LAS CONEXIONES ASOCIADAS A UNA ESTRUCTURA CONFORME. LA CONEXIÓN DE CARTAN

Beatriz Salvador Allué (Dirigida por Javier Lafuente)

Junio de 1999

Índice

I Elevación de la conexión de Fermi-Walker al fibrado de referencias conformes. 1

1. La conexión de Fermi-Walker en un espacio conforme 1

1.1. Desarrollo preliminar 1
1.2. La Conexión de Fermi-Walker a lo largo de curvas 4

2. Sobre las conexiones en las G-estructuras 8

2.1. G-estructuras en una variedad diferenciable 8
2.2. Conexiones en G-estructuras 9
2.3. Tensor diferencia de conexiones en G-estructuras. 11
2.4. Primera prolongación del álgebra de Lie $\mathfrak{co}(\mathbb{V})$ 13

3. Conexión de Fermi-Walker en $CO(M)$ 15

3.1. El fibrado tangente de segundo orden de M 15
3.2. Función elevación asociada a la conexión de Fermi-Walker 16

II La conexión normal de Cartan en un espacio conforme 24

4. La primera prolongación del fibrado de referencias conformes 24

4.1. Productos semidirectos 24
4.2. Primera prolongación de una G-estructura 25
4.3. Primera prolongación de $CO(M)$ 27
4.3.1. Obtención de $CO(M)_1$ a partir de κ. 28

5. Conexión normal de Cartan en $(M, \mathcal{C})$ 31

5.1. $G/H-$Estructura tangencial 31
5.2. Conexiones de Cartan 32
5.2.1. Notaciones 32
5.3. Conexiones Normales de Cartan. 34
5.3.1. $G/H-$Estructuras tangenciales normales 34
5.3.2. Estructura tangencial conforme 35
5.3.3. Conexiones adaptadas de Cartan 37
5.3.4. Curvatura 38
5.3.5. Conexiones normales de Cartan 39
5.4. Conexión normal de Cartan en un espacio conforme 40

6. Tensor de curvatura de Weyl 42

6.1. Curvatura de la conexión normal de Cartan 42
6.2. Equivalencia dada por una conexión 44
6.3. Curvatura de la conexión de Cartan y curvatura de Weyl 45

Resumen

Una conexión lineal ∇ en una variedad diferenciable M asigna de forma natural a cada curva regular $\gamma : I \to M$ una ley de derivación $\nabla^\gamma/dt : \mathfrak{X}(\gamma) \to \mathfrak{X}(\gamma)$ sobre los campos a lo largo de γ. Se denomina *conexión* (a lo largo de γ) *inducida por* ∇.

Supóngase ahora que la conexión ∇ es compatible con la G-estructura $\mathfrak{p} : B \to M$. El transporte paralelo de referencias a lo largo de curvas γ inducido por ∇^γ/dt permite construir mediante un proceso bien conocido, aplicaciones de elevación entre los espacios tangentes de M y de B, que determinan completamente ∇.

Concretamente, $\forall x \in M, \forall b \in \mathfrak{p}^{-1}(x)$, el espacio vectorial T_xM es linealmente elevado, a través de $\kappa_b^\nabla : T_xM \to T_bB$, a un subespacio horizontal $\mathcal{H}_b^\nabla \subset T_bB$ suplementario al subespacio vertical $\mathcal{V}_b$ del fibrado B.

De forma análoga, si $\mathcal{C} = \{e^{2f}g \ / \ f : M \to \mathbb{R} \text{ diferenciable}\}$ es una estructura conforme riemanniana sobre M, hemos encontrado una forma natural de asignarle a cada curva regular $\gamma : I \to M$ una conexión D^γ/dt (a lo largo de γ) que sólo depende de la estructura conforme $\mathcal{C}$. Esta conexión viene definida por la condición de coincidir con la inducida a lo largo de γ por la de Levi-Civita de *cualquier* métrica conforme $g \in \mathcal{C}$ que tenga a γ como geodésica.

Se demuestra que D^γ/dt está bien definida, y que para todas aquellas $g \in \mathcal{C}$ que hacen a γ curva unitaria, D^γ/dt es análoga a la clásica conexión de Fermi-Walker usada en relatividad. Esto justifica el hecho de que llamemos a D^γ/dt la *conexión de Fermi-Walker* a lo largo de γ inducida por $\mathcal{C}$.

Es claro que la conexión de *Fermi-Walker* asociada a la estructura conforme no se corresponde con ninguna conexión lineal en M; sin embargo, usando el transporte paralelo de referencias a lo largo de curvas regulares γ inducido por D^γ/dt, es posible construir aplicaciones de elevación al fibrado $B = CO(M)$ de referencias conformes. Estas elevaciones aparecen ahora definidas sobre el fibrado tangente de segundo orden T^2M de M, de modo que $\forall x \in M$, $\forall b \in \mathfrak{p}^{-1}(x)$, tenemos una inyección:

$$\kappa_b = \kappa_b^{\mathcal{C}} \ : T_x^2M \to T_bCO(M) \text{ tal que } \mathfrak{p}_* \circ \kappa_b = \mathrm{q}_x : T_x^2M \to T_xM$$

verificando la siguiente condición de compatibilidad con la acción del grupo

$$\kappa_{b.\alpha} = \kappa_{R_\alpha(b)} = R_{\alpha *} \circ \kappa_b, \forall \alpha \in \ CO(m).$$

El espacio horizontal $\mathcal{H}_b = \mathcal{H}_b^{\mathcal{C}} = \operatorname{Im} \kappa_b^{\mathcal{C}} \subset T_bCO(M)$ se puede obtener como unión de suplementarios del espacio vertical $\mathcal{V}_b$ de $T_bCO(M)$ de la siguiente forma:

Si $g \in \mathcal{C}$ se denota

$$\kappa_b^g = \kappa_b^\nabla : T_xM \to T_bCO(M)$$

y $\mathcal{H}_b^g = \mathcal{H}_b^\nabla$ siendo ∇ la conexión de Levi-Civita, resulta entonces que

$$\mathcal{H}_b^{\mathcal{C}} = \bigcup_{g \in \ \mathcal{C}} \mathcal{H}_b^g$$

y $\mathcal{H}_b^{\mathcal{C}}$ es por tanto la unión disjunta de los distintos subespacios horizontales de métricas conformes. Por otra parte, $\kappa_b^{\mathcal{C}}$ reune la información a través de T_x^2M de las distintas elevaciones $\kappa_b^g : T_xM \to T_bCO(M)$, correspondientes a las metricas $g \in \mathcal{C}$.

En definitiva, por medio de la conexión de *Fermi-Walker* asociada a la estructura conforme $\mathcal{C}$, llegamos a la obtención de una familia de elevaciones horizontales $\{\kappa_b^{\mathcal{C}}\}_{x\in M, b\in CO(M)_x}$ que nos ofrece una manera alternativa de describir y estudiar la estructura conforme $\mathcal{C}$ en M.
Por ejemplo, la conexión normal de Cartan (y por tanto el tensor de curvatura de Weyl), puede obtenerse a partir de esta familia de funciones de elevación asociada a $\mathcal{C}$.
La clave está en el hecho de que la familia $\{\kappa_b^{\mathcal{C}}\}_{x\in M, b\in CO(M)_x}$ permite describir (en cada punto b de $CO(M)$) el haz de subespacios horizontales posibles para conexiones simétricas en la estructura conforme, que se identifica con la primera prolongación $CO(M)_1$ de $CO(M)$, y este subfibrado $CO(M)_1$ de $L(CO(M))$ determina completamente la conexión normal de Cartan (y la curvatura de Weyl).

Parte I
Elevación de la conexión de Fermi-Walker al fibrado de referencias conformes.

1. La conexión de Fermi-Walker en un espacio conforme

Partiendo de una estructura conforme Riemanniana $\mathcal{C}$ en la variedad M se llega a definir una "conexión" especial, que llamamos conexión de Fermi-Walker por estar relacionada con la designada por el mismo nombre en Relatividad General, y que asocia a cada curva regular $\gamma : I \to M$ una regla de derivación D/dt sobre campos a lo largo de γ. El término conexión está aquí utilizado en un sentido amplio puesto que no hace referencia a ningún operador covariante de derivación sobre los campos de M. No obstante, un hecho importante, y que juega un papel decisivo, es que localmente D/dt coincide con la derivación a lo largo de curvas dada por las conexiones de Levi-Civita de métricas compatibles de $\mathcal{C}$. De este modo, la conexión de Fermi-Walker compartirá algunas de las propiedades de tales conexiones lineales simétricas.

1.1. Desarrollo preliminar

Un espacio conforme $(M, \mathcal{C})$ consta de una variedad diferenciable M conexa, con dimensión m mayor o igual a dos, dotada de una estructura conforme $\mathcal{C}$. Recordemos que $\mathcal{C}$ viene determinada por una métrica semi-riemanniana g en M, y se identifica con la clase conforme de métricas

$$\mathcal{C} = \{e^{2f}g \ / \ f : M \to \mathbb{R} \text{ diferenciable } \}$$

Las métricas pertenecientes a $\mathcal{C}$ se denominan *métricas admisibles* o *compatibles con* $\mathcal{C}$.

En adelante trataremos sólo con espacios conformes riemannianos, es decir, aquellos cuya estructura conforme $\mathcal{C}$ esté determinada por una métrica riemanniana g en M.

Naturalmente, la estructura conforme $\mathcal{C}$ es heredada por abiertos $\mathcal{U}$ de M, y su restricción se denotará por el mismo nombre. Si g es una métrica definida sobre $\mathcal{U}$ escribimos $Dom(g) = \mathcal{U}$, y si es compatible con $\mathcal{C}$ escribiremos por abuso $g \in \mathcal{C}$.

En general, una curva $\gamma : I \to M$ se dirá que es un *reloj* si $P = \gamma(I)$ es subvariedad regular de M y $\gamma'(t) \neq 0$ para todo $t \in I$, es decir, γ es una inmersión. Por lo tanto, si γ es un reloj, se tiene que $g(\gamma'(t), \gamma'(t)) > 0$, $\forall t \in I$, $\forall g \in \mathcal{C}$. Si $g \in \mathcal{C}$, diremos que γ es un *g-reloj* si $\gamma(I) \subset Dom(g)$, y $g(\gamma'(t), \gamma'(t)) = 1$, $\forall t \in I$. Si además γ es g-geodésica, se dirá que γ es *g-reloj geodésico*.

Una sincronización para un reloj $\gamma : I \to M$, es una submersión $\mathbf{T} : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ ($\mathcal{U}$ abierto de M, $\gamma(I) \subset \mathcal{U}$) verificando las siguientes condiciones:

(a) $\mathbf{T}(\gamma(t)) = t$, $\forall t \in I$,
(b) $S_t = \mathbf{T}^{-1}(t)$ es hipersuperficie ortogonal a $\gamma'(t)$ en el punto $\gamma(t)$

Observación 1 *Si* $\mathbf{T}:\mathcal{U}\to\mathbb{R}$ *es una sincronización para un* g*-reloj geodésico* γ*, entonces se tiene la identidad:*

$$(grad_g\mathbf{T})(\gamma(t))=\gamma'(t),\forall t\in I \tag{1}$$

En efecto, ambos vectores son ortogonales a la hipersuperficie S_t *en el punto* $\gamma(t)$ *y por lo tanto resultan ser proporcionales,* $(grad_g\mathbf{T})(\gamma(t))=k_t.\gamma'(t)$*. Puesto que* $\gamma'(t)$ *es un vector unitario respecto a* g*, el factor de proporcionalidad* k_t *viene dado por:*

$$k_t=g(grad_g\mathbf{T}(\gamma(t)),\gamma'(t))=d_{\gamma(t)}\mathbf{T}(\gamma'(t))=\left.\frac{d}{dt}\right|_t\{\mathbf{T}\circ\gamma(t))\}=\left.\frac{d}{dt}\right|_t\{t\}=1.$$

Observación 2 *Si* $\gamma:I\to M$ *es un reloj, entonces, para cada* $\tau\in I$ *podemos tomar un intervalo abierto* I_τ *con* $\tau\in I_\tau\subset I$ *y un abierto* $\mathcal{U}_\tau$ *de* M *tales que* $\mathcal{U}_\tau\cap\gamma(I)=\gamma(I_\tau)$*, de modo que* $\gamma_\tau=\gamma\mid_{I_\tau}:I_\tau\to M$ *admite una sincronización* $\mathbf{T}_\tau:\mathcal{U}_\tau\to\mathbb{R}$*. Para ello basta tomar* $\mathcal{U}_\tau$ *un dominio de carta con coordenadas locales* $\varphi=(x^1,...,x^m):\mathcal{U}_\tau\to\mathbb{U}^m$ *tales que* $\mathcal{U}_\tau\cap\gamma(I)$ *se corresponda con* $\mathbb{U}^m\cap\{\mathbb{R}\times(0,...,0)\}\subset\mathbb{R}^m$ *y definir* $\mathbf{T}_\tau:\mathcal{U}_\tau\to\mathbb{R}$ *a través de su expresión en tal carta* $(x^1,x^2_,...,x^m)\mapsto(\varphi\circ\gamma)^{-1}(x^1,0,...,0)\in\mathbb{R}$*.*

Lema 1 *Sean* g*,* $\overline{g}\in\mathcal{C}$*, con* $\overline{g}=e^{2f}g$ *para cierta* $f\in C^\infty(M)$ *y supóngase* ∇ *la conexión de Levi-Civita de* g*. Entonces, si* $\mathbb{A}=grad_g(f)\in\mathfrak{X}(M)$*, la conexión* $\overline{\nabla}$ *definida por la identidad*

$$\overline{\nabla}_XY=\nabla_XY+X(f)Y+Y(f)X-g(X,Y)\mathbb{A} \tag{2}$$

para todo $X,Y\in\mathfrak{X}(M)$*, resulta ser la conexión de Levi-Civita de la métrica* $\overline{g}$*.*

Demostración:

Queda claro que la identidad (2) define una conexión simétrica en M, veamos que además ésta verifica la condición de compatibilidad con la métrica $\overline{g}$.

Sean $X,Y,Z\in\mathfrak{X}(M)$. Por la definición (2) de $\overline{\nabla}$ se tiene la siguiente igualdad

$$g(\overline{\nabla}_XY,Z)=g(\nabla_XY,Z)+X(f)g(Y,Z)+Y(f)g(X,Z)-Z(f)g(X,Y)$$

de modo que

$$g(\overline{\nabla}_XY,Z)+g(Y,\overline{\nabla}_XZ)=g(\nabla_XY,Z)+g(Y,\nabla_XZ)+2X(f)g(Y,Z)$$

Ahora, si desarrollemos la expresión $X(\overline{g}(Y,Z))$ tendremos

$$X(\overline{g}(Y,Z))=X(e^{2f}g(Y,Z))=e^{2f}\{2X(f)g(Y,Z)+X(g(Y,Z))\}=$$

$$=e^{2f}\{2X(f)g(Y,Z)+g(\nabla_XY,Z)+g(Y,\nabla_XZ)\}=e^{2f}\{g(\overline{\nabla}_XY,Z)+g(Y,\overline{\nabla}_XZ)\}=$$

$$=\overline{g}(\overline{\nabla}_XY,Z)+\overline{g}(Y,\overline{\nabla}_XZ)$$

Concluimos entonces que $\overline{\nabla}$ definida por (2) es la conexión de Levi-Civita de $\overline{g}$. ■

Proposición 1 *Si* $\gamma:I\to M$ *es un reloj, entonces:*

(a) *Dada una sincronización* $\mathbf{T}:\mathcal{U}\to\mathbb{R}$ *para el reloj* γ*, existe una única* $g\in\mathcal{C}$*, tal que*

$$g(grad_g(\mathbf{T}),grad_g(\mathbf{T}))=1.$$

Además, $grad_g(\mathbf{T})$ resulta ser un campo g-geodésico, y en particular γ (que por la observación 1 es curva integral de $grad_g(\mathbf{T})$) es un g-reloj geodésico.

(b) *Cualquier métrica $g \in \mathcal{C}$, tal que γ resulte ser un g-reloj geodésico, induce la misma conexión a lo largo de γ, que denotaremos por*

$$\frac{D}{dt} : \mathfrak{X}(\gamma) \rightarrow \mathfrak{X}(\gamma).$$

(c) *Si γ es un g-reloj para cierta $g \in \mathcal{C}$, la expresión de la conexión D/dt, en función de la conexión de Levi-Civita $\nabla/dt : \mathfrak{X}(\gamma) \rightarrow \mathfrak{X}(\gamma)$ inducida por g, es la siguiente:*

$$\frac{DV}{dt} = \frac{\nabla V}{dt} + g(\frac{\nabla \gamma'}{dt}, V)\gamma' - g(V, \gamma')\frac{\nabla \gamma'}{dt} \tag{3}$$

Demostración:

(a) Sea $\overline{g} \in \mathcal{C}$ una métrica auxiliar con dominio $\mathcal{U}$. Supongamos $g = e^{-2f}\overline{g}$ para cierta $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciable. Como para todo campo $X \in \mathfrak{X}(\mathcal{U})$ tenemos

$$\overline{g}(grad_{\overline{g}}(\mathbf{T}), X) = X(\mathbf{T}) = g(grad_g(\mathbf{T}), X) =$$

$$= e^{-2f}\overline{g}(grad_g(\mathbf{T}), X) = \overline{g}(e^{-2f} grad_g(\mathbf{T}), X),$$

se verifica la siguiente identidad

$$grad_{\overline{g}}(\mathbf{T}) = e^{-2f} grad_g(\mathbf{T}) \Longleftrightarrow grad_g(\mathbf{T}) = e^{2f} grad_{\overline{g}}(\mathbf{T}).$$

Por lo tanto, se concluye que

$$f = \frac{1}{2}\log(\overline{g}(grad_{\overline{g}}\mathbf{T}, grad_{\overline{g}}\mathbf{T})). \tag{4a}$$

Probemos ahora que $grad_g(\mathbf{T})$ es campo g-geodésico. Como $g(grad_g(\mathbf{T}), grad_g(\mathbf{T})) = 1$, entonces para todo campo $X \in \mathfrak{X}(\mathcal{U})$ se verifica:

$$0 = X(g(grad_g(\mathbf{T}), grad_g(\mathbf{T})) =$$

$$= 2g(\nabla_X grad_g(\mathbf{T}), grad_g(\mathbf{T})) = 2H_{\mathbf{T}}(X, grad_g(\mathbf{T})) =$$

$$= 2H_{\mathbf{T}}(grad_g(\mathbf{T}), X) = 2g(X, \nabla_{grad_g(\mathbf{T})} grad_g(\mathbf{T}))$$

en donde $H_{\mathbf{T}}$ es el operador Hessiano de $\mathbf{T}$[1].

Se concluye de este modo que $\nabla_{grad_g(\mathbf{T})} grad_g(\mathbf{T}) = 0$ y por tanto $grad_g(\mathbf{T})$ es un campo g-geodésico.

(b) Sea $g \in \mathcal{C}$, y $\overline{g} = e^{2f}g$. Si ∇ y $\overline{\nabla}$ denotan las correspondientes conexiones de Levi-Civita, por el lema anterior (2), se tiene que, siendo $\mathbb{A} = grad_g f \in \mathfrak{X}(M)$,

$$\overline{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + X(f)Y + Y(f)X - g(X, Y)\mathbb{A}$$

o de forma equivalente:

$$\overline{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + g(\mathbb{A}, X)Y + g(\mathbb{A}, Y)X - g(X, Y)\mathbb{A}.$$

[1] En presencia de una métrica g en M, toda función $f \in C^\infty(M)$ tiene asociado un tensor simétrico $H_f \in \mathfrak{T}^0_2(M)$ que se define de la siguiente manera: $\forall X, Y \in \mathfrak{X}(M)$

$$H_f(X, Y) = g(\nabla_X(grad_g f), Y) = XY(f) - (\nabla_X Y)f$$

H_f recibe el nombre de *Hessiano de f* (veáse ([2],[12]) En particular, para $V \in \mathfrak{X}(\gamma)$ y denotando $A = \mathbb{A} \circ \gamma \in \mathfrak{X}(\gamma)$, se tiene:

$$\frac{\overline{\nabla}}{dt}V = \frac{\nabla}{dt}V + g(A,\gamma')V + g(A,V)\gamma' - g(\gamma',V)A \tag{5}$$

Supuesto que γ es un reloj respecto a las métricas g y $\overline{g}$, será $g(\gamma',\gamma') = 1 = \overline{g}(\gamma',\gamma') = e^{2f}g(\gamma',\gamma') = e^{2f}$ luego $f(\gamma(t)) = 0$ y $g(A,\gamma') = (f\circ\gamma)' = 0$. Queda por tanto

$$\frac{\overline{\nabla}V}{dt} = \frac{\nabla V}{dt} + g(A,V)\gamma' - g(\gamma',V)A \tag{6}$$

y para $V = \gamma'$, se obtiene

$$\frac{\overline{\nabla}\gamma'}{dt} = \frac{\nabla\gamma'}{dt} - g(\gamma',\gamma')A \Rightarrow \frac{\overline{\nabla}\gamma'}{dt} = \frac{\nabla\gamma'}{dt} - A. \tag{7}$$

De esta forma, si además se verifica que γ es reloj geodésico respecto a las métricas g y $\overline{g}$, entonces por (7) se concluye que $A = 0$ y por (6) queda claro que g y $\overline{g}$ inducen la misma conexión sobre γ.

(c) Supóngase ahora que γ es un g-reloj, y un $\overline{g}$-reloj geodésico. Entonces $\overline{\nabla}\gamma'/dt = 0$ y por definición es $D/dt = \overline{\nabla}/dt : \mathfrak{X}(\gamma) \to \mathfrak{X}(\gamma)$. Por (7), tenemos que

$$\mathbb{A} \circ \gamma = A = \frac{\nabla\gamma'}{dt}$$

y de este modo (6) da, de modo inmediato, la identidad (3). ■

Una consecuencia inmediata de la observación 2 y de la primera parte de esta proposición es el siguiente resultado, que encontramos también en [5].

Corolario 1 *Si $\gamma : I \to M$ es una curva regular, para cada $\tau \in I$ podemos tomar un intervalo abierto I_τ con $\tau \in I_\tau \subset I$ y una métrica $g \in \mathcal{C}$ de tal modo que $\gamma_\tau = \gamma \mid_{I_\tau}$ es una curva g-geodésica.*

1.2. La Conexión de Fermi-Walker a lo largo de curvas

Si $\gamma : I \to M$ es una curva regular en el espacio conforme $(M,\mathcal{C})$, en virtud de la proposición 1 y del corolario 1, para cada $\tau \in I$, la conexión $D/dt : \mathfrak{X}(\gamma_\tau) \to \mathfrak{X}(\gamma_\tau)$ dada por la fórmula (3) está unívocamente determinada, y en consecuencia se extiende rígidamente a todo $\gamma : I \to M$.

Esta conexión a lo largo de γ, $D/dt : \mathfrak{X}(\gamma) \to \mathfrak{X}(\gamma)$, depende únicamente de la estructura conforme $\mathcal{C}$ y recibirá el nombre de *conexión de Fermi-Walker* inducida por $\mathcal{C}$ a lo largo de γ, puesto que se corresponde, como justificaremos más adelante, con la denominada por el mismo nombre en Relatividad General ([9], [6]). Obsérvese que D/dt coincide a lo largo de γ_τ con la conexión de Levi-Civita de cualquier métrica compatible que tenga a γ_τ como geodésica (por lo tanto, su comportamiento local será el de una conexión métrica).

Lema 2 *Si $\gamma : I \to M$ es una curva regular unitaria para cierta $g \in \mathcal{C}$, entonces, la conexión de Fermi-Walker $D/dt : \mathfrak{X}(\gamma) \to \mathfrak{X}(\gamma)$ verifica la identidad:*

$$\frac{d\, g(V,W)}{dt} = g(\frac{DV}{dt},W) + g(V,\frac{DW}{dt}) \tag{8}$$

y viene caracterizada por las condiciones:

$$\frac{D\gamma'}{dt} = 0. \tag{9}$$

$$\frac{DV}{dt} = nor(\frac{\nabla V}{dt}) \ \text{si } V \in \mathfrak{X}(\gamma) \text{y } g(V,\gamma') = 0$$

siendo ∇ la conexión de Levi-Civita de g, y $nor(X) = X - g(X,\gamma')\gamma'$ la parte normal de $X \in \mathfrak{X}(\gamma)$.

Demostración:

La primera afirmación se deduce del hecho de que (por la proposición 1) D/dt es (localmente) la conexión inducida por una de Levi-Civita de cierta $\overline{g} = e^{2f} g \in \mathcal{C}$ que coincide con g sobre γ.

La afirmación $\frac{D\gamma'}{dt} = 0$, se deduce directamente de la fórmula (3) teniendo en cuenta que es $g(\gamma',\gamma') = 1$ y $g(\gamma', \frac{\nabla\gamma'}{dt}) = 0$.

Finalmente, si $g(V,\gamma') = 0$ entonces (3) da lugar a la siguiente expresión

$$\frac{DV}{dt} = \frac{\nabla V}{dt} + g(\frac{\nabla\gamma'}{dt}, V)\gamma' = \frac{\nabla V}{dt} - g(\gamma', \frac{\nabla V}{dt})\gamma' = nor(\frac{\nabla V}{dt})$$

■

Observación 3 *En el ámbito de Relatividad General (recordemos que éste se modela en un una variedad Lorentziana (M,g)), si γ es un observador (g-reloj temporal, con nuestra notación) y ∇ la conexión de Levi-Civita de g, las propiedades dadas en el Lema anterior, (8) y (9), caracterizan la denominada conexión de Fermi-Walker a lo largo de γ cuya importancia radica en permitir definir un estándar de no rotación para observadores no inerciales (esto es, para curvas no necesariamente g-geodésicas) (véase [9], [6]).*

Estudiemos como queda afectada la conexión de Fermi-Walker por un cambio de parámetro en la curva.

