

Geometría Local de Variedades
Sumergidas en un Espacio Homogeneo.
Problema de Clasificación.

Jose Luis Guijarro y Javier Lafuente

Enero de 2005

<i>ÍNDICE</i>	1
---------------	---

Índice

1. Introducción	3
I Las referencias móviles	5
II Problemas de clasificación	19
2. Puntos planos	43
3. Puntos parabólicos	43
3.1. Puntos cilíndricos	44
3.2. Caso genérico	44
4. Puntos elípticos	46
4.1. Cuádricas de revolución	47
4.2. Caso genérico	47
5. Introducción	50
5.1. Superficies reglada	52
5.2. Congruencias	53
5.3. Complejos	53
5.4. El grupo de Plücker	54
6. La clasificación de superficies regladas de $\mathbb{P}^3$	55
7. La clasificación de congruencias	55
8. La clasificación de complejos	56
III Apéndice	56
9. Preliminar	57
9.0.1. Geometría euclídea	57
9.0.2. Acción sobre la Grassmaniana de 2-planos. $\mathbb{G}_{2,3}$	57
9.0.3. Forma de Maurer-Cartan	58
9.0.4. Ecuaciones de Maurer Cartan.	59
9.0.5. Referencias adaptadas.	59
10. Método clásico.	60
10.0.6. Aplicación de Weingarten.	60
10.0.7. Formas Fundamentales.	60
10.0.8. Teoremas de congruencia: Versión 1	61
10.0.9. Referencias de Frenet	62
10.0.10. Parametrización Geométrica.	63
10.0.11. Teoremas de Congruencia: Versión 2.	64
11. Método de las ecuaciones reducidas.	65
11.0.12. Acción sobre las escamas de segundo orden	65
11.0.13. Caso genérico.	67

<i>ÍNDICE</i>	2
---------------	---

IV Bibliografía	72
------------------------	-----------

1. Introducción

Cuando me propuse dar una charla sobre la vida y la obra de S. Lie (1842 - 1899) en el seminario de Historia de las matemáticas, no pensé que encontraría tanta riqueza de ideas. Y es que este matemático noruego empezó su carrera científica con una geometría muy particular: la geometría de Lie. En 1868 en una estancia en Berlín, conoció al joven F. Klein (1849 - 1925) quién conocía la geometría de Plücker. La amistad que surgió entre ambos fue muy fructífera pues Lie descubrió la relación entre ambas geometrías publicada en su tesis doctoral, y Klein escribió su famoso programa de admisión en la Universidad de Erlangen, donde sentó las bases de lo que es y estudia una "geometría de Klein".

Al mismo tiempo, el profesor Lafuente me enseñó los trabajos de un seminario sobre la clasificación de las curvas en diferentes geometrías de Klein. Observé que la geometría de Lie y la de Plücker no estaban entre ellas y por otro lado la técnica empleada de Wilczinsky [9] era un poco "ad hoc". Decidí consultar algunas fuentes y encontré el lecture notes [1] dónde se apreciaba una técnica más refinada y sistemática: las referencias móviles de Cartan. Orientado por el profesor Lafuente, fuí aplicando esta técnica al estudio de curvas que nos parecían más interesantes, y rápidamente la aplicamos al estudio de variedades de mayor dimensión. Finalmente, apliqué estos conocimientos a la geometría de Plücker, que considero la parte más novedosa de este trabajo.

Una *Geometría de Klein* viene definida por un grupo de Lie G que actúa diferenciablemente sobre una variedad diferenciable E , de forma transitiva:

$$\begin{array}{ccc} G \times E & \rightarrow & E \\ (g, x) & & A \cdot x \end{array}$$

se denomina a E espacio base y a G grupo de transformaciones de la Geometría.

La acción de G sobre E , puede inducir *de forma natural* acciones

$$\begin{array}{ccc} G \times \mathcal{M} & \rightarrow & \mathcal{M} \\ (A, M) & & A \cdot M \end{array}$$

sobre determinadas familias $\mathcal{M}$ de objetos deducidas del espacio E o de eventuales *estructuras* (diferenciable, métrica, conforme,...) sobre E . La propiedad que define a los objetos de $\mathcal{M}$ es por tanto *conservada* por el grupo G y se denomina propiedad o invariante G -geométrico. Además, cada vez que tenemos una tal familia $\mathcal{M}$, queda planteado un problema de clasificación que consiste en buscar unos invariantes de tal forma que cuando dos objetos $M, \overline{M} \in \mathcal{M}$ tengan los mismos invariantes y sólo entonces, sean equivalentes ($M \simeq_G \overline{M}$), es decir están en la misma órbita: existe $A \in G$, tal que $A.M = \overline{M}$. Podemos tomar en particular $\mathcal{M}$ la familia de variedades sumergidas en E . Dos de ellas M y $\overline{M}$ se dirán *G -congruentes* si existe una transformación $A \in G$, que lleva una en la otra, es decir $\overline{M} = A.M$. Nótese que dos variedades G -congruentes son en particular difeomorfas y tienen por tanto la misma dimensión p . La dimensión es por consiguiente un invariante G -geométrico y es por ello que los estudios posteriores se dividen según la dimensión de la variedad.

La teoría de G -geometría de variedades, consiste por tanto en estudiar aquellas propiedades de las variedades sumergidas en E , que permanecen inalteradas por la acción del grupo G . Y el problema de G -clasificación de variedades sumergidas en E consiste en encontrar los invariantes necesarios y suficientes para determinar cuando dos variedades sumergidas en E son (o no son) G -congruentes. Son ejemplos paradigmáticos la geometría euclídea de curvas y

superficies en el espacio, cuyos problemas de clasificación tienen invariantes bien conocidos.

Hay varias técnicas para encontrar unos invariantes completos en una geometría dada:

1. las referencias móviles de Cartan [1]
2. los fibrados de escamas de Lafuente [3], desarrollando el método de las ecuaciones reducidas
3. la ecuación tautológica de Wilczinsky [9], válido para el estudio de curvas

En este trabajo resumo la teoría básica del primer método en la primera parte, y luego lo aplico a diversos ejemplos en la segunda parte. En todos ellos aparece una tabla resumen de la información encontrada, explicada en la pág.:12. Además cada uno de ellos ofrece distintos aspectos de esta teoría que paso a detallar:

1. En las curvas equiafinas se encuentran los invariantes a partir de una parametrización dada
2. En las curvas afines se relacionan los invariantes con los de Wilczinsky
3. En las curvas hiperbólicas se encuentran las geodésicas y se comparan con la del modelo clásico de Lobachesky
4. En las curvas de Möbius se corrige una errata de [2]
5. En las curvas proyectivas se ve que las cónicas son todas congruentes, teorema que aparece en los libros de un primer curso de proyectiva pero que aquí se obtiene de una manera más elaborada
6. En las curvas de Lie se realiza el estudio en una geometría diferente de las que aparece en la literatura
7. En las superficies euclídeas se compara este estudio con la teoría clásica de referencias móviles y con las ecuaciones reducidas, apareciendo ambas teorías en el apéndice
8. En las superficies equiafinas se llega a deducir la equivalencia de este estudio con el desarrollado por Spivak en [7] y recogido en el apéndice
9. En geometría de Plücker se clasifican las superficies regladas de $\mathbb{RP}^3$, las congruencias y los complejos; siendo este el aspecto más novedoso de este trabajo pues hasta la fecha no tengo constancia de estas clasificaciones diferenciables aunque sí existen desde hace tiempo desde un punto de vista algebraico [11]

La tercera parte es el apéndice, donde he incluido extractos de otras fuentes para clarificar y apoyar algunas conclusiones de la segunda parte. Es por eso que a veces la notación de estos capítulos es un poco diferente de la que he empleado en las dos partes primeras, y algunos conceptos están poco o nada explicados, pero referidos a trabajos de la bibliografía. Por último he incluido el alfabeto griego por que a lo largo de todo el trabajo he ido usando el orden secuencial de las letras, cosa que ya se hacía en tiempos de Euclides: contar usando el alfabeto.

Quiero agradecer a D.Javier Lafuente la atención prestada y las largas charlas clarificadoras que me han orientado en todo este trabajo

Parte I

Las referencias móviles

(Chapter head:)Preliminares

En esta primera parte se va a tratar de cuatro aspectos de la geometría local de variedades en espacios homogéneos

1. El orden de contacto

Como punto de partida está el círculo osculador de una curva en geometría euclídea, noción que lleva al radio de curvatura, cuyo inverso es un invariante. Se ve así que la noción de aproximación de una variedad por otra, ofrece información geométrica importante. Concretando, se tiene:

Definición 1.0.0.1 Sea M una variedad m dimensional, $f : S \longrightarrow M$ $\tilde{f} : \tilde{S} \longrightarrow M$ dos inmersiones de dos subvariedades p dimensionales. $f, \tilde{f}$ tienen orden de contacto al menos 0 en $s \in S, \tilde{s} \in \tilde{S}$ cuando $f(s) = \tilde{f}(\tilde{s})$
 $f, \tilde{f}$ tienen orden de contacto al menos 1 en $s \in S, \tilde{s} \in \tilde{S}$ cuando $f(s) = \tilde{f}(\tilde{s})$ y $T_s f(S) = T_{\tilde{s}} \tilde{f}(\tilde{S})$ como subespacios de $T_{f(s)} M$

Para generalizar estas definiciones y definir el orden de contacto superior, se emplea el fibrado Grassmaniano de p planos tangentes de M , $G_{m,p}(M)$. Cualquier inmersión $h : N \longrightarrow M$ de una p variedad, induce una aplicación diferenciable $T_h : N \longrightarrow G_{m,p}(M)$ y con esto, se puede redefinir $T_n h(T_n N)$

el orden de contacto al menos 1 en $s \in S, \tilde{s} \in \tilde{S}$ cuando $T_f(s) = T_{\tilde{f}}(\tilde{s})$. Además, como $h = \pi \circ T_h$ siendo π la proyección del fibrado Grassmaniano, T_h es inmersión, por lo que se puede repetir el proceso y definir $M^{(k+1)} = G_{m_k,p}(M^{(k)})$, $m_k = \dim M^{(k)}$, $T_h^{(k+1)} = T_{T_h^{(k)}} : N \longrightarrow M^{(k+1)}$, $k = 0, 1, 2, \dots$ siendo $M^{(0)} = M$, $T_h^{(0)} = h$.

Definición 1.0.0.2 $f, \tilde{f}$ tienen orden de contacto al menos k en $s \in S, \tilde{s} \in \tilde{S}$ cuando $T_f^{(k)}(s) = T_{\tilde{f}}^{(k)}(\tilde{s})$

Si $f, \tilde{f}$ tienen orden de contacto al menos k en $s \in S, \tilde{s} \in \tilde{S}$ pero no orden $k+1$, se dice que $f, \tilde{f}$ tienen orden de contacto k en $s \in S, \tilde{s} \in \tilde{S}$

2. La congruencia de variedades

Ya en los elementos de Euclides se recoge el criterio de que dos figuras del plano euclídeo son iguales cuando hay un movimiento que mueve una figura exactamente sobre la otra. El plano euclídeo se generaliza por una geometría de Klein; el movimiento en dicha geometría euclídea viene generalizado por el grupo de Lie que actúa transitivamente; y la noción de igualdad sigue siendo la misma: dos variedades sumergidas son iguales cuando hay un elemento del grupo de Lie que transforma una en la otra. Esta noción de igualdad se denomina congruencia. Concretando, se tiene:

Definición 1.0.0.3 Sea M una variedad m dimensional, G un grupo de difeomorfismos de M , $f : S \longrightarrow M$, $\tilde{f} : \tilde{S} \longrightarrow M$ dos embedding de dos subvariedades p dimensionales. $f, \tilde{f}$ son G congruentes cuando existe una transformación $g \in G$ / $g(f(S)) = \tilde{f}(\tilde{S})$

Como $f, \tilde{f}$ son embedding, se tiene que son G congruentes si y sólo si existe una transformación $g \in G$ y un difeomorfismo $F : S \longrightarrow \tilde{S}$ / $g \circ f = \tilde{f} \circ F : S \longrightarrow M$

Y es el teorema de congruencia (teorema 1.0.0.6) el que da unos criterios algorítmicos, necesarios y suficientes para saber cuándo dos variedades sumergidas son iguales. Mirandolo detenidamente, la igualdad radica en tres conceptos:

- a) la referencia de Frenet, que es una base del tangente de M en $x \in M$, adaptada en $s \in S$ a la variedad sumergida $f : S \longrightarrow M$, $x = f(s)$, de tal manera que otra subvariedad sumergida en M , con el mayor orden de contacto posible con f en x , admite la misma referencia. Este mayor orden de contacto es el orden de la referencia. Sin embargo, la referencia de Frenet no se calcula explícitamente en los ejemplos, pero sí su orden, que es lo que necesita el teorema de congruencia y que está reflejado en la tabla resumen de cada ejemplo. Pero como muestra de que se puede calcular explícitamente la referencia de Frenet, está el ejemplo de las curvas en la geometría equiafín, donde se realizan todos los cálculos, y se ve claramente la dificultad de hacerlo.
- b) la sección de cierta acción, W_q que está calculada siempre. Sin embargo, la naturaleza de dicha sección obliga a tratar variedades sumergidas que tienen todos sus puntos "pertenecientes" a dicha sección. Como ejemplo, las superficies en geometría equiafín que se consideran, constan sólo de puntos planos, o sólo de puntos parabólicos o sólo elípticos (donde los hiperbólicos se han excluido por brevedad), pero no aparece el caso de una superficie con una zona de puntos elípticos separados de otra zona de puntos hiperbólicos por una frontera de puntos parabólicos, por ejemplo. Es este el mayor defecto de esta teoría y por tanto el punto más importante para ser revisado en posteriores trabajos.
- c) los invariantes $k_f : S \longrightarrow \mathbb{R}$, que son funciones definidas sobre el abierto de parametrización de la variedad sumergida $f : S \longrightarrow M$, y dependientes de dicha parametrización de tal modo que dada otra parametrización $\tilde{f} : \tilde{S} \longrightarrow M$ que verifique que $\tilde{f} \circ \psi = g \cdot f$ siendo $\psi : S \longrightarrow \tilde{S}$ un difeomorfismo y $g \in G$, se tenga que

$$k_{\tilde{f}} \circ \psi = k_f$$

Al igual que las referencias de Frenet, los invariantes no se calculan explícitamente, salvo en el ejemplo de curvas equiafines, donde se ve que en caso de necesidad es posible hallar en cualquier ejemplo los invariantes en cualquier parametrización.

En resumen, estos tres conceptos sí son algorítmicos en el sentido de poder calcularse en cualquier parametrización, como se refleja en las curvas equiafines, pero el esfuerzo necesario hace que sólo se calculen aquellos

que tengan una razón especial. Además el interés principal es saber cuántos tipos de congruencia hay, que son precisamente las filas de la tabla resumen de cada ejemplo, o bien identificar la variedad tipo de cada clase de congruencia, integrando una distribución sobre M , $\mathcal{D}(y)$ explicada en el teorema de homogeneidad.

3. La existencia de variedades con invariantes prefijados

Para encontrar una variedad que de lugar a unos invariantes dados, estos deben de satisfacer las ecuaciones de estructura como se verá en el teorema de existencia.

4. Las simetrías de las variedades

Como ejemplo, las superficies de revolución en geometría euclídea admiten las rotaciones alrededor de un eje como simetrías. Encontrar estas simetrías como subgrupos de G es el resultado del teorema de homogeneidad

Todos estos aspectos tienen dos enfoques diferentes aunque relacionados

1. Los problemas donde la variedad sumergida está parametrizada, es decir se consideran las inmersiones $f, \tilde{f} : S \longrightarrow M$ y se calculan los invariantes para f y $\tilde{f}$ definidos todos ellos sobre S
2. Los problemas no parametrizados donde se consideran las inmersiones $f : S \longrightarrow M$ y $\tilde{f} : \tilde{S} \longrightarrow M$

La diferencia de estos problemas se ilustra considerando el contacto de orden 1 y la congruencia:

En el primer problema f y $\tilde{f}$ tienen al menos orden de contacto 1 en $s \in S$ si $f(s) = \tilde{f}(s)$, y $T_s f = T_s \tilde{f}$ como aplicaciones lineales de $T_s S \rightarrow T_{f(s)} M$. Y son congruentes si existe $g \in G$ / $f = g \circ \tilde{f}$ como funciones sobre S .

En el segundo problema f y $\tilde{f}$ tienen al menos orden de contacto 1 en $s \in S$ y $\tilde{s} \in \tilde{S}$ si $f(s) = \tilde{f}(\tilde{s})$, y $T_s f(S) = T_{\tilde{s}} \tilde{f}(\tilde{S})$ como subespacios de $T_{f(s)} M$. Y son congruentes si existe $g \in G$ / $f(S) = g \circ \tilde{f}(\tilde{S})$ como subconjuntos de M .

En este trabajo se consideran sólo los problemas no parametrizados, pero en las curvas equiafines se calcula el parámetro de arco, que daría lugar a un ejemplo del primer enfoque: estudiar la congruencia de curvas parametrizadas por longitud de arco. Y en las superficies euclídeas se calcula la parametrización geométrica con la misma idea de dar posibles ejemplos del primer enfoque.

(Chapter head:)Invariantes de orden 1

Partimos de una acción transitiva $G \times M \longrightarrow M$ que permite escoger cualquier punto $m_0 \in M$ como origen y definir $\tau : G \longrightarrow M$ como $\tau(g) = gm_0$. Sea G_0 el subgrupo de isotropía de m_0 , que permite descomponer $\mathfrak{g} = \mathfrak{m}_0 \oplus \mathfrak{g}_0$ siendo $\mathfrak{m}_0$ un suplementario que salvo que G sea compacto, en general no es Ad_{G_0} invariante. Sea $\{E_i\}_{i=1..g}$ una base adaptada a dicha descomposición. Con el siguiente diagrama donde τ corresponde a la diagonal, se tiene que $\{e_i = T_e \tau(E_i)\}_{i=1..m}$ forman una base de $T_{m_0} M$.

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{h_0} & L(M) \\ \downarrow \pi_0 & \searrow \tau & \downarrow \pi \\ G/G_0 & \simeq & M \end{array}$$

Se define $h_0(g) = \{g_{*m_0}(e_1), \dots, g_{*m_0}(e_m)\}$ que es una aplicación fibrada porque $\pi h_0(g) = gm_0$, $\bar{g}m_0 = gkm_0 = gm_0$. A partir de ella se define

$$\begin{array}{ccc} T_m M & \xrightarrow{h_0^g} & \mathbb{R}^m \\ v & & (v_i) / v = v_i g_{*m_0}(e_i) \quad gm_0 = m \end{array}$$

Con respecto al producto del grupo, se tiene que $h_0(gk) = \{g_{*m_0}(k_{*m_0}(e_i))\} = \{g_{*m_0}(\rho_{0ji} e_j)\} = \{g_{*m_0}(e_j) \rho_{0ji}\}$ lo que se abreviará como $h_0(g) \rho_0(k)$. Y también $h_0^{gk}(v) = (v'_i)$ siempre que $v = v'_i g_{*m_0}(k_{*m_0}(e_i)) = v'_i g_{*m_0}(\rho_{0ji} e_j) = v'_i \rho_{0ji} g_{*m_0}(e_j)$ que comparado con la definición, queda $v_j = \rho_{0ji} v'_i$ lo que quiere decir que $h_0^g = \rho_0(k) h_0^{gk}$, siendo $\rho_0 : G_0 \longrightarrow GL(m, \mathbb{R})$
 $k \longmapsto k_{*m_0}|_{\{e_i\}} = Ad_k|_{\mathfrak{m}_0}$

Definición 1.0.0.4 Una referencia de orden 0 en s es $u_0(s) \in G$ / $u_0(s)m_0 = f(s)$

Equivalentemente, $\tau(u_0(s)) = f(s)$. El conjunto de referencias de orden 0, L_0 es el pullback de $\pi_0 : \begin{array}{ccc} L_0 & & \\ \uparrow \downarrow & \pi_f & \pi_f = f^* \pi_0 \\ S & & \end{array}$. Las secciones del fibra-

do asociado $\begin{array}{ccc} G_{m,p}(M) & & \\ T_f \uparrow \downarrow & \pi_{f,a} & \\ S & & \end{array}$ proporcionan la información sobre la aplicación tangente de f de tal manera que $T_f(s) = [u_0(s), \lambda_0(u_0(s))]$ siendo

$$\lambda_0 : \begin{array}{ccc} L_0 & \longrightarrow & G_{m,p} \\ g & & h_0^g(T_s f(T_s S)) \end{array}$$

Esta aplicación es equivariante: $\lambda_0(gk) = \rho_0(k)^{-1} \lambda_0(g)$.

Lema 1.0.0.1 Sea $\bar{g} \in G$ entonces $\lambda_0(g) = \lambda_0(\bar{g}g)$ estando referidas a f , $\bar{g}f$ respectivamente

Demostración. Sea $h_0(g) = \{g_{*m_0}(e_1), \dots, g_{*m_0}(e_m)\} \equiv \{v_i\}$ y $h_0(\bar{g}g) = \{\bar{g}_{*g_{m_0}}(v_i)\}$. Sea $\eta = T_s f(\xi)$ y $\bar{\eta} = T_s(\bar{g}f)(\xi) = \bar{g}_{*f(s)}(\eta)$, entonces

$$\begin{aligned} h_0^g(\eta) &= (\eta_i) / \eta = \eta_i v_i \\ h_0^{\bar{g}g}(\bar{\eta}) &= (\bar{\eta}'_i) / \bar{\eta} = \bar{\eta}'_i \bar{g}_{*g_{m_0}}(v_i) \end{aligned}$$

pero $\bar{\eta} = \bar{g}_{*f(s)}(\eta) = \eta_i \bar{g}_{*f(s)}(v_i)$ de donde $\bar{\eta}'_i = \eta_i$. No hay que olvidar que $g, \bar{g}g$ son 0-referencias de $f, \bar{g}f$. ■

Pero el resultado fundamental de toda esta teoría, útil incluso para el cálculo práctico es el siguiente resultado: considerando $\{\phi^\alpha\}$ una base de T^*S

Teorema 1.0.0.1 $\lambda_0(u(s)) = \begin{bmatrix} I_p \\ x_\alpha^i(s) \end{bmatrix} \quad i = p+1..m \quad \alpha = 1..p$

Demostración. $T_s f(\xi) \underset{\tau \circ u = f}{=} T_{u(s)} \tau T_s u(\xi) = T_{u(s)} \tau T_e L_{u(s)} T_{u(s)} L_{u(s)^{-1}} T_s u(\xi) = T_{u(s)} \tau T_e L_{u(s)} \Omega(T_s u(\xi)) \underset{\tau \circ L_{u(s)} = u(s) \circ \tau}{=} u(s)_{*m_0} T_e \tau u^* \Omega_s(\xi) = u(s)_{*m_0} T_e \tau (u^* \theta_0 + u^* \omega_0)(\xi) = u(s)_{*m_0} T_e \tau (u^* \theta^i(\xi) E_i) = u^* \theta^i(\xi) u(s)_{*m_0} T_e \tau (E_i) \underset{h_0(u) = \{v_i\}}{=} u^* \theta^i(\xi) v_i = x_\alpha^i(s) \phi^\alpha(\xi) v_i$ Luego $h_0^u(T_s f(\xi)) = (x_\alpha^i(s) \phi^\alpha(\xi))$ y en general en una base $\{\xi_\beta\}$ de $T_s S$ se tiene que $h_0^u(T_s f(T_s S)) = [x_\alpha^i(s) \phi^\alpha(\xi_\beta)] = [x_\alpha^i(s)]$ ya que $\phi^\alpha(\xi_\beta) \in GL(p, \mathbb{R})$ y se puede considerar $x_\alpha^i(s) = \delta_\alpha^i \forall i = 1..p$; es decir se ve que la base $\{\phi^\alpha\}$ está cambiando según cambie u . ■

Las ecuaciones de Maurer-Cartan de G , imponen relaciones entre los invariantes ya que sobre W_1 $x_\alpha^i = F_\alpha^i(k_j)$ para $j \in \{1..m_1\}$ por lo que $u_1^* \theta^i = \sum F_\alpha^i(k_j) \phi^\alpha$. Derivando y usando las ecuaciones de Maurer-Cartan para $d\theta^i$ se obtienen relaciones entre los invariantes, sus derivadas covariantes y los coeficientes de $u^* \omega_0$

Ahora se considera la acción

$$\begin{array}{ccc} G_0 & \times & G_{m,p} \\ k & \sigma & \end{array} \xrightarrow{\rho_0} \begin{array}{ccc} G_{m,p} & & \\ \rho_0(k)(\sigma) = Ad_k|_{\mathfrak{m}_0}(\sigma) & & \end{array}$$

y supongamos que existe una sección W_1 con $\dim W_1 = \mu_1$

Definición 1.0.0.5 Una referencia de orden 1 en s , respecto W_1 , es $u_1(s) \in G / u_1(s)m_0 = f(s)$, $\lambda_0(u_1(s)) \in W_1$

Sea L_1 el conjunto de referencias de orden 1, es decir

$$L_1 = \lambda_0^{-1}(W_1)$$

dando una subvariedad de L_0 , que fibra sobre S , con fibra G_1 el subgrupo de isotropía de W_1 por ρ_0 . Como λ_0 es constante en las fibras: si $g \in L_1$ $k \in G_1$ entonces $\lambda_0(gk) = \rho_0(k)^{-1}\lambda_0(g) = \lambda_0(g)$; $\lambda_0(u_1(s))$ no depende de la 1-referencia empleada.

Definición 1.0.0.6 Dada una carta en W_1 $\psi \equiv \{w_i\}_{i=1..\mu_1}$ los invariantes de orden 1 son

$$k_i(s) = w_i(\lambda_0(u_1(s)))$$

Teorema 1.0.0.2 Sean $f : S \longrightarrow M$ $\tilde{f} : \tilde{S} \longrightarrow M$ dos subvariedades de M p -dimensionales, sobre las que se pueden construir invariantes de orden 1. $f, \tilde{f}$ tienen al menos orden de G -contacto 1 en $s \in S$ $\tilde{s} \in \tilde{S} \iff f, \tilde{f}$ están en la misma sección W_1 y tienen los mismos invariantes en $s \in S$ $\tilde{s} \in \tilde{S}$

Demostración. $\implies$ $\exists \bar{g} \in G / \bar{g}f$ y $\tilde{f}$ tienen al menos orden de contacto 1 en $s \in S$ $\tilde{s} \in \tilde{S}$, es decir $T_{\bar{g}f}(s) = T_{\tilde{f}}(\tilde{s})$. Sean $u_0(s)$, $\tilde{u}_0(\tilde{s})$ referencias de orden 0. Entonces $\bar{g}u_0(s)$ es una 0-referencia de $\bar{g}f(s)$ y se tiene por el lema anterior que $T_{\bar{g}f}(s) = [gu_0(s), \lambda_0(u_0(s))]$ mientras que $T_{\tilde{f}}(\tilde{s}) = [\tilde{u}_0(\tilde{s}), \lambda_0(\tilde{u}_0(\tilde{s}))]$. Al ser iguales $\exists k \in G_0 / \begin{cases} \bar{g}u_0(s)k^{-1} = \tilde{u}_0(\tilde{s}) \\ \rho_0(k)\lambda_0(u_0(s)) = \lambda_0(\tilde{u}_0(\tilde{s})) \end{cases}$ de donde se deduce que $\lambda_0(u_0(s))$, $\lambda_0(\tilde{u}_0(\tilde{s}))$ están en la misma órbita y puede ser escogida una misma sección W_1 y unas 1-referencias $u_1(s)$, $\tilde{u}_1(\tilde{s})$ de tal modo que $\lambda_0(u_1(s)) = \lambda_0(\tilde{u}_1(\tilde{s}))$ dando por tanto los mismos invariantes

$\impliedby$ Sean $u_1(s)$, $\tilde{u}_1(\tilde{s})$ 1-referencias / $\lambda_0(u_1(s)) = \lambda_0(\tilde{u}_1(\tilde{s}))$. Sea $\bar{g} = \tilde{u}_1(\tilde{s})u_1(s)^{-1} \in G$. Entonces por el lema anterior $T_{\bar{g}f}(s) = [\bar{g}u_1(s), \lambda_0(u_1(s))] = [\tilde{u}_1(\tilde{s}), \lambda_0(\tilde{u}_1(\tilde{s}))] = T_{\tilde{f}}(\tilde{s})$ es decir $f, \tilde{f}$ tienen orden de G -contacto 1 en $s \in S$ $\tilde{s} \in \tilde{S}$ ■

(Chapter head:)Invariantes de orden 2

Supongamos que M_1 es subvariedad $M_1 \equiv G/G_1 \times W_1 \hookrightarrow G_{m,p}(M)$
 $(\bar{g}, w) \quad [g, w]$

de tal forma que $T_f(S) \subset M_1$. Entonces se tiene una acción $G \times M_1 \longrightarrow M_1$ que actúa por la identidad sobre la segunda componente. Descomponiendo $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{m}_1 \oplus \mathfrak{g}_1$, readaptando la base $\{E_i\}_{i=1..g}$, definiendo $\{e_i = T_{(e,w)}\tau_1(E_i)\}_{i=1..m_1}$ siendo $m_1 = \dim(\mathfrak{m}_0 + \mathfrak{m}_1)$ y usando el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} G \times W_1 & \xrightarrow{h_1} & L(M_1) \\ \downarrow \pi_1 \times id & \searrow \tau_1 & \downarrow \pi \\ G/G_1 \times W_1 & = & M_1 \end{array}$$

se define $h_1(g, w) = \{g_{*(\bar{e}, w)}(e_1), \dots, g_{*(\bar{e}, w)}(e_{m_1}), (\partial_{w_1})_{(\bar{g}, w)}, \dots, (\partial_{w_{\mu_1}})_{(\bar{g}, w)}\}$ que da lugar a las mismas definiciones y con las mismas propiedades que en el

$$\begin{array}{ccc} \text{apartado anterior: } \rho_1 : G_1 & \longrightarrow & GL(m_1 + \mu_1, \mathbb{R}) \\ k & & Ad_k|_{\mathfrak{m}_0 + \mathfrak{m}_1} \times Id \\ \lambda_1 : L_1 & \longrightarrow & G_{m_1 + \mu_1, p} \\ g & & h_1^{(g, \lambda_0(g))}(T_s T_f(T_s S)) \end{array}$$

verificando también el siguiente teorema

Teorema 1.0.0.3 $\lambda_1(u_1(s)) = \begin{bmatrix} I_p \\ x_\alpha^i(s) \\ k_{j,\alpha}^j(s) \end{bmatrix} \quad i = p + 1..m_1 \quad j = 1..\mu_1 \quad \alpha = 1..p$

Demstración. Partiendo de $T_f(s) = \tau_1((u_1(s), \lambda_0(u_1(s))))$ se tiene que:
 $T_s T_f(\xi) = T_s(\pi_1 \circ u_1)(\xi) \oplus T_s(\lambda_0 \circ u_1)(\xi) = u_1^* \theta^i(\xi) T_{\bar{e}} L_{u_1} T_e \pi_1(E_i) \oplus dk^j(\xi) (\partial_{w_j})_{\lambda_0} =$
 $x_\alpha^i(s) \phi^\alpha(\xi) (u_1)_{*(\bar{e}, \lambda_0)} T_{(e, \lambda_0)} \tau_1(E_i) \oplus k_{j,\alpha}^j(s) \phi^\alpha(\xi) (\partial_{w_j})_{\lambda_0}$ lo que significa que $h_1^{(u_1, \lambda_0(u_1))}(T_s T_f(T_s S)) =$
 $(x_\alpha^i(s) \phi^\alpha(\xi_\beta), k_{j,\alpha}^j(s) \phi^\alpha(\xi_\beta))$ ■

Observación 1.0.0.1 las funciones $k_{j,\alpha}^j(s)$ no aparecen en los ejemplos prácticos debido a que no son necesarias para el cálculo posterior

Las ecuaciones de Maurer-Cartan de G , imponen relaciones entre los invariantes ya que sobre W_2 $x_\alpha^i = F_\alpha^i(k_j)$ para $j \in \{\mu_1 + 1..\mu_2\}$ por lo que $u_1^* \theta^i = \sum F_\alpha^i(k_j) \phi^\alpha$. Derivando y usando las ecuaciones de Maurer-Cartan para $d\theta^i$ se obtienen relaciones entre los invariantes, sus derivadas covariantes y los coeficientes de $u^* \omega_1$

Se considera también la acción

$$\begin{array}{ccc} G_1 & \times & G_{m_1+\mu_1,p} \\ k & & \sigma \end{array} \xrightarrow{\rho_1} \begin{array}{c} G_{m_1+\mu_1,p} \\ \rho_1(k)(\sigma) = Ad_k|_{\mathfrak{m}_0+\mathfrak{m}_1}(\sigma) \end{array}$$

y supongamos que existe una sección W_2 con $\dim W_2 = \mu_2$

Definición 1.0.0.7 Una referencia de orden 2 en s , respecto W_2 , es $u_2(s) \in G / u_2(s)m_0 = f(s)$, $\lambda_0(u_2(s)) \in W_1$, $\lambda_1(u_2(s)) \in W_2$

Sea L_2 el conjunto de referencias de orden 2, es decir

$$L_2 = \lambda_1^{-1}(W_2)$$

dando una subvariedad de L_1 , que fibra sobre S , con fibra G_2 el subgrupo de isotropía de W_2 por ρ_1 . Como λ_1 es constante en las fibras: si $g \in L_2$ $k \in G_2$ entonces $\lambda_1(gk) = \rho_1(k)^{-1} \lambda_1(g) = \lambda_1(g)$; $\lambda_1(u_2(s))$ no depende de la 2-referencia empleada.

