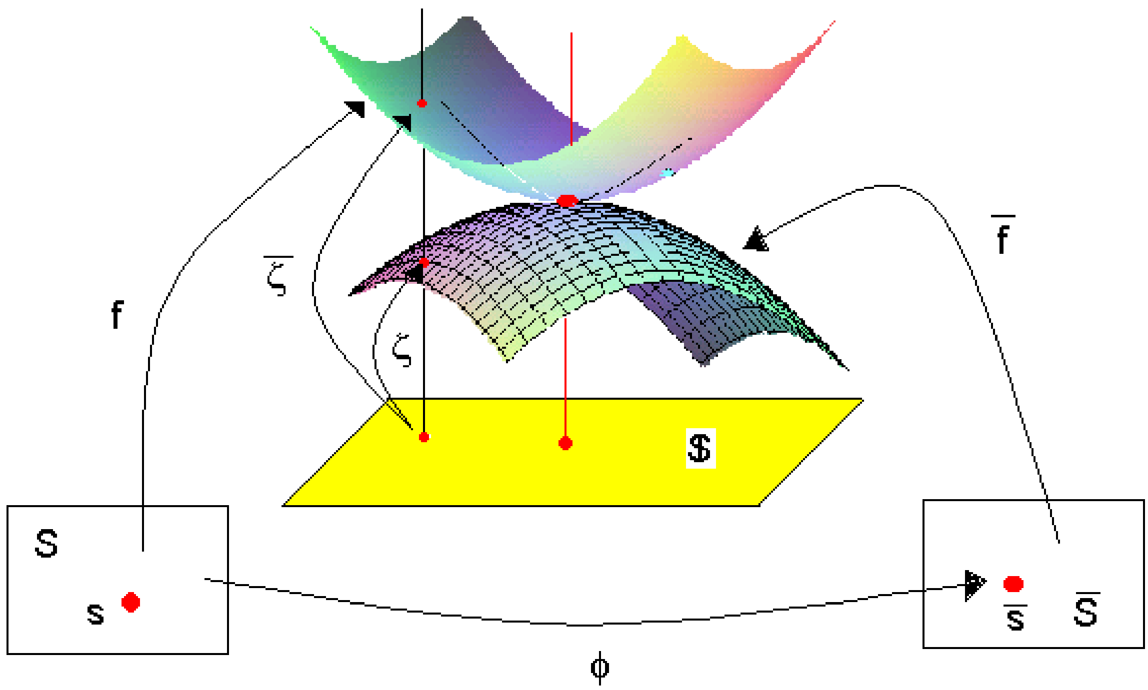
Nótese que por la demostración de la proposición **3.1.4.2** se ve que ϕ es $\left[f(s) = \overline{f}(\overline{s}) \right]$-adaptado si y solo si pueden exhibirse sistemas de coordenadas $x = (x_1, \ldots x_m)$ en $E, u = (u_1, \ldots u_p)$ en S de forma que:

$$f : \left\{ \begin{array}{l} \widetilde{x} = u \\ \widehat{x} = \widehat{0} \end{array} \right. ; \ \overline{f} \circ \phi : \left\{ \begin{array}{l} \widetilde{x} = u \\ \widehat{x} = \zeta(u) \end{array} \right.$$

Corolario 3.1.4.2

Las variedades $M = (f : S) \to E$, $\overline{M} = \left(\overline{f} : \overline{S} \right)$ tienen orden de contacto al menos $r \geq 1$ en un punto $a \in M \cap \overline{M}$ si y solo si existe un entorno $\mathcal{U}$ de a en E coordenado por $(x_{1, \ldots,}, x_m)$, un abierto $\mathbb{S}$ de $\mathbb{R}^p$ y *$\zeta, \overline{\zeta} : \mathbb{S} \to E$ $(i = 1, 2)$ de forma que $M \cap \mathcal{U} = (\zeta : \mathbb{S})$, $\overline{M} \cap \mathcal{U} = \left(\overline{\zeta} : \mathbb{S} \right)$, $\overline{\zeta}(0) = \zeta(0) = a$* y *$j_o^r \zeta = j_o^r \overline{\zeta}$ es decir, para cada $j = 1, \ldots, m$, para todo $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$ con $|\alpha| = \sum \alpha_i \leq r$ se tiene*

$$\left. \frac{\partial^{|\alpha|} (x_j \circ \zeta)}{\partial u_{\alpha_1} \ldots \partial u_{\alpha_k}} \right|_{u=0} = \left. \frac{\partial^{|\alpha|} (x_j \circ \overline{\zeta})}{\partial u_{\alpha_1} \ldots \partial u_{\alpha_k}} \right|_{u=0}$$



3.2. Fibrados de contacto.

Lo que sigue es continuación inmediata del epígrafe 3.1.4, y constituye en nuestra opinión una herramienta imperscindible para manejar la geometría local de variedades sumergidas en un espacio homogéneo, e intuir un procedimiento genérico para abordar el problema de la clasificación.

3.2.1. Escamas de orden superior.

Se construye el fibrado $\mathcal{G}_p^r(E) \to E$ de contacto de orden r, cuya fibra en cada punto de E está constituida por todas las clases de contacto de orden al menos r en el punto, de variedades p-dimensionales. Cuando $r = 1$, obtenemos el fibrado Grassmaniano:

Fijado $a \in E$, y $\mathcal{M}_p(a, E)$ es la familia de todas las variedades p-dimensionales sumergidas en E que contienen al punto a. Entonces

$$\mathcal{G}_p^r(E; a) = \{T_a^r M : M \in \mathcal{M}_p(a, E)\}$$

es la fibra de contactoen a. Un elemento $T_a^r M \in \mathcal{G}_p^r(E; a)$ se llama escama p-dimensional de orden r, en a, y representa una clase, en la relación de equivalencia definida en $\mathcal{M}_p(a, E)$ por el contacto de orden al menos r. La fibra de contactoen a es difeomorfa a la fibra tipo

$$\mathbb{G}_{p,m}^r = \mathcal{G}_p^r(\mathbb{R}^m, 0) \tag{31}$$

Usando el corolario **3.1.4.1** es inmediata la siguiente proposición

Proposición 3.2.1.1

Supuesto $m - p = c > 0$, la aplicación

$$J_p^r(\mathbb{R}^c, 0) \to \mathbb{G}_{p,m}^r,\ j_0^r\zeta \to T_0^r M(\zeta)$$

está bien definida y da lugar a un difeomorfismo de sobre un abierto denso de $\mathbb{G}_{p,m}^r$. En particular $\mathbb{G}_{p,m}^r$ es variedad diferenciable localmente difeomorfa a $J_p^r(\mathbb{R}^c, 0)$.

Y en consecuencia se tiene:

Corolario 3.2.1.1

El espacio de contacto $\mathcal{G}_p^r(E; a)$ tiene estructura natural de variedad diferenciable, y

$$\mathcal{G}_p^r(E) = \cup_{a\in E}\mathcal{G}_p^r(E; a) \to E$$

tiene estructura natural de fibrado sobre E. Es el fibrado p-escamas de orden r sobre E (con fibra tipo $\mathbb{G}_{p,m}^r$).

Notaciones 3.2.1

- Fijado $a \in E$, hay una sucesión natural de fibrados:

$$\mathcal{G}_p^{r+1}(E; a) \xrightarrow{\downarrow} \mathcal{G}_p^r(E; a) \to \cdots \xrightarrow{\downarrow} \mathcal{G}_p^1(E; a) \to \{a\}$$

  y también

$$\mathcal{G}_p^{r+1}(E) \xrightarrow{\downarrow} \mathcal{G}_p^r(E) \to \cdots \xrightarrow{\downarrow} \mathcal{G}_p^1(E) \to E$$

- Fijado un subconjunto $\mathcal{A} \subset E$ denotamos

$$\mathcal{G}_p^r(E; \mathcal{A}) = \cup_{a\in\mathcal{A}}\mathcal{G}_p^r(E; a)$$

- Fijado un subconjunto $\mathcal{O}^k \subset \mathcal{G}_p^k(E)$ y supuesto $r \geq k$ se denota por

$$\mathcal{G}_p^r\left(E; \mathcal{O}^k\right) = \left\{\sigma \in \mathcal{G}_p^r(E) : \downarrow^{r-k} \sigma \in \mathcal{O}^k\right\}$$

3.2.2. Carácter funtorial

Si $f : S \to E$ donde S es una variedad diferenciable p-dimensional, para cada $s \in S$, denotamos $g_s^r f = f^{(r)}(T_s^r S) \in \mathcal{G}_p^r(E, f(s))$.

Así si $\overline{f} : \overline{S} \to E$ es otra variedad escribir $g_s^r f = g_{\overline{s}}^r \overline{f}$ equivale a decir que tienen contacto de orden al menos r.