Proposición 2 *Sea $\gamma : I \to M$ una curva regular,$\mathbf{t} : J \ni s \mapsto \mathbf{t}(s) \in I$ un cambio de parámetro, y $\overline{\gamma} = \gamma \circ \mathbf{t} : J \to M$ la nueva curva reparametrizada. Sean D^γ/dt y $D^{\overline{\gamma}}/ds$ las correspondientes conexiones de Fermi-Walker. Entonces, si definimos para cada $V \in \mathfrak{X}(\gamma)$ el campo $\overline{V}(s) = V(\mathbf{t}(s)) \in \mathfrak{X}(\overline{\gamma})$ se tiene la siguiente relación:*

$$\left.\frac{D^{\overline{\gamma}}\overline{V}}{ds}\right|_s = \left.\frac{D^\gamma V}{dt}\right|_{\mathbf{t}(s)} \left.\frac{d\mathbf{t}}{ds}\right|_s - \left.\frac{d^2\mathbf{t}/ds^2}{d\mathbf{t}/ds}\right|_s \overline{V}(s) \tag{10}$$

Demostración:

Restringiendo M y γ si fuera necesario, podemos suponer sin pérdida de generalidad que existe una sincronización global $\mathbf{T} : M \to \mathbb{R}$ de γ y una $g \in \mathcal{C}$ tal que $g(grad_g(\mathbf{T}), grad_g(\mathbf{T})) = 1$. Por la proposición 1 se concluye que γ es g-geodésica (por **(a)**), y así, si ∇ es la conexión de Levi-Civita de g, $D^\gamma/dt = \nabla/dt$ (por **(b)**). Sea $\tau : J \to \mathbb{R}$ definida por

$$\left.\frac{d\mathbf{t}}{ds}\right|_s = e^{-\tau(s)} \Longleftrightarrow \tau(s) = -\log(\frac{d\mathbf{t}}{ds}) \tag{11}$$

Se define entonces $f : M \to \mathbb{R}$ por:

$$f(x) = \tau(\mathbf{t}^{-1}(\mathbf{T}(x))), \ \ \forall x \in M.$$

Probaremos que $\overline{\gamma}$ es g-geodésica para $\overline{g} = e^{2f} g$.

Tomando como en la proposición 1, $\mathbb{A} = grad_g f$ y $\overline{A} = \mathbb{A} \circ \overline{\gamma} \in \mathfrak{X}(\overline{\gamma})$, y usando (5), se tiene para $\overline{V} \in \mathfrak{X}(\overline{\gamma})$:

$$\frac{\overline{\nabla}\ \overline{V}}{ds} = \frac{\nabla \overline{V}}{ds} + g(\overline{A}, \overline{\gamma}')\overline{V} + g(\overline{A}, \overline{V})\overline{\gamma}' - g(\overline{\gamma}', \overline{V})\overline{A}$$

Si ahora tenemos en cuenta que f es constante sobre las hipersuperficies de nivel de $\mathbf{T}$, es claro que $\mathbb{A}$ es ortogonal a ellas, y en particular, $\overline{A}(s)$ debe ser proporcional a $\overline{\gamma}'(s)$. En consecuencia, el vector $g(\overline{A}, \overline{V})\overline{\gamma}' - g(\overline{\gamma}', \overline{V})\overline{A}$ es nulo, y queda:

$$\frac{\overline{\nabla}\ \overline{V}}{ds} = \frac{\nabla \overline{V}}{ds} + g(\overline{A}, \overline{\gamma}')\overline{V}$$

Por otra parte, $g(\overline{A}, \overline{\gamma}') = (f \circ \overline{\gamma})'$, y $(f \circ \overline{\gamma})(s) = \tau(\mathbf{t}^{-1}(\mathbf{T}(\gamma \circ \mathbf{t}(s)))) = \tau(\mathbf{t}^{-1}(\mathbf{t}(s))) = \tau(s)$. Por tanto

$$\frac{\overline{\nabla}\ \overline{V}}{ds} = \frac{\nabla \overline{V}}{ds} + \frac{d\tau}{ds}\overline{V} \tag{12}$$

En particular, tomando $\overline{V} = \overline{\gamma}' = d\overline{\gamma}/ds = d\gamma/dt.d\mathbf{t}/ds = \gamma'.d\mathbf{t}/ds$, queda:

$$\frac{\overline{\nabla}\overline{\gamma}'}{ds} = \frac{\nabla\overline{\gamma}'}{ds} + \frac{d\tau}{ds}\overline{\gamma}' \tag{13}$$

Desarrollemos ahora las expresiones del lado derecho de esta igualdad.

$$\begin{aligned} \frac{\nabla\overline{\gamma}'}{ds} &= \frac{\nabla\overline{\gamma}'}{dt}\frac{d\mathbf{t}}{ds} = \frac{\nabla(\gamma'.d\mathbf{t}/ds)}{dt}\frac{d\mathbf{t}}{ds} = (\frac{d}{dt}\left\{\frac{d\mathbf{t}}{ds}\right\}\gamma' + \frac{d\mathbf{t}}{ds}\frac{\nabla\gamma'}{dt})\frac{d\mathbf{t}}{ds} = \\ &= (\frac{d^2\mathbf{t}}{ds^2}(\frac{d\mathbf{t}}{ds})^{-1}\gamma')\frac{d\mathbf{t}}{ds} = \frac{d^2\mathbf{t}}{ds^2}\gamma' \end{aligned}$$

y por la definición de $\tau = -\log(d\mathbf{t}/ds)$ (11) se tiene

$$\frac{d\tau}{ds}\overline{\gamma}' = -\frac{d^2\mathbf{t}/ds^2}{d\mathbf{t}/ds}d\mathbf{t}/ds\gamma' = -\frac{d^2\mathbf{t}}{ds^2}\gamma' = -\frac{\nabla\overline{\gamma}'}{ds}$$

de donde se concluye, por (13), que $\overline{\nabla}\overline{\gamma}'/ds = 0$, y por lo tanto $\overline{\gamma}$ es g-geodésica. Así $D^{\gamma}/dt = \nabla/dt$ y $D^{\overline{\gamma}}/ds = \overline{\nabla}/ds$. Usando ahora la fórmula (12) obtenemos de modo inmediato el resultado (10). ■

Un campo $V \in \mathfrak{X}(\gamma)$ se dirá *Fermi-paralelo* a lo largo de γ si $DV/dt = 0$. Una clara consecuencia de la proposición que acabamos de ver es el siguiente resultado.

Corolario 2 *En las condiciones de la proposición anterior, si $V(t) \in \mathfrak{X}(\gamma)$ es Fermi-paralelo a lo largo de $\gamma(t)$, entonces,*

$$\widehat{V}(s) = \left.\frac{d\mathbf{t}}{ds}\right|_s V(\mathbf{t}(s)) \in \mathfrak{X}(\overline{\gamma})$$

lo es a lo largo de $\overline{\gamma}(s) = \gamma \circ \mathbf{t}(s)$.

Demostración:
Es inmediata utilizando la fórmula (10). ■

Dado que D/dt es (localmente) la conexión de Levi Civita de una $g \in \mathcal{C}$ es claro que el conjunto de campos Fermi-paralelos $\mathfrak{X}_{|\,|}(\gamma) = \{V(t) \in \mathfrak{X}(\gamma) : \frac{D}{dt}V(t) = 0\}$ es un subespacio vectorial real de $\mathfrak{X}(\gamma)$ y la siguiente aplicación

$$\begin{array}{rccc} |\ |_{t_0}: & \mathfrak{X}_{|\,|}(\gamma) & \to & T_{\gamma(t_0)}M \\ & V & \mapsto & V(t_0) \end{array} \tag{14}$$

es un isomorfismo vectorial para todo $t_0 \in I$.

Dado $v \in T_{\gamma(t_0)}M$, utilizaremos la notación $\mathbb{P}_\gamma v = \left(| \, |_{t_0} \right)^{-1}(v) \in \mathfrak{X}_{| \, |}(\gamma)$ y denotaremos por $(\mathbb{P}_\gamma v)(t)$ a la curva en el fibrado tangente

$$\begin{array}{rccc} \mathbb{P}_\gamma v: & I & \to & TM \\ & t & \mapsto & (\mathbb{P}_\gamma v)(t) \end{array}$$

La llamaremos *curva elevación horizontal de* γ *por* $v \in T_{\gamma(t_0)}M$.

Siendo la aplicación (14) un isomorfismo para todo $t \in I$, es claro que si los vectores $\{v_1, ..., v_m\}$ forman una base de $T_{\gamma(t_0)}M$ entonces los vectores $\{(\mathbb{P}_\gamma v_1)(t_1), ..., (\mathbb{P}_\gamma v_m)(t_1)\}$ correspondientes a sus transportados Fermi-paralelos también constituyen una base para $T_{\gamma(t_1)}M$, y por lo tanto, a través de D/dt tiene sentido el transporte paralelo de referencias:

> Si $b \in LM_{\gamma(t_0)}$, es decir, $b = \{v_1, ..., v_m\}$ es referencia para el espacio vectorial $T_{\gamma(t_0)}M$, su transportado paralelo se define como la curva en LM:
>
> $$(\mathbb{P}_\gamma b)(t) = \{(\mathbb{P}_\gamma v_1)(t), ..., (\mathbb{P}_\gamma v_m)(t)\} \in LM_{\gamma(t)}$$
>
> para toda $t \in I$.

Es más, si de nuevo hacemos uso del hecho de que D/dt es localmente una conexión métrica a lo largo de γ para cierta $g \in \mathcal{C}$, es claro que el transporte Fermi-paralelo de vectores preserva los ángulos y en consecuencia el operador D/dt también define un transporte paralelo en las referencias conformes.

En definitiva, si $b = \{v_1, ..., v_{m+1}\} \in CO(M)_{\gamma(t_0)}$ es referencia conforme de $T_{\gamma(t_0)}M$, entonces da lugar a la curva $\mathbb{P}_\gamma b : I \to CO(M)$ que a cada $t \in I$ le asigna el elemento

$$(\mathbb{P}_\gamma b)(t) = \{(\mathbb{P}_\gamma v_1)(t), ..., (\mathbb{P}_\gamma v_m)(t) \in CO(M)$$

Denominaremos a tal curva como la *elevación horizontal de* γ *por* $b \in CO(M)_{\gamma(t_0)}$.

Es claro por su definición que la operación de elevación de curvas de M a $CO(M)$ dada por la conexión de Fermi-Walker cumple la siguiente condición:

$$(\mathbb{P}_\gamma(b \cdot \alpha))(t) = (\mathbb{P}_\gamma b(t)) \cdot \alpha, \ \forall \alpha \in CO(m) \tag{15}$$

de compatibilidad con la acción del grupo.

2. Sobre las conexiones en las G-estructuras

La conexión de Fermi-Walker D/dt de un espacio conforme Riemanniano $(M, \mathcal{C})$, que hemos definido en la sección anterior, es un nuevo operador que en principio parece extraño a la teoría de conexiones lineales. En realidad, como veremos posteriormente, va a estar estrechamente relacionado a ellas (estará muy ligado a las conexiones de Levi-Civita de las $g \in \mathcal{C}$, y en particular, a las conexiones simétricas que éstas inducen en la G-estructura $CO(M)$).

Desarrollamos aquí parte de la teoría de conexiones en G-estructuras, centrando nuestro interés en las conexiones simétricas y en las $CO(M)$-estructuras.

La mayor parte de los resultados que se presentan son ya conocidos y, por lo tanto, están brevemente justificados. Se cita como referencia general para sus demostraciones los trabajos siguientes: [1], [15], [14],[12], [16], [4].

2.1. G-estructuras en una variedad diferenciable

Una estructura en un espacio vectorial $\mathbb{V}$ viene determinada por un subgrupo cerrado $\mathbb{G}$ del grupo (de Lie) de sus automorfismos lineales, $GL(\mathbb{V})$. Se denomina a $\mathbb{G}$ el grupo de transformaciones de la estructura y denotamos a la estructura por $(\mathbb{V}, \mathbb{G})$.

Un isomorfismo entre las estructuras $(\mathbb{V}, \mathbb{G})$ y $(\overline{\mathbb{V}}, \overline{\mathbb{G}})$ es un isomorfismo lineal $\varphi : \mathbb{V} \to \overline{\mathbb{V}}$, tal que la aplicación $\varphi_* : \mathbb{G} \to \overline{\mathbb{G}}$, con $\varphi_*(g) = \varphi \circ g \circ \varphi^{-1}$, es un isomorfismo de grupos.

En particular, un subgrupo G de $GL(m, \mathbb{R})$ induce una G-estructura en $\mathbb{R}^m$. Fijada una base b del espacio vectorial m-dimensional $\mathbb{V}$, queda subordinada una única $\mathbb{G}$-estructura en $\mathbb{V}$ tal que la aplicación de coordenadas $b : \mathbb{R}^m \to \mathbb{V}$, que lleva la base canónica de $\mathbb{R}^m$ a la base b de $\mathbb{V}$, sea isomorfismo de $(\mathbb{R}^m, G)$ en $(V, \mathbb{G})$. Llamamos entonces $\mathbb{G} = b_* G$.

Definición 1 *Sea G un subgrupo de Lie de $GL(m, \mathbb{R})$. Una G-*estructura *en una variedad M, m-dimensional, es una G-reducción B_G del fibrado principal LM. Es decir, B_G es una subvariedad de LM con la propiedad de que para todo par $b \in B_G$, $A \in GL(m, \mathbb{R})$ el punto $b \cdot A$ pertenece a B_G si y sólo si $A \in G$.*

Una G-estructura sobre la variedad diferenciable M, puede interpretarse como una regla que asigna a cada espacio tangente una estructura $(T_x M, G_x)$ con la siguiente condición de diferenciabilidad:

> $\forall x \in M$, existe un entorno $\mathcal{U}$ de x en M y $\sigma : \mathcal{U} \to LM$ sección local, tal que $G_x = \sigma(x)_* G$.

De esta forma, si para cada $x \in M$ definimos $B_x = \{b \in LM_x : G_x = b_* G\}$, $B = \bigsqcup_{p \in M} B_x \subset LM$ resulta ser una G-reducción del fibrado principal LM, con lo que se recupera el concepto tradicional de G-estructura en M.

Definición 2 *Dada la G-estructura B denotaremos por $\mathfrak{p} : B \to M$ a la proyección canónica, y $\theta \in \Lambda^1(TB, \mathbb{R}^m)$ será la* forma canónica vertical*, que viene definida por la identidad*

$$\theta(X_b) = b^{-1} \mathfrak{p}_*(X_b)$$

para todo $b \in B$, $X_b \in T_b B$. Se denota por $\mathcal{V}_b = \ker \mathfrak{p}_* \subset T_b B$ al subespacio vertical de $T_b B$.

Hay una "paralelización" vertical natural en B definida de la siguiente forma: Dado $A \in \mathfrak{g}$, se le hace corresponder el *campo fundamental vertical* $A^{\#}$ que asigna a cada $b \in B$ el vector vertical

$$A^{\#}(b) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} b.(\exp(tA)) = R_{b*}(A)$$

La aplicación $\mathfrak{g} \ni A \to A^{\#}(b) \in \mathcal{V}_b$ resulta ser un isomorfismo lineal.

Un subespacio $\mathcal{H}_b$ de T_bB se dice *horizontal* si $T_bB = \mathcal{H}_b \oplus \mathcal{V}_b$. Nótese que $\mathfrak{p}_* : \mathcal{H}_b \to T_xM$ define entonces un isomorfismo lineal morfismo inverso es la elevación horizontal $k_b : T_xM \to \mathcal{H}_b$

2.2. Conexiones en G-estructuras

Definición 3 *Una* conexión λ *en una G-estructura B es $\mathcal{H}^\lambda = \bigsqcup_{b\in LM} \mathcal{H}_b^\lambda$, subfibrado de $T(B)$ sobre M, tal que:*

(i) *para cada $b \in B$ la fibra $\mathcal{H}_b^\lambda$ (que llamamos subespacio horizontal de λ) es un subespacio vectorial suplementario al subespacio vertical $\mathcal{V}_b$ de B en $T_\alpha B$. Es decir, $\mathcal{H}_b^\lambda \oplus \mathcal{V}_b = T_bB$.*

(ii) *para todo $A \in G$, $R_{A*}(\mathcal{H}_b^\lambda) = \mathcal{H}_{b\cdot A}^\lambda$.*

Una conexión lineal λ en M es una conexión en la $GL(m;\mathbb{R})$-estructura LM.

Si h^λ, l^λ denotan los proyectores horizontal y vertical de la descomposición $T_bB = \mathcal{H}_b^\lambda \oplus \mathcal{V}_b$, la *forma horizontal* $\omega^\lambda \in \Lambda^1(B, \mathfrak{g})$ de la conexión λ viene definida por :

$$(\omega^\lambda(\xi_b))^{\#}(b) = l^\lambda(\xi_b),\ \forall \xi_b \in T_bB \tag{16}$$

Es inmediato comprobar que $\xi_b \in \ker(\omega_b^\lambda) \Longleftrightarrow \xi_b \in \mathcal{H}_b^\lambda$, de modo que a partir de su forma horizontal ω^λ podemos recuperar completamente $\mathcal{H}^\lambda$.

Sea $\gamma : I \to M$ curva en M, una elevación λ-horizontal de γ es una curva, $\widehat{\gamma} : I \to B$, verificando para todo $t \in I$:

(a) $\mathfrak{p} \circ \widehat{\gamma}(t) = \gamma(t)$
(b) $\widehat{\gamma}'(t) \in \mathcal{H}^\lambda_{\widehat{\gamma}(t)} \subset T_{\widehat{\gamma}(t)}B$

Fijado $b \in B_{\gamma(t_0)}$, existe una única elevación λ-horizontal con la condición inicial de alcanzar en t_0 el elemento b, y la denotamos por $\mathbb{P}_\gamma^\lambda b : I \to B$. Tomando $X \in \mathfrak{X}(\mathcal{U})$, campo en un entorno $\mathcal{U}$, que extiende a $\gamma' \in \mathfrak{X}(\gamma)$, y $\widehat{X} \in \mathfrak{X}(\mathfrak{p}^{-1}(\mathcal{U}))$ su elevación λ-horizontal (i.e. $\mathfrak{p}_*(\widehat{X}) = X$, $\omega^\lambda(\widehat{X}) = 0$), la curva $\mathbb{P}_\gamma b : I \to B$ elevación horizontal de γ por b se obtiene entonces como la curva integral del campo $\widehat{X}$ por b. Es claro que $(\mathbb{P}_\gamma^\lambda b)'(b)$ es el único vector en $\mathcal{H}_b^\lambda$ que se proyecta sobre $\gamma'(b)$, y por tanto, está completamente determinado por $\gamma'(b)$.

Además, $\forall t \in I$, la aplicación $P_{\gamma,t_0,t} : B_{\gamma(t_0)} \to B_{\gamma(t)}$, $b \mapsto P_{\gamma,t_0,t}(b) = \mathbb{P}_\gamma^\lambda b(t)$, es un isomorfismo lineal. $P_t = P_{\gamma,t_0,t}$ es el transporte paralelo (respecto de λ) a lo largo de γ.

Definición 4 *Un operador derivada covariante ∇ en M es una aplicación $\mathbb{R}$-bilineal, $\nabla : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$, con $\nabla(X,Y) = \nabla_XY$, tal que verifica, para $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, $f \in C^\infty(M)$, las siguientes propiedades:*

(i) $\nabla_{fX}Y = f\nabla_XY$
(ii) $\nabla_X(fY) = X(f)Y + f\nabla_XY$

Es conocido que si en M contamos con la presencia de una derivada covariante es posible definir sobre curvas $\gamma : I \to M$ una noción de campo paralelo ($V \in \mathfrak{X}_{|.|}(\gamma)$ si $\nabla/dtV = 0$), y da lugar al transporte paralelo $|\cdot|^{\nabla}_{\gamma,t_o,t_1} : T_{t_0}M \to T_{t_1}M$, tal que $|\cdot|^{\nabla}_{\gamma,t_o,t_1}(v) = V(t_1)$, siendo V el único campo ∇-paralelo de condición inicial $V(t_0) = v$.

Observación 4 *Si λ es una conexión de la G-estructura B, podemos definir para $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, la λ-derivada covariante de Y respecto a X, $\nabla^{\lambda}_X Y \in \mathfrak{X}(M)$, por el siguiente procedimiento geométrico:*

(A) *Dado $x \in M$ y $u = X(x)$, tómese una curva $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$, con $\gamma'(0) = u$, y fijemos $b = (e_1, \dots e_m) \in B_x$ una base en T_xM de la G-estructura.*

(B) *Elévese λ-horizontalmente γ por b, $\mathbb{P}^{\lambda}_{\gamma} b(t) = (E^{\lambda}_1(t), \dots E^{\lambda}_m(t))$ y sean $\xi_i(t)$ las funciones tales que $Y(\gamma(t)) = \sum \xi_i(t) E^{\lambda}_i(t)$.*

(C) *Sea $Y_\gamma(t) \in T_xM$ el λ-transporte de $Y(\gamma(t))$ desde $\gamma(t)$ a $x = \gamma(0)$, es decir, $Y_\gamma(t) = \sum \xi_i(t) e_i$, entonces se tiene:*

$$\left(\nabla^{\lambda}_X Y\right)(x) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} Y_\gamma(t) = \xi'_i(0) e_i$$

Observación 5 *Recíprocamente, si ∇ es una derivada covariante en M, podemos definir en M una conexión lineal $\lambda(\nabla)$ asociada a ∇. Para cada $b = (v_1, ..., v_m) \in LM$, sea $x = \mathfrak{p}(b) \in M$, definimos entonces*

$$\mathcal{H}_b = \left\{ \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} (V^{\gamma}_1, ..., V^{\gamma}_m)(t) : \gamma \text{ curva por } x,\ V^{\gamma}_i \in \mathfrak{X}_{|.|}(\gamma) \text{ con } V^{\gamma}_i(0) = v_i \right\}$$

Se comprueba sin dificultad que $\mathcal{H}_b \subset T_bLM$ es subespacio vectorial, y el subfibrado $\mathcal{H} = \bigsqcup_{b \in LM} \mathcal{H}_b$ cumple todos los axiomas de conexión en LM.

Observación 6 *Las operaciones de asociación definidas en las dos observaciones anteriores son recíprocas la una de la otra, es decir, $\lambda(\nabla^{\lambda}) = \lambda$ y $\nabla^{\lambda(\nabla)} = \nabla$. Por lo tanto, queda clara la existencia de una equivalencia biunívoca entre las nociones de derivada covariante y de conexión lineal en M, y el modo en que estas se relacionan. En adelante, haremos uso de esta equivalencia llamando conexión lineal a λ y a ∇ indistintamente.*

Una conexión lineal λ en M, se dice que es compatible con (o es de) la G-estructura B si induce una conexión en B, es decir, si para cada x, $y \in M$ y cada curva γ uniendo x con y, el transporte paralelo a lo largo de γ da lugar a un isomorfismo entre las estructuras (T_xM, G_x) y (T_yM, G_y). Además, toda conexión en la G-estructura B está inducida por una conexión lineal λ en M.

Definición 5 *Como es sabido, si λ es una conexión lineal en B , la fórmula*

$$Tor^{\lambda}(X, Y) = \nabla^{\lambda}_X Y - \nabla^{\lambda}_Y X - [X, Y]$$

define un tensor $Tor^{\lambda} \in \mathfrak{T}^1_2(M)$ hemisimétrico, que se denomina torsión *de λ. Una conexión λ se dice* conexión simétrica *cuando su torsión es nula.*

En adelante trataremos sólo con G-estructuras que admitan al menos una conexión simétrica, y la palabra conexión significará siempre conexión simétrica.

Existe una forma alternativa de describir la torsión de λ.
Sea $\mathcal{H}^{\lambda}_b \subset T_bB$ el subspacio horizontal definido por λ en b, sean h^{λ}, l^{λ} los proyectores horizontal y vertical de la descomposición $T_bB = \mathcal{H}^{\lambda}_b \oplus \mathcal{V}_b$ y $k^{\lambda}_b : T_xM \to$

$\mathcal{H}_b^\lambda \subset T_b B$ la correspondiente elevación horizontal; $\theta \in \Lambda^1(TB, \mathbb{R}^m)$ es la forma canónica vertical (ver definición 2). Fijados $b \in B_x$, u, $v \in T_x M$, se tiene la identidad:

$$Tor^\lambda(u,v) = b \circ d\theta\left(k_b^\lambda(u), k_b^\lambda(v)\right) \tag{17}$$

Si Θ^λ es la parte horizontal de $d\theta$, es decir

$$\Theta^\lambda(X_b, Y_b) = d\theta(h^\lambda X_b, h^\lambda Y_b)$$

se tiene que Θ^λ se anula sobre los vectores verticales, y

$$Tor^\lambda(u,v) = b \circ \Theta^\lambda(X_b, Y_b) \text{ si } \mathfrak{p}_*(X_b) = u, \text{ y } \mathfrak{p}_*(Y_b) = v$$

Además, se verifica la ecuación de estructura ([14], [2], [1]):

$$d\theta = -\omega^\lambda \wedge \theta + \Theta^\lambda \tag{18}$$

entendiendo que

$$\left(\omega^\lambda \wedge \theta\right)(X_b, Y_b) = \omega^\lambda(X_b)\,\theta(Y_b) - \omega^\lambda(Y_b)\,\theta(X_b)$$

y siendo ω^λ la forma horizontal de la conexión λ (16).

2.3. Tensor diferencia de conexiones en G-estructuras.

Obsérvese que si λ y μ son dos conexiones lineales en M, entonces la aplicación $\varphi^{\lambda\mu} : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$ definida por

$$\varphi^{\lambda\mu}(X,Y) = \nabla_X^\mu Y - \nabla_X^\lambda Y$$

define un tensor $\varphi^{\lambda\mu} \in \mathfrak{T}_2^1(M)$, simétrico en sus dos primeras componentes, que se denomina *tensor diferencia entre las conexiones* λ y μ.

En particular, dada una G-estructura B en M, nuestro interés está en estudiar el tensor diferencia entre las distintas conexiones en la G-estructura B.

Definición 6 *Sea G una estructura en el espacio vectorial $\mathbb{V}$, y sea $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}(\mathbb{V}) = End(\mathbb{V})$ el álgebra de Lie de G. Llamamos* primera prolongación de $\mathfrak{g}$ *al conjunto $\mathfrak{g}_1$ de las formas bilineales simétricas*

$$\varphi : \mathbb{V} \times \mathbb{V} \ni (u,v) \to \varphi(u,v) = \varphi_u(v) \in \mathbf{V}$$

de forma que $\varphi_u \in \mathfrak{g}$ para $u \in \mathbb{V}$. Así, un elemento $\varphi \in \mathfrak{g}_1$ puede también interpretarse como un elemento de $\mathbb{V}^* \otimes \mathfrak{g}$, es decir, como una aplicación lineal

$$\varphi : \mathbb{V} \ni u \to \varphi_u \in \mathfrak{g}$$

que verifica $\varphi_u(v) = \varphi_v(u)$ $\forall u, v \in \mathbb{V}$ (véase [13], [15]).

Obsérvese que $\mathfrak{g}_1$ es subespacio vectorial de $\mathbb{V}^* \otimes \mathfrak{g}$, y por tanto, está dotado de estructura de espacio vectorial real.

Teorema 1 *Dada la G-estructura B sobre M, sea λ una conexión de B, y $\varphi \in \mathfrak{T}_2^1(M)$ tal que $\varphi_x \in (\mathfrak{g}_x)_1$ para todo $x \in M$. Entonces, la conexión μ definida por*

$$\nabla_X^\mu Y = \nabla_X^\lambda Y + \varphi(X,Y) \tag{19}$$

es una conexión de B.

Además, todas las conexiones (simétricas) de B pueden obtenerse por este procedimiento.

