

ESPACIO-TIEMPOS DE PUNTO OMEGA

Alfredo Bautista Santa-Cruz

Dirigido por Javier Lafuente López

Febrero 2001

Índice General

1	Introducción	2
2	Preliminares	8
2.1	Curvas en espacio-tiempos	8
2.2	Geometría y curvaturas de espacio-tiempos	11
2.3	Condiciones de causalidad	13
3	Espacio-tiempos de punto omega	28
3.1	Causalidad	28
3.2	Variación de una curva	37
3.3	Superficies de curvatura media constante	40
3.4	Espacio-tiempos de Robertson-Walker	51

Capítulo 1

Introducción

Una de las características que distingue al *ser humano* de los demás *seres vivos* es su capacidad de formular preguntas sobre los más variados aspectos de la propia *vida*. Pero esa capacidad no dice mucho en su favor si, a su vez, no intenta dar respuestas a tales cuestiones. El contenido y el fondo de las respuestas ofrecidas depende, entre otras muchas variables, del punto de vista desde el que se formule la pregunta ya que no se utilizan las mismas armas para responderla. El científico, el filósofo, el teólogo y, en general, cualquier *persona* no utilizan en la misma medida la razón, la intuición, la fe, etc. por lo que es difícil que coincidan en la misma respuesta. Pero estas diferencias no implican una incompatibilidad sino más bien pueden ser aspectos complementarios de la misma *realidad*.

Ya en estas pocas líneas hemos nombrado una serie de conceptos (ser humano, ser vivo, vida, persona, realidad) que todos usamos en nuestra vida cotidiana y que han sido objeto de profundas y sesudas discusiones a lo largo de toda la Historia. Desde los tiempos más remotos el concepto de *vida* ha sido una fuente inagotable de preguntas que aún hoy sigue manando. Se ha buscado dar explicación al origen, al mecanismo de transmisión y a la misma definición de vida entre otros muchos aspectos. En el libro del Génesis podemos encontrar el origen del ser humano, desde un punto de vista puramente religioso, en los siguientes fragmentos:

”Y dijo Dios: Hagamos al hombre a nuestra imagen, conforme a nuestra semejanza; y señoree en los peces de la mar, y en las aves de los cielos, y en las bestias, y en toda la tierra, y en todo animal que anda arrastrando sobre la tierra. Y crió Dios al hombre a su imagen, a imagen de Dios lo crió; macho y hembra los crió.”¹

Esta respuesta no pretende detallar el mecanismo por el cual aparecieron todas las especies vivientes, sino poner de relieve que todo ha sido creado a partir de un Ser superior y primigenio.

¹Génesis 1, 26-27.

En el poema *Enuma Elish*, escrito en Babilonia en la mitad del segundo milenio antes de Cristo, aparece una creación del Universo, donde el ser humano es creado por los dioses a partir de la sangre de otro, Kingu, ajusticiado en presencia del dios Ea:

Lo apresaron, lo colgaron ante Ea,
condenado, cortaron sus arterias,
y de su sangre crearon la humanidad.”²

Al igual que en La Biblia, no se intenta hacer ciencia con esta descripción de la creación de la humanidad. El mensaje que se intenta transmitir es que el ser humano proviene de la sangre de un dios rebelde y ésta puede ser la explicación de su beligerancia.

También en la antigua Grecia se buscaron explicaciones al origen de la vida humana. Así, según Censorino³:

”Anaximandro de Mileto pensaba que del agua y la tierra calientes han nacido o bien peces o bien animales similares a los peces: en éstos los hombres se formaron y mantuvieron interiormente, como fetos, hasta la pubertad; sólo entonces aquellos reventaron y aparecieron varones y mujeres que ya podían alimentarse por sí mismos.”⁴

En 1859, Charles Darwin publicó el revolucionario libro de *El origen de las especies* que contradecía la teoría aceptada por la gran mayoría de naturalistas, entre ellos el eminente Karl von Linnaeus (1707-1778), la cual postulaba que todas las especies habían sido creadas como tales y se reproducían sin ninguna variación de la pareja original. Es conocida la gran controversia creada por los partidarios y detractores de la nueva teoría, de la que Darwin se mantuvo al margen. En el capítulo introductorio de *El origen de las especies*, Charles Darwin escribe:

”Al considerar el origen de las especies, es totalmente comprensible que un naturalista [...] llegue a la conclusión de que las especies no han sido creadas independientemente, sino que han descendido, como variedades, de otras especies.[...] es absurdo atribuir a meras condiciones externas la estructura, por ejemplo,

² *Theories of the Universe, from Babylonian myths to modern science*. Editado por Milton K. Munitz. The Free Press, 1957. Fragmento tomado de la página 19.

³ Censorino vivió a mediados del siglo III d.C. y escribió *De die natali* (Sobre el día del nacimiento).

⁴ Fragmento de *Los filósofos presocráticos*, vol. 1. Editorial Gredos. Madrid, 1978.

del pájaro carpintero, con sus patas, su cola, su pico y su lengua tan admirablemente adaptados para capturar insectos bajo la corteza de los árboles.”⁵

Además de especialistas, también algunos grandes científicos de otras especialidades se han visto atraídos por este tema. Éste es el caso de Erwin Schrödinger, que en 1944 publicó un pequeño volumen con el sugerente título *¿Qué es la vida?* donde trata este concepto desde un punto de vista físico cuántico. Schrödinger da la siguiente descripción de vida:

”¿Cuál es el rasgo característico de la vida? ¿Cuándo puede decirse que un pedazo de materia está vivo? Cuando sigue ‘haciendo algo’, ya sea moviéndose, intercambiando material con el medio ambiente, etcétera, y ello durante un periodo mucho más largo que el que esperaríamos que ‘siguiera haciéndolo’ un pedazo de materia inanimada en circunstancias similares.”⁶

Pero también hay intentos que no se limitan a un único punto de vista, sino que tratan de dar una respuesta bastante más global. En 1996 Frank Tipler publica *La física de la inmortalidad*, donde estudia los conceptos de vida, alma, resurrección..., conceptos marcadamente filosóficos y teológicos, desde un punto de vista más cercano a la ciencia, aunque sin apartarse de éstos. Su definición de vida es la siguiente:

”...la vida es información conservada gracias a la selección natural.”⁷

A partir de esta definición las leyes físicas imponen condiciones para que exista esa vida, ya que si no fuese posible intercambiar información en algún lugar del universo en algún momento determinado entonces en ese lugar y en ese momento no podría existir la vida, o en sus propias palabras:

”Si las leyes de la física no permiten que se pueda procesar información en cierta región del espacio-tiempo, la vida simplemente no podrá existir allí.”⁸

⁵ *Del origen de las especies por medio de la selección natural o la conservación de las razas favorecidas en la lucha por la vida.* Charles Darwin. Fragmento tomado de *El origen de las especies*, ed. Alba Libros, Madrid, 1999.

⁶ Fragmento tomado de la página 109 de *¿Qué es la vida?* Erwin Schrödinger, 3ª edición, Tusquets editores, Barcelona, 1983.

⁷ F. Tipler. *La física de la inmortalidad.* Alianza Editorial, Madrid, 1996. Página 178.

⁸ F. Tipler. *Op. cit.* página 179.

Para estudiar cuándo es posible procesar información y cuándo la vida puede existir para siempre, Tipler emplea la teoría de causalidad desarrollada en las décadas de los 60 y 70 fundamentalmente dentro de la Teoría de la Relatividad General. Establece la condición de que exista al menos una curva γ en un espacio-tiempo en la que el procesamiento de información no se detenga hasta llegar al final del tiempo, es decir, a su *frontera causal*. Otra condición es que la información procesada sólo debe ser tenida en cuenta si es posible comunicársela a la curva γ , apostillando que:

”...la manera más apropiada de medir la duración del tiempo es a través de la velocidad del pensamiento, en vez de utilizar el tiempo propio medido por relojes atómicos.”⁹

Estas formas del tiempo se corresponden, según Tipler, con dos de las formas que existen en la filosofía de santo Tomás de Aquino: el *tempus* sería el análogo al tiempo propio:

”...consistente en el tiempo medido por el cambio en las relaciones (por ejemplo, las posiciones) entre los cuerpos físicos sobre la Tierra. [...] también se cumple que el *tempus* controla el tiempo en las mentes dotadas de cuerpo.”¹⁰

La otra forma de tiempo es el *aevum* que se correspondería con el *tiempo subjetivo* definido por la velocidad del pensamiento:

”...la duración para el caso de los seres conscientes incorpóreos -los ángeles- no está controlada por la materia sino que se mide por la variación de los estados mentales de estos mismos seres.”¹¹

En la filosofía tomista existe una tercera forma de tiempo, el *aeternitas*, que es

”... la duración [de tiempo] experimentada sólo por Dios”.¹²

Para Tipler el *aeternitas* se corresponde con

”... el equivalente al conjunto de todas las experiencias de todo lo viviente que existió, existe ahora y existirá en la totalidad de la historia universal, junto con todos los instantes de tiempo no experimentados por la vida.”¹³

⁹F. Tipler. *Op. cit.* página 186.

¹⁰F. Tipler. *Op. cit.* página 187.

¹¹F. Tipler. *Op. cit.* página 187.

¹²F. Tipler. *Op. cit.* página 187.

¹³F. Tipler. *Op. cit.* página 209.

Con todas estas premisas, Tipler deduce que el universo debe ser cerrado para que se pueda intercambiar información entre dos lugares cualesquiera donde exista la vida y también la frontera causal futura debe estar formada por un único punto para que no existan horizontes de sucesos y la información pueda ser transmitida desde cualquier punto del universo hasta cualquier curva γ de las anteriores. Este punto ideal se denomina *punto omega*¹⁴ y a él confluyen todas las historias de todo lo viviente. El tiempo que experimenta el punto omega es el aeternitas, así pues el punto omega es eterno y por tanto lo identifica con Dios. Para Tipler, los modelos de espacio-tiempos de punto omega son modelos matemáticos de Dios.

Guiados por los modelos geométricos que aparecen en la obra de Tipler, el objetivo de éste trabajo, dejando al margen las ideas filosóficas contenidas en las obras mencionadas, es mostrar qué propiedades impone el hecho de que un espacio-tiempo sea de punto omega. Nuestro trabajo tiene un carácter de recopilación selección y exposición, de algunas técnicas y resultados dispersos en la literatura, que contribuyeron a establecer algunas buenas propiedades recientemente conocidas de este sugerente modelo cosmológico. Hemos aportado en algunos casos demostraciones alternativas a las originales. En otras ocasiones nos hemos recreado en reproducir a nuestro modo demostraciones especialmente delicadas o especialmente geométricas. Por último, hemos renunciado intencionadamente a exponer, algunas otras demostraciones que emplean casi exclusivamente herramientas del Análisis

Para poder tener una buena definición del punto omega se necesita verificar unas mínimas condiciones de causalidad: si el espacio-tiempo cumple la condición de distinción de pasado entonces hay una caracterización de los puntos en la frontera causal futura como pasados cronológicos de curvas inextensibles hacia el futuro. Esta caracterización no es posible si solo se verifica la condición cronológica o causal. El espacio-tiempo que verifique la condición de distinción de pasado y además sea de punto omega, será automáticamente globalmente hiperbólico y cerrado. Suponiendo que también se cumple la razonable condición de convergencia temporal entonces se tiene la existencia de una superficie de Cauchy con curvatura media constante cerca del punto omega. También se demuestra que si no hay dos superficies de Cauchy con la misma curvatura media constante entonces existe una foliación de tales superficies de Cauchy lo suficientemente cerca del punto omega.

Se introducen múltiples resultados básicos de espacios de Lorentz, causalidad y cálculo de variaciones sin dar su demostración explícita pero indicando la referencia para encontrarla y tratar de hacer así, en la medida de lo posible, que el trabajo sea autocontenido.

¹⁴Según John Gribbin en *El punto omega* (Alianza editorial, Madrid, 1987) el nombre de punto omega se debe al filósofo jesuita francés Pierre Teilhard de Chardin que en su libro *El fenómeno humano* (Taurus, Madrid, 1974) expone la idea de un punto en el futuro al que se converge, que llama Omega, donde todo se une íntegramente en sí mismo.

En la última parte del trabajo se ofrece, como ilustración de la teoría, el estudio de las condiciones suficientes que deben cumplir los modelos de Robertson-Walker para ser de punto omega.

Capítulo 2

Preliminares

El objetivo de esta sección es mostrar algunas propiedades de los espacio-tiempos de punto omega. Para ello, en primer lugar, trataremos de crear un marco adecuado para el desarrollo de la teoría, recordando las definiciones necesarias y ciertos resultados importantes para luego definir una frontera del espacio-tiempo bajo hipótesis de causalidad adecuadas.

2.1 Curvas en espacio-tiempos

Las siguientes definiciones se pueden encontrar fácilmente en un gran número de referencias, pero recomendamos la consulta de [9] y [10] debido a que hemos tomado un punto de vista más cercano a éstas.

Definición 2.1.1 *Se dice que el par (M, g) es un **espacio-tiempo** si M es una variedad diferenciable tal que $\dim M \geq 2$ y g es un tensor de tipo $(0, 2)$, simétrico, diferenciable y no degenerado tal que para todo $p \in M$ existe una base de $T_p M$ en la que $g_p = \text{diag}(-1, +1, \dots, +1)$ ¹*

Abusando de la notación, diremos que M es un espacio-tiempo si (M, g) lo es y no hay una posible confusión con la métrica g . Un vector $v \in T_p M$ tal que $v \neq 0$ diremos que es:

espacial si $g_p(v, v) > 0$
nulo ó luz si $g_p(v, v) = 0$
temporal si $g_p(v, v) < 0$

Cada una de estas categorías en las que puede estar un vector $v \in T_p M$ se denomina **carácter causal de v** . El conjunto de vectores luz de $T_p M$

¹Esta definición coincide con la de variedad de Lorentz en [9, capítulo 3]. Tradicionalmente, los espacio-tiempos se consideran de dimensión 4, pero vamos a aceptar cualquier dimensión mayor o igual a 2 sin olvidar que nuestra motivación son los espacios tetradimensionales.

desconecta al conjunto de vectores temporales en dos componentes conexas (ver [9, capítulo 5]), que llamaremos **futuro** y **pasado** de p respectivamente.

Definición 2.1.2 ²Sea τ una función sobre M que asigna a cada $p \in M$ una componente conexa τ_p del conjunto de los vectores temporales de T_pM . La función τ es diferenciable si para cada $p \in M$ existe un campo vectorial V diferenciable en algún entorno U de p tal que $V_q \in \tau_q$ para todo $q \in U$. A una función tal la llamaremos **orientación en el tiempo** de M . Diremos que (M, g) es **orientable en el tiempo** si admite una orientación en el tiempo. Si tenemos una orientación en el tiempo τ en (M, g) entonces diremos que (M, g) está **orientada en el tiempo**.

Si (M, g) está orientado en el tiempo y $p \in M$, $v \in T_pM$, diremos que v es un **vector futuro** (resp. **pasado**) si v está en el futuro (resp. pasado) de p .

Observación 2.1.1 La orientabilidad en el tiempo para un espacio-tiempo es equivalente a la existencia de un **campo vectorial X temporal**, es decir que para todo $p \in M$ el vector $X_p \in T_pM$ es temporal. En efecto, si X existe, entonces asignando a cada $p \in M$ la componente conexa de T_pM que contiene a X_p tenemos una orientación en el tiempo. Por otro lado, si tenemos una orientación en el tiempo τ en M entonces para cada punto $p \in M$ existe un entorno U_p en el que está definido un campo vectorial temporal X_{U_p} cuyo valor para cada $q \in U_p$ está en τ_q . Utilizando particiones de la unidad de M se puede construir un campo X temporal definido en todo M . Los detalles pueden verse en [9, lema 5.32].

Definición 2.1.3 Sea $\gamma : \Gamma \rightarrow M$ una aplicación continua y diferenciable a trozos donde Γ es un intervalo contenido en \mathbb{R} , entonces diremos que γ es una **curva** en M . A las clases de equivalencia de curvas en M bajo la relación \sim dada por $\gamma \sim \mu \iff \mu = \gamma \circ \varphi$ donde $\gamma : \Gamma \rightarrow M$, $\mu : \Sigma \rightarrow M$ son curvas en M y $\varphi : \Gamma \rightarrow \Sigma$ es un difeomorfismo tal que $\varphi' > 0$ también las llamaremos **curvas** en M .

Diremos que γ es una **curva temporal** (resp. **luz** o **nula**, **espacial**) si su vector tangente es temporal (resp. luz, espacial) en cada punto de $\gamma(\Gamma)$. Si γ es una curva temporal tal que posee puntos $s \in \Gamma$ en los que no es diferenciable, se deberá entender que

$$g_{\gamma(s)}(\gamma'(s^+), \gamma'(s^+)) < 0$$

$$g_{\gamma(s)}(\gamma'(s^-), \gamma'(s^-)) < 0$$

y además

$$g_{\gamma(s)}(\gamma'(s^+), \gamma'(s^-)) < 0$$

²Esta definición aparece en [9, pag. 145].

donde $\gamma'(s^+)$ representa el vector tangente por la derecha de s y $\gamma'(s^-)$ es el tangente por la izquierda de acuerdo con la notación tradicional. Las dos primeras condiciones quieren decir que $\gamma'(s^+)$ y $\gamma'(s^-)$ son vectores temporales y la tercera condición significa que $\gamma'(s^+)$ y $\gamma'(s^-)$ son o bien ambos futuros o bien ambos pasados. En el mismo sentido diremos que γ es una **curva temporal futura** (resp. **pasada**) si todo vector tangente de γ es un vector temporal futuro (resp. pasado).

Diremos que una curva (o un vector) es **causal** si sus vectores tangentes tienen carácter temporal o luz. Con esto estamos asumiendo que las curvas son regulares, es decir, que su vector tangente nunca se anula. Por esta razón, toda curva causal es o bien futura o bien pasada, pero no puede ocurrir que tenga unos vectores tangentes futuros y otros pasados.

Definición 2.1.4 Un abierto $C \subset M$ es **convexo** si es un entorno normal de cada uno de sus puntos, es decir, que para cualquier par de puntos $p, q \in C$ existe una única geodésica contenida en C que los une.

Lema 2.1.1 Dado un recubrimiento abierto R de M , existe un recubrimiento C formado por abiertos convexos tales que cualquier elemento de C está contenido en uno de R .

Demostración: La demostración puede verse en [9, lema 5.10]. ■

Definición 2.1.5 Sea $\gamma : \Gamma \rightarrow M$ una curva en M , sea $a = \inf(\Gamma)$ y $b = \sup(\Gamma)$ (posibilitando $a = -\infty$, $b = +\infty$), entonces diremos que $q \in M$ es un **extremo o punto final** de γ si para toda sucesión $\{s_j\} \subset \Gamma$, $s_j \rightarrow a$ implica que $\gamma(s_j) \rightarrow q$ o bien $s_j \rightarrow b$ implica que $\gamma(s_j) \rightarrow q$. Si γ es una curva causal futura entonces en el primer caso q es un **extremo pasado** y en el segundo caso es un **extremo futuro** de γ .

Si γ es una curva causal tal que no existe extremo futuro (resp. pasado) de γ en M , entonces diremos que γ es **inextensible hacia el futuro** (resp. **pasado**). Si no existiesen extremos pasados ni futuros, diremos simplemente que γ es **inextensible**. Si una curva no es inextensible, se dice que es **extensible**. Por conveniencia y para evitar comportamientos patológicos (ver [10, sección 1]) requeriremos que todas las curvas causales extensibles contengan a sus extremos³.

Proposición 2.1.1 Si C es un abierto convexo de M , entonces una curva causal γ contenida en un subconjunto $K \subset C$ compacto es extensible.

Demostración: Ver demostración en [9, lema 14.2(5)]. ■

³La extensibilidad de una curva no implica que ésta pueda realizarse de forma diferenciable ni tan siquiera de una forma única. Si $\gamma : (a, b] \rightarrow M$ es una curva extensible que oscila de tal manera en $\gamma(b) \in M$ que no existe $\gamma'(b)$, entonces γ se puede extender en un entorno convexo C de $\gamma(b)$ extendiendo a partir de $\gamma(b)$ la geodésica que une $\gamma(b - \epsilon)$ con $\gamma(b)$ para cierto $\epsilon > 0$ tal que $\gamma(b - \epsilon) \in C$.

2.2 Geometría y curvaturas de espacio-tiempos

En esta sección vamos a hacer un breve resumen de algunos elementos importantes de la geometría diferencial de espacio-tiempos. Daremos sus definiciones para evitar posibles confusiones debido a que en la literatura se encuentran distintas definiciones de los mismos objetos geométricos como es el caso del tensor de Riemann que cambia de signo según el autor que lo trate.