Proposición 3.2.2

Fijada la variedad $f : S \to E$ se considera la aplicación $g^r f : S \to \mathcal{G}_p^r(E)$, $s \to g_s^r f$ .Si $\overline{f} : \overline{S} \to E$ es otra variedad se tiene:

1. *Si $\phi : S \to \overline{S}$ es difeomorfismo, entonces*
$$g_s^r\left(\overline{f} \circ \phi\right) = g_{\phi(s)}^r\left(\overline{f}\right) \tag{32}$$

2. *Si $\Phi : E \to E'$ es una inmersión entre variedades (de dimensiones $> p$) y $g_s^r f = g_{\overline{s}}^r \overline{f}$ entonces $g_s^r(\Phi \circ f) = g_{\overline{s}}^r\left(\Phi \circ \overline{f}\right)$*
Por tanto la inmersión $\Phi : E \to E'$ induce de forma natural una inmersión $\mathcal{G}_p^r \Phi : \mathcal{G}_p^r(E) \to \mathcal{G}_p^r(E')$, definida sin ambigüedad por
$$\left(\mathcal{G}_p^r \Phi\right)(T_a^r M) = T_{\Phi(a)}^r \Phi(M) \tag{33}$$
con la propiedad funtorial correspondiente
$$\mathcal{G}_p^r(\Psi \circ \Phi) = \mathcal{G}_p^r \Phi \circ \mathcal{G}_p^r \Psi$$
para $\Psi : E' \to E''$, $\Phi : E \to E'$inmersiones entre variedades. En particular, si Φ es difeomorfismo, entonces $\mathcal{G}_p^r \Phi$ lo es.

3.2.3. Grassmanianas

Nótese que $\mathcal{G}_p^1(E; a) = \{T_a M : M \in \mathcal{M}_p(a, E)\}$ es exactamente la Grassmaniana $\mathbb{G}_p(T_a E)$ de p-planos de $T_a E$. Veamos como pueden darse parametrizaciones locales del fibrado Grassmanniano $\mathcal{G}_p^1(E)$

La fibra modelo $\mathbb{G}_{p,m} = \mathbb{G}_{p,m}^1 = \mathbb{G}_p(\mathbb{R}^m)$ es una variedad diferenciable de dimensión $p(m-p)$. Una p-étupla $(X_1, \dots X_p)$ de vectores de $\mathbb{R}^m$ (l.ind.) puede describirse por las columnas de una matriz $m \times p$ de rango máximo p

$$(X_1, \dots X_p) = X = \begin{pmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{m1} & \cdots & x_{mp} \end{pmatrix}$$

denotando por $[X] \in \mathbb{G}_{p,m}^r$ el $p-$plano generado por X se tiene_

$$[X] = [Y] \Leftrightarrow \exists A \in \mathbb{R}^{p \times p} \text{ no singular con } XA = Y$$

escribiendo

$$X = \begin{pmatrix} \widetilde{X} \\ \widehat{X} \end{pmatrix} \text{ con } \widetilde{X} = \begin{pmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{p1} & \cdots & x_{pp} \end{pmatrix}, \widehat{X} = \begin{pmatrix} x_{p+1,1} & \cdots & x_{p+1,p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{m1} & \cdots & x_{mp} \end{pmatrix}$$

y suponiendo $\det \widetilde{X} \neq 0$ tenemos

$$[X] = \begin{bmatrix} I \\ \widehat{X}\widetilde{X}^{-1} \end{bmatrix} \text{ con } I = \text{ matriz identidad en } \mathbb{R}^{p \times p}$$

Llamando $k = m - p$ La aplicación

$$\mathbb{R}^{(m-p)\times m} \ni Z \to \left[\begin{array}{c} I \\ Z \end{array} \right] \in \mathbb{G}_{p,m}$$

constituye una parametrización (no global!) de $\mathbb{G}_{p,m}$. Otras parametrizaciones análogas se obtienen por selección de otros menores de rango máximo.

Con este criterio, si $x = (x_1, \ldots, x_m)$ es un sistema de coordenadas locales para E entonces es posible construir a partir de él, un sistema de coordenadas (x, X) , con $X = (x_{i\lambda}) = 1 \leq i \leq m$, $1 \leq \lambda \leq m - p$ en $\mathcal{G}_p^1(E)$ donde para $\sigma \in \mathbb{G}_p(T_a E)$ es $x(\sigma) = x(a)$ y

$$\sigma = Spam\left(\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_m} \right)_a \left(\begin{array}{c} I \\ X(\sigma) \end{array} \right) \right)$$

Proposición 3.2.3.1

a) *Si $f : S \to E$ es $p-$variedad, entonces $g^1 f : S \to \mathcal{G}_p^1(E)$ es $p-$variedad.*

b) *Si $f, \widetilde{f} : S \to E$* son *$p-$variedades, se tiene para $k \geq 1$,*

$$j_s^{k+1} f = j_s^{k+1} \widetilde{f} \Longrightarrow j_s^k \left(g^1 f\right) = j_s^k \left(g^1 \widetilde{f}\right)$$

Demostración:

a) Por la proposición 3.1.3 existen un sistema de coordenadas $x = (\widetilde{x}, \widehat{x})$ de E en torno a $a = f(s)$ con $\widetilde{x} = (x_1, \ldots, x_p)$, $\widehat{x} = (x_{p+1}, \ldots, x_m)$ y $x(a) = 0$, y otro $u = (u_1, \ldots, u_p)$ en torno a s con $u(s) = \widetilde{0}$, de forma que las ecuaciones de f son

$$f : \left\{ \begin{array}{l} \widetilde{x} = u \\ \widehat{x} = \widehat{0} \end{array} \right.$$

Tomando las coordenadas (x, X) para $\mathcal{G}_p^1(E)$ como en el apartado 3.2.3 se concluye que las ecuaciones de $g^1 f : S \to \mathcal{G}_p^1(E)$ en estas coordenadas son

$$g^1 f : \left\{ \begin{array}{l} \widetilde{x} = u \\ \widehat{x} = \widehat{0} \\ X = 0 \end{array} \right.$$

y por tanto $g^1 f : S \to \mathcal{G}_p^1(E)$ es p-variedad.

b) Tomando para f las coordenadas $x = (\widetilde{x}, \widehat{x})$ de E en torno a $a = f(s)$ y las $u = (u_1, \ldots, u_p)$ en torno a s del apartado a) al ser $j_s^1 f = j_s^1 \widetilde{f}$ se concluye como en la proposición 3.1.3 (ver también la figura) que las ecuaciones de $\widetilde{f}$ en estas coordenadas es de la forma

$$\widetilde{f} = \left\{ \begin{array}{l} \widetilde{x} = u \\ \widehat{x} = \zeta(u) \end{array} \right.$$

donde $\zeta = (\zeta_1, \ldots, \zeta_c)$, $(c = m - p)$ es una aplicación diferenciable $\mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^k$ en torno al origen, con

$$\zeta\left(\widetilde{0}\right) = \widehat{0}, \ \left. \frac{\partial \zeta_\lambda}{\partial u_\alpha} \right|_{u=0} = 0$$

Las ecuaciones en las coordenadas (x, X) y u de $g^1\widetilde{f}$ son

$$g^1\widetilde{f}:\begin{cases}\widetilde{x}=u\\ \widehat{x}=\zeta(u)\\ X=D\zeta\end{cases},\ \text{con } D\zeta=\begin{pmatrix}\frac{\partial\zeta_1}{\partial u_1} & \cdots & \frac{\partial\zeta_1}{\partial u_p}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ \frac{\partial\zeta_c}{\partial u_1} & \cdots & \frac{\partial\zeta_c}{\partial u_p}\end{pmatrix}$$

Por tanto

$$j_s^{k+1}f=j_s^{k+1}\widetilde{f}\Leftrightarrow j_{\widetilde{0}}^{k+1}\zeta=0\Leftrightarrow j_{\widetilde{0}}^{k}(D\zeta)=0\Leftrightarrow j_s^k\left(g^1f\right)=j_s^k\left(g^1\widetilde{f}\right)$$

En particular, hemos demostrado tambien que:

Corolario 3.2.3.1

Sean $f:S\to E$, $\overline{f}:\overline{S}\to E$ p-variedades, tales que $g_s^1f=g_{\overline{s}}^1\overline{f}$ y sea $\phi:S\to\overline{S}$ un difeomorfismo $\left[f(s)=\overline{f}(\overline{s})\right]$-adaptado (según Definición **3.1.4**). *Entonces también ϕ está $\left[g_s^1f=g_{\overline{s}}^1\overline{f}\right]$-adaptado, es decir:*

$$g_s^k\left(g^1f\right)=g_{\overline{s}}^k\left(g^1\overline{f}\right)\Rightarrow j_s^k\left(g^1f\right)=j_s^k\left(g^1\left(\overline{f}\circ\phi\right)\right)$$

Corolario 3.2.3.2

Para $k\geq1$ son equivalentes las siguientes afirmaciones:

i) $g_s^{k+1}f=g_{\overline{s}}^{k+1}\overline{f}$

ii) $g_s^k\left(g^1f\right)=g_{\overline{s}}^k\left(g^1\overline{f}\right)$

Demostración:

Sea $\phi:S\to\overline{S}$ un difeomorfismo $\left[f(s)=\overline{f}(\overline{s})\right]$-adaptado. (según Definición **3.1.4**)

$\Leftrightarrow$

$$\begin{array}{l} g_s^{k+1}f=g_{\overline{s}}^{k+1}\overline{f}\\ \Updownarrow \text{ Prop } \mathbf{3.1.4}\\ j_s^{k+1}f=j_s^{k+1}\left(\overline{f}\circ\phi\right)\\ \Updownarrow \text{ Prop } \mathbf{3.2.3.1\ b)}\\ j_s^k\left(g^1f\right)=j_s^k\left(g^1\left(\overline{f}\circ\phi\right)\right)=j_s^k\left(g^1\left(\overline{f}\right)\circ\phi\right)\\ \Updownarrow \text{ Cor.}\mathbf{3.2.3.1}\\ g_s^k\left(g^1f\right)=g_{\overline{s}}^k\left(g^1\overline{f}\right)\end{array}$$

Proposición 3.2.3.2

La aplicación $\mathcal{G}_p^{k+1}(E)\to\mathcal{G}_p^k\left(\mathcal{G}_p^1(E)\right)$ definida por $g_s^{k+1}f\to g_s^k\left(g^1f\right)$ (para $f:S\to E$, p-variedad) está bien definida y sumerge canónicamente a $\mathcal{G}_p^{k+1}(E)$ como subvariedad de $\mathcal{G}_p^k\left(\mathcal{G}_p^1(E)\right)$.