Demostración:

Si λ y μ son dos conexiones lineales (simétricas) en B, entonces la aplicación diferencia de conexiones $\varphi = \varphi^{\lambda\mu} \in \mathfrak{T}^1_2(M)$ definida más arriba, es claramente un tensor simétrico. Debemos demostrar que para cada $x \in M$, y $u \in T_xM$, la aplicación $\varphi_u : T_xM \ni v \to \varphi(u,v) \in T_xM$, está en $\mathfrak{g}_x$. Si fijamos $b \in B_x$ probar que $\varphi_u \in \mathfrak{g}_x$ equivale a demostrar que la matriz A asociada a $b^{-1}\circ\varphi_u\circ b : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ está en el álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ de la G-estructura.

Para ello aplicamos el procedimiento descrito en la observación 4. Sea $\gamma : (-\varepsilon,\varepsilon) \to M$ una curva con $\gamma'(0) = u$, y sea $\mathbb{P}^\lambda_\gamma b(t) = \left(E^\lambda_1(t), \ldots, E^\lambda_m(t)\right)$ la λ-elevación horizontal de γ por $b = (e_1, \ldots, e_m) \in B_x$. Para $v = \sum_{i=1}^m \xi^i e_i$, $\xi^i \in \mathbb{R}$, $V^\lambda(t) = \sum_{i=1}^m \xi^i E^\lambda_i(t)$ es el λ-transporte de v a lo largo de γ. Sea $V(t) \in T_xM$ el μ-transporte de $V^\lambda(t)$ a $\gamma(0) = x$, a lo largo de γ

$$V(t) = \sum_{i=1}^m \xi^i E_i(t) \in T_xM \tag{20}$$

donde $E_i(t) \in T_xM$ es el μ-transporte de $E^\lambda_1(t)$ a $\gamma(0) = x$, a lo largo de γ. Como $\gamma_b(t) = (E_1(t), \ldots, E_m(t))$ es una curva en la fibra B_x, existe (para cada t) una matriz $g_t \in G$ tal que

$$\gamma_b(t) = b \cdot g_t$$

con g_0 igual a la matriz identidad, y la igualdad 20, también puede escribirse

$$V(t) = bg_t\xi$$

De esta forma se tiene:

$$\varphi_u(v) = \varphi(u,v) = \left.\frac{\nabla^\mu V^\lambda(t)}{dt}\right|_{t=0} = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0}(bg_t\xi) = b\left(\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} g_t\right)\xi$$

esto prueba que el vector $v = b\xi$ se transforma por φ_u en $b(A\xi)$ con $A = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} g_t \in \mathfrak{g}$ por ser g_t curva en G con $g_0 = I_m \in G$.

Recíprocamente, si λ es una conexión lineal simétrica de B, y $\varphi \in \mathfrak{T}^1_2(M)$ es un tensor simétrico, es fácil ver que el operador $\nabla^\mu_X Y = \nabla^\lambda_X Y + \varphi(X,Y)$ define una conexión simétrica de LM. Supóngase la hipótesis añadida de ser $\varphi_x \in (\mathfrak{g}_x)_1$, para todo $x \in M$. Con las notaciones anteriores, se obtiene (liberando la condición $t = 0$)

$$\frac{\nabla^\mu}{dt}\mathbb{P}^\lambda_\gamma b(t) = \varphi_{\gamma'(t)}(\mathbb{P}^\lambda_\gamma b(t)) = \mathbb{P}^\lambda_\gamma b(t).A(t) \text{ con } A(t) \in \mathfrak{g}, \forall \mathrm{t}$$

Esto permite concluir, que:

$$\mathbb{P}^\mu_\gamma b(t) = \mathbb{P}^\lambda_\gamma b(t).\exp\left(-A(t)\right) \in B_{\gamma(t)}.G = B_{\gamma(t)}$$

puesto que de esta manera (única) se consigue que:

$$\begin{aligned}
\frac{\nabla^\mu}{dt}\mathbb{P}^\mu_\gamma b(t) &= \frac{\nabla^\mu}{dt}\left(\mathbb{P}^\lambda_\gamma b(t)\exp(-A(t))\right) \\
&= \mathbb{P}^\lambda_\gamma b(t)A(t)\exp\left(-A(t)\right) - \mathbb{P}^\lambda_\gamma b(t)A(t)\exp\left(-A(t)\right) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

En consecuencia, las curvas elevación para elementos $b \in B_x$ son curvas $\mathbb{P}^\mu_\gamma b(t)$ en B, y de este modo, concluimos que la conexión lineal ∇^μ es también conexión en B. ■

Observación 7 *Este teorema hace referencia a las conexiones simétricas de una G-estructura. No obstante, con una demostración análoga se obtiene fácilmente un resultado más general para conexiones no necesariamente simétricas.*

Si inicialmente tomamos λ conexión en la G-estructura B, y cuya torsión viene dada por $Tor^{\lambda} = T \in \mathfrak{T}_2^1(M)$, entonces, mediante la expresión (19) se caracterizan todas las posibles conexiones en la G-estructura con idéntica torsión $T \in \mathfrak{T}_2^1(M)$.

La aplicación inmediata del teorema que hemos visto para las $O(m)$-estructuras es la siguiente

Observación 8 *La primera prolongación de $\mathfrak{o}(\mathbb{V})$ de una estructura euclidea $O(\mathbb{V})$ de un espacio vectorial $\mathbb{V}$, es $\mathfrak{o}(\mathbb{V})_1 = 0$.*

En efecto, fijamos una base normal de $\mathbb{V}$, $\{e_1, ..., e_m\}$. Todo elemento φ de $\mathfrak{o}(\mathbb{V})_1 \subset \mathbb{V}^* \otimes \mathbb{V}^* \otimes \mathbb{V}$ tendrá una expresión (t_{ij}^k) (siendo $\varphi(e_i, e_j) = \sum_k t_{ij}^k e_k$). Por definición, ha de ser $\varphi(e_i, e_j) = \varphi(e_i, e_j)$, esto es $t_{ij}^k = t_{ji}^k$. Además, al ser $\varphi(e_i) \in \mathfrak{o}(\mathbb{V})$ se verifica que $t_{ij}^k = -t_{ik}^j$. Entonces, $\forall i, j, k$

$$t_{ij}^k = t_{ji}^k = -t_{jk}^i = -t_{kj}^i = t_{ki}^j = t_{ik}^j = -t_{ij}^k \Leftrightarrow t_{ij}^k = 0$$

Es decir, $(t_{ij}^k) = 0 \Leftrightarrow \varphi = 0$.

Por tanto, en una $O(m)$-estructura $O(M)$ no existe más que una conexión (simétrica), y esta es la llamada conexión de Levi-Civita.

2.4. Primera prolongación del álgebra de Lie $\mathfrak{co}(\mathbb{V})$

Lema 3 *La primera prolongación $\mathfrak{co}(\mathbb{V})_1$ del álgebra de Lie $\mathfrak{co}(\mathbb{V})$ de una estructura conforme $CO(\mathbb{V})$ en un espacio vectorial $\mathbb{V}$, es isomorfa a $\mathbb{V}^*$ por la correspondencia*

$$\begin{array}{cccc} \Phi : & \mathbb{V}^* & \to & \mathfrak{co}(V)_1 \\ & \eta & \mapsto & \Phi_\eta \end{array}$$

definida por

$$\Phi_\eta(u, v) = \eta(u)v + \eta(v)u - \langle u, v\rangle\, \eta_{\uparrow_{\langle .,. \rangle}} \in \mathbb{V},\ \forall (u, v) \in \mathbb{V} \times \mathbb{V} \qquad (21)$$

siendo $\langle .,. \rangle$ cualquier métrica compatible con la estructura conforme, y $\eta_{\uparrow_{\langle .,. \rangle}}$ el vector de $\mathbb{V}$ en correspondencia con $\eta \in \mathbb{V}^*$ bajo el isomorfismo dado por $\langle .,. \rangle$ entre $\mathbb{V}$ y $\mathbb{V}^*$ (i.e. $< \eta_{\uparrow_{\langle .,. \rangle}}, v >= \eta(v)$, $\forall v \in \mathbb{V}$).

Demostración:

Es claro que Φ es una aplicación lineal e inyectiva, veamos entonces que todo $\varphi \in \mathfrak{co}(\mathbb{V})_1$ se corresponde con Φ_η para algún $\eta \in \mathbb{V}^*$.

Fijada una base conforme de $\mathbb{V}$, $\{e_1, ..., e_m\}$, todo elemento φ de $\mathfrak{co}(\mathbb{V})_1 \subset \mathbb{V}^* \otimes \mathbb{V}^* \otimes \mathbb{V}$ tendrá una expresión (t_{ij}^k) (siendo $\varphi(e_i, e_j) = \sum_k t_{ij}^k e_k$). Por la definición de primera prolongación, se ha de cumplir la simetría $t_{ij}^k = t_{ji}^k$. Además, al ser $\varphi(e_i) \in \mathfrak{co}(\mathbb{V})$ existirá un $\eta_i \in \mathbb{R}$ tal que $t_{ij}^k = -t_{ik}^j + 2\eta_i \delta_j^k$. En consecuencia, haciendo uso de estas dos igualdades tenemos $\forall i, j, k$

$$\begin{aligned} t_{ij}^k &= t_{ji}^k = -t_{jk}^i + 2\eta_j \delta_i^k = -t_{kj}^i + 2\eta_j \delta_i^k = t_{ki}^j - 2\eta_k \delta_j^i + 2\eta_j \delta_i^k = \\ &= t_{ik}^j - 2\eta_k \delta_j^i + 2\eta_j \delta_i^k = -t_{ij}^k + 2\eta_i \delta_k^j - 2\eta_k \delta_j^i + 2\eta_j \delta_i^k \end{aligned}$$

Resulta ser entonces $t_{ij}^k = \eta_i \delta_k^j + \eta_j \delta_i^k - \eta_k \delta_j^i$, $\forall i, j, k$, para cierto $(\eta_i) \in \mathbb{R}^{m*}$.

Sea $(u,v) \in \mathbb{V} \times \mathbb{V}$ con $u = \Sigma u^i e_i$ y $v = \Sigma v^j e_j$, entonces,

$$\begin{aligned}
\varphi(u,v) &= \Sigma(t_{ij}^k u^i v^j)e_k = \sum_k\{\sum_i(u^i\eta_i)v^k + \sum_j(v^j\eta_j)u^k - \sum_i(u^iv^i)\eta_k\}e_k = \\
&= \sum_{ik}(u^i\eta_i)v^ke_k + \sum_{jk}(v^j\eta_j)u^ke_k - \sum_{ik}(u^iv^i)\eta_ke_k = \\
&= \eta(u)v + \eta(v)u - \sum_{ik}(u^iv^i)\eta_ke_k
\end{aligned}$$

siendo $\eta \in \mathbb{V}^*$ tal que $\eta(e_i) = \eta_i\ \forall i$.

Veamos ahora que $\sum_{ik}(u^iv^i)\eta_ke_k = \langle u,v\rangle\, \eta_{\uparrow_{\langle .,.\rangle}}$ para cualquier métrica compatible $\langle .,.\rangle$. Esta igualdad es inmediata puesto que al ser $\{e_1,...,e_m\}$ base conforme $\exists c \in R$, tal que $\langle e_i, e_j\rangle = c^2\delta_j^i$ y entonces es claro que $\langle u,v\rangle = c^2\sum_i u^iv^i$ y $\eta_{\uparrow_{\langle .,.\rangle}} = c^{-2}\sum_k \eta_ke_k$.

En consecuencia, $\varphi \in \mathfrak{co}(\mathbb{V})_1$ resulta ser precisamente Φ_η, siendo $\eta \in \mathbb{V}^*$ tal que $\eta(e_i) = \eta_i\ \forall i$. ■

Podemos concluir, a la vista del teorema anterior y del lema que acabamos de probar, que el tensor diferencia entre dos conexiones conformes de $(M, \mathcal{C})$, λ y μ, es (para cierta $\alpha \in \mathfrak{X}^*(M)$)

$$\nabla_X^\mu Y - \nabla_X^\lambda Y = \alpha(X)Y + \alpha(Y)X - g(X,Y)\alpha_{\uparrow_g}$$

donde $g \in \mathcal{C}$ es una métrica compatible cualquiera y $\alpha_{\uparrow_g} \in \mathfrak{X}(M)$ está caracterizado por la condición $g(\alpha_{\uparrow_g}, X) = \alpha(X)\ \forall X \in \mathfrak{X}(M)$. Además, todas las conexiones μ conformes se obtienen a partir de una λ por este procedimiento.

En el caso particular de que λ sea g-métrica, y α sea exacta con $\alpha = df$, tenemos

$$\nabla_X^\mu Y - \nabla_X^\lambda Y = df(X)Y + df(Y)X - g(X,Y)df_{\uparrow_g}$$

y obsérvese que $df_{\uparrow_g} = grad_g(f)$, por lo tanto, recordando la fórmula (2), es claro que entonces μ es conexión $e^{2f}g$-métrica.

3. Conexión de Fermi-Walker en $CO(M)$

3.1. El fibrado tangente de segundo orden de M

Fijado $x \in M$, se denota por $C(x, M)$ al conjunto de las curvas (diferenciables) por x, es decir al conjunto de curvas $\gamma : I \to M$ tales que I es intervalo abierto de $\mathbb{R}$ conteniendo a 0, y $\gamma(0) = x$.

En $C(x, M)$ se introduce una relación de equivalencia $\sim$ definida del siguiente modo:

> $\gamma \sim \bar{\gamma}$ sii para una carta $(\mathcal{U}, \varphi = (x^1, \ldots, x^m))$ cuyo dominio contenga a x, se verifica, $\forall k = 1, ..., m$
>
> $$\left.\frac{d(x^k \circ \gamma)}{dt}\right|_{t=0} = \left.\frac{d(x^k \circ \bar{\gamma})}{dt}\right|_{t=0} \tag{22}$$
>
> $$\left.\frac{d^2(x^k \circ \gamma)}{dt^2}\right|_{t=0} = \left.\frac{d^2(x^k \circ \bar{\gamma})}{dt^2}\right|_{t=0} \tag{23}$$

Nótese que la condición (22) equivale a que $\gamma'(0) = \bar{\gamma}'(0)$, es decir, que γ y $\bar{\gamma}$ definan en $t = 0$ el mismo vector tangente y, por tanto, ésta no depende de la carta $(\mathcal{U}, \varphi)$. De igual modo, puede demostrarse que la condición (23) tampoco depende de la carta elegida.

La clase de equivalencia con representante $\gamma \in C(x, M)$ se denota por $j_0^2(\gamma)$ y se denomina el *2-jet de la curva* γ en x (véase [7], [8]). El conjunto de clases de equivalencias en $C(x, M)$ se denota por $T_x^2 M$ y, entonces, la aplicación:

$$\mathrm{q}_x : T_x^2 M \ni j_0^2(\gamma) \longmapsto j_0^1(\gamma) = \gamma'(0) \in T_x M \tag{24}$$

define canónicamente un fibrado afín con fibra m-dimensional sobre $T_x M$. En efecto, la condición (23) puede escribirse en la forma

$$\left.\frac{\nabla \gamma'}{dt}\right|_{t=0} = \left.\frac{\nabla \bar{\gamma}'}{dt}\right|_{t=0} \tag{25}$$

independientemente de la conexión ∇ fijada en M. Considérese el fibrado vectorial:

$$pr_1 : T_x M \times T_x M \to T_x M$$

y ∇ permite definir la biyección:

$$\begin{array}{cccc} \nabla_x : & T_x^2 M & \to & T_x M \times T_x M \\ & \gamma_0^2(0) & \longmapsto & \left(\gamma'(0), \left.\frac{\nabla \gamma'}{dt}\right|_{t=0}\right) \end{array} \tag{26}$$

Nótese que si se usa otra conexión $\overline{\nabla}$ es $B(X, Y) = \overline{\nabla}_X Y - \nabla_X Y$ un tensor, y se tiene:

$$\left(\overline{\nabla}_x\right) \circ (\nabla_x)^{-1} \left(\gamma'(0), \left.\frac{\nabla \gamma'}{dt}\right|_{t=0}\right) = \left(\gamma'(0), \left.\frac{\nabla \gamma'}{dt}\right|_{t=0} + B(\gamma'(0), \gamma'(0))\right)$$

o de manera equivalente

$$(\nabla_x)^{-1}(u, v) = \left(\overline{\nabla}_x\right)^{-1}(u, v + B(u, u)) \; \forall u, v \in T_x M \tag{27}$$

Así, $\left(\overline{\nabla}_x\right) \circ (\nabla_x)^{-1} : T_x M \times T_x M \to T_x M \times T_x M$ es un isomorfismo afín, y de este modo, la estructura afín inducida en $T_x^2 M$ por ∇_x no depende de la conexión auxiliar tomada.

De forma natural, la unión de todos los 2-jets $T^2M = \bigsqcup_{p\in M} T^2_xM$ es un fibrado afín

$$\mathrm{p} : T^2M \to M$$

sobre M, que denominamos *fibrado tangente de segundo orden.*

Observación 9 *La relación de equivalencia $\sim$ es cerrada para el subconjunto $\widetilde{C}(x,M) \subset C(x,M)$ formado por las curvas regulares por x ($\gamma'(0) \neq 0$), y su espacio de clases de equivalencia da lugar al conjunto que denotamos por $\widetilde{T}^2_xM \subset T^2_xM$. Si contamos con la biyección $\nabla_x : T^2_xM \to T_xM \times T_xM$ (26) dada por una conexión ∇, $\widetilde{T}^2_xM$ siempre está identificado con $T_xM\backslash\{0\} \times T_xM$; es inmediato entonces que $\mathrm{q} : \widetilde{T}^2_xM \to T_xM\backslash\{0\}$ es también fibrado afín de fibra m-dimensional.*

Observación 10 *:*

***(a)** En presencia de una conexión ∇, el fibrado $\mathrm{q} : T^2M \to TM$ (24) cuenta con una sección global natural, $\sigma^\nabla : TM \to T^2M$, definida por la condición de corresponderse mediante ∇_x con la sección cero de $pr_1 : \bigsqcup_{p\in M}(T_xM \times T_xM) \to \bigsqcup_{p\in M} T_xM = TM$.*

$$\begin{tikzcd}
T_xM \arrow[r, "\sigma^\nabla"] \arrow[d, "{(.,0)}"'] & T^2_xM \arrow[dl, "\nabla_x"] \\
T_xM \times T_xM &
\end{tikzcd}$$

De hecho, $\forall v \in T_xM$, se define $\sigma^\nabla(v)$ como el 2-jet de cualquier curva γ en M con $\gamma'(0) = v$ y $\left.\frac{\nabla\gamma'}{dt}\right|_{t=0} = 0$. En consecuencia,

$$\sigma^\nabla(v) = j^2_0(\gamma^\nabla_v), \text{ siendo } \gamma^\nabla_v \text{ la } \nabla\text{-geodésica con } \gamma^\nabla_v{}'(0) = v.$$

***(b)** Todo elemento $j^2_0(\gamma) \in \widetilde{T}^2_xM$ (i.e. $j^1_0(\gamma) = v \neq 0$) se alcanza con la sección σ^∇ inducida por cierta conexión ∇ en M. En efecto, podemos suponer que la curva representante γ es regular y por el corolario 1 de la sección primera (página 4) sabemos que en un entorno de $\tau = 0$ la curva γ es geodésica para cierta métrica $g \in \mathcal{C}$, de este modo, a través de su conexión de Levi-Civita ∇ resulta ser $\sigma^\nabla(v) = j^2_0(\gamma)$.*

Obsérvese sin embargo, que si tomamos $j^2_0(\gamma) \in T^2_xM\backslash\widetilde{T}^2_xM$ resultará $j^1_0(\gamma) = 0$ y para toda conexión ∇ en M, $\sigma^\nabla(0)$ es el 2-jet de la curva constante γ_p (por ser ésta la ∇-geodésica por x con velocidad inicial nula). En consecuencia, $0 \in T_xM$ se alza siempre por medio de una sección σ^∇ al elemento $T^2_xM \ni j^2_0(\gamma_p) \overset{\sigma^\nabla}{\simeq} (0,0) \in T_xM \times T_xM$.

$$\bigsqcup_{\nabla conexión} \left\{\sigma^\nabla(T_xM)\right\} = \widetilde{T}^2_xM \cup \{j^2_0(\gamma_p)\} \subset T^2_xM$$

3.2. Función elevación asociada a la conexión de Fermi-Walker

Hemos visto ya que la conexión de Fermi-Walker en un espacio conforme (Riemanniano) $(M, \mathcal{C})$ permite elevar curvas regulares $\gamma : I \to M$, a curvas en el fibrado principal $CO(M)$. En el caso de las conexiones lineales es conocido que el 1-jet de la curva elevación depende exclusivamente del 1-jet de la curva base en M, y se pasa entonces a elevar el espacio tangente a M a un subespacio (vectorial) del tangente a $CO(M)$ con las propiedades ya mencionadas en la sección anterior.

Vamos a estudiar ahora el grado de dependencia del 1-jet de una curva elevación en función de su curva base cuando trabajamos con la conexión de Fermi-Walker de un espacio conforme.

Proposición 3 *Dadas $\gamma, \bar{\gamma} \in \widetilde{C}(x, M)$, $b \in CO(M)_x$ y sean $\mathbb{P}_\gamma b$, $\mathbb{P}_{\overline{\gamma}} b$ sus respectivas elevaciones por b a $CO(M)$, entonces:*

$$j_0^1(\mathbb{P}_\gamma b) = j_0^1(\mathbb{P}_{\overline{\gamma}} b) \Leftrightarrow j_0^2(\gamma) = j_0^2(\bar{\gamma})$$

Demostración:

Sean $\gamma, \bar{\gamma} \in \widetilde{C}(x, M)$ y $b = (u_1, ...u_m) \in CO(M)_x$.

Tomamos métricas $g, \overline{g} = e^{2f} g \in \mathcal{C}$ tales que tienen a γ y $\bar{\gamma}$, respectivamente, como geodésicas unitarias en un entorno de $t = 0$. Por lo tanto sus conexiones de Levi-Civita, ∇ y $\overline{\nabla}$, definen la conexión de Fermi-Walker a lo largo de de las curvas γ y $\bar{\gamma}$.

Si $U_i(t) \in \mathfrak{X}_{|\cdot|}^{\nabla}(\gamma)$ con $U_i(0) = u_i$, $\forall i = 1, ..., m$, entonces la curva elevación por b es

$$\mathbb{P}_\gamma b(t) = (U_1(t), ..., U_m(t)) \in CO(M)_{\gamma(t)}$$

y análogamente para $\bar{\gamma}$, si $\overline{U}_i(t) \in \mathfrak{X}_{|\cdot|}^{\overline{\nabla}}(\overline{\gamma})$ con $\overline{U}_i(0) = u_i$, $\forall i = 1, ..., m$, entonces

$$\mathbb{P}_{\overline{\gamma}} b(t) = (\overline{U}_1(t), ..., \overline{U}_m(t)) \in CO(M)_{\overline{\gamma}(t)}$$

Tomamos una carta auxiliar $(\mathcal{U}, \varphi)$ en un entorno de $x \in M$ de coordenadas $\{x^1, ..., x^m\}$. De modo que tenemos las siguientes expresiones locales en coordenadas[2]:

$$\begin{array}{ll} \gamma(t) = (\gamma^1(t), ..., \gamma^m(t)), & \overline{\gamma}(t) = (\overline{\gamma}^1(t), ..., \overline{\gamma}^m(t)) \\ \mathbb{P}_\gamma b(t) = (\gamma^i(t); U_j^i(t)), & \mathbb{P}_{\overline{\gamma}} b(t) = (\overline{\gamma}^i(t); \overline{U}_i^j(t)) \end{array}$$

Y las siguientes condiciones en relación con los símbolos de Christoffer de ∇ y $\overline{\nabla}$

$$\begin{aligned} \frac{\nabla^\gamma}{dt} U_i &= 0 \Leftrightarrow (U_i^j)'(t) = -\sum_{r,s} U_i^r(t) \gamma_s'(t) \Gamma_{r,s}^j(\gamma(t)) \\ \frac{\overline{\nabla}^{\overline{\gamma}}}{dt} \overline{U}_i &= 0 \Leftrightarrow (\overline{U}_i^j)'(t) = -\sum_{r,s} \overline{U}_i^r(t) \overline{\gamma}_s'(t) \overline{\Gamma}_{r,s}^j(\overline{\gamma}(t)) \end{aligned} \tag{28}$$

sabiendo que

$$\overline{\Gamma}_{r,s}^j - \Gamma_{r,s}^j = \delta_r^j \frac{\partial f}{\partial x_s} + \delta_s^j \frac{\partial f}{\partial x_r} - g_{rs} \frac{\partial f}{\partial x_h} g^{hj} \tag{29}$$

Ahora, la condición $j_0^1(\mathbb{P}_\gamma b) = j_0^1(\mathbb{P}_{\overline{\gamma}} b)$ es equivalente a:

$$\left\{ \begin{array}{l} \gamma^{i\prime}(0) = \overline{\gamma}^{i\prime}(0), \ i = 1, ..., m \\ (U_i^j)'(0) = (\overline{U}_i^j)'(0), \ i, j = 1, ..., m \end{array} \right. \tag{30}$$

[2] La presencia de la carta $(\mathcal{U}, \varphi)$ en M, da lugar a una correspondencia en $CO(M)$ que asigna a cada $b = (v_1, ..., v_m) \in \mathfrak{p}^{-1}(\mathcal{U})$ el elemento $(x^i(b); x_j^i(b)) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}_m^m$ definido por ser:

$$\begin{aligned} \varphi(\mathfrak{p}(b)) &= (x^i(b)) \\ v_j &= \sum_i x_j^i(b) \left. \frac{\partial}{\partial x^i} \right|_x \end{aligned}$$

La primera identidad de (29) indica que $\gamma'(0) = \overline{\gamma}'(0) = v \in T_xM\backslash\{0\}$.

Haciendo uso de las fórmulas (28) la segunda identidad de (29) es equivalente a la siguiente:

$$\begin{aligned}
-\sum_{r,s} U_i^r(0)\gamma^{s\prime}(0)\Gamma^j_{r,s}(x) &= -\sum_{r,s} \overline{U}_i^r(0)\overline{\gamma}^{s\prime}(0)\overline{\Gamma}^j_{r,s}(x) \Leftrightarrow \\
-\sum_{r,s} u_i^r v^s \Gamma^j_{r,s}(x) &= -\sum_{r,s} u_i^r v^s \overline{\Gamma}^j_{r,s}(x) \Leftrightarrow \\
\sum_{r,s} u_i^r v^s (\Gamma^j_{r,s} - \overline{\Gamma}^j_{r,s})(x) &= 0
\end{aligned}$$

y por la relación (29) esto es:

$$\begin{aligned}
0 &= \sum_{r,s} u_i^r v^s (\delta_r^j \frac{\partial f}{\partial x_s} + \delta_s^j \frac{\partial f}{\partial x_r} - g_{rs}\frac{\partial f}{\partial x_h} g^{hj}) = \\
&= u_i^j v^s \frac{\partial f}{\partial x_s} + v^j u_i^r \frac{\partial f}{\partial x_r} - u_i^r v^s g_{rs} \frac{\partial f}{\partial x_h} g^{hj} \Leftrightarrow \\
0 &= u_i v(f) + v u_i(f) - g(u_i, v)(grad_g f)(x) \ \forall i
\end{aligned}$$

Entonces, $0 = g(u_i, v)v(f) + g(v, v)u_i(f) - g(u_i, v)v(f) = g(v, v)u_i(f) \Rightarrow u_i(f) = 0$, $\forall i$ (puesto que $v \in T_xM\backslash\{0\}$). Como los u_i forman una base b (conforme) de T_xM se concluye que $df(p) = 0 \Leftrightarrow \overline{\Gamma}^j_{r,s}(x) = \Gamma^j_{r,s}(x) \Leftrightarrow (\overline{\gamma}^j)''(0) = -\sum_{r,s} \overline{\gamma}^{r\prime}(0)\overline{\gamma}^{s\prime}(t)\overline{\Gamma}^j_{r,s}(x) = -\sum_{r,s} v^r v^s \Gamma^j_{r,s}(x) = (\gamma^j)''(0)$.