Denotaremos mediante ∇ a la **conexión de Levi-Civita** de M , es decir, a la única conexión que verifica que

$$[X, Y] = \nabla_X Y - \nabla_Y X$$

y además

$$X \cdot g(Y, Z) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z) \quad (2.1)$$

siendo X, Y y Z campos tangentes a M , y $[X, Y] = XY - YX$ es el **corchete de Lie** de X e Y . Recordemos que la conexión de Levi-Civita viene caracterizada por la **fórmula de Koszul**:

$$2g(\nabla_X Y, Z) = X \cdot g(Y, Z) + Y \cdot g(Z, X) - Z \cdot g(X, Y) - \\ -g(X, [Y, Z]) + g(Y, [Z, X]) + g(Z, [X, Y])$$

Sea x^1, \dots, x^n un sistema de coordenadas de M y sean $\frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n}$ los campos coordenados asociados a dicho sistema.

Recordemos que los **símbolos de Christoffel** son las funciones reales Γ_{ij}^k definidas por

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^j} = \Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial x^k}$$

Estas funciones se pueden expresar en función de la métrica g mediante la siguiente fórmula:

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} g^{km} \left(\frac{\partial g_{jm}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{im}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^m} \right) \quad (2.2)$$

Vamos a definir el **tensor de curvatura o de Riemann** de la misma manera que en [3] y en [7] como

$$R(X, Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]} Z \quad (2.3)$$

teniendo en cuenta que, por ejemplo, en [9, pág. 74] esta definición se hace con el signo opuesto. La contracción del tensor de curvatura de Riemann nos define el **tensor de Ricci**

$$Ricc(X, Y) = \sum_m g(e_m, e_m) \cdot g(R(X, e_m)Y, e_m) \quad (2.4)$$

donde $\{e_m\}_{m=1, \dots, n}$ forma una base local de campos vectoriales mutuamente ortogonales y unitarios.

Definición 2.2.1 Diremos que M verifica la **condición de convergencia temporal** si $\text{Ricc}(v, v) \geq 0$ para todo v temporal. La interpretación física de esta condición en modelos cosmológicos es que la gravedad, en promedio, atrae (ver [9, pág. 340]).

Consideremos a $S \subset M$ como una hipersuperficie espacial diferenciable, entonces si V y W son campos tangentes a S , definimos la **segunda forma fundamental** como

$$\chi(V, W) = g(\nabla_V W, N)$$

donde N es un campo normal a S . Por las propiedades de la conexión ∇ se puede demostrar que χ es un tensor simétrico (ver [9, lema 4.4]). Hay que notar que podemos elegir el campo N como futuro o como pasado teniendo en cuenta que obtendremos valores opuestos de χ . Por ello vamos a fijar el convenio de elegir N , en todos los casos a partir de ahora, como el campo futuro normal a S .

Una vez que tenemos la segunda forma fundamental definimos la **curvatura media** de S como

$$k = - \sum_{i=1}^{n-1} g(\nabla_{V_i} V_i, N)$$

donde $\{V_i\}_{i=1, \dots, n-1}$ es una base ortonormal de campos vectoriales tangentes a S . Nótese que en [9, pág. 101] se hace esta definición dividiendo entre $n - 1$.

Observación 2.2.1 Por la fórmula 2.1 (pág. 11) tenemos que

$$g(\nabla_{V_i} V_i, N) + g(\nabla_{V_i} N, V_i) = V_i \cdot g(V_i, N) = 0$$

y por tanto

$$g(\nabla_{V_i} V_i, N) = -g(\nabla_{V_i} N, V_i)$$

Recordemos además que para cada $p \in S$, la **aplicación de Weingarten** definida por $L : T_p S \rightarrow T_p S$ es un endomorfismo ya que como $2g(\nabla_V N, N) = V \cdot g(N, N) = 0$ entonces $(\nabla_V N)(p) \in T_p S$. Entonces como

$$k = - \sum_{i=1}^{n-1} g(\nabla_{V_i} V_i, N) = \sum_{i=1}^{n-1} g(\nabla_{V_i} N, V_i)$$

la curvatura media es la traza de la aplicación de Weingarten y por eso k depende de la base vectorial elegida.

Para profundizar sobre estos objetos geométricos podemos consultar en [3], [7] o [9] ya que aquí sólo hemos dado de manera breve las definiciones puesto que ya se suponen familiares.

2.3 Condiciones de causalidad

De ahora en adelante consideraremos que el espacio-tiempo M está orientado en el tiempo. Con esta orientación podemos definir ciertos conjuntos que nos permiten estudiar la estructura causal de M .

Definición 2.3.1 Sea N un subconjunto de M , y sea S un subconjunto de N :

- a) Llamaremos **futuro** (resp. **pasado**) **cronológico de S en N** al conjunto de puntos de N que pueden ser conectados con S mediante una curva temporal futura (resp. pasada) contenida en N . Lo denotaremos con $I^+(S, N)$ (resp. $I^-(S, N)$). En el caso que $N = M$ lo denotaremos simplemente con $I^+(S)$ (resp. $I^-(S)$).
- b) Llamaremos **futuro** (resp. **pasado**) **causal de S en N** a la unión de S con el conjunto de puntos de N que pueden ser conectados con S mediante una curva causal futura (resp. pasada) contenida en N . Lo denotaremos con $J^+(S, N)$ (resp. $J^-(S, N)$). Cuando $N = M$ lo denotaremos simplemente con $J^+(S)$ (resp. $J^-(S)$).
- c) Diremos que S es un conjunto **ácrono** si para todo $p \in S$ se verifica que $I^+(p) \cap S = \emptyset$.
- d) Diremos que S es un conjunto **acausal** si para todo $p, q \in S$ se verifica que no existe ninguna curva causal γ que conecte p con q .
- e) Si S es un conjunto ácrono, llamaremos **dominio de dependencia futuro** (resp. **pasado**) al conjunto de puntos $p \in M$ tales que cada curva causal inextensible hacia el pasado (resp. futuro) que pasa por p interseca a S . Lo denotaremos como $D^+(S)$ (resp. $D^-(S)$). Y llamaremos **dominio de dependencia** a $D(S) = D^+(S) \cup D^-(S)$. Frecuentemente, a los dominios de dependencia se los llama **desarrollos de Cauchy**.

Observación 2.3.1 En la bibliografía, para abreviar, a veces se utiliza la expresión $p \ll q$ para decir que $q \in I^+(p)$, también la expresión $p < q$ para decir que existe una curva causal futura desde p hasta q . La expresión $p \leq q$ quiere decir que o bien $p < q$ o bien $p = q$. Eventualmente también usaremos esta notación.

Proposición 2.3.1 Si C es un subconjunto convexo de M entonces $I^+(p, C)$ y $I^-(p, C)$ son abiertos para todo $p \in C$.

Demostración: Como C es convexo entonces es un entorno normal de cada uno de sus puntos, así pues, existe un entorno \tilde{C} de $0 \in T_p M$ tal que $\exp_p : \tilde{C} \rightarrow C$ es un difeomorfismo. Queremos encontrar para cada $q \in I^+(p, C)$ un entorno U contenido en $I^+(p, C)$. Es claro que $F : T_p M \rightarrow \mathbb{R}$

$v \mapsto g(v, v)$ es una función continua (de hecho diferenciable), si $v = \exp_p^{-1}(q) \in \tilde{C}$ es un vector temporal futuro entonces $F(v) = a < 0$ y por tanto se tiene que existe un entorno abierto I de $a \in \mathbb{R}$ tal que todo vector de $F^{-1}(I)$ es temporal futuro. Como F es continua entonces $F^{-1}(I)$ es un entorno abierto de v contenido en \tilde{C} . Por tanto $U = \exp_p(F^{-1}(I))$ es un entorno abierto de q contenido en $I^+(p, C)$ por ser todo vector de $F^{-1}(I)$ temporal futuro. De igual manera se procede con $I^-(p, C)$. ■

Corolario 2.3.1 *Los conjuntos $I^+(p)$ y $I^-(p)$ son abiertos para todo $p \in M$.*

Demostración: Sea $\{C_i\}_{i \in I}$ un recubrimiento convexo de M . Si $q \in I^+(p)$ entonces existe una curva γ temporal futura que une p con q . Además existe $j \in I$ tal que $q \in C_j$ y tomamos $q' \in \gamma \cap C_j$ tal que $q' \in I^-(q) \cap I^+(p)$. Por la proposición 2.3.1 tenemos que existe un entorno U de q tal que $U \subset I^+(q', C_j)$ y como $I^+(q', C_j) \subset I^+(q') \subset I^+(p)$ entonces tenemos que $U \subset I^+(p)$. Por tanto $I^+(p)$ es abierto. Con un razonamiento análogo se demuestra que $I^-(p)$ es abierto. ■

A continuación vamos a enunciar un teorema de causalidad que es básico para poder estudiar el caracter causal de los espacio-tiempos.

Teorema 2.3.1 *Sea M un espacio-tiempo, si α es una curva causal que une los puntos $p, q \in M$ y no es una geodésica luz, entonces en cualquier entorno de la curva α existe una curva temporal β que une los puntos p y q .*

Demostración: Ver demostración en [9, proposición 10.46]. ■

Como consecuencia de este teorema tenemos el siguiente corolario:

Corolario 2.3.2 *Si $r \in J^+(q)$ y $q \in I^+(p)$, o bien si $r \in I^+(q)$ y $q \in J^+(p)$ entonces $r \in I^+(p)$.*

Demostración: En el primer caso, si $q \in I^+(p)$ entonces existe una curva α_1 temporal que une p con q , y si $r \in J^+(q)$ entonces existe una curva causal α_2 que une q con r (si $q = r$ entonces α_2 se reduce a un punto). Entonces la curva $\alpha = \alpha_1 \cup \alpha_2$ es una curva causal que une los puntos p con r y no es una geodésica luz ya que α_1 es temporal. Por el teorema 2.3.1 tenemos que existe una curva temporal β que une p con r , por tanto se tiene que $r \in I^+(p)$. En el caso en que $r \in I^+(q)$ y $q \in J^+(p)$ se razona de manera análoga. ■

Este corolario es igualmente cierto considerando los pasados cronológicos y causales y su demostración es análoga invirtiendo los papeles del futuro y del pasado.

Observación 2.3.2 *Vamos a ver algunas propiedades importantes de los pasados y futuros cronológicos y causales que utilizaremos frecuentemente.*

Es claro por la definición que $I^+(p) \subset J^+(p)$, y como consecuencia del corolario 2.3.2 (ver [7, pág. 183]) se tiene que $\text{int}(I^+(p)) = \text{int}(J^+(p))$ y además $\overline{I^+(p)} = \overline{J^+(p)}$.

También se desprende de la definición que si A y B son dos conjuntos tales que $A \subset B$ entonces es claro que $I^+(A) \subset I^+(B)$ y que $I^-(A) \subset I^-(B)$.

*Diremos que un conjunto S es un **conjunto futuro** (resp. **pasado**) si $I^+(S) \subset S$ (resp. $I^-(S) \subset S$) que en el caso en que S sea abierto entonces tenemos la igualdad entre estos conjuntos (ver [7, págs. 217ss]). Para cualquier $A \subset M$ se tiene que el conjunto $I^+(A)$ es un conjunto futuro y además $J^+(A) = J^+(I^+(A))$. De igual manera el conjunto $I^-(A)$ es un conjunto pasado y además $J^-(A) = J^-(I^-(A))$ (ver [10, sección 2]).*

Un hecho que utilizaremos más adelante es que tanto el futuro y el pasado cronológico de un punto, $\partial I^+(p)$ y $\partial I^-(p)$, son hipersuperficies topológicas cerradas, ácronas e inmersas en M . Este resultado y su demostración puede verse en [7, proposición 6.3.1].

Para el estudio de la causalidad vamos a necesitar el concepto de límite de sucesiones de curvas causales y algún resultado de existencia. De los diversos enfoques que aparecen en la literatura vamos a destacar el concepto de *sucesión límite* aparecido en [9] y el de *curva límite* que encontramos en [7]. Ambos los utilizaremos más adelante según nuestras necesidades.

Definición 2.3.2 *Sea $\{\alpha_n\}$ una sucesión infinita de curvas causales futuras en M , y sea $C = \{C_i\}$ un recubrimiento convexo de M . Una **sucesión límite para $\{\alpha_n\}$ relativa a C** es una sucesión (finita o infinita) $p = p_0 < p_1 < \dots$ en M tal que:*

1. *Para cada p_i existe una subsucesión $\{\alpha_m\}$ y, para cada m existen números $s_{m0} < s_{m1} < \dots < s_{mi}$ tales que:*

- (a) $\lim_{m \rightarrow \infty} \alpha_m(s_{mj}) = p_j$ para cada $j \leq i$.

- (b) *Para cada $j < i$, los puntos p_j, p_{j+1} y los segmentos de α_m definidos en $[s_{mj}, s_{m,j+1}]$ están contenidos en un único $C_j \in C$ para todo m .*

2. *Si $\{p_i\}$ es infinito, entonces no converge. Si $\{p_i\}$ es finito entonces contiene más de un punto y ninguna sucesión estrictamente más larga verifica la propiedad 1.*

La figura 1 trata de hacer visible este difícil concepto que viene justificado por la veracidad de la siguiente proposición:

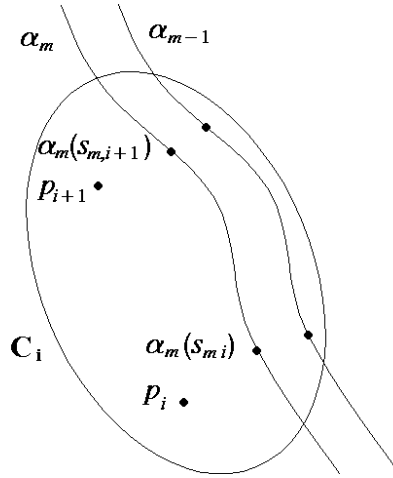


Figura 1. Cuasi-límite en un entorno convexo C_i .

Proposición 2.3.2 Sea $\{\alpha_n\}$ una sucesión de curvas causales futuras tales que $\{\alpha_n(0)\}$ converja a un punto $p \in M$ y que exista un entorno de p tal que sólo contenga una cantidad finita de curvas α_n , entonces relativa a cualquier recubrimiento convexo C , existe una sucesión límite comenzando en p .

Demostración: Ver demostración de [9, proposición 14.8]. ■

Una vez que tenemos una sucesión límite $\{p_i\}$ y si λ_i es la geodésica causal futura que une p_i con p_{i+1} en un conjunto convexo C_i verificando la propiedad 1 de la definición anterior, entonces uniendo las λ_i obtenemos una geodésica a trozos $\lambda = \cup \lambda_i$ conectando todos los p_i . Diremos en ese caso que λ es un **cuasi-límite de $\{\alpha_n\}$ con vértices p_i** . Si $\{p_i\}$ es infinita, entonces λ es inextensible hacia el futuro, y si $\{\alpha_n\}$ son inextensibles hacia el futuro, entonces λ será inextensible hacia el futuro. Para ver más detalles se recomienda consultar [9].

Definición 2.3.3 Diremos que una curva λ es una **curva límite** de una sucesión $\{\lambda_i\}$ de curvas si para todo punto $p \in \lambda$ existe una subsucesión $\{\lambda_k\}$ tal que cada entorno de p interseca a todas excepto un número finito de curvas de la subsucesión $\{\lambda_k\}$.

Proposición 2.3.3 Sea $U \subset M$ un abierto y sea $\{\alpha_n\}$ una sucesión infinita de curvas causales inextensibles hacia el futuro tales que $\alpha_n \subset U$ para todo n . Si $p \in U$ es un punto de acumulación de $\{\alpha_n\}$, entonces existe una curva causal λ que pasa por p y es inextensible hacia el futuro en U tal que también es curva límite de $\{\alpha_n\}$.

Demostración: Ver demostración en [7, lema 6.2.1]. ■

Podemos pedir que el espacio-tiempo verifique ciertas condiciones de causalidad en función de cómo se comporten las curvas causales en M . En el

capítulo 3 de [3] podemos encontrar una exposición completa de las condiciones de causalidad en la que se describen las implicaciones entre unas y otras. Enunciamos ahora las más importantes teniendo en cuenta que si se verifica una de ellas entonces se verifican todas las anteriores (ver [3]).

Definición 2.3.4 *Vamos a definir las siguientes condiciones de causalidad:*

- a) Diremos que M cumple la **condición cronológica** si no existen curvas temporales cerradas.
- b) Diremos que M cumple la **condición de causalidad** si no existen curvas causales cerradas.
- c) Diremos que M cumple la **condición de distinción del pasado** (resp. **futuro**) si $I^-(p) = I^-(q)$ (resp. $I^+(p) = I^+(q)$) implica que $p = q$ para todo $p, q \in M$.
- d) Diremos que en $p \in M$ se cumple la **condición fuerte de causalidad** si para cada entorno U de $p \in M$ existe un entorno $V \subset U$ de p tal que cualquier segmento de una curva causal con extremos en V , está contenido enteramente en U . Esto quiere decir que no hay curvas causales casi cerradas en p , es decir, que existe un entorno V de p tal que cualquier curva causal que abandone V no regresa a dicho entorno. Diremos que M cumple la condición fuerte de causalidad si la verifica para todo $p \in M$.
- e) Diremos que M es **establemente causal** si existe una función $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ cuyo gradiente es temporal para todo punto de M (ver [7, proposición 6.4.9])⁴.
- f) Diremos que M es **globalmente hiperbólico** si se verifica la condición fuerte de causalidad y además para cualesquier puntos $p, q \in M$ se tiene que $J^+(p) \cap J^-(q)$ es compacto.

Definición 2.3.5 *Una **superficie de Cauchy** es una hipersuperficie topológica $S \subset M$ tal que cualquier curva temporal inextensible interseca a S una y sólo una vez.*

Definición 2.3.6 *Una **función tiempo de Cauchy** es una función continua $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ tal que es estrictamente creciente a lo largo de toda curva temporal futura y además para todo $r \in \text{Im } f$ se tiene que $f^{-1}(r)$ es una superficie de Cauchy.*

⁴Esta definición está tomada de la proposición 6.4.9 de [7] y que caracteriza de esa manera los espacio-tiempos establemente causales. La estabilidad causal significa que si perturbamos ligeramente la métrica g entonces el espacio-tiempo continua verificando la condición de causalidad. Para ver un tratamiento más exhaustivo del tema ver [7, pág. 198ss].

Proposición 2.3.4 *Si M es globalmente hiperbólico entonces $J^+(p)$ y $J^-(p)$ son cerrados para todo $p \in M$.*

Demostración: Como en la demostración de [3, proposición 3.16] supongamos que $q \in \overline{J^+(p)} - J^+(p)$ y tomemos $r \in I^+(q)$. Dado que $I^-(r)$ es entorno abierto de q y además $q \in \overline{J^+(p)}$ se puede ver que $r \in I^+(p)$. En efecto, tomando una sucesión $\{q_n\} \subset J^+(p)$ tal que $q_n \mapsto q$, para n suficientemente grande se tiene que $r \in I^+(q_n)$ y como $q_n \in J^+(p)$ entonces el corolario 2.3.2 (pág. 14) implica que $r \in I^+(p)$. Entonces se tiene que

$$q \in \overline{J^+(p) \cap J^-(r)} - (J^+(p) \cap J^-(r))$$

pero esto es imposible ya que si M es globalmente hiperbólico entonces $J^+(p) \cap J^-(r)$ es compacto y por tanto cerrado, por lo que $\overline{J^+(p) \cap J^-(r)} = J^+(p) \cap J^-(r)$ y no puede existir tal punto q . ■

Proposición 2.3.5 *Sea M un espacio-tiempo con una superficie de Cauchy $S \subset M$, y sea X un campo vectorial temporal⁵ sobre M . Si $p \in M$, una curva integral maximal de X que pase por p corta a S en un único punto $\sigma(p)$. Entonces $\sigma : M \rightarrow S$ es una aplicación abierta, continua y suprayectiva dejando S fija punto a punto. En particular, S es conexa.*

Demostración: Ofrecemos la demostración de [9, proposición 14.31]. Es conocido que las curvas integrales maximales de X son inextensibles. Sea $\tilde{\Psi} : D \rightarrow M$ el flujo de X donde D es un abierto de $M \times \mathbb{R}$. Como S es una hipersuperficie topológica de M entonces $D_S = (S \times \mathbb{R}) \cap D$ es una hipersuperficie topológica en D y como $\tilde{\Psi}$ es diferenciable entonces su restricción $\Psi : D_S \rightarrow M$ es continua. Como además S es una superficie de Cauchy, es claro que $\Psi : D_S \rightarrow M$ es biyectiva. Como D_S y M tiene la misma dimensión, entonces Ψ es un homeomorfismo. La proyección $\pi : S \times \mathbb{R} \rightarrow S$ es una aplicación abierta, continua y suprayectiva, por tanto, como $\sigma = \pi \circ \Psi^{-1}$ entonces σ es abierta, continua y suprayectiva y además deja S fija punto a punto. Tenemos que M es conexo, entonces como σ es continua concluimos que $\sigma(M) = S$ es conexa. ■

Una consecuencia importante de esta proposición y que vamos a utilizar en el futuro es la equivalencia topológica de las superficies de Cauchy, es decir:

Corolario 2.3.3 *Todas las superficies de Cauchy de un espacio-tiempo M son homeomorfas.*

⁵Debido a que el espacio-tiempo es orientable en el tiempo, el campo vectorial temporal X existe como se explica en la observación 2.1.1 (pág. 9).