Definición 1.0.0.8 Dada una carta en W_2 adaptada a W_1 , $\psi \equiv \{w_i\}_{i=1..\mu_2}$ los invariantes de orden 2 son

$$k_i(s) = w_i(\lambda_1(u_2(s))) \quad i = \mu_1 + 1..\mu_2$$

(Chapter head:)Invariantes de orden q

Para llegar a los invariantes de orden q se construye sucesivamente

- La subvariedad $M_{q-1} = G/G_{q-1} \times W_{q-1}$
- La aplicación equivariante $\lambda_{q-1} : L_{q-1} \longrightarrow G_{m_{q-1}+\mu_{q-1},p}$ cuya expresión en una carta de W_{q-1} es $\begin{bmatrix} I_p \\ x_\alpha^i(s) \\ k_{j,\alpha}^j(s) \end{bmatrix} \quad i = p + 1..m_{q-1} \quad j = 1..\mu_{q-1}$
 $\alpha = 1..p$
- La acción adjunta $\rho_{q-1} : G_{q-1} \times G_{m_{q-1}+\mu_{q-1},p} \longrightarrow G_{m_{q-1}+\mu_{q-1},p}$
- Una sección W_q de dicha acción, cuyo subgrupo de isotropía es G_q

- Las referencias de orden q , L_q que dan lugar a los invariantes de orden q , que a su vez determinan el G -contacto de orden q .

Al suponer que este es el último paso, estas referencias se llaman de Frenet. Para que sea así sólo puede ocurrir de 2 maneras:

1. $\rho_q = id$ por lo que $W_{q+1} = G_{m_q+\mu_q,p}$ y su subgrupo de isotropía coincide con G_q . En este caso $L_{q+1} = L_q$ y las referencias de Frenet no son únicas, sino tienen $\dim G_q$ grados de libertad, pudiendo aparecer nuevos $m_q + \mu_q - (m_{q-1} + \mu_{q-1})$ invariantes de orden $q + 1$. Hay que notar que en la práctica, no es la acción ρ_q la que se mira sino el subgrupo de isotropía G_{q+1} , por eso cuando se ve que $G_{q+1} = G_q$ es porque se está en el paso $q + 1$, pero las referencias de Frenet son de orden q y los invariantes de orden $q + 1$. Para distinguir esta situación un tanto anómala, en las tablas resúmenes se ha indicado este último paso con tilde: $\widetilde{q + 1}$

	G_0	$\mathbf{m}_0$	λ_0	<i>ec.comp.</i>	ρ_0	W_1	L_1	<i>inv.orden 1</i>
I	G_1	$\mathbf{m}_1$	λ_1	<i>ec.comp.</i>	ρ_1	W_2	L_2	<i>inv.orden 2</i>
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
q	G_q	$\mathbf{m}_q$	λ_q	<i>ec.comp.</i>	ρ_q	W_{q+1}	L_{q+1}	<i>inv.orden $q + 1$</i>
$\widetilde{q + 1}$	G_{q+1}	$\mathbf{m}_{q+1}$	λ_{q+1}	<i>ec.comp.</i>	ρ_{q+1}	$G_{m_q+\mu_q,p}$	L_q	$m_q + \mu_q - (m_{q-1} + \mu_{q-1})$
	G_q					W_{q+1}	L_{q+1}	<i>inv.orden $q + 2$</i>

2. $G_q = Id$ En este caso la referencia de Frenet es única en cada $s \in S$. Sin embargo, el proceso al continuar proporciona una acción adjunta $\rho_q : Id \times G_{g+\mu_q,p} \longrightarrow G_{g+\mu_q,p}$ que induce como sección $W_{q+1} = G_{g+\mu_q,p}$ y pueden aparecer nuevos $g + \mu_q - (m_{q-1} + \mu_{q-1})$ invariantes de orden $q + 1$ a pesar de que las referencias tengan orden q ya que $L_{q+1} = L_q$

	G_0	$\mathbf{m}_0$	λ_0	<i>ec.comp.</i>	ρ_0	W_1	L_1	<i>inv.orden 1</i>
I	G_1	$\mathbf{m}_1$	λ_1	<i>ec.comp.</i>	ρ_1	W_2	L_2	<i>inv.orden 2</i>
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
$q - 1$	G_{q-1}	$\mathbf{m}_{q-1}$	λ_{q-1}	<i>ec.comp.</i>	ρ_{q-1}	W_q	L_q	<i>inv.orden q</i>
q	G_q	$\mathbf{m}_q$	λ_q	<i>ec.comp.</i>	ρ_q	W_{q+1}	L_{q+1}	<i>inv.orden $q + 1$</i>
	Id					$G_{g+\mu_q,p}$	L_q	$g + \mu_q - (m_{q-1} + \mu_{q-1})$

Estos pasos se pueden repetir tantas veces como permita la clase de diferenciabilidad de las variedades. Pero ya no surgen nuevos invariantes porque en el primer caso las componentes x_α^i quedan estabilizadas en $i = m_q$, y en el segundo caso en $i = g$. Lo que sí aparecen son las derivadas sucesivas de los invariantes ya encontrados. Es por esto que si $f : S \longrightarrow M$ $\widetilde{f} : \widetilde{S} \longrightarrow M$ son dos sub-variedades de M p -dimensionales, sobre las que se pueden construir invariantes de orden $q + 1$, $f, \widetilde{f}$ están en la misma sección W_q y tienen al menos orden de G -contacto $q + 1$ en $s \in S$ $\widetilde{s} \in \widetilde{S}$ entonces tienen al menos orden de G -contacto k para cualquier k .

Más todavía, si $f, \widetilde{f}$ son G congruentes $\exists g \in G / gf = \widetilde{f}$. Entonces si $u \in L_q$ es una referencia de Frenet para f , por la propiedad de λ_{q-1} se tiene que $\lambda_{q-1}^f(u) = \lambda_{q-1}^{gf}(gu)$ luego $\widetilde{u} \equiv gu$ es una referencia de Frenet para $gf = \widetilde{f}$ y despejando $g = u^{-1}\widetilde{u}$, es decir las referencias de Frenet dan la congruencia

Como resumen, se presenta en cada problema de clasificación una tabla donde cada fila corresponde a una clase de G -congruencia. Las primeras columnas indican los pasos que se han dado; la columna "ref. F " indica el orden de

las referencias de Frenet; la columna "inv" proporciona todos los invariantes escalares que determinan dicha clase de congruencia, y como subíndice figura el orden de cada invariante; cuando no aparecen invariantes es porque todas las variedades de este tipo son ya congruentes; y por último en algunos casos donde hay una variedad tipo, se dice cuál es, integrando la distribución $\mathcal{D}(y)$ explicada en el teorema de homogeneidad.

(Chapter head:)El teorema de congruencia

Lema 1.0.0.2 Sea $f(x) = h(x)g(x) : M \longrightarrow G$ entonces $f^*\Omega = g^*\Omega + Ad_{g^{-1}}(h^*\Omega)$

Demostración. Considerando $T_x f = T_g L_h T_x g + T_h R_g T_x h$ se tiene que
 $f^*\Omega = \Omega_{hg}(T_g L_h T_x g) + \Omega_{hg}(T_h R_g T_x h) = T_{hg} L_{g^{-1}h^{-1}} T_g L_h T_x g + T_{hg} L_{g^{-1}h^{-1}} T_h R_g T_x h =$
 $T_g L_{g^{-1}} T_x g + T_g L_{g^{-1}} T_{hg} L_{h^{-1}} T_h R_g T_x h = T_g L_{g^{-1}} T_x g + T_g L_{g^{-1}} T_e R_g T_h L_{h^{-1}} T_x h =$
 $g^*\Omega + Ad_{g^{-1}}(h^*\Omega) \blacksquare$

Teorema 1.0.0.4 Sean $u, \tilde{u} : S \longrightarrow G$ dos aplicaciones diferenciables de una variedad conexa S en un grupo de Lie G .

$$\exists g \in G \text{ fijo} \quad / \quad u(s) = g \tilde{u}(s) \iff u^*\Omega = \tilde{u}^*\Omega$$

Demostración. $\implies$) Ω es invariante por la izquierda

$\iff$) $G \subset GL(n, \mathbb{R})$: entonces $\Omega = g^{-1}dg$. Derivando la expresión $u(s) = g(s)\tilde{u}(s)$ se obtiene que $u^{-1}du = u^{-1}dg\tilde{u} + \tilde{u}^{-1}d\tilde{u}$ y queda claro que $dg = 0 \iff u^*\Omega = \tilde{u}^*\Omega$

En el caso general se utiliza el hecho de que una aplicación diferenciable $h : S \longrightarrow G$ es constante $\iff h^*\Omega = 0$ ya que Ω proporciona una base del espacio dual del tangente en cada punto de G . Supongamos por otra parte que $u(s_0) = \tilde{u}(s_0) = e$ ya que de lo contrario se considerarían las funciones $u(s_0)^{-1}u(s)$ y $\tilde{u}(s_0)^{-1}\tilde{u}(s)$. Sean $\xi, \eta \in T_e G$ los vectores tangentes en s_0 a las curvas $u(s)$ y $\tilde{u}(s)$. Entonces $\xi - \eta \in T_e G$ es el tangente en s_0 a la curva $u(s)\tilde{u}(s)^{-1}$ luego $h^*\Omega = u^*\Omega - \tilde{u}^*\Omega$ y aplicando la hipótesis se deduce el resultado $\blacksquare$

Teorema 1.0.0.5 Sea $\varphi \in \Lambda^1(M, \mathfrak{g})$ una 1-forma con valores en $\mathfrak{g}$ sobre una variedad conexa, simplemente conexa M

$$\exists f : M \longrightarrow G \quad / \quad f^*\Omega = \varphi \iff d\varphi = -[\varphi, \varphi]$$

siendo f única salvo traslaciones a izquierda

Demostración. $\implies$) Son las ecuaciones de Maurer-Cartan para Ω

$\iff$) Localmente alrededor de un punto $x_0 \in M$: sea $x_0 \in U \subset M$ un entorno del punto. Usando la aplicación exponencial se encuentra $g : U \longrightarrow G$ / $g(x_0) = e$, $g^*\Omega = \varphi$ en x_0 . Sea $f(x) = h(x)g(x)$. Si h verificase que $h^*\Omega = Ad_g(\varphi - g^*\Omega) \equiv \psi$ entonces $f^*\Omega = \varphi$ por el lema anterior. ψ verifica 1) $\psi(x_0) = 0$ 2) $d\psi = -[\psi, \psi]$

1. Sobre $U \times G$ se considera el sistema diferencial exterior dado por la 1-forma con valores en $\mathfrak{g}$: $\theta = \pi_1^*\psi - \pi_2^*\Omega$. Este sistema es completamente integrable porque $d\theta = -[\pi_1^*\psi, \pi_1^*\psi] + [\pi_2^*\Omega, \pi_2^*\Omega] = -[\theta, \pi_1^*\psi] - [\pi_2^*\Omega, \theta] = 0(\theta)$
2. Sobre $T_{(x_0, e)}U \times G$ la ecuación $\theta(x_0) = 0$ define $T_{x_0}U$

Con estas 2 condiciones se verifica el teorema de Fröbenius por lo que se puede encontrar una variedad integral maximal V del sistema diferencial $\theta = 0$ que pasa por (x_0, e) . Como $T_{(x_0, e)}V = T_{(x_0, e)}(U \times \{e\})$, V es el grafo de una aplicación $h : U \rightarrow G$, verificandose que $0 = (id \times h \circ \pi_1)^*\theta = \pi_1^*\psi - \pi_1^*h^*\Omega$ de donde $h^*\Omega = \psi$

Globalmente sobre M : se recubre M por abiertos U_α sobre los que hay aplicaciones $f_\alpha : U_\alpha \rightarrow G / f_\alpha^*\Omega = \varphi$. En $U_\alpha \cap U_\beta$ sea $g_{\alpha\beta} = f_\alpha^{-1} \cdot f_\beta$. Como $g_{\alpha\beta}^*\Omega = f_\beta^*\Omega + Ad_{f_\beta^{-1}}(f_\alpha^{-1*}\Omega) = f_\beta^*\Omega + Ad_{f_\beta^{-1}}((Iv \circ f_\alpha)^*\Omega) = f_\beta^*\Omega + Ad_{f_\beta^{-1}}(f_\alpha^*(Iv^*\Omega)) = f_\beta^*\Omega - Ad_{f_\beta^{-1}}(f_\alpha^*(Ad_{f_\alpha}\Omega)) = f_\beta^*\Omega - Ad_{f_\beta^{-1}f_\alpha}(f_\alpha^*\Omega) = f_\beta^*\Omega - Ad_{g_{\alpha\beta}^{-1}}(f_\alpha^*\Omega)$ Luego se cumple que $g_{\alpha\beta}^*\Omega + Ad_{g_{\alpha\beta}^{-1}}(\varphi) = \varphi$ lo que permite construir un fibrado principal π sobre M con fibra G , y una conexión ω de tal manera que las secciones locales σ_α relacionadas por $\sigma_\alpha g_{\alpha\beta} = \sigma_\beta$ verifican $\sigma_\alpha^*\omega = \varphi$. De aquí se ve que ω es plana y como M es simplemente conexo existe una sección global $\sigma / \sigma^*(\omega - \pi^*\varphi) = 0$, es decir que $\sigma^*\omega = \varphi$. Definiendo $j_\alpha : M \rightarrow G$ a través de $\sigma = \sigma_\alpha j_\alpha$ se deduce que $f \equiv \{f_\alpha j_\alpha\}$ está bien definida sobre todo M . Además $f^*\Omega = j_\alpha^*\Omega + Ad_{j_\alpha^{-1}}(f_\alpha^*\Omega) = j_\alpha^*\Omega + Ad_{j_\alpha^{-1}}(\varphi) = \varphi$ porque $\varphi = \sigma^*\omega = Ad_{j_\alpha^{-1}}(\sigma_\alpha^*\omega) + j_\alpha^*\Omega$ ■

Corolario 1.0.0.1 Sean $f : S \rightarrow M$ $\tilde{f} : \tilde{S} \rightarrow M$ dos p -subvariedades del espacio homogéneo $M = G/G_0$.

$f, \tilde{f}$ son G congruentes $\Leftrightarrow \exists u \in \Gamma(\pi_f), \tilde{u} \in \Gamma(\pi_{\tilde{f}})$ $F : S \rightarrow \tilde{S}$ difeomorfismo / $u^*\Omega = (\tilde{u} \circ F)^*\Omega$

Demostración. $\Rightarrow$) $\exists g \in G / gf = \tilde{f} \circ F : S \rightarrow M$. Luego si $\tilde{u}$ es una 0-referencia de $\tilde{f}$ entonces $\tilde{u} \circ F$ es una 0-referencia de $\tilde{f} \circ F$ y $u \equiv g^{-1}(\tilde{u} \circ F)$ es una 0-referencia de f . Entonces $u^*\Omega = (\tilde{u} \circ F)^*\Omega$ por ser Ω invariante por la izquierda

$\Leftarrow$) Por el primer teorema, $\exists g \in G$ fijo / $u = g(\tilde{u} \circ F)$. Pero $f = \pi_0 \circ u = \pi_0 \circ (g(\tilde{u} \circ F)) = g(\pi_0 \circ \tilde{u} \circ F) = g(\tilde{f} \circ F)$ ■

Teorema 1.0.0.6 El teorema de congruencia. (Cartan 1937)

- $f, \tilde{f}$ son G congruentes $\Leftrightarrow$
- 1) sus referencias de Frenet son de orden q
 - 2) corresponden a las mismas secciones W_q
 - 3) $\exists \psi : S \rightarrow \tilde{S}$ difeomorfismo / $k^a = \tilde{k}^a \circ \psi \quad \forall a \leq \mu_{q+1}$

Demostración. $\Rightarrow$) por construcción de los invariantes

$\Leftarrow$) Sean $u, \tilde{u}$ referencias de Frenet de $f, \tilde{f}$. Por el corolario anterior, es suficiente encontrar un difeomorfismo $F : S \rightarrow \tilde{S}$ y $K : S \rightarrow G_q$ tales que

$$(uK)^*\Omega = F^*\tilde{u}^*\Omega$$

Dada la descomposición $\mathfrak{g} = \mathfrak{m} \oplus \mathfrak{g}_q$ se tiene que $\Omega = \theta + \omega$. De donde $(uK)^*(\theta + \omega) = K^*(\theta + \omega) + Ad_{K^{-1}}(u^*(\theta + \omega)) = K^*\omega + Ad_{K^{-1}}u^*\theta + Ad_{K^{-1}}u^*\omega = K^*(\omega|_{G_q}) + Ad_{K^{-1}}u^*\theta|_{\mathfrak{m}} + Ad_{K^{-1}}u^*\theta|_{\mathfrak{g}_q} + Ad_{K^{-1}}u^*\omega = K^*(\omega|_{G_q}) + Ad_{K^{-1}}u^*\theta|_{\mathfrak{m}} + Ad_{K^{-1}}u^*\omega|_{\mathfrak{g}_q}$ de donde se ve que actuando sólo sobre $\mathfrak{m}$ nos queda:

$$(uK)^*\Omega|_{\mathfrak{m}} = Ad_{K^{-1}}u^*\theta|_{\mathfrak{m}}$$

Por lo tanto, tener F, K es equivalente a tener dos condiciones

$$\begin{cases} Ad_{K^{-1}}u^*\theta|_{\mathfrak{m}} = F^*\tilde{u}^*\theta \\ K^*(\omega|_{G_q}) + Ad_{K^{-1}}u^*\omega|_{\mathfrak{g}_q} = F^*\tilde{u}^*\omega \end{cases}$$

Introducimos coordenadas de la siguiente manera:

La construcción de los invariantes ya ha establecido una base de $G \{E_a\}_{a=1..g}$

adaptada a la descomposición $\mathfrak{g} = \mathfrak{m} \oplus \mathfrak{g}_q = \sum_{i=0}^q \mathfrak{m}_i \oplus \mathfrak{g}_q$

1.

$$\begin{aligned} 1 &\leq a, b, c, d, e \leq g = \dim G \\ 1 &\leq i, j, k, l \leq m_q = \dim \mathfrak{m} \quad m_q + 1 \leq \lambda, \mu, \nu \leq g \\ 1 &\leq \alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon \leq p = \dim S \quad 1 \leq A, B \leq \mu_q = \dim W_q \\ 1 &\leq \varsigma \leq n \quad n + 1 \leq \varepsilon \leq p \end{aligned}$$

2.

$$\Omega = \theta^a \otimes E_a \quad \theta = \theta^i \otimes E_i \quad \omega = \theta^\lambda \otimes E_\lambda \quad \omega|_{G_q} = \kappa^\lambda \otimes E_\lambda$$

3.

$$[E_b, E_c] = c_{bc}^a E_a \quad d\theta^a = -\frac{1}{2} c_{bc}^a \theta^b \wedge \theta^c \quad c_{\lambda\mu}^i = 0$$

4.

$$Ad_g E_a = H_a^b E_b$$

$$\text{Adem\'as } H_a^c H_b^e c_{ce}^d E_d = H_a^c H_b^e [E_c, E_e] = [Ad_g E_a, Ad_g E_b] = Ad_g [E_a, E_b] = c_{ab}^c Ad_g E_c = c_{ab}^c H_c^d E_d$$

$$\text{Y para } g \in G_q \quad H_\lambda^i = 0$$

5.

$$d Ad_K = Ad_K ad_{K^*\omega}$$

Partiendo de $S \xrightarrow{K} (G_q, \omega|_{G_q}) \subset (G, \omega) \xrightarrow{Ad} GL(\mathfrak{g})$ y de

$$\begin{array}{ccc} TS & \longrightarrow & TG = G \times \mathfrak{g} \\ Z & & TK(Z) = (K, \omega(TK(Z))) \end{array}$$

donde $TK(Z) = (K, K^*\omega(Z)) = TL_K(K^*\omega(Z))$, se calcula: $(d Ad_K)_s(Z) \Big|_{g=K(s)} =$

$$\begin{aligned} (d Ad_g)(T_s K(Z)) &= (T_s K(Z))_g (Ad_g) = T_e L_g (K^*\omega(Z)) (Ad_g) = \frac{d}{dt} \Big|_0 Ad_{C_{T_e L_g(K^*\omega(Z))}(t)} = \\ &= \frac{d}{dt} \Big|_0 Ad_{g C_{K^*\omega(Z)}(t)} = Ad_g \frac{d}{dt} \Big|_0 Ad_{C_{K^*\omega(Z)}(t)} = Ad_g ad_{K^*\omega(Z)}. \end{aligned}$$

Entonces tambi\'en se deduce que $ad_{K^*\omega} = Ad_{K^{-1}} d Ad_K = -d Ad_{K^{-1}} Ad_K$ es decir $d Ad_{K^{-1}} = -ad_{K^*\omega} Ad_{K^{-1}}$ lo que en coordenadas queda $dH_a^b = -c_{\lambda c}^b H_a^c \kappa^\lambda$

6.

$$\widehat{\phi}^\alpha \equiv ((uK)^*\theta)^\alpha$$

Como ρ_q en cualquier caso est\'a siendo una acci\'on trivial, se obtiene una matriz A no singular de orden $p \forall i$, a trav\'es de: $H_j^i x_\alpha^j = A_\alpha^\beta x_\beta^i$. Resulta que esta matriz da el cambio entre ϕ^α y $\widehat{\phi}^\alpha : (uK)^*\theta = Ad_{K^{-1}}(u^*\theta)|_{\mathfrak{m}} = Ad_{K^{-1}}(u^*\theta^i \otimes E_i)|_{\mathfrak{m}} = u^*\theta^i \otimes H_i^j E_j = H_i^j u^*\theta^i \otimes E_j$. Luego $\widehat{\phi}^\alpha \equiv ((uK)^*\theta)^\alpha = H_i^\alpha u^*\theta^i = H_i^\alpha x_\beta^i \phi^\beta = A_\beta^\gamma x_\gamma^\alpha \phi^\beta = A_\beta^\alpha \phi^\beta$

7. Sea $n \in \{0, 1, 2, \dots, p\}$ el n\'umero m\'aximo de invariantes de f independientes sobre S . Sean $\{\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_n\}$ dichos invariantes. Entonces $k^a = h^a(\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_n)$ para algunas funciones h . Por la tercera hip\'otesis, tambi\'en existe la misma relaci\'on funcional entre los invariantes $\widetilde{k}^a$. As\'i, $\{\widetilde{\zeta}_1, \dots, \widetilde{\zeta}_n\}$ son independientes, $\zeta_\varsigma = \widetilde{\zeta}_\varsigma \circ \psi$, y $\widetilde{k}^a = h^a(\widetilde{\zeta}_1, \dots, \widetilde{\zeta}_n)$ para las mismas funciones h .

8. Siempre se puede suponer que $\{d\zeta_1, d\zeta_2, \dots, d\zeta_n, \phi^{n+1}, \dots, \phi^p\}$ son una base del cotangente T^*S . Entonces si $d\zeta_\varsigma = \zeta_{\varsigma;\alpha} \phi^\alpha$ las n primeras columnas de $(\zeta_{\varsigma;\alpha})$ forman un menor invertible. Al ser las funciones $\zeta_\varsigma, \zeta_{\varsigma;\alpha}$ invariantes, se obtiene también que $d\zeta_\varsigma = \zeta_{\varsigma;\alpha} \widehat{\phi}^\alpha$ para cualquier referencia de Frenet u . Luego $\{d\zeta_1, d\zeta_2, \dots, d\zeta_n, \widehat{\phi}^{n+1}, \dots, \widehat{\phi}^p\}$ también forman una base de T^*S . Análogamente $d\widetilde{\zeta}_\varsigma = \widetilde{\zeta}_{\varsigma;\alpha} \widehat{\phi}^\alpha$. Pero como $\zeta_{\varsigma;\alpha} = \widetilde{\zeta}_{\varsigma;\alpha} \circ \psi$ también las n primeras columnas de $(\widetilde{\zeta}_{\varsigma;\alpha})$ son linealmente independientes, por lo que $\{d\widetilde{\zeta}_1, d\widetilde{\zeta}_2, \dots, d\widetilde{\zeta}_n, \widetilde{\phi}^{n+1}, \dots, \widetilde{\phi}^p\}$ forman también una base de $T^*\widetilde{S}$.

Con esto la demostración prosigue intentando expresar en coordenadas las dos condiciones anteriores. Por un lado $Ad_{K^{-1}} u^* \theta|_m = H_i^j u^* \theta^i \otimes E_j = H_i^j x_\alpha^i \phi^\alpha \otimes E_j = A_\alpha^\beta x_\beta^j \phi^\alpha \otimes E_j$ mientras que $F^* \widetilde{u}^* \theta = F^* (\widetilde{x}_\beta^j \widetilde{\phi}^\beta) \otimes E_j$. Si F preserva los invariantes, es decir $k^a = \widetilde{k}^a \circ F$ entonces $F^* \widetilde{x}_\beta^j = x_\beta^j$. Por otro lado, $K^*(\kappa^\lambda \otimes E_\lambda) + Ad_{K^{-1}} u^* \Omega|_{\mathfrak{g}_q} = (K^* \kappa^\lambda + H_a^\lambda u^* \theta^a) \otimes E_\lambda$ mientras que $F^* \widetilde{u}^* \omega = F^* \widetilde{u}^* \theta^\lambda \otimes E_\lambda$. En resumen

$$\begin{cases} A_\alpha^\beta \phi^\alpha = F^* \widetilde{\phi}^\beta ; & k^a = \widetilde{k}^a \circ F \\ K^* \kappa^\lambda + H_a^\lambda u^* \theta^a = F^* \widetilde{u}^* \theta^\lambda \end{cases}$$

Luego F, K deben ser soluciones del sistema diferencial exterior:

$$\begin{cases} F^* \widetilde{\phi}^\beta - \widehat{\phi}^\beta = 0 \\ F^* \widetilde{u}^* \theta^\lambda - H_a^\lambda u^* \theta^a - K^* \kappa^\lambda = 0 \end{cases}$$

sujetas a la condición: $k^a = \widetilde{k}^a \circ F$

En la variedad $S^p \times \widetilde{S}^p \times G_q^{g-m_q}$ sea $X^{2p-n+g-m_q} = \{(s, \widetilde{s}, g) / \zeta_\varsigma(s) = \widetilde{\zeta}_\varsigma(\widetilde{s})\}$. Sobre ella se definen las 1-formas

$$\begin{cases} \eta^\alpha = \widetilde{\phi}^\alpha(\widetilde{s}) - \widehat{\phi}^\alpha(s) \\ \xi^\lambda = \widetilde{u}^* \theta^\lambda(\widetilde{s}) - H_a^\lambda(g) u^* \theta^a(s) - \kappa^\lambda(g) \end{cases}$$

Sea $\mathcal{D} \equiv \{\eta^\alpha = 0, \xi^\lambda = 0\}$ una distribución sobre X . Demostrando que $\dim \mathcal{D} = p$, que proyecta sobre $T_s S$ en cada punto y que es involutiva, se tendrían definidas F, K con la propiedad que $\zeta_\varsigma(s) = \widetilde{\zeta}_\varsigma(F(s))$ de donde $k^a = \widetilde{k}^a \circ F$.

Entonces:

1. $\dim \mathcal{D} = p$

$\{\xi^\lambda\}$ son linealmente independientes por serlo κ^λ . $\{\eta^\varepsilon\}$ también son linealmente independientes como se vio anteriormente. Por último, $\{\eta^\varsigma\}$ dependen de los anteriores: de la igualdad $d\zeta_\varsigma = \zeta_{\varsigma;\alpha} \widehat{\phi}^\alpha$ y poniendo la matriz $(\zeta_{\varsigma;\alpha}) = (a, b)$ siendo a el menor invertible, se tiene que

$$\begin{pmatrix} \widehat{\phi}^1 \\ \vdots \\ \widehat{\phi}^n \end{pmatrix} = a^{-1} \begin{pmatrix} d\zeta_1 \\ \vdots \\ d\zeta_n \end{pmatrix} - a^{-1} b \begin{pmatrix} \widehat{\phi}^{n+1} \\ \vdots \\ \widehat{\phi}^p \end{pmatrix}$$

Análogamente sobre $\widetilde{S}$. Pero sobre X , $\zeta_\varsigma = \widetilde{\zeta}_\varsigma, (\zeta_{\varsigma;\alpha}) = (\widetilde{\zeta}_{\varsigma;\alpha})$ de donde

$$\begin{pmatrix} \eta^1 \\ \vdots \\ \eta^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{\phi}^1 \\ \vdots \\ \tilde{\phi}^n \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \hat{\phi}^1 \\ \vdots \\ \hat{\phi}^n \end{pmatrix} = -a^{-1}b \begin{pmatrix} \eta^{n+1} \\ \vdots \\ \eta^p \end{pmatrix}$$

Luego $\mathcal{D}$ está determinado por $p - n + g - m_q$ ecuaciones independientes, por lo que su dimensión vale $2p - n + g - m_q - (p - n + g - m_q) = p$.