Por lo tanto, las condiciones (30) son equivalentes a:

$$\begin{cases} \gamma^{i\prime}(0) = \overline{\gamma}^{i\prime}(0), \ i = 1, ..., m \\ \gamma^{i\prime\prime}(0) = \overline{\gamma}^{i\prime\prime}(0), \ i = 1, ..., m \end{cases}$$

que significa la identidad entre los 2-jets de γ y $\bar{\gamma}$.

Queda demostrado de este modo que $j_0^1(\mathbb{P}_\gamma b) = j_0^1(\mathbb{P}_{\overline{\gamma}} b) \Leftrightarrow j_0^2(\gamma) = j_0^2(\bar{\gamma})$. ■

En consecuencia, la conexión de Fermi-Walker D/dt permite definir para cada $x \in M, b \in CO(M)_x$ una operación de elevación del conjunto $\widetilde{T}_x^2 M \subset T_x^2 M$ de 2-jets de curvas regulares por x en M, al espacio tangente a $CO(M)$ en b.

$$\begin{array}{cccc} \kappa_b : & \widetilde{T}_x^2 M & \rightarrow & T_b CO(M) \\ & j_0^2(\gamma) & \mapsto & j_0^1(\mathbb{P}_\gamma b) \end{array}$$

Además, es claro por su definición que κ_b verifica la fórmula:

$$d\mathfrak{p}(b) \circ \kappa_b(j_0^2(\gamma)) = j_0^1(\gamma) \in T_xM \tag{31}$$

Y por (15) cumple la siguiente condición de compatibilidad con la acción del grupo

$$\kappa_{b\cdot\alpha} = R_{\alpha *} \circ \kappa_b, \ \forall \alpha \in CO(m)$$

Recuérdese que las funciones de elevación de una conexión lineal ∇ son monomorfismos lineales $\kappa_b^\nabla : T_xM \rightarrow T_bCO(M)$ ([2], [1], [14]), pero para la aplicación κ_b no tiene sentido hablar de linealidad puesto que $\widetilde{T}_x^2 M$ no está dotado de ninguna estructura de espacio vectorial. No obstante, vamos a ver que κ_b es una función diferenciable e inyectiva que sumerge el espacio $\widetilde{T}_x^2 M$ en $T_bCO(M)$, además, esta submersión combina las funciones lineales de elevación de las distintas métricas compatibles de la estructura conforme $g \in \mathcal{C}$ en el sentido que ahora describimos.

Dada $g \in \mathcal{C}$ sabemos que su conexión de Levi-Civita ∇, da lugar a la sección global natural $\sigma^g = \sigma^\nabla : TM \to T^2M$ descrita en la observación 10 (a), es claro que $\sigma^\nabla(T_xM \backslash \{0\}) \subset \widetilde{T}^2_xM$, por lo que podemos componerla con κ_b

$$T_xM \backslash \{0\} \stackrel{\sigma^\nabla}{\to} \widetilde{T}^2_xM \stackrel{\kappa_b}{\to} T_bCO(M)$$

Estudiemos con más detenimiento esta composición. La sección σ^∇ asigna al vector $v \in T_xM\backslash\{0\}$ al 2-jet definido por la g-geodésica γ_v, y ya hemos visto que la conexión de Fermi-Walker a lo largo de una g-geodésica ($g \in \mathcal{C}$) coincide con la conexión de Levi-Civita ∇ de g , y por lo tanto la operación de elevación también coincidirá con la asociada a la conexión, en definitiva,

$$\kappa_b \circ \sigma^\nabla = \kappa_b^\nabla : T_xM - \{0\} \to T_bCO(M) \tag{32}$$

que es la restricción de un monomorfismo lineal,y el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{tikzcd} T_xM - \{0\} \arrow[r, "\sigma^\nabla"] \arrow[dr, "\kappa_b^\nabla"'] & \widetilde{T}^2_xM \arrow[d, "\kappa_b"] \\ & T_bCO(M) \end{tikzcd}$$

Obsérvese que esta relación se verifica también para conexiones (simétricas) compatibles con la estructura conforme $\mathcal{C}$ no necesariamente métricas.

Es más, por la observación 10 (b), se verifica también que todo 2-jet en $\widetilde{T}^2_xM$ se alcanza con esta construcción para alguna $g \in \mathcal{C}$.

Observación 11 *Este resultado motiva que definamos también κ_b sobre el 2-jet de la curva constante $\gamma_x(t) = x$, $\forall t$.*

$$\kappa_b(j^2_0(\gamma_x)) = \kappa_b \circ \sigma^\nabla(j^1_0(\gamma_x)) = \kappa_b^\nabla(0) = 0 \in T_bCO(M)$$

Denotamos por el mismo nombre κ_b a su extensión sobre $\widetilde{T}^2_xM \cup \{j^2_0(\gamma_x)\}$. De este modo, la función de elevación extendida $\kappa_b : \widetilde{T}^2_xM \cup \{j^2_0(\gamma_x)\} \to T_bCO(M)$ verifica $\kappa_b \circ \sigma^\nabla = \kappa_b^\nabla : T_xM \to T_bCO(M)$ para toda ∇ compatible con la estructura conforme $\mathcal{C}$.

Lema 4 *Dadas $g, \overline{g} \in \mathcal{C}$ relacionadas por $\overline{g} = e^{2f}g$, se tiene la fórmula siguiente:*

$$\kappa_b(\sigma^{\overline{g}}(v)) - \kappa_b(\sigma^g(v)) = (\Phi_\eta(V))^\#(b) \tag{33}$$

siendo: $V = b^{-1}(v) \in \mathbb{R}^m$, un vector columna,

$\eta = df(x) \circ b \in \mathbb{R}^{m*}$, un vector fila,

$\Phi : \mathbb{R}^{m*} \otimes \mathbb{R}^m \to \mathfrak{co}(m)$, $\Phi_\eta(V) = (\eta V)I_m + V.\eta - \eta^T.V^T$

$(\Phi_\eta(V))^\#$ el campo fundamental definido por $\Phi_\eta(V) \in \mathfrak{co}(m)$.

Demostración:

Seguiremos un procedimiento análogo al de la demostración del teorema anterior y utilizaremos los cálculos que en ella se han desarrollado.

Dado $b = \{u_1, ..., u_m\} \in B$ y $x = \mathfrak{p}(b)$, tomamos una carta auxiliar $(\mathcal{U}, \varphi)$ en un entorno de $x \in M$ de coordenadas $\{x^1, ..., x^m\}$ y con la condición adicional de ser

$$\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_x = u_i \in T_xM, \forall i$$

Por lo tanto, es claro que se tiene $g_{ij}(x) = c^2\delta_i^j$ y $g^{ij}(x) = c^{-2}\delta_i^j$.

Los símbolos de Christoffer para las conexiones de Levi-Civita de g y $\overline{g}$ vienen relacionados por la fórmula (29), que en este caso tiene la siguiente expresión

$$\overline{\Gamma}_{r,s}^j - \Gamma_{r,s}^j = \delta_r^j \frac{\partial f}{\partial x_s} + \delta_s^j \frac{\partial f}{\partial x_r} - \delta_r^s \frac{\partial f}{\partial x_j}$$

Sea $v \in T_xM$, entonces $v = \Sigma v^i \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_x$ para $V = (v^1, ..., v^m) = b^{-1}(v) \in \mathbb{R}^m$.

Haciendo uso de la identidad (32), se tiene que

$$\kappa_b(\sigma^{\overline{g}}(v)) - \kappa_b(\sigma^g(v)) = \kappa_b^{\overline{g}}(v) - \kappa_b^g(v)$$

Sean $\gamma, \overline{\gamma}$ curvas con velocidad inicial v, geodésicas para g y $\overline{g}$, respectivamente. Entonces, siguiendo la notación de la demostración anterior, $\kappa_b^{\overline{g}}(v) - \kappa_b^g(v) = (\mathbb{P}_{\overline{\gamma}}b)'(0) - (\mathbb{P}_\gamma b)'(0)$. Además, las expresiones :

$$\begin{aligned}(\mathbb{P}_{\overline{\gamma}}b)'(0) &= (v^i; (U_j^i)'(0)) \\ (\mathbb{P}_{\overline{\gamma}}b)'(0) &= (v^i; (\overline{U}_j^i)'(0))\end{aligned}$$

correspondientes a $(dx^i; dx_j^i)$, siendo $(x^i; x_j^i) : CO(M) \supset \mathfrak{p}^{-1}(\mathcal{U}) \hookrightarrow \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}_m^m$ las coordenadas inducidas por la carta $(\mathcal{U}, \varphi)$[3], verifican las fórmulas (30), en particular,

$$\begin{aligned}(U_i^j)'(0) &= -\sum_{r,s} U_i^r(0)\gamma^{s\prime}(0)\Gamma_{r,s}^j(x) = -\sum_s v^s \Gamma_{i,s}^j(x) \\ (\overline{U}_i^j)'(0) &= -\sum_{r,s} \overline{U}_i^r(0)\overline{\gamma}^{s\prime}(0)\overline{\Gamma}_{r,s}^j(x) = -\sum_s v^s \overline{\Gamma}_{i,s}^j(x)\end{aligned}$$

Ahora,

$$(\overline{U}_i^j)'(0) - (U_i^j)'(0) = \sum_s v^s\{\Gamma_{i,s}^j(x) - \overline{\Gamma}_{i,s}^j(x)\} = \delta_i^j v(f) + v^j \frac{\partial f}{\partial x^i}(x) - v^i \frac{\partial f}{\partial x^j}(x)$$

Por lo tanto, el vector $\kappa_b(\sigma^{\overline{g}}(v)) - \kappa_b(\sigma^g(v)) \in T_bCO(M)$ tiene la expresión $(0; (\delta_i^j v(f) + v^j \frac{\partial f}{\partial x^i}(x) - v^i \frac{\partial f}{\partial x^j}(x)))$ correspondiente a $(dx^i; dx_j^i)$.

Recordemos ahora que si $A \in \mathfrak{co}(m)$ el vector $A^\#(b)$ venía definido por $\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \{b \cdot \exp(tA)\}$. Es claro que el elemento $b \cdot \exp(tA)$ tiene coordenadas $(x^i; \alpha_j^i(t))$, siendo $\exp(tA) = \alpha(t) = (\alpha_j^i(t)) \in CO(m)$ (luego $\alpha_j^{i\prime}(0) = A_j^i$). Resulta entonces que la expresión de $A^\#(b)$ es justamente $(0; A_j^i)$, para $(dx^i; dx_j^i)$.

Entonces, la expresión que hemos conseguido usando la carta auxiliar $(\mathcal{U}, \varphi)$ indica que

$$\kappa_b(\sigma^{\overline{g}}(v)) - \kappa_b(\sigma^g(v)) = A^\#(b)$$

para $A = (A_j^i) \in \mathfrak{co}(m)$ con $A_j^i = \delta_j^i v(f) + v^i \frac{\partial f}{\partial x^j}(x) - v^j \frac{\partial f}{\partial x^i}(x)$. Es inmediato comprobar que

$$A = \eta V I_m + V\eta - (V\eta)^T$$

siendo $\eta = df(x) \circ b \in \mathbb{R}^{m*}$ y $V = b^{-1}(v) \in \mathbb{R}^m$, y obtenemos de este modo el resultado (33). ■

Teorema 2 *La aplicación* $\kappa_b : \widetilde{T}_x^2 M \to T_bCO(M)$ *es una función diferenciable e inyectiva, tal que* $\forall j_0^2(\gamma) \in \widetilde{T}_x^2 M$, $\kappa_b(j_0^2(\gamma)) \neq 0 \in T_bCO(M)$.

[3] Recordemos que $CO(M) \ni b = \{v_1, ..., v_m\} \leftrightarrow (x^i; x_j^i) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}_m^m$ si $\varphi(\mathfrak{p}(b)) = (x^1, ..., x^m)$ y $v_j = \sum_i x_j^i \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_x$, $\forall j$.

Demostración:

Todo elemento de $\widetilde{T}^2_x M$ viene dado por el 2-jet de una curva regular γ, y haciendo uso de (31) tenemos $\mathfrak{p}_* \circ \kappa_b(j^2_0(\gamma)) = j^1_0(\gamma) = v \in T_x M \backslash \{0\}$. Puesto que $\mathfrak{p}_*$ es una aplicación lineal esto implica que $\kappa_b(j^2_0(\gamma)) \neq 0$.

Estudiemos ahora la inyectividad de κ_b.

Sean $j^2_0(\gamma)$, $j^2_0(\overline{\gamma}) \in \widetilde{T}^2_x M$ tales que $\kappa_b(j^2_0(\gamma)) = \kappa_b(j^2_0(\overline{\gamma})) \in T_b CO(M)$. Haciendo uso de nuevo de la condición (31) tenemos

$$j^1_0(\gamma) = \mathfrak{p}_* \circ \kappa_b(j^2_0(\gamma)) = \mathfrak{p}_* \circ \kappa_b(j^2_0(\overline{\gamma})) = j^1_0(\overline{\gamma}) = v \in T_x M \backslash \{0\}$$

Ahora sean $g, \overline{g} = e^{2f} g \in \mathcal{C}$ métricas compatibles tales que $\sigma^g(v) = j^2_0(\gamma)$ y $\sigma^{\overline{g}}(v) = j^2_0(\overline{\gamma})$. Entonces aplicando (33) tenemos para $V = b^{-1}(v)$ y $\eta = df(x) \circ b$,

$$\begin{gathered} 0 = \kappa_b(\sigma^{\overline{g}}(v)) - \kappa_b(\sigma^g(v)) = (\Phi_\eta(V))^{\#}(b) \implies \\ 0 = \Phi_\eta(V) = \eta.V.I_m + \eta^T.V^T - V.\eta, \text{ y } V = b^{-1}(v) \neq 0 \implies \\ 0 = \eta = df(x) \circ b \in \mathbb{R}^{m*} \implies 0 = df(x). \end{gathered}$$

En virtud de la fórmula (2) página 2, la condición $df(x) = 0$ significa que g y $\overline{g} = e^{2f} g$ tienen la misma conexión de Levi-Civita en x (i.e. $\nabla_v X = \overline{\nabla}_v X \in T_x M$, $\forall v \in T_x M, X \in \mathfrak{X}(M)$). En consecuencia, $\sigma^g(v) = \sigma^{\overline{g}}(v) \iff j^2_0(\gamma) = j^2_0(\overline{\gamma}) \in \widetilde{T}^2_{\mathfrak{p}(b)} M$, y la inyectividad de κ_b queda así probada.

La diferenciabilidad de κ_b se prueba con mayor facilidad si fijamos previamente un métrica auxiliar $g \in \mathcal{C}$. Es sabido que la función elevación $\kappa^g_b : T_x M \to T_b CO(M)$ de la conexión de Levi-Civita ∇ de g es una función diferenciable. Utilizando de nuevo la fórmula (33), tenemos para $V = b^{-1}(v) \in \mathbb{R}^m$ y $\eta = df(x) \circ b \in \mathbb{R}^{m*}$

$$\kappa_b(\sigma^{\overline{g}}(v)) = \kappa_b(\sigma^g(v)) + (\Phi_\eta(V))^{\#}(b) = \kappa^g_b(b(V)) + (\Phi_\eta(V))^{\#}(b) \tag{34}$$

Es claro que la última expresión de esta igualdad, $\kappa^g_b(b(V)) + (\Phi_\eta(V))^{\#}(b)$, es diferenciable sobre $V \in \mathbb{R}^m$ y $\eta \in \mathbb{R}^{m*}$. Consideremos ahora el siguiente difeomorfismo:

$$\begin{array}{ccc} \widetilde{T}^2_x M & \to & \mathbb{R}^m \backslash \{0\} \times \mathbb{R}^m \\ j^2_0(\gamma) & \mapsto & \Big(b^{-1}(\gamma'(0)), b^{-1}(\frac{\nabla \gamma'}{dt}(0))\Big) \end{array} \tag{35}$$

Fácilmente se comprueba que usando tal difeomorfismo se da la correspondencia

$$\widetilde{T}^2_x M \ni \sigma^{\overline{g}}(v) \mapsto \big(V, -2(\eta.V).V + (V^T.V)\eta^T\big) = \Phi_\eta(V)(V) \in \mathbb{R}^m \backslash \{0\} \times \mathbb{R}^m$$

Basta observar que si γ es $\overline{\nabla}$-geodésica con $\gamma'(0) = v$, entonces, $\sigma^{\overline{g}}(v) = j^2_0(\gamma)$ y por (2) se tiene la igualdad

$$\frac{\nabla \gamma'}{dt}(0) = -(\frac{\overline{\nabla} \gamma'}{dt} - \frac{\nabla \gamma'}{dt})(0) = -2\,(df(x)(v))\,v + g(v,v).df(x)_{\uparrow_g}$$

Además, es claro que la aplicación siguiente es un difeomorfismo

$$\mathbb{R}^m \backslash \{0\} \times \mathbb{R}^{m*} \ni (V, \eta) \mapsto (V, -2(\eta.V).V + (V^T.V)\eta^T) \in \mathbb{R}^m \backslash \{0\} \times \mathbb{R}^m \tag{36}$$

Por tanto, a través de (35) y de (36) tenemos un difeomorfismo entre $\widetilde{T}^2_x M$ y $\mathbb{R}^m \backslash \{0\} \times \mathbb{R}^{m*}$ tal que $\sigma^{\overline{g}}(v)$ queda identificado con el par (V, η), siendo $V = b^{-1}(v)$, $\eta = df(x) \circ b$.

Recuperando ahora la fórmula (34), es claro que la diferenciabilidad de tal expresión en (V, η) es equivalente, en virtud del difeomorfismo $\widetilde{T}^2_x M \ni \sigma^{\overline{g}}(v) \longleftrightarrow$

$(V,\eta) \in \mathbb{R}^m \backslash \{0\} \times \mathbb{R}^m$ que acabamos de hallar, a la diferenciabilidad de κ_b en $\widetilde{T}_x^2 M$. ■

En conclusión, por el teorema que acabamos de ver y por la fórmula (32) resulta que κ_b es una inmersión de la variedad diferenciable $\widetilde{T}_x^2 M$ en el espacio vectorial $T_b CO(M)$. Es más, si consideramos su extensión $\kappa_b : \bigsqcup_{g\in\mathcal{C}} \{\sigma^g(T_x M)\} = \widetilde{T}_x^2 M \cup \{j_0^2(\gamma_p)\} \to T_b CO(M)$, de nuevo por (32), resulta que $\mathcal{H}_b = \mathrm{Im}(\kappa_b) = \bigsqcup_{g\in\mathcal{C}} \mathcal{H}_b^g \subset T_b CO(M)$, siendo $\mathcal{H}_b^g$ el subespacio horizontal de la conexión de Levi-Civita de g (un subespacio m-dimensional de $T_b CO(M)$ suplementario al subespacio vertical del fibrado $\mathcal{V}_b$). Obsérvese que $\mathcal{H}_b$ no tiene estructura de variedad diferenciable, pero $\widetilde{\mathcal{H}}_b = \mathcal{H}_b - \{0\} = \kappa_b(\widetilde{T}_x^2 M)$ es subvariedad de $T_b CO(M)$.

Lema 5 *Dado $\xi_b \in \widetilde{\mathcal{H}}_b = \mathcal{H}_b - \{0\} \subset T_b CO(M)$, existe un único subespacio vectorial suplementario a $\mathcal{V}_b$ que esté contenido en $\mathcal{H}_b$ y tal que pase por ξ_b.*

Demostración:
Puesto que $\xi_b \in \mathcal{H}_b \backslash \{0\} = \bigsqcup_{g\in\mathcal{C}} \mathcal{H}_b^g \backslash \{0\}$, existirá una métrica compatible $g \in \mathcal{C}$ tal que $\xi_b \in \mathcal{H}_b^g \backslash \{0\}$.

Supongamos ahora que existe otro subespacio $\mathcal{K}_b \subset \mathcal{H}_b$ con $\xi_b \in \mathcal{K}_b$ y $\mathcal{K}_b \oplus \mathcal{V}_b = T_b CO(M)$. Al ser $\mathcal{K}_b \neq \mathcal{H}_b^g$ y ambos suplementerios al subespacio vertical, existirá un $w \in T_x M$ tal que $\left(d\mathfrak{p}(b)_{|\mathcal{H}_b^g}\right)^{-1}(w) = \zeta_b$, y $\left(d\mathfrak{p}(b)_{|\mathcal{K}_b}\right)^{-1}(w) = \overline{\zeta}_b$ son distintos (luego $w \neq 0$).

Como $\overline{\zeta}_b \in \mathcal{H}_b \backslash \{0\}$, existe $\overline{g} = e^{2f} g$ con $\sigma^{\overline{g}}(w) = \overline{\zeta}_b$ y sabemos que $\sigma^g(w) = \zeta_b$. Se tiene la fórmula siguiente:

$$\overline{\zeta}_b - \zeta_b = \kappa_b(\sigma^{\overline{g}}(w)) - \kappa_b(\sigma^g(w)) = (\Phi_\eta(W))^{\#}(b)$$

con $\eta = df(p) \circ b \in \mathbb{R}^{m*} \backslash \{0\}$, $\Phi_\eta \in \mathfrak{co}(m)_1$, $W = b^{-1}(w)$, $\Phi_\eta(W) \in \mathfrak{co}(m)$.

Ahora $\forall r, s \in \mathbb{R}$, $r\xi_b + s\zeta_b \in \mathcal{H}_b^g$ y $r\xi_b + s\overline{\zeta}_b \in \mathcal{K}_b$ por tratarse de subespacios vectoriales, además, ambos se proyectan por $\mathfrak{p}_*$ al vector $rv + sw \in T_x M$. Por el mismo razonamiento que antes, $\exists \eta_{r,s} \in \mathbb{R}^{m*}$ con

$$\begin{aligned} (r\xi_b + s\zeta_b) - (r\xi_b + s\overline{\zeta}_b) &= (\Phi(\eta_{r,s})(b^{-1}(rv + sw)))^{\#}(b) \Leftrightarrow \\ s(\zeta_b - \overline{\zeta}_b) &= (\Phi(\eta_{r,s})(b^{-1}(rv + sw)))^{\#}(b) \end{aligned}$$

Para $s = 0 : 0 = (\Phi(\eta_{r,0})(b^{-1}(rv)))^{\#}(b) \Leftrightarrow \Phi(\eta_{r,0})(b^{-1}(rv)) = 0 \Leftrightarrow \Phi(\eta_{r,0}) = 0 \Leftrightarrow \eta_{r,0} = 0$.

Para $r = 0 : s(\zeta_b - \overline{\zeta}_b) = (\Phi(\eta_{0,s})(b^{-1}(sw)))^{\#}(b) = s(\Phi(\eta_{0,s})(b^{-1}(w)))^{\#}(b) \Rightarrow \eta_{0,s} = \eta$, $\forall s \neq 0 \Rightarrow$(por continuidad) $\eta_{0,s} = \eta$, $\forall s$.

Ahora $\eta = \eta_{0,0} = 0$, con lo que llegamos a una contradicción, y por tanto, no existe otro subespacio vectorial cumpliendo las condiciones exigidas y distinto a $\mathcal{H}_b^g$. ■

Observación 12 :
(a) *Los espacios horizontales de las conexiones lineales compatibles con $\mathcal{C}$ en $T_b CO(M)$ son coincidentes o disjuntos.*

(b) *Todo vector $v_b \in \mathcal{H}_b$ no nulo ($v_b \in \widetilde{\mathcal{H}}_b$) determina un único subespacio horizontal en $T_b CO(M)$ para alguna conexión compatible con la estructura conforme $\mathcal{C}$.*

Corolario 3 *Por lo tanto, si consideramos el fibrado* $\widetilde{\mathcal{H}} = \bigsqcup_{b \in CO(M)} \widetilde{\mathcal{H}}_b \overset{\mathfrak{p}\circ\mathfrak{q}}{\to} M$ *(siendo* $\mathfrak{q} : \widetilde{\mathcal{H}} \subset T(CO(M)) \to CO(M)$ *y* $\mathfrak{p} : CO(M) \to M$*), se verifica que toda sección suya sobre un abierto* $\mathcal{U}$ *de* M *da lugar a una conexión lineal (simétrica) en el abierto* $\mathcal{U}$ *compatible con* $\mathcal{C}$*. En particular, las secciones globales de* $\mathfrak{p} \circ \mathfrak{q} : \widetilde{\mathcal{H}} \to M$ *se corresponden con las conexiones (simétricas) en* M *compatibles con* $\mathcal{C}$*.*
Además, dos secciones $\mathrm{s}, \overline{\mathrm{s}} : M \to \widetilde{\mathcal{H}}$ *definen la misma conexión en* M *si y sólo si existe una función (diferenciable)* $\alpha : M \to CO(m)$*,* $x \longmapsto \alpha_x$*, tal que*

$$\overline{\mathrm{s}}(x) = R_{\alpha_x *}(\mathrm{s}(x)) \ \ \forall x \in M$$

Parte II
La conexión normal de Cartan en un espacio conforme

En el capítulo anterior se vió que un espacio conforme Riemanniano (M, C) tiene asociada de manera natural una conexión que llamamos de Fermi-Walker (1.1.2) y que define una función elevación κ_b al fibrado de referencias conformes $CO(M)$ estrechamente relacionada con las elevaciones a $CO(M)$ dadas por métricas $g \in \mathcal{C}$ (1.3.2). De este modo, se nos ofrece un modelo alternativo para el estudio de los espacios conformes $(M, \mathcal{C})$. Vamos a ver en las siguientes secciones como podemos recuperar completamente significativos operadores asociados a un espacio conforme $(M, \mathcal{C})$ a partir de la elevación de Fermi-Walker y del fibrado horizontal al que da lugar. En particular, vamos a estudiar la conexión normal conforme de Cartan y el tensor curvatura de Weyl.