Demostración: La siguiente idea de la demostración puede verse en [9, corolario 14.32]. Sean S y T dos superficies de Cauchy de M y sea X un campo vectorial de M . Si σ_S y σ_T son las retracciones construidas en la proposición 2.3.5 para S y T respectivamente mediante el flujo de X entonces las restricciones $\sigma_S : T \longrightarrow S$ y $\sigma_T : S \longrightarrow T$ son aplicaciones inversas. ■

Observación 2.3.3 *Un resultado importante que relaciona los dominios de dependencia definidos anteriormente con la hiperbolicidad global es el teorema 14.38 de [9] que dice que si A es un conjunto ácrono, entonces $\text{int}D(A)$ (si no es vacío) es globalmente hiperbólico. Se puede aplicar este teorema a una superficie de Cauchy S , que por definición es un conjunto ácrono. Como $D(S) = M$ entonces al ser M abierto se tiene que $\text{int}D(S) = M$ con lo que se concluye que M es globalmente hiperbólico. Esto quiere decir que la existencia de una superficie de Cauchy en M asegura la hiperbolicidad global.*

Proposición 2.3.6 (Geroch) *Si M es un espacio-tiempo globalmente hiperbólico, entonces existe un difeomorfismo⁶ $\Psi : M \longrightarrow S \times \mathbb{R}$ donde S es una hipersuperficie de M tal que para todo $a \in \mathbb{R}$ se tiene que $\Psi^{-1}(S \times \{a\})$ es una superficie de Cauchy.*

Demostración: Ver demostración en [6] preferentemente o en [7, proposición 6.6.8]. ■

Observación 2.3.4 *Recordemos que se puede demostrar que las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. M es globalmente hiperbólico.
2. Existe una función tiempo de Cauchy en M .
3. M posee una superficie de Cauchy.

Para ver que 1) \Rightarrow 2) basta con aplicar la proposición 2.3.6 de Geroch que nos construye el difeomorfismo Ψ y comprobar que la función $f = \pi \circ \Psi$ es una función tiempo de Cauchy donde $\pi : S \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ es la proyección natural. En efecto, f es continua porque tanto π como Ψ también lo son. La nota al pie de página de la proposición 2.3.6 nos indica que f también es estrictamente creciente a lo largo de cualquier curva temporal futura. Por último, si $r \in \mathbb{R}$ entonces

$$f^{-1}(r) = (\pi \circ \Psi)^{-1}(r) = \Psi^{-1} \circ \pi^{-1}(r) = \Psi^{-1}(S \times \{r\})$$

es una superficie de Cauchy como asegura la proposición 2.3.6. Es trivial que 2) \Rightarrow 3) y por la observación 2.3.3 tenemos que 3) \Rightarrow 1).

⁶En la demostración de esta proposición el difeomorfismo Ψ es tal que si $\Psi(p) = (\Psi_1(p), \Psi_2(p)) \in S \times \mathbb{R}$ entonces Ψ_2 es una función estrictamente creciente a lo largo de cualquier curva temporal futura.

Por definición las curvas inextensibles no tienen puntos inicial ni final, pero si pudiéramos asociar un "inicio" y un "final" de forma unívoca a dichas curvas, podríamos estudiar el comportamiento a gran escala del espacio-tiempo. Estos "extremos" de curvas inextensibles no serán puntos del espacio-tiempo sino puntos ideales. Veamos la forma de hacerlo.

Definición 2.3.7 Diremos que W es un **conjunto pasado irreducible**⁷ y lo abreviaremos como **IP** si cumple las siguientes propiedades:

- a) W es abierto no vacío.
- b) W es un conjunto pasado, es decir, $I^-(W) = W$.
- c) W no se puede expresar como unión de dos conjuntos que verifiquen las propiedades a) y b) anteriores y que no estén contenidos el uno en el otro.

Diremos que W es un **IP propio**⁸ si se puede expresar como el pasado cronológico de algún punto de M , en caso contrario lo llamaremos **IP terminal**⁹. Abreviaremos esta nomenclatura denotándolos como **PIP** y **TIP** respectivamente. De la misma manera se puede dar una definición dual de **conjunto futuro irreducible**, así tendremos los **IF** divididos en **PIF** y **TIF**.

En la figura 2 se puede ver un ejemplo trivial de cómo se asocian los IP y los IF a la frontera del espacio-tiempo. En un rectángulo abierto del espacio-tiempo de Minkowski como espacio-tiempo en sí, los puntos del borde tales como p se asocian a TIP de la forma de A . El punto q se relaciona con el TIF B , y al punto r se le asocia o bien el TIP C o bien el TIF D .

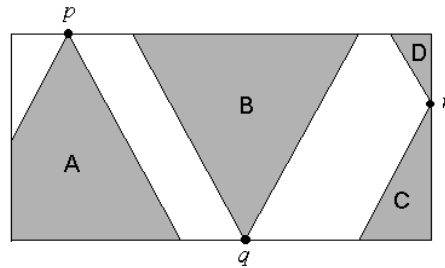


Figura 2. TIFs y TIPs.

Definición 2.3.8 Introduzcamos las siguientes definiciones fundamentales:

⁷En inglés: *indecomposable past set*.

⁸En inglés: *proper IP*.

⁹En inglés: *terminal IP*.

- a) Llamaremos **frontera causal futura** (resp. **pasada**) o **c-frontera del futuro** (resp. **pasado**) de M al conjunto de todos los TIP (resp. TIF). A la unión de la c-frontera del futuro y la del pasado la llamaremos simplemente **frontera causal** o **c-frontera**.
- b) Diremos que M es un **espacio-tiempo de punto omega** si la c-frontera del futuro está compuesta por un único TIP.

En la figura 2 se ve fácilmente que la c-frontera está formada por el borde del rectángulo.

Una vez recordadas estas definiciones, el objetivo del resto de esta sección es dar una caracterización de los TIP mediante curvas temporales inextensibles hacia el futuro. Esta caracterización no es gratuita y tendremos que pagar el precio de perder generalidad en las condiciones de causalidad. Se resume en una versión ligeramente más fuerte del teorema de Geroch, Kronheimer y Penrose (ver [3, proposición 6.14]) que enunciaremos al final de la presente sección. Las demostraciones de las siguientes proposiciones 2.3.7 y 2.3.8 están inspiradas en [7, proposición 6.8.1].

Proposición 2.3.7 $I^-(q)$ es un IP para todo $q \in M$.

Demostración: Es claro que $I^-(q)$ es un conjunto abierto y pasado. Veamos que si se puede descomponer en dos conjuntos abiertos y pasados no contenidos el uno en el otro obtendremos una contradicción. Supongamos que $I^-(q) = U \cup V$ donde U y V son abiertos y pasados tal que $U \not\subseteq V$ y tampoco $V \subseteq U$. Tomemos entonces dos puntos r y p tales que $r \in U \setminus V$ y $p \in V \setminus U$. Entonces tendremos que $q \in I^+(r) \cap I^+(p)$ y por tanto existe W entorno de q tal que para todo $Z \subset W$ entorno de q tenemos que $Z \subset I^+(r) \cap I^+(p)$. Así pues, para todo $s \in Z \cap I^-(q)$ tenemos que $r, p \in I^-(s)$. Si $s \in U$ entonces como U es un conjunto pasado y además $r, p \in I^-(s)$ tendríamos que $r, p \in U$ contradiciendo que $p \notin U$. Por tanto necesariamente $s \in V$, pero en ese caso $r, p \in V$ ya que $r, p \in I^-(s)$ y de nuevo hay una contradicción ya que $r \notin V$. Así pues no existen tales r y p y por tanto no es posible encontrar U y V abiertos y pasados tales que $I^-(q) = U \cup V$ que no estén contenidos el uno en el otro. ■

Proposición 2.3.8 W es un IP si y sólo si existe una curva causal γ tal que $I^-(\gamma) = W$.

Demostración: Supongamos primero que W es un IP, entonces tenemos que W puede ser un PIP o un TIP. Supongamos que es un PIP, entonces $W = I^-(q)$ para cierto $q \in M$. Cualquier curva temporal γ que tenga a q como punto final en el futuro verifica que $I^-(q) = I^-(\gamma)$. Por tanto γ es una

curva temporal, por tanto causal, tal que $W = I^-(\gamma)$. Supongamos ahora que W es un TIP. Tomemos un punto $p \in W$, entonces

$$W = (W \cap I^+(p)) \cup (W \setminus I^+(p))$$

y por tanto como $W = I^-(W)$ tenemos que

$$W = I^-(W \cap I^+(p)) \cup I^-(W \setminus I^+(p))$$

Veamos que $p \notin I^-(W \setminus I^+(p))$. Si no fuera el caso, entonces existiría un $q \in W \setminus I^+(p)$ tal que $p \in I^-(q)$ o lo que es lo mismo $q \in I^+(p)$ pero eso no puede ser ya que entonces q estaría y no estaría en $I^+(p)$ a la vez. Así pues $p \notin I^-(W \setminus I^+(p))$. Como W es un TIP, no puede ser la unión de dos abiertos pasados no contenidos el uno en el otro, entonces $W = I^-(W \cap I^+(p))$ ya que $p \notin I^-(W \setminus I^+(p))$. Si tomamos dos puntos cualesquiera $r, q \in W$ entonces podemos suponer que $W = I^-(W \cap I^+(r))$ y así existe $q_1 \in W \cap I^+(r)$ tal que $q_1 \in I^+(q)$. Por tanto $W \cap I^+(q) \cap I^+(r) \neq \emptyset$ y por tanto existe un punto $s \in W$ tal que $r, q \in I^-(s)$. Es decir, que para cualquier par de puntos $r, q \in W$ existe algún punto $s \in W$ en el futuro de ambos. Mediante esta propiedad vamos a construir una curva γ temporal e inextensible hacia el futuro tal que $I^-(\gamma) = W$. Sea $\{p_n\}$ una familia numerable de puntos de W densa en W . Elijamos un punto $q_0 \in W$, entonces para q_0 y p_0 existe un punto $q_1 \in W \cap I^+(q_0) \cap I^+(p_0)$. Consideremos ahora los puntos q_1 y p_1 , entonces existe $q_2 \in W \cap I^+(q_1) \cap I^+(p_1)$. Continuando de esta manera obtenemos una sucesión $\{q_n\} \subset W$ tal que $q_{n+1} \in I^+(q_n)$ para todo n . Por tanto podemos encontrar una curva temporal inextensible hacia el futuro que pase por todos los q_n . Dado un punto $p \in W$ tenemos que como $W \cap I^+(p)$ es abierto y no vacío entonces debe contener algún p_k ya que $\{p_n\}$ es denso en W . Para cada k , p_k está en el pasado de q_k por tanto p está en el pasado de γ . Esto implica que $W \subset I^-(\gamma)$ y como además $\gamma \subset W$ que es abierto y pasado, entonces tenemos que $I^-(\gamma) = W$.

Veamos el recíproco. Supongamos primero que γ tiene un $p \in M$ punto final en el futuro, entonces claramente se tiene que $I^-(p) = I^-(\gamma)$ que por la proposición 2.3.7 (pág. 21) es un IP. Supongamos ahora que γ es inextensible hacia el futuro, tenemos que ver que no existen U y V abiertos pasados y no contenidos el uno en el otro tales que $I^-(\gamma) = U \cup V$. Supongamos que sí existen. Podemos tomar entonces $r \in U \setminus V$ y $q \in V \setminus U$. Como $r, q \in I^-(\gamma)$ entonces existen $r_1, q_1 \in \gamma$ tales que $r \in I^-(r_1)$ y $q \in I^-(q_1)$. Como γ es inextensible hacia el futuro entonces existe $p \in \gamma$ tal que $r_1, q_1 \in I^-(p)$. Ahora bien, si $p \in U$ entonces $r, q \in U$ ya que U es un conjunto pasado, lo que contradice que $q \notin U$, pero si $p \in V$ entonces $r, q \in V$ y se contradice que $r \notin V$. Por tanto no existen U ni V con las condiciones mencionadas y así tenemos que $I^-(\gamma)$ es un IP. ■

Hay que observar en la demostración anterior que si W es un IP entonces existe una curva temporal tal que su pasado cronológico coincide con W ,

es decir, es posible restringir en la parte directa de la proposición 2.3.8 el resultado a curvas temporales. Pero nos interesa darnos cuenta de que el recíproco podemos generalizarlo para el conjunto de las curvas causales.

Es interesante investigar en qué condiciones el pasado cronológico de una curva temporal inextensible hacia el futuro puede coincidir con el pasado cronológico de un punto del espacio-tiempo. Que eso no suceda impone ciertas condiciones de causalidad como podemos ver en la siguiente proposición. Primero necesitaremos un lema.

Lema 2.3.1 *Sea γ una curva temporal inextensible hacia el futuro, sea $p \in M$ tal que $I^-(\gamma) = I^-(p)$. Si para todo entorno W relativamente compacto γ entra y sale continuamente de W , entonces se incumple la condición de distinción de pasado.*

Demostración: Vamos a construir una sucesión de curvas temporales $\{\gamma_n\}$ a partir de γ que tenga una sucesión límite con la que demostraremos que existen puntos q de dicha sucesión tal que $I^-(q) = I^-(p)$.

Tomemos una sucesión de entornos de p relativamente compactos $\{W_m\}$ tales que $W_{k+1} \subset W_k$ y además $W_m \rightarrow p$. Por hipótesis γ entra y sale continuamente de cada W_k . Tomemos ahora una sucesión de puntos $\{q_m\}$ tal que $q_k \in \gamma \cap W_k$. Es claro que $q_m \rightarrow p$ ya que $q_m \in W_m \rightarrow p$. Definimos ahora la sucesión de curvas $\{\gamma_n\}$ como $\gamma_n = \gamma$ a partir de q_n hacia el futuro y q_n será el extremo pasado de γ_n . Sin perder generalidad podemos suponer que el parámetro de γ_n comienza en 0, es decir, $\gamma_n(0) = q_n$. Por tanto $\gamma_n(0) \rightarrow p$ y además γ_n no converge a p ya que γ_n también entra y sale de cualquier entorno relativamente compacto. Se cumplen entonces las hipótesis de la proposición 2.3.2 (pág. 16) y por tanto existe una sucesión límite de $\{\gamma_n\}$ relativa a un recubrimiento convexo $\{C_i\}$. Sea ésta $p = p_0 < p_1 < p_2 < \dots$. Si escogemos de la sucesión límite cualquier $p_k \neq p$, veamos que $I^-(p_k) = I^-(p)$. Sea $s \in I^-(p)$, como $p \in J^-(p_k)$ entonces por el teorema 2.3.1 (pág. 14) es claro que $s \in I^-(p_k)$ por lo que $I^-(p) \subset I^-(p_k)$. Por otro lado, si consideramos $s \in I^-(p_k)$, y como p_k es un punto de la sucesión límite, entonces por la propiedad 1.a de la definición de sucesión límite existe un pequeño entorno V de p_k totalmente contenido en $I^+(s)$ y existe n tal que $V \cap \gamma_n \neq \emptyset$. Sea $r \in V \cap \gamma_n$, entonces por la construcción de $\{\gamma_n\}$ se tiene $r \in V \cap \gamma$ y como $s \in I^-(r)$ entonces $s \in I^-(\gamma) = I^-(p)$. Así concluimos que $I^-(p_k) = I^-(p)$ y no se verifica la condición de distinción del pasado. ■

Proposición 2.3.9 *Si γ es una curva temporal inextensible hacia el futuro tal que $I^-(\gamma) = I^-(p)$ para algún $p \in M$ entonces M incumple la condición de distinción del pasado.*

Demostración: Tenemos que estudiar dos casos distintos:

Caso 1: Supongamos que para todo W entorno de p convexo y relativamente compacto se tiene que $\gamma \cap W \neq \emptyset$ entonces:

- a) Si $p \in \gamma$ entonces existe $r \in \gamma$ tal que $r \in I^+(p)$. Como γ es inextensible hacia el futuro y $r \in \gamma$ tenemos que $r \in I^-(\gamma) = I^-(p)$ y entonces $r \in I^+(p) \cap I^-(p)$. Así pues no se verifica la condición cronológica y por tanto tampoco la condición de distinción del pasado.
- b) Si $p \notin \gamma$ entonces γ se aproxima a p tanto como queramos. De esta manera tenemos dos posibilidades.
- i) Supongamos que γ entra y permanece dentro de un entorno W de p convexo y relativamente compacto. Pero eso es imposible ya que entonces γ permanecería en \overline{W} que es compacto y por la proposición 2.1.1 (pág. 10) tendríamos que γ es extensible, contradiciendo su inextensibilidad.
 - ii) Por el contrario, supongamos que no existe ningún entorno W de p convexo y relativamente compacto en el que γ entre y no salga de él. Eso es lo mismo que decir que para todo entorno W de p en el que γ entre, entonces tiene que volver a salir. Como además $\gamma \cap W \neq \emptyset$ para todo W convexo y relativamente compacto, entonces γ tiene que entrar y salir continuamente de W . Por el lema 2.3.1 (pág. 23) se tiene que M incumple la condición de distinción del pasado.

Caso 2: Supongamos ahora que existe W_1 entorno de p relativamente compacto tal que $\gamma \cap W_1 = \emptyset$. Nuestra intención es construir una curva λ temporal inextensible en las hipótesis del lema 2.3.1. Para ello vamos a usar fuertemente la condición $I^-(\gamma) = I^-(p)$. Tomemos una sucesión de entornos $\{W_n\}$ de tal forma que $W_{k+1} \subset W_k$ para todo entero k y además $W_n \rightarrow p$. Tomemos también un punto $r_1 \in I^-(p, W_1) \subset I^-(p) = I^-(\gamma)$ entonces existe $s_1 \in \gamma$ tal que $r_1 \in I^-(s_1)$, es decir, que existe una curva α_1 temporal que une r_1 con s_1 . Como $s_1 \in I^-(\gamma) = I^-(p)$ entonces existe un punto $r_2 \in I^-(p, W_2)$ tal que $s_1 \in I^-(r_2)$, es decir, una curva β_1 temporal que une s_1 con r_2 . Repitiendo este proceso (ver figura 3) obtenemos unos puntos $r_k \in I^-(p, W_k) \subset I^-(p) = I^-(\gamma)$ y $s_k \in \gamma$ tales que $r_k \in I^-(s_k)$ y $s_k \in I^-(r_{k+1})$. Es decir, existen curvas α_k y β_k temporales futuras que unen r_k con s_k y s_k con r_{k+1} respectivamente. Por tanto la unión de todas esas curvas $\lambda = \bigcup_k (\alpha_k \cup \beta_k)$ es una curva temporal hacia el futuro que entra y sale continuamente de cada W_k por lo que además es inextensible. Para poder aplicar el lema 2.3.1 necesitamos ver que $I^-(\lambda) = I^-(p)$. Si $s \in I^-(\lambda)$ entonces existe $r \in \lambda$ tal que $s \in I^-(r)$, entonces $r \in \alpha_k \cup \beta_k$ para cierto k . Por tanto $r \in I^-(s_{k+1})$ y entonces $s \in I^-(s_{k+1})$. Así pues tenemos que $s \in I^-(\gamma)$ y por tanto $I^-(\lambda) \subset I^-(\gamma) = I^-(p)$. Veamos la inclusión inversa. Si $s \in I^-(p)$, como $I^+(s)$ es abierto, $p \in I^+(s)$ y además $W_n \rightarrow p$ entonces existe k tal que $W_k \subset I^+(s)$. Como hemos visto antes, tenemos que

$r_k \in I^-(p, W_k) \cap \lambda$, por tanto $r_k \in W_k \cap \lambda$ y así $r_k \in I^+(s) \cap \lambda$, por lo tanto tenemos que $s \in I^-(r_k) \subset I^-(\lambda)$. De esta manera vemos que $I^-(p) \subset I^-(\lambda)$ y concluimos que $I^-(\lambda) = I^-(p)$. Ahora estamos en condiciones de aplicar el lema 2.3.1 para la curva λ , por tanto en este caso también se incumple la condición de distinción de pasado. ■

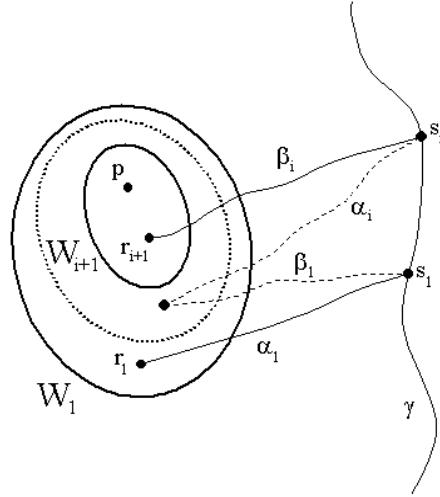


Figura 3. Construcción de λ en la demostración de la proposición 2.3.9.