Demostración:

La aplicación $\mathcal{G}_p^{k+1}(E)\to\mathcal{G}_p^k\left(\mathcal{G}_p^1(E)\right)$ definida por $g_s^{k+1}f\to g_s^k\left(g^1f\right)$ está bien definida ya que si $g_s^{k+1}f=g_{\overline{s}}^{k+1}\overline{f}$ para otra $\overline{f}:\overline{S}\to E$, entonces por la Prop. **3.1.4.2** existe un difeomorfismo $\phi:S\to\overline{S}$ en torno a s, con $\phi(s)=\overline{s}$ verificando la propiedad $j_s^{k+1}f=j_s^{k+1}\left(\overline{f}\circ\phi\right)$ y por la Prop. **3.2.3.1 b)** es $j_s^k\left(g^1f\right)=j_s^k\left(g^1\left(\overline{f}\circ\phi\right)\right)=j_s^k\left(g^1\left(\overline{f}\right)\circ\phi\right)$, y esto implica que $g_s^k\left(g^1f\right)=g_s^k\left(g^1\left(\overline{f}\right)\circ\phi\right)=g_{\phi(s)}^k\left(g^1\left(\overline{f}\right)\right)$

Probémoslo (para tantear) para la aplicación $\mathcal{G}_p^2(E)\to\mathcal{G}_p^1\left(\mathcal{G}_p^1(E)\right)$ definida por $g_s^2f\to g_s^1\left(g^1f\right)$

En lo que sigue los indices i,j varían de 1 a m. Mientras que α,β varían de 1 a p, y los λ,μ de 1 a $c=m-p$.

A partir de un sistema de coordenadas $(x_i) = (\widetilde{x}, \widehat{x})$ de E donde $\widetilde{x} = (x_\alpha)$ $\widehat{x} = \left(x^\lambda\right)$ en torno a $a = f(s)$ puede construirse un sistemas de coordenadas en $\mathcal{G}_p^2(E)$ de la forma $\left(\left(x_a, x^\lambda\right), \left(x_\alpha^\lambda\right), \left(x_{\alpha\beta}^\lambda\right)_{\alpha\leq\beta}\right)$, de manera que fijado un sistema de coordenadas $u = (u_\alpha)$ en S en torno a s respecto al cual f tiene por ecuaciones

$$f: \begin{cases} x_\alpha = u_\alpha \\ x^\lambda = \zeta_\lambda(u_\alpha) \end{cases}$$

Así $g^1 f$ y $g^2 f$ se escriben

$$g^1 f: \begin{cases} x_\alpha = u_\alpha \\ x^\lambda = \zeta_\lambda(u_\alpha) \\ x_\alpha^\lambda = \frac{\partial \zeta_\lambda}{\partial u_\alpha} \end{cases}, \quad g^2 f: \begin{cases} x_\alpha = u_\alpha \\ x^\lambda = \zeta_\lambda(u_\alpha) \\ x_\alpha^\lambda = \frac{\partial \zeta_\lambda}{\partial u_\alpha} \\ x_{\alpha\beta}^\lambda = \frac{\partial^2 \zeta_\lambda}{\partial u_\alpha \partial u_\beta} \end{cases} \tag{34}$$

Por otra parte, las coordenadas $\left(\left(x_\alpha, x^\lambda\right), \left(x_\alpha^\lambda\right)\right)$ de $\mathcal{G}_p^1(E)$ permiten fabricar por reiteración coordenadas en $\mathcal{G}_p^1\left(\mathcal{G}_p^1(E)\right)$, que las denotamos por $\left(\left(y_\alpha, y^\lambda\right), \left(y^{\lambda\gamma}\right), \left(y_\alpha^{\lambda\gamma}\right)\right)$, de forma que para una inmersión $F: S \to \mathcal{G}_p^1(E)$ general con ecuaciones

$$F: \begin{cases} x_\alpha = u_\alpha \\ x^\lambda = \zeta_\lambda(u_\alpha) \\ x_\alpha^\lambda = \zeta_{\lambda\gamma}(u_\alpha) \end{cases}$$

las cuaciones de $g^1 F: S \to \mathcal{G}_p^1\left(\mathcal{G}_p^1(E)\right)$ sean:

$$g^1 F: \begin{cases} y_\alpha = u_\alpha \\ y^\lambda = \zeta_\lambda(u_\alpha) \\ y^{\lambda\gamma} = \zeta_{\lambda\gamma}(u_\alpha) \\ y_\alpha^\lambda = \frac{\partial \zeta_\lambda}{\partial u_\alpha} \\ y_\alpha^{\lambda\gamma} = \frac{\partial^2 \zeta_{\lambda\gamma}}{\partial u_\alpha} \end{cases}$$

En particular $g^1\left(g^1 f\right)$ tendrá ecuaciones de la forma:

$$g^1\left(g^1 f\right): \begin{cases} y_\alpha = u_\alpha \\ y^\lambda = \zeta_\lambda(u_\alpha) \\ y^{\lambda\gamma} = \frac{\partial \zeta_\lambda}{\partial u_\gamma} \\ y_\alpha^\lambda = \frac{\partial \zeta_\lambda}{\partial u_\alpha} \\ y_\alpha^{\lambda\gamma} = \frac{\partial^2 \zeta_\lambda}{\partial u_\alpha \partial u_\gamma} \end{cases} \tag{35}$$

Así teniendo en cuenta (34) y (35) las ecuaciones locales de la aplicación $\mathcal{G}_p^2(E) \to \mathcal{G}_p^1\left(\mathcal{G}_p^1(E)\right)$, $g_s^2 f \to g_s^1\left(g^1 f\right)$

$$\left(\left(x_\alpha, x^\lambda\right), \left(x_\alpha^\lambda\right), \left(x_{\alpha\beta}^\lambda\right)_{\alpha\leq\beta}\right) \to \left(\left(y_\alpha, y^\lambda\right), \left(y^{\lambda\gamma}\right), \left(y_\alpha^\lambda\right), \left(y_\alpha^{\lambda\gamma}\right)_{\alpha\leq\beta}\right)$$

queda

$$y_\alpha = x_\alpha,\ y^\lambda = x^\lambda,\ y^{\lambda\gamma} = x_\gamma^\lambda,\ y_\alpha^\lambda = x_\alpha^\lambda,\ y_\alpha^{\lambda\gamma} = x_{\alpha\gamma}^\lambda$$

y los elementos $\mathcal{G}_p^1\left(\mathcal{G}_p^1(E)\right)$ que *son* escamas de orden 2 se caracterizan por la condición

$$y^{\lambda\gamma} = y_\gamma^\lambda$$

Este argumento se generaliza fácilmente para un valor de k arbitrario, en donde las ecuaciones finales de la transformación $\mathcal{G}_p^{k+1}(E) \to \mathcal{G}_p^k\left(\mathcal{G}_p^1(E)\right)$ serían:

$y_\alpha = x_\alpha$	$y^\lambda = x^\lambda$	$y^{\lambda\gamma} = x_\gamma^\lambda$	$y_\alpha^\lambda = x_\alpha^\lambda$
$y_\alpha^{\lambda\gamma} = x_{\alpha\gamma}^\lambda$	$\ldots$	$y_{\alpha_1\ldots\alpha_k}^\lambda = x_{\alpha_1\ldots\alpha_k}^\lambda$	$y_{\alpha_1\ldots\alpha_k}^{\lambda\gamma} = x_{\alpha_1\ldots\alpha_k\gamma}^\lambda$

y efectivamente dan lugar a una inmersión (local).

3.2.4. Escamas y Grassmanianas

Veremos que el fibrado de contactode orden $r+1$, $\mathcal{G}_p^{r+1}(E)$ puede sumergirse canonicamente en la Grassmaniana de las escamas de órden anterior $\mathcal{G}_p^1(\mathcal{G}^r(E))$ gracias a la identificación $g^1(g^r f) = g^{r+1} f$. La formalización de este hecho viene establecida en el siguiente teorema:

Teorema 3.2.4

a) *Si $f : S \to E$ es $p-$variedad, entonces $g^r f : S \to \mathcal{G}_p^r(E)$ es $p-$variedad.*

b) *Sean $f, \widetilde{f} : S \to E$, definiendo p-variedades. Se tiene la implicación*

$$j_s^{r+1} f = j_s^{r+1} \widetilde{f} \Longrightarrow j_s^1(g^r f) = j_s^1\left(g^r \widetilde{f}\right)$$

c) *Hay una inmersión canónica:*

$$\mathcal{G}_p^{r+1}(E) \hookrightarrow \mathcal{G}^1(\mathcal{G}^r(E))$$

definida según el esquema

$$g_s^{r+1} f \to g_s^1(g^r f)$$

para cada p-variedad $f : S \to E$

Demostración:

Se hace por inducción sobre r. La prueba del Teorema para $r = 1$ está ya concluida:

a) Ver Proposición **3.2.3.1 a)**

b) Ver Proposición **3.2.3.1 b)**

c) Ver Corolario **3.2.3.2** para $k = 1$

Supuesto probado el Teorema, para $r \geq 1$, probemos el Teorema para $r + 1$. Tenemos

a) Si $f : S \to E$ es $p-$variedad, entonces por la proposición **3.2.3.1 a)** es $g^1 f : S \to \mathcal{G}_p^1(E)$ es variedad. Por la hipótesis de inducción y la proposición **3.2.3.2** se tiene que $g^r\left(g^1 f\right) = g^{r+1} f : S \to \mathcal{G}_p^{r+1}(E) \hookrightarrow \mathcal{G}_p^r\left(\mathcal{G}_p^1(E)\right)$ es variedad.

b) Sean $f, \widetilde{f} : S \to E$, definiendo p-variedades. Tenemos:

$$j_s^{r+2} f = j_s^{r+2} \widetilde{f}$$
$$\Downarrow \text{ Prop. } \mathbf{3.2.3.1\ b)}$$
$$j_s^{r+1}\left(g^1 f\right) = j_s^{r+1}\left(g^1 \widetilde{f}\right)$$
$$\Downarrow \text{ Hip. Induc.}$$
$$j_s^1\left(g^r\left(g^1 f\right)\right) = j_s^1\left(g^r\left(g^1 \widetilde{f}\right)\right)$$
$$\Downarrow \text{ Prop.} \mathbf{3.2.3.2}$$
$$j_s^1\left(g^{r+1} f\right) = j_s^1\left(g^{r+1} \widetilde{f}\right)$$

c) Por la hipótesis de inducción tenemos para $1 \leq k \leq r$ la inclusión $g_s^{k+1} f \to g_s^1 \left(g^k f\right)$

$$\mathcal{G}_p^{k+1}(E) \hookrightarrow \mathcal{G}_p^1\left(\mathcal{G}_p^k(E)\right),\ g_s^{k+1} f \to g_s^1\left(g^k f\right)$$

que da lugar, por la proposición **3.2.2** a la inclusión

$$\begin{array}{c} \mathcal{G}_p^{r-k}\left(\mathcal{G}_p^{k+1}(E)\right) \hookrightarrow \mathcal{G}_p^{r-k}\left(\mathcal{G}_p^1\left(\mathcal{G}_p^k(E)\right)\right) \\ g_s^{r-k}\left(g^{k+1} f\right) \to g_s^{r-k}\left(g^1\left(g^k f\right)\right) \end{array} \tag{36}$$

Por la Prop. **3.2.3.2** tenemos

$$\begin{array}{c} \mathcal{G}_p^{r-k+1}\left(\mathcal{G}_p^k(E)\right) \hookrightarrow \mathcal{G}_p^{r-k}\left(\mathcal{G}_p^1\left(\mathcal{G}_p^k(E)\right)\right) \\ g_s^{r-k+1}\left(g^k f\right) \to g_s^{r-k}\left(g^1\left(g^k f\right)\right) \end{array}$$

lo cual significa que la imagen de la inclusión (36) cae en $\mathcal{G}_p^{r-k+1}\left(\mathcal{G}_p^k(E)\right)$ y se tienen así la cadena de inmersiones canónicas

$$\mathcal{G}_p^{r+1}(E) \hookrightarrow \mathcal{G}_p^r\left(\mathcal{G}_p^1(E)\right) \hookrightarrow \cdots \hookrightarrow \mathcal{G}_p^{r-k}\left(\mathcal{G}_p^{k+1}(E)\right) \hookrightarrow \cdots \hookrightarrow \mathcal{G}_p^1\left(\mathcal{G}_p^r(E)\right) \tag{37}$$

definidas según el esquema

$$g_s^{r+1} f \to g_s^r\left(g^1 f\right) \to \cdots \to g_s^{r-k}\left(g^{k+1} f\right) \to \cdots \to g_s^1\left(g^r f\right)$$

Nuevamente por la Prop. **3.2.3.2** tenemos

$$\mathcal{G}_p^{r+2}(E) \hookrightarrow \mathcal{G}_p^{r+1}\left(\mathcal{G}_p^1(E)\right) \tag{38}$$

Aplicando e(37) en el paso inicial $g^1 f : S \to \mathcal{G}^1(E)$ y teniendo en cuenta (38) se tiene:

$$\begin{array}{l} \mathcal{G}_p^{r+2}(E) \hookrightarrow \mathcal{G}_p^{r+1}\left(\mathcal{G}_p^1(E)\right) \hookrightarrow \mathcal{G}_p^r\left(\mathcal{G}_p^1\left(\mathcal{G}_p^1(E)\right)\right) \hookrightarrow \\ \cdots \hookrightarrow \mathcal{G}_p^{r-k}\left(\mathcal{G}_p^{k+1}\left(\mathcal{G}_p^1(E)\right)\right) \hookrightarrow \cdots \hookrightarrow \mathcal{G}_p^1\left(\mathcal{G}_p^r\left(\mathcal{G}_p^1(E)\right)\right) \end{array}$$

y por composición queda una inmersión $\mathcal{G}_p^{r+2}(E) \hookrightarrow \mathcal{G}_p^1\left(\mathcal{G}_p^r\left(\mathcal{G}_p^1(E)\right)\right)$ con $g_s^{r+2} f \to g_s^1\left(g^r\left(g^1 f\right)\right) = g_s^1\left(g^{r+1} f\right)$, (la última igualdad justificada de nuevo por la Prop. **3.2.3.2**), y tenemos ya la inmersión:

$$\mathcal{G}_p^{r+2}(E) \hookrightarrow \mathcal{G}_p^1\left(\mathcal{G}_p^{r+1}(E)\right),\ g_s^{r+2} f \to g_s^1\left(g^{r+1} f\right)$$

3.3. Acciones y fibrados homogeneos

3.3.1. Acción. Tipos de acción.

Un grupo G actúa (por la izquierda) sobre un conjunto X, si hay definida una aplicación

$$\lambda : G \times X \ni (A, x) \to \lambda (A, x) = A.x \in X \tag{39}$$

verificando las propiedades habituales

a) $(AB).x = A.(B.x)$, para todo $A, B \in G$ y todo $x \in X$

b) $e.x = x$, para todo $x \in X$, siendo $e \in G$ el elemento neutro del grupoHay un homomorfismo natural también denominado λ, del grupo G sobre el grupo $X!$ de biyecciones de X que hace corresponder a cada $A \in G$, $\lambda_A \in X!$ con $\lambda_A (x) = A.x$ para todo $x \in X$.

Acción fiel. La acción se dice *fiel* si el elemento neutro $e \in G$, es el único elemento del grupo que deja fijos todos los elementos de X. En este caso y solo en este caso, λ es un monomorfismo que permite identificar G con un subgrupo de $X!$.

Acción libre. Se dice que la acción es *libre* si el elemento neutro $e \in G$ es el único elemento del grupo que deja fijo algún elemento de X, es decir, $\exists x$, $A.x = B.x \Longrightarrow A = B$

Acción transitiva. Diremos que la acción es *transitiva* si para todo $x, y \in X$, existe $A \in G$ con $A.x = y$..

Acción trivial. Un punto x se dice G-estacionario si $G.x = \{x\}$. X^G denota el conjunto de puntos G-estacionarios. La acción es *trivial* si $X^G = X$.

Acción diferenciable. La acción se dice diferenciable en el supuesto de que G sea un grupo de Lie, y X sea una variedad diferenciable, y la aplicación (39) sea diferenciable. La aplicación $\lambda : A \to \lambda_A$ define entonces un homomorfismo de G en el grupo $Difeo(E)$ de difeomorfismos de E. El grupo $\lambda G = im\lambda$ es un grupo de Lie canónicamente difeomorfo al grupo de lie $G/Ker\lambda$ mediante la aplicación (denotada también por λ) $\lambda : G/Ker\lambda \ni AKer\lambda \to \lambda_A \in G$.

Representación lineal. Si $X = V$ es espacio vectorial y $\lambda_A \in GL(V)$, para todo A, se denomina a $\lambda : G \to GL(V)$ representación lineal. Si $\mathbf{x} : V \to \mathbb{R}^m$ es un sistema de coordenadas lineales de V, entonces $\lambda^{\mathbf{x}} : G \to GL(\mathbb{R}^m)$ es la representación lineal en coordenadas inducida por las coordenadas $\mathbf{x}$, es decir $\lambda^{\mathbf{x}}_A (\mathbf{x}v) = \lambda_A (v)$.

3.3.2. G-espacios.

Tenemos ahora una acción fija $\lambda : G \times X \to X$ como en (39). Se dice entonces que X es un G-espacio y es diferenciable (ó topológico) si la acción es diferenciable (ó topológica).

Órbitas y espacio de órbitas. Fijado $x \in X$ llamamos a

$$G.x = \{A.x : A \in G\}$$

órbita de x. Denotamos por $G \backslash X$ al espacio de las órbitas

Subconjuntos G-invariantes. Un subconjunto $\mathcal{E}$ de X se llama G-invariante, si $A.x \in \mathcal{E}$, para todo $A \in G$ y todo $x \in \mathcal{E}$. Es decir $G.\mathcal{E} \subset \mathcal{E}$. Nótese que entonces tenemos una acción restringida $G \times \mathcal{E} \ni (A, x) \to A.x \in \mathcal{E}$, y $G \backslash \mathcal{E} \subset G \backslash X$.