4. La primera prolongación del fibrado de referencias conformes

4.1. Productos semidirectos

Los vectores de $\mathbb{R}^m$ serán considerados vectores columna. Su espacio dual será denotado por $\mathbb{R}^{m*}$ y sus elementos son vectores fila. Un subgrupo G (cerrado) del lineal general $GL(m, \mathbb{R})$, usualmente se ve actuando por la izquierda sobre $\mathbb{R}^m$, $G \times \mathbb{R}^m \ni (g, v) \to gv \in \mathbb{R}^m$ por medio del producto matricial. Esta actuación permite construir el grupo de Lie afinizado por la izquierda $\mathbb{R}^m \rtimes G$, cuyo espacio base es el producto cartesiano $\mathbb{R}^m \times G$ y su estructura de grupo, se obtiene identificando $(v, g) \in \mathbb{R}^m \times G$ con la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ v & g \end{pmatrix}$ y aplicando el producto matricial:

$$(v, g)(v', g') = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ v & g \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ v' & g' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ v + gv' & gg' \end{pmatrix} = (v + gv', gg')$$

El álgebra de Lie de $\mathbb{R}^m \rtimes G$ es $\mathbb{R}^m \uplus \mathfrak{g} = \left\{ (v, A) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ v & A \end{pmatrix}, v \in \mathbb{R}^m, A \in \mathfrak{g} \right\}$ donde el corchete esta definido por medio del conmutador del producto matricial

$$[(v, A), (v', A')] = (Av' - A'v, [A, A'])$$

a $\mathbb{R}^m \uplus \mathfrak{g}$ se llama suma semidirecta de $\mathbb{R}^m$ y $\mathfrak{g}$.

Análogamente, G actua por la derecha sobre $\mathbb{R}^{m*}$, $\mathbb{R}^{m*} \times G \ni (\eta, g) \to \eta g \in \mathbb{R}^{m*}$ por producto matricial, y se construye el afinizado por la derecha: $G \ltimes \mathbb{R}^{m*} = \{(g, \eta) : g \in G, \eta \in \mathbb{R}^{m*}\}$ con la ley de composición:

$$(g, \eta)(g', \eta') = \begin{pmatrix} 1 & \eta \\ 0 & g \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \eta' \\ 0 & g' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \eta' + \eta g' \\ 0 & gg' \end{pmatrix} = (gg', \eta' + \eta g') \quad (37)$$

donde se ha identificado (g, η) con la matriz $\begin{pmatrix} 1 & \eta \\ 0 & g \end{pmatrix}$.

La correspondiente álgebra de Lie es la suma semidirecta $\mathfrak{g} \uplus \mathbb{R}^{m*}$.

Esta construcción se generaliza trivialmente para un espacio vectorial $\mathbb{V}$ arbitrario, y G grupo de Lie que actúa sobre $\mathbb{V}$ por la izquierda (dando lugar al grupo de Lie $\mathbb{V} \rtimes G$) o por la derecha (dando lugar al grupo de Lie $G \ltimes \mathbb{V}$).

4.2. Primera prolongación de una G-estructura

Fijada la G-estructura $B \xrightarrow{\mathfrak{p}} M$, sea $\mathcal{J}(B)$ el conjunto de todos los subespacios horizontales $H \subset T_bB$, cuando $b \in B$ [4]. Denotamos por $\mathfrak{q} : \mathcal{J}(B) \to B$, a la proyección canónica.

Podemos considerar a $\mathcal{J}(B)$ canónicamente sumergido en el fibrado de referencias de B, $\mathfrak{q} : LB \to B$, si identificamos cada $H \in \mathcal{J}(B)_b$ con el isomorfismo lineal $H : \mathbb{R}^m \oplus \mathfrak{g} \to T_bB$ tal que $\forall V \in \mathbb{R}^m, A \in \mathfrak{g}$

(1) $H(V) = \mathfrak{h}(bV)$, siendo $\mathfrak{h} = \left(\mathfrak{p}_*|_H\right)^{-1} : T_xM \to H$.

(2) $H(A) = A^\#(b)$

Además si $H \in \mathcal{J}(B)_b$, siempre existen conexiones λ en B, tales que $\mathcal{H}_b^\lambda = H$. Por la definición alternativa de torsión de una conexión (17, página 11), se concluye que todas estas conexiones tienen la misma torsión en x, que llamamos $Tor(H) \in T_xM \otimes \Lambda^2 T_x^*M$.

Definición 7 *Se define* la primera prolongación de B, *como el conjunto*

$$B_1 = \{H \in \mathcal{J}(B) : Tor(H) = 0\}$$

Podemos sumergir canónicamente la primera prolongación de $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{g}_1 \subset \mathbb{R}^{m*} \otimes \mathfrak{g}$, en $GL(\mathbb{R}^m \oplus \mathfrak{g})$, mediante la aplicación $\mathfrak{g}_1 \ni \varphi \to \bar{\varphi} \in GL(\mathbb{R}^m \oplus \mathfrak{g})$ donde:

(a) $\bar{\varphi}(V) = V + \varphi(V)$ para todo $V \in \mathbb{R}^m$

(b) $\bar{\varphi}(A) = A$ para todo $A \in \mathfrak{g}$.

Simbólicamente se identifica $\bar{\varphi}$ con la matriz $\bar{\varphi} = \begin{pmatrix} I_m & 0 \\ \varphi & I_m \end{pmatrix}$. Obsérvese que $\overline{\varphi'} \circ \overline{\varphi} = \overline{\varphi' + \varphi}$.

Teorema 3 *La primera prolongación B_1 de la G-estructura B es una $\mathfrak{g}_1$-reducción del fibrado de referencias de B, $\mathfrak{q} : LB \to B$. En particular B_1 es un $\mathfrak{g}_1$-fibrado principal sobre B, con grupo de estructura $\mathfrak{g}_1 \hookrightarrow GL(\mathbb{R}^m + \mathfrak{g})$ y acción:*

$$\begin{array}{ccc} B_1 \times \mathfrak{g}_1 & \to & B_1 \\ (H, \varphi) & \mapsto & H \cdot \varphi = H \circ \overline{\varphi} \end{array}$$

Por ser $\mathfrak{g}_1$ espacio vectorial, es también $\mathfrak{q} : B_1 \to B$ un fibrado afín sobre B.

Demostración:

Toda conexión simétrica λ de la G-estructura B da lugar a una sección de $\mathfrak{q} : B_1 \to B$ que asigna a cada $b \in B$ el elemento $H = \mathcal{H}_b^\lambda \in B_1$. Puesto que nos hemos restringido a G-estructuras que admiten conexiones simétricas, $B_1 \to B$ posee secciones (diferenciables).

Veamos ahora que dado el elemento $H : \mathbb{R}^m \oplus \mathfrak{g} \to T_bB \in B_1$, se verifica que $H' : \mathbb{R}^m \oplus \mathfrak{g} \to T_bB \in LB$ está en B_1 si y sólo si $H' = H \circ \overline{\varphi}$ para algún $\varphi \in \mathfrak{g}_1$.

Una implicación es inmediata puesto que $H \circ \overline{\varphi} \in B_1$ para todo $\varphi \in \mathfrak{g}_1$. Supongamos ahora que $H' \in B_1$.

[4] $\mathcal{J}(B)$ es de hecho el conjunto de 1-jets de secciones del fibrado $B \xrightarrow{\mathfrak{p}} M$

Es claro que $\forall A \in \mathfrak{g}$ se tiene

$$H(A) = A^{\#}(b) = H'(A) \Rightarrow H^{-1} \circ H'(A) = A \tag{38}$$

Por otra parte, $\forall V \in \mathbb{R}^m$ $\mathfrak{q}_*(H(V)) = \mathfrak{q}_*(H'(V))$, por lo tanto $\exists A_V \in \mathfrak{g}$ tal que $H'(V) - H(V) = (A_V)^{\#}(b)$, y entonces, se tiene

$$H^{-1} \circ H'(V) = H^{-1}(H(V) + (A_V)^{\#}(b)) = V + A_V \tag{39}$$

La aplicación $\mathbb{R}^m \ni V \longmapsto A_V \in \mathfrak{g}$ es una aplicación lineal. Para estudiar ahora si cumple la condición de simetría, recordemos que H y H' tienen ambos torsión nula. Si hacemos uso de la ecuación de estructura (18, pág.11) la coincidencia en las torsiones significa que

$$\omega^H \wedge \theta = \omega^{H'} \wedge \theta \Leftrightarrow (\omega^H - \omega^{H'}) \wedge \theta = 0$$

donde $\omega^H, \omega^{H'} : T_b B \to \mathfrak{g}$ están definidas por

$$\begin{aligned} (\omega^H(v))^{\#}(b) &= v - H(b^{-1}(\mathfrak{q}_*(v)) \\ (\omega^{H'}(v))^{\#}(b) &= v - H'(b^{-1}(\mathfrak{q}_*(v)) \end{aligned}$$

Para $V \in \mathbb{R}^m$ se tiene que $\omega^{H'}(H'(V)) = 0$ y $\omega^H(H'(V)) = \omega^H(H(V)) + \omega^H((A_V)^{\#}(b)) = A_V$. Tomemos ahora $U, V \in \mathbb{R}^m$, y resultará entonces la simetría

$$0 = \left((\omega^H - \omega^{H'}) \wedge \theta\right)(H'(U), H'(V)) = A_U(V) - A_V(U)$$

Por lo tanto, $A_V = \varphi(V)$ para cierta $\varphi \in \mathfrak{g}_1$, y a la vista de las expresiones (38) y (39) que hemos obtenido queda demostrado que $H^{-1} \circ H' = \overline{\varphi} \Leftrightarrow H' = H \circ \overline{\varphi}$. ■

Podemos sumergir el grupo G en $GL(\mathbb{R}^m + \mathfrak{g})$ si asociamos a cada $\alpha \in G \subset GL(m; \mathbb{R})$ la aplicación $\overline{\alpha} \in GL(\mathbb{R}^m + \mathfrak{g})$ definida por:

(a) $\overline{\alpha}(V) = \alpha V$ para todo $V \in \mathbb{R}^m$
(b) $\overline{\alpha}(A) = \alpha A \alpha^{-1}$ para todo $A \in \mathfrak{g}$

Obsérvese además que de manera natural el grupo $G \subset GL(m; \mathbb{R})$ actúa por la derecha sobre $\mathfrak{g}_1 \subset L(\mathbb{R}^m, \mathfrak{g})$ del modo siguiente:

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{g}_1 \times G & \to & \mathfrak{g}_1 \\ (\varphi, \alpha) & \mapsto & (\varphi \cdot \alpha) = \alpha^{-1} \circ \varphi \circ (\alpha, \alpha) \end{array} \tag{40}$$

es decir si $V \in \mathbb{R}^m$, $(\varphi \cdot \alpha)(V) = Ad\alpha^{-1}(\varphi(\alpha(V))) \in \mathfrak{g}$. De este modo, hemos visto que a través del producto semidirecto podemos considerar el grupo de Lie $G \ltimes \mathfrak{g}_1$ con elementos $(\alpha, \varphi) \in G \times \mathfrak{g}_1$ y operación de grupo dada por:

$$(\alpha, \varphi) \cdot (\alpha', \varphi') = (\alpha\alpha', \varphi' + \varphi \cdot \alpha')$$

Con las inclusiones que acabamos de ver de ambos grupos, G y $\mathfrak{g}_1$, en $GL(\mathbb{R}^m + \mathfrak{g})$ se comprueba fácilmente que se verifica la siguiente identidad para $\alpha, \alpha' \in G$ y $\varphi, \varphi' \in \mathfrak{g}_1$

$$(\overline{\alpha} \circ \overline{\varphi}) \circ (\overline{\alpha'} \circ \overline{\varphi'}) = \overline{\alpha\alpha'} \circ \overline{(\varphi' + \varphi \cdot \alpha')}$$

Tenemos entonces el siguiente resultado,

Teorema 4 *La primera prolongación B_1 de la G-estructura B es un fibrado principal sobre M con proyección $\mathfrak{p} \circ \mathfrak{q} : B_1 \to M$, grupo estructural $G \ltimes \mathfrak{g}_1$, y acción:*

$$\begin{array}{ccc} B_1 \times (G \ltimes \mathfrak{g}_1) & \to & B_1 \\ (H, (\alpha, \varphi)) & \longmapsto & H \cdot (\alpha, \varphi) = R_{\alpha *} \circ H \circ \overline{\alpha} \circ \overline{\varphi} \end{array}$$

Además, se tiene la siguiente relación con la estructura de G-fibrado principal de B sobre M:

$$\mathfrak{q}(H \cdot (\alpha, \varphi)) = \mathfrak{q}(H) \cdot \alpha \in B, \ \forall \alpha \in G, \varphi \in \mathfrak{g}_1 \tag{41}$$

Demostración:
Obsérvese en primer lugar que la acción de $G \ltimes \mathfrak{g}_1$ sobre B_1 cumple efectivamente la condición

$$(H \cdot (\alpha, \varphi)) \cdot (\alpha', \varphi') = H \cdot ((\alpha, \varphi) \cdot (\alpha', \varphi'))$$

y en particular, $\forall \alpha \in G$ y $\forall \varphi \in \mathfrak{g}_1$

$$(H \cdot (\alpha, 0)) \cdot (Id, \varphi) = H \cdot (\alpha, \varphi)$$

Si $H \in B_1$, es tiene $H \cdot (Id, \varphi) = H \circ \overline{\varphi}$ que es la acción de $\varphi \in \mathfrak{g}_1$ en $H \in B_1$ descrita en el teorema anterior, y que da a B_1 estructura de fibrado principal sobre B. En definitiva, la acción de $\mathfrak{g}_1$ hace variar el espacio H dando todos los posibles espacios horizontales (sin torsión) sobre un mismo elemento $b \in B$.

Estudiemos ahora $H \cdot (\alpha, 0) \in B_1$ para $\alpha \in G$. Sea $H \in B_1$, sabemos entonces que existe ∇ conexión en B tal que el espacio horizontal H coincide con $\mathcal{H}_b^\nabla$, es decir, $\forall V \in \mathbb{R}^m \ H(V) = \kappa_b^\nabla(b(V))$, siendo $\kappa_b^\nabla = (\mathfrak{p}_*|_{\mathcal{H}_b^\nabla})^{-1} : T_x M \to T_b B$.

Si $\alpha \in G$ tenemos el isomorfismo $R_{\alpha *} \circ H \circ \overline{\alpha} : \mathbb{R}^m \oplus \mathfrak{g} \to T_{\alpha \cdot b} B$ que actúa del siguiente modo
$\forall A \in \mathfrak{g}$,

$$R_{\alpha *} \circ H \circ \overline{\alpha}(A) = R_{\alpha *} \circ H(\alpha A \alpha^{-1}) = R_{\alpha *}((\alpha A \alpha^{-1})^{\#}(b)) =$$
$$= R_{\alpha *}(\tfrac{d}{dt}\big|_0 \{b \cdot (\alpha \exp(tA) \alpha^{-1})\}) = \tfrac{d}{dt}\big|_0 \{b \cdot (\alpha \exp(tA) \alpha^{-1} \alpha)\} =$$
$$= \tfrac{d}{dt}\big|_0 \{(b \cdot \alpha) \cdot \exp(tA)\} = A^{\#}(b \cdot \alpha).$$

$\forall V \in \mathbb{R}^m$,

$$R_{\alpha *} \circ H \circ \overline{\alpha}(V) = R_{\alpha *} \circ H(\alpha(V)) = R_{\alpha *}\left(\kappa_b^\nabla(b(V))\right) = \kappa_{b \cdot \alpha}^\nabla(b(V)).$$

En consecuencia, $H \cdot (\alpha, 0) = R_{\alpha *} \circ H \circ \overline{\alpha}$ resulta ser $\mathcal{H}_{b \cdot \alpha}^\nabla$ el espacio horizontal de la conexión ∇ en el punto $b \cdot \alpha \in B$.

De este modo, la acción de G desplaza el espacio horizontal a lo largo de toda la fibra B_x de manera G-equivariante. Y se concluye entonces que las fibras de $B_1 \to M$ son efectivamente las órbitas de la acción de $G \ltimes \mathfrak{g}_1$ sobre B_1. ■

4.3. Primera prolongación de $CO(M)$

Este trabajo centra su interés en las estructuras conformes, de modo que vamos a estudiar los resultados que hemos visto para el caso particular de las $CO(m)$-estructuras sobre M.

Sea $CO(M) \to M$ una estructura conforme en M. La primera prolongación de $CO(M)$ es el subfibrado de $LCO(M)$ definido como

$$CO(M)_1 = \{H \in \mathcal{J}(CO(M)) : Tor(H) = 0\}$$

es decir, para cada $b \in CO(M)$ consideramos el conjunto de los distintos espacios horizontales H en $T_bCO(M)$ de conexiones lineales simétricas compatibles con la estructura conforme en M.

Hemos demostrado anteriormente que la primera prolongación del álgebra $\mathfrak{co}(m)$, $\mathfrak{co}(m)_1$, es isomorfa a $\mathbb{R}^{m*}$ a través de la correspondencia $\mathbb{R}^{m*} \ni \eta \mapsto \Phi_\eta \in \mathfrak{co}(m)_1$ definida en la página 13 por la fórmula (21).

Por lo tanto, si aplicamos aquí los teoremas generales anteriores obtenemos los siguientes resultados:

(a) $\mathfrak{q} : CO(M)_1 \to CO(M)$ es un subfibrado principal del fibrado de referencias de $CO(M)$ con grupo estructural el grupo aditivo $\mathbb{R}^{m*}$.

(b) $\mathfrak{p} \circ \mathfrak{q} : CO(M)_1 \to M$ es un fibrado principal con grupo estructural $CO(m) \measuredangle \mathbb{R}^{m*}$.

Obsérvese que la acción por la derecha de $CO(m)$ sobre $\mathfrak{co}(m)_1 \approx \mathbb{R}^{m*}$ definida en (40) es la natural de $CO(m)$ subgrupo cerrado de $GL(m;\mathbb{R})$ en $\mathbb{R}^{m*}$ (por producto matricial). En efecto,

$$\begin{aligned} (\Phi_\eta \cdot \alpha)(U,V) &= \alpha^{-1} \circ \Phi_\eta \circ (\alpha(U), \alpha(V)) = \\ &= \alpha^{-1} \Big(\eta(\alpha U)\alpha(V) + \eta(\alpha V)\alpha(U) - \langle \alpha U, \alpha V \rangle \, \eta_{\uparrow_{\langle .,. \rangle}} \Big) = \\ &= (\eta\alpha)(U)V + (\eta\alpha)(V)U - \langle U, V \rangle \, (\eta\alpha)_{\uparrow_{\langle .,. \rangle}} = \Phi_{\eta\alpha}(U,V) \end{aligned} \tag{42}$$

Por lo tanto, $CO(m) \measuredangle \mathbb{R}^{m*}$ es el afinizado por la derecha de $CO(m)$ cuya ley de composición viene descrita matricialmente por (37).

4.3.1. Obtención de $CO(M)_1$ a partir de κ.

Hemos visto que la primera prolongación $CO(M)_1$ está formada por los distintos H^∇ espacios horizontales de conexiones simétricas ∇ en $CO(M)$, o de manera equivalente (véase 2.1.2), de isomorfismos $H^\nabla : \mathbb{R}^m + \mathfrak{co}(m) \to T_bCO(M) \in LCO(M)$ definidos por

(1) $H^\nabla(V) = \kappa_b^\nabla(b(V)), \forall V \in \mathbb{R}^m$, siendo $\kappa_b^\nabla = \left(\mathfrak{p}_*|_{H^\nabla}\right)^{-1} : T_xM \to H^\nabla$ la función elevación de la conexión ∇.

(2) $H^\nabla(A) = A^\#(b)$, $\forall A \in \mathfrak{co}(m)$.

Recordemos ahora que la función elevación κ dada por la conexión de Fermi-Walker (1.3.2) cumplía la significativa propiedad de englobar las distintas elevaciones κ_b^∇ de las conexiones simétricas compatibles ∇, en el siguiente sentido:

$$\kappa_b \circ \sigma^\nabla = \kappa_b^\nabla$$

siendo σ^∇ la sección en el fibrado $T_x^2M \to T_xM$ definida por ∇ (32). De este modo, a través de κ_b obtenemos las distintas κ_b^∇ para conexiones (simétricas) ∇ en $CO(M)$, y en definitiva, vamos a poder obtener $CO(M)_1$.

Suponemos préviamente fijada una sección global del fibrado $\widetilde{\mathcal{H}} \to M$ (1.3.2), sabemos por el corolario 3 de la página 23 que ésta es equivalente a una conexión lineal (simétrica) en M compatible con la estructura conforme $\mathcal{C}$, que denotamos por ∇.

Todo $\eta \in \mathbb{R}^{m*}$ se corresponde con un elemento $\Phi_\eta \in \mathfrak{co}(m)_1$ que recordemos venía definido por actuar del siguiente modo (21, pág.21), $\forall U, V \in \mathbb{R}^m$:

$$\Phi_\eta(U,V) = \eta(U)V + \eta(V)U - (U^TV)\eta^T$$

Sea $b \in CO(M)$ referencia conforme. Puesto que $b : \mathbb{R}^m \xrightarrow{\sim} T_xM$ da lugar a un isomorfismo entre las estructuras conformes de tales espacios, tenemos una correspondencia $b_* : \mathfrak{co}(m)_1 \to (\mathfrak{co}(T_xM))_1$ definida por asignar a $\Phi_\eta \in \mathfrak{co}(m)_1$ el elemento de $(\mathfrak{co}(T_xM))_1$

$$b_*(\Phi_\eta) = b \circ \Phi_\eta \circ (b^{-1}, b^{-1}) : T_xM \times T_xM \to T_xM.$$

Si $\lambda \in T_x^*M$ con $\lambda \circ b = \eta$, tenemos entonces que $\forall u, v \in T_xM$

$$b_*(\Phi_\eta)(u,v) = \lambda(u)v + \lambda(v)u - g_x(u,v)\lambda_{x\uparrow_g} \tag{43}$$

siendo g cualquier métrica compatible (obsérvese que el vector $g_x(u,v)\lambda_{x\uparrow_g}$ es independiente de la $g \in \mathcal{C}$).

Sea ahora la aplicación

$$\begin{array}{rccl} \Phi_{(b,\eta)} : & T_xM & \to & T_xM \times T_xM \\ & u & \mapsto & (u, -b_*(\Phi_\eta)(u,u)) \end{array}$$

que sumerge T_xM en $T_xM \times T_xM$ a través del grafo de $-b_*(\Phi_\eta)$.

Recordemos que en presencia de una conexión ∇ en M, contamos con la aplicación $\nabla_x : T_x^2M \xrightarrow{\sim} T_xM \times T_xM$ (26) que identifica de manera natural $T_xM \times T_xM$ y T_x^2M, y de este modo la aplicación $\Phi_{(b,\eta)}$ da lugar a

$$\Phi^\nabla_{(b,\eta)} = \nabla_x^{-1} \circ \Phi_{(b,\eta)} : T_xM \to T_x^2M.$$

Observación 13 *La aplicación $\Phi^\nabla_{(b,\eta)}$ que se obtiene es una sección del fibrado $T_x^2M \to T_xM$. Es más, $\Phi^\nabla_{(b,\eta)}$ coincide con la sección $\sigma^{\overline{\nabla}}$ definida por una conexión $\overline{\nabla}$ en M, cuyo tensor diferencia con ∇ esté dado en $x = \mathfrak{p}(b)$ por $B_x = b^*(\Phi_\eta) : T_xM \times T_xM \to T_xM$, esto es*

$$B_x(b(U), b(V)) = b(\Phi_\eta(U,V)),\ \forall U, V \in \mathbb{R}^m.$$

Este resultado se deduce directamente de la definición de $\Phi^\nabla_{(b,\eta)}$ y de las fórmulas (43) y (27).

$$\begin{tikzcd} T_xM \arrow[rr, "\Phi_{(b,\eta)}"] \arrow[dr, "\sigma^{\overline{\nabla}}"'] & & T_xM \times T_xM \arrow[dl, "\nabla x^{-1}"] \\ & T_x^2M & \end{tikzcd}$$

Consideramos ahora el isomorfismo lineal $H^\nabla_{(b,\eta)} : \mathbb{R}^m + \mathfrak{co}(m) \to T_bCO(M)$ definido por:

$$\begin{array}{lcl} (1)\ H^\nabla_{(b,\eta)}(V) & = & \kappa_b \circ \Phi^\nabla_{(b,\eta)}(b(V)), \forall V \in \mathbb{R}^m \\ (2)\ H^\nabla_{(b,\eta)}(A) & = & A^\#(b),\ \forall A \in \mathfrak{co}(m) \end{array} \tag{44}$$

Es claro que $H^\nabla_{(b,\eta)} \in CO(M)_1$. De este modo para cada par $(b,\eta) \in CO(M) \times \mathbb{R}^{m*}$ tenemos asociado el elemento de la primera prolongación de $CO(M)$ caracterizado por ser $H_b = \Phi^\nabla_{(b,\eta)}(T_xM) \subset T_bCO(M)$ su hiperplano horizontal.

En definitiva, hemos llegado a la obtención de la siguiente aplicación:

$$\begin{array}{rccl} H^\nabla_{(.,.)} : & CO(M) \times \mathbb{R}^{m*} & \to & CO(M)_1 \subset L(CO(M)) \\ & (b,\eta) & \mapsto & H^\nabla_{(b,\eta)} \end{array}$$

donde $H^\nabla_{(b,\eta)} : \mathbb{R}^m \oplus \mathfrak{co}(m) \to T_bCO(M)$ está definido por (44).

Observación 14 *Si fijamos inicialmente otra sección de $\widetilde{\mathcal{H}} \to M$, de modo que da lugar a una conexión $\overline{\nabla}$ en M relacionada con ∇ a través del tensor diferencia $B \in \mathfrak{T}^1_2(M)$ de expresión*

$$B(u,v) = \lambda(u)v + \lambda(v)u - g_x(u,v)\lambda_{x\uparrow_g},\ \forall u, v \in T_xM$$

para ciera forma $\lambda \in \Lambda^1(M)$ y $g \in \mathcal{C}$ métrica auxiliar en M. Entonces, se tiene la siguiente igualdad

$$H^{\nabla}_{(.,.)}(b,\eta) = H^{\overline{\nabla}}_{(.,.)}(b, \eta - \lambda_x \circ b),\ \forall (b,\eta) \in CO(M) \times \mathbb{R}^{m*}$$

Teorema 5 *La función $H^{\nabla}_{(.,.)} : CO(M) \times \mathbb{R}^{m*} \to CO(M)_1$ define una trivialización del fibrado $CO(M)_1$ sobre $CO(M)$.*

$$\begin{tikzcd} CO(M) \times \mathbb{R}^{m*} \arrow[r, "H^{\nabla}_{(.,.)}"] \arrow[d, "p_1"'] & CO(M)_1 \arrow[d, "\Pi"] \\ CO(M) \arrow[r, "id"'] & CO(M) \end{tikzcd} \tag{45}$$

La sección cero de esta trivialización se corresponde con la sección dada por la conexión ∇ en $CO(M)_1$, que asigna a cada $b \in CO(M)$ el espacio horizontal $\mathcal{H}^{\nabla}_b \subset T_bCO(M)$ de la conexión ∇.