2. Sean $\{e_1, \dots, e_p\}$ $\{\tilde{e}_1, \dots, \tilde{e}_p\}$ las bases duales de $\{d\zeta_1, d\zeta_2, \dots, d\zeta_n, \tilde{\phi}^{n+1}, \dots, \tilde{\phi}^p\}$ $\{d\tilde{\zeta}_1, d\tilde{\zeta}_2, \dots, d\tilde{\zeta}_n, \tilde{\phi}^{n+1}, \dots, \tilde{\phi}^p\}$. Sea $v = v^\alpha e_\alpha \in T_s S$ y a partir de él, se define $\tilde{v} = v^\alpha \tilde{e}_\alpha \in T_{\tilde{s}} \tilde{S}$ y $w = (\tilde{u}^* \theta^\lambda(\tilde{v}) - H_a^\lambda u^* \theta^a(v)) E_\lambda \in \mathfrak{g}_q$, entonces $(v, \tilde{v}, w) \in \mathcal{D}_{(s, \tilde{s}, g)}$ y este vector proyecta sobre $T_s S$

3. $\mathcal{D}$ es involutiva: $\{d\eta^\alpha, d\xi^\lambda\} = 0$ módulo $\{\eta^\alpha, \xi^\lambda\}$

Sobre X , $\tilde{x}_\alpha^\alpha = x_\alpha^\alpha$, $\tilde{\phi}^\alpha = H_i^\alpha u^* \theta^i$, $\kappa^\lambda = \tilde{u}^* \theta^\lambda - H_a^\lambda u^* \theta^a$

$$\begin{aligned} a) \quad d\tilde{\phi}^\alpha &= \tilde{u}^* d\theta^\alpha = -\frac{1}{2} c_{bc}^\alpha \tilde{u}^* \theta^b \wedge \tilde{u}^* \theta^c = -\frac{1}{2} c_{ij}^\alpha x_\beta^i x_\gamma^j \tilde{\phi}^\beta \wedge \tilde{\phi}^\gamma - c_{i\lambda}^\alpha x_\beta^i \tilde{\phi}^\beta \wedge \tilde{u}^* \theta^\lambda \\ d\tilde{\phi}^\alpha &= d(H_i^\alpha u^* \theta^i) = -c_{\lambda j}^\alpha H_i^j x_\beta^i \kappa^\lambda \wedge \phi^\beta + H_i^\alpha u^* d\theta^i = -c_{\lambda j}^\alpha H_i^j x_\beta^i \kappa^\lambda \wedge \phi^\beta - \frac{1}{2} H_i^\alpha c_{bc}^i u^* \theta^b \wedge u^* \theta^c = -c_{\lambda j}^\alpha H_i^j x_\beta^i \kappa^\lambda \wedge \phi^\beta - \frac{1}{2} H_i^\alpha c_{jk}^i x_\beta^j x_\gamma^k \phi^\beta \wedge \phi^\gamma - H_i^\alpha c_{j\lambda}^i x_\beta^j \phi^\beta \wedge u^* \theta^\lambda \\ d\eta^\alpha &= (-\frac{1}{2} c_{ij}^\alpha x_\beta^i x_\gamma^j H_k^\beta H_l^\gamma x_\delta^k x_\epsilon^l + c_{\lambda j}^\alpha H_i^j H_k^\lambda x_\delta^i x_\epsilon^k + \frac{1}{2} H_i^\alpha c_{jk}^i x_\delta^j x_\epsilon^k) \phi^\delta \wedge \phi^\epsilon + (-c_{i\lambda}^\alpha H_j^\beta x_\beta^i x_\delta^j - c_{\lambda j}^\alpha H_i^j x_\delta^i) \phi^\delta \wedge \tilde{u}^* \theta^\lambda + (c_{\mu j}^\alpha H_i^j H_\lambda^\mu x_\delta^i + H_i^\alpha c_{j\lambda}^i x_\delta^j) \phi^\delta \wedge u^* \theta^\lambda \mod \{\eta^\alpha, \xi^\lambda\} \end{aligned}$$

Para $\phi^\delta \wedge u^* \theta^\lambda$: se amplía el rango de los índices debido a los múltiples ceros que hay, y sale $c_{ab}^\alpha H_i^b H_\lambda^a x_\delta^i + H_i^\alpha c_{j\lambda}^i x_\delta^j = c_{\lambda i}^\alpha H_c^\alpha x_\delta^i + c_{i\lambda}^\alpha H_j^\alpha x_\delta^j = c_{\lambda i}^\alpha H_j^\alpha x_\delta^i + c_{i\lambda}^\alpha H_j^\alpha x_\delta^j = 0$

Para $\phi^\delta \wedge \tilde{u}^* \theta^\lambda$: $-c_{i\lambda}^\alpha H_j^\beta x_\beta^i x_\delta^j - c_{\lambda j}^\alpha H_i^j x_\delta^i = -c_{i\lambda}^\alpha x_\beta^i A_\delta^\gamma x_\gamma^\beta - c_{\lambda j}^\alpha A_\delta^\beta x_\gamma^\beta = -c_{i\lambda}^\alpha A_\delta^\beta x_\beta^i - c_{\lambda i}^\alpha A_\delta^\beta x_\beta^i = 0$ porque $x_\gamma^\beta = \delta_\gamma^\beta$ por la elección de las ϕ^α

Para $\phi^\delta \wedge \phi^\epsilon$: $-\frac{1}{2} c_{ij}^\alpha H_k^i H_l^j x_\delta^k x_\epsilon^l + c_{\lambda j}^\alpha H_i^j H_k^\lambda x_\delta^i x_\epsilon^k + \frac{1}{2} H_i^\alpha c_{jk}^i x_\delta^j x_\epsilon^k = -\frac{1}{2} c_{ij}^\alpha H_k^i H_l^j x_\delta^k x_\epsilon^l - c_{j\lambda}^\alpha H_i^j H_k^\lambda x_\delta^i x_\epsilon^k + \frac{1}{2} c_{ik}^j H_j^\alpha x_\delta^i x_\epsilon^k = -\frac{1}{2} c_{ij}^\alpha H_k^i H_l^j x_\delta^k x_\epsilon^l - c_{i\lambda}^\alpha H_k^i H_l^\lambda x_\delta^k x_\epsilon^l + \frac{1}{2} c_{ik}^j H_j^\alpha x_\delta^i x_\epsilon^k = -\frac{1}{2} c_{ab}^\alpha H_k^a H_l^b x_\delta^k x_\epsilon^l + \frac{1}{2} c_{kl}^j H_j^\alpha x_\delta^k x_\epsilon^l = -\frac{1}{2} c_{kl}^\alpha H_a^\alpha x_\delta^k x_\epsilon^l + \frac{1}{2} c_{kl}^\alpha H_a^\alpha x_\delta^k x_\epsilon^l = 0$

- b) Se demuestra análogamente $d\xi^\lambda = 0$ módulo $\{\eta^\alpha, \xi^\lambda\}$ sin necesidad de utilizar ninguna propiedad adicional, aunque la siguiente fórmula ayuda a los cálculos: $x_\alpha^j H_i^\alpha u^* \theta^i = H_i^j u^* \theta^i$ módulo $\{\eta^\alpha, \xi^\lambda\}$ porque $x_\alpha^j H_i^\alpha u^* \theta^i - H_i^j u^* \theta^i = x_\alpha^j \tilde{\phi}^\alpha - H_i^j x_\beta^i \phi^\beta = x_\alpha^j \tilde{\phi}^\alpha - x_\alpha^j A_\beta^\alpha \phi^\beta = x_\alpha^j (\tilde{\phi}^\alpha - \hat{\phi}^\alpha) = x_\alpha^j \eta^\alpha$

■

(Chapter head:) El teorema de existencia: ecuaciones de estructura

Sea $S \subset \mathbb{R}^p$ un dominio conteniendo el cero, $0 \in S' \subset S \subset \mathbb{R}^p$, S' un abierto intercalado, $\{\phi^1, \dots, \phi^p\}$ una base de T^*S , k^A, x_α^a , funciones diferenciables sobre S , de tal manera que $x_\alpha^i = F_\alpha^i(k^1, \dots, k^{\mu_q})$ donde F_α^i son funciones determinadas por $W_q \subset G_{m_q + \mu_q, p}$

Teorema 1.0.0.7 $\exists f : S' \longrightarrow M$ un embedding de una subvariedad p dimensional de M , sujeta a la sección W_q con un conjunto de invariantes de ordenes $\leq q \{k^1, \dots, k^{\mu_q}\}$ si y sólo si

$$\begin{cases} d\phi^\alpha = -c_{bc}^\alpha x_\beta^b x_\gamma^c \phi^\beta \wedge \phi^\gamma & \beta < \gamma \\ x_{\beta;\gamma}^a - x_{\gamma;\beta}^a = (c_{bc}^a - x_\alpha^a c_{bc}^\alpha) x_\beta^b x_\gamma^c & p < a \end{cases}$$

Demostración. $\Rightarrow$) Sea u una referencia de Frenet para f , de tal forma que $u^*\theta^a = x_\alpha^a \phi^\alpha$ teniendo además que $u^*\theta^\alpha = \phi^\alpha$ o lo que es lo mismo $x_\alpha^\beta = \delta_\alpha^\beta$. Derivando y aplicando las ecuaciones de Maurer-Cartan $du^*\theta^a = -\frac{1}{2}c_{bc}^a u^*\theta^b \wedge u^*\theta^c$ de donde sale las primeras ecuaciones. Para $p < a$ se sigue $d(x_\alpha^a \phi^\alpha) = -\frac{1}{2}c_{bc}^a x_\beta^b x_\gamma^c \phi^\beta \wedge \phi^\gamma$; $dx_\alpha^a \wedge \phi^\alpha + x_\alpha^a d\phi^\alpha = -\frac{1}{2}c_{bc}^a x_\beta^b x_\gamma^c \phi^\beta \wedge \phi^\gamma$; usando las primeras ecuaciones $x_{\gamma;\beta}^a \phi^\beta \wedge \phi^\gamma = \frac{1}{2}x_\alpha^a c_{bc}^\alpha x_\beta^b x_\gamma^c \phi^\beta \wedge \phi^\gamma - \frac{1}{2}c_{bc}^a x_\beta^b x_\gamma^c \phi^\beta \wedge \phi^\gamma$; luego $(x_{\gamma;\beta}^a - \frac{1}{2}x_\alpha^a c_{bc}^\alpha x_\beta^b x_\gamma^c + \frac{1}{2}c_{bc}^a x_\beta^b x_\gamma^c) \phi^\beta \wedge \phi^\gamma = 0$. Entonces $x_{\beta;\gamma}^a - x_{\gamma;\beta}^a = -x_\alpha^a c_{bc}^\alpha x_\beta^b x_\gamma^c + c_{bc}^a x_\beta^b x_\gamma^c$ de donde se siguen las segundas ecuaciones.

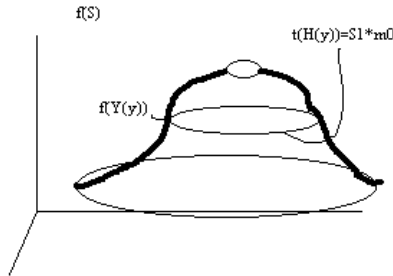
$\Leftarrow$) Sea $\phi^a = x_\alpha^a \phi^\alpha$ por supuesto con $x_\alpha^\beta = \delta_\alpha^\beta$, y sea $\varphi = \phi^a \otimes E_a \in \Lambda^1(S, \mathfrak{g})$. Por la hipótesis, $d\varphi = -\frac{1}{2}\varphi \wedge \varphi$ por lo que existe $u : S' \longrightarrow G / u^*\Omega = \varphi$. Sea $f = \tau \circ u : S' \longrightarrow M$. Construyendo los invariantes de f se ve que son parte de los x_α^i que al depender de las k^A estas forman los invariantes. ■

Observación 1.0.0.2 En la teoría de curvas $p = 1$ no existen ecuaciones de estructura

(Chapter head:)El teorema de homogeneidad

Teorema 1.0.0.8 Sea $f : S \longrightarrow M$ un embedding de una subvariedad p dimensional de M , sujeta a la sección W_q con un conjunto de invariantes de ordenes $\leq q \{k^1, \dots, k^{\mu_q}\}$ y sea $k : S \longrightarrow \mathbb{R}^{\mu_q}$ la aplicación cuyas componentes son los invariantes; y sea $y \in \mathbb{R}^{\mu_q}$ un valor regular de k , y $Y(y) = k^{-1}(y)$ una subvariedad de S . Entonces existe un subgrupo cerrado $(G_q)_0 \subset H(y) \subset G$ de tal manera que $f(Y(y))$ es G congruente a una subvariedad abierta de $\tau(H(y))$ es decir

$$\exists g \in G / gf(Y(y)) \subseteq \tau(H(y))$$



Demostración. Sea u una referencia de Frenet de f , $u^*\theta^i = x_\alpha^i \phi^\alpha$, con $x_\alpha^\beta = \delta_\alpha^\beta$. Entonces $x_\alpha^i = F_\alpha^i(k^1, \dots, k^{\mu_q})$ son constantes sobre $Y(y) \subset S$.

Sea $\mathcal{D}(y)$ la distribución invariante a izquierda de G definida por

$$\mathcal{D}(y) \equiv \{\theta^i = x_\alpha^i(y)\theta^\alpha; k_{;\alpha}^A \theta^\alpha = 0\}$$

Obsérvese que $i = 1..p$ no define ninguna ecuación, y que como n es el máximo número de invariantes independientes sobre S , entonces $rg(k_{;\alpha}^A) = n$. En definitiva hay $m_q - p + n$ ecuaciones independientes por lo que $\dim(\mathcal{D}(y)) = g + p - m_q - n$. Además $Y(y)$ es una subvariedad de codimensión n . Si $n = 0$, lo que significa que no hay invariantes o que todos los invariantes son constantes, entonces $Y(y) = S$.

Sea $L_q \subset G$ la subvariedad de referencias de orden q de f . Hemos visto que el fibrado $L_q \rightarrow S$ tiene como fibra $u(s)G_q(\lambda_q(u(s))) \forall s \in S$. Pero $k : S \rightarrow \mathbb{R}^{\mu_q}$ son las coordenadas de λ_q respecto del sistema de coordenadas elegido en W_q por lo que L_q restringido a $Y(y)$ trivializa, es decir $L_q(y) = Y(y) \times G_q(y)$.

$L_q(y)$ es una subvariedad integral de $\mathcal{D}(y)$ y por lo tanto sus traslaciones a izquierda siguen siendo subvariedades integrales por cualquier punto de G . Pero $\dim L_q(y) = \dim Y(y) + \dim G_q(y) = p - n + g - m_q = \dim \mathcal{D}(y)$ luego $\mathcal{D}(y)$ es involutiva, es decir es una subálgebra de Lie de $\mathfrak{g}$.

Sea $H(y)$ el subgrupo de G , cuya álgebra de Lie es $\mathcal{D}(y)$. Entonces $H(y)$ y sus traslaciones a izquierda son las subvariedades integrales maximales de $\mathcal{D}(y)$. Por tanto, $H(y)$ contiene la componente conexa de la identidad de $G_q(y)$. Y como también $L_q(y)$ es una subvariedad integral, existe $g \in G / gu(Y(y)) \subset H(y)$. Entonces $gf(Y(y)) = g\tau u(Y(y)) = \tau(gu(Y(y))) = \tau(H(y))$ ■

Observación 1.0.0.3 *Realmente hay que calcular $H(y)/G_q(y)$ puesto que es lo que mueve a m_0*

Parte II

Problemas de clasificación

(Chapter head:)Curvas en geometría equiafín

		<i>ref.</i>	<i>F.</i>	<i>inv.</i>
I	$\widetilde{II}_a$	1		<i>rectas</i>
	II_b	III	3	κ_4

El grupo de Lie $G = SL(2, \mathbb{R}) \otimes \mathbb{R}^2$ actúa transitivamente sobre $\mathbb{R}^2$ y se escoge como origen el punto $m_0 = (0, 0)$. Hay dos clasificaciones: una general que utiliza $Ad_{K^{-1}}u^*\theta|_{\mathfrak{m}}$; y la segunda en coordenadas, que usa $(uK)^*\Omega|_{\mathfrak{m}}$

1. Invariantes de orden 1

- a) Su grupo de isotropía es $G_0 = SL(2, \mathbb{R})$ que permite tomar $\mathfrak{m}_0 = \theta^1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \theta^2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Una 0-referencia verifica que $u_0^*\theta^1 = x\phi$ $u_0^*\theta^2 = y\phi$ y siendo $k_0 = A \in G_0$ la acción adjunta actúa de tal modo que sobre la Grassmaniana $\left[\begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{pmatrix} \right] = A^{-1} \left[\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right]$ de donde se consideran las secciones $W_0 = \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right]$ y $W_1 = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right]$. La primera no se puede obtener porque $u_0(t)m_0 = f(t)$ y f es una inmersión. La segunda sección consta de un solo punto en la Grassmaniana, por lo que no hay invariantes de orden 1.

b) Dada una curva $\alpha(t) = (x(t), y(t)) \subset \mathbb{R}^2$ una 0-referencia viene dada por

$$u_0 = \left\{ I, \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \right\}$$

y como $\{ u_0^* \theta^1 = x'(t) dt \quad u_0^* \theta^2 = y'(t) dt \}$ mirando al apartado 1a se escoge $k_0 = \left\{ \begin{pmatrix} x' & a \\ y' & b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \in G_0$ con $x'b - y'a = 1$, de tal modo que se obtiene una 1-referencia

$$u_1 = u_0 k_0 = \left\{ \begin{pmatrix} x' & a \\ y' & b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\}$$

2. Invariantes de orden 2

a) El estabilizador de W_1 es $G_1 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} \right\} \subset G_0$ que permite tomar $\mathbf{m}_1 = \omega_1^2 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Las 1 referencias verifican pues $\begin{cases} u_1^* \theta^1 = \phi & u_1^* \theta^2 = 0 \\ u_1^* \omega_1^2 = x\phi \end{cases}$ y siendo $k_1 \in G_1$ la acción adjunta actúa de

tal modo que sobre la Grassmaniana resulta $\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ a^3 x \end{pmatrix} \right]$ de donde se consideran las secciones $W_{2a} = \{x = 0\}$ $W_{2b} = \{x = 1\}$ que al ser puntuales indican que no hay invariantes de orden 2

b) $u_1^* \Omega = (u_0 k_0)^* \Omega = k_0^* \Omega + Ad_{k_0^{-1}}(u_0^* \Omega) = k_0^{-1} dk_0 + Ad_{k_0^{-1}}(u_0^* \Omega) = \left\{ \begin{pmatrix} bx'' - ay'' & ba' - ab' \\ x'y'' - x''y' & x'b' - y'a' \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ de donde se tiene que

$$\begin{cases} u_1^* \theta^1 = dt & u_1^* \theta^2 = 0 \\ u_1^* \omega_1^2 = (x'y'' - x''y') dt \end{cases}$$

y mirando al apartado 2a se deduce que al elegir

$$k_1 = \left\{ \begin{pmatrix} \frac{1}{(x'y'' - x''y')^{1/3}} & c \\ 0 & (x'y'' - x''y')^{1/3} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \in G_1$$

se consigue una referencia de orden 2:

$$u_2 = u_1 k_1 = \left\{ \begin{pmatrix} \frac{x'}{(x'y'' - x''y')^{1/3}} & cx' + a(x'y'' - y'x'')^{1/3} \\ \frac{y'}{(x'y'' - x''y')^{1/3}} & cy' + b(x'y'' - x''y')^{1/3} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\}$$

3. Invariantes de orden 3

a) Hay dos posibilidades

1) El estabilizador de W_{2a} es $G_2 = G_1$

2) El estabilizador de W_{2b} es $G_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} \subset G_1$ que permite tomar $\mathbf{m}_2 = \mu \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Las 2 referencias verifican pues

$$\begin{cases} u_2^* \theta^1 = \phi & u_2^* \theta^2 = 0 \\ u_2^* \omega_1^2 = \phi \\ u_2^* \mu = x\phi \end{cases} \quad \text{y siendo } k_2 \in G_2 \text{ la acción adjunta actúa}$$

de tal modo que sobre la Grassmaniana $\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ x-b \end{pmatrix} \right]$ de donde

se considera la sección $W_3 = \{x = 0\}$ y por tanto tampoco hay invariantes de orden 3

b) Mediante la fórmula $u_2^* \Omega = (u_1 k_1)^* \Omega = k_1^* \Omega + Ad_{k_1^{-1}}(u_1^* \Omega) = k_1^{-1} dk_1 +$

$$Ad_{k_1^{-1}}(u_1^* \Omega) \text{ resulta } \begin{cases} u_2^* \theta^1 = (x'y'' - x''y')^{1/3} dt & u_2^* \theta^2 = 0 \\ u_2^* \omega_1^2 = (x'y'' - x''y')^{1/3} dt \\ u_2^* \mu = (bx'' - ay'' - c(x'y'' - y'x'')^{2/3} - \frac{1}{3} \frac{x'y''' - x''y'}{x'y'' - x''y'}) dt \end{cases}$$

y mirando al apartado 3a) se deduce que al elegir

$$k_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & \frac{bx'' - ay''}{(x'y'' - x''y')^{1/3}} - c(x'y'' - x''y')^{1/3} - \frac{1}{3} \frac{x'y''' - x''y'}{(x'y'' - x''y')^{4/3}} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \in$$

G_2 se consigue una referencia de orden 3:

$$u_3 = u_2 k_2 = \left\{ \begin{pmatrix} \frac{x'}{(x'y'' - x''y')^{1/3}} & \frac{x''(x'y'' - x''y') - \frac{1}{3}x'(x'y''' - x''y')}{(x'y'' - x''y')^{5/3}} \\ \frac{y'}{(x'y'' - x''y')^{1/3}} & \frac{y''(x'y'' - x''y') - \frac{1}{3}y'(x'y''' - x''y')}{(x'y'' - x''y')^{5/3}} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\}$$

4. Invariantes de orden 4

a) El estabilizador de W_3 es $G_3 = I$ que permite tomar $\mathfrak{m}_3 = \omega_2^1 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$\text{La 3 referencia verifica pues } \begin{cases} u_3^* \theta^1 = \phi & u_3^* \theta^2 = 0 \\ u_3^* \omega_1^2 = \phi \\ u_3^* \mu = 0 \\ u_3^* \omega_2^1 = \kappa \phi \end{cases} \quad \text{siendo por tanto}$$

κ un invariante de orden 4: la curvatura equiafín

b) Mediante la fórmula anterior se obtiene el valor de $u_3^* \omega_2^1$ que proporciona el valor de la curvatura equiafín en coordenadas:

$$\kappa(t) = \frac{1}{3} \frac{x'''y' - x'y''''}{(x'y'' - x''y')^{4/3}} + \frac{4}{3} \frac{x'''y'' - x''y'''}{(x'y'' - x''y')^{4/3}} + \frac{5}{9} \frac{(x'''y' - x'y''')^2}{(x'y'' - x''y')^{7/3}}$$

De la referencia de Frenet se puede obtener un parámetro de arco τ identificando la primera columna v_1 con el vector tangente a la curva: $v_1 = \frac{d\alpha}{d\tau} = \alpha' \frac{1}{\frac{d\tau}{dt}}$ de donde $\frac{d\tau}{dt} = (x'y'' - x''y')^{1/3}$. Se calcula también que las ecuaciones de Frenet para esta referencia son:

$$\begin{pmatrix} \frac{dv_1}{d\tau} \\ \frac{dv_2}{d\tau} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \kappa & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$$

obteniéndose el mismo valor de la curvatura.

Como aplicación del teorema de homogeneidad, se calcularán las curvas de curvatura constante de esta geometría, entre ellas las geodésicas.

Sea $\mathcal{D} \equiv \{\theta^2 = 0, \omega_1^2 = \theta^1, \mu = 0, \omega_2^1 = \kappa\theta^1\}$ una distribución sobre $G = SL(2, \mathbb{R}) \ltimes \mathbb{R}^2$ siendo κ una constante. Aquí, $g = 5, n = 0, p = 1, m_q = 5$, luego $\dim H = 1$ siendo H el subgrupo de Lie cuya órbita que pasa por $(0, 0)$ da la curva en cuestión.

$$H = \exp \left\{ \begin{pmatrix} 0 & \kappa \\ 1 & 0 \end{pmatrix} t, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} t \right\}$$

Como en el producto semidirecto la exponencial viene dada por $\exp(A, v) = (e^A, \sum_{i=0}^{\infty} \frac{A^i}{(i+1)!} v)$ y dado que la acción empieza en $(0, 0)$, sólo es necesario calcular la entrada $(1, 1)$ y $(2, 1)$ del sumatorio. $(1, 1) = 1 + \sum \kappa^n \frac{t^{2n}}{(2n+1)!} = \frac{1}{\sqrt{\kappa t}} (\sqrt{\kappa t} + \sum \frac{(\sqrt{\kappa t})^{2n+1}}{(2n+1)!}) = \frac{\sinh(\sqrt{\kappa t})}{\sqrt{\kappa t}}$ $(2, 1) = \frac{t}{2} + \sum \kappa^n \frac{t^{2n+1}}{(2n+2)!} = \frac{1}{t} (\frac{t^2}{2} + \sum \frac{(\sqrt{\kappa t})^{2n+2}}{\kappa(2n+2)!}) = \frac{1}{\kappa t} (\frac{(\sqrt{\kappa t})^2}{2} + \sum \frac{(\sqrt{\kappa t})^{2n+2}}{(2n+2)!}) = \frac{\cosh(\sqrt{\kappa t}) - 1}{\kappa t}$ y al aplicar la acción queda la curva

$$\begin{cases} x(t) = \frac{\sinh(\sqrt{\kappa t})}{\sqrt{\kappa}} \\ y(t) = \frac{\cosh(\sqrt{\kappa t}) - 1}{\kappa} \end{cases}$$

y para las geodésicas queda

$$\begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = \frac{t^2}{2} \end{cases}$$

(Chapter head:) Curvas en geometría afín

			<i>ref.</i>	<i>F.</i>	<i>inv.</i>
I	$\widetilde{II}_a$		1		<i>rectas</i>
	II_b	III	$\widetilde{IV}_a$	3	<i>parábolas</i>
			IV_b	4	κ_5

Se considera $\mathbb{R}^2$ con origen en $m_0 = (0, 0)$, sobre el que actúa transitivamente el producto semidirecto $GL(2, \mathbb{R}) \ltimes \mathbb{R}^2$ de dimensión 6.

1. Invariantes de orden 1

El subgrupo de isotropía de m_0 es $G_0 = SL(2, \mathbb{R})$ que permite tomar $\mathbf{m}_0 = \theta^1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \theta^2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Una 0-referencia verifica $u_0^* \theta^1 = x\phi$ $u_0^* \theta^2 = y\phi$ y siendo $k_0 = A \in G_0$ la acción adjunta actúa de tal modo que sobre la Grassmaniana $\left[\begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{pmatrix} \right] = A^{-1} \left[\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right]$ de donde se consideran las secciones $W_0 = \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right]$ y $W_1 = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right]$. La primera no se puede obtener porque $u_0(t)m_0 = f(t)$ y f es una inmersión. La segunda sección consta de un solo punto en la Grassmaniana, por lo que no hay invariantes de orden 1.

2. Invariantes de orden 2

El estabilizador de W_1 es $G_1 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} / ad \neq 0 \right\}$ que permite tomar $\mathbf{m}_1 = \alpha \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Una 1-referencia verifica $\begin{cases} u_1^* \theta^1 = \phi & u_1^* \theta^2 = 0 \\ u_1^* \alpha = x\phi \end{cases}$ y

siendo $k_1 \in G_1$ la acción adjunta actúa de tal modo que sobre la Grassmaniana resulta $\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ a^2 d^{-1} x \end{pmatrix} \right]$ de donde se consideran las secciones $W_{2a} = \{x = 0\}$ y $W_{2b} = \{x = 1\}$ ambas unipuntuales por lo que no hay invariantes de orden 2.

3. Invariantes de orden 3

a) El estabilizador de W_{2a} es $G_2 = G_1$

b) El estabilizador de W_{2b} es $G_2 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a^2 \end{pmatrix} / a \neq 0 \right\}$ lo que permite

tomar $\mathfrak{m}_2 = \beta \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Una 2-referencia verifica $\begin{cases} u_2^* \theta^1 = \phi & u_2^* \theta^2 = 0 \\ u_2^* \alpha = \phi \\ u_2^* \beta = x\phi \end{cases}$

y la acción adjunta proporciona $\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ x - a^{-2}b \end{pmatrix} \right]$ cuya sección $W_3 = \{x = 0\}$ no da lugar a invariantes de orden 3

4. Invariantes de orden 4

El estabilizador de W_3 es $G_3 = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^2 \end{pmatrix} / a \neq 0 \right\}$ y $\mathfrak{m}_3 = \gamma \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Una 3-referencia verifica $\begin{cases} u_3^* \theta^1 = \phi & u_3^* \theta^2 = 0 \\ u_3^* \alpha = \phi \\ u_3^* \beta = 0 \\ u_3^* \gamma = x\phi \end{cases}$ y la acción adjunta pro-

porciona $\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ a^2 x \end{pmatrix} \right]$ que admite dos secciones $W_{4a} = \{x = 0\}$ y $W_{4b} = \{x = 1\}$ unipuntuales por lo que no hay invariantes de orden 4.

5. Invariantes de orden 5

a) El estabilizador de W_{4a} es $G_4 = G_3$

b) El estabilizador de W_{4b} es $G_4 = I$ por lo que $\mathfrak{m}_4 = \delta \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. Una

4-referencia verifica $\begin{cases} u_4^* \theta^1 = \phi & u_4^* \theta^2 = 0 \\ u_4^* \alpha = \phi \\ u_4^* \beta = 0 \\ u_4^* \gamma = \phi \\ u_4^* \delta = \kappa \phi \end{cases}$ siendo κ la curvatura

afín, invariante de orden 5.

Para calcular las curvas de curvatura constante, se integra la distribución $\mathcal{D} \equiv \{\theta^2 = 0, \alpha = \theta^1, \beta = 0, \gamma = \theta^1, \delta = \kappa \theta^1\}$ sobre $GL(2, \mathbb{R}) \otimes \mathbb{R}^2$; y siendo $g = 6, n = 0, p = 1, m_q = 6$, sale que $\dim H = 1$ siendo H el subgrupo de Lie cuya órbita que pasa por $(0, 0)$ da la curva en cuestión.

$$H = \exp \left\{ \begin{pmatrix} \kappa & 1 \\ 1 & 2\kappa \end{pmatrix} t, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} t \right\}$$

Y siendo $B = \begin{pmatrix} \kappa & 1 \\ 1 & 2\kappa \end{pmatrix}$, dicha curva viene dada por la ecuación $A(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \frac{1}{t} B^{-1} (e^{Bt} - I) \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix} = (e^{Bt} - I) B^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2\kappa^2 - 1} (e^{Bt} - I) \begin{pmatrix} 2\kappa \\ -1 \end{pmatrix}$. En el trabajo de Wilczinsky (9) dada una curva en $\mathbb{R}^2$, $A(t)$, y siendo $p = -\frac{|A''' A'|}{|A'' A'|}$, $q = \frac{|A''' A''|}{|A'' A'|}$, $K = q - \frac{p'}{3} - \frac{2p^2}{9}$, su curvatura afín viene dada por

$$\varkappa = \frac{1}{\sqrt{|K|}} \left(-\frac{p}{3} + \frac{K'}{2K} \right)$$

y para la curva en cuestión se obtiene que $p = 3\kappa$, $q = 2\kappa^2 - 1$, $K = -1$ y finalmente $\varkappa = -\kappa$

(Chapter head:) Curvas en geometría hiperbólica

$$\begin{array}{ccc} \text{ref. } F. & \text{inv} & \\ I & 1 & \kappa_2 \end{array}$$

Como espacio hiperbólico se considera $\mathbb{H}^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x^2 + y^2 - z^2 = -1, z > 0\}$ que es una hoja del hiperboloide de 2 hojas; y como origen se toma $m_0 = (0, 0, 1)$. El grupo de Lie que actúa transitivamente es $O(2, 1)$ de dimensión

3 y su álgebra de Lie viene dada por $\mathfrak{o}(2, 1) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ b & c & 0 \end{pmatrix} / a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$

1. Invariantes de orden 1

El subgrupo de isotropía de m_0 es $G_0 = \left\{ \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ que

permite tomar $\mathbf{m}_0 = \alpha \begin{pmatrix} & & 1 \\ & 0 & \\ 1 & & \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$. Una 0-referencia

verifica que $u_0^* \alpha = x\phi$, $u_0^* \beta = y\phi$ y la acción adjunta actúa de tal modo que sobre la Grassmaniana $\left[\begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right]$ de

donde se consideran las secciones $W_0 = \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right]$ y $W_1 = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right]$. La

primera no se puede obtener porque $u_0(t)m_0 = f(t)$ y f es una inmersión. La segunda sección consta de un solo punto en la Grassmaniana, por lo que no hay invariantes de orden 1.

2. Invariantes de orden 2

El estabilizador de W_1 es $G_1 = I$ que permite tomar $\mathbf{m}_1 = \gamma \begin{pmatrix} & 1 \\ -1 & \\ & 0 \end{pmatrix}$.

Las 1 referencias verifican pues $\begin{cases} u_1^* \alpha = \phi & u_1^* \beta = 0 \\ u_1^* \gamma = \kappa \phi \end{cases}$ siendo por tanto κ un invariante de orden 2: la curvatura hiperbólica.

En esta geometría, las geodésicas son las imágenes bajo la acción del grupo, de la curva $(\sinh t, 0, \cosh t)$

Para la comparación de este resultado con el obtenido clásicamente, hay que fijarse en otros modelos de dicha geometría:

1. El modelo de Beltrami:

$$\mathbb{H}_B^2 = \{(x_0 : x_1 : x_2) \in \mathbb{RP}^2 / x_0^2 + x_1^2 - x_2^2 < 0\}$$

$$\{PGL(3, \mathbb{R}) / \text{deja invariante la cónica } x_0^2 + x_1^2 - x_2^2 = 0\}$$

2. El modelo de Poincaré:

$$\mathbb{H}_P^2 = \{z \in \mathbb{C} / |z| < 1\}$$

$$\left\{ \rho \begin{pmatrix} \alpha & \bar{\beta} \\ \beta & \bar{\alpha} \end{pmatrix} / \alpha \bar{\alpha} - \beta \bar{\beta} = 1 \right\} \subset PGL(2, \mathbb{C})$$

3. El modelo de Lobachesky

$$\mathbb{H}_L^2 = \{z \in \mathbb{C} / \text{Im } z > 0\}$$

$$PSL(2, \mathbb{R})$$

y sus correspondientes relaciones:

$$\begin{array}{ccccccc} \mathbb{H}^2 & \longrightarrow & \mathbb{H}_B^2 & \longrightarrow & \mathbb{H}_P^2 & \longrightarrow & \mathbb{H}_L^2 \\ (x, y, z) & & (x : y : z) & & \frac{x+iy}{z+1} & & \frac{i-y}{z-x} \end{array}$$

Entonces en la geometría de Lobachesky, las geodésicas resultan las imágenes bajo $PSL(2, \mathbb{R})$ de la curva $\frac{1}{\cosh t - \sinh t} i$ que es un resultado bien conocido (Chapter head:)Curvas en geometría de Möbius

				<i>ref. F.</i>	
<i>I</i>	<i>II</i>	$\widetilde{III}_a$		2	<i>rectas</i>
		<i>III_b</i>	<i>IV</i>	4	κ_5

Se considera el conjunto $\mathbb{M}^2 = \{(t : x : y : z) \in \mathbb{RP}^3 / -t^2 + x^2 + y^2 + z^2 = 0\}$ y el origen $m_0 = (1 : 1 : 0 : 0)$. El grupo de Lie que actúa transitivamente es la componente conexa de la identidad de $O(3, 1)$ de dimensión 6 y cuya álgebra

de Lie viene dada por $o(3, 1) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & a & b & c \\ a & 0 & u & v \\ b & -u & 0 & w \\ c & -v & -w & 0 \end{pmatrix} / a, b, c, u, v, w \in \mathbb{R} \right\}$

1. Invariantes de orden 1

El subgrupo de isotropía de m_0 es $G_0 = \left\{ \begin{pmatrix} \frac{\rho^2+1}{2\rho} + \frac{\rho}{2}(c^2 + d^2) & \frac{\rho^2-1}{2\rho} - \frac{\rho}{2}(c^2 + d^2) \\ \frac{\rho^2-1}{2\rho} + \frac{\rho}{2}(c^2 + d^2) & \frac{\rho^2+1}{2\rho} - \frac{\rho}{2}(c^2 + d^2) \\ c & -c \\ d & -d \end{pmatrix} \right\}$

$$\left. \begin{array}{cc} \rho(c \cos \varphi + d \operatorname{sen} \varphi) & \rho(-c \operatorname{sen} \varphi + d \cos \varphi) \\ \rho(c \cos \varphi + d \operatorname{sen} \varphi) & \rho(-c \operatorname{sen} \varphi + d \cos \varphi) \\ \cos \varphi & -\operatorname{sen} \varphi \\ \operatorname{sen} \varphi & \cos \varphi \end{array} \right\} \text{ que permite tomar } \mathfrak{m}_0 =$$

$$\alpha \begin{pmatrix} & & 1 \\ & 0 & \\ 1 & & \\ & & 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} & & 1 \\ & 0 & \\ & 0 & \\ 1 & & \end{pmatrix}.$$
 Una 0-referencia verifica que $u_0^* \alpha = x\phi$ $u_0^* \beta = y\phi$ y la acción adjunta actúa de tal modo que sobre la Grassmaniana $\left[\begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{pmatrix} \right] = \left(\frac{\rho^2+1}{2\rho} \begin{pmatrix} \cos \varphi & \operatorname{sen} \varphi \\ -\operatorname{sen} \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} + \frac{\rho}{2}(c^2 - d^2) \begin{pmatrix} -\cos \varphi & \operatorname{sen} \varphi \\ \operatorname{sen} \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} - \rho dc \begin{pmatrix} \operatorname{sen} \varphi & \cos \varphi \\ \cos \varphi & -\operatorname{sen} \varphi \end{pmatrix} \right) \left[\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right]$ de donde se consideran las secciones $W_0 = \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right]$ y $W_1 = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right]$. La primera no se puede obtener porque $u_0(t)m_0 = f(t)$ y f es una inmersión. La segunda sección consta de un solo punto en la Grassmaniana, por lo que no hay invariantes de orden 1.