Grupo de isotropía. El grupo de isotropía de un punto $x \in X$, es el subgrupo G_x de las transformaciones de G que dejan fijo el punto x, es decir:

$$G_x = \{A \in G : A.x = x\}$$

Nótese que si $A \in G$, es tal que $A.x = y$ entonces $G_y = AG_xA^{-1}$, y todos los grupos de isotropía de una misma órbita $E \in G \backslash X$ son conjugados.

Subespacios tipo G/[H]. Un subgrupo H de G, es de isotropía si lo es para algún $x \in X$. Denotamos por $[H]_G$ (o simplemente $[H]$, si se sobrentiende G) a la familia de todos los subgrupos de G conjugados con H.

Cabe pensar en el conjunto $X_{[H]}$ de todos los elementos de X cuyo grupo de isotropía (respecto a la acción (39)) es G-conjugado con H. Se denomina a $X_{[H]}$ subespacio de $[H]$- isotropía de X. Nótese que $X_{[H]}$ es necesariamente G-invariante.

Si $X = X_{[H]}$ se dice que X es un G-espacio tipo $G/[H]$

3.3.3. G-variedades.

Supóngase ahora que X es un G-espacio diferenciable, bajo la acción (39).

Secciones locales. Una subvariedad W de X, se llama H-sección local de la acción si

1. H es grupo de isotropia de cada punto de W (es decir $G_w = H$ para todo $w \in W$)
2. W corta transversalmente a lo más una vez a cada órbita, es decir:

$$\left.\begin{array}{l}(G.w) \cap W = \{w\} \\ T_w\,(G.w) \cap T_wW = \{0\}\end{array}\right\}, \forall w \in W$$

Observese que entonces $G.W = \{A.w : A \in G, w \in W\}$ es una subvariedad G-invariante difeomorfa a $G/H \times W$ mediante el difeomorfismo:

$$G/H \times W \ni (AH, o) \to G.W$$

Nótese que si W es una H-sección de X , y W_1 es subvariedad de W entonces W_1 también es H-sección de X.

Subespacios fibrados homogeneos?? Una subvariedad G-invariante $\mathcal{E}$ de X se llama subespacio fibrado homogeneo, si $\mathcal{E}$ está contenido en algún subespacio de isotropía $X_{[H]}$ y para cada punto $e \in \mathcal{E}$ existe una H-sección $\mathcal{O}$ de la acción tal que $G.\mathcal{O}$ es abierto de $\mathcal{E}$. Se dice entonces que $\mathcal{O}$ es una H-reducción (local) de $\mathcal{E}$. Nótese que en este caso la aplicación

$$G/H \times \mathcal{O} \ni (AH, o) \to A.o \in \mathcal{E}$$

define una reducción (o trivialización) local.

Definición de G-variedad. Se dice el G-espacio diferenciable X es una G-variedad si para cualquier subgrupo de isotropía H de G , $X_{[H]}$ es un subespacio fibrado homogeneo.

Proposición 29 *Si G es un grupo de Lie compacto, y X es G-espacio diferenciable, entonces X es G-variedad.*

3.3.4. Fibrados homogeneos.

Técnicamente, un fibrado homogeneo tipo $G/[H]$ es una G-variedad $\mathcal{E}$, cuyos grupos de isotropía son todos conjugados con H. Recuerdese que denotamos por $[H]$ a la familia de subgrupos G-conjugados con H.

Sea $G \times \mathcal{E} \ni (A, x) \to \lambda_A(x) = A.x \in \mathcal{E}$ una acción diferenciable por la izquierda del grupo de Lie G sobre la variedad diferenciable $\mathcal{E}$, y H subgrupo cerrado de G. Diremos que es un G-espacio tipo $G/[H]$ si todos los grupos de isotropía están en $[H]$. En estas condiciones, fijado un $H \in [H]$, una subvariedad $\mathcal{O}$ de $\mathcal{E}$, se llama H-reducción local de $\mathcal{E}$ si es H-sección local de la acción y $G.\mathcal{O}$ es abierto de $\mathcal{E}$, es decir:

1. H es grupo de isotropia de cada punto de $\mathcal{O}$ (es decir $G_o = H$ para todo $o \in \mathcal{O}$)
2. $G.\mathcal{O} = \{A.o : A \in G\}$ es un abierto de $\mathcal{E}$.
3. $\mathcal{O}$ corta transversalmente a lo más una vez a cada órbita, es decir: $(G.o) \cap \mathcal{O} = \{o\}$, y $T_o(G.o) \cap T_o\mathcal{O} = \{0\}$ para todo $o \in \mathcal{O}$

Se prueba entonces que la aplicación

$$G/H \times \mathcal{O} \ni (AH, o) \to A.o \in \mathcal{E}$$

es un difeomorfismo local.

Finalmente se dice que $\mathcal{E}$ es un fibrado homogeneo con isotropía $[H]$ (brevemente un $G/[H]$-fibrado homogeneo) si se ha dado una acción de G en $\mathcal{E}$, que hace a $\mathcal{E}$ G-espacio tipo $G/[H]$, y

4. Por cada punto $x_0 \in \mathcal{E}$, existe un $H \in [H]$ y una H-reducción local $\mathcal{O}$ de la acción, tal que $x_0 \in G.\mathcal{O}$

Nota 30 *Si G es compacto, un G-espacio tipo $G/[H]$, entonces es necesariamente $G/[H]$-fibrado homogeneo.*

Proposición 31 *Sea $\mathcal{E}$ un $G/[H]$-fibrado homogeneo, y $A \in G$. Entonces si $\mathcal{O}$ una H-reducción local, $A.\mathcal{O}$ es una AHA^{-1}-reducción local. En particular, fijado $o \in \mathcal{E}$, existe una G_o-reducción local $\mathcal{O}$ con $o \in \mathcal{O}$*

Proposición 32 *Sea $\mathcal{E}$ un $G/[H]$-fibrado homogeneo y $\mathcal{O}$ una H-reducción local. Entonces la aplicación*

$$\sigma : G.\mathcal{O} \to \mathcal{O},\ x \to (G.x) \cap \mathcal{O}$$

es una submersión. Además la aplicación

$$\varphi : G/H \times \mathcal{O} \ni (AH, a) \to A.a \in G.\mathcal{O} \tag{40}$$

es un difeomorfismo, y

$$\mathcal{O} \ni o \to G.o \in G\backslash\mathcal{E}$$

define una parametrización local sobre el espacio de órbitas $G\backslash\mathcal{E}$ dotado de la topología final para la aplicación

$$\mathcal{E} \ni x \stackrel{\lambda_G}{\to} G.x \in G\backslash\mathcal{E}$$

En particular, el espacio de órbitas $G\backslash\mathcal{E}$ tiene una estructura diferenciable, que hace diferenciable a la la proyección canónica $\lambda_G : \mathcal{E} \ni x \to G.x \in G\backslash\mathcal{E}$.

Por tanto el fibrado homogeneo $\mathcal{E}$ tiene estructura de fibrado con fibra tipo G/H base $B = G\backslash\mathcal{E}$, y grupo G. Nótese que cada fibra de $\mathcal{E}$ tiene estructura natural de espacio de Klein.

3.3.5. Referencias.

Se definen en el contexto de una H-reducción $\mathcal{O}$ de un $G/[H]$-fibrado homogeneo $\mathcal{E}$. Si $\mathcal{E} = G.\mathcal{O}$, a partir de la acción $G \times \mathcal{E} \to \mathcal{E}$, el espacio $\mathcal{E}$ se ve como un fibrado sobre $\mathcal{O}$ con proyección

$$\sigma : \mathcal{E} \ni x \to \sigma(x) = G.x \cap \mathcal{O} \in \mathcal{O} \tag{41}$$

y con fibras tipo G/H: Cada fibra $\sigma^{-1}(o) = \mathcal{E}_o = G.o$, $o \in \mathcal{O}$ es un espacio punteado de Klein de grupo G e isotropía H.

Referencias en un punto. Una $\mathcal{O}$-referencia con origen en $x \in \mathcal{E}$ es un elemento $u \in G$ tal que $u.\sigma(x) = x$. Así el producto cartesiano $G \times \mathcal{O}$ describe el conjunto de todas las referencias con origen en $\mathcal{E}$, y tiene estructura de fibrado principal de grupo H respecto a la proyección

$$G \times \mathcal{O} \to G.\mathcal{O} = \mathcal{E},\ (u, o) \to u.o$$

que hace corresponder a cada referencia su origen. Denotamos por $\mathcal{O}(\mathcal{E}) = G \times \mathcal{O}$ visto como tal fibrado.

Nótese que en el contexto de un espacio punteado de Klein se tiene $o(E) = o(E) = G \times o$

Referencias móviles. Una $\mathcal{O}$-referencia móvil, es una reducción (en un abierto $\mathcal{U}$ de $\mathcal{E}$) del fibrado de referencias $\mathcal{O}(\mathcal{E})$ y consiste entonces en una aplicación diferenciable $\mathbf{u} : \mathcal{U} \to G$ con la propiedad para todo $x \in \mathcal{U}$

$$\mathbf{u}(x).\sigma(x) = x$$

Naturalmente, existe un teorema de existencia de $\mathcal{O}$-referencias móviles $\mathbf{u}$ en torno a cada punto $x \in X$ con un valor predeterminado $u = \mathbf{u}(x) \in G$ en el punto x. Este teorema, equivale justamente a admitir que $G \times \mathcal{O} = \mathcal{O}(\mathcal{E})$ es fibrado principal de base $\mathcal{E}$ y grupo H.