Demostración:

Por la observación 13 sabemos que $\Phi^{\nabla}_{(b,\eta)}$ coincide con la sección $\sigma^{\overline{\nabla}} : T_xM \to T^2_xM$ dada por una conexión $\overline{\nabla}$ cuyo tensor diferencia con ∇ es $B = \overline{\nabla} - \nabla \in \mathfrak{T}^1_2(M)$ tal que $B_x = b^*(\Phi_\eta)$. Entonces,

$$H^{\nabla}_{(b,\eta)}(V) = \kappa_b \circ \Phi^{\nabla}_{(b,\eta)}(b(V)) = \kappa_b \circ \sigma^{\overline{\nabla}}(b(V)) = \kappa^{\overline{\nabla}}_b(b(V))$$

donde la última igualdad está dada por (32), página 19.

En particular, $H^{\nabla}_{(b,0)}$ es justamente el espacio horizontal dado por la conexión ∇ en $b \in CO(M)$, y por lo tanto, es claro que $H^{\nabla}_{(.,.)}$ hace corresponder la sección cero con la sección $\iota^{\nabla} : CO(M) \hookrightarrow CO(M)_1$ que la conexión ∇ define en $CO(M)_1$ de manera natural. Obsérvese que por la demostración del teorema 4 se tiene entonces que $\forall \alpha \in CO(m)$

$$H^{\nabla}_{(b\cdot\alpha,0)} = H^{\nabla}_{(b,0)} \cdot (\alpha, 0) \tag{46}$$

Si ahora hacemos uso de la fórmula (33) relacionando κ^{∇}_b y $\kappa^{\overline{\nabla}}_b$ tenemos que $\forall \eta \in \mathbb{R}^{m*}$

$$H^{\nabla}_{(b,\eta)}(V) = \kappa_b \circ \sigma^{\overline{\nabla}}(b(V)) = \kappa_b \circ \sigma^{\nabla}(b(V)) + (\Phi_\eta(V))^{\#}(b) = H^{\nabla}_{(b,0)} + (\Phi_\eta(V))^{\#}(b)$$

y por el desarrollo hecho en la demostración del teorema 3 esto significa que $H^{\nabla}_{(b,\eta)} = H^{\nabla}_{(b,0)} \cdot \eta$ (o equivalentemente, $H^{\nabla}_{(b,\eta)} = H^{\nabla}_{(b,0)} \cdot (Id, \eta)$ para $(Id,\eta) \in CO(m) \rtimes \mathbb{R}^{m*}$). ■

Observación 15 *Por la fórmula 46, es claro que la sección cero dada por $H^{\nabla}_{(.,.)}$ sumerge $CO(M)$ como subfibrado principal de $CO(M)_1 \to M$ de grupo estructural $CO(m) \approx CO(m) \rtimes \{0\} \subset CO(m) \rtimes \mathbb{R}^{m*}$.*

5. Conexión normal de Cartan en $(M, \mathcal{C})$

5.1. $G/H-$Estructura tangencial

Definición 8 *Una* G/H-estructura tangencial sobre M, *viene determinada por un* H*-fibrado principal* $Q \xrightarrow{\mathfrak{p}} M$, *y un grupo de Lie* G *que contiene a* H *como subgrupo cerrado, de forma que* $\dim G/H = \dim M$.

Convenios observaciones y notaciones:

Sea $Q \xrightarrow{\mathfrak{p}} M$ una G/H-estructura tangencial sobre M.

(a) $\pi_o : G \to F = G/H$ es la proyección canónica. En F hay un elemento distinguido $o = eH \in F$, y H es exactamente el grupo de isotropía en la actuación natural $G \times F \ni (g, \xi) \to g\xi = L_g(\xi) \in F$, del *origen* $o = eH \in F$. Denotamos por $\mathfrak{g}$ y $\mathfrak{h}$ a las correspondientes álgebras de Lie de G y H, respectivamente. Sea $n = \dim \mathfrak{g}$, $r = \dim \mathfrak{h}$. Como el núcleo de $(\pi_o)_* : \mathfrak{g} \to T_oF$ es igual a $\mathfrak{h}$, se tiene la igualdad:

$$T_oF = \mathfrak{g}/\mathfrak{h}$$

La dimensión de M es $m = n - r = \dim F$, y la dimensión de Q es por tanto $r + m = n = \dim G$

(b) Denotamos por $E = Q \times_H F$ al fibrado asociado, respecto a la actuación natural $H \times F \to F$, $\pi : E \to M$ es la proyeccion canónica. Podemos escribir: $E = \{q \times_H \xi : q \in Q,\ \xi \in F\}$, entendiendo que $qh \times_H \xi = q \times_H h\xi$, para todo $q \in Q$, $h \in H$, $\xi \in F$, y $\pi(q \times_H \xi) = \mathfrak{p}(q)$. Nótese que en particular, para $q \in Q_x$, $h \in H$ se tiene $q \times_H o = q \times_H ho = qh \times_H o$, de modo que la aplicación $\sigma : M \to E$, definida sin ambigüedad por $\sigma(x) = q \times_H o$ cualquiera que sea $q \in Q_x$, constituye una sección global de E.

(c) Se construye el fibrado principal $P = Q \times_H G$ sobre M, con grupo G. Nótese que $(q \times_H g)\, g' = q \times_H gg'$ para $g, g' \in G$, $q \in Q$. Sea $\mathfrak{p} : P \ni q \times_H g \to \mathfrak{p}(q) \in M$ la proyección natural. El fibrado Q puede verse así, como un subfibrado principal de P con fibra H. Se denota por $\iota_Q : Q \ni q \hookrightarrow q = q \times_H e \in P$ a la inclusión canónica.

(d) Hay un isomorfismo canónico ϕ entre el fibrado $E = Q \times_H F$, y $P \times_G F$, que queda bien definido de la siguiente forma: fijado $p \times_G \xi \in P \times_G F$, se toma $g \in G$, tal que $pg \in Q$, y $\phi\,(p \times_G \xi) = pg \times_H g^{-1}\xi \in E = Q \times_H F$. Así $E = P \times_G F$, y además $E = P/H$, mediante el isomorfismo canónico $P/H \ni pH \to p \times_G o \in E$

Partiendo de un $G-$fibrado principal $P \xrightarrow{\mathfrak{p}} M$, se tiene la siguiente definición equivalente:

Definición 9 *Una* G/H*-estructura tangencial sobre* M*, viene determinada por un* $G-$*fibrado principal* $P \xrightarrow{\mathfrak{p}} M$ *y un* $H-$*subfibrado principal,* Q *, donde* H *es cerrado en* G *y* $\dim G/H = \dim M$

Nótese, que el *dato* Q equivale a dar una sección global σ del fibrado $E = P/H \ni pH \xrightarrow{\pi} \mathfrak{p}(p) \in M$.

En efecto, dado Q, definimos $\sigma : M \ni x \to Q_x \in E$. Recíprocamente cada sección σ del fibrado E da lugar a un único subfibrado principal Q de P con fibra H, tal que $im\sigma \subset Q$, basta tomar $Q_x = \sigma(x)H$ para cada $x \in M$.

Hay una tercera forma de mirar una G/H-estructura tangencial en M partiendo del fibrado $G/H-$homogéneo E sobre M. Recordemos que esto es un fibrado $E \overset{\pi}{\to} M$ con fibra $F = G/H$, espacio homogéneo, y grupo G, es decir, para cada $x_0 \in M$, hay un entorno abierto $\mathcal{U}$ de x_0 y una $G-$carta fibrada, es decir, una biyección $\varphi : \pi^{-1}(\mathcal{U}) \to \mathcal{U} \times F$ con $\varphi(E_x) = \{x\} \times F$ para todo $x \in \mathcal{U}$. Se denota por $\varphi_x = \varphi|_{E_x} : E_x \to F$. De forma que si $\psi : \pi^{-1}(\mathcal{V}) \to \mathcal{V} \times F$ es *otra* $G-$carta fibrada, entonces para cada $x \in \mathcal{U} \cap \mathcal{V}$ la aplicación $\psi_x \circ \varphi_x^{-1} : F \to F$ actua sobre F, como cierto $g_{\varphi\psi}(x) \in G$, siendo $g_{\varphi\psi} : \mathcal{U} \cap \mathcal{V} \to G$ una aplicación diferenciable

Definición 10 *Una $G/H-$estructura tangencial sobre M es un fibrado G/H-homogéneo $E \overset{\pi}{\to} M$ sobre M (con $\dim G/H = \dim M$) y una sección suya $\sigma : M \to E$.*

De esta forma se construye para cada $x \in M$, $P_x = \{\varphi_x^{-1} \circ g : g \in G\}$ y $Q_x = \{\varphi_x^{-1} \circ h : h \in H\}$. Naturalmente Q_x y P_x no dependen de la G-carta fibrada $\varphi : \pi^{-1}(\mathcal{U}) \to \mathcal{U} \times F$ elegida por x.

5.2. Conexiones de Cartan

Una *conexión de Cartan* sobre una G/H-estructura tangencial de M, es una 1-forma $\vartheta : TQ \to \mathfrak{g}$, (es decir $\vartheta \in \Lambda^1(TQ, \mathfrak{g})$) verificando las siguientes propiedades:

Cr1) $\vartheta : T_qQ \to \mathfrak{g}$ es un isomorfismo lineal $\forall q \in Q$.

Cr2) $\vartheta(A^{\#}) = A$ para todo $A \in \mathfrak{h}$, donde $A^{\#}$ es el campo vertical fundamental definido por $A \in \mathfrak{h}$

Cr3) $R_h^*\vartheta = Ad_{h^{-1}} \circ \vartheta$, para todo $h \in H$, es decir, el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} T_qQ \arrow[r, "(R_h)_*"] \arrow[d, "\vartheta"'] & T_{qh}Q \arrow[d, "\vartheta"] \\ \mathfrak{g} \arrow[r, "Ad_{h^{-1}}"'] & \mathfrak{g} \end{tikzcd}$$

Se dice por esto que ϑ es Ad_H-equivariante.

5.2.1. Notaciones

(1) La condición **Cr1)** implica que Q es paralelizable. Si $A \in \mathfrak{g}$ denotamos por $\tilde{A}$ el único campo en Q, que verifica la identidad:

$$\vartheta(\tilde{A}(q)) = A, \ \forall q \in Q$$

(2) La condición **Cr2)** nos indica que el campo vertical fundamental $A^{\#}$ en Q asociado a $A \in \mathfrak{h}$ coincide con $\tilde{A}$, y para cada $x \in M$, $q \in Q_x$, ϑ induce isomorfismo

$$T_qQ_x \overset{\vartheta}{\to} \mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$$

Proposición 4 *Si $\vartheta \in \Lambda^1(TQ, \mathfrak{g})$ es una conexión de Cartan en Q, entonces $T_xM = T_{\sigma(x)}E_x$.*

Demostración:

La aplicación $q_F : F \ni \xi \to q \times_H \xi \in E_x$, es un difeomorfismo que transforma el punto $o \in F$ en el $o_x = \sigma(x)$, se tiene así un epimorfismo natural $\zeta_q = q_{F*} \circ (\pi_o)_* \circ \vartheta$ definido por la conmutatividad del diagrama:

$$\begin{tikzcd} T_qQ \arrow[r, "\vartheta"] \arrow[d, "\zeta_q"'] & \mathfrak{g} \arrow[d] \\ T_{o_x}E_x & \mathfrak{g}/\mathfrak{h} \arrow[l, "q_{F*}"] \end{tikzcd}$$

que actúa de la forma:

$$\zeta_q : T_qQ \ni v_q \to q_{F*}\left(\vartheta\left(v_q\right) + \mathfrak{h}\right) \in T_{o_x}E_x$$

como q_{F*} es isomorfismo se tiene $\zeta_q(v_q) = 0 \Leftrightarrow \vartheta\left(v_q\right) \in \mathfrak{h} \Leftrightarrow v_q \in T_qQ_x = \ker \mathfrak{p}_*$, de forma que si $\mathfrak{p}_*(v_q) = \mathfrak{p}_*(\tilde{v}_q) = v_x \in T_xM$, entonces $\zeta_q(v_q) = \zeta_q(\tilde{v}_q)$ y la aplicación

$$\phi_q : T_xM \ni v_x = \mathfrak{p}_*(v_q) \to \zeta_q(v_q) \in T_{o_x}E_x$$

está definida sin ambigüedad y es isomorfismo lineal.

Probaremos ahora que $\phi_q = \phi_{\tilde{q}}$ para todo $q, \tilde{q} \in Q_x$. En efecto, si $\tilde{q} = qh$, para $h \in H$, se ve que

$$\tilde{q}_F(\xi) = qh \times_H \xi = q \times_H h\xi = q_F \circ L_h(\xi),\ \forall \xi \in F$$

así, si $v_x = \mathfrak{p}_*(v_q) \in T_xM$, es también $v_x = \mathfrak{p}_*(R_{h*}v_q)$, y se verifica:

$$\begin{aligned} \phi_{\tilde{q}}(v_x) &= \tilde{q}_{F*}\left(\vartheta\left(R_{h*}v_q\right) + \mathfrak{h}\right) \\ &= q_{F*} \circ L_{h*}\left(\vartheta\left(R_{h*}v_q\right) + \mathfrak{h}\right) \\ &= q_{F*}\left(Ad_h\vartheta\left(R_{h*}v_q\right) + \mathfrak{h}\right) \\ &= q_{F*}\left(\vartheta\left(v_q\right) + \mathfrak{h}\right) = \phi_q(v_x) \end{aligned}$$

Quedando probado que $\phi_q = \phi_{\tilde{q}}$ si $q, \tilde{q} \in Q_x$. ■

Teorema 6 *Dada una conexión de Cartan $\vartheta \in \Lambda^1(TQ, \mathfrak{g})$, existe una única conexión $\omega \in \Lambda^1(TP, \mathfrak{g})$, tal que $\iota_Q^*\omega = \vartheta$ es decir:*

$$\forall q \in Q,\ \textit{es}\ \vartheta(v_q) = \omega(v_q)\ \textit{para todo}\ v_q \in T_qQ \subset T_qP.$$

*Recíprocamente, una conexión lineal $\omega \in \Lambda^1(P, \mathfrak{g})$ induce una conexión de Cartan en Q si y solo si $\iota^*\omega = \vartheta$ verifica la propiedad **Cr1)***

Demostración:

Nótese primero que si $q \in Q_x$, como $T_qQ \cap T_qP_x = T_qQ_x$ se concluye por razón de dimensiones que:

$$T_qP = T_qQ + T_qP_x$$

Por otra parte, T_qQ y T_qP_x están canónicamente identificados con $\mathfrak{g}$ vía (ver notaciones anteriores):

$$\begin{aligned} \mathfrak{g} &\ni A \to \tilde{A}(q) \in T_qQ \\ \mathfrak{g} &\ni B \to B^{\#}(q) \in T_qP_x \end{aligned}$$

de forma que si $v \in T_qP$ existen $A, B \in \mathfrak{g}$ tales que $v = \tilde{A}(q) + B^{\#}(q)$, donde $B^{\#}$ es le campo fundamental vertical asociado a B en P, y Así, si existe $\omega \in \Lambda^1(TP, \mathfrak{g})$ conexión en P tal que $\iota_Q^*\omega = \vartheta$, es $\omega(v) = \omega(\tilde{A}(q)) + \omega(B^{\#}(q)) = \vartheta(\tilde{A}(q))) + B = A + B$. Podemos pues tomar como definición de $\omega : T_qP \to \mathfrak{g}$:

$$\omega(v) = A + B, \text{ si } v = \tilde{A}(q) + B^{\#}(q) \text{ con } A, B \in \mathfrak{g}$$

Además, $\omega(v)$ no depende de los $A, B \in \mathfrak{g}$ encontrados, pues si $v = \tilde{X}_q + Y_q^{\#}$ con $X, Y \in \mathfrak{g}$, esto significa que

$$(\widetilde{A - X})(q) = (Y - B)^*(q) \in T_qQ \cap T_qP_x = T_qQ_x$$

por tanto $(Y - B)^{\#}(q) = (\widetilde{Y - B})(q) = (\widetilde{A - X})(q)$ de donde $Y - B = A - X$, es decir $A + B = X + Y$.

El *valor* de ω en otro punto $p = qg$ se obtiene por la conmutatividad del diagrama:

$$\begin{tikzcd}
T_qP \arrow[r, "(R_g)_*"] \arrow[d, "\omega"'] & T_{qg}Q \arrow[d, "\omega"] \\
\mathfrak{g} \arrow[r, "Ad_{g^{-1}}"'] & \mathfrak{g}
\end{tikzcd}$$

esto es $\omega_{qg} = Ad_{g^{-1}} \circ \omega_q \circ (R_g)_*^{-1}$. ■

Observación 16 :

(1) *La condición de que ω proceda de una conexión de Cartan ϑ en el fibrado Q, impone que $\ker\omega \cap T_qQ = \{0\}$. Por razón de dimensiones, se concluye $T_qP = \ker\omega \oplus T_qQ$.*

(2) *Una conexión $\omega \in \Lambda^1(TP, \mathfrak{g})$ induce un transporte paralelo sobre el fibrado asociado $E = P \times_G F$, de forma que si $\gamma : t \to x_t$ es una curva en M por x_0, y $e_0 = p_0 \times_G \xi \in E_{x_0}$, entonces $t \to e_t = p_t \times_G \xi$ es el transporte de e_0 a lo largo de γ, donde $t \to p_t$ es la elevación horizontal de γ por p_0. Si escribimos $e_t = |\cdot|_0^t e_0$ resulta ser $|\cdot|_0^t : E_{x_0} \to E_{x_t}$ un difeomorfismo (que depende de γ) entre los espacios homogéneos tangentes, cuya inversa se denota por $|\cdot|_t^0 : E_{x_t} \to E_{x_0}$. La curva $c(t) = |\cdot|_t^0 \sigma(x_t)$ se llama* desarrollo *de γ en el espacio homogéneo tangente E_{x_0}*

5.3. Conexiones Normales de Cartan.

5.3.1. $G/H-$Estructuras tangenciales normales

Una G/H-estructura tangencial de M se dice *normal*, si el álgebra de lie $\mathfrak{g}$ está graduada en la forma

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{-1} \oplus \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1$$

donde

$$\mathfrak{g}_0 \subset \mathfrak{gl}(m, \mathbb{R}),\ \mathfrak{h} = \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1 = \mathfrak{g}_0 \uplus \mathbb{R}^{m*} \text{ y } \mathfrak{g}_{-1} \oplus \mathfrak{g}_0 = \mathbb{R}^m \uplus \mathfrak{g}_0$$

En estas condiciones, sea $B \xrightarrow{\mathfrak{p}} M$ una G_0-estructura, es decir, un G_0-fibrado principal sobre M, con G_0 subgrupo cerrado del lineal general $GL(m, \mathbb{R})$, con álgebra de Lie $\mathfrak{g}_0$ ($m = \dim M$). Supongase que H es el grupo *afinizado* de G_0, es decir, $H = G_0 \ltimes \mathbb{R}^{m*}$. Entonces B se extiende (canónicamente) al H-fibrado principal $Q = B \times_{G_0} H$, con proyección $\mathfrak{p}(b \times_{G_0} h) = \mathfrak{p}(b)$. La inclusión $\iota : B \ni b \to b \times_{G_0} e \in Q$, hace que B sea una G_0-reducción de Q. Se dice que esta G/H-estructura tangencial Q es *B-normal*.

5.3.2. Estructura tangencial conforme

Sea $x \in \mathbb{R}^{m+2}$ (vector columna), denotamos al punto que define en el espacio proyectivo por $[x] \in \mathbb{P}(\mathbb{R}^{m+2}) = \mathbb{P}^{m+1}$.

Sea S la matriz simétrica de orden $m+2$ dada por

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & I_m & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

que define la cuádrica en $\mathbb{P}^{m+1}$ $\mathbb{S} = \{[x] : x^T S x = 0\}$. $\mathbb{S}$ recibe el nombre de espacio de Möebius y es difeomorfo a la esfera m-dimensional $\mathbb{S}^m$ en $\mathbb{R}^{m+1}$ a través de la aplicación

$$\mathbb{S}^m \ni (y^1, ..., y^{m+1}) \mapsto [\frac{1}{2}(1 + y^{m+1}) : y^1 : ... : y^m : (1 - y^{m+1})] \in \mathbb{S}$$

Es más, en $\mathbb{S}^m$ consideramos la métrica heredada de $\mathbb{R}^{m+1}$, y en la cuádrica $\mathbb{S}$ la métrica dada por S, esta correspondencia es isométrica. Por lo tanto, $\mathbb{S}$ y $\mathbb{S}^m$ son distintos modelos para una misma variedad riemaniana.

Sabemos además que $\mathbb{S}^m \backslash \{(1, 0, ..., 0)\}$ se identifica con $\mathbb{R}^m$ a través del difeomorfismo conforme dado por la proyección estereográfica

$$\mathbb{S}^m \backslash \{(1, 0, ..., 0)\} \ni (y^1, ..., y^{m+1}) \mapsto (\frac{y^1}{1 - y^{m+1}}, ..., \frac{y^m}{1 - y^{m+1}}) \in \mathbb{R}^m$$

Por lo tanto, podemos sumergir $\mathbb{R}^m$ en la cuádrica $\mathbb{S}$ a través de

$$\mathbb{R}^m \ni y = (y^1, ..., y^m) \mapsto [\frac{1}{2}(y^T.y) : y : 1] \in \mathbb{S} \tag{47}$$

de modo que preserva su estructura conforme. El origen $0 \in \mathbb{R}^m$ se corresponde con el punto $O = [0 : ... : 0 : 1] \in \mathbb{S}$, que llamamos igualmente origen, y el punto del infinito es $[1 : 0 : ... : 0] \in \mathbb{S}$.

Sean,

$G =$comp. conexa de Id en $O(m+1, 1) = \{X \in GL(m+2, \mathbb{R}) / X^T S X = S\}$

$$H = \left\{ \begin{pmatrix} a^{-1} & 0 & 0 \\ a^{-1} A \eta^T & A & 0 \\ 2a^{-1} \eta \eta^T & \eta & a \end{pmatrix} \in G \ / \ A \in O(m), a \in \mathbb{R} - \{0\}, \eta \in \mathbb{R}^{m*} \right\}$$

$$G_0 = \left\{ \begin{pmatrix} a^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} \in G \ / \ A \in O(m), a \in \mathbb{R} - \{0\} \right\}$$

Entonces, G es el grupo de isometrías que actúa transitivamente en $\mathbb{S} \approx \mathbb{S}^m$, con H como grupo de isotropía del punto origen $O = [0 : ... : 0 : 1]$. De este modo $\mathbb{S}^m$ adquiere estructura de espacio homogéneo mediante la identificación

$G/H \approx \mathbb{S}^m$. El subgrupo G_0 está formado por aquellas transformaciones que, además de preservar el origen, dejan fijo el punto del infinito $[1:0:...:0]$.

A través de (47), los elementos de G_0 dan lugar a transformaciones conformes de $\mathbb{R}^m$ dejando fijo el origen (es decir, elementos de $CO(m)$). En particular, se tiene la correspondencia dada por el homomorfismo siguiente

$$G_0 \ni \begin{pmatrix} a^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} \longleftrightarrow a^{-1}A \in CO(m)$$

Es claro también que todo elemento de H da lugar a un difeomorfismo conforme entre entornos de $0 \in \mathbb{R}^m$ dejando fijo el origen. Además, con la identificación

$$H \ni \begin{pmatrix} a^{-1} & 0 & 0 \\ a^{-1}A\eta^T & A & 0 \\ 2a^{-1}\eta\eta^T & \eta & a \end{pmatrix} \longleftrightarrow (a^{-1}A, a^{-1}\eta) \in CO(m) \times \mathbb{R}^{m*}$$

resulta ser $H = CO(m) \leftthreetimes \mathbb{R}^{m*}$, y para el subgrupo $G_0 = CO(m) \leftthreetimes \{0\} \equiv CO(m)$ es la correspondencia anterior.

El álgebra de Lie asociada a G está dada por $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{-1} \oplus \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1$ siendo

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{o}(m+1,1) = \{X \in \mathfrak{gl}(m+2,\mathbb{R}) : X^T S + SX = 0\}$$

$$\begin{aligned} \mathfrak{g}_{-1} &= \left\{ \begin{pmatrix} 0 & v^T & 0 \\ 0 & 0 & v \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}, \mathfrak{g}_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \eta^T & 0 & 0 \\ 0 & \eta & 0 \end{pmatrix} \right\} \\ \mathfrak{g}_0 &= \left\{ \begin{pmatrix} -a & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} : A \in \mathfrak{o}(m), a \in \mathbb{R} \right\} \end{aligned}$$

con $\mathfrak{g}_0 + \mathfrak{g}_1$ el álgebra de H, y $\mathfrak{g}_0$ el de G_0.

Podemos considerar las siguientes identificaciones:

$$\begin{pmatrix} 0 & v^T & 0 \\ 0 & 0 & v \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{g}_{-1} \to v \in \mathbb{R}^m, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \eta^T & 0 & 0 \\ 0 & \eta & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{g}_1 \to \eta \in \mathbb{R}^{m*}$$

$$\begin{pmatrix} -a & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} \in \mathfrak{g}_0 \to A - aI_m \in \mathfrak{co}(m)$$

de este modo, la estructura de álgebra de Lie está dada por:

$$\begin{aligned} [v,v] &= 0, \quad [\eta,\eta] = 0, \quad [A,v] = Av, \quad [\eta,A] = \eta A, \\ [A,A'] &= AA' - A'A, \quad [v,\eta] = v\eta - (v\eta)^T + (\eta v)I_m \end{aligned} \tag{48}$$

Y por tanto, tenenos el álgebra graduada $\mathfrak{g} = \mathbb{R}^m \oplus \mathfrak{co}(m) \oplus \mathbb{R}^{m*}$ con $\mathfrak{co}(m) + \mathbb{R}^{m*} = \mathfrak{co}(m) \uplus \mathbb{R}^{m*}$ y $\mathbb{R}^m + \mathfrak{co}(m) = \mathbb{R}^m \uplus \mathfrak{co}(m)$.

En conclusión, las identificaciones que acabamos de ver tenemos las siguientes relaciones de subgrupo (cerrado) de Lie:

$$CO(m) = G_0 \subset CO(m) \leftthreetimes \mathbb{R}^{m*} = H \subset O(m+1,1)_{Id} = G$$

con $\mathfrak{g} = \mathbb{R}^m \oplus \mathfrak{co}(m) \oplus \mathbb{R}^{m*}$, $\mathfrak{h} = \mathfrak{co}(m)_1 = \mathfrak{co}(m) \uplus \mathbb{R}^{m*}$, $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{co}(m)$. Obsérvese además que $\dim(G/H) = m$ y $G/H \approx \mathbb{S}^m$ (véase esta construcción en los trabajos de [1], [13], [11]).