Esta proposición equivale a decir que en un espacio-tiempo M que verifica la condición de distinción del pasado, el pasado cronológico de cualquier curva temporal inextensible hacia el futuro es un TIP. Como corolario de estas proposiciones podemos obtener una versión ligeramente más fuerte del teorema de Geroch, Kronheimer y Penrose no sólo para espacio-tiempos fuertemente causales sino para los que cumplen la condición de distinción del pasado. El resultado es el siguiente:

Corolario 2.3.4 *Si M cumple la condición de distinción del pasado, entonces un conjunto W es un TIP si y sólo si existe una curva γ temporal inextensible hacia el futuro tal que $I^-(\gamma) = W$.*

Demostración: Es consecuencia directa de las proposiciones 2.3.8 y 2.3.9. ■

Este corolario no es cierto en general para espacio-tiempos causales. A continuación se dan ejemplos en los que existen curvas temporales inextensible hacia el futuro para las que su pasado cronológico coincide con el pasado cronológico de un punto del espacio-tiempo. Tomemos como M un cilindro 2-dimensional. En la figura 4 escogemos la métrica $ds^2 = dxdt$ y así M verifica la condición cronológica pero no la causal ya que $t = cte$ es una curva causal cerrada. Además elegimos como γ a la curva dada por $\gamma(s) = (s, \exp(-s))$,

$s \in [a, \infty)$ que es temporal e inextensible hacia el futuro. Para la figura 5 tomamos la métrica $ds^2 = (\cosh t - 1)^2(dt^2 - dx^2) + dxdt$ y quitamos el punto $(0, 0) \in M$, de esta manera el espacio-tiempo M verifica la condición de causalidad pero no la de distinción del pasado. Consideramos una curva temporal γ tal que $\gamma(s) \rightarrow (0, 0)$ cuando $s \rightarrow \infty$. En estos dos ejemplos tenemos que $I^-(p) = I^-(\gamma)$.

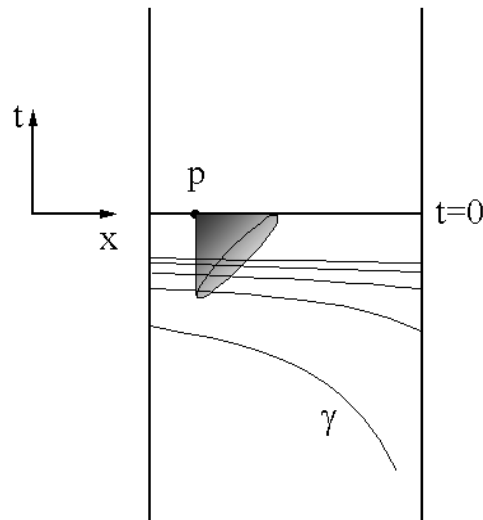


Figura 4. Espacio-tiempo que verifica la condición cronológica tal que $I^-(p) = I^-(\gamma)$.

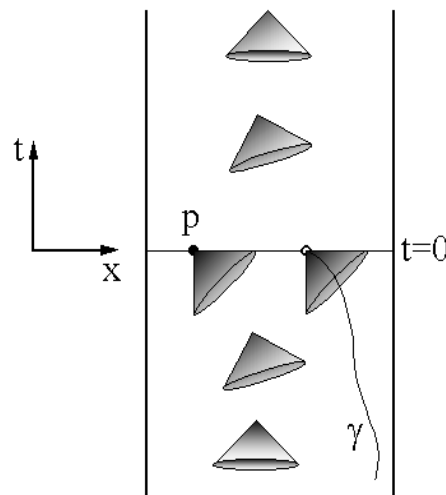


Figura 5. Espacio-tiempo que cumple la condición causal y en el que $I^-(p) = I^-(\gamma)$.

Una propiedad que usaremos más adelante viene dada por el siguiente lema:

Lema 2.3.2 *Si M verifica la condición de distinción de pasado y es de punto omega entonces el único TIP es el propio M .*

Demostración: Como M verifica la condición de distinción de pasado entonces existe una curva temporal γ inextensible hacia el futuro tal que $I^-(\gamma)$ es el único TIP de M por ser de punto omega. Si suponemos que $p \in M - I^-(\gamma)$ entonces cualquier curva temporal inextensible hacia el futuro que pase por p definirá un TIP distinto de $I^-(\gamma)$, lo que contradice que M es de punto omega. Por tanto $M = I^-(\gamma)$. ■

Capítulo 3

Espacio-tiempos de punto omega

3.1 Causalidad

En esta sección vamos a demostrar un teorema de Seifert que afirma la existencia de una superficie de Cauchy en un espacio-tiempo de punto omega que cumpla la condición de distinción del pasado. Para ello vamos a demostrar una serie de lemas que compondrán la demostración completa del teorema. También vamos a caracterizar, bajo las mismas hipótesis, algunas de las superficies de Cauchy contenidas en estos espacio-tiempos.

Lema 3.1.1 *Si (M, g) cumple la condición cronológica entonces $I^+(\partial I^+(p)) = I^+(p)$ para todo $p \in M$.*

Demostración: Demostremos primero que $I^+(p) \subset I^+(\partial I^+(p))$. Si se cumple la condición cronológica entonces se tiene que $I^+(p) \cap I^-(p) = \emptyset$ y además $p \notin I^+(p)$, si W es cualquier entorno de p se cumple que $I^+(p) \cap W \neq \emptyset$ y $I^-(p) \cap W \neq \emptyset$. Por tanto $p \in \partial I^+(p)$ y así tenemos que $I^+(p) \subset I^+(\partial I^+(p))$.

Veamos la inclusión inversa. Sea $q \in I^+(\partial I^+(p))$, entonces existe $r \in \partial I^+(p)$ tal que $q \in I^+(r)$ o lo que es lo mismo $r \in I^-(q)$ y por tanto existe un entorno W de r tal que $W \subset I^-(q)$. Como además $W \cap I^+(p) \neq \emptyset$ entonces existe $s \in W \cap I^+(p)$ tal que $q \in I^+(s)$. Entonces como $q \in I^+(s)$ y $s \in I^+(p)$ se tiene que $q \in I^+(p)$. Por tanto $I^+(\partial I^+(p)) \subset I^+(p)$.

Por tanto queda demostrado que $I^+(\partial I^+(p)) = I^+(p)$. ■

Lema 3.1.2 *Si (M, g) es un espacio-tiempo de punto omega donde se cumple la condición de distinción del pasado entonces se tiene la descomposición $M = \partial I^+(p) \cup I^+(p) \cup I^-(\partial I^+(p))$ para todo punto $p \in M$ tal que es una unión disjunta.*

Demostración: Veamos primero que son disjuntos dos a dos:

a) $\partial I^+(p) \cap I^+(p) \neq \emptyset$.

Es trivial ya que $I^+(p)$ es abierto.

b) $I^+(p) \cap I^-(\partial I^+(p)) = \emptyset$.

Sea $q \in I^-(\partial I^+(p))$ entonces existe $r \in \partial I^+(p)$ tal que $r \in I^+(q)$. Si suponemos que $q \in I^+(p)$ entonces tendríamos que $r \in I^+(p)$. Así pues habríamos encontrado un punto $r \in \partial I^+(p) \cap I^+(p)$. Pero esto es una contradicción por lo visto en el apartado a).

c) $\partial I^+(p) \cap I^-(\partial I^+(p)) = \emptyset$.

Esto es obvio ya que $\partial I^+(p)$ es un conjunto ácrono. Si $q \in I^-(\partial I^+(p))$ entonces existe $r \in \partial I^+(p)$ tal que $r \in I^+(q)$. Si suponemos además que $q \in \partial I^+(p)$ entonces tanto r como q pertenecen a $\partial I^+(p)$, pero esto y el hecho de que $r \in I^+(q)$ contradice que $\partial I^+(p)$ sea un conjunto ácrono.

Continuemos ahora viendo la descomposición. Supongamos que existe un punto $q \in M \setminus [\partial I^+(p) \cup I^+(p) \cup I^-(\partial I^+(p))]$, tomemos también unas curvas γ y β temporales inextensibles hacia el futuro que pasen por q y p respectivamente. Queremos ver que $q \notin I^-(\beta)$. Supongamos lo contrario, que $q \in I^-(\beta)$, entonces existe $r \in \beta$ tal que $r \in I^+(q)$. Como el punto r pertenece a la curva β entonces o bien $r \in I^+(p)$ o bien $r \in I^-(p)$. Entonces para toda curva α temporal que une q con r se tiene:

a) si $r \in I^+(p)$, α corta a $\partial I^+(p)$ ya que $q \notin I^+(p)$, entonces tenemos que $q \in I^-(\partial I^+(p))$. Pero esto contradice que el punto q pertenece a $M \setminus [\partial I^+(p) \cup I^+(p) \cup I^-(\partial I^+(p))]$.

b) si $r \in I^-(p)$ entonces $q \in I^-(p)$ y como se cumple la condición de distinción del pasado se tiene que $p \in \partial I^+(p)$, por tanto $q \in I^-(\partial I^+(p))$. Con lo que se vuelve a contradecir que $q \in M \setminus [\partial I^+(p) \cup I^+(p) \cup I^-(\partial I^+(p))]$.

Así pues, tenemos que $q \notin I^-(\beta)$. Ahora bien, como $q \in I^-(\gamma)$ entonces $I^-(\beta) \neq I^-(\gamma)$ y por tanto las curvas β y γ definen diferentes puntos en la c-frontera del futuro, lo que contradice la hipótesis del único punto omega. Así pues no existe ningún punto

$$q \in M \setminus [\partial I^+(p) \cup I^+(p) \cup I^-(\partial I^+(p))]$$

Por tanto hemos demostrado que podemos descomponer el espacio-tiempo M como $\partial I^+(p) \cup I^+(p) \cup I^-(\partial I^+(p))$. ■

Lema 3.1.3 *Si (M, g) es un espacio-tiempo de punto omega que cumple la condición de distinción del pasado entonces para todo punto $p \in M$ se tiene que $\partial I^-(\partial I^+(p)) = \partial I^+(p)$.*

Demostración: Está claro que $I^-(\partial I^+(p)) \cap \partial I^-(\partial I^+(p)) = \emptyset$ ya que $I^-(\partial I^+(p))$ es abierto y por tanto no contiene ningún punto de su frontera. Entonces por el lema 3.1.2 (pág. 28) tenemos que $\partial I^-(\partial I^+(p)) \subset \partial I^+(p) \cup I^+(p)$. Supongamos que tenemos un punto $q \in \partial I^-(\partial I^+(p)) \cap I^+(p)$, entonces existe W entorno de q tal que para todo V entorno de q , $V \subset W$, se tiene que $I^-(\partial I^+(p)) \cap V \neq \emptyset$ (por pertenecer q a la frontera $\partial I^-(\partial I^+(p))$), pero esto es imposible debido a que para todo V entorno de q suficientemente pequeño se verifica que $V \subset I^+(p)$ (por pertenecer q a $I^+(p)$) y de nuevo por el lema 3.1.2 sabemos que $I^+(p) \cap I^-(\partial I^+(p)) = \emptyset$. Por tanto no puede existir ningún $q \in \partial I^-(\partial I^+(p)) \cap I^+(p)$. Así pues $\partial I^-(\partial I^+(p)) \subset \partial I^+(p)$.

Veamos la inclusión inversa. Sea un punto $q \in \partial I^+(p)$ entonces para todo W entorno de q se tiene que $W \cap I^-(q) \neq \emptyset$, así pues tenemos que $W \cap I^-(\partial I^+(p)) \neq \emptyset$. Entonces $q \in I^-(\partial I^+(p))$ y como $q \notin \text{int}(I^-(\partial I^+(p)))$ entonces $q \in \partial I^-(\partial I^+(p))$. Así pues tenemos $\partial I^+(p) \subset \partial I^-(\partial I^+(p))$ y por tanto concluimos que $\partial I^-(\partial I^+(p)) = \partial I^+(p)$. ■

Posiblemente este lema 3.1.3 es cierto para espacio-tiempos más generales, sin la necesidad de que se verifique la condición cronológica ni que la c-frontera del futuro sea un único punto, pero de momento y para nuestras necesidades actuales nos vale este resultado. Se expone este resultado por su necesidad para resolver un pequeño detalle técnico en la demostración del lema 3.1.4.

Lema 3.1.4 *Si (M, g) es un espacio-tiempo de punto omega que cumple la condición de distinción del pasado entonces la frontera ácrona $\partial I^+(p)$ es una superficie de Cauchy para todo $p \in M$.*

Demostración: La observación 2.3.2 (pág. 15) afirma que $\partial I^+(p)$ es una hipersuperficie topológica cerrada, ácrona e inmersa en M . Por el lema 3.1.2 (pág. 28) tenemos la descomposición $M = \partial I^+(p) \cup I^+(p) \cup I^-(\partial I^+(p))$ para todo $p \in M$. Supongamos que $\partial I^+(p)$ no es una superficie de Cauchy, entonces existe una curva γ temporal inextensible que no corta a $\partial I^+(p)$. Por el lema 3.1.2 se tiene que $\gamma \subset I^+(p) \cup I^-(\partial I^+(p))$ y como por el lema 3.1.3 hemos visto que $\partial I^-(\partial I^+(p)) = \partial I^+(p)$ entonces o bien $\gamma \subset I^-(\partial I^+(p))$ o bien $\gamma \subset I^+(p)$.

Supongamos primero que $\gamma \subset I^-(\partial I^+(p))$, entonces considerando sus conjuntos pasados se tiene que $I^-(\gamma) \subset I^-(I^-(\partial I^+(p)))$. Como $I^-(\partial I^+(p))$ es un conjunto pasado entonces $I^-(I^-(\partial I^+(p))) = I^-(\partial I^+(p))$ y como M es de punto omega entonces por el lema 2.3.2 (pág. 27) se tiene que $I^-(\gamma) = M$. Por tanto

$$M = I^-(\gamma) \subset I^-(I^-(\partial I^+(p))) = I^-(\partial I^+(p))$$

contradiendo la descomposición del lema 3.1.2. Así pues no es posible que la curva γ esté contenida en $I^-(\partial I^+(p))$.

Supongamos ahora que $\gamma \subset I^+(p)$. Tomemos una sucesión $\{q_m\}_{m \in \mathbb{N}} \subset \gamma$ tal que $q_m \gg q_{m+1}$ para todo m , no existan subsucesiones $\{q_i\}$ que converjan a p y además para todo $r \in \gamma$ existe un número k tal que $q_k \in I^-(r)$ (todo esto es posible debido a que γ es inextensible). Consideremos sucesiones de curvas $\{\gamma_n\}$ y $\{\beta_n\}$ tales que

$$\gamma_n = \gamma \text{ restringida al conjunto } I^+(q_n)$$

β_n es una curva temporal futura que une p con q_n

Así pues, la sucesión de curvas $\{\alpha_n\}$ tal que

$$\alpha_n = \beta_n \cup \gamma_n$$

es una sucesión de curvas temporales inextensibles hacia el futuro tales que $\alpha_n(0) = p$ para todo n , y por lo tanto p es un punto de acumulación de $\{\alpha_n\}$. Además como p no es un punto de acumulación de la curva γ entonces se tiene que $\{\alpha_n\} \not\rightarrow p$. Por tanto por la proposición 2.3.3 (pág. 16) tenemos que existe una curva límite λ causal inextensible hacia el futuro que pasa por p . Demostremos entonces que $\gamma \cap I^-(\lambda) = \emptyset$. En efecto, si existiese $r \in \gamma \cap I^-(\lambda)$ entonces existiría $k \in \mathbb{N}$ tal que $q_i \in I^-(r)$ y por tanto $q_i \in \gamma \cap I^-(\lambda)$ para todo $i \geq k$. Como además λ es inextensible hacia el futuro, existe t tal que $q_k \in I^-(\lambda(t))$. Llamemos $\tilde{\lambda}$ al segmento de λ contenido en $I^+(\lambda(t))$ (que también será inextensible hacia el futuro), entonces los puntos de acumulación de $\{\beta_n\}$ estarán contenidos en $\overline{I^-(q_k)}$. Veamos que $\lambda(t) \notin \overline{I^-(q_k)}$ y entonces tendremos que los puntos de $\tilde{\lambda}$ serán puntos de acumulación de $\{\gamma_n\}$ y por construcción también lo serán de γ . Si ocurriese el caso contrario, es decir, $\lambda(t) \in \overline{I^-(q_k)}$ entonces como tenemos que se verifica la condición cronológica y que $q_k \in I^-(\lambda(t))$ se tiene que $\lambda(t) \in \partial I^-(q_k)$. Como $I^+(q_k)$ es un entorno de $\lambda(t)$ y todo entorno de $\lambda(t)$ interseca a $I^-(q_k)$ entonces existe $s \in I^-(q_k) \cap I^+(q_k)$ lo que contradice la condición cronológica. Así pues $\lambda(t) \notin \overline{I^-(q_k)}$ y por tanto γ se acumula en $\tilde{\lambda}$ a medida que se mueve hacia el futuro. Por otro lado, si tomamos un punto $\lambda(t')$ de $\tilde{\lambda}$, como M es de punto omega, tenemos que la curva γ intersecará a $I^+(\lambda(t'))$ y por tanto existe un punto $s \in \gamma \cap I^+(\lambda(t'))$. De esto se deduce, por el corolario 2.3.2 (pág. 14), que existe un segmento abierto $\lambda_0 \subset \tilde{\lambda}$ tal que $\lambda_0 \subset I^-(s)$. Pero esto es contradictorio ya que los puntos de acumulación de γ se tienen que hallar en $I^+(s)$ y por tanto los puntos de λ_0 no pueden ser puntos de acumulación de γ (ver figura 6) con lo que entonces λ_0 no sería curva límite de $\{\alpha_n\}$. Así tenemos que $\gamma \cap I^-(\lambda) = \emptyset$, pero como M es de punto omega entonces ésto no es posible ya que $I^-(\lambda) = M$. Por tanto no existe γ totalmente contenida en $I^+(p)$. Hemos demostrado que dicha curva γ no puede existir y por tanto

cualquier curva γ temporal inextensible debe cortar a $\partial I^+(p)$, que por tanto es una superficie de Cauchy. ■

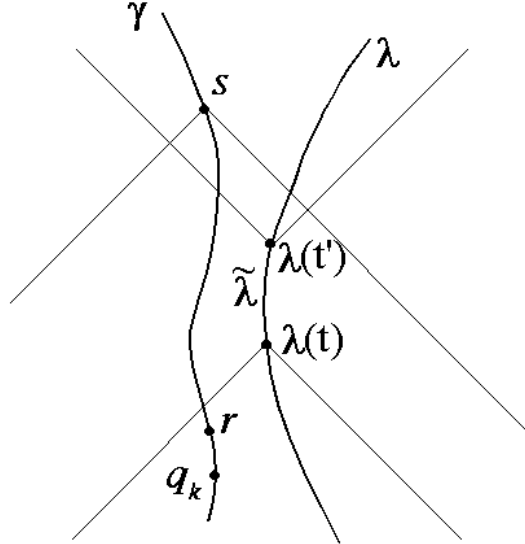


Figura 6. Esquema de la demostración del lema 3.1.4.

Existe un teorema debido a Penrose (ver [10, teorema 3.20]) que afirma que para todo $q \in \partial I^+(p)$ se tiene que existe una geodésica nula β contenida en $\partial I^+(p)$ con punto final futuro en q que bien es inextensible hacia el pasado o bien tiene punto final pasado en p . Diremos entonces que esas geodésicas nulas son **geodésicas nulas generadoras** de $\partial I^+(p)$.

Lema 3.1.5 *Si M es de punto omega y cumple la condición de distinción del pasado entonces $\partial I^+(p)$ es compacto y distinto del vacío para todo $p \in M$.*

Demostración: Observemos primero que como por el lema 3.1.4, M es globalmente hiperbólico, entonces es claro que $\partial I^+(p) \neq \emptyset$ ya que se tiene que $p \in \partial I^+(p)$. Además también tenemos que para todo $p \in M$, el futuro causal $J^+(p)$ es un conjunto cerrado y como $\partial I^+(p) = \partial J^+(p)$, así pues se tiene que

$$\partial I^+(p) = J^+(p) - I^+(p)$$

Entonces para cada $q \in \partial I^+(p)$ existe una curva causal futura desde p hasta q que por el teorema de causalidad debe ser una geodésica nula generadora ya que $q \notin I^+(p)$.