3.3.6. Homomorfismos

Consideremos la *categoría* de los fibrados homogeneos de grupo fijo G. Un homomorfismo entre dos de ellos, digamos $\mathcal{E}$ y $\overline{\mathcal{E}}$ es una aplicación diferenciable $\phi : \mathcal{E} \to \overline{\mathcal{E}}$ de forma que para todo $A \in G$, el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{E} \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "\lambda_A"'] & \overline{\mathcal{E}} \arrow[d, "\overline{\lambda}_A"] \\ \mathcal{E} \arrow[r, "\phi"'] & \overline{\mathcal{E}} \end{tikzcd}$$

Nótese que $\phi(G.x) \subset G.\phi(x)$, por tanto el homomorfismo $\phi : \mathcal{E} \to \overline{\mathcal{E}}$ da lugar a una única aplicación diferenciable denotada también por $\phi : B = G\backslash\mathcal{E} \to G\backslash\overline{\mathcal{E}} = \overline{B}$, que hace conmutativo el diagrama

$$\begin{tikzcd} \mathcal{E} \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "\lambda_G"'] & \overline{\mathcal{E}} \arrow[d, "\overline{\lambda}_G"] \\ B \arrow[r, "\phi"'] & \overline{B} \end{tikzcd}$$

En estas condiciones, se tiene el siguiente resultado:

Proposición 33 *Fijado $o \in \mathcal{E}$, Para toda $\overline{H}$-reducción local $\overline{\mathcal{O}}$ de $\overline{\mathcal{E}}$ con $\phi(o) \in \overline{\mathcal{O}}$, existe $H \in [H]$ con $H \subset \overline{H}$, y una H-reducción local $\mathcal{O}$ de $\mathcal{E}$, con $o \in \mathcal{O}$, y $\phi\mathcal{O} \subset \overline{\mathcal{O}}$ de forma que la representación analitica local $\overline{\varphi}^{-1}\phi\varphi : G/H\times\ \mathcal{O} \to G/\overline{H}\times\ \overline{\mathcal{O}}$ de ϕ respecto a φ y $\overline{\varphi}$ (ver(40)) es*

$$(AH, a) \to \left(A\overline{H}, \phi a\right)$$

Naturalmente la composición de homomorfismos es homomorfismo.

3.3.7. Subfibrados y secciones

Un subfibrado del $G/[H]$-fibrado homogeneo $\overline{\mathcal{E}}$, es una subvariedad $\mathcal{E}$ de $\overline{\mathcal{E}}$ que es invariante por la acción del grupo G. Esto significa que con la acción inducida $G \times \mathcal{E} \to \mathcal{E}$, $\mathcal{E}$ es también $G/[H]$-fibrado homogeneo, y la inclusión $i : \mathcal{E} \to \overline{\mathcal{E}}$ es monomorfismo de fibrados homogeneos La proposición 33 (pág 59)aplicada a este caso nos dice que si $\overline{\mathcal{O}}$ es una reducción de $\overline{\mathcal{E}}$ entonces $\mathcal{O} = \mathcal{E} \cap \overline{\mathcal{O}}$, si es no vacio, es una reducción de $\mathcal{E}$. De hecho, si $\mathcal{O}$ es una subvariedad arbitraria de $\overline{\mathcal{O}}$, entonces $\mathcal{E} = G.\mathcal{O}$ es subfibrado de $\overline{\mathcal{E}}$.

Recíprocamente si $\mathcal{O}$ es una H-sección de $\overline{\mathcal{E}}$, entonces $\mathcal{O}$ es una H-reducción de $G.\mathcal{O} = \mathcal{E}$ que es un subfibrado de $\overline{\mathcal{E}}$. Se denomina a $\mathcal{O}$, un H-corte de $\overline{\mathcal{E}}$.

3.4. Variedades en un fibrado homogeneo.

Estamos en el contexto de una H-reducción $\mathcal{O}$ de un $G/[H]$-fibrado homogeneo $\mathcal{E}$. Si $\mathcal{E} = G.\mathcal{O}$, a partir de la acción H-regular $G \times \mathcal{E} \to \mathcal{E}$, el espacio $\mathcal{E}$ se ve como un fibrado sobre $\mathcal{O}$ con proyección $\sigma : \mathcal{E} \ni x \to \sigma(x) = G.x \cap \mathcal{O} \in \mathcal{O}$ y con fibras tipo G/H: Cada fibra $\sigma^{-1}(o) = G.o$, $o \in \mathcal{O}$ es un espacio punteado de Klein de grupo G e isotropía H. Se supone que $f : S \to \mathcal{E}$ es una p-variedad.

3.4.1. Referencias móviles.

El conjunto de las referencias $\mathcal{O}(f)$ a lo largo de f, es técnicamente el pullback $\mathcal{O}(f) = f^*(\mathcal{O}(\mathcal{E})) = \left\{(u, s) \in G \times S : u^{-1}.f(s) \in \mathcal{O}\right\}$ por f, del fibrado de referencias $\mathcal{O}(\mathcal{E}) \simeq G \times \mathcal{O}$ (ver epígrafe 3.3.5). Es decir $\mathcal{O}(f) = \cup_{s\in S}\mathcal{O}(f, s)$ donde para cada $s \in S$ es

$$\begin{aligned}\mathcal{O}(f, s) &= \{(u, \sigma) \in G \times \mathcal{O} : u.\sigma \in f(s)\} \\ &\simeq \left\{(u, s) \in G \times \{s\} : u^{-1}.f(s) \in \mathcal{O}\right\}\end{aligned}$$

Nótese que $\mathcal{O}(f) \simeq \left\{(u, s) \in G \times S : u^{-1}.f(s) \in \mathcal{O}\right\} \subset G \times S$, y tiene por tanto estructura natural de fibrado principal $\mathcal{O}(f) \to S$ sobre S, con fibra el grupo H.

La aplicación $\sigma : \mathcal{E} \to \mathcal{O}$ induce $\sigma_s f = \sigma(f(s))$ que define a $\sigma f : S \to \mathcal{O}$ como los invariantes iniciales de f. Se verifica la identidad

$$u.\sigma_s f = f(s), \text{ si } u \in \mathcal{O}(f, s)$$

En el contexto de un espacio punteado de Klein se tiene $o(f) = o(f)$

Una referencia móvil a lo largo de f es una reducción (local) $\mathbf{u}$ del fibrado $\mathcal{O}(f) \to S$ de referencias en f. Es por tanto esencialmente una aplicación diferenciable $\mathbf{u} : S \to G$, tal que $\sigma(s) = \mathbf{u}(s)^{-1}.f(s) \in \mathcal{O}$ para todo $s \in S$. Denotamos por $\Gamma(\mathcal{O}(f))$ la familia de tales referencias.

3.4.2. Forma de Darboux de una referencia movil.

Se denomina forma de Darboux de una referencia movil $\mathbf{u} : S \to G$, $\mathbf{u} \in \Gamma(\mathcal{O}(f))$ a la derivada de Darboux de $\mathbf{u}$:

$$\Omega_{\mathbf{u}} = \mathbf{u}^* \Omega_G \in \Omega^1(S, \mathfrak{g})$$

Sabemos por (7) que si $A \in G$ entonces $A\mathbf{u} \in \Gamma\mathcal{O}(\lambda_A \circ f)$ y

$$\Omega_{A\mathbf{u}} = \Omega_{\mathbf{u}}$$

Sin embargo, cuando $A \in H$ es $\mathbf{u}A \in \Gamma\mathcal{O}(f)$ y se verifica

$$\Omega_{\mathbf{u}A} = Ad_{A^{-1}} \Omega_{\mathbf{u}} \tag{42}$$

En efecto, fijado $\xi \in T_s S$ se tiene

$$\begin{aligned} \Omega_{\mathbf{u}A}(\xi) &= \left((R_A \circ \mathbf{u})^* \Omega_G\right)(\xi) \\ &= \mathbf{u}^* \left((R_A)^* \Omega_G\right)(\xi) \\ &= Ad_{A^{-1}}\left(\Omega_G(\mathbf{u}_* \xi)\right) \\ &= Ad_{A^{-1}} \Omega_{\mathbf{u}}(\xi) \end{aligned}$$

Más general si $\mathbf{K} : S \to H$ es diferenciable entonces

$$\Omega_{\mathbf{uK}} = \Omega_{\mathbf{K}} + Ad_{\mathbf{K}^{-1}}(\Omega_{\mathbf{u}}) \tag{43}$$

En efecto, partiendo de la identidad

$$\mathbf{u}_* \xi = \mathbf{u}(s) . \Omega_{\mathbf{u}}(\xi)$$

se tiene:

$$\begin{aligned} (\mathbf{uK})_* \xi &= (\mathbf{u}_* \xi) . \mathbf{K}(s) + \mathbf{u}(s) . \mathbf{K}_* \xi \\ &= \mathbf{u}(s) . \Omega_{\mathbf{u}}(\xi) . \mathbf{K}(s) + \mathbf{u}(s) \mathbf{K}(s) \Omega_{\mathbf{K}}(\xi) \\ &= \mathbf{u}(s) \mathbf{K}(s) \left(\mathbf{K}(s)^{-1} . \Omega_{\mathbf{u}}(\xi) . \mathbf{K}(s) + \Omega_{\mathbf{K}}(\xi)\right) \\ &= (\mathbf{uK})(s) \left((Ad_{\mathbf{K}^{-1}}) \Omega_{\mathbf{u}}(\xi) + \Omega_{\mathbf{K}}(\xi)\right) \end{aligned}$$