La aplicación inmediata de este resultado para M variedad dotada de una estructura conforme riemanniana $\mathcal{C}$, con $CO(M)$ su respectivo fibrado de referencias conformes, es la siguiente.

Hemos visto en la sección anterior (2.1.3) que la primera prolongación $CO(M)_1$ es un fibrado principal sobre M de grupo estructural $CO(m) \leftthreetimes \mathbb{R}^{m*}$. Por tanto, $\mathfrak{p} \circ \mathfrak{q} : CO(M)_1 \to M$ será una G/H-estructura tangencial normal para $H = CO(m) \leftthreetimes \mathbb{R}^{m*}$ y $G = O(m+1,1)$ ([13]).

Además, el $CO(m)$-fibrado principal $\mathfrak{p} : CO(M) \to M$, se extiende (a través de $CO(m) \subset CO(m) \leftthreetimes \mathbb{R}^{m*}$) al $CO(m) \leftthreetimes \mathbb{R}^{m*}$-fibrado principal asociado

$$Q = CO(M) \times_{CO(m)} (CO(m) \leftthreetimes \mathbb{R}^{m*}) \xrightarrow{\mathfrak{p}} M$$

con proyección $\mathfrak{p}(b \times_{CO(m)} h) = \mathfrak{p}(b)$, obteniendo de este modo una G/H-estructura tangencial $CO(M)$-normal ([1]).

5.3.3. Conexiones adaptadas de Cartan

Sea $\vartheta : TQ \to \mathfrak{g}$ una conexión de Cartan, sobre una G/H-estructura tangencial $B-$normal en M. Entonces para cada $v_q \in T_qQ$ podemos escribir $\vartheta(v_q) = \vartheta_{-1}(v_q) + \vartheta_0(v_q) + \vartheta_1(v_q)$ donde $\vartheta_i(v_q) \in \mathfrak{g}_i$, así cada $\vartheta_i \in \Lambda^1(TQ, \mathfrak{g}_i)$.

Si $\theta \in \Lambda^1(TB, \mathbb{R}^m)$ es la restricción a B de la forma vertical canónica del fibrado de referencias $L(M)$, se dice que ϑ *está adaptada a* B, si $\theta = \iota^*\vartheta_{-1}$, siendo $\iota : B \hookrightarrow Q$

Recuerdese que la forma vertical canónica $\theta \in \Lambda^1(TB, \mathbb{R}^m)$ está definida por $\theta(v) = b^{-1}(\mathfrak{p}_* v)$, para $v \in T_bB$. Así para $g \in G_0$, es $R_g^*\theta = g^{-1}\theta$ ya que:

$$\left(R_g^*\theta\right) v = \theta(R_{g*}v) = (bg)^{-1}\mathfrak{p}_* v = \left(g^{-1}\theta\right) v$$

Observaciones:

(1) Un elemento $b \in B_x$ es una base de T_xM, induce isomorfismo $b : \mathbb{R}^m \to T_xM$. Por otra parte, como $b \in Q_x$ y la aplicación $b_F : F \ni \xi \to b \times_H \xi \in E_x$ induce isomorfismo $b_{F*} : T_oF = \mathfrak{g}/\mathfrak{h} = \mathfrak{g}_{-1} = \mathbb{R}^m \to T_{\sigma(x)}E_x$. Pero la conexión de Cartan ϑ permite escribir por la proposición 4: $T_xM = T_{\sigma(x)}E_x$. La condición $\theta = \iota^*\vartheta_{-1}$, expresa la igualdad:

$$b = b_{F*} : \mathbb{R}^m \to T_xM.$$

(2) Nótese que la acción adjunta del grupo G_0 sobre el áglebra de Lie $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{-1} \oplus \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1$ viene definida para cada $g \in G_0$ y $v + A + \eta \in \mathfrak{g}_{-1} \oplus \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1$

$$Ad_g\,(v + A + \eta) =$$
$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & g \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ v & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \eta \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & g^{-1} \end{pmatrix}$$
$$= gv + gAg^{-1} + \eta g^{-1}$$

En particular, $Ad_g = g : \mathfrak{g}_{-1} \to \mathfrak{g}_{-1}$, y la condición $\theta = \iota^*\vartheta_{-1}$ implica que el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
T_bB \arrow[r, "R_{g*}"] \arrow[d, "\vartheta_{-1} = \theta"'] & T_{bg}B \arrow[d, "\theta = \vartheta_{-1}"] \\
\mathfrak{g}_{-1} = \mathbb{R}^m \arrow[r, "g^{-1} = Ad_{g^{-1}}"'] & \mathbb{R}^m = \mathfrak{g}_{-1}
\end{tikzcd}$$

(3) Para $h \in H$, el isomorfismo $Ad_h : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ deja invariante $\mathfrak{h} = \mathfrak{g}_0 + \mathfrak{g}_1$ por lo que induce isomorfismo $\overline{Ad}_h : \mathfrak{g}/\mathfrak{h} = \mathfrak{g}_{-1} = \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m = \mathfrak{g}_{-1} = \mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ que coincide (en el caso seminormal) con $Ad_h : \mathfrak{g}_{-1} \to \mathfrak{g}_{-1}$ cuando $h \in G_0$, pero en general, no es cierto que Ad_h deje invariante $\mathfrak{g}_{-1}$.

(4) La condición $\theta = \iota^*\vartheta_{-1}$ determina completamente ϑ_{-1}, en cada espacio T_bQ para $b \in B$.

Teorema 7 *Sea $Q \xrightarrow{\mathrm{p}} M$ es una G/H-estructura tangencial normal sobre M, $\vartheta_i \in \Lambda^1(TQ, \mathfrak{g}_i)$ para $i = -1, 0$. Supóngase que:*

(a) $\vartheta_{-1}(A^{\#}) = 0$ y $\vartheta_0(A^{\#}) = A_0$ para todo $A = A_0 + A_1 \in \mathfrak{g}_0 + \mathfrak{g}_1$

(b) $\vartheta_{-1} + \vartheta_0$ es Ad_H-equivariante

(c) $\ker \vartheta_{-1}(q) = T_qQ_x$, para todo $x \in M$, y todo $q \in Q_x$

Existe entonces $\vartheta_1 \in \Lambda^1(TQ, \mathfrak{g}_1)$ de forma que $\vartheta = \vartheta_{-1} + \vartheta_0 + \vartheta_1$ es conexión de Cartan. Por otra parte, todas las posibles ϑ_1 son de la forma:

$$\bar{\vartheta}_1 = \vartheta_1 + (f_{ij})\vartheta_{-1}$$

donde (f_{ij}) es una matriz $m \times m$ de funciones diferenciables $f_{ij} : Q \to \mathbb{R}$.

(véase su demostración en [13] IV.4.2).

5.3.4. Curvatura

Sea $\vartheta : TQ \to \mathfrak{g}$ una conexión de Cartan, sobre una G/H-estructura normal. La *curvatura de ϑ* es la 2-forma $\Theta \in \Lambda^2(Q; \mathfrak{g})$, definida a través de la siguiente ecuación de estructura:

$$d\vartheta = -\frac{1}{2}[\vartheta, \vartheta] + \Theta$$

entendiendo que $[\vartheta, \vartheta](v_q, w_q) = [\vartheta(v_q), \vartheta(w_q)] \in \mathfrak{g}$, $v_q, w_q \in T_qQ$.

Si $\omega \in \Lambda^1(P; \mathfrak{g})$ es la conexión en el $G-$fibrado P asociada a ϑ ($\iota_Q^*\omega = \vartheta$, Teorema 6), su curvatura Ω verifica la conocida ecuación de estructura $\Omega = d\omega + \frac{1}{2}[\omega, \omega]$, y en consecuencia,

$$\iota_Q^*\Omega = \iota_Q^*(d\omega + \frac{1}{2}[\omega, \omega]) = d(\iota_Q^*\omega) + \frac{1}{2}[\iota_Q^*\omega, \iota_Q^*\omega] = d\vartheta + \frac{1}{2}[\vartheta, \vartheta] = \Theta$$

Es conocido que la forma de curvatura Ω es horizontal y por tanto también lo será $\Theta = \iota_Q^*\Omega$ (esto es, si $v_q \in T_qQ_x$, entonces, $\Theta(v_q, .) \equiv 0$).

Puesto que la conexión de Cartan define una paralelización en Q, si fijamos una base para $\mathfrak{g}$, el álgebra de formas diferenciales en Q estará generada por las 1-formas componentes de ϑ (respecto a la base de $\mathfrak{g}$) con coeficientes en $C^\infty(Q)$.

Lema 6 *La curvatura Θ no depende de las componentes ϑ_0, ϑ_1. Por lo tanto, su expresión será una combinación de productos de las 1-formas componentes de ϑ_{-1}.*

Demostración:

Recordemos que para todo $x \in M$, y todo $q \in Q_x$, $\ker \vartheta_{-1}(q) = T_q Q_x$. Además, sabemos que $\vartheta_0 + \vartheta_1$, restringida a la fibra Q_x actúa de la forma

$$(\vartheta_0 + \vartheta_1)(A^{\#}) = A$$

y por lo tanto define un paralelismo absoluto vertical. Es claro entonces que al ser Θ horizontal no puede tener en su expesión en la base generada por $\vartheta_{-1} + \vartheta_0 + \vartheta_1$ más que 1-formas que provengan de ϑ_{-1}. ■

Tomemos pues una base $e_1, ..., e_m$ para $\mathfrak{g}_{-1} = \mathbb{R}^m$ de modo que será $\vartheta_{-1} = e_1\vartheta^1 + ... + e_m\vartheta^m$ para $\vartheta^i \in \Lambda^1(Q;\mathbb{R})$. Entonces, podemos expresar

$$\Theta = \Sigma \frac{1}{2} K_{ij} \vartheta^i \wedge \vartheta^j \text{ para } K_{ij} : Q \to \mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{-1} + \mathfrak{g}_0 + \mathfrak{g}_1$$

Como $\mathfrak{g}_0$ es subálgebra de $\mathfrak{gl}(m;\mathbb{R})$, la componente de K_{ij} en $\mathfrak{g}_0$, $(K_{ij})_0$, será (K^r_{ijs}). De modo que si $\Theta = \Theta_{-1} + \Theta_0 + \Theta_1$, entonces,

$$\Theta_0 = \Sigma K^r_{ijs} \vartheta^i \wedge \vartheta^j \tag{49}$$

5.3.5. Conexiones normales de Cartan

Definición 11 *La conexión ϑ se dice* conexión normal de Cartan *si su forma de curvatura Θ cumple $\forall i, s = 1, ..., m$,*

$$\sum_{j=1...m} K^j_{ijs} = 0 \tag{50}$$

siendo $\Theta_0 = \Sigma K^r_{ijs} \vartheta^i \wedge \vartheta^j$ (véase [13])

Existe una manera alternativa de dar la condición de normalidad para la conexión de Cartan ϑ.

Para todo $q \in Q$, sea el subespacio horizontal $H_q = \ker(\vartheta_0 + \vartheta_1) \subset T_q Q$, entonces $\vartheta_{-1}|_{H_q} : H_q \to \mathfrak{g}_{-1}$ es un isomorfismo lineal.

Consideramos ahora la aplicación lineal $C : H_q \wedge H_q \otimes H_q \to H_q$ definida por

$$C(u_q, v_q) w_q = \left(\vartheta_{-1}|_{H_q} \right)^{-1} ([\Theta_0(u_q, v_q), \vartheta_{-1}(w_q)])$$

Entonces, la condición (50) es equivalente a que para todo $v_q, w_q \in H_q$, el homomorfismo lineal $H_q \ni u_q \to C(v_q, u_q) w_q \in H_q$ tenga traza nula (véase [1]).

En efecto, puesto que $\vartheta_{-1}|_{H_q} : H_q \to \mathfrak{g}_{-1}$ es isomorfismo lineal podemos tomar $\{u_i\}$ base de H_q correspondiente a la base $\{e_i\}$ de $\mathfrak{g}_{-1}$ mediante $\vartheta_{-1}|_{H_q}$, es decir

$$\vartheta_{-1}(u_i) = e_i \Leftrightarrow \vartheta^j(u_i) = \delta^j_i$$

Entonces,

$$\begin{aligned} \vartheta_{-1}(C(u_i, u_j) u_k) &= [\Theta_0(u_i, u_j), \vartheta_{-1}(u_k)] = [(\sum_{rs} K^r_{ijs}), e_k] = \sum_r K^r_{ijk} e_r \\ C(u_i, u_j) u_k &= \sum_r K^r_{ijk} u_r \end{aligned}$$

y de este modo la traza de $H_q \ni u_j \to C(u_i, u_j) u_k \in H_q$ es $\sum_j K^j_{ijk}$.

Teorema 8 *Sea $Q \xrightarrow{\mathfrak{p}} M$ es una G/H-estructura tangencial normal sobre M, y $\vartheta_i \in \Lambda^1(TQ, \mathfrak{g}_i)$ para $i = -1, 0$ con las propiedades del teorema 7. Entonces, existe una única $\vartheta_1 \in \Lambda^1(TQ, \mathfrak{g}_1)$ de forma que $\vartheta = \vartheta_{-1} + \vartheta_0 + \vartheta_1$ es conexión normal de Cartan.*

(véase su demostración en [13] IV.4.2)

5.4. Conexión normal de Cartan en un espacio conforme

Dado el espacio conforme $(M, \mathcal{C})$ tenemos asociada la $G/H-$estructura tangencial normal sobre M (con $G = O(m+1,1)_{Id}$ y $H = CO(M)_1$) dada a través de la primera prolongación $CO(M)_1 \overset{\mathfrak{p}\circ\mathfrak{q}}{\to} M$.

Recordemos que $CO(M)_1$ es un subfibrado del fibrado de referencias $LCO(M)$. Sea $\vartheta_{-1} + \vartheta_0 \in \Lambda^1(CO(M)_1, \mathbb{R}^m + \mathfrak{co}(m))$ la restricción a $CO(M)_1$ de la forma fundamental $\theta = \theta^{LCO(M)}$, $\theta(v_b) = b^{-1} \circ \mathfrak{q}_*(v_b)$, para $b \in LCO(M)$ y $v_b \in T_b LCO(M)$.

Veamos que verifican las condiciones del teorema

(a) $\vartheta_{-1}(A^{\#}) = 0$ y $\vartheta_0(A^{\#}) = A_0$ para todo $A = A_0 + A_1 \in \mathfrak{co}(m) + \mathbb{R}^{m*}$

(b) $\vartheta_{-1} + \vartheta_0$ es $Ad_{CO(m)\rtimes\mathbb{R}^{m*}}$-equivariante

(c) $\ker \vartheta_{-1}(H) = T_H(CO(M)_1)_x$, para todo $x \in M$, y todo $H \in (CO(M)_1)_x$

La condición (b) es inmediata por ser $\vartheta_{-1} + \vartheta_0$ la restricción a un $CO(m) \rtimes \mathbb{R}^{m*}-$subfibrado principal de $LCO(M)$ de la forma fundamental θ.

Sea $v_H \in T_H CO(M)_1$ para $H \in CO(M)_1$ ($H : \mathbb{R}^m + \mathfrak{co}(m) \xrightarrow{\sim} T_b CO(M)$, $(V, A) \mapsto \mathfrak{h}^H(bV) + A^{\#}(b)$, con $b = \mathfrak{q}(H)$), entonces:

$$\mathfrak{q}_*(v_H) = \mathfrak{h}^H(b\vartheta_{-1}(v_H)) + (\vartheta_0(v_H))^{\#}(b) \tag{51}$$

Si componemos con $\mathfrak{p}_*$, siendo $\mathfrak{p} : CO(M) \to M$, resulta

$$\mathfrak{p}_*\mathfrak{q}_*(v_H) = \mathfrak{p}_*\mathfrak{h}^H(b\vartheta_{-1}(v_H)) = b\vartheta_{-1}(v_H) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \vartheta_{-1}(v_H) = b^{-1} \circ \mathfrak{p}_* \circ \mathfrak{q}_*(v_H) = \theta^{CO(M)} \circ \mathfrak{q}_*(v_H)$$

De este modo, tenemos la identidad

$$\vartheta_{-1} = \theta^{CO(M)} \circ \mathfrak{q}_*.$$

Ahora, $v_H \in \ker(\vartheta_{-1}) \Leftrightarrow \mathfrak{p}_*\mathfrak{q}_*(v_H) = 0 \Leftrightarrow v_H$ pertenece al fibrado vertical de $\mathfrak{p} \circ \mathfrak{q} : CO(M)_1 \to M$. Se concluye pues que $\ker(\vartheta_{-1})_H = T_H\left(CO(M)_1\right)_x$ (condición (c)).

Tomemos $(A, \eta) \in \mathfrak{co}(m) + \mathbb{R}^{m*}$ y supongamos que $v_H = (A, \eta)^{\#}(H) \in T_H(CO(M)_1)_b$. Por la fórmula (51) y teniendo en cuenta que $\vartheta_{-1}(v_H) = 0$ por ser v_H un vector vertical, tendremos lo siguiente

$$(\vartheta_0(v_H))^{\#}(b) = \mathfrak{q}_*(v_H) = \mathfrak{q}_*\left(\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \{H \cdot \exp(t(A, \eta))\}\right) =$$

$$= \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \{\mathfrak{q}\left(H \cdot \exp(t(A, \eta))\right)\} = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \{b \cdot \exp(t(A))\} = A^{\#}(b)$$

(hemos hecho uso de la igualdad (41): $\mathfrak{q}\,(H\cdot(\alpha,\varphi)) = \mathfrak{q}(H)\cdot\alpha$, $\forall(\alpha,\varphi)\in CO(m)\leftthreetimes\mathbb{R}^{m*}$)

Entonces, $\vartheta_0(v_H) = A$ y de este modo queda también demostrada la condición (a).

Por lo tanto, estamos en las hipótesis del teorema 8 y existirá una única conexión de Cartan ϑ en $CO(M)_1$ caracterizada por tener sus componentes en $\mathfrak{co}(m)+\mathbb{R}^{m*}$, $\vartheta_{-1}+\vartheta_0$, dadas por la forma fundamental de $LCO(M)$, y por cumplir la condición adicional de normalidad.

Definición 12 *La conexión $\vartheta\in\Lambda^1(CO(M)_1,\mathbb{R}^m+\mathfrak{co}(m)+\mathbb{R}^{m*})$ que acabamos de obtener recibe el nombre de* conexión normal de Cartan del espacio conforme *$(M,\mathcal{C})$ (véase [13]).*

Observación 17 *W. Poor [1] considera el fibrado asociado $Q = CO(M)\times_{CO(m)}(CO(m)\leftthreetimes\mathbb{R}^{m*})$, que es G/H-estructura tangencial sobre M (con $H = CO(m)$, $G = CO(m)\leftthreetimes\mathbb{R}^{m*}$) $CO(M)$-normal. Partiendo de ∇ conexión de Levi-Civita para alguna métrica $g\in\mathcal{C}$, utiliza un procedimiento similar al que acabamos de desarrollar para definir en Q una conexión de Cartan (dependiente de la conexión ∇).*
Sea $\omega^{\nabla}\in\Lambda^1(CO(M),\mathfrak{co}(m))$ la forma horizontal de la conexión que ∇ induce en el fibrado $CO(M)$, y $\theta^{CO(M)}\in\Lambda^1(CO(M),\mathbb{R}^m)$ la forma fundamental de $CO(M)\to M$. Entonces, existe una única forma $\vartheta_{-1}+\vartheta_0\in\Lambda^1(Q,\mathbb{R}^m+\mathfrak{co}(m))$ $Ad_{CO(m)\leftthreetimes\mathbb{R}^{m*}}$-equivariante tal que $\iota^*_{CO(M)}(\vartheta_{-1}) = \theta^{CO(M)}$ y $\iota^*_{CO(M)}(\vartheta_0) = \omega^{\nabla}$ siendo $\iota_{CO(M)}: CO(M)\hookrightarrow Q$ la inclusión natural.
Se comprueba que estamos de nuevo en las condiciones del teorema 8, y por lo tanto, podemos asegura la existencia de una $\vartheta_1\in\Lambda^1(Q,\mathbb{R}^{m*})$ tal que $\vartheta = \vartheta_{-1}+\vartheta_0+\vartheta_1$ es conexión normal de Cartan en Q. Obtenemos de este modo una conexión de Cartan $\vartheta\in\Lambda^1(Q,\mathbb{R}^m+\mathfrak{co}(m)+\mathbb{R}^{m*})$ normal y adaptada a $\mathfrak{p}: CO(M)\to M$.

Observación 18 *E. Cartan [3] estudia la conexión normal de Cartan en un espacio conforme a través del transporte paralelo que ésta induce en los espacios homogéneos tangentes $E_x\approx G/H$ (16). En 2.2.3 vimos que estos espacios homogéneos están identificados con la esfera m-dimensional $\mathbb{S}^m$.*

6. Tensor de curvatura de Weyl

Veremos en esta sección que la conexión normal de Cartan ϑ de un espacio conforme $(M, \mathcal{C})$ tiene un tensor de curvatura de la forma $(0, \Theta_0, \Theta_1) \in \Lambda^2(CO(M)_1, \mathbb{R}^m + \mathfrak{co}(m) + \mathbb{R}^{m*})$, donde la componente Θ_0 da lugar (a través de la presencia auxiliar de una conexión ∇) al ya conocido tensor de curvatura de Weyl asociado a $(M, \mathcal{C})$ y cuya importancia radica en ser nulo únicamente cuando la estructura conforme es localmente plana (para $m > 3$).

6.1. Curvatura de la conexión normal de Cartan

Sea $\vartheta = \vartheta_{-1} + \vartheta_0 + \vartheta_1 \in \Lambda^1(CO(M)_1, \mathbb{R}^m + \mathfrak{co}(m) + \mathbb{R}^{m*})$ la conexión normal de Cartan del espacio conforme $(M, \mathcal{C})$. Y sea $\Theta = \Theta_{-1} + \Theta_0 + \Theta_1 \in \Lambda^2(CO(M)_1, \mathbb{R}^m + \mathfrak{co}(m) + \mathbb{R}^{m*})$ su forma de curvatura. Por la definición de Θ, tendremos las siguientes igualdades

$$\begin{aligned} \Theta_{-1} &= d\vartheta_{-1} + \frac{1}{2}\left([\vartheta_{-1}, \vartheta_0] + [\vartheta_0, \vartheta_{-1}]\right) \qquad (52) \\ \Theta_0 &= d\vartheta_0 + \frac{1}{2}[\vartheta_0, \vartheta_0] + \frac{1}{2}\left([\vartheta_{-1}, \vartheta_1] + [\vartheta_1, \vartheta_{-1}]\right) \\ \Theta_1 &= d\vartheta_1 + \frac{1}{2}\left([\vartheta_1, \vartheta_0] + [\vartheta_0, \vartheta_1]\right) \end{aligned}$$

Se observa que la componente Θ_{-1} de la curvatura depende únicamente de ϑ_{-1} y de ϑ_0.

En adelante, vamos a hacer uso de la presencia auxiliar de una carta $(\mathcal{U}, \varphi)$ en M con coordenadas $(x^1, ..., x^m)$. Podemos asociar entonces a cada $H \in CO(M)_1$ un elemento $(x^i; x^i_j; x^i_{jk}) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m_m \times \mathbb{R}^m_{m \cdot m}$ definido del siguiente modo:

(a) $\varphi(\mathfrak{p}_* \mathfrak{q}_*(H)) = x = (x^1, ..., x^m) = x^i e_i$

(b) $\mathfrak{q}_*(H) = b \in CO(M)$ es tal que $b(e_j) = x^i_j \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_x$

(c) $H : \mathbb{R}^m + \mathfrak{co}(m) \to T_b CO(M)$ es tal que

$$\forall A \in \mathfrak{co}(m),\ H(A) = A^{\#}(b) \Longleftrightarrow^{5} \begin{cases} dx^i_j(H(A)) = x^i_k A^k_j \\ dx^i(H(A)) = 0 \end{cases} \qquad (53)$$

$$\forall e_k \in \mathbb{R}^m,\ H(e_k) \in T_b CO(M) \text{ con } \begin{cases} dx^i_j(H(e_k)) = x^i_{jk} \\ dx^i(H(e_k)) = x^i_k \end{cases}$$

A continuación vamos a expresar $\vartheta_{-1} + \vartheta_0 \in \Lambda^1(CO(M)_1, \mathbb{R}^m + \mathfrak{co}(m))$ en función de dx^i, dx^i_j. Recordemos que $\forall v_H \in T_H CO(M)_1$ teníamos $\mathfrak{q}_*(v_H) = H(\vartheta_{-1}(v_H) + \vartheta_0(v_H))$, por tanto, en virtud de las fórmulas 53 resulta

$$\begin{aligned} dx^i(v_H) &= dx^i(\mathfrak{q}_*(v_H)) = dx^i(H(\vartheta_{-1}(v_H))) + dx^i(H(\vartheta_0(v_H))) = \\ &= \vartheta^k(v_H) x^i_k + 0 \\ dx^i_j(v_H) &= dx^i_j(\mathfrak{q}_*(v_H)) = dx^i_j(H(\vartheta_{-1}(v_H))) + dx^i_j(H(\vartheta_0(v_H))) = \\ &= x^i_k \vartheta^k_j(v_H) + x^i_{jk} \vartheta^k(v_H) \end{aligned}$$

Si denotamos por (y^j_i) a la matriz inversa de (x^i_j) tendremos entonces

$$\begin{aligned} \vartheta^k &= y^k_i dx^i \qquad (54) \\ \vartheta^k_j &= y^k_i dx^i_j - y^k_i x^i_{jl} y^l_s dx^s \end{aligned}$$

[5] Fijada una referencia conforme $b \in CO(M)$, se verifica que $CO(M)_x = b \cdot CO(M)$ de modo que $\forall \alpha = (\alpha^i_j) \in CO(m)$ el elemento $b \cdot \alpha$ se corresponde con $(x^i; x^i_k \alpha^k_j)$. Por tanto, si $A \in \mathfrak{co}(m)$, entonces $dx^i_j(A^{\#}(b)) = x^i_k A^k_j$.

Lema 7 *Se tiene la siguiente igualdad* $d\vartheta^k = -\sum_j \vartheta^k_j \wedge \vartheta^j$.