Veamos ahora que toda geodésica nula generadora de $\partial I^+(p)$ (inextensible hacia el futuro) abandona $\partial I^+(p)$ para entrar en $I^+(p)$. Supongamos, por el contrario, que existe β geodésica nula generadora que no abandona $\partial I^+(p)$, es decir $\beta \subset \partial I^+(p)$. Entonces tomando sus pasados tenemos que $I^-(\beta) \subset I^-(\partial I^+(p))$, y como M es de punto omega entonces $I^-(\beta) = M$. Así pues $M = I^-(\beta) \subset I^-(\partial I^+(p))$ contradice la descomposición del lema 4. Por

tanto no existe $\beta \subset \partial I^+(p)$ geodésica nula generadora inextensible hacia el futuro.

Siguiendo la demostración de [5, lema 5.1]¹ definamos $C(p) \subset \partial I^+(p)$ como el conjunto de puntos donde las geodésicas nulas generadoras abandonan $\partial I^+(p)$ ². Sea X un campo temporal futuro y sea

$$\hat{O}(p) = \{u \in T_p M : g(u, u) = 0, g(u, X) = -1\}$$

Cada $u \in \hat{O}(p)$ define una dirección nula futura a partir de p y se tiene además que $\hat{O}(p)$ es compacto, de hecho es homeomorfo³ a la esfera S^{n-2} . Si $l_0 \in \mathbb{R}$ es tal que $\exp_p(l_0 u) \in C(p)$ entonces diremos que l_0 **es la distancia de p a $C(p)$ en la dirección u** denotándola como $l_0(u)$. Es claro que $l_0(u)$ está definido para todo $u \in \hat{O}(p)$ ya que toda geodésica generadora abandona $\partial I^+(p)$ desde cualquier dirección. Definamos ahora el conjunto

$$O(p) = \left\{ \xi u \in T_p M : u \in \hat{O}(p), 0 \leq \xi \leq l_0(u) \right\}$$

Es trivial que $\partial I^+(p) = \exp_p O(p)$, así que si demostramos que $O(p)$ es compacto entonces como la aplicación \exp_p es continua se tiene que $\partial I^+(p)$ es compacto.

En efecto, tomemos una sucesión $\{v_n\} \subset O(p)$, ésta define otra sucesión $\{u_n\} \subset \hat{O}(p)$ de tal manera que $v_n = \xi_n u_n$ para algún $\xi_n \leq l_0(u_n)$. Como $\hat{O}(p)$ es compacto entonces $u_n \mapsto u \in \hat{O}(p)$. Como $l_0(u)$ es finito, queremos ver que $\{\xi_n\}$ tiene un límite $\xi \in [0, l_0(u)]$ ya que entonces $\xi u \in O(p)$ es un límite para la sucesión $\{v_n\}$. Supongamos por el contrario que $\{\xi_n\}$ no tiene ningún límite en el intervalo $[0, l_0(u)]$, entonces podemos encontrar un número η y una subsucesión $\{\xi_k\}$ tales que $\xi_k > \eta > l_0(u)$ para todo k . Ahora bien, como $\eta > l_0(u)$ entonces $p' = \exp_p \eta u \in I^+(p)$. Para cualquier $q \in I^+(p) \cap I^-(p')$ se tiene que $I^+(q)$ y $I^-(q)$ son entornos de p' y p respectivamente. Para un k suficientemente grande se tiene que $\exp_p v_k \in I^+(q) \subset I^+(p)$ y como $v_n = \xi_n u_n$ entonces se contradice que $\xi_n \leq l_0(u_n)$. En resumen, cualquier sucesión $\{v_n\} \subset O(p)$ tiene límite en $O(p)$ y por tanto $O(p)$ es compacto y entonces $\partial I^+(p) = \exp_p O(p)$ es compacto. ■

Teorema 3.1.1 (Seifert) *Si M es un espacio-tiempo de punto omega que verifica la condición de distinción del pasado entonces M es globalmente hiperbólico y las superficies de Cauchy son compactas.*

Demostración: Es una consecuencia directa de los lemas 3.1.4 y 3.1.5. ■

¹La demostración de Budic y Sachs es más general que la que se expone aquí.

²A $C(p)$ se le denomina en inglés *future null cut locus* de p y es un conjunto bien definido. Está formado por los primeros puntos conjugados de cada geodésica nula generadora. Para más detalles se puede consultar [3, capítulo 9] y [5].

³En el caso en que $n = 2$, $\hat{O}(p)$ consiste simplemente en un par de puntos.

Este teorema 3.1.1 y el lema 3.1.5 nos permiten demostrar que además de ser $\partial I^+(p)$ para todo $p \in M$ una superficie de Cauchy, tenemos que $\partial I^-(q)$ es superficie de Cauchy siempre y cuando q esté suficientemente cerca del punto omega. Para demostrar este resultado y entender el significado de "suficientemente cerca del punto omega" necesitamos unos lemas previos.

En todo lo que sigue a continuación y hasta el final de esta sección vamos a considerar que M es un espacio tiempo de punto omega que verifica la condición de distinción de pasado. Por el teorema 3.1.1 se tiene que M es globalmente hiperbólico y que sus superficies de Cauchy son compactas. Así pues, la proposición 2.3.6 nos asegura la existencia de una foliación $S(t)$ de superficies de Cauchy espaciales, diferenciables donde t se incrementa en la dirección temporal futura. Esto es equivalente a la existencia de una función tiempo de Cauchy diferenciable $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f^{-1}(t) = S(t)$. El campo vectorial $X = \frac{\text{grad}(f)}{g(\text{grad}(f), \text{grad}(f))}$ es ortogonal a cada $S(t)$, es decir, todas las curvas integrales de X cortan ortogonalmente a todas las $S(t)$ y además si λ es una curva integral entonces $f \circ \lambda(t) = t$, es decir que las curvas integrales se pueden parametrizar mediante el parámetro de la foliación. En efecto,

$$\begin{aligned} (f \circ \lambda)'(t) &= df \cdot (\lambda'(t)) = df \cdot (X(\lambda(t))) = \\ &= g(\text{grad}(f), X(\lambda(t))) = g\left(\text{grad}(f), \frac{\text{grad}(f)}{g(\text{grad}(f), \text{grad}(f))}\right) = 1 \end{aligned}$$

por tanto $f \circ \lambda(t) = t + c$ donde c es la constante de integración que podemos normalizar para que $f \circ \lambda(t) = t$.

Lema 3.1.6 *Si $\gamma \subset M$ es una curva temporal inextensible hacia el futuro entonces no existe $p \in M$ tal que $\gamma \subset I^-(p)$.*

Demostración: Este es un resultado trivial. Supongamos que existiese $p \in M$ tal que $\gamma \subset I^-(p)$, entonces tendríamos que $I^-(\gamma) \subset I^-(I^-(p)) = I^-(p)$ y como M es de punto omega $I^-(\gamma) = M$ y entonces $M \subset I^-(p)$ lo que es una contradicción. ■

Corolario 3.1.1 *Sea $p \in M$ entonces toda curva $\gamma \subset M$ temporal inextensible hacia el futuro tal que $\gamma \cap I^-(p) \neq \emptyset$ interseca a $\partial I^-(p)$.*

Demostración: Como por el lema 3.1.6 $\gamma \not\subset I^-(p)$ entonces γ debe salir de $I^-(p)$ y por tanto intersecar a su frontera $\partial I^-(p)$. ■

Lema 3.1.7 *Sea γ una curva temporal inextensible. Si existe $p \in M$ tal que $\gamma \cap \partial I^-(p) \neq \emptyset$ entonces para todo $q \in I^+(p)$ se tiene que $\gamma \cap \partial I^-(q) \neq \emptyset$.*

Demostración: Sabemos que M es globalmente hiperbólico, entonces si $q \in I^+(p)$ se tiene que $I^-(p) \subset I^-(q)$. Además es fácil ver que $\partial I^-(p) \cap \partial I^-(q) = \emptyset$, en efecto, supongamos que existe $r \in \partial I^-(p) \cap \partial I^-(q)$ entonces como $\partial I^-(p) = J^-(p) - I^-(p)$ se tiene que

$$r \in J^-(p)$$

y como $p \in I^-(q)$ entonces por el corolario 2.3.2 (pág. 14) tenemos que $r \in I^-(q)$ contradiciendo que $r \in \partial I^-(q) = J^-(q) - I^-(q)$. Por tanto $\partial I^-(p) \cap \partial I^-(q) = \emptyset$. Ahora bien, si $I^-(p) \subset I^-(q)$ son abiertos tales que $\partial I^-(p) \cap \partial I^-(q) = \emptyset$ entonces esto implica que

$$\partial I^-(p) \subset I^-(q)$$

Por hipótesis $\gamma \cap \partial I^-(p) \neq \emptyset$ y por tanto $\gamma \cap I^-(q) \neq \emptyset$. Por el corolario 3.1.1 concluimos que

$$\gamma \cap \partial I^-(q) \neq \emptyset$$

como queríamos demostrar. ■

Corolario 3.1.2 Sean λ curva integral de X y γ una curva temporal inextensible. Si existe t tal que $\gamma \cap \partial I^-(\lambda(t)) = \emptyset$ entonces $\gamma \cap \partial I^-(\lambda(t')) = \emptyset$ para todo $t' \leq t$.

Demostración: Este corolario es un caso particular del lema 3.1.7, basta tomar $p = \lambda(t')$, negar la tesis y así se obtiene la negación de la hipótesis. ■

Lema 3.1.8 Sea λ una curva integral de X . Si para toda μ curva integral de X se tiene que $\mu \cap \partial I^-(\lambda(t_0)) \neq \emptyset$ entonces $\partial I^-(\lambda(t_0))$ es una superficie de Cauchy.

Demostración: Por la observación 2.3.2 (pág. 15) sabemos que $\partial I^-(\lambda(t_0))$ es una superficie topológica ácrona, cerrada e inmersa en M . Consideremos una superficie S_0 de la foliación $S(t)$. Para cada punto $p \in S_0$ existe μ_p curva integral de X tal que $p \in \mu_p$. Por hipótesis sabemos que toda curva integral μ_p de X corta a $\partial I^-(\lambda(t_0))$ y como $\partial I^-(\lambda(t_0))$ es un conjunto ácrono sólo cortará en un único punto q_p . Definimos la función $\varphi : S_0 \rightarrow \mathbb{R}$ donde t_p es el valor de t para el que $q_p \in S(t)$. La función φ es continua ya que $\partial I^-(\lambda(t_0))$ es una hipersuperficie y cualquier curva integral de X la interseca. Como S_0 es compacto existe m_- el mínimo de φ . De esta manera tenemos que existe $m_* < m_-$ tal que

$$S(m_-) \subset I^+(S(m_*))$$

y además como toda curva integral de X corta a $\partial I^-(\lambda(t_0))$ por hipótesis y a $S(m_*)$ por ser ésta superficie de Cauchy, entonces

$$S(m_*) \subset I^-(\partial I^-(\lambda(t_0))) = I^-(\lambda(t_0))$$

Como toda curva γ temporal inextensible corta a $S(m_*)$ y como $S(m_*) \subset I^-(\lambda(t_0))$ entonces por el corolario 3.1.1 tenemos que $\gamma \cap \partial I^-(\lambda(t_0)) \neq \emptyset$ como queríamos demostrar. ■

Lema 3.1.9 *Sea λ una curva integral de X . Si para todo t existe una curva integral μ_t de X tal que $\mu_t \cap \partial I^-(\lambda(t)) = \emptyset$ entonces existe μ curva integral de X tal que $\mu \cap \partial I^-(\lambda(t)) = \emptyset$ para todo t .*

Demostración: Como M es un espacio-tiempo de punto omega, se tiene que $\bigcup_u I^-(\lambda(u))$ es un recubrimiento de M y además como las superficies de Cauchy de la foliación $S(u)$ son compactas, si fijamos una superficie de Cauchy S_0 perteneciente a la familia $S(u)$, entonces podemos encontrar un subrecubrimiento finito de S_0 y por tanto un valor T tal que $S_0 \subset I^-(\lambda(T))$. Entonces si $s \in \partial I^-(\lambda(T))$, cualquier curva temporal inextensible que pase por s intersecará a S_0 y como $S_0 \subset I^-(\lambda(T))$ entonces $s \in I^+(S_0)$. Así pues tenemos que $\partial I^-(\lambda(T)) \subset I^+(S_0)$. Si $p \in S_0$ llamaremos μ_p a la curva integral de X que pasa por p . Definimos en S_0 los siguientes conjuntos:

$$A(t) = \{p \in S_0 : \mu_p \cap \partial I^-(\lambda(t)) = \emptyset\}$$

El corolario 3.1.2 (pág. 35) nos indica que $A(t) \subseteq A(t')$ cuando $t \geq t'$ y por hipótesis como para todo t existe μ_t tal que $\mu_t \cap \partial I^-(\lambda(t)) = \emptyset$ entonces es claro que $A(t) \neq \emptyset$ para todo t . Si demostramos que $A(t)$ es cerrado para todo $t \geq T$, entonces tendremos que $\bigcap_{t \geq T} A(t) \neq \emptyset$ por ser S_0 compacto (ver [8, teorema 5.9]) y por tanto existe una curva integral μ_r con $r \in \bigcap_{t \geq T} A(t)$ tal

que se tiene que $\mu_r \cap \partial I^-(\lambda(t)) = \emptyset$ para todo $t \geq T$ y con el corolario 3.1.2 podemos concluir que $\mu_r \cap \partial I^-(\lambda(t)) = \emptyset$ para todo t .

Veamos que $A(t)$ es cerrado o equivalentemente que $S_0 - A(t)$ es abierto para todo $t \geq T$. En efecto, sea $t \geq T$ y sea $q \in S_0 - A(t)$, entonces la curva μ_q interseca a $\partial I^-(\lambda(t))$ en un punto $r \in I^+(q)$. Entonces el conjunto $U = I^-(r) \cap (S_0 - A(t))$ es un entorno de q en S_0 . Por el corolario 3.1.1 (pág. 34) obtenemos que cualquier curva integral μ_q con $q \in U$ intersecará a $\partial I^-(r)$ en un punto $s \in \mu_q \cap \partial I^-(r)$. Entonces $s \in J^-(r)$ y como $r \in J^-(\lambda(t))$ entonces tenemos que $s \in J^-(\lambda(t))$. Ahora bien, como $J^-(\lambda(t)) = \partial I^-(\lambda(t)) \cup I^-(\lambda(t))$ siendo esta unión disjunta, si $s \in \partial I^-(\lambda(t))$ concluimos que para todo $q \in U$ la curva integral μ_q corta a $\partial I^-(\lambda(t))$. Si por el contrario $s \in I^-(\lambda(t))$ entonces el corolario 3.1.1 nos permite concluir que $\mu_q \cap \partial I^-(\lambda(t)) \neq \emptyset$. Así pues $S_0 - A(t)$ es abierto y por tanto $A(t)$ es un cerrado en S_0 . ■

Ahora estamos en disposición de demostrar la siguiente proposición:

Proposición 3.1.1 *Si M es un espacio-tiempo de punto omega que verifica la condición de distinción de pasado entonces existe una superficie de Cauchy $S \subset M$ tal que para todo $p \in I^+(S)$ se tiene que $\partial I^-(p)$ es una superficie de Cauchy.*

Demostración: Sea λ una curva integral de X , entonces afirmamos que existe t tal que $\partial I^-(\lambda(t))$ es superficie de Cauchy. Supongamos que no es cierto, es decir, que $\partial I^-(\lambda(t))$ no es superficie de Cauchy para ningún t . Entonces por el lema 3.1.8 (pág. 35) tenemos que para cada t existe una curva integral μ_t tal que $\mu_t \cap \partial I^-(\lambda(t)) = \emptyset$. Pero por el lema 3.1.9 tenemos que existe una curva integral μ tal que $\mu \cap \partial I^-(\lambda(t)) = \emptyset$ para todo t y esto implica que $\mu \cap I^-(\lambda) = \emptyset$ por lo que se contradeciría que M es de punto omega. Así pues existe t tal que $\partial I^-(\lambda(t))$ es superficie de Cauchy. Entonces cualquier curva γ temporal inextensible es tal que $\gamma \cap \partial I^-(\lambda(t)) \neq \emptyset$ y por el lema 3.1.7 tenemos que para todo $q \in I^+(\lambda(t)) = I^+(\partial I^-(\lambda(t)))$ se verifica que $\gamma \cap \partial I^-(q) \neq \emptyset$. Así pues tenemos que si $S = \partial I^+(\lambda(t))$ entonces para todo $q \in I^+(S)$ se verifica que $\partial I^-(q)$ es una superficie de Cauchy. ■

3.2 Variación de una curva

Recordemos ahora algunos conceptos básicos del cálculo de variaciones, que es un arma fundamental para la demostración de la unicidad de superficies de Cauchy con curvatura media constante. Inspirados en [9, sección 8 y 10] vamos a mencionar los resultados más importantes.

Definición 3.2.1 *Una variación de un segmento de curva* $\alpha : [a, b] \longrightarrow M$ es una aplicación diferenciable $\varphi : [a, b] \times (-\delta, \delta) \longrightarrow M$ tal que $0 < \delta \in \mathbb{R}$ y además $\alpha(t) = \varphi(t, 0)$, $\forall t \in [a, b]$. Dado $u_0 \in (-\delta, \delta)$, la curva $\varphi^{u_0} : [a, b] \longrightarrow M$ diremos que es una **curva longitudinal** de la variación φ y dado $t_0 \in [a, b]$, diremos que la curva $\varphi^{t_0} : (-\delta, \delta) \longrightarrow M$ es una **curva transversal** a la variación. A la curva α se la denomina **curva base** de la variación, y llamaremos **campo variacional** de φ al campo V sobre la curva α tal que $V(t) = \varphi_u(t, 0)$, donde φ_u denota la derivada de φ en la dirección transversal, es decir, que para cada $t \in [a, b]$, $V(t)$ es el vector velocidad de la curva φ^t en el punto $u = 0$.

Nos interesa estudiar la longitud de las curvas longitudinales de una variación para determinar cuándo una curva base temporal es la que maximiza la separación temporal entre sus extremos.

Denotemos como $\mathcal{L}(\gamma)$ a la longitud de una curva γ , y denotemos también $\mathcal{L}_V(u)$ a la longitud de la curva longitudinal φ^u , entonces $\mathcal{L}_V(0) = \mathcal{L}(\alpha)$, donde α es la curva base de φ . Es decir, $\mathcal{L}_V : (-\delta, \delta) \xrightarrow{u \rightarrow \mathcal{L}(\varphi^u)} \mathbb{R}$ y además

escribiremos $\mathcal{L}'_V = \frac{d\mathcal{L}_V}{du}$ y $\mathcal{L}''_V = \frac{d^2\mathcal{L}_V}{du^2}$.

Una variación φ de una curva diferenciable a trozos $\alpha : [a, b] \longrightarrow M$ es también diferenciable a trozos. Sean $a = t_0 < t_1 < \dots < t_k < t_{k+1} = b$ los puntos en los que α no es diferenciable, entonces la restricción de φ a cada

$[t_i, t_{i+1}] \times (-\delta, \delta)$ para $i = 1, \dots, k$ es diferenciable. El campo variacional V es siempre diferenciable a trozos y podemos suponer que α y φ tienen los mismos puntos en los que no son diferenciables. Por otro lado, el campo tangente a α tendrá discontinuidades en $\{t_i\}_{i=1, \dots, k}$. Denotaremos $\Delta\alpha'(t_i) = \alpha'(t_i^+) - \alpha'(t_i^-) \in T_{\alpha(t_i)}M$ donde $\alpha'(t_i^+)$ denota el vector tangente a α por la derecha, i.e. por $[t_i, t_{i+1}]$, y $\alpha'(t_i^-)$ denota el vector tangente de α por la izquierda, i.e. por $[t_{i-1}, t_i]$ para $i = 1, \dots, k-1$.

Con esta notación tenemos la fórmula de la primera variación de la longitud de arco:

Proposición 3.2.1 *Sea $\alpha : [a, b] \longrightarrow M$ un segmento de curva diferenciable a trozos con $|\alpha'| = |g(\alpha', \alpha')|^{\frac{1}{2}} = 1$. Si φ es una variación de α con campo variacional V , se tiene que:*

$$\mathcal{L}'_V(0) = \int_a^b g(\nabla_{\alpha'}\alpha', V)dt + \sum_{i=1}^{k-1} g(\Delta\alpha'(t_i), V(t_i)) - [g(\alpha', V)]_a^b$$

donde ∇ representa la conexión de Levi-Civita.