3.4.3. Derivación de referencias a lo largo de curvas

Una referencia a lo largo de una curva diferenciable $\alpha : I \to \mathcal{E}$, viene a ser una aplicación diferenciable

$\mathbf{u} : I \to G$ tal que $\mathbf{u}(t) . \sigma(\alpha((t))) = \alpha(t)$ (es decir $\mathbf{u}(t)$ es una referencia en $\alpha(t)$ para el espacio de Klein $G.\sigma(\alpha(t))$). La derivada de Darboux de $\mathbf{u}$ es $\Omega_{\mathbf{u}} = \mathbf{u}^* \Omega_G \in \Omega^1(I, \mathfrak{g})$ que tiene el siguiente significado geométrico:

$$\mathbf{u}'(t) = \mathbf{u}(t) . \Omega_{\mathbf{u}}(t)$$

donde $\Omega_{\mathbf{u}}(t) = \Omega(\mathbf{u}'(t)) = \Omega_{\mathbf{u}}(\partial/\partial t|_t)$, y $\mathbf{u}(t) . \Omega_{\mathbf{u}}(t)$ se interpreta según la acción $G \times \mathfrak{g} \to TG$, $(A, \xi) \to A.\xi = (L_A)_* \xi$

Denotamos

$$\Theta_{\mathbf{u}}(t) = \Omega_{\mathbf{u}}(t) + \mathfrak{h}$$

donde $\mathfrak{g}$ es el álgebra de Lie de G y $\mathfrak{h}$ la de H. En estas condiciones, el resultado fundamental es el siguiente:

Teorema 34 *Sea* $\mathbf{u}$*, una referencia a lo largo de* $\alpha : I \to \mathcal{E}$*, y* $\sigma(t) = \sigma(\alpha((t)))$ *Entonces:*

$$\alpha'(t) = \mathbf{u}(t).\Theta_{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{u}(t).\sigma'(t)$$

en particular, si $\mathbf{v}$ *es otra* $\mathbf{u}(t_0) = \mathbf{v}(t_0)$ *para cierto* $t_0 \in I$*, entonces* $\Omega_{\mathbf{u}}(t_0) = \Omega_{\mathbf{v}}(t_0)$ $(mod\ \mathfrak{h})$

Demostración. Para cada $t \in I$, $\alpha(t)$ está en el espacio de Klein $E(t) = G.\alpha(t)$, con origen en $\sigma(t) = \sigma(\alpha((t)))$, y

$$\pi(t) : G \to E(t),\ A \to A.\sigma(t)$$

es la proyección correspondiente. Nótese primero que para t fijo:

$$\pi(t)_* \Omega_{\mathbf{u}}(t) = \Omega_{\mathbf{u}}(t) + \mathfrak{h} \in \mathfrak{g}/\mathfrak{h} \simeq T_{\sigma(t)}E(t) \subset T_{\sigma(t)}\mathcal{E}$$

y Lo anterior así como los cálculos que siguen para un $t = t_0$ arbitrario utilizan libremente resultados del epígrafe 1.1.2:

$$\alpha'(t_0) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=t_0} (\mathbf{u}(t).\sigma(t)) = \mathbf{u}'(t_0).\sigma(t_0) + \mathbf{u}(t_0).\sigma'(t_0)$$

Analicemos el valor del primer sumando

$$\begin{aligned} \mathbf{u}'(t_0).\sigma(t_0) &= \pi(t_0)_* \mathbf{u}'(t_0) \\ &= (\pi(t_0))_* \circ \left(L_{\mathbf{u}(t_0)}\right)_* (\Omega_{\mathbf{u}}(t_0)) \\ &= \left(\pi(t_0) \circ L_{\mathbf{u}(t_0)}\right)_* (\Omega_{\mathbf{u}}(t_0)) \\ &= \left(\lambda_{\mathbf{u}(t_0)}\right)_* (\pi(t_0)_* \Omega_{\mathbf{u}}(t_0)) \\ &= \left(\lambda_{\mathbf{u}(t_0)}\right)_* \Theta_{\mathbf{u}}(t_0) \end{aligned}$$

Esto prueba nuestra afirmación ■

3.4.4. Forma vertical de una referencia fija de una variedad.

Se supone ahora que $f : S \to \mathcal{E}$ es una p-variedad, y sea $\mathbf{u} \in \Gamma\mathcal{O}(f)$, $\mathbf{u} : S \to G$ una referencia móvil a lo largo de f. La forma de Darboux de $\Omega_{\mathbf{u}} \in \Omega^1(S, \mathfrak{g})$ de $\mathbf{u}$ admite la siguiente interpretación geométrica:

Sea $\beta : I \to S$ una curva diferenciable. Entonces $\mathbf{u}\circ\beta$ es una referencia a lo largo de $\alpha = f \circ \beta : I \to \mathcal{E}$ y se verifica

$$\Omega_{\mathbf{u}\circ\beta}(t) = \Omega_{\mathbf{u}}\left(\beta'(t)\right) \text{ es decir } (\mathbf{u}\circ\beta)'(t) = (\mathbf{u}\circ\beta)(t).\Omega_{\mathbf{u}}\left(\beta'(t)\right) \tag{44}$$

Se denomina forma vertical asociada a $\mathbf{u}$

$$\Omega_{\mathbf{u}}\ (\mathrm{mod}\,\mathfrak{h}) = \Theta_{\mathbf{u}} \in \Omega^1(S, \mathfrak{g}/\mathfrak{h})$$

Fijada una referencia $u \in \mathcal{O}(f, s_0)$ fija estamos interesados en probar que Θ_u está bien definida, con ayuda del siguiente resultado :

Proposición 35 *Sean* $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \Gamma\mathcal{O}(f)$ *referencias móviles a lo largo de* f*, entonces:*

$$\overline{Ad}_{\mathbf{v}^{-1}\mathbf{u}}\Theta_{\mathbf{u}} = \Theta_{\mathbf{v}}$$

en particular, si $u = \mathbf{u}(s) = \mathbf{v}(s)$ *en algún punto* s *se tiene* $\left.\Theta_{\mathbf{u}}\right|_s = \left.\Theta_{\mathbf{v}}\right|_s$ *y se denomina* $\Theta_u f$ *a este valor común.*

Demostración. Pongamos $\mathbf{v} = \mathbf{uK}$ con $\mathbf{K} : S \to H$ diferenciable. se tiene por (43) que $\Omega_{\mathbf{uK}} = \Omega_{\mathbf{K}} + Ad_{\mathbf{K}^{-1}}(\Omega_{\mathbf{u}})$. Pero $\Omega_{\mathbf{K}}$ toma valores en $\mathfrak{h}$, y la fórmula anterior módulo $\mathfrak{h}$ queda

$$\Theta_{\mathbf{uK}} = Ad_{\mathbf{K}^{-1}}(\Theta_{\mathbf{u}})$$

■

Denotamos entonces

$$\Theta_u f = \Theta_{\mathbf{u}}(s)$$

cuando $\mathbf{u}, \in \Gamma\mathcal{O}(f)$ con $\mathbf{u}(s) = u$ y se denomina $\Theta_u f$ *forma vertical* de la referencia adaptada u.

Nótese que $\Theta_u f \in \Lambda^1(T_s S, \mathfrak{g}/\mathfrak{h})$ solo depende de la referencia fija $u \in \mathcal{O}(f, s)$. Sin embargo dada $\mathbf{u} \in \Gamma\mathcal{O}(f)$, para cada $s \in S$ se tiene la igualdad

$$\Theta_{\mathbf{u}(s)} f = \Theta_{\mathbf{u}}(s) \tag{45}$$

además se verifica para todo $K \in H$:

$$\Theta_{uK} f = Ad_{K^{-1}}(\Theta_u f) \tag{46}$$

Denotando

$$d_u f = d_s\left(\lambda_u^{-1} f\right) : T_s S \to T_{\sigma_s f}\mathcal{E} \tag{47}$$

se tiene la identidad

$$u.(d_u f) = d_s f \tag{48}$$

Se llega la siguientes conclusión:

Proposición 36 *Si $f : S \to \mathcal{E}$ es p-variedad, $s \in S$, $\xi \in T_s S$ y $u \in \mathcal{O}(f, s)$ se verifica la identidad*

$$(d_u f)(\xi) = ((\Theta_u f)(\xi))_{\sigma_s f} + (\sigma f)_* \xi$$

De forma algo mas imprecisa (eliminando s y ξ), si $\mathbf{u} \in \Gamma(\mathcal{O}(f))$ se tiene la descomposición:

$$d_{\mathbf{u}} f = \Theta_{\mathbf{u}} + d(\sigma f)\,, \text{ con } \Theta_{\mathbf{u}} = \Omega_{\mathbf{u}} (\mathrm{mod}\, \mathfrak{h}) \tag{49}$$

Demostración. Tomando $\mathbf{u} \in \Gamma\mathcal{O}(f)$, con $\mathbf{u}(s) = u$, un procedimiento geométrico para el cálculo de $\Theta_u f|_\xi$ para $\xi \in T_s S$ es el siguiente:Tomemos $\beta : I \to S$ una curva diferenciable con $\beta'(0) = \xi$. Entonces

$$\Theta_u f|_\xi = \Omega\left((\mathbf{u}\circ\beta)'(0)\right) \ (\mathrm{mod}\ \mathfrak{h}.)$$