2. Invariantes de orden 2

El estabilizador de W_1 es G_1 obtenido de G_0 imponiendo las condiciones

$$\begin{cases} \operatorname{sen} \varphi = \frac{2\rho^2 dc}{\sqrt{(\rho^2(c^2+d^2-1)-1)^2+4\rho^2 d^2(1+\rho^2)}} \\ \cos \varphi = \frac{\rho^2(c^2-d^2-1)-1}{\sqrt{(\rho^2(c^2+d^2-1)-1)^2+4\rho^2 d^2(1+\rho^2)}} \end{cases}$$

y por tanto de dimensión 3. Esto permite tomar $\mathfrak{m}_1 = \gamma \begin{pmatrix} 0 & & \\ & 0 & \\ & & -1 \\ & & & 1 \end{pmatrix}$

y las 1 referencias verifican pues $\begin{cases} u_1^* \alpha = \phi & u_1^* \beta = 0 \\ u_1^* \gamma = x\phi \end{cases}$ y la acción adjunta

actúa de tal modo que sobre la Grassmaniana resulta $\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{2\rho}{1-\rho^2(c^2-1)}(x+\rho d) \end{pmatrix} \right]$

de donde se obtiene la sección $W_2 = \{x = 0\}$ que al ser puntual indica que no hay invariantes de orden 2

3. Invariantes de orden 3

El estabilizador de W_2 es G_2 obtenido de G_1 con $d = 0 \Rightarrow \operatorname{sen} \varphi = 0$

$\cos \varphi = 1$ es decir $G_2 = \left\{ \begin{pmatrix} \frac{\rho^2+1}{2\rho} + \frac{\rho}{2}c^2 & \frac{\rho^2-1}{2\rho} - \frac{\rho}{2}c^2 & \rho c & 0 \\ \frac{\rho^2-1}{2\rho} + \frac{\rho}{2}c^2 & \frac{\rho^2+1}{2\rho} - \frac{\rho}{2}c^2 & \rho c & 0 \\ c & -c & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ y di-

mensión 2. Entonces $\mathfrak{m}_2 = \delta \begin{pmatrix} & & 1 \\ & 0 & \\ & 0 & \\ 1 & -1 & \end{pmatrix}$ y una 2-referencia ver-

ifica $\begin{cases} u_2^* \alpha = \phi & u_2^* \beta = 0 \\ u_2^* \gamma = 0 \\ u_2^* \delta = x\phi \end{cases}$ y la acción adjunta sale $\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{2}{\rho^2+1-\rho^2 c^2} x \end{pmatrix} \right]$

de donde se obtienen dos secciones $W_{3a} = \{x = 0\}$ y $W_{3b} = \{x = 1\}$ unipuntuales por lo que tampoco hay invariantes de orden 3

4. Invariantes de orden 4

a) El estabilizador de W_{3a} es $G_3 = G_2$

b) El estabilizador de W_{3b} se obtiene para $c = \sqrt{1 - \frac{1}{\rho^2}}$ es decir $G_3 =$

$$\left\{ \begin{pmatrix} \rho & 0 & \sqrt{\rho^2 - 1} & 0 \\ \rho - \frac{1}{\rho} & \frac{1}{\rho} & \sqrt{\rho^2 - 1} & 0 \\ \frac{\sqrt{\rho^2 - 1}}{\rho} & -\frac{\sqrt{\rho^2 - 1}}{\rho} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} \text{ de dimensión 1. Se consid-}$$

$$\text{era } \mathbf{m}_3 = \epsilon \begin{pmatrix} & & 0 \\ & 1 & \\ -1 & & \\ 0 & & \end{pmatrix} \text{ y una 3-referencia verifica } \begin{cases} u_3^* \alpha = \phi & u_3^* \beta = 0 \\ u_3^* \gamma = 0 \\ u_3^* \delta = \phi \\ u_3^* \epsilon = x\phi \end{cases}$$

Al aplicar la acción adjunta sale $\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ \rho^2 x + 1 - \rho^2 \end{pmatrix} \right]$ cuya única
sección es $W_4 = \{x = 0\}$ por lo que no hay invariantes de orden 4

5. Invariantes de orden 5

El estabilizador de W_4 es $G_4 = I$. Luego $\mathbf{m}_4 = \zeta \begin{pmatrix} & 1 \\ 1 & \\ & 0 \\ & & 0 \end{pmatrix}$ y una

4-referencia verifica $\begin{cases} u_4^* \alpha = \phi & u_4^* \beta = 0 \\ u_4^* \gamma = 0 \\ u_4^* \delta = \phi \\ u_4^* \epsilon = 0 \\ u_4^* \zeta = \kappa \phi \end{cases}$ luego κ es la curvatura de la
geometría de Möbius y es de orden 5.

(Chapter head:)Curvas en geometría proyectiva

				ref. F. inv	
I	$\widetilde{II}_a$			1	rectas
II_b	III	IV	$\widetilde{V}_a$	4	cónicas
		V_b	VI	6	κ_7

Se considera el conjunto $\mathbb{RP}^2$ y el origen $m_0 = (1 : 0 : 0)$. El grupo de Lie que actúa transitivamente es $SL(3, \mathbb{R})$ de dimensión 8 y cuya álgebra de Lie está formada por matrices de traza nula.

1. Invariantes de orden 1

El subgrupo de isotropía de m_0 es $G_0 = \{A \in SL(3, \mathbb{R}) / a_{21} = a_{31} = 0\}$

que permite tomar $\mathbf{m}_0 = \alpha \begin{pmatrix} 0 \\ 1 & 0 \\ & & 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ & 0 \\ 1 & & 0 \end{pmatrix}$. Una 0-

referencia verifica que $u_0^* \alpha = x\phi$ $u_0^* \beta = y\phi$ y siendo $k_0 = \begin{pmatrix} a & \xi^T \\ 0 & A \\ 0 & \end{pmatrix} \in$

G_0 la acción adjunta actúa de tal modo que sobre la Grassmaniana $\left[\begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{pmatrix} \right] = A^{-1} \left[\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right]$ de donde se consideran las secciones $W_0 = \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right]$ y $W_1 = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right]$. La primera no se puede obtener porque $u_0(t)m_0 = f(t)$ y f es una inmersión. La segunda sección consta de un solo punto en la Grassmaniana, por lo que no hay invariantes de orden 1.

2. Invariantes de orden 2

El estabilizador de W_1 es $G_1 = \{A \in SL(3, \mathbb{R}) / a_{21} = a_{31} = a_{32} = 0\} \subset G_0$ que permite tomar $\mathbf{m}_1 = \gamma \begin{pmatrix} 0 & & \\ & 0 & \\ & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Las 1 referencias verifican

pues $\begin{cases} u_1^* \alpha = \phi & u_1^* \beta = 0 \\ u_1^* \gamma = x\phi \end{cases}$ y siendo $k_1 = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & f \end{pmatrix} \in G_1$ la acción

adjunta actúa de tal modo que sobre la Grassmaniana resulta $\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ d^3 x \end{pmatrix} \right]$ de donde se consideran las secciones $W_{2a} = \{x = 0\}$ $W_{2b} = \{x = 1\}$ que al ser puntuales indican que no hay invariantes de orden 2

3. Invariantes de orden 3

a) El estabilizador de W_{2a} es $G_2 = G_1$

b) El estabilizador de W_{2b} es $G_2 = \{A \in SL(3, \mathbb{R}) / a_{21} = a_{31} = a_{32} = 0, a_{22} = 1\} \subset$

G_1 que permite tomar $\mathbf{m}_2 = \delta \begin{pmatrix} 0 & & \\ & 1 & \\ & & -1 \end{pmatrix}$. Una 2-referencia ver-

ifica $\begin{cases} u_2^* \alpha = \phi & u_2^* \beta = 0 \\ u_2^* \gamma = \phi \\ u_2^* \delta = x\phi \end{cases}$ y siendo $k_2 = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & 1 & e \\ 0 & 0 & a^{-1} \end{pmatrix} \in G_2$ la

acción adjunta actúa de tal modo que sobre la Grassmaniana resulta

$\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ a^{-1}x - e \end{pmatrix} \right]$ de donde se considera la sección $W_3 = \{x = 0\}$ y no hay invariantes de orden 3.

4. Invariantes de orden 4

El estabilizador de W_3 es $G_3 = \{A \in SL(3, \mathbb{R}) / a_{21} = a_{31} = a_{32} = a_{23} = 0, a_{22} = 1\}$

y $\mathbf{m}_3 = \epsilon \begin{pmatrix} 0 & & \\ & 0 & 1 \\ & & 0 \end{pmatrix}$. Una 3-referencia verifica $\begin{cases} u_3^* \alpha = \phi & u_3^* \beta = 0 \\ u_3^* \gamma = \phi \\ u_3^* \delta = 0 \\ u_3^* \epsilon = x\phi \end{cases}$

y siendo $k_3 = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a^{-1} \end{pmatrix} \in G_3$ la acción adjunta actúa de tal mo-

do que sobre la Grassmaniana resulta $\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ a^{-2}x + ca^{-1} \end{pmatrix} \right]$ de donde se considera la sección $W_4 = \{x = 0\}$ y no hay invariantes de orden 4.

5. Invariantes de orden 5

El estabilizador de W_4 es $G_4 = \{A \in SL(3, \mathbb{R}) / a_{21} = a_{31} = a_{32} = a_{23} = a_{13} = 0, a_{22} = 1\}$

y $\mathfrak{m}_4 = \zeta \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ & 0 & 1 \\ & & 0 \end{pmatrix}$. Una 4-referencia verifica $\begin{cases} u_4^* \alpha = \phi & u_4^* \beta = 0 \\ u_4^* \gamma = \phi \\ u_4^* \delta = 0 \\ u_4^* \epsilon = 0 \\ u_4^* \zeta = x\phi \end{cases}$

y siendo $k_4 = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a^{-1} \end{pmatrix} \in G_4$ la acción adjunta actúa de tal modo

que sobre la Grassmaniana resulta $\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ a^{-3}x \end{pmatrix} \right]$ de donde se considera

la sección $W_{5a} = \{x = 0\}$ y $W_{5b} = \{x = 1\}$ y no hay invariantes de orden 5

6. Invariantes de orden 6

a) El estabilizador de W_{5a} es $G_5 = G_4$

b) El estabilizador de W_{5b} es $G_5 = \{A \in SL(3, \mathbb{R}) / a_{21} = a_{31} = a_{32} = a_{23} = a_{13} = 0, a_{11} = a_{22} = 1\}$

y $\mathfrak{m}_5 = \eta \begin{pmatrix} 1 & & \\ & -1 & \\ & & 0 \end{pmatrix}$. Una 5-referencia verifica $\begin{cases} u_5^* \alpha = \phi & u_5^* \beta = 0 \\ u_5^* \gamma = \phi \\ u_5^* \delta = 0 \\ u_5^* \epsilon = 0 \\ u_5^* \zeta = \phi \\ u_5^* \eta = x\phi \end{cases}$

y siendo $k_5 = \begin{pmatrix} 1 & b & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in G_5$ la acción adjunta actúa de tal

modo que sobre la Grassmaniana resulta $\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ x - b \end{pmatrix} \right]$ de donde se

considera la sección $W_6 = \{x = 0\}$ y no hay invariantes de orden 6.

7. Invariantes de orden 7

El estabilizador de W_6 es $G_6 = I$ que permite tomar $\mathfrak{m}_6 = \xi \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ & 0 \\ & & 0 \end{pmatrix}$.

Una 6-referencia verifica
$$\left\{ \begin{array}{l} u_6^* \alpha = \phi \quad u_6^* \beta = 0 \\ u_6^* \gamma = \phi \\ u_6^* \delta = 0 \\ u_6^* \epsilon = 0 \\ u_6^* \zeta = \phi \\ u_6^* \eta = 0 \\ u_6^* \xi = \kappa \phi \end{array} \right. \quad \text{siendo } \kappa \text{ un invariante de}$$
 orden 7: la curvatura proyectiva.

(Chapter head:)Curvas en geometría de Lie

					ref. F.	inv
I_a	II	$\widetilde{III}_a$			2	
		III_b	$\widetilde{IV}_a$		3	
			IV_b	V	5	κ_6
		III_c	IV		4	κ_4, τ_5
		III_d	IV		4	κ_4, τ_5
I_b	II	$\widetilde{III}_a$			2	
		III_b	IV	V	5	κ_6
I_c	II	$\widetilde{III}_a$			2	
		III_b	IV		4	κ_4, τ_5

Se considera la cuádrica de $\mathbb{RP}^4$ $Q = \{(a : s_1 : s_2 : s_3 : b) \in \mathbb{RP}^4 / -a^2 + s_1^2 + s_2^2 + s_3^2 - b^2 = 0\}$ con origen $m_0 = (1 : 1 : 0 : 0 : 0)$ sobre la que actúa la componente conexas de la identidad del grupo de Lie $G = O(3, 2)$ de dimensión 10. Su álgebra de Lie viene dada por matrices de la forma $\mathfrak{g} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & x_1 & x_2 & x_3 & y_1 \\ x_1 & 0 & y_2 & y_3 & x_4 \\ x_2 & -y_2 & 0 & y_4 & x_5 \\ x_3 & -y_3 & -y_4 & 0 & x_6 \\ -y_1 & x_4 & x_5 & x_6 & 0 \end{pmatrix} \right\}$

1. Invariantes de orden 1

$$\begin{aligned} \blacksquare G_0^7 = & \left\{ \begin{pmatrix} \frac{\rho}{2}(1+c^2+d^2-e^2) + \frac{1}{2\rho} & \rho - \frac{1}{2\rho} - \frac{\rho}{2}(1+c^2+d^2-e^2) \\ \frac{\rho}{2}(1+c^2+d^2-e^2) - \frac{1}{2\rho} & \rho + \frac{1}{2\rho} - \frac{\rho}{2}(1+c^2+d^2-e^2) \\ c & -c \\ d & -d \\ e & -e \end{pmatrix} \right. \\ & \rho(c\sqrt{1+v^2}\cos \varphi + d\sqrt{1+v^2}\sen \varphi - ev) \\ & \rho(c\sqrt{1+v^2}\cos \varphi + d\sqrt{1+v^2}\sen \varphi - ev) \\ & \sqrt{1+v^2}\cos \varphi \\ & \sqrt{1+v^2}\sen \varphi \\ & v \\ & \rho(c\frac{vw\cos \varphi - \sqrt{1+v^2+w^2}\sen \varphi}{\sqrt{1+v^2}} + d\frac{vwsen \varphi + \sqrt{1+v^2+w^2}\cos \varphi}{\sqrt{1+v^2}} - ew) \\ & \rho(c\frac{vw\cos \varphi - \sqrt{1+v^2+w^2}\sen \varphi}{\sqrt{1+v^2}} + d\frac{vwsen \varphi + \sqrt{1+v^2+w^2}\cos \varphi}{\sqrt{1+v^2}} - ew) \\ & \frac{vw\cos \varphi - \sqrt{1+v^2+w^2}\sen \varphi}{\sqrt{1+v^2}} \\ & \frac{vwsen \varphi + \sqrt{1+v^2+w^2}\cos \varphi}{\sqrt{1+v^2}} \\ & w \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left. \begin{aligned} & \rho \left(c \frac{v\sqrt{1+v^2+w^2}\cos\varphi - w\sin\varphi}{\sqrt{1+v^2}} + d \frac{v\sqrt{1+v^2+w^2}\sin\varphi + w\cos\varphi}{\sqrt{1+v^2}} - e\sqrt{1+v^2+w^2} \right) \\ & \rho \left(c \frac{v\sqrt{1+v^2+w^2}\cos\varphi - w\sin\varphi}{\sqrt{1+v^2}} + d \frac{v\sqrt{1+v^2+w^2}\sin\varphi + w\cos\varphi}{\sqrt{1+v^2}} - e\sqrt{1+v^2+w^2} \right) \\ & \frac{v\sqrt{1+v^2+w^2}\cos\varphi - w\sin\varphi}{\sqrt{1+v^2}} \\ & \frac{v\sqrt{1+v^2+w^2}\sin\varphi + w\cos\varphi}{\sqrt{1+v^2}} \\ & \sqrt{1+v^2+w^2} \end{aligned} \right\} \\
\blacksquare \mathfrak{m}_0 &= \alpha \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & & & & \\ 1 & & & & \\ 0 & & O & & \\ 0 & & & & \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & & & & \\ 0 & & O & & \\ 1 & & & & \\ 0 & & & & \end{pmatrix} + \\
& \gamma \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & & & & \\ 0 & & & & \\ 0 & & O & & \\ -1 & & & & \end{pmatrix} \\
\blacksquare \{u_0^*\alpha = x\phi \quad u_0^*\beta = y\phi \quad u_0^*\gamma = z\phi \\
\blacksquare \text{La acción adjunta restringida a } \mathfrak{m}_0 \text{ queda:} \\
\left[\begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \\ \tilde{z} \end{pmatrix} \right] &= \begin{pmatrix} (1+v^2)\cos\varphi & (1+v^2)\sin\varphi \\ vw\cos\varphi - \sqrt{1+v^2+w^2}\sin\varphi & vw\sin\varphi + \sqrt{1+v^2+w^2}\cos\varphi \\ -w\sin\varphi + v\sqrt{1+v^2+w^2}\cos\varphi & w\cos\varphi + v\sqrt{1+v^2+w^2}\sin\varphi \end{pmatrix} \\
& \begin{pmatrix} v\sqrt{1+v^2} \\ w\sqrt{1+v^2} \\ \sqrt{1+v^2}\sqrt{1+v^2+w^2} \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right] \\
\text{Como se verifica que } \tilde{x}^2 + \tilde{y}^2 - \tilde{z}^2 &= (1+v^2)(x^2 + y^2 - z^2) \text{ hay tres} \\
\text{secciones unipuntuales: } W_{1a} &= \{(1, 0, 0)\} \text{ que a través de la acción} \\
\text{produce todos los hiperboloides de una hoja, } W_{1b} &= \{(1, 0, 1)\} \text{ que} \\
\text{produce el cono, y } W_{1c} &= \{[0, 0, 1]\} \text{ que produce los hiperboloides} \\
\text{de dos hojas. No hay invariantes de orden 1.} \\
2. \text{ Invariantes de orden 2} \\
a) W_{1a} \\
\blacksquare G_1^5 &= \begin{pmatrix} \frac{\rho}{2}(1+c^2+d^2-e^2) + \frac{1}{2\rho} & \rho - \frac{1}{2\rho} - \frac{\rho}{2}(1+c^2+d^2-e^2) & \rho c \\ \frac{\rho}{2}(1+c^2+d^2-e^2) - \frac{1}{2\rho} & \rho + \frac{1}{2\rho} - \frac{\rho}{2}(1+c^2+d^2-e^2) & \rho c \\ c & -c & 1 \\ d & -d & 0 \\ e & -e & 0 \end{pmatrix} \\
& \begin{pmatrix} \frac{\rho(d\sqrt{1+w^2}-ew)}{\sqrt{1+w^2}} & \frac{\rho(dw-e\sqrt{1+w^2})}{w} \\ \frac{\rho(d\sqrt{1+w^2}-ew)}{w} & \frac{\rho(dw-e\sqrt{1+w^2})}{\sqrt{1+w^2}} \\ 0 & 0 \\ \sqrt{1+w^2} & w \end{pmatrix} \\
\blacksquare \mathfrak{m}_1 &= \delta \begin{pmatrix} O & 0 & -\sqrt{1+w^2} & -w \\ \sqrt{1+w^2} & 0 & 0 & 0 \\ -w & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \epsilon \begin{pmatrix} O & 0 & w & \sqrt{1+w^2} \\ -w & 0 & 0 & 0 \\ \sqrt{1+w^2} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
\blacksquare \begin{cases} u_1^*\alpha = \phi & u_1^*\beta = 0 & u_1^*\gamma = 0 \\ u_1^*\delta = x\phi & u_1^*\epsilon = y\phi \end{cases}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \left[\left(\begin{array}{c} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{\rho} \left(\begin{array}{cc} \sqrt{1+w^2} & -w \\ -w & \sqrt{1+w^2} \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} x \\ y \end{array} \right) - \left(\begin{array}{c} d \\ e \end{array} \right) \end{array} \right) \right] \\ & \blacksquare W_2 = [(1, 0, 0, 0)] \text{ por lo que no hay invariantes de orden 2} \end{aligned}$$

b) W_{1b}

$$\begin{aligned} & \blacksquare G_1^5 = \begin{pmatrix} \frac{\rho}{2}(1+c^2+d^2-e^2) + \frac{1}{2\rho} & \rho - \frac{1}{2\rho} - \frac{\rho}{2}(1+c^2+d^2-e^2) \\ \frac{\rho}{2}(1+c^2+d^2-e^2) - \frac{1}{2\rho} & \rho + \frac{1}{2\rho} - \frac{\rho}{2}(1+c^2+d^2-e^2) \\ c & -c \\ d & -d \\ e & -e \\ \frac{\rho(c\sqrt{1+v^2}-ev)}{\rho(c\sqrt{1+v^2}-ev)\sqrt{1+v^2}} & \frac{\rho d}{\rho d} & \frac{\rho(cv-e\sqrt{1+v^2})}{\rho(cv-e\sqrt{1+v^2})} \\ 0 & 0 & v \\ 0 & 1 & 0 \\ v & 0 & \sqrt{1+v^2} \end{pmatrix} \\ & \blacksquare m_1 = \delta \begin{pmatrix} O & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \epsilon \begin{pmatrix} O & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ & \blacksquare \begin{cases} u_1^* \alpha = \phi & u_1^* \beta = 0 & u_1^* \gamma = 0 \\ u_1^* \delta = x\phi & u_1^* \epsilon = y\phi \end{cases} \\ & \blacksquare \left[\left(\begin{array}{c} 1 \\ 0 \\ 1 \\ \frac{1}{\rho(v+\sqrt{1+v^2})} \left(\begin{array}{cc} \sqrt{1+v^2} & -v \\ -v & \sqrt{1+v^2} \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} x+\rho d \\ y-\rho d \end{array} \right) \end{array} \right) \right] \\ & \blacksquare W_2 = [(1, 0, 1, 0)] \text{ por lo que no hay invariantes de orden 2} \end{aligned}$$

c) W_{1c}

$$\begin{aligned} & \blacksquare G_1^5 = \begin{pmatrix} \frac{\rho}{2}(1+c^2+d^2-e^2) + \frac{1}{2\rho} & \rho - \frac{1}{2\rho} - \frac{\rho}{2}(1+c^2+d^2-e^2) \\ \frac{\rho}{2}(1+c^2+d^2-e^2) - \frac{1}{2\rho} & \rho + \frac{1}{2\rho} - \frac{\rho}{2}(1+c^2+d^2-e^2) \\ c & -c \\ d & -d \\ e & -e \\ \frac{\rho(c \cos \varphi + d \sin \varphi)}{\rho(c \cos \varphi + d \sin \varphi)} & \frac{\rho(-c \sin \varphi + d \cos \varphi)}{\rho(-c \sin \varphi + d \cos \varphi)} & -\rho e \\ \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ & \blacksquare m_1 = \delta \begin{pmatrix} O & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \epsilon \begin{pmatrix} O & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ & \blacksquare \begin{cases} u_1^* \alpha = 0 & u_1^* \beta = 0 & u_1^* \gamma = \phi \\ u_1^* \delta = x\phi & u_1^* \epsilon = y\phi \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \blacksquare \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ \frac{1}{\rho} \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - \rho c \\ y - \rho d \end{pmatrix} \end{pmatrix} \right] \\ & \blacksquare W_2 = [(0, 0, 1, 0, 0)] \text{ por lo que no hay invariantes de orden 2} \end{aligned}$$

3. Invariantes de orden 3

a) $W_{1a} \quad W_2$

$$\begin{aligned} & \blacksquare G_2^3 = \begin{pmatrix} \frac{\rho}{2}(1+c^2) + \frac{1}{2\rho} & \rho - \frac{1}{2\rho} - \frac{\rho}{2}(1+c^2) & \rho c & 0 & 0 \\ \frac{\rho}{2}(1+c^2) - \frac{1}{2\rho} & \rho + \frac{1}{2\rho} - \frac{\rho}{2}(1+c^2) & \rho c & 0 & 0 \\ c & -c & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{1+w^2} & w \\ 0 & 0 & 0 & w & \sqrt{1+w^2} \end{pmatrix} \\ & \blacksquare m_2 = \zeta \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \eta \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ & \blacksquare \begin{cases} u_2^* \alpha = \phi & u_2^* \beta = 0 & u_2^* \gamma = 0 \\ u_2^* \delta = 0 & u_2^* \epsilon = 0 \\ u_2^* \zeta = x\phi & u_2^* \eta = y\phi \end{cases} \\ & \blacksquare \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{\rho^2} \begin{pmatrix} \sqrt{1+w^2} & w \\ w & \sqrt{1+w^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \end{pmatrix} \right] \\ & \blacksquare \text{ Hay 4 secciones puntuales: } W_{3a} = [(1, 0, 0, 0, 0, 0)], W_{3b} = [(1, 0, 0, 0, 0, 1, 1)], W_{3c} = [(1, 0, 0, 0, 0, 1, 0)], W_{3d} = [(1, 0, 0, 0, 0, 0, 1)], \\ & \text{por lo que no hay invariantes de orden 3.} \end{aligned}$$

b) $W_{1b} \quad W_2$

$$\begin{aligned} & \blacksquare G_2^4 = \begin{pmatrix} \frac{\rho}{2}(1+c^2-e^2) + \frac{1}{2\rho} & \rho - \frac{1}{2\rho} - \frac{\rho}{2}(1+c^2-e^2) & \rho(c\sqrt{1+v^2}-ev) \\ \frac{\rho}{2}(1+c^2-e^2) - \frac{1}{2\rho} & \rho + \frac{1}{2\rho} - \frac{\rho}{2}(1+c^2-e^2) & \rho(c\sqrt{1+v^2}-ev) \\ c & -c & \sqrt{1+v^2} \\ 0 & 0 & 0 \\ e & -e & v \end{pmatrix} \\ & \quad \begin{pmatrix} 0 & \rho(cv - e\sqrt{1+v^2}) \\ 0 & \rho(cv - e\sqrt{1+v^2}) \\ 0 & v \\ 1 & 0 \\ 0 & \sqrt{1+v^2} \end{pmatrix} \\ & \blacksquare m_2 = \zeta \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

- $\begin{cases} u_2^* \alpha = \phi & u_2^* \beta = 0 & u_2^* \gamma = \phi \\ u_2^* \delta = 0 & u_2^* \epsilon = 0 \\ u_2^* \zeta = x\phi \end{cases}$
- $\left[(1, 0, 1, 0, 0, \frac{1}{\rho^2(v+\sqrt{1+v^2})}x) \right]$
- $W_{3a} = [(1, 0, 1, 0, 0, 0)], W_{3b} = [(1, 0, 1, 0, 0, 1)],$ por lo que no hay invariantes de orden 3.

c) $W_{1c} \ W_2$

- $G_2^3 = \begin{pmatrix} \frac{\rho}{2}(1-e^2) + \frac{1}{2\rho} & \rho - \frac{1}{2\rho} - \frac{\rho}{2}(1-e^2) & 0 & 0 & -\rho e \\ \frac{\rho}{2}(1-e^2) - \frac{1}{2\rho} & \rho + \frac{1}{2\rho} - \frac{\rho}{2}(1-e^2) & 0 & 0 & -\rho e \\ 0 & 0 & \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ 0 & 0 & \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ e & -e & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
- $m_2 = \zeta \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ 0 & 0 & \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ \cos \varphi & -\cos \varphi & 0 & 0 & 0 \\ \sin \varphi & -\sin \varphi & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} +$
- $\eta \begin{pmatrix} 0 & 0 & \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ \sin \varphi & -\sin \varphi & 0 & 0 & 0 \\ \cos \varphi & -\cos \varphi & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
- $\begin{cases} u_2^* \alpha = 0 & u_2^* \beta = 0 & u_2^* \gamma = \phi \\ u_2^* \delta = 0 & u_2^* \epsilon = 0 \\ u_2^* \zeta = x\phi & u_2^* \eta = y\phi \end{cases}$
- $\left[\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{\rho^2 \cos 2\varphi} \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \end{pmatrix} \right]$
- $W_{3a} = [(0, 0, 1, 0, 0, 0, 0)], \ W_{3b} = [(0, 0, 1, 0, 0, 1, 0)]$ luego no hay invariantes de orden 3