Demostración: Ver demostración en [9, proposición 10.2]. ■

Una variación φ con campo variacional V es de **extremos fijos** si $V(a) = 0 \in T_{\alpha(a)}M$ y $V(b) = 0 \in T_{\alpha(b)}M$, es decir, la primera y la última curvas transversales son constantes.

Corolario 3.2.1 *Un segmento α de curva diferenciable a trozos, con velocidad constante $|\alpha'| > 0$ es una geodésica diferenciable si y sólo si la primera variación de la longitud de arco $\mathcal{L}'_V(0) = 0$ para toda variación φ de extremos fijos con campo variacional V .*

Demostración: Ver demostración en [9, corolario 10.3]. ■

Sea S una hipersuperficie diferenciable y $\alpha : [a, b] \longrightarrow M$ una curva diferenciable que maximiza la separación temporal entre S y un punto $p \in M$, es decir, $\alpha(a) \in S$ y $\alpha(b) = p$, con $p \in I^+(S)$. Entonces es claro que α también maximiza la separación temporal entre $\alpha(a)$ y p . Por tanto, si tomamos una variación φ con campo variacional V de extremos fijos se tiene que

$$0 = \mathcal{L}'_V(0) = \int_a^b g(\nabla_{\alpha'}\alpha', V)dt$$

para todo φ (y por tanto para todo V) lo que implica que $\nabla_{\alpha'}\alpha' = 0$ y por tanto α es geodésica. Ahora bien, si tomamos otra variación $\tilde{\varphi}$ de α con

campo variacional \tilde{V} tal que $0 \neq \tilde{V}(a) \in T_{\alpha(a)}S$ y además $\tilde{V}(b) = 0 \in T_{\alpha(b)}M$, es decir, la variación $\tilde{\varphi}$ tiene como único extremo fijo a $p = \alpha(b)$ y por tanto

$$0 = \mathcal{L}'_{\tilde{V}}(0) = \int_a^b g(\nabla_{\alpha'}\alpha', \tilde{V})dt - \left[g(\alpha', \tilde{V}) \right]_a^b = g(\alpha'(a), \tilde{V}(a))$$

entonces se tiene que $\alpha'(a)$ es ortogonal a $\tilde{V}(a)$. Podemos repetir este argumento para ver que si una curva α maximiza la separación temporal entre dos hipersuperficies S y S' entonces se tiene que $\alpha'(a)$ es ortogonal a S y $\alpha'(b)$ es ortogonal a S' .

Por otro lado, si α es una geodésica diferenciable tal que $\mathcal{L}'_V(0) = 0$ entonces esto implica que α es tal que su longitud $\mathcal{L}(\alpha)$ es extrema entre $\alpha(a)$ y $\alpha(b)$. En este caso tenemos la fórmula de la segunda variación de longitud de arco:

Teorema 3.2.1 *Sea $\alpha : [a, b] \rightarrow M$ una geodésica tal que $|\alpha'| = 1$. Si φ es una variación de α con campo variacional V entonces*

$$\mathcal{L}''_V(0) = \int_a^b [-g(\nabla_{\alpha'}V, \nabla_{\alpha'}V) + g(R(V, \alpha')\alpha', V)] dt - [g(\nabla_V V, \alpha')]_a^b$$

donde R es el tensor de curvatura.

Demostración: Ver demostración en [9, teorema 10.4]. ■

A continuación y siguiendo [9, capítulo 14] vamos a introducir la noción de **separación temporal**. Este concepto relaciona estrechamente el cálculo de variaciones con la estructura causal de un espacio-tiempo.

Definición 3.2.2 *Sean $p, q \in M$ tales que $p \leq q$, entonces se define la separación temporal entre p y q como*

$$\tau(p, q) = \sup \{ \mathcal{L}(\gamma) : \gamma \text{ segmento de curva causal futura desde } p \text{ hasta } q \}$$

considerando las siguientes convenciones:

$$\tau(p, q) = \infty \text{ si el conjunto de longitudes no está acotado}$$

$$\tau(p, q) = 0 \text{ si } p \text{ y } q \text{ son tales que } q \notin J^+(p)$$

Lema 3.2.1 *La separación temporal $\tau(p, q)$ entre p y q verifica las siguientes propiedades:*

1. $\tau(p, q) > 0$ si y sólo si $q \in I^+(p)$.

2. Si $p \leq q \leq r$ entonces se tiene que $\tau(p, q) + \tau(q, r) \leq \tau(p, r)$. Esta propiedad se denomina **desigualdad inversa del triángulo**.

Demostración: La demostración puede verse en [9, lema 14.16]. ■

Lema 3.2.2 *La función separación temporal $\tau : M \times M \longrightarrow [0, \infty]$ es semi-continua inferior.*

Demostración: Ver demostración en [9, lema 14.17].

Proposición 3.2.2 *Sean $p, q \in M$ tales que $p < q$. Si M globalmente hiperbólico entonces existe una geodésica causal γ uniendo p con q tal que $\mathcal{L}(\gamma) = \tau(p, q)$.*

Demostración: La demostración puede verse en [9, proposición 14.19].

Proposición 3.2.3 *Si M es globalmente hiperbólico entonces la función separación temporal $\tau : M \times M \longrightarrow [0, \infty]$ es continua.*

Demostración: Ver demostración en [9, lema 14.21]. ■

3.3 Superficies de curvatura media constante

Lema 3.3.1 *Si M es un espacio-tiempo de punto omega que verifica la condición de distinción del pasado entonces existe una superficie de Cauchy S tal que se verifica que $M - [I^+(p) \cup I^-(p)]$ es compacto para todo $p \in I^+(S)$.*

Demostración: Por la proposición 3.1.1 (pág. 36) tenemos que existe una superficie de Cauchy S tal que para todo $p \in I^+(S)$ se tiene que $\partial I^-(p)$ es una superficie de Cauchy. Tomemos entonces $p \in I^+(S)$. Como los conjuntos $I^+(p)$ y $I^-(p)$ son abiertos entonces $M - [I^+(p) \cup I^-(p)]$ es un conjunto cerrado. Como M es globalmente hiperbólico, por la proposición 2.3.6 (pág. 19) existe una foliación $S(t)$ de M tal que $S(a)$ es una superficie de Cauchy espacial para todo $a \in \mathbb{R}$. Además sabemos que $\partial I^-(p)$ y $\partial I^+(p)$ son superficies de Cauchy compactas, por tanto existen $t_0, t_1 \in \mathbb{R}$ tales que $t_0 < t_1$ y

$$\partial I^+(p) \subset I^-(S(t_1)) \quad (3.1)$$

$$\partial I^-(p) \subset I^+(S(t_0)) \quad (3.2)$$

Demostremos que $I^+(S(t_1)) \subset I^+(p)$. En efecto, si $s \in I^+(S(t_1))$ existe $r \in S(t_1)$ tal que $s \in I^+(r)$. Como $\partial I^+(p)$ es superficie de Cauchy y como se verifica 3.1 entonces cualquier curva γ temporal inextensible que pase por r intersectará a $\partial I^+(p)$ en un punto $u \in \partial I^+(p) \cap \gamma$. Es decir, $s \in I^+(u)$ y $u \in \partial I^+(p)$. Tomemos un entorno W de u tal que $W \subset I^-(s)$ y como

$u \in \partial I^+(p)$ se tiene que $W \cap I^+(p) \neq \emptyset$. Por tanto existe $w \in W \cap I^+(p)$ lo que implica que $w \in I^-(s) \cap I^+(p)$ y por tanto $s \in I^+(p)$. Esto concluye que $I^+(S(t_1)) \subset I^+(p)$. De forma análoga se puede ver usando 3.2 que $I^-(S(t_0)) \subset I^-(p)$. Así pues

$$M - [I^+(p) \cup I^-(p)] \subset M - [I^+(S(t_1)) \cup I^-(S(t_0))]$$

y como $M \simeq S(t_0) \times \mathbb{R}$ se tiene que

$$M - [I^+(S(t_1)) \cup I^-(S(t_0))] \simeq S(t_0) \times [t_0, t_1]$$

que es un producto de conjuntos compactos y por tanto compacto. Como $M - [I^+(p) \cup I^-(p)]$ es un cerrado dentro de un compacto entonces también es compacto. ■

Teorema 3.3.1 (Bartnik) *Sea M un espacio-tiempo globalmente hiperbólico con superficie de Cauchy compacta que verifica la condición de convergencia temporal. Si $M - [I^+(p) \cup I^-(p)]$ es compacto para algún $p \in M$ entonces existe una superficie de Cauchy S diferenciable⁴, con curvatura media constante tal que $p \in S$.*

Demostración: La demostración de Bartnik utiliza técnicas y argumentos analíticos por lo que la omitimos. Esta demostración puede verse en [2]. ■

Lema 3.3.2 *Sea M un espacio-tiempo que posee una hipersuperficie $S \subset M$ diferenciable, espacial, compacta, con curvatura media constante $k \neq 0$ y que verifica la condición de convergencia temporal, entonces en cualquier entorno $U \subset M$ de S existen hipersuperficies S_+ y S_- con curvaturas media k_+ y k_- respectivamente tales que $k_+ < k < k_-$.*

Demostración: Sea \tilde{N} el campo vectorial normal sobre la hipersuperficie S , vamos a extender \tilde{N} a un campo N en un entorno U de S . Para cada $p \in S$ existe un entorno \mathcal{U}^p de p en S donde para todo $x \in \mathcal{U}^p$ la curva $\gamma_x(t) \equiv \exp_x(t\tilde{N}(x))$ está definida para todo $t \in (-\epsilon_p, \epsilon_p)$ siendo $\epsilon_p > 0$. Como S es compacta entonces existen p_1, p_2, \dots, p_n tales que $S = \bigcup_{i=1}^n \mathcal{U}^{p_i}$, es decir, tiene un recubrimiento finito formado por $\{\mathcal{U}^{p_i}\}_{i=1, \dots, n}$. Tomando entonces $\epsilon = \min_{i=1, \dots, n} \{\epsilon_{p_i}\} > 0$ podemos considerar que para todo $p \in S$ la curva $\gamma_p(t)$ está definida para $t \in (-\epsilon, \epsilon)$. Así pues podemos tomar un entorno

⁴El enunciado de Bartnik de [2] dice que la superficie debe ser $C^{2,\alpha}$ ya que trabaja con la clase C^2 . En la demostración utiliza [1, teorema 4.1] donde se indica que si consideramos la clase C^k entonces la superficie es $C^{k,\alpha}$ para $k \geq 1$. Como nosotros estamos trabajando con la clase C^∞ entonces nuestra superficie será también C^∞ .

$U \subset M$ de S tal que para todo $q \in U$ exista $p \in S$ y $t \in (-\epsilon, \epsilon)$ tal que $q = \gamma_p(t)$, de esta manera definimos $N(q) \equiv \gamma'_p(t)$ que resulta ser una extensión del campo \tilde{N} . Elegimos ahora $\{\tilde{V}_i\}_{i=1, \dots, n-1}$ campos vectoriales sobre S tales que $\{\tilde{V}_i(p)\}_{i=1, \dots, n-1}$ sean base ortonormal de $T_p S$ para todo $p \in S$. Podemos extender estos campos a campos V_i en el entorno U transportando paralelamente $\tilde{V}_i(p)$ a lo largo de $\gamma_p(t)$ para todo $p \in S$. De esta manera para cualquier $p \in S$ tenemos que como γ_p es geodésica entonces $(\nabla_N N)(p) = 0$, como V_i es paralelo a lo largo de γ_p entonces $(\nabla_N V_i)(p) = 0$ y además $g(N(q), N(q)) = -1$ para todo $q \in U$. Vamos a calcular cómo varía la curvatura media de S al moverla hacia el futuro a lo largo de N . Denotando $\frac{\partial}{\partial n}$ a la derivada a lo largo de N y evaluando en $p \in S$ tenemos que

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial n} k &= N \left(\sum_{i=1}^{n-1} g(\nabla_{V_i} N, V_i) \right) = \sum_{i=1}^{n-1} N(g(\nabla_{V_i} N, V_i)) = \\
&= \sum_{i=1}^{n-1} (g(\nabla_N \nabla_{V_i} N, V_i) + g(\nabla_{V_i} N, \nabla_N V_i)) = \sum_{i=1}^{n-1} g(\nabla_N \nabla_{V_i} N, V_i) = \\
&= \sum_{i=1}^{n-1} g(R(N, V_i)N + \nabla_{V_i} \nabla_N N + \nabla_{[N, V_i]} N, V_i) = \sum_{i=1}^{n-1} g(R(N, V_i)N, V_i) + \\
&\quad + \sum_{i=1}^{n-1} g(\nabla_{[N, V_i]} N, V_i) = \sum_{i=1}^{n-1} g(R(N, V_i)N, V_i) + g(R(N, N)N, N) - \\
&\quad - g(R(N, N)N, N) + \sum_{i=1}^{n-1} g(\nabla_{[N, V_i]} N, V_i) = -Ricc(N, N) + \sum_{i=1}^{n-1} g(\nabla_{[N, V_i]} N, V_i) = \\
&= -Ricc(N, N) + \sum_{i=1}^{n-1} g(\nabla_{(\nabla_N V_i)} N - \nabla_{(\nabla_{V_i} N)} N, V_i) = \\
&= -Ricc(N, N) - \sum_{i=1}^{n-1} g(\nabla_{(\nabla_{V_i} N)} N, V_i) \tag{3.3}
\end{aligned}$$

donde R representa el tensor de Riemann. Usando ahora que

$$\nabla_{V_i} N = \sum_{j=1}^{n-1} g(\nabla_{V_i} N, V_j) V_j + g(\nabla_{V_i} N, N) N$$

y además $g(\nabla_{V_i} N, N) = 0$ se tiene que

$$\nabla_{V_i} N = \sum_{j=1}^{n-1} g(\nabla_{V_i} N, V_j) V_j \tag{3.4}$$

En efecto, utilizando la fórmula de Koszul tenemos que

$$2g(\nabla_{V_i}N, N) = V_i(g(N, N))$$

y como $g(N, N) = -1$ constante en todo punto $p \in U$ entonces

$$g(\nabla_{V_i}N, N) = 0$$

y por tanto queda demostrado que la ecuación 3.4 es cierta. Retomando ahora la ecuación 3.3 tenemos que

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial n}k &= -Ricc(N, N) - \sum_{i=1}^{n-1} g\left(\nabla_{(\nabla_{V_i}N)}N, V_i\right) = \\ &= -Ricc(N, N) - \sum_{i=1}^{n-1} g\left(\nabla\left(\sum_{j=1}^{n-1} g(\nabla_{V_i}N, V_j)V_j\right)N, V_i\right) = \\ &= -Ricc(N, N) - \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=1}^{n-1} g(\nabla_{V_i}N, V_j) \cdot g(\nabla_{V_j}N, V_i) \end{aligned}$$

en conclusión:

$$\frac{\partial}{\partial n}k = - \left(Ricc(N, N) + \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=1}^{n-1} \chi(V_i, V_j) \cdot \chi(V_j, V_i) \right) \quad (3.5)$$

Como M verifica la condición de convergencia temporal, es decir, se tiene que $Ricc(v, v) \geq 0$ para todo vector v temporal, además como $k = \sum_{i=1}^{n-1} \chi(V_i, V_i) \neq 0$ entonces

$$\sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=1}^{n-1} \chi(V_i, V_j) \cdot \chi(V_j, V_i) = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=1}^{n-1} (\chi(V_i, V_j))^2 > 0$$

y por tanto

$$\frac{\partial}{\partial n}k = - \left(Ricc(N, N) + \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=1}^{n-1} \chi(V_i, V_j) \cdot \chi(V_j, V_i) \right) < 0$$

Esto significa que la curvatura media decrece a medida que desplazamos la superficie S a lo largo del campo N hacia el futuro. Por tanto, dentro de $U \cap I^+(S)$ podemos encontrar una hipersuperficie diferenciable S_+ con curvatura media k_+ no necesariamente constante tal que $k_+ < k$. De manera análoga podemos demostrar que existe una hipersuperficie S_- con curvatura media k_- no necesariamente constante tal que $k < k_-$ con lo que quedaría demostrado el presente lema. ■

Observación 3.3.1 *La demostración de este lema 3.3.2 (pág. 41) pone de manifiesto que si la superficie S de partida tiene curvatura media constante $k = 0$ entonces no podemos asegurar que la superficie construida S_+ tenga curvatura media $k_+ < 0$, pero es claro que podemos encontrar una superficie S_+ tal que su curvatura media verifique que $|k_+| < \epsilon$ para cualquier $\epsilon > 0$ dado. En este caso no podríamos decir nada sobre el signo de k_+ (que no tiene porqué ser constante), para ello tendríamos que estudiar el valor del tensor de Ricci en S y su segunda forma fundamental. Por ejemplo, si S no es totalmente geodésica o el tensor de Ricci es estrictamente positivo entonces $k_+ < 0$ como indica la fórmula 3.5. Por razones análogas, podremos decir lo mismo de S_- . Así pues, en general, dado $\epsilon > 0$ existen superficies S_+ y S_- tales que sus curvaturas media k_+ y k_- son tales que*

$$|k - k_+| < \epsilon$$

$$|k - k_-| < \epsilon$$

Usaremos este hecho para estudiar la continuidad de las foliaciones existentes en las "proximidades" del punto omega a lo largo de las curvas temporales.

Proposición 3.3.1 *Sea M un espacio-tiempo con superficie de Cauchy compacta y que satisface la condición de convergencia temporal. Si $S \subset M$ es una hipersuperficie diferenciable, compacta, espacial, con curvatura media constante $k_0 \neq 0$, entonces no existe otra hipersuperficie diferenciable, compacta, espacial, con la misma curvatura media constante k_0 .*

Demostración: Supongamos que existe $\tilde{S} \subset M$ hipersuperficie diferenciable, compacta, espacial y con curvatura media constante k_0 tal que $\tilde{S} \neq S$. Tenemos que considerar dos casos distintos:

Caso 1: Supongamos que existe $q \in \tilde{S}$ tal que $q \in I^+(S)$. Como M posee una superficie de Cauchy entonces es globalmente hiperbólico y por proposición 3.2.3 (pág. 40) la separación temporal $\tau : M \times M \rightarrow \mathbb{R}$ es una función continua y por tanto la restricción (que seguiremos llamando igual) $\tau : S \times \tilde{S} \rightarrow \mathbb{R}$ también es continua. Tanto S como \tilde{S} son compactas y por tanto también lo es $S \times \tilde{S}$. Así pues $\tau : S \times \tilde{S} \rightarrow \mathbb{R}$ alcanza un máximo. Esto quiere decir que existen $p \in S$, $q \in \tilde{S}$ y una curva temporal futura $\gamma : [a, b] \rightarrow M$ tal que $\mathcal{L}(\gamma) = \tau(p, q) = \tau(S, \tilde{S}) \geq \tau(p', q')$ para todo $p' \in S$, $q' \in \tilde{S}$, es decir que γ es la curva temporal futura de mayor longitud entre S y \tilde{S} . Como hemos visto en la sección anterior, γ tiene que ser una geodésica temporal futura tal que $\gamma'(a)$ es ortogonal a S y $\gamma'(b)$ es ortogonal a \tilde{S} . Si φ es una variación de γ cuyo campo variacional V es tal que $V(a) \in T_p S$ y $V(t)$ es el transportado paralelamente de $V(a)$ a lo largo de γ para todo $t \in [a, b]$ (por tanto $V(b) \in T_q \tilde{S}$). Por tanto, como γ maximiza τ se tiene que $\mathcal{L}_V''(0) \leq 0$. Si tomamos ahora $n - 1$ variaciones