Si en el teorema 34 (pág 61) tomamos $\alpha = f \circ \beta$, es $\Theta_{\mathbf{u}\circ\alpha}(0) = \Theta_u f(\xi)$, y $\alpha'(0) = f_*\xi$, $\sigma'(0) = (\sigma f)_* \xi$, por lo que se tiene

$$f_*\xi = (\lambda_u)_* \Theta_u f(\xi) + (\lambda_u)_* . ((\sigma f)_* \xi)$$

■

Nótese que y si $K \in H$, y $u \in \mathcal{O}(f, s)$ entonces $uK \in \mathcal{O}(f, s)$ y Ad_K deja invariante $\mathfrak{h}$. Por tanto induce $\overline{Ad_K} : \mathfrak{g}/\mathfrak{h} \to \mathfrak{g}/\mathfrak{h}$, y se verifica (véase (42))

$$\Theta_{uK} f = \overline{Ad_K}^{-1} \Theta_u f \tag{50}$$

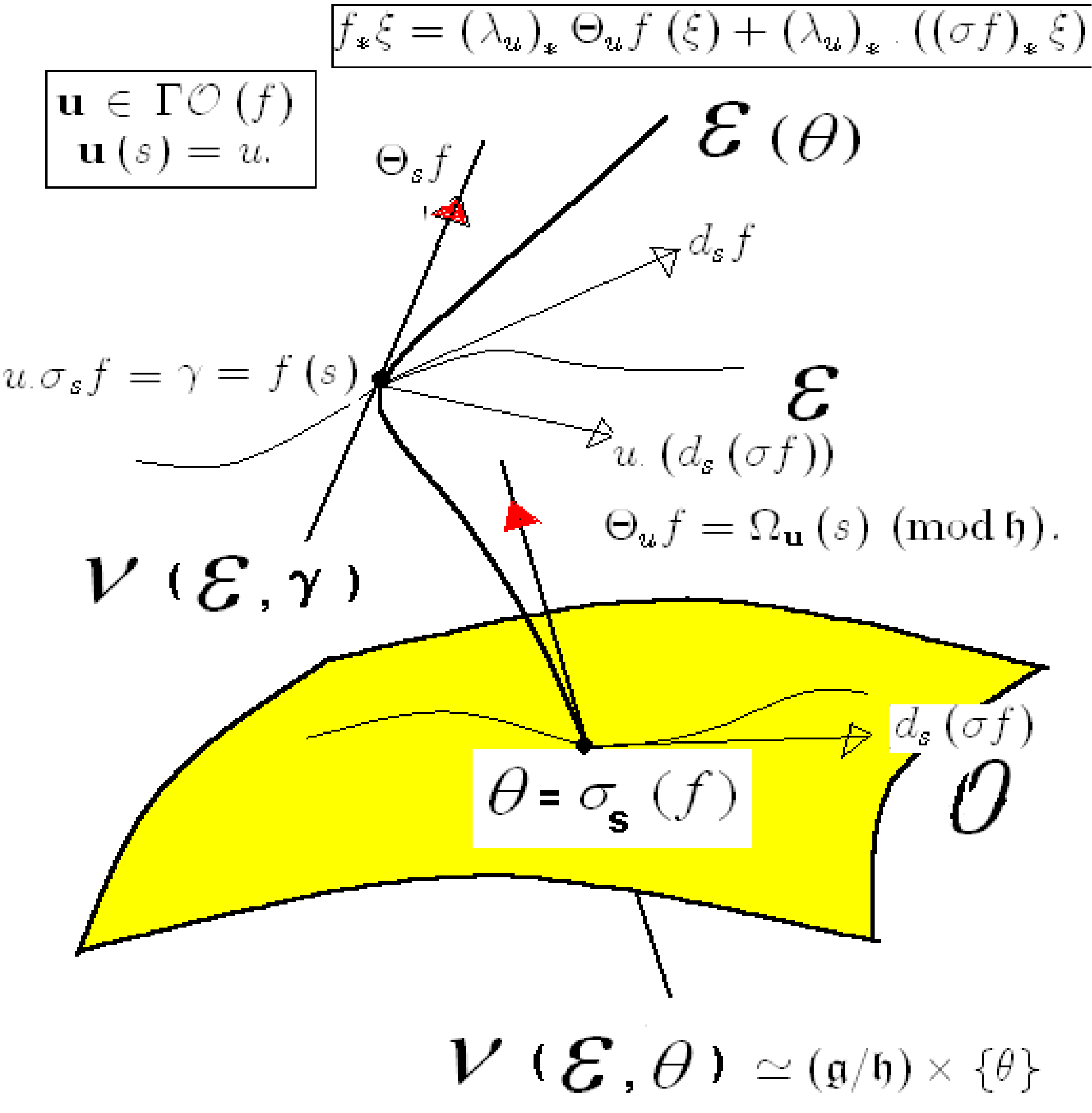
Corolario 37 *Fijado $s \in S$, y $u \in \mathcal{O}(f, s)$, entonces $\Theta_s f = u.\Theta_u f$ no depende de $u \in \mathcal{O}(f, s)$ y se tiene la identidad:*

$$d_s f = \Theta_s f + u.(d_s(\sigma f)) : T_s S \to T_{f(s)}(\mathcal{E}) \tag{51}$$

Demostración. Pongamos $v = uK$ con $K \in H$. Entonces:

$$\begin{aligned} v.\Theta_v f &= (uK).\Theta_{uK} f = (uK)\,\overline{Ad}_K^{-1}\Theta_u f \\ &= u.\overline{Ad}_K.\overline{Ad}_K^{-1}.\Theta_u f \\ &= u.\Theta_u f \end{aligned}$$

para obtener la última fórmula, multipliquese ambos miembros de (49) por u^{-1} teniendo en cuenta (48). ∎



Corolario 38 *Sean* $f, \overline{f} : S \to \mathcal{E}$ *dos p-variedades con* $f(s_0) = \overline{f}(s_0)$, , *y* $d_{s_0} f = d_{s_0}\overline{f}$ *para cierto* $s_0 \in S$, *y sea* $u \in \mathcal{O}(f, s_0)$. *Entonces* $\sigma_{s_0} f = \sigma_{s_0}\overline{f}$ *y*

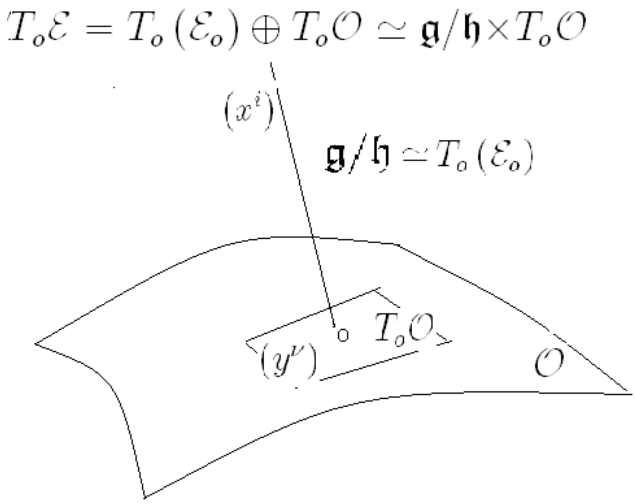


Figura 1:

se tiene

$$\begin{array}{l} \Theta_{s_0} f = \Theta_{s_0} \overline{f} \\ d_{s_0}(\sigma f) = d_{s_0}\left(\sigma \overline{f}\right) \end{array}$$

En particular si $u \in \mathcal{O}(f, s_0)$, *entonces* $u \in \mathcal{O}\left(\overline{f}, s_0\right)$ *y* $\Theta_u f = \Theta_u \overline{f}$.

Demostración. Si $u \in \mathcal{O}(f, s_0)$, entonces $f(s_0) = u.\sigma_{s_0} f = \overline{f}(s_0)$, y $u^{-1}\overline{f}(s_0)$ por tanto $\sigma_{s_0} f = \sigma_{s_0}\ \overline{f}$ y $u \in \mathcal{O}\left(\overline{f}, s_0\right)$. Además usando el corolario anterior

$$\begin{aligned} d_{s_0} f &= \Theta_{s_0} f + u.\left(d_{s_0}(\sigma f)\right) = \\ d_{s_0} \overline{f} &= \Theta_{s_0} \overline{f} + u.\left(d_{s_0}\left(\sigma \overline{f}\right)\right) \end{aligned} \tag{52}$$

pero estas fórmulas expresan la descomposición de $d_{s_0} f = d_{s_0} \overline{f}$ en los dos sumandos que se corresponden con la suma directa

$$T_{x_0}\mathcal{E} = \mathcal{V}_{x_0} \oplus u.T_o\mathcal{O}$$

siendo $x_0 = f(s_0) = \overline{f}(s_0)$, $o = \sigma_{s_0} f = \sigma_{s_0}\ \overline{f}$, y $\mathcal{V}_{x_0} = \ker(d_{x_0}\sigma)$, donde $\sigma : \mathcal{E} \ni x \to \sigma(x) = G.x \cap \mathcal{O} \in \mathcal{O}$ es la proyección sobre la sección (definida en (41)). Por tanto los sumandos correspondientes en (52) coinciden. ■

Nota 39 *La descomposición anterior es exactamente la* trasladada *mediante* u *de*

$$\begin{array}{c} G/H \times \mathcal{O} \approx \mathcal{E},\ G/H \times o \approx G.o \\ \mathfrak{g}/\mathfrak{h} \times T_o\mathcal{O} \approx T_o\mathcal{E} \end{array}$$