4. Invariantes de orden 4

a) $W_{1a} \ W_2 \ W_{3a}$

- $G_3 = G_2^3$
- $\begin{cases} u_2^* \alpha = \phi & u_2^* \beta = 0 & u_2^* \gamma = 0 \\ u_2^* \delta = 0 & u_2^* \epsilon = 0 \\ u_2^* \zeta = 0 & u_2^* \eta = 0 \end{cases}$

b) $W_{1a} \ W_2 \ W_{3b}$

- $G_3^2 = \begin{pmatrix} \frac{\rho}{2}(1+c^2) + \frac{1}{2\rho} & \rho - \frac{1}{2\rho} - \frac{\rho}{2}(1+c^2) & \rho c & 0 & 0 \\ \frac{\rho}{2}(1+c^2) - \frac{1}{2\rho} & \rho + \frac{1}{2\rho} - \frac{\rho}{2}(1+c^2) & \rho c & 0 & 0 \\ c & -c & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\rho^4+1}{2\rho^2} & \frac{\rho^4-1}{2\rho^2} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\rho^4-1}{2\rho^2} & \frac{\rho^4+1}{2\rho^2} \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned}
& \blacksquare \mathfrak{m}_3 = \xi \begin{pmatrix} 0 & & & \\ & 0 & & \\ & & 0 & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \\
& \blacksquare \begin{cases} u_3^* \alpha = \phi & u_3^* \beta = 0 & u_3^* \gamma = 0 \\ u_3^* \delta = 0 & u_3^* \epsilon = 0 \\ u_3^* \zeta = \phi & u_3^* \eta = \phi \\ u_3^* \xi = x\phi \end{cases} \\
& \blacksquare [(1, 0, 0, 0, 0, 1, 1, \frac{1}{\rho}x)] \\
& \blacksquare W_{4a} = [(1, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 0)] , W_{4b} = [(1, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1)]
\end{aligned}$$

c) W_{1a} W_2 W_{3c} y al mismo tiempo se considera el caso W_{1a} W_2 W_{3d} porque tienen el mismo estabilizador:

$$\begin{aligned}
& \blacksquare G_3^1 = \begin{pmatrix} 1 + \frac{c^2}{2} & -\frac{c^2}{2} & c & 0 & 0 \\ \frac{c^2}{2} & 1 - \frac{c^2}{2} & c & 0 & 0 \\ c & -c & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
& \blacksquare \mathfrak{m}_3 = \xi \begin{pmatrix} & 1 & & & \\ & & & & \\ 1 & & & & \\ & 0 & & & \\ & & 0 & & \\ & & & 0 & \end{pmatrix} + \iota \begin{pmatrix} 0 & & & & \\ & 0 & & & \\ & & 0 & & \\ & & & 1 & \\ & & & & 1 \end{pmatrix} \\
& \blacksquare \begin{cases} u_3^* \alpha = \phi & u_3^* \beta = 0 & u_3^* \gamma = 0 \\ u_3^* \delta = 0 & u_3^* \epsilon = 0 \\ u_3^* \zeta = \varepsilon \phi & u_3^* \eta = \bar{\varepsilon} \phi \\ u_3^* \xi = x\phi & u_3^* \iota = y\phi \end{cases} \quad \text{siendo } \varepsilon = 0, 1 \\
& \blacksquare [(1, 0, 0, 0, 0, \varepsilon, \bar{\varepsilon}, x - c, y)] \\
& \blacksquare W_4 = [(1, 0, 0, 0, 0, \varepsilon, \bar{\varepsilon}, 0, \kappa)] \text{ que es una sección unidimensional,} \\
& \text{lo que implica que } \kappa \text{ es un invariante de orden 4, la curvatura.}
\end{aligned}$$

d) W_{1b} W_2 W_{3a}

$$\begin{aligned}
& \blacksquare G_3 = G_2^4 \\
& \blacksquare \begin{cases} u_2^* \alpha = \phi & u_2^* \beta = 0 & u_2^* \gamma = \phi \\ u_2^* \delta = 0 & u_2^* \epsilon = 0 \\ u_2^* \zeta = 0 \end{cases}
\end{aligned}$$

e) W_{1b} W_2 W_{3b}

$$\begin{aligned}
& \blacksquare G_3^3 = \begin{pmatrix} \frac{\rho}{2}(1+c^2-e^2) + \frac{1}{2\rho} & \rho - \frac{1}{2\rho} - \frac{\rho}{2}(1+c^2-e^2) & \frac{\rho^4(c+e)+c-e}{2\rho} \\ \frac{\rho}{2}(1+c^2-e^2) - \frac{1}{2\rho} & \rho + \frac{1}{2\rho} - \frac{\rho}{2}(1+c^2-e^2) & \frac{\rho^4(c+e)+c-e}{2\rho} \\ c & -c & \frac{1+\rho^4}{2\rho^2} \\ 0 & 0 & 0 \\ e & -e & \frac{1-\rho^4}{2\rho^2} \\ 0 & \frac{-\rho^4(c+e)+c-e}{2\rho} & \\ 0 & \frac{-\rho^4(c+e)+c-e}{2\rho} & \\ 0 & \frac{1-\rho^4}{2\rho^2} & \\ 1 & 0 & \\ 0 & \frac{1+\rho^4}{2\rho^2} & \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \blacksquare \mathfrak{m}_3 = \eta \begin{pmatrix} 0 & & & \\ & 0 & & \\ & & 0 & 1 \\ & & 1 & 0 \end{pmatrix} \\
& \blacksquare \begin{cases} u_3^* \alpha = \phi & u_3^* \beta = 0 & u_3^* \gamma = \phi \\ u_3^* \delta = 0 & u_3^* \epsilon = 0 \\ u_3^* \zeta = \phi \\ u_3^* \eta = x\phi \end{cases} \\
& \blacksquare [(1, 0, 1, 0, 0, 1, \rho(x - \rho(c + e)))] \\
& \blacksquare W_4 = [(1, 0, 1, 0, 0, 1, 0)]
\end{aligned}$$

f) $W_{1c} \quad W_2 \quad W_{3a}$

$$\begin{aligned}
& \blacksquare G_3 = G_2^3 \\
& \blacksquare \begin{cases} u_2^* \alpha = 0 & u_2^* \beta = 0 & u_2^* \gamma = \phi \\ u_2^* \delta = 0 & u_2^* \epsilon = 0 \\ u_2^* \zeta = 0 & u_2^* \eta = 0 \end{cases}
\end{aligned}$$

g) $W_{1c} \quad W_2 \quad W_{3b}$

$$\begin{aligned}
& \blacksquare G_3^1 = \begin{pmatrix} \frac{2-e^2}{2} & \frac{e^2}{2} & 0 & 0 & -e \\ -\frac{e^2}{2} & 1 + \frac{e^2}{2} & 0 & 0 & -e \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ e & -e & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
& \blacksquare \mathfrak{m}_3 = \xi \begin{pmatrix} 0 & & & & \\ & 0 & & & \\ & & 1 & & \\ & & -1 & & \\ & & & 0 & \end{pmatrix} + \iota \begin{pmatrix} & 1 & & & \\ 1 & & & & \\ & & 0 & & \\ & & & 0 & \\ & & & & 0 \end{pmatrix} \\
& \blacksquare \begin{cases} u_3^* \alpha = 0 & u_3^* \beta = 0 & u_3^* \gamma = \phi \\ u_3^* \delta = 0 & u_3^* \epsilon = 0 \\ u_3^* \zeta = \phi & u_3^* \eta = 0 \\ u_3^* \xi = x\phi & u_3^* \iota = y\phi \end{cases} \\
& \blacksquare [(0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, x - e, y)] \\
& \blacksquare W_4 = [(0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, \kappa)] \text{ siendo } \kappa \text{ un invariante de orden 4:} \\
& \text{la curvatura.}
\end{aligned}$$

5. Invariantes de orden 5

a) $W_{1a} \quad W_2 \quad W_{3b} \quad W_{4a}$

$$\begin{aligned}
& \blacksquare G_4 = G_3^2 \\
& \blacksquare \begin{cases} u_3^* \alpha = \phi & u_3^* \beta = 0 & u_3^* \gamma = 0 \\ u_3^* \delta = 0 & u_3^* \epsilon = 0 \\ u_3^* \zeta = \phi & u_3^* \eta = \phi \\ u_3^* \xi = 0 \end{cases}
\end{aligned}$$

b) $W_{1a} \quad W_2 \quad W_{3b} \quad W_{4b}$

$$\blacksquare G_4^1 = \begin{pmatrix} 1 + \frac{c^2}{2} & -\frac{c^2}{2} & c & 0 & 0 \\ \frac{c^2}{2} & 1 - \frac{c^2}{2} & c & 0 & 0 \\ c & -c & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\blacksquare \mathfrak{m}_4 = \iota \begin{pmatrix} & & & 1 \\ & 1 & & \\ & & 0 & \\ & & & 0 \\ & & & & 0 \end{pmatrix}$$

$$\blacksquare \begin{cases} u_4^* \alpha = \phi & u_4^* \beta = 0 & u_4^* \gamma = 0 \\ u_4^* \delta = 0 & u_4^* \epsilon = 0 \\ u_4^* \zeta = \phi & u_4^* \eta = \phi \\ u_4^* \xi = \phi \\ u_4^* \iota = x\phi \end{cases}$$

$$\blacksquare [(1, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, x - c)]$$

$$\blacksquare W_5 = [(1, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 0)]$$

$$c) \quad W_{1a} \quad W_2 \quad W_{3c} \quad W_4 \quad y \quad W_{1a} \quad W_2 \quad W_{3d} \quad W_4$$

$$\blacksquare G_4 = I$$

$$\blacksquare \mathfrak{m}_4 = \lambda \begin{pmatrix} & & & 0 \\ & & 1 & \\ & -1 & & \\ & & & 0 \\ & & & & 0 \end{pmatrix}$$

$$\blacksquare \begin{cases} u_4^* \alpha = \phi & u_4^* \beta = 0 & u_4^* \gamma = 0 \\ u_4^* \delta = 0 & u_4^* \epsilon = 0 \\ u_4^* \zeta = \varepsilon \phi & u_4^* \eta = \bar{\varepsilon} \phi \\ u_4^* \xi = 0 & u_4^* \iota = \kappa \phi \\ u_4^* \lambda = \tau \phi \end{cases} \quad \text{siendo } \varepsilon = 1 \text{ en el caso } 3c \text{ y}$$

$\varepsilon = 0$ en el caso $3d$; y τ la torsión, invariante de orden 5.

$$d) \quad W_{1b} \quad W_2 \quad W_{3b} \quad W_4$$

$$\blacksquare G_4^2 = \begin{pmatrix} \frac{\rho}{2} + \frac{1}{2\rho} & \frac{\rho}{2} - \frac{1}{2\rho} & \frac{c}{\rho} & 0 & \frac{c}{\rho} \\ \frac{\rho}{2} - \frac{1}{2\rho} & \frac{\rho}{2} + \frac{1}{2\rho} & \frac{c}{\rho} & 0 & \frac{c}{\rho} \\ c & -c & \frac{1+\rho^4}{2\rho^2} & 0 & \frac{1-\rho^4}{2\rho^2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -c & c & \frac{1-\rho^4}{2\rho^2} & 0 & \frac{1+\rho^4}{2\rho^2} \end{pmatrix}$$

$$\blacksquare \mathfrak{m}_4 = \xi \begin{pmatrix} & & & 0 & 1 \\ & & 0 & & 1 \\ & & & 0 & \\ & & & & 0 \\ -1 & 1 & & & 0 \end{pmatrix}$$

$$\blacksquare \begin{cases} u_4^* \alpha = \phi & u_4^* \beta = 0 & u_4^* \gamma = \phi \\ u_4^* \delta = 0 & u_4^* \epsilon = 0 \\ u_4^* \zeta = \phi \\ u_4^* \eta = 0 \\ u_4^* \xi = x\phi \end{cases}$$

$$\blacksquare [(1, 0, 1, 0, 0, 1, 0, \frac{1}{2\rho^2}(x(1+\rho^4)+1-\rho^2))]$$

$$\blacksquare W_5 = [(1, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0)]$$

$$e) \quad W_{1c} \quad W_2 \quad W_{3b} \quad W_4$$

$$\blacksquare G_4 = I$$

$$\begin{aligned}
& \blacksquare \mathfrak{m}_4 = \lambda \begin{pmatrix} 0 & & & & \\ & 0 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & 0 & \\ 1 & & & & \end{pmatrix} \\
& \blacksquare \begin{cases} u_4^* \alpha = 0 & u_4^* \beta = 0 & u_4^* \gamma = \phi \\ u_4^* \delta = 0 & u_4^* \epsilon = 0 \\ u_4^* \zeta = \phi & u_4^* \eta = 0 \\ u_4^* \xi = 0 & u_4^* \iota = \kappa \phi \\ u_4^* \lambda = \tau \phi \end{cases} \quad \text{siendo } \tau \text{ la torsión, invariante} \\
& \text{de orden 5.}
\end{aligned}$$

6. Invariantes de orden 6

a) $W_{1a} \ W_2 \ W_{3b} \ W_{4b} \ W_5$

$$\begin{aligned}
& \blacksquare G_5 = I \\
& \blacksquare \mathfrak{m}_5 = \lambda \begin{pmatrix} 0 & & & & \\ & 1 & & & \\ & -1 & & & \\ & & 0 & & \\ & & & 0 & \end{pmatrix} \\
& \blacksquare \begin{cases} u_5^* \alpha = \phi & u_5^* \beta = 0 & u_5^* \gamma = 0 \\ u_5^* \delta = 0 & u_5^* \epsilon = 0 \\ u_5^* \zeta = \phi & u_5^* \eta = \phi \\ u_5^* \xi = \phi \\ u_5^* \iota = 0 \\ u_5^* \lambda = \kappa \phi \end{cases} \quad \text{siendo } \kappa \text{ la curvatura, invariante} \\
& \text{ante de orden 6}
\end{aligned}$$

b) $W_{1b} \ W_2 \ W_{3b} \ W_4 \ W_5$

$$\begin{aligned}
& \blacksquare G_5^1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & c & 0 & c \\ 0 & 1 & c & 0 & c \\ c & -c & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -c & c & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
& \blacksquare \mathfrak{m}_5 = \iota \begin{pmatrix} & 1 & & & \\ 1 & & & & \\ & & & -2 & \\ & & 0 & & \\ & & & -2 & \end{pmatrix} \\
& \blacksquare \begin{cases} u_5^* \alpha = \phi & u_5^* \beta = 0 & u_5^* \gamma = \phi \\ u_5^* \delta = 0 & u_5^* \epsilon = 0 \\ u_5^* \zeta = \phi \\ u_5^* \eta = 0 \\ u_5^* \xi = 0 \\ u_5^* \iota = x\phi \end{cases} \\
& \blacksquare [(1, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, x)] \text{ que es la identidad. En este caso, hay un invariante de orden 6.}
\end{aligned}$$

		<i>ref. F.</i>	<i>inv.</i>	
I	$\widetilde{II}_a$	1		<i>plano</i>
	$\widetilde{II}_b$	1	$r_2 = cte$	<i>esfera</i>
	II_c	3	r_2	<i>minimales</i>
	II_d	2	r_2	<i>cilindro</i>
	$\widetilde{III}_a$	3	r_2, t_2, x_3, y_3	
	III_b	3		

Se considera $\mathbb{R}^3$ con origen en $m_0 = (0, 0, 0)$, sobre el que actua transitivamente el producto semidirecto $SO(3, \mathbb{R}) \ltimes \mathbb{R}^3$ de dimensión 6.

1. Invariantes de orden 1

- $G_0^3 = \{A \in SO(3, \mathbb{R})\}$
- $\mathfrak{m}_0 = \theta^1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \theta^2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \theta^3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$
- $\{u_0^* \theta^1 = x_i^1 \phi^i \quad u_0^* \theta^2 = x_i^2 \phi^i \quad u_0^* \theta^3 = x_i^3 \phi^i \quad i = 1, 2\}$
- $\left[\begin{pmatrix} \tilde{x}_1^1 & \tilde{x}_2^1 \\ \tilde{x}_1^2 & \tilde{x}_2^2 \\ \tilde{x}_1^3 & \tilde{x}_2^3 \end{pmatrix} \right] = A^{-1} \left[\begin{pmatrix} x_1^1 & x_2^1 \\ x_1^2 & x_2^2 \\ x_1^3 & x_2^3 \end{pmatrix} \right]$
- $W_1 = \left[\begin{pmatrix} I & \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right]$ No hay invariantes de orden 1

2. Invariantes de orden 2

- $G_1^1 \simeq \{B \in O(2, \mathbb{R})\}$
- $\mathfrak{m}_1 = \alpha \begin{pmatrix} & -1 \\ 0 & \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 & \\ & -1 \\ 1 & \end{pmatrix}$
- $\begin{cases} u_1^* \theta^1 = \phi^1 & u_1^* \theta^2 = \phi^2 & u_1^* \theta^3 = 0 \\ u_1^* \alpha = x\phi^1 + y\phi^2 & u_1^* \beta = y\phi^1 + z\phi^2 \end{cases}$ donde las condiciones de compatibilidad dadas por la primera fila, obligan a tener la matriz simétrica $\begin{pmatrix} x & y \\ y & z \end{pmatrix}$
- $\left[\begin{pmatrix} I & & \\ & 0 & 0 \\ |B| B^T \begin{pmatrix} x & y \\ y & z \end{pmatrix} B \end{pmatrix} \right]$
- $W_{2a} = 0$; $W_{2b} = rI / r > 0$ invariante de orden 2; $W_{2c} = \begin{pmatrix} -r & 0 \\ 0 & r \end{pmatrix} / r > 0$ invariante de orden 2; $W_{2d} = \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix} / |r| < t$ invariantes de orden 2.

3. Invariantes de orden 3

- a) $W_{2a} = 0$
- $G_2 = G_1^1$

- $\begin{cases} u_1^* \theta^1 = \phi^1 & u_1^* \theta^2 = \phi^2 & u_1^* \theta^3 = 0 \\ u_1^* \alpha = 0 & u_1^* \beta = 0 \end{cases}$
- Integrando dicha distribución sale un plano

b) $W_{2b} = rI / r > 0$

- $G_2^1 \simeq SO(2, \mathbb{R})$
- $\begin{cases} u_1^* \theta^1 = \phi^1 & u_1^* \theta^2 = \phi^2 & u_1^* \theta^3 = 0 \\ u_1^* \alpha = r\phi^1 & u_1^* \beta = r\phi^2 \end{cases} \quad r = cte$
- Integrando dicha distribución sale una esfera de radio r

c) $W_{2c} = \begin{pmatrix} -r & 0 \\ 0 & r \end{pmatrix} / r > 0$

- $G_2^0 = \{\pm I, \pm \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\} \subset G_1^1$
- $m_2 = \gamma \begin{pmatrix} & -1 \\ 1 & \\ & 0 \end{pmatrix}$
- $\begin{cases} u_2^* \theta^1 = \phi^1 & u_2^* \theta^2 = \phi^2 & u_2^* \theta^3 = 0 \\ u_2^* \alpha = -r\phi^1 & u_2^* \beta = r\phi^2 \\ u_2^* \gamma = x\phi^1 + y\phi^2 \end{cases}$
- $\left[\begin{pmatrix} I \\ 0 & 0 \\ -r & 0 \\ 0 & r \\ |C|(x, y) C \end{pmatrix} \right]$ siendo $C \in G_2^0$
- $W_{3a} = \{(0, 0)\}$ sin invariantes; $W_{3b} = \{(x, y) / y \geq 0\} - \{(0, 0)\}$ y aparecen 2 invariantes de orden 3.

d) $W_{2d} = \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix} / |r| < t$

- $G_2^0 = \pm I \subset G_1^1$
- $m_2 = \gamma \begin{pmatrix} & -1 \\ 1 & \\ & 0 \end{pmatrix}$
- $\begin{cases} u_2^* \theta^1 = \phi^1 & u_2^* \theta^2 = \phi^2 & u_2^* \theta^3 = 0 \\ u_2^* \alpha = r\phi^1 & u_2^* \beta = t\phi^2 \\ u_2^* \gamma = x\phi^1 + y\phi^2 \end{cases}$
- $\left[\begin{pmatrix} I \\ 0 & 0 \\ r & 0 \\ 0 & t \\ |C|(x, y) C \end{pmatrix} \right]$ siendo $C \in G_2^0$
- $W_{3a} = \{(0, 0)\}$ sin invariantes; $W_{3b} = \{(x, y) / y \geq 0\} - \{(0, 0)\}$ y aparecen 2 invariantes de orden 3.

4. Invariantes de orden 4

a) $W_{2c} \quad W_{3a}$

- $G_3 = G_2^0$
- Las ecuaciones de compatibilidad imponen que $r = 0$ lo que quiere decir que este caso no existe.

b) $W_{2c} \ W_{3b}$

- $G_3 = I$
- $\begin{cases} u_3^* \theta^1 = \phi^1 & u_3^* \theta^2 = \phi^2 & u_3^* \theta^3 = 0 \\ u_3^* \alpha = -r\phi^1 & u_3^* \beta = r\phi^2 \\ u_3^* \gamma = x\phi^1 + y\phi^2 \end{cases}$
- Las ecuaciones de compatibilidad quedan:

$$\begin{cases} r_{,1} = -2yr \\ r_{,2} = 2xr \\ r^2 = x^2 + y^2 - x_{,2} + y_{,1} \end{cases}$$

c) $W_{2d} \ W_{3a}$

- $G_3^0 = G_2^0$
- $\begin{cases} u_3^* \theta^1 = \phi^1 & u_3^* \theta^2 = \phi^2 & u_3^* \theta^3 = 0 \\ u_3^* \alpha = 0 & u_3^* \beta = t\phi^2 \\ u_3^* \gamma = 0 \end{cases}$
- Las ecuaciones de compatibilidad quedan: $r = 0$; $t_{,1} = 0$ por lo que sólo hay un invariante de orden 2.
- La integración de la distribución anterior, proporciona un cilindro

d) $W_{2d} \ W_{3b}$

- $G_3 = I$
- $\begin{cases} u_3^* \theta^1 = \phi^1 & u_3^* \theta^2 = \phi^2 & u_3^* \theta^3 = 0 \\ u_3^* \alpha = r\phi^1 & u_3^* \beta = t\phi^2 \\ u_3^* \gamma = x\phi^1 + y\phi^2 \end{cases}$
- Las ecuaciones de compatibilidad quedan:

$$\begin{cases} d\phi^1 = x \phi^1 \wedge \phi^2 \\ d\phi^2 = y \phi^1 \wedge \phi^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} r_{,2} = x(r - t) \\ t_{,1} = y(r - t) \\ rt = -(x^2 + y^2) + x_{,2} - y_{,1} \end{cases} \quad (1)$$

- La matriz de Cartan queda:

$$\begin{pmatrix} 0 & -x\phi^1 - y\phi^2 & -r\phi^1 \\ x\phi^1 + y\phi^2 & 0 & -t\phi^2 \\ r\phi^1 & t\phi^2 & 0 \end{pmatrix}$$

La manera de reconocer los invariantes del caso $W_{2d} \ W_{3b}$ es utilizando el método clásico del apéndice A, donde se tiene que $\omega_1^3 \wedge \omega_2^3 = K\phi^1 \wedge \phi^2$ siendo K la curvatura de Gauss. Aplicando esta fórmula a la matriz de Cartan resulta que $K = rt$. Asimismo, de $\phi^1 \wedge \omega_2^3 - \phi^2 \wedge \omega_1^3 = 2H\phi^1 \wedge \phi^2$ resulta que la curvatura media vale $H = \frac{r+t}{2}$. La ecuación de Gauss es $d\omega_1^2 = -\omega_1^3 \wedge \omega_2^3$ y al sustituir los valores de la matriz de Cartan sale la tercera ecuación de 1. La ecuación de Mainardi-Codazzi es $\begin{cases} d\omega_1^3 = -\omega_2^3 \wedge \omega_1^2 \\ d\omega_2^3 = -\omega_1^2 \wedge \omega_1^3 \end{cases}$ que en este caso salen las dos primeras ecuaciones de 1.

Recíprocamente, entrando con la matriz de Cartan del caso $W_{2d} \ W_{3b}$ en el método de las ecuaciones reducidas del apéndice A, se encuentra que:

$$b_0 = \frac{r}{2} \quad b_1 = \frac{t}{2}$$

$$c_0 = \frac{1}{6}r_{,1} \quad c_1 = \frac{1}{2}r_{,2} = \frac{x}{2}(r-t) \quad c_2 = \frac{1}{2}t_{,1} = \frac{y}{2}(r-t) \quad c_3 = \frac{1}{6}t_{,2}$$

y la tercera ecuación de 1, que es la ecuación de Gauss como se acaba de ver, da lugar a la ecuación 33 y las dos primeras ecuaciones de 1, que son las ecuaciones de Mainardi - Codazzi según se acaba de ver, dan lugar a las ecuaciones 32

(Chapter head:) Superficies en geometría equiafín

				<i>ref. F.</i>	<i>inv</i>	
<i>I</i>	$\widetilde{II}_a$			1		<i>plano</i>
	II_b	III_a	$\widetilde{IV}_a$	3		<i>cilindro parabólico</i>
			IV_b	$\widetilde{V}$	4	κ_5
		III_b	IV	$\widetilde{V}_a$	4	κ_5
			V_b	5	κ_4, τ_5, ρ_6	
	II_c	III_a	$\widetilde{IV}$	3	$\kappa_4 = cte$	<i>cuádricas de revolución</i>
		III_b		3	κ_3, τ_4, ρ_4	
	II_d	III_a	$\widetilde{IV}$	3	κ_4	
		III_b		3	κ_3, τ_4, ρ_4	

Se considera $\mathbb{R}^3$ con origen $m_0 = (0, 0, 0)$, sobre el que actúa transitivamente $G^{11} = SL(3, \mathbb{R}) \otimes \mathbb{R}^3$

1. Invariantes de orden 1

- $G_0^8 = \{A \in SL(3, \mathbb{R})\}$
- $m_0 = \theta^1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \theta^2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \theta^3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$
- $\{u_0^* \theta^1 = x_i^1 \phi^i \quad u_0^* \theta^2 = x_i^2 \phi^i \quad u_0^* \theta^3 = x_i^3 \phi^i \quad i = 1, 2 \quad \text{donde no se han impuesto condiciones de compatibilidad.}\}$
- $\left[\begin{pmatrix} \widetilde{x}_1^1 & \widetilde{x}_2^1 \\ \widetilde{x}_1^2 & \widetilde{x}_2^2 \\ \widetilde{x}_1^3 & \widetilde{x}_2^3 \end{pmatrix} \right] = A^{-1} \left[\begin{pmatrix} x_1^1 & x_2^1 \\ x_1^2 & x_2^2 \\ x_1^3 & x_2^3 \end{pmatrix} \right]$
- $W_1 = \left[\begin{pmatrix} I & \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right]$ No hay invariantes de orden 1

2. Invariantes de orden 2

- $G_1^6 = \left\{ \begin{pmatrix} B & a \\ 0 & 0 & \frac{1}{|B|} \end{pmatrix} / B \in GL(2, \mathbb{R}) \right\}$
- $m_1 = \alpha \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$
- $\begin{cases} u_1^* \theta^1 = \phi^1 & u_1^* \theta^2 = \phi^2 & u_1^* \theta^3 = 0 \\ u_1^* \alpha = x_1^4 \phi^1 + x_2^4 \phi^2 & u_1^* \beta = x_2^4 \phi^1 + x_2^5 \phi^2 \end{cases}$ donde las condiciones de compatibilidad dadas por la primera fila, obligan a que $x_1^5 = x_2^4$

- $\left[\begin{pmatrix} I & & \\ & 0 & 0 \\ |B| B^T & \begin{pmatrix} x_1^4 & x_2^4 \\ x_2^4 & x_2^5 \end{pmatrix} & B \end{pmatrix} \right]$ Nótese que se tiene una estructura conforme dada por $\begin{pmatrix} x_1^4 & x_2^4 \\ x_2^4 & x_2^5 \end{pmatrix}$
- $W_{2a} = \left[\begin{pmatrix} I & \\ & 0 & 0 \\ & O \end{pmatrix} \right]$ caso de puntos planos, $W_{2b} = \left[\begin{pmatrix} I & \\ & 0 & 0 \\ & 1 & 0 \\ & 0 & 0 \end{pmatrix} \right]$
- caso de puntos parabólicos, $W_{2c} = \left[\begin{pmatrix} I & \\ & 0 & 0 \\ & I \end{pmatrix} \right]$ caso de pun-
- tos elípticos, $W_{2d} = \left[\begin{pmatrix} I & \\ & 0 & 0 \\ & 1 & 0 \\ & 0 & -1 \end{pmatrix} \right]$ caso de puntos hiperbólicos.
- Ninguno de ellos tiene invariantes de orden 2.

2. Puntos planos

3 Invariantes de orden 3

- $G_2 = G_1^6$
- $\begin{cases} u_1^* \theta^1 = \phi^1 & u_1^* \theta^2 = \phi^2 & u_1^* \theta^3 = 0 \\ u_1^* \alpha = 0 & u_1^* \beta = 0 \end{cases}$

3. Puntos parabólicos

3 Invariantes de orden 3

- $G_2^4 = \begin{pmatrix} a & 0 & c \\ b & a^{-3} & d \\ 0 & 0 & a^2 \end{pmatrix}$
- $\mathfrak{m}_2 = \gamma \begin{pmatrix} & 1 \\ 0 & \\ & 0 \end{pmatrix} + \delta \begin{pmatrix} 1 & & \\ & -1 & \\ & & 0 \end{pmatrix}$
- $\begin{cases} u_2^* \theta^1 = \phi^1 & u_2^* \theta^2 = \phi^2 & u_2^* \theta^3 = 0 \\ u_2^* \alpha = \phi^1 & u_2^* \beta = 0 \\ u_2^* \gamma = 2x_2^7 \phi^1 & u_2^* \delta = x_1^7 \phi^1 + x_2^7 \phi^2 \end{cases}$
- $\left[\begin{pmatrix} I & & \\ & 0 & 0 \\ & 1 & 0 \\ & 0 & 0 \\ & \frac{2}{a^3} x_2^7 & 0 \\ ax_1^7 + 3bx_2^7 - \frac{3c}{2a} & \frac{1}{a^3} x_2^7 \end{pmatrix} \right]$
- $W_{3a} = \{x_1^7 = x_2^7 = 0\}$ caso de puntos cilíndricos, $W_{3b} = \{x_1^7 = 0, x_2^7 = 1\}$ caso genérico

3.1. Puntos cilíndricos

4 Invariantes de orden 4

$$\begin{aligned}
 & \blacksquare G_3^3 = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ b & a^{-3} & d \\ 0 & 0 & a^2 \end{pmatrix} \\
 & \blacksquare \mathfrak{m}_3 = \epsilon \begin{pmatrix} & & 1 \\ & 0 & \\ 0 & & \end{pmatrix} \\
 & \blacksquare \begin{cases} u_3^* \theta^1 = \phi^1 & u_3^* \theta^2 = \phi^2 & u_3^* \theta^3 = 0 \\ u_3^* \alpha = \phi^1 & u_3^* \beta = 0 \\ u_3^* \gamma = 0 & u_3^* \delta = 0 \\ u_3^* \epsilon = x_1^8 \phi^1 \end{cases} \\
 & \blacksquare \left[\begin{pmatrix} I & & \\ 0 & 0 & \\ 1 & 0 & \\ 0 & 0 & \\ 0 & 0 & \\ 0 & 0 & \\ a^2 x_1^8 & 0 & \end{pmatrix} \right] \\
 & \blacksquare W_{4a} = \{x_1^8 = 0\}, W_{4b} = \{x_2^8 = 1\}
 \end{aligned}$$

5 Invariantes de orden 5

a) W_{4a}

$$\begin{aligned}
 & \blacksquare G_4 = G_3^3 \\
 & \blacksquare \begin{cases} u_3^* \theta^1 = \phi^1 & u_3^* \theta^2 = \phi^2 & u_3^* \theta^3 = 0 \\ u_3^* \alpha = \phi^1 & u_3^* \beta = 0 \\ u_3^* \gamma = 0 & u_3^* \delta = 0 \\ u_3^* \epsilon = 0 \end{cases}
 \end{aligned}$$

b) W_{4b}

$$\begin{aligned}
 & \blacksquare G_4^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ b & 1 & d \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
 & \blacksquare \mathfrak{m}_4 = \zeta \begin{pmatrix} 1 & & \\ & -3 & \\ & & 2 \end{pmatrix} \\
 & \blacksquare \begin{cases} u_4^* \theta^1 = \phi^1 & u_4^* \theta^2 = \phi^2 & u_4^* \theta^3 = 0 \\ u_4^* \alpha = \phi^1 & u_4^* \beta = 0 \\ u_4^* \gamma = 0 & u_4^* \delta = 0 \\ u_4^* \epsilon = \phi^1 \\ u_4^* \zeta = x_1^9 \phi^1 \end{cases} \\
 & \blacksquare \text{La acción adjunta sale la identidad, por lo que hay un invariante de orden 5: } \kappa = x_1^9.
 \end{aligned}$$

3.2. Caso genérico

4 Invariantes de orden 4

- $G_3^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & c \\ c/2 & 1 & d \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
- $\mathfrak{m}_3 = \epsilon \begin{pmatrix} & 1 \\ 0 & \end{pmatrix} + \zeta \begin{pmatrix} 1 & \\ & -3 \\ & & 2 \end{pmatrix}$
- $\begin{cases} u_3^* \theta^1 = \phi^1 & u_3^* \theta^2 = \phi^2 & u_3^* \theta^3 = 0 \\ u_3^* \alpha = \phi^1 & u_3^* \beta = 0 \\ u_3^* \gamma = 2\phi^1 & u_3^* \delta = \phi^2 \\ u_3^* \epsilon = x_1^8 \phi^1 + 2x_1^9 \phi^2 & u_3^* \zeta = x_1^9 \phi^1 - \phi^2 \end{cases}$
- $\left[\begin{pmatrix} I & & \\ & 0 & 0 \\ & 1 & 0 \\ & 0 & 0 \\ & 2 & 0 \\ & 0 & 1 \\ x_1^8 + 4cx_1^9 + 4d - c^2 & 2x_1^9 \\ x_1^9 & -1 \end{pmatrix} \right]$
- $W_4 = \{x_1^8 = 0\}$ que es una sección unidimensional porque x_1^9 está libre, por lo que aparece la curvatura κ como invariante de orden 4.