$\{\varphi_i\}_{i=1,\dots,n-1}$ con campos variacionales $\{V_i\}_{i=1,\dots,n-1}$ respectivamente tales que $\{V_i(a)\}_{i=1,\dots,n-1}$ forman base ortonormal de $T_p S$ y $\{V_i(t)\}_{i=1,\dots,n-1}$ son los transportados paralelamente de $\{V_i(a)\}_{i=1,\dots,n-1}$ a lo largo de γ para todo $t \in [a, b]$, entonces se tiene que $\mathcal{L}''_{V_i}(0) \leq 0$ para todo $i = 1, \dots, n-1$ y además

$$0 \geq \sum_{i=1}^{n-1} \mathcal{L}''_{V_i}(0) = \sum_{i=1}^{n-1} \int_a^b [-g(\nabla_{\gamma'} V_i, \nabla_{\gamma'} V_i) + g(R(V_i, \gamma')\gamma', V_i)] dt - \\ - \sum_{i=1}^{n-1} [g(\nabla_{V_i} V_i, \gamma')]_a^b = \int_a^b Ricc(\gamma', \gamma') dt + k_{\tilde{S}}(q) - k_S(p)$$

siendo $Ricc(\gamma', \gamma') = \sum_{i=1}^{n-1} g(R(V_i, \gamma')\gamma', V_i) - g(R(\gamma', \gamma')\gamma', \gamma')$ el tensor de Ricci ya que $\{V_i(t)\}_{i=1,\dots,n-1}$ y $\gamma'(t)$ forman base de $T_{\gamma(t)}M$ y $k_{\tilde{S}}, k_S$ las curvaturas medias de S y \tilde{S} respectivamente debido a que $\sum_{i=1}^{n-1} [g(\nabla_{V_i} V_i, \gamma')] (a) = -k_S(\gamma(a))$ y que $\sum_{i=1}^{n-1} [g(\nabla_{V_i} V_i, \gamma')] (b) = -k_{\tilde{S}}(\gamma(b))$. Además se ha usado que $g(R(\gamma', \gamma')\gamma', \gamma') = 0$ directamente de la definición de R . Por tanto como $k_{\tilde{S}}(q) = k_S(p) = k_0$ entonces

$$\sum_{i=1}^{n-1} \mathcal{L}''_{V_i}(0) = \int_a^b Ricc(\gamma', \gamma') dt + k_0 - k_0 = \int_a^b Ricc(\gamma', \gamma') dt \quad (3.6)$$

Si tuvieramos que $Ricc(\gamma', \gamma') \neq 0$ para algún $t \in [a, b]$ y como $Ricc(v, v) \geq 0 \forall v$ temporal entonces tendríamos que

$$\sum_{i=1}^{n-1} \mathcal{L}''_{V_i}(0) = \int_a^b Ricc(\gamma', \gamma') dt > 0$$

lo que contradeciría que $0 \geq \sum_{i=1}^{n-1} \mathcal{L}''_{V_i}(0)$. y por tanto la maximalidad de γ . Así pues, $Ricc(\gamma', \gamma') = 0$ para todo $t \in [a, b]$. Por el lema 3.3.2 (pág. 41) existe W entorno de S tal que existe $S^* \subset W \cap I^+(S)$ hipersuperficie diferenciable, espacial, compacta tal que $\sup_{r \in S^*} k_{S^*}(r) < \inf_{r \in S} k_S(r)$ y existe $q \in \tilde{S}$ tal que $q \in I^+(S^*)$ entonces por el mismo argumento tenemos que existe una curva temporal futura $\tilde{\gamma}$ que maximiza la separación temporal entre S^* y \tilde{S} , tomando entonces variaciones $\{\varphi_i\}_{i=1,\dots,n-1}$ de $\tilde{\gamma}$ con campos variacionales $\{V_i\}_{i=1,\dots,n-1}$ respectivamente tales que $\{V_i(a)\}_{i=1,\dots,n-1}$ forman base

ortonormal de $T_p S^*$ y $\{V_i(t)\}_{i=1,\dots,n-1}$ son los transportados paralelamente de $\{V_i(a)\}_{i=1,\dots,n-1}$ a lo largo de $\tilde{\gamma}$ para todo $t \in [a, b]$, entonces se tiene que

$$0 \geq \sum_{i=1}^{n-1} \mathcal{L}''_{V_i}(0) = \int_a^b Ricc(\tilde{\gamma}', \tilde{\gamma}') dt + k_{\tilde{S}}(\tilde{\gamma}(b)) - k_{S^*}(\tilde{\gamma}(a))$$

y como $k_{S^*}(\tilde{\gamma}(a)) < k_{\tilde{S}}(\tilde{\gamma}(b)) = k_0$ entonces $k_{\tilde{S}}(\tilde{\gamma}(b)) - k_{S^*}(\tilde{\gamma}(a)) > 0$. Como también $Ricc(v, v) \geq 0 \forall v$ temporal entonces

$$\sum_{i=1}^{n-1} \mathcal{L}''_{V_i}(0) = \int_a^b Ricc(\tilde{\gamma}', \tilde{\gamma}') dt + k_{\tilde{S}}(\tilde{\gamma}(b)) - k_{S^*}(\tilde{\gamma}(a)) > 0$$

lo que contradice la maximalidad de $\tilde{\gamma}$. Así pues, concluimos que no existe tal \tilde{S} hipersuperficie, compacta, espacial con curvatura media constante k_0 .

Caso 2: Si no existe $q \in \tilde{S}$ tal que $q \in I^+(S)$, esto es equivalente a decir que $\tilde{S} \subset J^-(S)$. Entonces si $\tilde{S} \neq S$, se tiene que existe $p \in S$ tal que $p \in I^+(\tilde{S})$, con lo que este caso se reduce al caso 1 intercambiando los papeles de \tilde{S} y S . ■

Proposición 3.3.2 *Sea M un espacio-tiempo con superficie de Cauchy compacta que satisface la condición de convergencia temporal y sean S_1 y S_2 dos hipersuperficies diferenciables, compactas, espaciales, con curvaturas media k_1 y k_2 respectivamente tales que $\sup_{S_1} k_1 < \inf_{S_2} k_2$ entonces $I^+(S_1) \cap S_2 = \emptyset$.*

Demostración: Supongamos que el resultado no es cierto, es decir, que existe $p \in I^+(S_1) \cap S_2$, entonces siguiendo el mismo argumento de la demostración del caso 1 de la proposición 3.3.1 (pág. 44) podemos suponer que existe γ con la propiedad de hacer máxima la longitud entre curvas temporales uniendo S_1 con S_2 . De esta manera tendremos que

$$0 \geq \sum_{i=1}^{n-1} \mathcal{L}''_{V_i}(0) = \int_a^b Ricc(\gamma', \gamma') dt + k_2(\gamma(b)) - k_1(\gamma(a))$$

y como $\sup_{S_1} k_1 < \inf_{S_2} k_2$ entonces

$$k_2(\gamma(b)) - k_1(\gamma(a)) > 0$$

Como además se verifica la condición de convergencia temporal, es decir, $Ricc(v, v) \geq 0$ para todo v temporal tenemos que

$$0 \geq \sum_{i=1}^{n-1} \mathcal{L}''_{V_i}(0) = \int_a^b Ricc(\gamma', \gamma') dt + k_2(\gamma(b)) - k_1(\gamma(a)) > 0$$

es una contradicción. Por tanto no existe $p \in I^+(S_1) \cap S_2$. ■

Corolario 3.3.1 *Sea M un espacio-tiempo con superficie de Cauchy compacta que satisface la condición de convergencia temporal y sean S_1 y S_2 dos superficies de Cauchy diferenciables, compactas, espaciales, con curvaturas media k_1 y k_2 respectivamente tales que $\sup_{S_1} k_1 < k_2 \neq 0$ con k_2 constante (resp. $\inf_{S_1} k_1 > k_2 \neq 0$ con k_2 constante) entonces $S_1 \subset I^+(S_2)$ (resp. $S_2 \subset I^+(S_1)$).*

Demostración: Vamos a demostrar únicamente el primer caso, ya que el segundo es análogo. Por la proposición 3.3.2 tenemos que $I^+(S_1) \cap S_2 = \emptyset$ y como tanto S_1 como S_2 son superficies de Cauchy entonces es claro que $S_1 \subset J^+(S_2)$ y además $J^+(S_2) = S_2 \cup I^+(S_2)$. Buscaremos ahora demostrar que $S_1 \cap S_2 = \emptyset$ y por tanto concluiremos que $S_1 \subset I^+(S_2)$. Supongamos que existe $p \in S_1 \cap S_2$, por el lema 3.3.2 (pág. 41) podemos construir una superficie de Cauchy $T \subset I^+(S_2)$ con curvatura media k_T tal que

$$\sup_{S_1} k_1 < \inf_T k_T < \sup_T k_T < k_2$$

Como $p \in S_1 \cap S_2$ entonces existirá $q \in T$ tal que $q \in I^+(S_1) \cap I^+(S_2)$ lo que contradice la proposición 3.3.2. ■

Observación 3.3.2 *Podemos dar otra versión de este corolario de la siguiente manera: Sea M un espacio-tiempo con superficie de Cauchy compacta que satisface la condición de convergencia temporal y sean S_1 y S_2 dos superficies de Cauchy diferenciables, compactas, espaciales, con curvaturas media k_1 y k_2 respectivamente tales que $k_1 < \inf_{S_2} k_2$, y además $k_1 \neq 0$ constante y $k_2 \neq 0$ para todo $p \in S_2$ entonces $S_1 \subset I^+(S_2)$. La demostración es análoga construyendo la superficie T hacia el pasado de S_1 de acuerdo con el lema 3.3.2.*

Proposición 3.3.3 *Sea M un espacio-tiempo de punto omega que verifica la condición de distinción de pasado y la condición de convergencia temporal. Sea T una superficie de Cauchy tal que para todo $p \in I^+(T)$ se tiene que $M - [I^+(p) \cup I^-(p)]$ es compacto. Si no existen $S \neq S'$ dos superficies de Cauchy diferenciables, espaciales, con curvatura media constante $k = 0$ tales que $S, S' \subset I^+(T)$, entonces existe $F(t)$ una foliación de $I^+(T)$ formada por superficies de Cauchy diferenciables, espaciales, compactas y con curvatura media constante tal que define una función tiempo $h : I^+(T) \rightarrow \mathbb{R}$, donde k_p denota la curvatura media del miembro de la foliación que pasa por el punto $p \in I^+(T)$, que es continua.*

Demostración: Por el teorema 3.1.1 de Seifert (pág. 33) sabemos que M es globalmente hiperbólico y las superficies de Cauchy son compactas. Si

aplicamos ahora el teorema 3.3.1 de Bartnik (pág. 41) tenemos que para todo $p \in I^+(T)$ existe una superficie de Cauchy diferenciable, espacial y con curvatura media constante que lo contiene. La proposición 3.3.1 (pág. 44) nos asegura la unicidad de tales superficies siempre que la curvatura media constante sea $k \neq 0$. Por hipótesis, también es única para el valor de $k = 0$. Es decir, por cada $p \in I^+(T)$ pasa una superficie de Cauchy, diferenciable, espacial, compacta y con curvatura media constante. Veamos ahora que para cada $p \in I^+(T)$ no existe más de una de tales superficies. En efecto, supongamos que existen dos de ellas S_0 y S_1 con curvaturas media k_0 y k_1 respectivamente tales que $k_0 > k_1$. Por el corolario 3.3.1 (pág. 47) tenemos que $S_1 \in I^+(S_0)$ y como M es globalmente hiperbólico entonces $S_0 \cap S_1 = \emptyset$. En resumen, para cada $p \in I^+(T)$ existe una única superficie de Cauchy diferenciable, espacial con curvatura media constante tal que no existe otra con tales características y con la misma curvatura media. Esto establece la existencia de la foliación F buscada y de una función tiempo definida por $h : I^+(T) \rightarrow \mathbb{R}$, donde k_p denota la curvatura media del miembro de la foliación que pasa por el punto $p \in I^+(T)$.

Falta demostrar que h es continua. Sea $p \in I^+(T)$ entonces existe una superficie S de la foliación F con curvatura media constante k , dado $\epsilon > 0$ construimos a partir de S unas superficies S_+ y S_- tal y como se hace en el lema 3.3.2 (pág. 41). Por la observación 3.3.1 (pág. 44) sus curvaturas medias k_+ y k_- son tales que

$$|k_+ - k| < \epsilon$$

$$|k_- - k| < \epsilon$$

Vamos a ver que existe un entorno W de p tal que para todo $q \in W$ se tiene que

$$|h(p) - h(q)| \leq \epsilon$$

En efecto, para todo $q \in W = I^+(S_-) \cap I^-(S_+)$ existe una superficie S' de la foliación con curvatura media constante k' . Si $q \in I^+(S)$ entonces $k' < k$. Supongamos en este caso que $k' < k - \epsilon$ entonces

$$k' < \inf_{S_+} k_+$$

y por tanto el corolario 3.3.1 (pág. 47) nos dice que $S' \subset I^+(S_+)$, lo que contradice el hecho de que $q \in I^-(S_+)$. Por tanto

$$k' \geq k - \epsilon$$

y como $k' < k$ se tiene que $k + \epsilon > k' \geq k - \epsilon$ y entonces

$$|k - k'| = |h(p) - h(q)| \leq \epsilon$$

Si $q \in I^-(S)$ entonces $k' > k$. Supongamos de igual manera que $k' > k + \epsilon$ entonces

$$k' > \sup_{S_-} k_-$$

y de nuevo por el corolario 3.3.1 tenemos que $S_- \subset I^+(S')$, pero esto es una contradicción ya que $q \in I^+(S_-)$. Por tanto

$$k' \leq k + \epsilon$$

y como $k' > k$ encontramos que $k + \epsilon \geq k' > k - \epsilon$ y por tanto

$$|k - k'| = |h(p) - h(q)| \leq \epsilon$$

El caso en que $q \in S$ es trivial ya que

$$|k - k'| = |k - k| = 0 < \epsilon$$

Esto concluye la demostración de la continuidad de h . ■

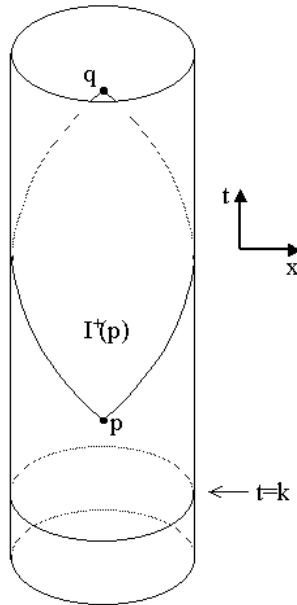


Figura 7. Las superficies de Cauchy con curvatura media nula no tienen por qué ser únicas.

Observación 3.3.3 ¿Cuál es el impedimento que nos obliga a considerar que la superficie de Cauchy con curvatura media $k = 0$ sea única? En espacio-tiempos que tengan más de una superficie de Cauchy espacial con curvatura media nula, no podemos obtener una función tiempo χ en base a la curvatura media de una foliación de superficies de Cauchy con curvatura media constante. Si vemos la curvatura media como una medida del cambio del $(n-1)$ -volumen de tales superficies entonces las superficies con curvatura media

constante representarán el conjunto de simultaneidad de tal cambio. Consideremos el ejemplo del cilindro plano (ver figura 7) dotado de la métrica $ds^2 = -dt^2 + dx^2$. Este espacio-tiempo verifica la condición de convergencia temporal y posee superficies de Cauchy diferenciables, espaciales, compactas con curvatura media idénticamente nula pero no únicas ya que dado cualquier $k \in \mathbb{R}$ se tiene que la hipersuperficie definida por $t = k$ tiene curvatura media nula. Por esto, necesitamos añadir alguna hipótesis si queremos tener dicha unicidad. Brill y Flaherty han demostrado en [4] la unicidad de la hipersuperficie diferenciable, compacta, espacial con curvatura media nula considerando $\text{Ricc}(v, v) > 0$ para todo v temporal como hipótesis en lugar de la condición de convergencia temporal que permite que el tensor de Ricci pueda ser igual a cero para algún vector temporal.

Observación 3.3.4 Podemos demostrar un resultado ligeramente más fuerte que el de Brill y Flaherty permitiendo que el tensor de Ricci se pueda anular en un conjunto discreto de vectores temporales del espacio-tiempo M . Esto es un resultado análogo a la proposición 3.3.1 (pág. 44):

Sea M un espacio-tiempo con superficie de Cauchy compacta y que satisface la condición de convergencia temporal y además se tiene que $Z = \{v \text{ temporal} : \text{Ricc}(v, v) = 0\} \subset TM$ es un conjunto discreto. Si $S \subset M$ es una hipersuperficie diferenciable, compacta, espacial, con curvatura media constante k_0 , entonces no existe otra hipersuperficie diferenciable, compacta, espacial, con la misma curvatura media constante k_0 .

Para demostrar este resultado repetimos la demostración de la proposición 3.3.1 hasta la fórmula 3.6 y así tenemos que

$$0 \geq \sum_{i=1}^{n-1} \mathcal{L}_{V_i}''(0) = \int_a^b \text{Ricc}(\gamma', \gamma') dt + k_0 - k_0 = \int_a^b \text{Ricc}(\gamma', \gamma') dt$$

y por ser Z discreto entonces existe $t_0 \in [a, b]$ tal que $\text{Ricc}(\gamma'(t_0), \gamma'(t_0)) \neq 0$. Como el tensor de Ricci es diferenciable, entonces existe un entorno $A \subset [a, b]$ de t_0 tal que $\text{Ricc}(\gamma', \gamma') \neq 0$ en todo A . Por lo tanto

$$\int_a^b \text{Ricc}(\gamma', \gamma') dt > 0$$

y así

$$0 \geq \sum_{i=1}^{n-1} \mathcal{L}_{V_i}''(0) = \int_a^b \text{Ricc}(\gamma', \gamma') dt > 0$$

lo que nos lleva a una contradicción.

3.4 Espacio-tiempos de Robertson-Walker

A continuación y como ilustración de la teoría expuesta, vamos a estudiar algunos casos especiales de espacio-tiempos, los espacios de Robertson-Walker⁵. Para ello tendremos que encontrar condiciones para que se verifiquen las hipótesis utilizadas anteriormente: la condición de distinción de pasado, la condición de convergencia temporal y la existencia del punto omega. Asimismo comprobaremos la existencia de la foliación formada por superficies de Cauchy dotadas de curvatura media constante tal que entre ellas sólo existe una única superficie con curvatura media nula.

Centraremos este estudio en los espacios de Robertson-Walker cerrados (ver [7, pág.136]), es decir, en los que las hipersuperficies $t = cte$ son difeomorfos a una 3-esfera. La métrica g de nuestro espacio-tiempo de Robertson-Walker M vendrá dada por

$$ds^2 = -dt^2 + S^2(t) [d\chi^2 + \text{sen}^2\chi (d\theta^2 + \text{sen}^2\theta \cdot d\phi^2)] \quad (3.7)$$

donde la función S se denomina **radio del espacio-tiempo**⁶ y es tal que $S \geq 0$. Las coordenadas recorren los siguientes intervalos:

$$t \in (t_I, t_F)$$

$$\chi \in (0, \pi)$$

$$\theta \in (0, \pi)$$

$$\phi \in (0, 2\pi)$$

donde los valores t_I y t_F serán $-\infty$ ó $+\infty$ respectivamente si S no posee ceros, o bien serán los ceros de S teniendo en cuenta que en el intervalo (t_I, t_F) no puede haber ningún cero de S . Así pues, si v es un vector tal que $v = (v_0, v_1, v_2, v_3)$ entonces

$$g(v, v) = -(v_0)^2 + S^2(t) [(v_1)^2 + \text{sen}^2\chi ((v_2)^2 + \text{sen}^2\theta \cdot (v_3)^2)] \quad (3.8)$$

por tanto será temporal si

$$(v_0)^2 > S^2(t) [(v_1)^2 + \text{sen}^2\chi ((v_2)^2 + \text{sen}^2\theta \cdot (v_3)^2)] \quad (3.9)$$

y como la coordenada t representa el tiempo, convendremos que v es futuro si además $v_0 > 0$.

Estos espacios pueden verse como un producto

$$M = (t_I, t_F) \times S_0$$

⁵En la literatura también se llaman de Friedman-Robertson-Walker o simplemente de Friedman, en especial cuando son estudiados como modelos cosmológicos.

⁶El nombre de radio del espacio-tiempo o del universo es debido a que la hipersuperficie $t = cte$ es isométrica a una 3-esfera cuyo radio es precisamente $S(t)$.

donde S_0 representa la 3-esfera correspondiente al valor $t = t_0 \in (t_I, t_F)$.

Los símbolos de Christoffel Γ_{ij}^k de la métrica g se pueden calcular usando la fórmula 2.2 y se obtiene que los únicos no nulos son

$$\begin{aligned} \Gamma_{11}^0 &= S'(t) \cdot S(t) & \Gamma_{a0}^a &= \Gamma_{0a}^a = \frac{S'(t)}{S(t)} & \Gamma_{33}^1 &= \Gamma_{22}^1 \cdot \text{sen}^2\theta \\ \Gamma_{22}^0 &= \Gamma_{11}^0 \cdot \text{sen}^2\chi & \Gamma_{22}^1 &= -\text{sen}\chi \cdot \cos\chi & \Gamma_{1b}^b &= \Gamma_{b1}^b = \frac{\cos\chi}{\text{sen}\chi} \\ \Gamma_{33}^0 &= \Gamma_{22}^0 \cdot \text{sen}^2\theta & \Gamma_{33}^2 &= -\text{sen}\theta \cdot \cos\theta & \Gamma_{23}^3 &= \Gamma_{32}^3 = \frac{\cos\chi}{\text{sen}\chi} \end{aligned} \quad (3.10)$$

donde $a \in \{1, 2, 3\}$ y $b \in \{2, 3\}$.