5 Invariantes de orden 5

- $G_4^1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & c \\ c/2 & 1 & c^2/4 - \kappa c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ Este subgrupo de isotropía depende del valor de la curvatura.
- $\mathfrak{m}_4 = \eta \begin{pmatrix} 0 & \\ & 1 \\ & & 0 \end{pmatrix}$
- $\begin{cases} u_4^* \theta^1 = \phi^1 & u_4^* \theta^2 = \phi^2 & u_4^* \theta^3 = 0 \\ u_4^* \alpha = \phi^1 & u_4^* \beta = 0 \\ u_4^* \gamma = 2\phi^1 & u_4^* \delta = \phi^2 \\ u_4^* \epsilon = 2\kappa \phi^2 & u_4^* \zeta = \kappa \phi^1 - \phi^2 \\ u_4^* \eta = x_1^{10} \phi^1 - (\kappa^2 + \frac{1}{2}\kappa_{,1}) \phi^2 \end{cases}$ y además, las condiciones de compatibilidad imponen que $\kappa_{,2} = -4\kappa$
- $\left[\begin{pmatrix} I & & \\ & 0 & 0 \\ & 1 & 0 \\ & 0 & 0 \\ & 2 & 0 \\ & 0 & 1 \\ & 0 & 2\kappa \\ & \kappa & -1 \\ x_1^{10} + \frac{5}{2}\kappa^2 c - \frac{3}{4}\kappa c^2 - \kappa_{,1} \frac{c}{4} & -\kappa^2 - \frac{1}{2}\kappa_{,1} - 3\kappa c \end{pmatrix} \right]$ Esta acción se entiende mejor poniendo $x = x_1^{10}$, $y = -(\kappa^2 + \frac{1}{2}\kappa_{,1})$, porque entonces resulta $\begin{cases} \tilde{x} = x + \frac{c}{2}y + 3\kappa^2 c - \frac{3}{4}\kappa c^2 \\ \tilde{y} = y - 3\kappa c \end{cases}$
- $W_{5a} = \{\kappa = 0\}$ que es una sección unidimensional y a pesar de que este invariante deja de aparecer, hay otro que vuelve a ser nombrado

κ pues es la curvatura para este caso, de orden 5; $W_{5b} = \{(x, 0)\}$ siendo $\kappa \neq 0$, de donde resulta la torsión τ como invariante de orden 5

6 Invariantes de orden 6

a) W_{5a}

$$\begin{aligned} & \blacksquare G_5 = G_4^1 \\ & \blacksquare \begin{cases} u_4^* \theta^1 = \phi^1 & u_4^* \theta^2 = \phi^2 & u_4^* \theta^3 = 0 \\ u_4^* \alpha = \phi^1 & u_4^* \beta = 0 \\ u_4^* \gamma = 2\phi^1 & u_4^* \delta = \phi^2 \\ u_4^* \epsilon = 0 & u_4^* \zeta = -\phi^2 \\ u_4^* \eta = \kappa \phi^1 \end{cases} \end{aligned}$$

b) W_{5b}

$$\begin{aligned} & \blacksquare G_5 = I \\ & \blacksquare m_5 = \xi \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -2\kappa \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ & \blacksquare \begin{cases} u_5^* \theta^1 = \phi^1 & u_5^* \theta^2 = \phi^2 & u_5^* \theta^3 = 0 \\ u_5^* \alpha = \phi^1 & u_5^* \beta = 0 \\ u_5^* \gamma = 2\phi^1 & u_5^* \delta = \phi^2 \\ u_5^* \epsilon = 2\kappa \phi^2 & u_5^* \zeta = \kappa \phi^1 - \phi^2 \\ u_5^* \eta = \tau \phi^1 \\ u_5^* \xi = \left(\frac{\tau_{,2}}{6\kappa} + \frac{\tau}{\kappa} - \kappa \rho\right) \phi^1 + \rho \phi^2 \end{cases} \quad \text{cumpliéndose además que} \\ & \begin{cases} \kappa_{,1} = -2\kappa^2 \\ \kappa_{,2} = -4\kappa \end{cases} \\ & \blacksquare \text{Dado que el subgrupo de isotropía es la identidad, aparece un nuevo invariante } \rho \text{ de orden 6} \\ & \blacksquare \text{Las ecuaciones de compatibilidad quedan } \begin{cases} d\phi^1 = -2\phi^1 \wedge \phi^2 \\ d\phi^2 = (3\kappa + \rho)\phi^1 \wedge \phi^2 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\rho_{,1} + \kappa \rho_{,2} + (\kappa_{,2} + 5\kappa)\rho + \rho^2 = \frac{2\tau_{,2}}{3\kappa} + \frac{4\tau}{\kappa} + \left(\frac{\tau_{,2}}{6\kappa}\right)_{,2} + \left(\frac{\tau}{\kappa}\right)_{,2}$$

4. Puntos elípticos

3 Invariantes de orden 3

$$\begin{aligned} & \blacksquare G_2^3 = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & c \\ \sin \varphi & \cos \varphi & d \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ Este subgrupo de isotropía determi-} \\ & \text{na una métrica riemanniana de la estructura conforme anteriormente} \\ & \text{obtenida. Se denotará } <, > . \\ & \blacksquare m_2 = \gamma \begin{pmatrix} 1 & & \\ 0 & & \\ & & 0 \end{pmatrix} + \delta \begin{pmatrix} 1 & & \\ & -1 & \\ & & 0 \end{pmatrix} + \epsilon \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 0 & \\ & & -1 \end{pmatrix} \\ & \blacksquare \begin{cases} u_2^* \theta^1 = \phi^1 & u_2^* \theta^2 = \phi^2 & u_2^* \theta^3 = 0 \\ u_2^* \alpha = \phi^1 & u_2^* \beta = \phi^2 \\ u_2^* \gamma = (2x_2^7 + 3x_2^8)\phi^1 + (-2x_1^7 + x_1^8)\phi^2 \\ u_2^* \delta = x_i^7 \phi^i & u_2^* \epsilon = x_i^8 \phi^i \end{cases} \end{aligned}$$

$$\blacksquare \left[\begin{pmatrix} I & & \\ & 0 & 0 \\ & I & \\ 2\tilde{y} + 3\tilde{t} & -2\tilde{x} + \tilde{z} & \\ & \tilde{x} & \tilde{y} \\ & \tilde{z} & \tilde{t} \end{pmatrix} \right] \text{ siendo } x = x_1^7, y = x_2^7, z = x_1^8, t = x_2^8$$

y sus transformados:

$$\begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \\ \tilde{z} \\ \tilde{t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3\cos \varphi + 4\cos^3 \varphi & -\sin \varphi + 4\sin \varphi \cos^2 \varphi & 0 & -\sin \varphi + 4\sin \varphi \cos^2 \varphi \\ \sin \varphi - 4\sin \varphi \cos^2 \varphi & -3\cos \varphi + 4\cos^3 \varphi & \sin \varphi & -4\cos \varphi + 4\cos^3 \varphi \\ 0 & 0 & \cos \varphi & \sin \varphi \\ 0 & 0 & -\sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \\ -\cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & -\cos \varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$$

- $W_{3a}\{(0, 0, 0, 0)\}$ que van a dar cuádricas de revolución, $W_{3b} = \{(x, 0, 0, 0)\}$ que es el caso genérico y consta de un invariante κ de orden 3

4.1. Cuádricas de revolución

4 Invariantes de orden 4

- $G_3^1 = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
- $\mathfrak{m}_3 = \zeta \begin{pmatrix} & 1 \\ & 0 \\ 0 & \end{pmatrix} + \eta \begin{pmatrix} 0 & \\ & 1 \\ & 0 \end{pmatrix}$
- $\begin{cases} u_3^* \theta^1 = \phi^1 & u_3^* \theta^2 = \phi^2 & u_3^* \theta^3 = 0 \\ u_3^* \alpha = \phi^1 & u_3^* \beta = \phi^2 & \\ u_3^* \gamma = 0 & u_3^* \delta = 0 & u_3^* \epsilon = 0 \\ u_3^* \zeta = x_2^{10} \phi^1 & u_3^* \eta = x_2^{10} \phi^2 & \end{cases}$ siendo además x_2^{10} una función constante debido a las condiciones de compatibilidad.
- Como la acción adjunta sale la identidad, x_2^{10} es realmente el único invariante de orden 4, denotado $\tilde{\kappa}$ para evitar confusiones con los tipos de superficies posteriores. Como es constante, en función de su signo aparecen las siguientes superficies de revolución, integrando la distribución correspondiente: $\begin{cases} \tilde{\kappa} > 0 & \text{hiperboloides de 2 hojas} \\ \tilde{\kappa} = 0 & \text{paraboloides} \\ \tilde{\kappa} < 0 & \text{elipsoides} \end{cases}$

4.2. Caso genérico

4 Invariantes de orden 4

- $G_3 \simeq \mathbb{Z}_3$ puesto que el estabilizador de W_{3b} es $c = d = 0$ pero $\varphi = \{0^\circ, 120^\circ, 240^\circ\}$ Analizando el caso $G_3 = I$ se obtiene lo siguiente
- $\mathfrak{m}_3 = \zeta \begin{pmatrix} & 1 \\ & 0 \\ 0 & \end{pmatrix} + \eta \begin{pmatrix} 0 & \\ & 1 \\ & 0 \end{pmatrix} + \xi \begin{pmatrix} & -1 \\ 1 & \\ & 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} & \left\{ \begin{array}{l} u_3^* \theta^1 = \phi^1 \quad u_3^* \theta^2 = \phi^2 \quad u_3^* \theta^3 = 0 \\ u_3^* \alpha = \phi^1 \quad u_3^* \beta = \phi^2 \\ u_3^* \gamma = -2\kappa \phi^2 \quad u_3^* \delta = \kappa \phi^1 \quad u_3^* \epsilon = 0 \\ u_3^* \zeta = (6\kappa^2 + 2\kappa_{,1} + 5\kappa\rho + \tau^2 + \rho^2 - \tau_{,2} + \rho_{,1})\phi^1 + (3\kappa\tau - \kappa_{,2})\phi^2 \\ u_3^* \eta = (3\kappa\tau - \kappa_{,2})\phi^1 + (\tau^2 - \kappa\rho + \rho^2 - \tau_{,2} + \rho_{,1})\phi^2 \quad u_3^* \xi = \tau\phi^1 + \rho\phi^2 \end{array} \right. \\ & \text{siendo } \tau, \rho \text{ dos nuevos invariantes de orden 4} \\ & \blacksquare \text{ Las ecuaciones de compatibilidad son:} \end{aligned}$$

$$\begin{cases} d\phi^1 = \tau\phi^1 \wedge \phi^2 \\ d\phi^2 = (\kappa + \rho)\phi^1 \wedge \phi^2 \end{cases} \quad (2)$$

$$\begin{cases} (\rho_{,1} - \tau_{,2})_{,1} = 3\kappa\tau_{,2} + 5\kappa_{,2}\tau - 6\kappa\tau^2 - 2\tau\tau_{,1} + 6\kappa^2\rho + \\ \quad + 6\kappa\rho^2 + 3\kappa_{,1}\rho - 2\rho\rho_{,1} + \kappa\rho_{,1} - \kappa_{,22} \\ (\rho_{,1} - \tau_{,2})_{,2} = 18\kappa^2\tau + 12\kappa\tau\rho + 5\kappa_{,1}\tau + 3\kappa\tau_{,1} - 2\tau\tau_{,2} - \\ \quad - 7\kappa_{,2}\rho - 16\kappa\kappa_{,2} - 2\rho\rho_{,2} - 5\kappa\rho_{,2} - 2\kappa_{,12} - \kappa_{,21} \end{cases} \quad (3)$$

■ La matriz de Cartan queda:

$$\begin{pmatrix} \kappa\phi^1 & -\tau\phi^1 - (2\kappa + \rho)\phi^2 \\ \tau\phi^1 + \rho\phi^2 & -\kappa\phi^1 \\ \phi^1 & \phi^2 \\ (6\kappa^2 + 2\kappa_{,1} + 5\kappa\rho + \tau^2 + \rho^2 - \tau_{,2} + \rho_{,1})\phi^1 + (3\kappa\tau - \kappa_{,2})\phi^2 \\ (3\kappa\tau - \kappa_{,2})\phi^1 + (\tau^2 - \kappa\rho + \rho^2 - \tau_{,2} + \rho_{,1})\phi^2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

La matriz de Cartan C verifica $(dE_1, dE_2, dN) = (E_1, E_2, N) C$ siendo $\{E_1, E_2, N\}$ una referencia equiafín sobre la variedad $\mathcal{M}$ sumergida en $\mathbb{R}^3$: $\{E_1, E_2\}$ son campos tangentes a $\mathcal{M}$ ortonormales respecto de $\langle, \rangle$, y $dN : T\mathcal{M} \longrightarrow T\mathcal{M}$. Estas ecuaciones establecen una conexión ∇ sobre la variedad que no proviene de la conexión de $\mathbb{R}^3$. Para determinarla, de

$$0 = E_i(\langle E_j, E_k \rangle) = \langle \nabla_{E_i} E_j, E_k \rangle + \langle E_j, \nabla_{E_i} E_k \rangle$$

$$\text{se obtiene que } \begin{cases} \nabla_{E_1} E_1 = -\langle \nabla_{E_1} E_2, E_1 \rangle E_2 \\ \nabla_{E_1} E_2 = \langle \nabla_{E_1} E_2, E_1 \rangle E_1 \\ \nabla_{E_2} E_1 = \langle \nabla_{E_2} E_1, E_2 \rangle E_2 \\ \nabla_{E_2} E_2 = -\langle \nabla_{E_2} E_1, E_2 \rangle E_1 \end{cases} . \text{ Por otro lado, usando el}$$

hecho de que los campos E_i son duales de las formas ϕ^i se deduce que si se escogen campos $X = x_1 E_1 + x_2 E_2$ $Y = y_1 E_1 + y_2 E_2$ se tiene que:

1. $d\phi^1(X, Y) = X(\langle E_1, Y \rangle) - Y(\langle E_1, X \rangle) - \langle E_1, [X, Y] \rangle = \langle \nabla_X E_1, Y \rangle + \langle E_1, \nabla_X Y \rangle - \langle \nabla_Y E_1, X \rangle - \langle E_1, \nabla_Y X \rangle - \langle E_1, [X, Y] \rangle = \langle \nabla_X E_1, Y \rangle - \langle \nabla_Y E_1, X \rangle = -\langle \nabla_{E_1} E_2, E_1 \rangle (x_1 y_2 - x_2 y_1)$
2. $\phi^1 \wedge \phi^2(X, Y) = \langle E_1, X \rangle \langle E_2, Y \rangle - \langle E_1, Y \rangle \langle E_2, X \rangle = x_1 y_2 - x_2 y_1$
3. Y son precisamente las ecuaciones de compatibilidad (2) las que determinan que $-\langle \nabla_{E_1} E_2, E_1 \rangle = \tau$

Análogamente se deduce que $\langle \nabla_{E_2} E_1, E_2 \rangle = \kappa + \rho$. En definitiva los símbolos de Christoffel quedan

$$\begin{array}{ll} \Gamma_{11}^1 = 0 & \Gamma_{11}^2 = \tau \\ \Gamma_{12}^1 = -\tau & \Gamma_{12}^2 = 0 \\ \Gamma_{21}^1 = 0 & \Gamma_{21}^2 = \kappa + \rho \\ \Gamma_{22}^1 = -(\kappa + \rho) & \Gamma_{22}^2 = 0 \end{array}$$

La conexión inducida por $\mathbb{R}^3$ sobre $\mathcal{M}$ viene dada por la matriz de Cartan:

$$dE_1 = \kappa \phi^1 \otimes E_1 + \tau \phi^1 \otimes E_2 + \rho \phi^2 \otimes E_2 + \phi^1 \otimes N$$

$$dE_2 = -\tau \phi^1 \otimes E_1 - (2\kappa + \rho) \phi^2 \otimes E_1 - \kappa \phi^1 \otimes E_2 + \phi^2 \otimes N$$

es decir $\overline{\nabla}_X Y =$

$$x_1(E_1(y_1) + y_1\kappa - y_2\tau)E_1 + x_1(y_1\tau + E_1(y_2) - y_2\kappa)E_2 + x_1y_1N$$

+

$$x_2(E_2(y_1) - y_2(2\kappa + \rho))E_1 + x_2(y_1\rho + E_2(y_2))E_2 + x_2y_2N$$

y comparada con $\nabla_X Y =$

$$x_1(E_1(y_1) - y_2\tau)E_1 + x_1(y_1\tau + E_1(y_2))E_2$$

+

$$x_2(E_2(y_1) - y_2(\kappa + \rho))E_1 + x_2(y_1(\kappa + \rho) + E_2(y_2))E_2$$

se deduce de la fórmula $\overline{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + S(X, Y) + \langle X, Y \rangle N$ que

$$S(X, Y) = \kappa((x_1y_1 - x_2y_2)E_1 - (x_1y_2 + x_2y_1)E_2)$$

siendo $S : \mathcal{D}(\mathcal{M}) \times \mathcal{D}(\mathcal{M}) \longrightarrow \mathcal{D}(\mathcal{M})$ una aplicación $\mathcal{C}^\infty(\mathcal{M})$ -lineal, que equivale a un tensor $\overline{S} \in \mathcal{D}_2^1(\mathcal{M})$ el cual en componentes queda

$$\begin{array}{llll} \overline{S}_{11}^1 = \kappa & \overline{S}_{12}^1 = 0 & \overline{S}_{21}^1 = 0 & \overline{S}_{22}^1 = -\kappa \\ \overline{S}_{11}^2 = 0 & \overline{S}_{12}^2 = -\kappa & \overline{S}_{21}^2 = -\kappa & \overline{S}_{22}^2 = 0 \end{array}$$

resultando un tensor apolar es decir $C\overline{S} = 0$, simétrico y totalmente simétrico.

Observación 4.2.0.4 *Estos datos han sido calculados con una elección de $\varphi = 0^\circ$. Mirando cómo actúa el subgrupo de isotropía $G_3 \simeq \mathbb{Z}_3$ para otro valor de φ , se obtiene otra matriz de Cartan y los siguientes resultados*

$$\begin{array}{ll} \Gamma_{11}^1 = 0 & \Gamma_{11}^2 = \tau \cos \varphi + (\kappa + \rho) \sin \varphi \\ \Gamma_{12}^1 = -(\tau \cos \varphi + (\kappa + \rho) \sin \varphi) & \Gamma_{12}^2 = 0 \\ \Gamma_{21}^1 = 0 & \Gamma_{21}^2 = -\tau \sin \varphi + (\kappa + \rho) \cos \varphi \\ \Gamma_{22}^1 = \tau \sin \varphi - (\kappa + \rho) \cos \varphi & \Gamma_{22}^2 = 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{llll} \overline{S}_{11}^1 = \kappa \cos \varphi & \overline{S}_{12}^1 = -\kappa \sin \varphi & \overline{S}_{21}^1 = -\kappa \sin \varphi & \overline{S}_{22}^1 = -\kappa \cos \varphi \\ \overline{S}_{11}^2 = -\kappa \sin \varphi & \overline{S}_{12}^2 = -\kappa \cos \varphi & \overline{S}_{21}^2 = -\kappa \cos \varphi & \overline{S}_{22}^2 = \kappa \sin \varphi \end{array}$$

Independientemente de la elección del valor de φ , con los datos anteriores ya se pueden relacionar los elementos del teorema 11.0.13.1 con los invariantes recién obtenidos:

$$J = 2\kappa^2$$

$$H = -(\kappa_{,1} - \tau_{,2} + \rho_{,1} + 3\kappa^2 + 2\kappa\rho + \tau^2 + \rho^2)$$

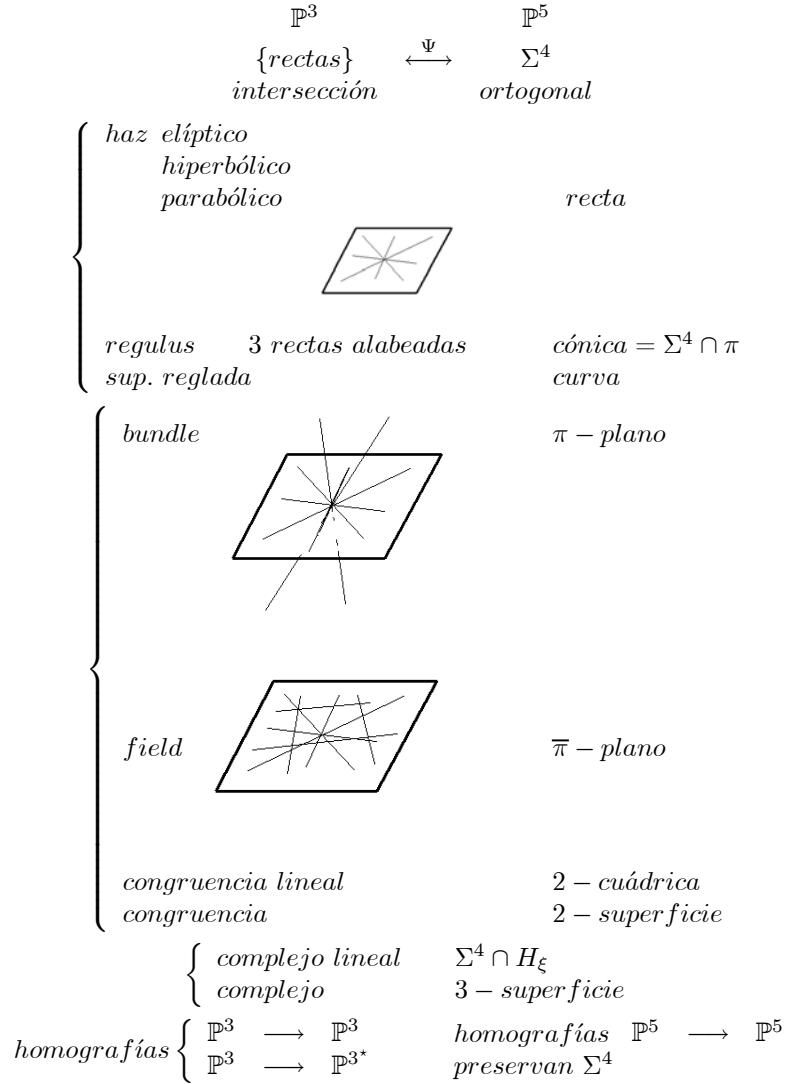
$$K = (6\kappa^2 + 2\kappa_{,1} + 5\kappa\rho + \tau^2 + \rho^2 - \tau_{,2} + \rho_{,1})(\tau^2 - \kappa\rho + \rho^2 - \tau_{,2} + \rho_{,1}) - (3\kappa\tau - \kappa_{,2})^2$$

y finalmente, las ecuaciones de compatibilidad (3) es exactamente la ecuación $d[C(\text{div}II \otimes II) - \text{div}(\text{div}II)] = 0$

Con todo ello se deduce que el teorema 1.0.0.7 es equivalente al teorema 11.0.13.1

(Chapter head:)Geometría de Plücker

5. Introducción



Dada una recta de $\mathbb{P}^3$ generada por 2 puntos $r = (a_i) + (b_i)$ $i = 0, 3$ se define un punto de $\mathbb{P}^5$ $L = (l_{ij})_{i < j}$ definido por $l_{ij} = \begin{vmatrix} a_i & a_j \\ b_i & b_j \end{vmatrix}$ (Coordenadas de Grassman) Estas coordenadas verifican $(l_{ij})^T \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} (l_{ij}) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \end{vmatrix} = 0$ luego la imagen de una recta está sobre Σ^4 . Además se ve fácilmente que si 2 rectas tienen un punto en común, sus imágenes son puntos conjugados de Σ^4 : $r_1 = a + b$, $r_2 = b + c$ se tiene

$$0 = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \end{vmatrix} = L_1^T \Sigma L_2$$

Plücker, en 1865, fue quién realmente introdujo dichas coordenadas, pero de la siguiente manera:

$$(l_{ij}) = \begin{pmatrix} I & & & \\ & & & 1 \\ & & -1 & \\ & 1 & & \end{pmatrix} (p_k)$$

de tal forma que $\Sigma = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix}$ (Coordenadas de Plücker) Históricamente,

Plücker buscaba una descripción de las rectas $l \equiv \begin{cases} x = \rho + rz \\ y = \sigma + sz \end{cases}$ de tal forma que el grado de una ecuación algebraica de ellas permaneciera invariante bajo transformaciones proyectivas. Lo consiguió tomando en cuenta, además de los parámetros ρ, r, σ, s el parámetro $\eta \equiv \rho s - \sigma r$. A la luz de esta teoría se ve que en efecto las coordenadas de Plücker de l son $(r : s : 1 : \sigma : -\rho : \eta)$

Recíprocamente, dadas las coordenadas de un punto de $\mathbb{P}^5$ en Σ^4 , L , se le asocia los puntos de una recta de $\mathbb{P}^3$, a , mediante

$$\begin{pmatrix} 0 & p_4 & p_5 & p_6 \\ -p_4 & 0 & p_3 & -p_2 \\ -p_5 & -p_3 & 0 & p_1 \\ -p_6 & p_2 & -p_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = 0$$

Esta aplicación es la inversa de la aplicación anterior por lo que se tiene una biyección entre las rectas de $\mathbb{P}^3$ y los puntos de Σ^4

De estas fórmulas se ve que las coordenadas de Plücker de una recta $l = (\vec{p}, \vec{q})$ se pueden interpretar como: $\vec{p}$ la dirección de l , $\vec{q} = \vec{a} \times \vec{p}$ el momento de l siendo $(1, \vec{a}) \in l$ un punto propio de l . Además si $a = (a_0, \vec{a})$, $b = (b_0, \vec{b}) \in \mathbb{P}^3$ $\pi_1 = (u_0, \vec{u})$, $\pi_2 = (v_0, \vec{v}) \in \mathbb{P}^{3*}$ se tiene que

$$\begin{aligned}
a + b &= (a_0 \vec{b} - b_0 \vec{a}, \vec{a} \times \vec{b}) \\
\pi_1 \cap \pi_2 &= (\vec{u} \times \vec{v}, u_0 \vec{v} - v_0 \vec{u}) \\
a + l &= (\vec{a} \cdot \vec{q}, -a_0 \vec{q} + \vec{a} \times \vec{p}) \quad a \notin l \\
l \cap \pi_1 &= (\vec{u} \cdot \vec{p}, -u_0 \vec{p} + \vec{u} \times \vec{q}) \quad l \not\subseteq \pi_1
\end{aligned}$$

Con esta terminología se puede ver otra vez que si 2 rectas $l = (\vec{p}, \vec{q})$ $r = (\vec{r}, \vec{s})$ se cortan, son puntos conjugados de Σ^4 : sea $\vec{s} = \vec{a} \times \vec{r}$ con $a = (1, \vec{a}) \in r$, como $a \in l$ se cumple $\begin{cases} \vec{a} \cdot \vec{q} = 0 \\ -\vec{q} + \vec{a} \times \vec{p} = 0 \end{cases}$ luego $\vec{p} \cdot \vec{s} = \vec{p} \cdot (\vec{a} \times \vec{r}) = \vec{r} \cdot (\vec{p} \times \vec{a}) = -\vec{r} \cdot \vec{q}$, $\vec{p} \cdot \vec{s} + \vec{q} \cdot \vec{r} = 0$, $l^T \Sigma r = 0$. En el caso de que se corten en un punto impropio se tiene que $\vec{p} = \vec{r}$, $\vec{q} = \vec{a} \times \vec{p}$, $\vec{s} = \vec{b} \times \vec{p}$, para $a \in l$, $b \in r$. Entonces $l^T \Sigma r = \vec{p} \cdot \vec{s} + \vec{q} \cdot \vec{p} = 0$

La muerte le sobrevino a Plücker en 1868, cuando el joven Klein estaba doctorándose con él en la universidad de Bonn. Tuvo la tarea de escribir la última obra de Plücker, "Nueva geometría del espacio" y se dió cuenta que sobre los complejos podría diagonalizarse Σ^4 . Escogiendo para los cálculos

$$\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \\ p_5 \\ p_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -i & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -i \\ -i & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix}$$

se tiene que $\Sigma = -2I$ (Coordenadas de Klein)

5.1. Superficies reglada

Un haz parabólico de rectas está formado por las rectas que pasan por un punto a , y cortan a una recta que no pasa por a , $r = \langle b, c \rangle = b + c$. Las coordenadas de Plücker de las rectas del haz quedan $\lambda(a + b) + \mu(a + c)$ es decir forman una recta que además está contenida en Σ^4 . Recíprocamente, una recta totalmente contenida en Σ^4 está generada por 2 puntos de Σ^4 que provienen de 2 rectas que se cortan. Dichas rectas generan un haz parabólico cuya imagen por Ψ es la recta original. En resumen, cada haz parabólico está asociado a una y sólo una recta de Σ^4 y recíprocamente, cada recta de Σ^4 proviene de un único haz parabólico de $\mathbb{P}^3$.

Un regulus $\mathcal{R}$ es el conjunto de rectas que cortan a 3 rectas alabeadas r_i . Luego $\Psi(\mathcal{R}) = \langle \Psi(r_i) \rangle \cap \Sigma^4$ que es una cónica ya que el plano $\langle \Psi(r_i) \rangle$ no puede estar contenido en Σ^4 por ser las rectas alabeadas.

Una superficie reglada $\mathcal{S}$ es una curva parametrizada en Σ^4 . Cuando $\mathcal{S} = \langle a(u), b(u) \rangle = \lambda(v)a(u) + \mu(v)b(u)$, $(\lambda : \mu) \in \mathbb{P}^1$, $a(u)$ y $b(u)$ se llaman curvas directrices. También se puede tener $\mathcal{S} = r(u) \in \Sigma^4$.

$$T_{\lambda a + \mu b} \mathcal{S} = \langle \lambda a + \mu b, \dot{\lambda} \dot{a} + \dot{\mu} \dot{b}, \ddot{\lambda} \dot{a} + \ddot{\mu} \dot{b} \rangle$$

Se define:

$$\begin{array}{llll}
\text{generatriz} & \text{singular} & rg(a, \dot{a}, b, \dot{b}) = 2 & rg(r, \dot{r}) = 1 \\
& \text{regular} & \text{torsal} & rg(a, \dot{a}, b, \dot{b}) = 3 \quad \dot{r} \in \Sigma^4 \\
& & \text{no torsal} & rg(a, \dot{a}, b, \dot{b}) = 4 \quad \dot{r} \notin \Sigma^4, rg(r, \dot{r}, \ddot{r}) = 3
\end{array}$$

donde las equivalencias en las definiciones se deducen de la igualdad $\dot{r}^T \Sigma \dot{r} = \begin{vmatrix} a, \dot{a}, b, \dot{b} \end{vmatrix}$

Sobre una generatriz torsal hay un único punto singular de la superficie porque $rg(\lambda a + \mu b, \lambda \dot{a} + \mu \dot{b}, \lambda a + \mu b) = rg(a, b, \lambda \dot{a} + \mu \dot{b})$ y como es torsal se puede tener por ejemplo que $\dot{b} = \alpha a + \beta b + \gamma \dot{a}$ sin ninguna dependencia en v . Por tanto $rg(a, b, \lambda \dot{a} + \mu \dot{b}) = rg(a, b, (\lambda + \gamma \mu) \dot{a})$ encontrándose un único valor de v tal que $\lambda + \gamma \mu = 0$ para el que el plano tangente degenera en una recta. Este punto se llama punto cuspidal y se puede calcular como $r \cap \dot{r}$. Y salvo este punto, los planos tangentes sobre una generatriz torsal son el mismo pues queda $T_{(u,v)} \mathcal{S} = \langle a, b, \dot{a} \rangle$ sin dependencia en v . Este plano se llama plano torsal y se puede calcular como $r + \dot{r}$.

Sobre una generatriz no torsal no hay puntos singulares y los planos tangentes se pueden calcular como $\Xi_{\dot{r}}(r)$ y forman una congruencia parabólica de $r \cap \dot{r}$. Además como $\Psi(\mathcal{S})$ es una curva en Σ^4 se tiene el regulus $\mathcal{R} = osc(\Psi(\mathcal{S})) \cap \Sigma^4$ que genera una cuádrica $\Phi \subset \mathbb{P}^3$, la cuádrica de Lie, que también está generada por otro regulus $\mathcal{R}'$. Las propiedades de los reguli son dos: 1) $\Psi(\mathcal{R})$, $\Psi(\mathcal{R}')$ son cónicas en planos Σ -conjugados 2) $\mathcal{R}$, $\mathcal{R}'$ son las direcciones asintóticas de $\mathcal{S}$

5.2. Congruencias

$$\begin{aligned} \dim(\pi_1 + \pi_2) &= 4 & \dim(\pi_1 \cap \pi_2) &= 0 \\ \dim(\pi + \bar{\pi}) &= \begin{cases} 5 \\ 3 \end{cases} & \dim(\pi \cap \bar{\pi}) &= \begin{cases} -1 \\ 1 \end{cases} \\ \dim(\bar{\pi}_1 + \bar{\pi}_2) &= 4 & \dim(\bar{\pi}_1 \cap \bar{\pi}_2) &= 0 \end{aligned}$$

5.3. Complejos

Un complejo lineal $\mathcal{L}$ se define como $\Psi(\mathcal{L}) = \Sigma^4 \cap H_\xi$ siendo H_ξ el hiperplano conjugado de $\xi \in \mathbb{P}^5$.

Si $\xi \notin \Sigma^4$ sea $\xi = (\vec{e}, \vec{g}) = (E_{23}, E_{31}, E_{12}, E_{01}, E_{02}, E_{03})$ que induce una matriz antisimétrica $E^T = -E$. Como $|E| = \frac{1}{4}(\xi^T \Sigma \xi)^2$, se tiene una polaridad nula Ξ .

$$\begin{aligned} \Xi(a) &= Ea = a + \xi \\ \Xi(l) &= \frac{1}{2}(\xi^T \Sigma \xi)l - (\xi^T \Sigma l)\xi \\ \Xi(h) &= E^{-T}h = h \cap \xi \end{aligned}$$

En este caso $\mathcal{L}$ consta de las rectas nulas de la polaridad, es decir las que son autoconjugadas respecto de Ξ

Si $\xi \in \Sigma^4$, $\mathcal{L}$ consiste en todas las rectas que cortan a ξ .

Un complejo cuadrático $\mathcal{C}$ es el definido por una ecuación algebraica de 2º grado en las coordenadas de Plücker.

Ejemplos:

1. $\mathcal{L}_1$

Es el complejo lineal definido por $\xi = (0 : 0 : 1 : 0 : 0 : 1)$ por lo que sus ecuaciones son $\Sigma^4 \cap \{p_3 + p_6 = 0\}$. Como $\xi^T \Sigma \xi = 2$ se tiene asociada una polaridad nula de ecuaciones $\Xi(l) = (p_1 : p_2 : -p_6 : p_4 : p_5 : -p_3)$. Las rectas de dicho complejo satisfacen la ecuación Pfaffiana $xdy - ydx + dz = 0$

2. $\mathcal{C}_m$

Es el conjunto de rectas que cortan a los puntos circulares-esféricos. Sus ecuaciones son

$$\rho \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \quad v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 = 0$$

y en coordenadas de Plücker $\Sigma^4 \cap \{p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 = 0\}$ por lo que es un complejo cuadrático. Dichas rectas satisfacen la ecuación diferencial $dx^2 + dy^2 + dz^2 = 0$ por lo que se denomina el complejo minimal

5.4. El grupo de Plücker

El grupo de Plücker son las homografías de $\mathbb{P}^5$ que dejan invariante Σ^4 : $\mathbf{P} = \{\rho A \in PGL(6, \mathbb{K}) / A^T \Sigma A = \rho \Sigma\}$. Por lo tanto las filas de A representan 6 rectas, cada una de ellas cortando a otras 4 y a sí misma, por lo que forman un tetraedro. Como grupo de Lie, $\dim \mathbf{P} = 15v$ donde $v = 1, 2$ según $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$. Por otro lado, dada una homografía de $\mathbb{P}^3$ $f \equiv \rho C$ si $a' = f(a)$ y $b' = f(b)$, se tiene que $l'_{ij} = \begin{vmatrix} a'_i & a'_j \\ b'_i & b'_j \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a'_i & b'_i \\ a'_j & b'_j \end{vmatrix} = \left| \sum_k \begin{pmatrix} c_{ik} \\ c_{jk} \end{pmatrix} a_k, \sum_l \begin{pmatrix} c_{il} \\ c_{jl} \end{pmatrix} b_l \right| = \sum_{k < l} \begin{vmatrix} c_{ik} & c_{il} \\ c_{jk} & c_{jl} \end{vmatrix} l_{kl}$. Es decir, se induce una homografía sobre $\mathbb{P}^5$ $\tilde{f}$ y puesto que f manda rectas en rectas, $\tilde{f} \equiv \rho B \in \mathbf{P}$ de tal manera que la fila ij de B son las coordenadas de Grassman de la recta generada por las filas i y j de C , luego son rectas de un tetraedro cuyos vértices son las filas de C . Si partimos de una homografía en el dual $\tilde{f} : \mathbb{P}^3 \longrightarrow \mathbb{P}^{3*}$ $\tilde{f} \equiv \rho C$, esta induce la correlación $F : \mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{P}$ de tal manera que $F(a + b) = F(a) \cap F(b)$. En coordenadas: $\begin{pmatrix} a'_0 & \cdots & a'_3 \\ b'_0 & \cdots & b'_3 \end{pmatrix} x = 0 \quad \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} a'_0 & a'_1 \\ b'_0 & b'_1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} a'_2 & a'_3 \\ b'_2 & b'_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = -\frac{1}{l'_{01}} \begin{pmatrix} -l'_{12} & -l'_{13} \\ l'_{02} & l'_{03} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ de donde

$$x = \lambda \begin{pmatrix} l'_{12} \\ -l'_{02} \\ l'_{01} \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} l'_{13} \\ -l'_{03} \\ 0 \\ l'_{01} \end{pmatrix}$$

$$\text{recta cuyas coordenadas de Grassman son } \begin{pmatrix} l'_{23} \\ -l'_{13} \\ l'_{12} \\ l'_{03} \\ -l'_{02} \\ l'_{01} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & & & & & 1 \\ & & & & -1 & \\ & & & 1 & & \\ & & 1 & & & \\ & -1 & & & & \\ 1 & & & & & \end{pmatrix} (l'_{ij})$$

luego se tiene inducida $\tilde{f} \in \mathbf{P}$ de tal manera que $\tilde{f} \equiv \rho \Delta B$. Pero como $|\Delta| = -1$, $\tilde{f}$ no está en la componente conexa de la identidad de $\mathbf{P}$.

6. La clasificación de superficies regladas de $\mathbb{P}^3$

						ref. F.	inv	
I	$\widetilde{II}_a$					1		haz parabólico
	II_b	III	IV	V_a	$\widetilde{VI}_a$	5		
					VI_b	VII	κ_8	
					VI_c	VII	κ_8	
				V_b	VI		κ_6, τ_7	
	II_c	III	IV	$\widetilde{V}_a$		4		regulus
				V_b	$\widetilde{VI}$	5	κ_6	

7. La clasificación de congruencias

				ref. F.	inv
$\widetilde{I}_a$				0	
I_b	$\widetilde{II}_a$			1	
	II_b	III	$\widetilde{IV}_a$	3	
			$\widetilde{IV}_b$	3	κ_4
			IV_c	4	κ_5, τ_5
	II_c	III	$\widetilde{IV}_a$	3	
			$\widetilde{IV}_b$	3	κ_4
			IV_c	4	κ_5, τ_5
	II_d	III_a	$\widetilde{IV}_a$	3	
			IV_b	4	
		III_b		3	$\kappa_3, (\tau^i)_4 \ i = 1., 5$
II_e	$\widetilde{III}_a$			2	
	III_b			3	$\kappa_3, (\tau^i)_4 \ i = 1., 4$
	III_c			3	κ_4, τ_4
II_f	III_a	$\widetilde{IV}_a$		3	
		IV_b		4	κ_4, τ_5, ρ_5
		III_b		3	$\kappa_3, (\tau^i)_4 \ i = 1., 5$
II_g	III			3	$\kappa_3, \tau_3, (\rho^i)_4 \ i = 1., 6$
II_h	III			3	$\kappa_2, (\tau^i)_3, (\rho^j)_4 \ i = 1., 5, j = 1., 3$

8. La clasificación de complejos

						ref. F.	inv	singular
I	$\widetilde{II}_a$				$\widetilde{V}_a$	1		
	II_b	III	IV_a		V_b	4		
					$\widetilde{VI}$	5	κ_6	
			IV_b	V	$\widetilde{VI}_a$	5		
					VI_b	6		
					VI_c	6		
			IV_c	V	$\widetilde{VI}_a$	5		
					VI_b	6		
					VI_c	6		
	II_c	III_a	$\widetilde{IV}$			3		
		III_b	IV			4	$\kappa_3, (\tau^i)_4, (\rho^j)_5$	$i = 1, 3, j = 1, 9$

Parte III

Apéndice

(Chapter head:)Superficies Euclideas

9. Preliminar

9.0.1. Geometría euclídea

Considérese el espacio de Klein $E = \mathbb{R}^3$ con grupo estructural $G = ASO(3, \mathbb{R})$ formado por matrices reales de la forma

$$(a; A) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & A \end{pmatrix}, a = \begin{pmatrix} a^1 \\ a^2 \\ a^3 \end{pmatrix}, A = (A_1, A_2, A_3) \quad A_i = \begin{pmatrix} a_i^1 \\ a_i^2 \\ a_i^3 \end{pmatrix}$$

donde $a \in E$ y (A_1, A_2, A_3) forman base ortonormal positivamente orientada, es decir $A^t A = id$, $\det A = 1$. Visto así, G es un subgrupo cerrado de Lie de $GL(4, \mathbb{R})$, cuya regla de producto es

$$(a; A)(b; B) = (Ab + a; AB)$$

$$(a; A)^{-1} = (A^{-1}a; A^{-1})$$

Los elementos x de E , son ternas ordenadas de números, que serán considerados filas o columnas dependiendo del contexto.

El grupo G actúa fiel y transitivamente sobre E de la forma

$$(a; A).x = Ax + a, \text{ para } (a; A) \in G, x \in E$$

y la matriz $(a; A) \in G$, puede considerarse una rotación euclídea (o movimiento directo de E) de E con ecuaciones respecto al sistema de referencia canónico

$$\begin{pmatrix} 1 \\ \bar{x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \end{pmatrix}$$

Si fijamos como punto base $o = (0, 0, 0) \in E$, podemos interpretar $(a; A) = (a; A_1, A_2, A_3)$ como un sistema de referencia (cartesiano), con origen $(a; A).o = a$. En particular la matriz identidad $(o; I)$ es el sistema de referencia canónico.

El grupo de isotropía de o es

$$G_0 = \{(o; A) : A \in SO(3, \mathbb{R})\} = SO(3, \mathbb{R})$$

la última igualdad se obtiene al identificar

$$(o; A) = A$$

9.0.2. Acción sobre la Grassmaniana de 2-planos. $\mathbb{G}_{2,3}$

El álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ de G está formada por matrices tipo

$$\mathfrak{g} = \left\{ (\xi|X) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \xi & X \end{pmatrix} \text{ con } \xi \in \mathbb{R}^3, X^t + X = 0 \right\}$$

y álgebra de Lie $\mathfrak{g}_0$ de G_0 es

$$\mathfrak{g}_0 = \{(0|X) : X^t + X = 0\}$$

con complementario

$$\mathfrak{m}_0 = \{(\xi|0) : \xi \in \mathbb{R}^3\}$$

que es invariante por la acción adjunta de G_0 en $\mathfrak{g}$:

$$Ad_{(o,A)} [\xi, X] = (o, A) (\xi|X) (o, A)^{-1} = [A\xi, AXA^{-1}]$$

Si $x \in E$, y $\xi \in \mathbb{R}^3$ denotamos $\xi_x = (x, \xi) \in T_x E$ al vector ξ *apoyado* en x , de manera que

$$T_x E = \{\xi_x : \xi \in \mathbb{R}^3\}$$

Se identifica $\mathfrak{m}_0 = T_o E = \mathbb{R}^3$, cuando escribimos

$$(\xi|0) = \xi_o = \xi$$

y se identifica por tanto también $\mathcal{G}_2^1(E, o) = \mathbb{G}_2(T_o E) = \mathbb{G}_2(\mathfrak{m}_0) = \mathbb{G}_{2,3}$.

La acción de G_o sobre $T_o E$ es la natural dada por la multiplicación matricial

$$G_0 \times T_o E \rightarrow T_o E, (A, \xi) \rightarrow A\xi$$

y en general la acción $G \times TE \rightarrow TE$ viene descrita por

$$(a; A) \cdot \xi_x = (A\xi)_{Ax+a}$$

La acción de G_0 sobre $\mathcal{G}_2^1(E, o)$ está descrita por

$$A \cdot [\xi, \eta] = [A\xi, A\eta] = [A(\xi, \eta)]$$

y es transitiva ya que en particular $A \cdot [I_1, I_2] = [A_1, A_2]$, y todo plano de $\mathbb{R}^3$ admite una base ortonormal (A_1, A_2) .

El plano

$$o^1 = [I_1, I_2] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

nos sirve por tanto como referencial de orden 1.

Nótese que en general la acción de G sobre $\mathcal{G}_2^1(E)$ viene descrita por

$$(a; A) [\xi, \eta]_x = [A(\xi, \eta)]_{Ax+a}$$

9.0.3. Forma de Maurer-Cartan

Finalmente analizemos la forma de Maurer-Cartan $\Omega_G \in \Omega^1(G, \mathfrak{g})$:

Fijado $(a; A) \in G$ es

$$T_{(a;A)} G = \{(a; A) (\xi|X) = (A\xi|AX) : X^t + X = 0\}$$

y por definición $\Omega_G(A\xi|AX) = (\xi|X)$. tomando coordenadas canónicas (en $GL(4, \mathbb{R})$) y restringiéndolas a G quedan

$$x^i, x_j^i : G \rightarrow \mathbb{R}, \quad x^i(a; A) = a^i, \quad x_j^i(a; A) = A_j^i$$

con estas coordenadas es

$$\Omega_G = [\Theta, \Omega] = \left[(x_j^i)^t dx, (x_j^i)^t (dx_j^i) \right] \\ \Theta^i = \sum x_i^k dx^k, \quad \Omega_j^i = \sum x_i^k dx_j^k \in \Omega^1(G_0) \quad ,$$

Como Ω_G toma valores en $\mathfrak{g}$ se concluye que $\Omega^t + \Omega = 0$, por tanto $\Omega_j^i = -\Omega_i^j$. Una interpretación de la forma de Maurer-Cartan es la siguiente

Si $(a(t), A(t)) \in G$, $t \in I$ es una referencia móvil a lo largo de la curva $a(t)$, entonces

$$(a'(t), A'(t)) = (a(t), A(t)) \Omega_G(a'(t), A'(t))$$

que se puede desdoblar en

$$\begin{aligned} a'(t) &= \sum \Theta^i(t) A_i(t) \text{ con } \Theta^i(t) = \Theta^i(a'(t), A'(t)) \\ A'(t) &= A(t) \Omega(t) \text{ con } \Omega(t) = \Omega(A'(t)) \end{aligned}$$

Más general, si $F : S \rightarrow G$ es una aplicación diferenciable, $F(s) = (a(s), A(s))$, entonces la derivada de Darboux de F es

$$F^* \Omega_G = (\theta|\omega) \in \Omega^1(S, \mathfrak{g})$$

donde $\theta^i, \omega_j^i \in \Omega^1(S)$ tienen la siguiente interpretación

$$\begin{aligned} da &= \sum \theta^i A_i \\ dA_j &= \sum \omega_j^k A_k \end{aligned} \tag{4}$$

en donde da , y dA_j son las diferenciales de las aplicaciones $a, A_j : S \rightarrow \mathbb{R}^3$

Tomando $F = id : G \rightarrow G$ queda

$$\begin{aligned} da &= \sum \theta^i A_i \\ dA_j &= \sum \omega_j^k A_k \end{aligned} \tag{5}$$

9.0.4. Ecuaciones de Maurer Cartan.

Las ecuaciones de Maurer-Cartan se obtienen por manipulación formal de (5) al imponer: $d^2 a = 0$, y $d^2 A_j = 0$ el resultado es el siguiente:

$$\begin{aligned} d\theta^i + \sum \Omega_j^i \wedge \theta^j \\ d\Omega_j^i + \sum \Omega_k^i \wedge \Omega_j^k = 0 \end{aligned} \tag{6}$$

Naturalmente estas ecuaciones se transforman por pullback en

$$\begin{aligned} d\theta^i + \sum \omega_j^i \wedge \theta^j &= 0 \\ d\omega_j^i + \sum \omega_k^i \wedge \omega_j^k &= 0 \end{aligned} \tag{7}$$

cuando se toma $F : S \rightarrow G$.

9.0.5. Referencias adaptadas.

Es nuestro propósito establecer en esta geometría un teorema de clasificación de superficies $f : S \rightarrow E$ según distintas versiones y compararlos.

Una referencia de orden cero a lo largo de f es $\mathbf{U} : S \rightarrow G$ aplicación diferenciable con $\mathbf{U}(s) = (f(s), U(s))$. Si $\mathbf{U}^* \Omega_G = (\theta|\omega) \in \Omega^1(S, \mathfrak{g})$, se tiene por (4)

$$\begin{aligned} df &= \sum \theta^i U_i \\ dU_j &= \sum \omega_j^k U_k \end{aligned} \tag{8}$$

y podemos conseguir $\theta^3 = 0$, si tomamos $(U_1(s), U_2(s))$, generando $f_* T_s S$, para todo s , o de forma equivalente

$$\mathbf{U}(s) \cdot [I_1, I_2] = [U(s)(I_1, I_2)]_{f(s)} = [U_1(s), U_2(s)]_{f(s)} = f_* T_s S$$

. Por tanto $\theta^3 = 0$ es el criterio de las referencias de orden 1 o (1-adaptadas).

La primera de las ecuaciones (8) se escribe ahora para cada $s \in S$, $\xi \in T_s S$

$$f_* \xi = \theta^1(\xi) U_1(s) + \theta^2(\xi) U_2(s) \quad (9)$$

lo que indica que $f_*(\theta^1, \theta^2)$ es base dual de (U_1, U_2) .

Por otra parte el vector $U_3 = N \circ f$ siendo N el vector normal unitario a $M = f(S)$. La segunda de las ecuaciones (8) se escribe en forma matricial:

$$(dU_1, dU_2, dU_3) = (U_1, U_2, U_3) \begin{pmatrix} 0 & -\omega_1^2 & -\omega_1^3 \\ \omega_1^2 & 0 & -\omega_2^3 \\ \omega_1^3 & \omega_2^3 & 0 \end{pmatrix} \quad (10)$$

10. Método clásico.

10.0.6. Aplicación de Weingarten.

La primera de las ecuaciones (7), $d\theta^i + \sum \omega_j^i \wedge \theta^j = 0$ aplicada a $\theta^3 = 0$, da

$$\omega_1^3 \wedge \theta^1 + \omega_2^3 \wedge \theta^2 = 0$$

y aplicando el lema de Cartan se concluye que existen funciones $l_{ij} : S \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciables con $l_{12} = l_{21}$ de forma que

$$\begin{pmatrix} \omega_1^3 \\ \omega_2^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_{11} & l_{12} \\ l_{21} & l_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta^1 \\ \theta^2 \end{pmatrix} \quad (11)$$

La segunda de las ecuaciones (7), $d\omega_j^i + \sum \omega_k^i \wedge \omega_j^k = 0$ da ahora para $i = 1$, $j = 2$:

$$d\omega_1^2 = -\omega_1^3 \wedge \omega_2^3 = -K\theta^1 \wedge \theta^2 \quad (12)$$

donde $K = (K_M \circ f) = \det(l_{ij})$ es independiente de la referencia 1-adaptada, y $K_M : M \rightarrow \mathbb{R}$ es la llamada curvatura de Gauss que solo depende M . De hecho $(l_{ij}(s))$ es la matriz, de la aplicación lineal (llamada aplicación de Weingarten) $-dN : T_{f(s)}M \rightarrow T_{f(s)}M$ en la base $(U_1, U_2)_s$.

En efecto, para $\xi \in T_s S$, se tiene

$$\begin{aligned} -dN(f_* \xi) &= -dU_3(\xi) = (U_1, U_2)_s \begin{pmatrix} \omega_1^3 \\ \omega_2^3 \end{pmatrix}_\xi \\ &= (U_1, U_2)_s \begin{pmatrix} l_{11} & l_{12} \\ l_{21} & l_{22} \end{pmatrix}_s \begin{pmatrix} \theta^1 \\ \theta^2 \end{pmatrix}_\xi \end{aligned}$$

10.0.7. Formas Fundamentales.

Sea g_E el producto escalar ordinario de $E = \mathbb{R}^3$. Si $f : S \rightarrow E$ es una superficie, $M = (f : S)$ entonces

$$f^* g_E = g_f = \sum_1^2 d\theta^i \otimes d\theta^i \quad (13)$$

es la Primera Forma Fundamental y transforma a S en una superficie riemanniana abstracta. Además si N es campo normal unitario a M , la aplicación $-dN : T_{f(s)}M \rightarrow T_{f(s)}M$ induce por pullback un tensor $-f^* dN = L_f \in \mathfrak{T}_1^1(S)$, que da lugar al endomorfismo simétrico $L_f(s) : T_s S \rightarrow T_s S$, para todo $s \in S$, que

es la aplicación de Weingarten. El tensor covariante simétrico g_f —equivalente a L_f es

$$h_f = g_f(L_f, \bullet) = \sum l_{ij} \theta^i \otimes \theta^j \quad (14)$$

y se denomina Segunda Forma Fundamental, y viene determinada salvo el signo

10.0.8. Teoremas de congruencia: Versión 1

La solución al *Nivel 1* del problema de clasificación de superficies euclideas viene dada en el siguiente.

Teorema 10.0.8.1 Sean $f, \bar{f} : S \rightarrow E$ son superficies. Entonces:

1. Si existe $(a; A) \in G$ con $\bar{f} = a + Af$ entonces $g_f = g_{\bar{f}}$ y $\pm h_f = \pm h_{\bar{f}}$
2. Si $g_f = g_{\bar{f}}$ y $\pm h_f = \pm h_{\bar{f}}$, supuesto S simplemente conexo, existe $(a; A) \in G$ con $\bar{f} = a + Af$.

Demostración. 1. Si $\bar{f} = a + Af$, entonces a partir de una referencia móvil adaptada a f , $\mathbf{U}(s) = (f(s), U(s))$ $s \in S$ se construye $\bar{\mathbf{U}}(s) = (\bar{f}(s), \bar{U}(s)) = (a; A) \mathbf{U}(s) = (a + Af(s), AU(s))$ que es referencia adaptada a $\bar{f}$. y resulta $\mathbf{U}^* \Omega = (\theta|\omega) = \bar{\mathbf{U}}^* \Omega = (\bar{\theta}|\bar{\omega})$ las igualdades (13) y (14) .aplicadas a f y $\bar{f}$ garantizan $g_f = g_{\bar{f}}$, y $h_f = h_{\bar{f}}$.

2. Supuesto que $h_f = h_{\bar{f}}$ (eligiendo adecuadamente las normales N y $\bar{N}$) como $g_f = g_{\bar{f}}$, podemos construir (θ^1, θ^2) con

$$g_f = g_{\bar{f}} = \sum_1^2 d\theta^i \otimes d\theta^i$$

de forma que $f_*(\theta^1, \theta^2)$ sea base dual de (U_1, U_2) y $\bar{f}_*(\theta^1, \theta^2)$ es base dual de $(\bar{U}_1, \bar{U}_2)$. y las correspondientes referencias móviles $\mathbf{U} = (f, U_1, U_2, N \circ f)$, $\bar{\mathbf{U}} = (\bar{f}, \bar{U}_1, \bar{U}_2, \bar{N} \circ \bar{f})$ sean referencias móviles. Sea $\mathbf{U}^* \Omega = (\theta|\omega)$, $\bar{\mathbf{U}}^* \Omega = (\bar{\theta}|\bar{\omega})$. De momento tenemos $\theta = \bar{\theta}$. La Hipótesis $h_f = h_{\bar{f}}$ implica por (14) que $(l_{ij}) = (\bar{l}_{ij})$ y por (11) se concluye $\omega_i^3 = \bar{\omega}_i^3$. Finalmente la identidad de más adelante (15) da lugar a $\omega_2^1 = \bar{\omega}_2^1$, por tanto $\omega = \bar{\omega}$, $\mathbf{U}^* \Omega = \bar{\mathbf{U}}^* \Omega$. Por el Teorema Fundamental, se concluye que existe $(a; A) \in G$, con $\bar{\mathbf{U}}(s) = (a; A) \mathbf{U}(s)$, y en particular $\bar{f} = a + Af$. ■

La solución a *Nivel 2* pretende responder a la pregunta siguiente:

Supóngase (S, g) superficie riemanniana abstracta, y sea $h \in \mathfrak{T}_2^0(S)$ un tensor 2-covariante simétrico en S . ¿Que condiciones deben verificar g y h , para que exista $f : S \rightarrow E$ superficie tal que $g = g_f$ y $\pm h = \pm h_f$?

Observación 10.0.8.1 El punto crucial es que los datos g y h son suficientes para reconstruir una $(\theta|\omega) \in \Omega^1(S, \mathfrak{g})$ que en el caso $g = g_f$ y $h = h_f$ coincide con el pullback $\mathbf{U}^* \Omega_G$ para cierta referencia móvil adaptada a f .

En efecto, supuesto S paralelizable, podemos elegir $\theta^1, \theta^2 \in \Omega^1(S)$ con $g = \sum_1^2 d\theta^i \otimes d\theta^i$. La expresión de h será de la forma $h = \sum l_{ij} \theta^i \otimes \theta^j$ con $l_{12} = l_{21}$, y la igualdad (11) permite determinar $\omega_1^3 = -\omega_3^1$ y $\omega_2^3 = -\omega_3^2$. Nos falta aún conocer $\omega_1^2 = -\omega_2^1 = \lambda_1 \theta^1 + \lambda_2 \theta^2$. Usando dos primeras condiciones de integrabilidad (7) tenemos:

$$\begin{aligned} d\theta^1 &= -\theta^2 \wedge \omega_1^2 = \lambda_1 (\theta^1 \wedge \theta^2) \\ d\theta^2 &= \theta^1 \wedge \omega_1^2 = \lambda_2 (\theta^1 \wedge \theta^2) \end{aligned}$$

de donde se despejan λ_1, λ_2 y por tanto ω_1^2 que simbólicamente podemos escribirlo como:

$$\omega_1^2 = -\omega_2^1 = \sum \frac{d\theta^i}{\theta^1 \wedge \theta^2} \theta^i \quad (15)$$

Por aplicación directa del Teorema de integrabilidad, se tiene:

Teorema 10.0.8.2 *Supóngase (S, g) superficie riemanniana abstracta, simplemente conexa, $g = \sum_1^2 d\theta^i \otimes d\theta^i$ y sea $h \in \mathfrak{T}_2^0(S)$. La condición necesaria y suficiente para que exista $f : S \rightarrow E$ superficie tal que $g = g_f$ y $\pm h = \pm h_f$ es que la 1-forma $(\theta|\omega) \in \Omega^1(S, \mathfrak{g})$ construida en la observación 10.0.8.1 verifique:*

$$1. \text{ La ecuación de Gauss: } d\omega_1^2 = \det(l_{ij}) (\theta^1 \wedge \theta^2)$$

$$2. \text{ Las ecuaciones de Mainardi-Codazzi:}$$

$$\begin{aligned} d\omega_1^3 + \omega_2^3 \wedge \omega_1^2 &= 0 \\ d\omega_2^3 - \omega_1^3 \wedge \omega_1^2 &= 0 \end{aligned}$$

Por supuesto, es posible que *datos iniciales* diferentes $(g, \pm h)$ y $(\bar{g}, \pm \bar{h})$ sobre S , verificando las condiciones 1 y 2 proporcionen *soluciones* respectivas $f : S \rightarrow E$ y $\bar{f} : S \rightarrow E$ que den lugar a la misma clase de superficie, es decir, existe $(a; A) \in G$ con

$$\bar{f} \circ \phi = a + Af \text{ para cierto difeo } \phi : S \rightarrow S$$

La solución del problema a *Nivel 3* exige fijar las parametrizaciones geométricas en torno a cada punto construidas a partir de una familia más restringida de *datos iniciales* sobre discos de $\mathbb{R}^2$ de forma que cada germen geométrico $[M, a]$ de superficie proceda de un único dato, o en todo caso, disponer de un criterio algorítmico computable para reconocer cuando dos datos dan lugar al mismo germen..

Todo esto requiere la presencia de las referencias adaptadas al segundo orden.

10.0.9. Referencias de Frenet

Sea $f : S \rightarrow E$ una superficie. Para cada $s \in S$ $-dN(s) : T_{f(s)}M \rightarrow T_{f(s)}M$, es un endomorfismo simétrico en el plano vectorial euclideo $T_{f(s)}M$. Por álgebra lineal elemental, se concluye que $-dN(s)$ tiene autovalores reales $k^1(f(s)) = k_f^2(s)$, $k^2(f(s)) = k_f^1(s)$ y existe una base ortonormal $(U_1(s), U_2(s))$ de $T_{f(s)}M$ con $-dN(U_i(s)) = k_f^i(s)U_i(s)$.

Observación 10.0.9.1 *Nótese que k^1, k^2 son funciones de M con valores reales, y además definen (salvo un signo) invariantes escalares euclideos, y se denominan curvaturas principales. Asimismo $U_i(f(s)) = U_i(s)$ define sin ambigüedad un campo de vectores en M . Son los campos unitarios principales, y $\{\pm U_1, \pm U_2\}$ constituye un invariante euclideo.*

$$\text{Si } k_f^1(s) \neq k_f^2(s) \forall s, \text{ diremos que } M \text{ es genérica.}$$

En este caso la elección de la normal N , adecuada permite exigir $|k_f^2| < k_f^1$ que se transforman así en auténticos invariantes euclideos (con signo incluido).

Si M es genérica, es posible elegir $U_i(s)$ diferenciablemente y construir $U = (f, U_1, U_2, U_3 = N \circ f)$ que se denomina referencia de Frenet. La derivada de Darboux $U^*\Omega_G = (\theta|\omega)$ se llama forma de Frenet, que vale entonces:

$$\theta = \begin{pmatrix} \theta^1 \\ \theta^2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \omega = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_1^2 & -k_f^1 \theta^1 \\ \omega_1^2 & 0 & -k_f^2 \theta^2 \\ k_f^1 \theta^1 & k_f^2 \theta^2 & 0 \end{pmatrix} \quad (16)$$

(se denomina a esto matriz de Frenet) ya que por (11) es

$$\begin{pmatrix} \omega_1^3 \\ \omega_2^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_f^1 & 0 \\ 0 & k_f^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta^1 \\ \theta^2 \end{pmatrix}$$

10.0.10. Parametrización Geométrica.

Fijemos $\mathbb{S}$ una bola abierta de $\mathbb{R}^2$, con coordenadas (s^1, s^2) :

Proposición 10.0.10.1 *Sea M una superficie del espacio afín $\mathbb{R}^3$ y sean U_1, U_2 campos tangentes a M , definidos sobre un cierto abierto de M y linealmente independientes en algún punto a del mismo. Entonces existe una parametrización $\varphi : \mathbb{S} \rightarrow M$, en torno a a de forma que $U_i \circ \varphi = f_i \partial \varphi / \partial s^i$ siendo $f_1, f_2 : \mathbb{S} \rightarrow \mathbb{R}^+$ funciones diferenciables (s^1, s^2)*

Aplicando la proposición anterior a los dos primeros vectores (U_1, U_2) de una referencia de Frenet, $\mathbf{U} = (U_1, U_2, U_3)$ definida en un entorno de un punto $a \in M$, se deduce la existencia de una parametrización $\varphi : \mathbb{S}_\varepsilon \rightarrow M$ con $\varphi(0, 0) = a$, y

$$\begin{aligned} g_\varphi &= g_1 ds^1 \otimes ds^1 + g_2 ds^2 \otimes ds^2 \\ h_\varphi &= k_\varphi^1 g_1 ds^1 \otimes ds^1 + k_\varphi^2 g_2 ds^2 \otimes ds^2 \end{aligned} \quad (17)$$

ya que en la matriz $\mathbf{U}^*\Omega_G = (\theta|\omega)$ de la referencia de Frenet $\mathbf{U} = (\varphi, U_1, U_2, U_3)$ se tiene $\theta^i = \sqrt{g_i} ds^i$ para ciertas aplicaciones diferenciables $g_i : \mathbb{S}_\varepsilon \rightarrow \mathbb{R}^+$. Llamamos a φ parametrización adaptada por a .

Si $\bar{\varphi} : \mathbb{S}_\varepsilon \rightarrow M$ es otra parametrización adaptada entonces las ecuaciones del cambio de coordenadas serían:

$$\bar{s}^i = \phi^i(s^1, s^2)$$

y de la identidad

$$\bar{\varphi}(\phi^1(s^1, s^2), \phi^2(s^1, s^2)) = \varphi(s^1, s^2) \quad (18)$$

se deduce

$$\frac{\partial \varphi}{\partial s^i} = \sum_{j=1}^2 \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial \bar{s}^j} \frac{\partial \phi^j}{\partial s^i} \quad (19)$$

Finalmente del hecho de que $\partial \varphi / \partial s^i$ y $\partial \bar{\varphi} / \partial \bar{s}^i$ sean proporcionales a U_i se concluye que

$$\frac{\partial \phi^1}{\partial s^2} = \frac{\partial \phi^2}{\partial s^1} = 0$$

y por tanto

$$\phi^i(s^1, s^2) = \phi^i(s^i) \text{ con } \phi^i(0) = 0. \quad (20)$$

Por otra parte, este tipo de cambio de variable permite obtener todas las parametrizaciones $\bar{\varphi} : \mathbb{S}_\varepsilon \rightarrow M$ adaptadas por a .