Condición de distinción de pasado.

Recordemos que un espacio-tiempo M verifica la condición de distinción de pasado si no existen puntos $p, q \in M$ tales que $p \neq q$ y además $I^-(p) = I^-(q)$. Por lo tanto supongamos que existen dos puntos $p = (p_0, p_1, p_2, p_3)$ y $q = (q_0, q_1, q_2, q_3)$ tales que $I^-(p) = I^-(q)$. Es claro que entonces $p_0 = q_0$ ya que en caso de que $p_0 < q_0$ tendríamos que habría puntos de $I^-(q)$ que se podrían conectar mediante alguna curva $\gamma(s) = (t(s), \chi(s), \theta(s), \phi(s))$ temporal futura con p , pero por la expresión 3.9 tenemos que $\frac{dt}{ds} > 0$, entonces no es posible que $\gamma(s)$ sea temporal futura debido a que $p_0 - q_0 < 0$ y aplicando el teorema del valor intermedio para $t(s)$ tendríamos que existe un valor de s tal que $\frac{dt}{ds} < 0$ contradiciendo que γ es temporal futura.

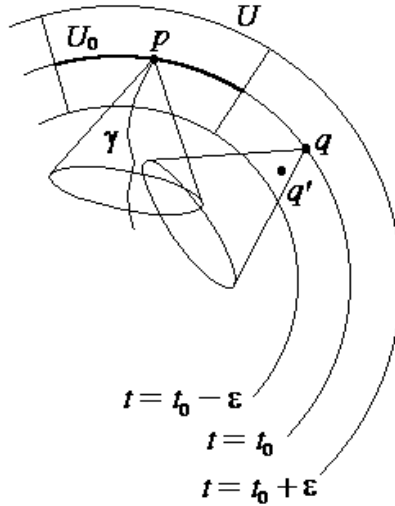


Figura 8. Los espacio-tiempos de Robertson-Walker verifican la condición de distinción de pasado.

Concluimos señalando que los pasados cronológicos de dos puntos p y q contenidos en la misma superficie $t = t_0$ no pueden ser iguales. En efecto, por la fórmula 3.8 se comprueba que los vectores tangentes a la superficie

$t = t_0$ son espaciales, por lo tanto los vectores del cono de luz pasado son tales que su primera coordenada es $v_0 < 0$. Entonces considerando el espacio-tiempo como el producto $M = (t_I, t_F) \times S_0$ donde S_0 representa la 3-esfera correspondiente al valor $t = t_0 \in (t_I, t_F)$ podemos construir un entorno U de p tal que

$$U = (t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon) \times U_0$$

donde U_0 es un entorno relativamente compacto de p en la superficie $t = t_0$ que no contiene al punto q y además $\epsilon > 0$ de tal manera que toda curva inextensible hacia el pasado en el cono de luz pasado que parta de p corte a $\{t_0 - \epsilon\} \times U_0$. Así pues, toda curva temporal pasada inextensible hacia el pasado que comience en p también cortará a $\{t_0 - \epsilon\} \times U_0$ y por tanto existe $q' \in I^-(q)$ suficientemente cercano a q tal que su primera coordenada es $q'_0 > t_0 - \epsilon$ y por tanto no puede ser conectado mediante una curva γ temporal pasada (ver figura 8). De esta manera tenemos que M verifica la condición de distinción de pasado.

Condición de convergencia temporal.

A continuación vamos a comprobar que para todo vector temporal $v \in T_p M$ se tiene que $Ricc(v, v) \geq 0$. Para ello vamos a denotar a los campos coordenados $\left\{ \frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial \chi}, \frac{\partial}{\partial \theta}, \frac{\partial}{\partial \phi} \right\}$ como $\left\{ \frac{\partial}{\partial x^0}, \frac{\partial}{\partial x^1}, \frac{\partial}{\partial x^2}, \frac{\partial}{\partial x^3} \right\}$ respectivamente para escribir los cálculos de una forma más compacta.

Sea $Z = Z^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ un campo vectorial tal que $Z(p)$ es temporal para todo $p \in M$ y sea el radio del universo $S(t)$ tal que $S''(t) \leq 0$, entonces tenemos que

$$Ricc(Z, Z) = Ricc\left(Z^i \frac{\partial}{\partial x^i}, Z^j \frac{\partial}{\partial x^j}\right) = Z^i Z^j Ricc\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right)$$

Utilizando las fórmulas 2.4 y 2.3 (pág. 11) obtenemos que cuando $i \neq j$

$$Ricc\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right) = 0$$

y además

$$\begin{aligned} Ricc\left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial t}\right) &= \frac{-3S''(t)}{S(t)} \\ Ricc\left(\frac{\partial}{\partial \chi}, \frac{\partial}{\partial \chi}\right) &= 2(S'(t))^2 + S''(t)S(t) + 2 \\ Ricc\left(\frac{\partial}{\partial \theta}, \frac{\partial}{\partial \theta}\right) &= (2(S'(t))^2 + S''(t)S(t) + 2) \cdot \text{sen}^2 \chi \\ Ricc\left(\frac{\partial}{\partial \phi}, \frac{\partial}{\partial \phi}\right) &= (2(S'(t))^2 + S''(t)S(t) + 2) \cdot \text{sen}^2 \chi \cdot \text{sen}^2 \theta \end{aligned}$$

por tanto tenemos que

$$Ricc(Z, Z) = (Z^0)^2 \left(\frac{-3S''(t)}{S(t)}\right) + \left(2(S'(t))^2 + S''(t)S(t) + 2\right) \cdot \Psi \quad (3.11)$$

siendo $\Psi = \left[(Z^1)^2 + \text{sen}^2 \chi \left((Z^2)^2 + \text{sen}^2 \theta \cdot (Z^3)^2 \right) \right]$.

Como Z es un campo temporal entonces por 3.9 tenemos que

$$(Z^0)^2 > S^2(t) \cdot \Psi$$

entonces

$$\frac{-3S''(t)}{S(t)} (Z^0)^2 > \frac{-3S''(t)}{S(t)} S^2(t) \cdot \Psi = -3S''(t) \cdot S(t) \cdot \Psi$$

y por 3.11 obtenemos que

$$\text{Ricc}(Z, Z) > 2 \left((S'(t))^2 + 1 - S''(t)S(t) \right) \cdot \Psi > 0$$

para todo vector $Z(p)$ temporal.

Punto Omega.

Además de las condiciones ya impuestas a la función $S(t)$, es decir que $S > 0$ y $S'' \leq 0$ para todo $t \in (t_I, t_F)$, trataremos de encontrar alguna condición más para que un espacio-tiempo M de Robertson-Walker sea de punto omega. Sea γ una curva temporal inextensible hacia el futuro, veamos cuándo podemos unir un punto cualquiera $p = (t_0, \chi_0, \theta_0, \phi_0) \in M$ con un punto $q \in \gamma$ mediante una curva σ temporal futura.

Recordemos brevemente el cálculo de horizontes de sucesos (ver [11, pág. 259]). Nos podemos preguntar sobre si es posible alcanzar un valor concreto de χ mediante una curva causal β tal que $\theta = cte$ y $\phi = cte$ y que comienza en $p = (t_0, \chi_0, \theta_0, \phi_0)$, entonces por 3.7 (pág. 51) se verificaría que

$$ds^2 = -dt^2 + S^2(t) \cdot d\chi^2 = 0$$

y así tenemos que

$$d\chi = \pm \frac{dt}{S(t)}$$

Suponiendo, sin pérdida de generalidad, que $\chi > \chi_0$ entonces podemos elegir el signo positivo de la ecuación anterior, por tanto, integrando obtenemos

$$\chi = \chi_0 + \int_{t_0}^t \frac{dt}{S(t)}$$

lo que nos lleva a deducir que el máximo valor de χ que podemos alcanzar es

$$\chi_F = \chi_0 + \int_{t_0}^{t_F} \frac{dt}{S(t)}$$

A este valor χ_F se le denomina **horizonte de sucesos de p** y si, en particular, $\lim_{t \rightarrow t_F} \int_{t_0}^t \frac{dt}{S(t)} = \infty$ entonces se podrá alcanzar cualquier valor de χ .

Inspirados en este cálculo vamos a definir σ de forma implícita. Sea σ la curva tal que $t(s)$ es una función creciente y además

$$\begin{aligned}\chi(t) &= \chi_0 + \xi_1 \int_{t_0}^t \frac{dt}{S(t)} \\ \theta(t) &= \theta_0 + \xi_2 \int_{t_0}^t \frac{dt}{S(t)} \\ \phi(t) &= \phi_0 + \xi_3 \int_{t_0}^t \frac{dt}{S(t)}\end{aligned}$$

donde ξ_1, ξ_2 y ξ_3 son números reales tales que $(\xi_1)^2 + (\xi_2)^2 + (\xi_3)^2 < 1$, como

$$\sigma'(s) = \left(\frac{dt}{ds}, \frac{d\chi}{dt} \frac{dt}{ds}, \frac{d\theta}{dt} \frac{dt}{ds}, \frac{d\phi}{dt} \frac{dt}{ds} \right)$$

entonces tenemos que

$$\sigma'(s) = \left(\frac{dt}{ds}, \frac{\xi_1}{S(t)} \frac{dt}{ds}, \frac{\xi_2}{S(t)} \frac{dt}{ds}, \frac{\xi_3}{S(t)} \frac{dt}{ds} \right)$$

y calculando el valor de $g(\sigma'(s), \sigma'(s))$ obtenemos que

$$\begin{aligned}g(\sigma'(s), \sigma'(s)) &= -\left(\frac{dt}{ds}\right)^2 + S^2(t) \left[\frac{(\xi_1)^2}{S^2(t)} + \text{sen}^2 \chi \left(\frac{(\xi_2)^2}{S^2(t)} + \text{sen}^2 \theta \frac{(\xi_3)^2}{S^2(t)} \right) \right] \left(\frac{dt}{ds}\right)^2 = \\ &= [-1 + (\xi_1)^2 + \text{sen}^2 \chi ((\xi_2)^2 + (\xi_3)^2 \text{sen}^2 \theta)] \cdot \left(\frac{dt}{ds}\right)^2 < \\ &< [-1 + (\xi_1)^2 + (\xi_2)^2 + (\xi_3)^2] \cdot \left(\frac{dt}{ds}\right)^2 < 0\end{aligned}$$

por tanto σ es una curva temporal futura. Si además la función radio del universo $S(t)$ es tal que

$$\int_{t_0}^t \frac{dt}{S(t)} \text{ es divergente cuando } t \rightarrow t_F \quad (3.12)$$

entonces podemos llegar desde un punto $p = (t_0, \chi_0, \theta_0, \phi_0)$ hasta algún punto $q = (t_1, \chi_1, \theta_1, \phi_1) \in \gamma$, mediante una curva temporal de la siguiente manera:

Recorremos la curva σ hasta que se alcance alguno de los valores χ_1, θ_1 ó ϕ_1 , supongamos que éste es ϕ_1 , una vez alcanzado se continúa por la curva σ_1 que tiene las mismas coordenadas t, χ y θ que posee σ y además $\phi = \phi_1$ hasta llegar a otro de los valores χ_1 ó θ_1 , supongamos que es θ_1 . Se continúa por la curva σ_2 que es la que conserva las coordenadas t y χ de la curva σ pero que tiene $\theta = \theta_1$ y $\phi = \phi_1$ hasta llegar al valor χ_1 desde donde se continuará por la curva σ_3 que tiene por coordenadas $\chi = \chi_1, \theta = \theta_1$ y $\phi = \phi_1$ hasta llegar al valor t_1 . Se puede comprobar de la misma manera que hemos hecho con la curva σ , que las curvas σ_1, σ_2 y σ_3 son temporales.

Así hemos terminado de demostrar que dada cualquier curva temporal γ inextensible hacia el futuro, para cualquier punto $p \in M$ existe una curva temporal futura (la construida mediante $\sigma, \sigma_1, \sigma_2$ y σ_3) que conecta p con algún punto de γ cuando se verifique 3.12. Esto quiere decir que $M = I^-(\gamma)$ para cualquier curva temporal γ inextensible hacia el futuro y por cumplir M la condición de distinción de pasado entonces M es de punto omega.

Si M es un espacio-tiempo de Robertson-Walker tal que el radio del universo $S(t)$ verifica que

$$\begin{aligned} S(t) &> 0 \\ S''(t) &< 0 \\ \int_{t_0}^t \frac{dt}{S(t)} &\text{ es divergente cuando } t \rightarrow t_F \end{aligned}$$

entonces podemos aplicarle la teoría expuesta anteriormente. Como hemos visto, M es un espacio-tiempo de punto omega que verifica la condición de distinción de pasado, entonces por el teorema 3.1.1 de Seifert (pág. 33) tenemos que es globalmente hiperbólico con superficies de Cauchy compactas. La hipersuperficie T definida por $t = cte$ es de Cauchy porque cualquier curva $\beta(s)$ temporal inextensible será tal que su coordenada t recorrerá todo el intervalo (t_I, t_F) por tanto cortará a T , y lo hará una sola vez porque si la curva es temporal entonces $\frac{dt}{ds} \neq 0$ para todo s .

El lema 3.3.1 (pág. 40) nos dice que existe una superficie de Cauchy \tilde{T} tal que para todo $p \in I^+(\tilde{T})$ se tiene que $M - [I^+(p) \cup I^-(p)]$ es compacto. Entonces el teorema 3.3.1 de Bartnik (pág. 41) nos asegura la existencia de una superficie de Cauchy diferenciable, compacta, espacial y con curvatura media constante. Como la condición de convergencia temporal se verifica de manera estricta, es decir, $Ricc(v, v) > 0$ para todo vector v temporal, entonces la proposición 3.3.1 (pág. 44) nos indica que no existen dos de esas superficies de Cauchy con la misma curvatura media⁷. Podemos aplicar ahora la proposición 3.3.3 (pág. 47) que nos dice que existe una foliación de superficies de Cauchy diferenciables, espaciales, compactas y con curvatura media constante que define una función tiempo

$$h : I^+(\tilde{T}) \rightarrow \mathbb{R} \\ p \mapsto k_p$$

El cálculo de las superficies con curvatura media constante no es un problema sencillo en general, pero en nuestro caso tenemos unas candidatas claras, estas son las superficies de Cauchy T definidas por $t = cte$. Si $\{V_i\}_{i=1, \dots, 3}$ son los campos vectoriales $\left\{ \frac{1}{S(t)} \frac{\partial}{\partial \chi}, \frac{1}{S(t) \cdot \text{sen} \chi} \frac{\partial}{\partial \theta}, \frac{1}{S(t) \cdot \text{sen} \chi \cdot \text{sen} \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \right\}$ tangentes a T que

⁷Como se ha podido ver en la demostración de 3.3.1 y se indica en la observación 3.3.3 si existe una superficie de Cauchy diferenciable, espacial, compacta y con curvatura media nula y se verifica que $Ricc(v, v) > 0$ para todo v temporal entonces esta superficie es única.

además forman una base ortonormal de vectores tangentes a T en cualquier punto $p \in M$. Utilizando los símbolos de Christoffel calculados en 3.10 (pág. 52), tendremos que su curvatura media vendrá dada por

$$\begin{aligned}
k &= - \sum_{i=1}^{n-1} g(\nabla_{V_i} V_i, N) = \sum_{i=1}^{n-1} g(\nabla_{V_i} N, V_i) = \\
&= \frac{1}{S^2(t)} \cdot g\left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x}} \frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial \chi}\right) + \frac{1}{S^2(t) \cdot \text{sen}^2 \chi} \cdot g\left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial \theta}} \frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial \theta}\right) + \\
&\quad + \frac{1}{S^2(t) \cdot \text{sen}^2 \chi \cdot \text{sen}^2 \theta} \cdot g\left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial \phi}} \frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial \phi}\right) = \\
&= \frac{S'(t)}{S(t)} \cdot \sum_{i=1}^{n-1} g(V_i, V_i) = 3 \cdot \frac{S'(t)}{S(t)}
\end{aligned}$$

que como sólo depende de t , es constante para la superficie T definida por $t = cte$ y estas superficies son las que forman la foliación de la proposición 3.3.3. Así pues la función tiempo h será

$$h(t) = 3 \cdot \frac{S'(t)}{S(t)} = 3 \cdot H(t)$$

donde $H(t) = \frac{S'(t)}{S(t)}$ es precisamente la conocida función tiempo de Hubble⁸.

⁸La función tiempo de Hubble mide la expansión o contracción del universo para cada valor de t (ver [9]).

Bibliografía

- [1] R. Bartnik. *Regularity of variational maximal surfaces*. Acta Mathematica 161. Impreso el 27 de diciembre de 1988.
- [2] R. Bartnik. *Remarks on cosmological spacetimes and constant mean curvature surfaces*. Commun. Math. Phys. 117; 615-624, 1988.
- [3] J.K. Beem, P.E. Ehrlich y K.L. Easley. *Global lorentzian geometry*. Marcel Dekker. Nueva York, 1996.
- [4] D. Brill, y F. Flaherty. *Isolated maximal surfaces in spacetime*. Commun. math. Phys. 50 157-165, 1976.
- [5] R. Budic, y R.K. Sachs. *Scalar time functions: differentiability*. Differential geometry and relativity (M. Cohen y M. Flato, eds.). Reidel. Dordrecht, 1974.
- [6] J. Dieckmann. *Cauchy surfaces in a globally hyperbolic space-time*. J.Math.Phys. 29 (3) Marzo, 1988.
- [7] S.W. Hawking y G.F.R. Ellis. *The large scale structure of space-time*. Cambridge University Press, Londres, 1973.
- [8] J.R. Munkres. *Topology*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, Nueva Jersey, 1975.
- [9] B. O'Neill. *Semi-Riemannian Geometry with applicatins to relativity*. Academic Press Inc, 1983.
- [10] R. Penrose. *Techniques of differential topology in relativity*. Conference series in Appied Mathematics. Conference board of the Mathematical Sciences. University of London, Londres, 1972.
- [11] H. Stephani. *General relativity*. Cambridge University Press, Londres, 1990.

Índice de Materias

- aplicación
 - Weingarten, 12
- c-frontera, 21
 - futuro, 21
 - pasado, 21
- campo
 - temporal, 9
 - variacional, 37
 - de extremos fijos, 38
- caracter causal, 8
- condición
 - convergencia temporal, 12
 - cronológica, 17
 - de causalidad, 17
 - distinción de futuro, 17
 - distinción de pasado, 17
 - fuerte de causalidad, 17
- conexión
 - Levi-Civita, 11
- conjunto
 - ácrono, 13
 - acausal, 13
 - convexo, 10
 - futuro, 15
 - irreducible, 20
 - pasado, 15
 - irreducible, 20
- corchete
 - Lie, 11
- cuasi-límite, 16
 - vértices de, 16
- curva, 9
 - base, 37
 - causal, 10
 - espacial, 9
 - extensible, 10
 - extremo, 10
 - futuro, 10
 - pasado, 10
 - inextensible, 10
 - hacia el futuro, 10
 - hacia el pasado, 10
 - límite, 16
 - longitudinal, 37
 - luz, 9
 - nula, 9
 - punto final de, 10
 - temporal, 9
 - futura, 10
 - pasada, 10
 - transversal, 37
- curvatura
 - media, 12
- desarrollo de Cauchy, 13
- desigualdad
 - inversa del triángulo, 40
- dominio de dependencia, 13
 - futuro, 13
 - pasado, 13
- espacio-tiempo, 8
 - de punto omega, 21
 - establemente causal, 17
 - globalmente hiperbólico, 17
 - radio del, 51
- fórmula
 - Koszul, 11
- frontera causal, 21
 - futura, 21

- pasada, 21
- función tiempo
 - Cauchy, 17
 - Hubble, 57
- futuro, 9
 - causal, 13
 - cronológico, 13
- geodésicas
 - nulas generadoras, 32
- horizonte
 - de sucesos, 55
- IF, 20
 - propio, 20
 - terminal, 20
- IP, 20
 - propio, 20
 - terminal, 20
- orientable en el tiempo, 9
- orientación en el tiempo, 9
- orientado en el tiempo, 9
- pasado, 9
 - causal, 13
 - cronológico, 13
- PIF, 20
- PIP, 20
- punto omega, 21
- segunda forma fundamental, 12
- separación temporal, 39
- simbolos
 - Christoffel, 11
- sucesión límite, 15
- superficie
 - Cauchy, 17
- tensor
 - curvatura Riemann, 11
 - Ricci, 11
 - Riemann, 11
- TIF, 20
- TIP, 20
- variación
 - de curva, 37
- vector
 - espacial, 8
 - futuro, 9
 - luz, 8
 - nulo, 8
 - pasado, 9
 - temporal, 8