Lema 10.0.10.1 *Existe una parametrización adaptada $\varphi : \mathbb{S}_\varepsilon \rightarrow M$ por a , de manera que (ver (14)) se tenga*

$$g_i(0, s^2) = g_i(s^1, 0) = 1 \quad (21)$$

Demostración. En efecto partiendo de una parametrización adaptada $\varphi : \mathbb{S}_\varepsilon \rightarrow M$ por a , y en vista de las fórmulas (19) con la restricción (20) podemos hacer el cambio de variable $\bar{s}^i = \phi^i(s^i)$ para obtener $\bar{\varphi}(\bar{s}^1, \bar{s}^2)$ verificando (18) y se tiene

$$\left(\frac{\partial \phi^i}{\partial s^i} \right)^2 \bar{g}_i = g_i$$

por lo cual, para conseguir $\bar{g}_i(0, s^2) = \bar{g}_i(s^1, 0) = 0$ basta tomar

$$\begin{aligned} \phi^1(s^1) &= \int_0^{s^1} g_1(s, 0)^{-1/2} ds \\ \phi^2(s^2) &= \int_0^{s^2} g_2(0, s)^{-1/2} ds \end{aligned}$$

■

Se dice entonces que φ es una parametrización geométrica de M por a (brevemente φ es PG por a).

Si φ es PG por $a \in M$, entonces $\sim\varphi$ definida por

$$\sim\varphi(s^1, s^2) = \varphi(-s^1, -s^2)$$

es también una PG por a , y se tiene el siguiente resultado:

Proposición 10.0.10.2 *Sea M superficie genérica y $a \in M$. Si φ, ψ son dos PG por a , entonces o bien $\psi = \varphi$, o bien $\psi = \sim\varphi$ en la intersección de los dominios.*

10.0.11. Teoremas de Congruencia: Versión 2.

En lo que sigue, todas las superficies se consideran genéricas. supongamos (M, a) y $(\bar{M}, \bar{a})$ superficies punteadas.

Podemos preguntarnos primero cual es la condición necesaria y suficiente para que las funciones diferenciables $g_1, g_2 : \mathbb{S}_\varepsilon \rightarrow \mathbb{R}$ verificando (21) y $k^1, k^2 : \mathbb{S}_\varepsilon \rightarrow \mathbb{R}$ con $|k^2| < k^1$ definan un germen geométrico.

En este caso, tomando $h_1 = k^1 g_1, h_2 = k^2 g_2$ tenemos sobre $\mathbb{S}_\varepsilon$, las formas

$$\begin{aligned} g &= g_1 ds^1 \otimes ds^1 + g_2 ds^2 \otimes ds^2 \\ h &= h_1 ds^1 \otimes ds^1 + h_2 ds^2 \otimes ds^2 \end{aligned}$$

y se aplican las condiciones de compatibilidad dadas en el teorema 10.0.8.2.. Se obtiene entonces:

Teorema 10.0.11.1 *Sean $g_1, g_2 : \mathbb{S}_\varepsilon \rightarrow \mathbb{R}$ verificando (21) y $k^1, k^2 : \mathbb{S}_\varepsilon \rightarrow \mathbb{R}$ con $|k^2| < k^1$ funciones diferenciables. La condición necesaria y suficiente para que exista $\varphi : \mathbb{S}_\varepsilon \rightarrow E$ PG de $\varphi(\mathbb{S}_\varepsilon)$ por $\varphi(0, 0)$ con $g_\varphi = g_1 ds^1 \otimes ds^1 + g_2 ds^2 \otimes ds^2$, $h_\varphi = k^1 g_1 ds^1 \otimes ds^1 + k^2 g_2 ds^2 \otimes ds^2$ es que se verifiquen las relaciones (condiciones de integrabilidad):*

a) La ecuación de Gauss

$$k^1 k^2 = -\frac{1}{2\sqrt{g_1 g_2}} \left\{ \frac{\partial}{\partial s^2} \left(\frac{\partial g_1 / \partial s^2}{\sqrt{g_1 g_2}} \right) + \frac{\partial}{\partial s^1} \left(\frac{\partial g_2 / \partial s^1}{\sqrt{g_1 g_2}} \right) \right\} \quad (22)$$

b) Las ecuaciones de Mainardi con $H = \frac{1}{2}(k^1 + k^2)$, $h_1 = k^1 g_1$, $h_2 = k^2 g_2$

$$\begin{cases} \frac{\partial h_1}{\partial s^2} = \frac{\partial g_1}{\partial s^2} H \\ \frac{\partial h_2}{\partial s^1} = \frac{\partial g_2}{\partial s^1} H \end{cases}, \quad (23)$$

Observación 10.0.11.1 Los datos iniciales del teorema pueden reducirse a dos funciones g_1, g_2 , verificando (21) y otra k^1 . La ecuación de Gauss (22) permite calcular la Curvatura de Gauss $K = k_1 k_2$ en función de g_1 y g_2 , y "despejar" $k^2 = K/k^1$. Por otra parte las ecuaciones (23) también se escriben

$$\begin{cases} K \frac{\partial g_1}{\partial s^2} = \frac{\partial((k^1)^2 g_1)}{\partial s^2} \\ K \frac{\partial g_2}{\partial s^1} = \frac{\partial((k^2)^2 g_2)}{\partial s^1} \end{cases},$$

Nos preguntamos si hay algún procedimiento algorítmico para saber si a y $\bar{a}$ admiten entornos congruentes.

Una posible respuesta la proporciona el siguiente resultado:

Teorema 10.0.11.2 Sean $[M, a]$ y $[\bar{M}, \bar{a}]$ dos germenos euclideos de superficies en E , con $\varphi : \mathbb{S}_\varepsilon \rightarrow M$, y $\bar{\varphi} : \mathbb{S}_\varepsilon \rightarrow \bar{M}$ las correspondientes PG de M y $\bar{M}$ por a , y $\bar{a}$ respectivamente. Pongamos $g_\varphi = \sum g_i ds^i$, $g_{\bar{\varphi}} = \sum \bar{g}_i ds^i$. Entonces $[M, a] = [\bar{M}, \bar{a}]$, si y solo si

1. $\bar{\varphi} = \varphi$, o $\bar{\varphi} = \sim \varphi$ en $\mathbb{S}_\delta$ para cierto $\delta \leq \varepsilon$.
2. Supuesto por ejemplo $\bar{\varphi} = \varphi$ en $\mathbb{S}_\delta$, se debe verificar (en $\mathbb{S}_\delta$) :

$$g_1 = \bar{g}_1, \quad g_2 = \bar{g}_2, \quad k_\varphi^1 = k_{\bar{\varphi}}^1$$

11. Método de las ecuaciones reducidas.

11.0.12. Acción sobre las escamas de segundo orden

Tal y como se vió en el epígrafe 9.0.2, la acción de

$$SO(3) = G_0 = \{A_o = (o; A) : A \in SO(3)\} \subset G$$

sobre $\mathbb{G}_{2,3} \simeq \mathbb{G}_2(\mathfrak{m}_0) \simeq \mathbb{G}_2(T_o E) = \mathcal{G}_2^1(E, o)$ es la natural,

$$A \cdot [X_1, X_2] = [AX_1, AX_2], \quad A \in SO(3), \quad [X_1, X_2] \in \mathbb{G}_{2,3}$$

y resulta ser transitiva. Se había fijado $w^1 = o^1 = [I_1, I_2]$ como origen, y el grupo de isotropía de o^1 resulta ser

$$O(2) = G_1 = \left\{ A_1 = \left(o, \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & \det A \end{pmatrix} \right) : A \in O(2) \right\}$$

así una referencia $\mathbf{U}(s) = (f(s), U(s))$ de orden 1 en la p -variedad $f : S \rightarrow E$ debe verificar $\mathbf{U}(s) \cdot [I_1, I_2] = f_* T_s S$, que equivale a que $U(s) = (U_1(s), U_2(s))$, genere $f_* T_s S$.

Desde el punto de vista de los fibrados de escamas, esto se ve así:

Para cada $l = (l_1, l_2) \in \mathbb{R}^2$ se considera la parametrización $\tilde{\zeta}_l : \mathbb{R}^2 \rightarrow E$ de la gráfica de la función $z = \zeta_l(x, y) = l_1 x + l_2 y$, dada por

$$\tilde{\zeta}_l(x, y) = (x, y, \zeta_l(x, y))$$

y la aplicación

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathcal{G}^1(E, o^1) \\ l & & g_o^1 \tilde{\zeta}_l \end{array}$$

define una parametrización local de $\mathcal{G}^1(E, o)$ que asigna a o^1 coordenadas $(0, 0)$.

Observación 11.0.12.1 *En lo que sigue, y para descargar notación, suprimimos el subíndice 2 de $\mathcal{G}_2^k(E)$ para denotar los fibrados de escamas de superficie de orden superior, que será en su ausencia sobre entendido.*[3]

Análogamente para cada $q = (q_1, q_2, q_3) \in \mathbb{R}^3$ se considera la parametrización $\tilde{\zeta}_q : \mathbb{R}^2 \rightarrow E$

$$\tilde{\zeta}_q(x, y) = (x, y, \zeta_q(x, y))$$

de la gráfica de la función $z = \zeta_q(x, y) = q_1 x^2 + 2q_2 xy + q_3 y^2$. Identificando

$$q = \begin{pmatrix} q_1 & q_2 \\ q_2 & q_3 \end{pmatrix}$$

queda

$$\zeta_q(x, y) = (x, y) q \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Si $\zeta_{l,q} = \zeta_l + \zeta_q$ la aplicación

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^3 & \rightarrow & \mathcal{G}^2(E, o) \\ (l, q) & \rightarrow & g_o^2 \widetilde{\zeta_{l,q}} \end{array}$$

define una parametrización local de $\mathcal{G}_2^2(E, o)$, en un entorno de o^1 . En estas coordenadas la proyección $\mathcal{G}_2^2(E, o) \rightarrow \mathcal{G}_2^1(E, o)$ viene dada por la proyección canónica

$$\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2, (l, q) \rightarrow l$$

Por tanto, la aplicación

$$\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathcal{G}^2(E, o^1), q \rightarrow g_o^2 \tilde{\zeta}_q$$

define una parametrización global de $\mathcal{G}^2(E, o^1)$.

La acción $G_1 \times \mathcal{G}^2(E, o^1) \rightarrow \mathcal{G}^2(E, o^1)$, puede entonces describirse así:

Dada la escama $g_o^2 \tilde{\zeta}_{\bar{q}}$ de coordenadas q , y $A \in O(2)$, para calcular $A^{-1} \cdot g_o^2 \tilde{\zeta}_{\bar{q}}$, hacemos sustitución formal en la igualdad $\bar{z} = \zeta_{\bar{q}}(\bar{x}, \bar{y})$ de $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ por

$$\begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \\ \bar{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & \det A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

de forma que si q son las coordenadas de $A^{-1} \cdot g_o^2 \tilde{\zeta}_{\bar{q}}$ son $q = (\det A) A^t \bar{q} A$. Por tanto

$$A \cdot g_o^2 \tilde{\zeta}_q = g_o^2 \tilde{\zeta}_{\bar{q}} \text{ con } \bar{q} = (\det A) A q A^t = \pm A q A^t$$

Formalmente por tanto debemos analizar la acción

$$O(2) \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, A \cdot q = (\det A) A q A^t \quad (24)$$

bien conocida del álgebra lineal.

Una sección de la acción (24) viene dada por

$$W^{2a} = \left\{ \begin{pmatrix} r_1 & 0 \\ 0 & r_2 \end{pmatrix} : |r_2| < r_1 \right\}$$

que se corresponde para $\zeta_{(r_1, r_2)} = r_1 x^2 + r_2 y^2$

$$\mathcal{O}^{2a} = \left\{ g_o^2 \left(\tilde{\zeta}_{(r_1, r_2)} \right) : |r_2| < r_1 \right\}$$

Una escama $\sigma \in \mathcal{G}^k(E)$, se dice genérica si $A \cdot \sigma = \sigma \Rightarrow A = I$ donde $I \in G$ es el elemento neutro. Sea

$$\text{Gen}(\mathcal{G}_p^k(E)) = \{ \sigma \in \mathcal{G}_p^k(E) : \sigma \text{ es genérica} \}$$

Resulta ahora que la familia $G \cdot \mathcal{O}^{2a}$ es la familia de escamas genéricas de orden 2. Obsérvese además que:

R1) No existen escamas genéricas de orden inferior a 2, es decir:

$$\text{Gen}(\mathcal{G}^1(E)) = \emptyset$$

R2) Las escamas genéricas de orden 2, $G \cdot \mathcal{O}^{2a} = \text{Gen}(\mathcal{G}_p^2(E))$, forman un abierto denso del espacio total $\mathcal{G}^2(E)$ de escamas de orden 2.

Por esto decimos que la geometría afín euclídea es (2-)regular de orden 2.

Una superficie $f : S \rightarrow E$ se dice genérica si $g_s^2 f$ es genérica para todo $s \in S$, y se denota por $\mathcal{F}_\infty$ de superficies genéricas de E , que constituye una familia regular.

11.0.13. Caso genérico.

Fijado un punto $f(s)$ de una superficie genérica $M = (f : \mathbb{S})$ sumergida en E , queda determinada una única referencia de Frenet

$$\mathbf{U}(s) = (f(s); U_1(s), U_2(s), U_3(s)) \in G$$

con $\mathbf{U}(s)^{-1} g_s^2 f = g_o^2 \left(\tilde{\Psi}_{(r_1(s), r_2(s))} \right)$, para $(r_1(s), r_2(s)) \in W^{2a}$, con

$$\Psi_{(r_1, r_2)}(x, y) = r_1 x^2 + r_2 y^2$$

Todo lo anterior podemos replantearlo admitiendo que hay una función diferenciable $\zeta = \zeta(s, X, Y)$ con valores reales definida en un entorno de $\mathbb{S} \times (0, 0)$ en $\mathbb{S} \times \mathbb{R}^2$, tal que en las coordenadas $(X(s), Y(s), Z(s))$ respecto a $\mathbf{U}(s)$, la superficie M se ve como la gráfica de una función de la forma

$$Z(s) = \zeta(s, X(s), Y(s)) \quad (25)$$

y verifica para todo $s \in \mathbb{S}$.

$$0 = \zeta(s, 0, 0) = \zeta_X(s, 0, 0) = \zeta_Y(s, 0, 0) = \zeta_{XY}(s, 0, 0) \quad (26)$$

se consideran entonces las funciones diferenciables $b_i, c_j, d_k : \mathbb{S} \rightarrow \mathbb{R}$ definidas por:

$$\begin{cases} 2b_0 = \zeta_{XX}(s, 0, 0) & 2b_1 = \zeta_{YY}(s, 0, 0) \\ 6c_0 = \zeta_{XXX}(s, 0, 0) & 6c_1 = \zeta_{XXY}(s, 0, 0) \\ 6c_2 = \zeta_{XYX}(s, 0, 0) & 6c_3 = \zeta_{YYX}(s, 0, 0) \\ 24d_0 = \zeta_{XXXX}(s, 0, 0) & \cdots 24d_3 = \zeta_{YYYY}(s, 0, 0) \end{cases}$$

por tanto, $Z = \zeta(s, X, Y) = b_0 X^2 + b_1 Y^2 + c_0 X^3 + c_1 X^2 Y + c_2 X Y^2 + c_3 Y^3 + d_0 X^4 + d_1 X^3 Y + d_2 X^2 Y^2 + d_3 X Y^3 + d_4 Y^4 + \dots$

Las funciones b_i, c_j son en realidad $f^* b_i = b_i \circ f$, $f^* c_j = c_j \circ f$, y pueden ser consideradas, funciones en M , y constituyen de hecho un sistema de invariantes escalares. Probaremos que se trata de un sistema completo de invariantes, y determinaremos las relaciones de integrabilidad.

Para ello tomemos un punto fijo P de M , con coordenadas $(x(s), y(s), z(s))$ respecto a $\mathbf{U}(s)$. La idea clave, es que entonces se tiene para todo s la identidad:

$$P = f(s) + (U_1(s), U_2(s), U_3(s)) \begin{pmatrix} x(s) \\ y(s) \\ z(s) \end{pmatrix}$$

y diferenciando ambos miembros se obtiene por ser P un punto fijo:

$$0 = df + (dU_1, dU_2, dU_3) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + (U_1, U_2, U_3) \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix}$$

Usando ahora las fórmulas (9) y (10) podemos escribir (U_1, U_2, U_3) .

$$\left\{ \begin{pmatrix} \theta^1 \\ \theta^2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -\omega_1^2 & -\omega_1^3 \\ \omega_1^2 & 0 & -\omega_2^3 \\ \omega_1^3 & \omega_2^3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right\} = 0 \quad (27)$$

Por otra parte, como $P \in M$, a partir de (25) se concluye que para todo s se verifica la identidad:

$$z(s) = \zeta(s, x(s), y(s)) \quad (28)$$

A partir de aquí, fijamos $\mathbf{s} \in \mathbb{S}$, y sean $(x(\mathbf{s}), y(\mathbf{s}), z(\mathbf{s})) = (\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$ las coordenadas de P respecto al sistema de referencia $\mathbf{U}(\mathbf{s})$. También fijamos una curva $\alpha(t)$, en $\mathbb{S}$, con $\alpha(0) = \mathbf{s}$, y $\alpha'(0) = \xi \in T_{\mathbf{s}}\mathbb{S}$. La igualdad (27) particularizada en $\xi \in T_{\mathbf{s}}\mathbb{S}$ da:

$$\left. \begin{aligned} d\mathbf{x} &= -\theta^1 + \omega_1^2 \mathbf{y} + \omega_1^3 \zeta(\mathbf{s}, \mathbf{x}, \mathbf{y}) \\ d\mathbf{y} &= -\theta^2 - \omega_1^2 \mathbf{x} + \omega_2^3 \zeta(\mathbf{s}, \mathbf{x}, \mathbf{y}) \\ d\mathbf{z} &= -\omega_1^3 \mathbf{x} - \omega_2^3 \mathbf{y} \end{aligned} \right\} \text{ con} \quad (29)$$

$$\left\{ \begin{aligned} d\mathbf{x} &= dx(\xi) = (x \circ \alpha)'(0) \\ d\mathbf{y} &= dy(\xi), \quad d\mathbf{z} = dz(\xi) \\ \omega_j^i &= \omega_j^i(\xi), \quad \zeta(t, x, y) = \zeta(\alpha(t), \mathbf{x}, \mathbf{y}) \end{aligned} \right. \quad (30)$$

diferenciando y aplicando a ξ ambos miembros de (28) queda: $-\omega_1^3 \mathbf{x} - \omega_2^3 \mathbf{y} = \zeta_t(0, \mathbf{x}, \mathbf{y}) + \zeta_X(\mathbf{s}, \mathbf{x}, \mathbf{y}) d\mathbf{x} + \zeta_Y(\mathbf{s}, \mathbf{x}, \mathbf{y}) d\mathbf{y} = \zeta_t(0, \mathbf{x}, \mathbf{y}) + \zeta_X(\mathbf{s}, \mathbf{x}, \mathbf{y}) (-\theta^1 + \omega_1^2 \mathbf{y} + \omega_1^3 \zeta(\mathbf{s}, \mathbf{x}, \mathbf{y})) + \zeta_Y(\mathbf{s}, \mathbf{x}, \mathbf{y}) (-\theta^2 - \omega_1^2 \mathbf{x} + \omega_2^3 \zeta(\mathbf{s}, \mathbf{x}, \mathbf{y}))$ y al mover P en M , se concluye que la igualdad es válida para todo $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ de un entorno de $(0, 0) \in \mathbb{R}^2$. Derivando los dos miembros de (11.0.13) respecto a $\mathbf{x}$, particularizando para $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (0, 0)$ y teniendo en cuenta (26) queda

$$-\omega_1^3 = \zeta_{t\mathbf{x}}(0, 0, 0) - \zeta_{XX}(\mathbf{s}, 0, 0) \theta^1$$

pero nuevamente por (26)

$$\zeta_{t\mathbf{x}}(0, 0, 0) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \zeta_X(\alpha(t), 0, 0) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} 0 = 0$$

además de la definición de b_0 se concluye $\omega_1^3 = 2b_0(s)\theta^1$. Dado que el resultado vale para todo s y todo $\xi \in T_s\mathbb{S}$, se concluye:

$$\omega_1^3 = 2b_0\theta^1$$

Procediendo de forma análoga con las derivadas sucesivas de (11.0.13) hasta el orden 3, se obtienen, según se indica, las siguientes *condiciones*:

$[x]$	$\omega_1^3 = 2b_0\theta^1$	(31)
$[y]$	$\omega_2^3 = 2b_1\theta^2$	
$[xy]$	$\omega_1^2 = \frac{c_1}{b_0-b_1}\theta^1 + \frac{c_2}{b_0-b_1}\theta^2$	
$[x^2]$	$db_0 = 3c_0\theta^1 + c_1\theta^2$	
$[y^2]$	$db_1 = c_2\theta^1 + 3c_3\theta^2$	
$[x^3]$	$dc_0 = c_1\omega_1^2 - 2b_0^2\omega_1^3 + 4d_0\theta^1 + d_1\theta^2$	
$[y^3]$	$dc_3 = -c_2\omega_1^2 - 2b_1^2\omega_1^3 + d_3\theta^1 + 4d_4\theta^2$	
$[x^2y]$	$dc_1 = (-3c_0 + 2c_2)\omega_1^2 - 2b_0b_1\omega_1^3 + 3d_1\theta^1 + 2d_2\theta^2$	
$[y^2x]$	$dc_2 = (3c_3 - 2c_1)\omega_1^2 - 2b_0b_1\omega_1^3 + 2d_2\theta^1 + 3d_3\theta^2$	

Las últimas condiciones se pueden desglosar en componentes sobre $\{\theta^1, \theta^2\}$ obteniéndose:

$$\left\{ \begin{array}{l} c_0 = \frac{1}{3}b_{0,1} \\ c_1 = b_{0,2} \\ c_2 = b_{1,1} \\ c_3 = \frac{1}{3}b_{1,2} \end{array} \right\} \quad (32)$$

$$\begin{aligned} d_0 &= \frac{1}{12}b_{0,11} + b_0^3 - \frac{1}{4}\frac{b_{0,2}^2}{b_0 - b_1} \\ d_1 &= \frac{1}{3}b_{0,12} - \frac{b_{0,2}b_{1,1}}{b_0 - b_1} = \frac{1}{3}b_{0,21} + \frac{1}{3}(b_{0,1} - 2b_{1,1})\frac{b_{0,2}}{b_0 - b_1} \\ d_2 &= 4b_0b_1^2 + b_{0,22} + \frac{b_{0,1}b_{1,1} - 2b_{1,1}^2}{b_0 - b_1} = 4b_0^2b_1 + b_{1,11} + \frac{2b_{0,2}^2 - b_{1,2}b_{0,2}}{b_0 - b_1} \\ d_3 &= \frac{1}{3}b_{1,12} + \frac{1}{3}(2b_{0,2} - b_{1,2})\frac{b_{1,1}}{b_0 - b_1} = \frac{1}{3}b_{1,21} + \frac{b_{1,1}b_{0,2}}{b_0 - b_1} \\ d_4 &= \frac{1}{12}b_{1,22} + b_1^3 + \frac{1}{4}\frac{b_{1,1}^2}{b_0 - b_1} \end{aligned}$$

Y sabiendo que la diferencial segunda ya es cero, queda

$$\left\{ \begin{array}{l} d\theta^1 = \frac{c_1}{b_0-b_1}\theta^1 \wedge \theta^2 \\ d\theta^2 = \frac{c_2}{b_0-b_1}\theta^1 \wedge \theta^2 \end{array} \right.$$

Las igualdades encontradas para d_1 y d_3 resultan ser identidades; no así para d_2 que resulta:

$$4b_0b_1(b_0 - b_1) = b_{0,22} - b_{1,11} + \frac{b_{0,1}b_{1,1} + b_{1,2}b_{0,2} - 2(b_{0,2}^2 + b_{1,1}^2)}{b_0 - b_1} \quad (33)$$

Observaciones:

1. Las condiciones $[x]$ y $[y]$ expresan que $2b_0$ y $2b_1$ son exactamente las curvaturas principales k_1 y k_2 establecidas en la observación 10.0.9.1, y determinan $\omega_1^3 = 2b_0\theta^1$, y $\omega_2^3 = 2b_1\theta^2$.
2. Suponiendo que

$$\text{rango}\{db_0, db_1, dc_0, dc_1, dc_2, dc_3\} = 2 \quad (34)$$

las condiciones (31), permiten calcular θ^1 y θ^2 , conocidos $b_0, b_1, c_0, c_1, c_2, c_3$. En efecto, las condiciones $[x^2]$ y $[y^2]$ se escriben:

$$\begin{pmatrix} db_0 \\ db_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3c_0 & c_1 \\ c_2 & 3c_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta^1 \\ \theta^2 \end{pmatrix} \quad (35)$$

lo que permite *en general* despejar de aquí θ^1 , y θ^2 , cuando $\text{rango}\{db_0, db_1\} = 2$. Pero en todo caso la condición $[xy]$ da

$$\omega_1^2 = \frac{c_1}{b_0 - b_1}\theta^1 + \frac{c_2}{b_0 - b_1}\theta^2 \quad (36)$$

Esto nos permite escribir el resto de las ecuaciones como combinaciones de θ^1 y θ^2 y despejarlas de dos de ellas en virtud de la condición (34). Queda así determinada toda la matriz de Cartan (16). Esto demuestra con ayuda del Teorema Fundamental que en efecto $\{b_0, b_1, c_1, c_2\}$ constituye un sistema completo de invariantes.

3. Supongamos que sobre $\mathbb{S}$ nos dan funciones $b_0, b_1, c_0, c_1, c_2, c_3$, que verifican las condiciones autónomas y la (34). Podemos reconstruir entonces una matriz de Cartan (16) usando las definiciones dadas por $[x], [y], [xy]$. Probaremos que se verifican las ecuaciones de Maurer-Cartan. Por el teorema Fundamental quedaría determinada entonces salvo congruencias una única superficie $f : \mathbb{S} \rightarrow E$ que da lugar a tal sistema de invariantes. Por un lado las igualdades ya garantizan las ecuaciones de Mainardi-Codazzi

$$d\omega_1^3 + \omega_2^3 \wedge \omega_1^2 = 0, \quad d\omega_2^3 - \omega_1^3 \wedge \omega_1^2 = 0$$

En efecto, se tiene por ejemplo

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} (d\omega_1^3 + \omega_2^3 \wedge \omega_1^2) \\ &= d(b_0\theta^1) + b_1(\theta^2 \wedge \omega_1^2) \\ &= (db_0 \wedge \theta^1 + b_0 \wedge d\theta^1) - b_1 d\theta^1 \\ &= -c_1\theta^1 \wedge \theta^2 + (b_0 - b_1) d\theta^1 = 0 \end{aligned}$$

También se verifica automáticamente la ecuación de Gauss $d\omega_1^2 = -\omega_1^3 \wedge \omega_2^3$ que ahora se escribe:

$$d\omega_1^2 = -4b_0b_1(\theta^1 \wedge \theta^2) \quad (37)$$

En efecto, diferenciando ambos miembros de la condición $[xy]$ queda

$$\begin{aligned} & (db_0 - db_1) \wedge \omega_1^2 + (b_0 - b_1) d\omega_1^2 \\ &= dc_1 \wedge \theta^1 + dc_2 \wedge \theta^2 + c_1 d\theta^1 + c_2 d\theta^2 \end{aligned}$$

Sustituyendo ahora db_0, db_1, dc_1, dc_2 por sus valores en (31), y usando queda

$$\begin{aligned} & ((3c_0 - c_2)\theta^1 + (c_1 - 3c_3)\theta^2) \wedge \omega_1^2 + (b_0 - b_1) d\omega_1^2 \\ = & (-3c_0 + 2c_2)\omega_1^2 \wedge \theta^1 + 4b_0b_1^2\theta^1 \wedge \theta^2 + \\ & (3c_3 - 2c_1)\omega_1^2 \wedge \theta^2 - 4b_0^2b_1\theta^1 \wedge \theta^2 \end{aligned}$$

dejando ahora solo en el primer miembro el sumando que interesa queda:
 $(b_0 - b_1) d\omega_1^2 =$

$$c_2\omega_1^2 \wedge \theta^1 - c_1\omega_1^2 \wedge \theta^2 + \left(4b_0b_1(b_1 - b_0) + \frac{c_1^2 + c_2^2}{b_0 - b_1}\right) \theta^1 \wedge \theta^2$$

Finalmente, de (36) se concluye

$$c_2\omega_1^2 \wedge \theta^1 - c_1\omega_1^2 \wedge \theta^2 = -\frac{c_1^2 + c_2^2}{b_0 - b_1} \theta^1 \wedge \theta^2$$

que al sustituirlas más arriba reproduce la fórmula de Gauss (37).

En consecuencia, las condiciones de integrabilidad, se reducen a las condiciones autónomas extraídas de (31), y la condición de rango (34).

(Chapter head:)Superficies equiafines

En la referencia bibliográfica [7] (pg 193) se encuentra el siguiente teorema expresado siguiendo la notación de [8]:

Sea $\mathcal{M}$ una 2-variedad orientada, conexa, simplemente conexa, (o lo que es lo mismo, las funciones siguientes son locales) con una métrica riemanniana $<, > \in \mathcal{D}_2^0(\mathcal{M})$ y un tensor simétrico y totalmente simétrico $\overline{S} \in \mathcal{D}_2^1(\mathcal{M})$ que verifiquen

$$C\overline{S} = 0$$

$$d[C(\text{div} II \otimes II) - \text{div}(\text{div} II)] = 0$$

siendo C la contracción métrica y $II \in \mathcal{D}_3^0(\mathcal{M})$ métricamente equivalente a $\overline{S}$. Con esta construcción existen:

1. $J \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{M})$ / $J = \frac{1}{2}C(II \otimes II)$
2. $H \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{M})$ / $dH = C(\text{div} II \otimes II) - \text{div}(\text{div} II)$ que en coordenadas resulta

$$(\text{div} II)_{ij} = \partial_k \overline{S}_{ij}^k + \Gamma_{km}^k \overline{S}_{ij}^m - \Gamma_{ki}^m \overline{S}_{mj}^k - \Gamma_{kj}^m \overline{S}_{im}^k$$

$$dH_i = g^{mn}[(\text{div} II)_{lm} \overline{S}_{ni}^l - \partial_n(\text{div} II)_{im} + \Gamma_{ni}^l(\text{div} II)_{lm} + \Gamma_{nm}^l(\text{div} II)_{il}]$$
3. $T \in \mathcal{D}_1^1(\mathcal{M})$ / $T = \text{div} \overline{S} - H E_v$ siendo $E_v \in \mathcal{D}_1^1(\mathcal{M})$ el tensor de evaluación, con lo que $H = -\frac{1}{2}CT$
4. $K \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{M})$ / $K = \det T$

Teorema 11.0.13.1 Hay una inmersión $f : \mathcal{M} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $<, > = f^*\mathcal{I}$ $II = f^*\mathcal{II}$ siendo $\mathcal{I}, \mathcal{II}$ la primera y segunda forma equiafin de $f(\mathcal{M})$ como subvariedad de $\mathbb{R}^3$

(Chapter head:)Alfabeto griego

El alfabeto griego empleado es el siguiente:

α	alfa	η	eta	μ	mu	τ	tau
β	beta	ξ	xi	ν	nu	υ	ípsilon
γ	gamma	θ	theta	$\omicron$	ómicron	φ	fi
δ	delta	ι	iota	π	pi	χ	ji
ϵ	épsilon	κ	kappa	ρ	rho	ψ	psi
ζ	szeda	λ	lambda	σ	sigma	ω	ómega

Parte IV

Bibliografía

Referencias

- [1] Gary R. Jensen, *Higher Order Contact of Submanifolds of Homogeneous Spaces*, Lecture Notes in Mathematics 610
- [2] Javier Lafuente López, *Sobre el problema de clasificación de curvas en una geometría de Klein*, Contribuciones matemáticas: homenaje a J. Arregui.
- [3] Javier Lafuente López, *Sobre el orden de contacto entre variedades sumergidas*, Contribuciones matemáticas: homenaje a E. Outerele
- [4] Angel Miguel Amores Lázaro, *Curso básico de curvas y superficies*, Ed. Sanz y Torres 2001
- [5] P. do Carmo, *Geometría diferencial de curvas y superficies*, Ed. Alianza Universidad Textos 1990
- [6] Elmer G. Rees, *Notes on Geometry*, Ed. Springer Universitext
- [7] Michael Spivak, *A Comprehensive Introduction to Differential Geometry, Vol 3*, Publish or Perish. INC. 1975
- [8] Barrett O'Neill, *Semi-Riemannian Geometry*, Academic Press 1983
- [9] E.J. Wilczynski, *Projective differential geometry of curves and ruled surfaces*, Leipzig, Teubner 1906
- [10] C.M. Jessop, *A treatise on the line complex*, Cambridge University Press 1903
- [11] W.L. Edge, *The theory of Ruled Surfaces*, Cambridge University Press 1931
- [12] H. Pottman, J. Wallner, *Computational Line Geometry*, Springer 2001