Demostración:
Teniendo en cuenta que por ser $y^i_k x^k_j = \delta^i_j$ se verifica $dy^i_k = -y^i_r y^j_k dx^r_j$, tenemos las igualdades

$$d\vartheta^k = d(y^k_i dx^i) = dy^k_i \wedge dx^i = -y^k_r y^j_i dx^r_j \wedge dx^i$$

$$\begin{aligned} \vartheta^k_j \wedge \vartheta^j &= (y^k_r dx^r_j - y^k_r x^r_{jl} y^l_s dx^s) \wedge (y^j_i dx^i) = \\ &= y^k_r y^j_i dx^r_j \wedge dx^i - y^k_r x^r_{jl} y^l_s y^j_i dx^s \wedge dx^i = y^k_r y^j_i dx^r_j \wedge dx^i \end{aligned}$$

puesto que $y^k_r x^r_{jl} y^l_s y^j_i dx^s \wedge dx^i = 0$ al ser $\sum_{jlr} y^k_r x^r_{jl} y^l_s y^j_i$ simétrico en (s,i). ■

En consecuencia, $\Theta_{-1} = 0$ puesto que de (52) se deduce que $\Theta^k = d\vartheta^k + \sum_j \vartheta^k_j \wedge \vartheta^j$. Tenemos entonces que el tensor cuvatura es $\Theta = (0, \Theta^i_j, \Theta_j) \in \Lambda^2(CO(M)_1, \mathbb{R}^m + \mathfrak{co}(m) + \mathbb{R}^{m*})$, siendo

$$\begin{aligned} \Theta^i_j &= d\vartheta^i_j + \Sigma\vartheta^i_k \wedge \vartheta^k_j + \vartheta^i \wedge \vartheta_j + \vartheta_i \wedge \vartheta^j - \delta^i_j \Sigma\vartheta_k \wedge \vartheta^k \qquad (55) \\ \Theta_j &= d\vartheta_j + \Sigma\vartheta_k \wedge \vartheta^k_j \end{aligned}$$

véanse las formulas (52) y (48).

Corolario 4 *Siendo* $\Theta_0 = 0$*, imponer la condición* $\sum_j K^j_{ijk} = 0$ *implica la condición* $\sum_j K^j_{ikj} = 0$ *(y* $\sum_j K^j_{jik} = 0$*). Por tanto, todas las contracciones del tensor* $\Theta_0 \in \Lambda^2(CO(M)_1, \mathfrak{co}(m))$ *son nulas.*

Demostración:
Aplicando la diferencial d a la igualdad $d\vartheta^i = -\sum_j \vartheta^i_j \wedge \vartheta^j$, y en virtud de las fórmulas 55 se tiene

$$\begin{aligned} 0 &= d\left(\sum_j \vartheta^i_j \wedge \vartheta^j\right) = \sum_j d\vartheta^i_j \wedge \vartheta^j - \sum_j \vartheta^i_j \wedge d\vartheta^j = \\ &= \Theta^i_j \wedge \vartheta^j - \vartheta^i_k \wedge \vartheta^k_j \wedge \vartheta^j - \vartheta^i \wedge \vartheta_j \wedge \vartheta^j + \delta^i_j \vartheta_k \wedge \vartheta^k \wedge \vartheta^j + \vartheta^i_j \wedge \vartheta^j_k \wedge \vartheta^k = \\ &= \Theta^i_j \wedge \vartheta^j - \sum_j \vartheta^i \wedge \vartheta_j \wedge \vartheta^j + \sum_k \vartheta_k \wedge \vartheta^k \wedge \vartheta^i = \Theta^i_j \wedge \vartheta^j. \end{aligned}$$

Si recordamos ahora que $\Theta^i_j = \Sigma \frac{1}{2} K^i_{rsj} \vartheta^r \wedge \vartheta^s$ (49) tenemos entonces que la condición $\Theta^i_j \wedge \vartheta^j = 0$ equivale a

$$K^i_{rsj} + K^i_{sjr} + K^i_{jrs} = 0 \qquad (56)$$

Por lo tanto, teniendo en cuenta la antisimetría $K^i_{rsj} = -K^i_{srj}$, es claro que $\sum_i K^i_{rij} = 0$ implica $\sum_i K^i_{irj} = 0$ y por (56) $\sum_i K^i_{rji} = 0$, $(\forall r, j)$. ■

6.2. Equivalencia dada por una conexión

Supongamos ahora que tenemos una sección global del fibrado $\widetilde{\mathcal{H}} \to M$ (1.3.2). Sabemos por el corolario 3 de la página 23 que ésta es equivalente a una conexión lineal (simétrica) en M compatible con la estructura conforme $\mathcal{C}$, que denotamos por ∇. Además, ésta da lugar a una trivialización

$$H^{\nabla}_{(.,.)} : CO(M) \times \mathbb{R}^{m*} \to CO(M)_1$$

y a una sección

$$\iota^{\nabla} : CO(M) \hookrightarrow CO(M)_1$$

tal que $\iota^{\nabla}(b) = H^{\nabla}_{(.,.)}(b, 0)$ (45, pág. 30).

Puesto que ι^{∇} sumerge $CO(M)$ como subfibrado de $CO(M)_1$ de grupo $CO(m) \approx CO(m) \leftthreetimes \{0\}$ resultará entonces que $CO(M)_1 \overset{\nabla}{\approx} Q = CO(M) \times_{CO(m)} CO(m) \leftthreetimes \mathbb{R}^{m*}$ a través de la correspondencia

$$CO(M)_1 \ni H^{\nabla}_{(.,.)}(b, \eta) \overset{F^{\nabla}}{\to} b \times_{CO(m)} (Id, \eta) \in Q \tag{57}$$

y tendremos $\left(F^{\nabla}\right) \circ \left(\iota^{\nabla}\right) = \iota_{CO(M)} : CO(M) \hookrightarrow Q$ la inclusión canónica.

De este modo, tenemos identificadas mediante F^{∇} las $\left(CO(m) \leftthreetimes \mathbb{R}^{m*}\right) / CO(m)$-estructuras tangenciales sobre M siguientes

- $CO(M)_1$ la primera prolongación de $CO(M)$ (definida en 2.1.3)
- $Q = CO(M) \times_{CO(m)} \left(CO(m) \leftthreetimes \mathbb{R}^{m*}\right)$ el fibrado asociado.

En $CO(M)_1$ tenemos definida de manera canónica una conexión normal de Cartan ϑ (que llamamos del espacio conforme (M, C) (2.2.4)). Vamos a ver a continuación que F^{∇} hace corresponder la conexión ϑ en $CO(M)_1$ con la conexión normal de Cartan en Q definida en la observación 17 (que encontramos en el trabajo de W.Poor [1]), y que está caracterizada por ser $\left(\iota_{CO(M)}\right)^* \vartheta_{-1} = \theta^{CO(M)}$ la forma fundamental en $CO(M)$ y $\left(\iota_{CO(M)}\right)^* \vartheta_{-1} = \omega^{\nabla}$ la forma horizontal de la conexión ∇.

Por la condición $\left(F^{\nabla}\right) \circ \left(\iota^{\nabla}\right) = \iota_{CO(M)}$, que identifica mediante F^{∇} las inclusiones $\iota^{\nabla} : CO(M) \hookrightarrow CO(M)_1$ y $\iota_{CO(M)} : CO(M) \hookrightarrow Q$, nos interesará estudiar las formas $(\iota^{\nabla})^* \vartheta_{-1} \in \Lambda^1(CO(M), \mathbb{R}^m)$ y $(\iota^{\nabla})^* \vartheta_0 \in \Lambda^1(CO(M), \mathfrak{co}(m))$.

En primer lugar, puesto que teníamos la identidad $\vartheta_{-1} = \theta^{CO(M)} \circ \mathfrak{q}_*$ resulta inmediato que $(\iota^{\nabla})^* \vartheta_{-1} = \theta^{CO(M)}$ es la forma fundamental de $CO(M) \overset{\mathfrak{p}}{\to} M$.

Para el estudio de $(\iota^{\nabla})^* \vartheta_0$ veamos con más detenimiento la inclusión ι^{∇}. Recordemos que $\iota^{\nabla}(b) = H^{\nabla} : \mathbb{R}^m + \mathfrak{co}(m) \to T_b CO(M)$ definido por

$$\begin{array}{rcl} \mathfrak{co}(m) & \ni & A \mapsto A^{\#}(b) \\ \mathbb{R}^m & \ni & V \mapsto \kappa^{\nabla}_b(b(V)) \end{array} \tag{58}$$

siendo $\kappa^{\nabla}_b = (\mathfrak{p}_{*|_{\mathcal{H}^{\nabla}_b}})^{-1} : T_x M \to \mathcal{H}^{\nabla}_b \subset T_b CO(M)$. Por lo tanto, si $b \in CO(M)$ tiene coordenadas $(x^i; x^i_j) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m_m$ entonces $\iota^{\nabla}(b) = H^{\nabla}$ es el espacio horizontal tal que

$$H^{\nabla}(e_k) = \kappa^{\nabla}(b(e_k)) = \kappa^{\nabla}(u_k) \text{ siendo } u_k = x^i_k \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_x \in T_x M$$

Sabemos que, fijada $k \in \{1, ..., m\}$, $\kappa^{\nabla}(u_k) = b'(0)$ para toda $b(t) = \{u_1(t), ..., u_m(t)\}$ curva en $CO(M)$ con las propiedades siguientes: $b(0) = b$, $\gamma = \mathfrak{p} \circ b : I \to M$ es curva en M con $\gamma'(0) = u_k$, y $\frac{\nabla}{dt} u_i(0) = 0, \forall i$. Esto significa que

$$0 = \frac{\nabla}{dt}\left\{x^r_i \frac{\partial}{\partial x^r}\right\} = x^{j\prime}_i(0) \left.\frac{\partial}{\partial x^j}\right|_x + x^r_i \cdot x^s_k \Gamma^j_{sr} \left.\frac{\partial}{\partial x^j}\right|_x \Rightarrow x^{j\prime}_i(0) = -\Gamma^j_{sr} x^r_i \cdot x^s_k$$

Por lo tanto,

$$x^i_{jk} = dx^i_j(H^\nabla(e_k)) = dx^i_j(\kappa^\nabla(u_k)) = dx^i_j(b'(0)) = -\Sigma\Gamma^j_{sr}x^r_j \cdot x^s_k$$

De este modo, la inclusión $\iota^\nabla : CO(M) \hookrightarrow CO(M)_1$ expresada en coordenadas actúa de la manera siguiente

$$CO(M) \ni b = (x^i; x^i_j) \to (x^i; x^i_j; -\Gamma^j_{sr}x^r_j \cdot x^s_k) = H^\nabla \in CO(M)_1$$

Si estudiamos ahora $(\iota^\nabla)^*\vartheta_0$ a través de su expresión en coordenadas, que desarrollamos en (54), tenemos lo siguiente

$$\vartheta^i_j = y^i_r dx^r_j - y^i_r y^s_e x^r_{js} dx^e = y^i_r dx^r_j + y^i_r y^s_e \Gamma^r_{ab} x^b_j \cdot x^a_s$$

Esta última expresión ($\vartheta^i_j = y^i_r dx^r_j + y^i_r \Gamma^r_{ab} x^b_j dx^a$) es la correspondiente a la forma asociada a la conexión, y concluimos entonces con $(\iota^\nabla)^*\vartheta_0 = \omega^\nabla$ la forma horizontal de la conexión ∇.

Hemos demostrado, como ya anunciábamos, el siguiente resultado.

Proposición 5 *El isomorfismo F^∇ entre los fibrados $CO(M)_1$ y Q definido en (57) es tal que hace corresponder la conexión normal de Cartan $\vartheta \in \Lambda^1(CO(M)_1, \mathbb{R}^m + \mathfrak{co}(m) + \mathbb{R}^{m*})$ con la conexión de Cartan en Q construida por W.Poor [1] (véase también la observación 17).*

Tenemos además una consecuencia inmediata para la 2-forma $(\iota^\nabla)^*\Theta_0 \in \Lambda^2(CO(M), \mathfrak{co}(m))$.

Corolario 5 *Si $\Theta = (0, \Theta_0, \Theta_1)$ es la curvatura de la conexión normal de Cartan ϑ y $\iota^\nabla : CO(M) \to CO(M)_1$ la inclusión dada por ∇, entonces, se tiene la igualdad*

$$(\iota^\nabla)^*\Theta_0 = \Omega + \frac{1}{2}\left([\theta^{CO(M)}, (\iota^\nabla)^*\vartheta_1] + [(\iota^\nabla)^*\vartheta_1, \theta^{CO(M)}]\right). \tag{59}$$

siendo Ω la forma de curvatura de la conexión ∇.

Demostración:
Por las fórmulas (52) se tiene la igualdad

$$\begin{aligned}(\iota^\nabla)^*\Theta_0 &= (\iota^\nabla)^*(d\vartheta_0 + \frac{1}{2}[\vartheta_0, \vartheta_0] + \frac{1}{2}([\vartheta_{-1}, \vartheta_1] + [\vartheta_1, \vartheta_{-1}]) = \\ &= d\omega^\nabla + \frac{1}{2}[\omega^\nabla, \omega^\nabla] + \frac{1}{2}\left([\theta^{CO(M)}, (\iota^\nabla)^*\vartheta_1] + [(\iota^\nabla)^*\vartheta_1, \theta^{CO(M)}]\right)\end{aligned}$$

siendo $\vartheta^{CO(M)}$ la forma fundamental de $\mathfrak{p} : CO(M) \to M$ y ω^∇ la forma horizontal de la conexión ∇. Por la ecuación de estructura $d\omega^\nabla + 1/2[\omega^\nabla, \omega^\nabla] = \Omega$ para la forma de curvatura de la conexión ∇, obtenemos de modo inmediato la igualdad (59). ■

6.3. Curvatura de la conexión de Cartan y curvatura de Weyl

Supongamos ahora que la conexión ∇ de la que hemos partido es la conexión de Levi-Civita para cierta métrica $g \in \mathcal{C}$. Vamos a estudiar en estas condiciones especiales la 2-forma de curvatura $(\iota^\nabla)^*\Theta_0 \in \Lambda^2(CO(M), \mathfrak{co}(m))$ que obtenemos de la conexión normal de Cartan ϑ, siendo $\iota^{\nabla} : CO(M) \to CO(M)_1$ la inclusión dada por ∇.

Puesto que Θ es una forma horizontal, también lo será $(\iota^{\nabla})^*\Theta_0$ y de este modo, da lugar a un tensor $W \in \mathfrak{T}^1_3(M)$ que está bien definido a través de la siguiente relación

$$b^{-1} \circ W(\mathfrak{p}_* u_b, \mathfrak{p}_* v_b) \circ b = (\iota^{\nabla})^*\Theta_0(u_b, v_b) \ \forall u_b, v_b \in T_b CO(M) \qquad (60)$$

Obsérvese que si consideramos $\Omega \in \Lambda^2(CO(M), \mathfrak{co}(m))$ la forma de curvatura de ∇, mediante este mismo procedimiento obtenemos $R \in \mathfrak{T}^1_3(M)$ el conocido tensor de curvatura de ∇, definido por

$$R(X,Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z, \text{ para } X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$$

(véase [1]).

Los resultados encontrados en los apartados anteriores nos permiten afirmar del tensor $W \in \mathfrak{T}^1_3(M)$ lo siguiente: por la fórmula (59) del corolario anterior, éste estará relacionado con la curvatura R de ∇ y, por el corolario 4, todas sus contracciones serán nulas.

Recordemos ahora la siguiente definición en la variedad riemanniana (M, g)

Definición 13 *Llamamos* tensor de curvatura de Weyl *de (M, g) al tensor de $\mathfrak{T}^1_3(M)$ definido por la fórmula siguiente para $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$*

$$R(X,Y)Z + L(Y,Z)X - L(X,Z)Y + g(Y,Z)l(X) - g(X,Z)l(Y) \qquad (61)$$

donde

$$\begin{aligned} L(X,Y) &= -\frac{1}{m-2} Ric(X,Y) + \frac{Sc}{2(m-1)(m-2)} g(X,Y) \\ l(X) &\in \mathfrak{X}(M) \ \textit{tal que } g(l(X), Y) = L(X,Y), \ \forall Y \in \mathfrak{X}(M) \end{aligned}$$

entendiendo que $Ric(X,Y) = traza(Z \mapsto R(Z,X)Y)$ es el tensor de Ricci de ∇ y $Sc = \sum R(X_i, X_i)$ (para $\{X_i\}$ base ortonormal) su curvatura escalar.

Este tensor es de tipo curvatura (véase [12]), tiene todas sus contracciones nulas, y es invariante por cambios conformes de la métrica (véase [17], [16]), y por tanto, es propio de la estructura conforme $\mathcal{C}$ engendrada por g. De hecho, es un tensor asociado al espacio conforme $(M, \mathcal{C})$ muy significativo, puesto que para $m > 3$ son equivalentes las condiciones de ser la estructura conforme localmente plana a tener su tensor de curvatura de Weyl idénticamente nulo (véase [10], [12], [17]).

Teorema 9 *El tensor $W \in \mathfrak{T}^1_3(M)$ (dado por 60) es el tensor de curvatura de Weyl del espacio conforme $(M, \mathcal{C})$ (dado por 61).*

Demostración:

Etapa 1: Consideremos $T \in \mathfrak{T}^1_3(M)$ definido por

$$T(X,Y)Z = L(X,Y)Z + L(Z,Y)X - g(X,Z)l(Y)$$

para $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$. Este tensor verifica las propiedades siguientes:

(a) $T(X,Y)Z = T(Z,Y)X$

(b) $g(T(X,Y)Z, \overline{Z}) = L(X,Y)g(Z,\overline{Z}) + L(Z,Y)g(X,\overline{Z}) - g(X,Z)L(Y,\overline{Z}) \Rightarrow$

$\Rightarrow g(T(X,Y)Z,\overline{Z}) + g(T(X,Y)\overline{Z},Z) = 2L(X,Y)g(Z,\overline{Z})$

(c) $T(X,Y)Z - T(Y,X)Z = L(Z,Y)X - L(X,Z)Y + g(Y,Z)l(X) - g(X,Z)l(Y)$ que es el tensor diferencia entre la curvatura de la métrica y la curvatura de Weyl.

Consideremos ahora una referencia conforme $b \in CO(M)$. Si fijamos un $v_x \in T_xM$, se observa que la aplicación

$$b^{-1} \circ (T(b(.), v_x)b(.)) : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$$

es bilineal, simétrica (por la condición (a)), y $\forall U \in \mathbb{R}^m$, $b^{-1} \circ (T(b(U), v_x)b(.)) \in \mathfrak{co}(m)$ (por ser $b \in CO(M)$ y por la condición (b)). En definitiva, resulta ser un elemento de la primera prolongación $\mathfrak{co}(m)_1 \approx \mathbb{R}^{m*}$, y por tanto, existirá un $\eta(b, v_x) = \eta \in \mathbb{R}^{m*}$ tal que $\Phi_\eta = b^{-1} \circ (T(b(.), v_x)b(.))$ (véase 21, pág.13). Esta asignación $T_xM \ni v_x \to \eta(b, v_x) \in \mathbb{R}^{m*}$ es una aplicación lineal. Además, $\forall \alpha \in CO(m)$ se tiene la igualdad

$$\eta(b\alpha, v_x) = \eta(b, v_x)\alpha \in \mathbb{R}^{m*}$$

(puesto que $\alpha^{-1} \circ \Phi_\eta \circ (\alpha, \alpha) = \Phi_\eta \cdot \alpha = \Phi_{\eta\alpha}$ (véase 42, pág.28)).

Etapa 2: Consideremos ahora el tensor horizontal $\tau \in \Lambda^1(CO(M)_1, \mathbb{R}^{m*})$ definido por:

$$\tau(v_H) = \eta\left(\mathfrak{q}(H), \mathfrak{p}_*\mathfrak{q}_*(v_H)\right) \in \mathbb{R}^{m*},\ \forall v_H \in T_HCO(M)_1$$

que es $Ad_{CO(m)\leftthreetimes\mathbb{R}^{m*}}$-equivariante[6], y el tensor $\beta \in \Lambda^1(CO(M)_1, \mathbb{R}^{m*})$ caracterizado por las propiedades siguientes:

(a) $(\iota^\nabla)^*\beta = 0$, con $\iota^\nabla : CO(M) \hookrightarrow CO(M)_1$ la inclusión (58).

(b) $\beta(\eta^\#(H)) = \eta$, $\forall \eta \in \mathbb{R}^{m*}$

(c) β es $Ad_{CO(m)\leftthreetimes\mathbb{R}^{m*}}$-equivariante.

(es claro que tales propiedades son compatibles y determinan completamente β). Entonces, $\tau + \beta \in \Lambda^1(CO(M)_1, \mathbb{R}^{m*})$ es $Ad_{CO(m)\leftthreetimes\mathbb{R}^{m*}}$-equivariante y verifica $(\tau+\beta)(\eta^\#(H)) = \eta$, $\forall \eta \in \mathbb{R}^{m*}$, y de este modo, $\overline{\vartheta} = (\vartheta_{-1}, \vartheta_0, \tau + \beta) \in \Lambda^1(CO(M)_1, \mathbb{R}^m + \mathfrak{co}(m) + \mathbb{R}^{m*})$ es conexión de Cartan.

Etapa 3: Vamos a demostrar que $\overline{\vartheta}$ es una conexión de Cartan normal (de este modo, será $\overline{\vartheta} = \vartheta$ conexión normal de Cartan).

Estudiemos entonces su curvatura $\overline{\Theta}$. Por la fórmula (59) tenemos

$$\begin{aligned}
(\iota^\nabla)^*\overline{\Theta}_0 &= \Omega + \frac{1}{2}\left([\theta^{CO(M)}, (\iota^\nabla)^*\tau + (\iota^\nabla)^*\beta] + [(\iota^\nabla)^*\tau + (\iota^\nabla)^*\beta, \theta^{CO(M)}]\right)\\
(\iota^\nabla)^*\overline{\Theta}_0 &= \Omega + \frac{1}{2}\left([\theta^{CO(M)}, (\iota^\nabla)^*\tau] + [(\iota^\nabla)^*\tau, \theta^{CO(M)}]\right) \text{ porque } (\iota^\nabla)^*\beta = 0
\end{aligned}$$

Para todo $u_b, v_b \in T_bCO(M)$ tenemos

$$[\theta^{CO(M)}(u_b), (\iota^\nabla)^*\tau(v_b)] = [\theta^{CO(M)}(u_b), \eta(b, \mathfrak{p}_*(v_b))] = [U, \eta]$$

siendo $b(U) = \mathfrak{p}_*(u_b)$ y $\eta = \eta(b, \mathfrak{p}_*(v_b))$. Si ahora recordamos los corchetes en el álgebra $\mathbb{R}^m \oplus \mathfrak{co}(m) \oplus \mathbb{R}^{m*}$ dados en (48), y la definición de Φ_η (21), tenemos

$$\begin{aligned}
[U, \eta] &= U\eta - \eta^TU^T + \eta U I_m = \Phi_\eta(U) = b^{-1} \circ (T(b(U), \mathfrak{p}_*(v_b))b(.)) \Rightarrow\\
&= b^{-1} \circ (T(\mathfrak{p}_*(u_b), \mathfrak{p}_*(v_b))) \circ b
\end{aligned}$$

[6] $\forall \eta \in \mathbb{R}^{m*}, \forall(\alpha, \eta') \in CO(m) \leftthreetimes \mathbb{R}^{m*}$ se tiene que $Ad_{(\alpha,\eta')}(\eta) = \eta\alpha^{-1}$, por ser: $(\alpha, \eta') \cdot (Id, \eta) \cdot (\alpha^{-1}, -\eta'\alpha^{-1}) = (\alpha\alpha^{-1}, (\eta + \eta')\alpha^{-1} - \eta'\alpha^{-1}) = (Id, \eta\alpha^{-1})$.

Por tanto,

$$\begin{aligned}
(\iota^{\nabla})^*\overline{\Theta}_0(u_b,v_b) &= \Omega(u_b,v_b)+\\
&+b^{-1}\circ(T(\mathfrak{p}_*(u_b),\mathfrak{p}_*(v_b)))\circ b-b^{-1}\circ(T(\mathfrak{p}_*(v_b),\mathfrak{p}_*(u_b)))\circ b\\
(\iota^{\nabla})^*\overline{\Theta}_0(u_b,v_b) &= b^{-1}\circ(R(\mathfrak{p}_*(u_b),\mathfrak{p}_*(v_b)))\circ b+\\
&+b^{-1}\circ(T(\mathfrak{p}_*(u_b),\mathfrak{p}_*(v_b))-T(\mathfrak{p}_*(v_b),\mathfrak{p}_*(u_b)))\circ b
\end{aligned}$$

Por la propiedad (c) de la primera etapa sabemos que $R(X,Y)Z+T(X,Y)Z-T(Y,X)Z$ es la curvatura de Weyl, de modo que $(\iota^{\nabla})^*\overline{\Theta}_0\in\Lambda^2(CO(M),\mathfrak{co}(m))$ da lugar al tensor curvatura de Weyl de $(M,\mathcal{C})$ a través del procedimiento descrito por la fórmula (60). Por tanto, la propiedad que ya conocemos del tensor de Weyl de tener todas sus contracciones nulas nos da la buscada condición de normalidad para $(\iota^{\nabla})^*\overline{\Theta}_0$ y, en definitiva, para $\overline{\Theta}_0$.

Etapa 4: Tenemos entonces que la conexión normal de Cartan es $\vartheta=\overline{\vartheta}$ y por tanto, tenemos para el tensor $W\in\mathfrak{T}^1_3(M)$ la siguiente igualdad

$$b^{-1}\circ W(\mathfrak{p}_*u_b,\mathfrak{p}_*v_b)\circ b=(\iota^{\nabla})^*\Theta_0(u_b,v_b)=(\iota^{\nabla})^*\overline{\Theta}_0(u_b,v_b)$$

que por la fórmula obtenida en la etapa anterior representa al tensor curvatura de Weyl. Concluimos finalmente con la identidad

$$W(X,Y)Z=R(X,Y)Z+L(Y,Z)X-L(X,Z)Y+g(Y,Z)l(X)-g(X,Z)l(Y)$$

como queríamos demostrar. ■

Referencias

[1] Walter A.Poor. *Differential Geometric structures.* McGraw-Hill Book Company, 1981.

[2] B.O'Neill. *Semi-Riemannian Geometry with applicatins to relativity.* Academic Press Inc, 1983.

[3] E.Cartan. *Les espaces à connexion conforme.* Ann.Soc.Pol.Math., 1923.

[4] I.Sanchez. *Conexiones en el fibrado de referencias. Conexiones de segundo orden.* Tesis doctoral, 1994.

[5] J.A.Schouten. *Ricci-Calculus.* springer-Berlag, 1954.

[6] J.Lafuente. *Sobre los espacio de Weil ...* Publicación interna, 1993.

[7] M. de Leon L.A.Cordero, C.T.J. Dodson. *Differential Geometry of Frame Bundles.* Kulwer Academic Publishers, 1989.

[8] C.Marble P.Liberman. *Symplectic Geometry and Analitical Mechanics.* Reidel Publ., 1987.

[9] H.Wu R.K.Sachs. *General Relativity for Mathematicians.* Springer-Verlag, 1977.

[10] S.-T.Yau R.Schoen. *Lectures on Differential Geometry.* International Press, 1994.

[11] U.Pinkall R.S.Kulkarni. *Conformal Geometry.* Friedr. Vieweg and Shon, 1988.

[12] J.Lafontaine S.Gallot, D.Hulin. *Riemannian Geometry.* Springer-Berlag, 1993.

[13] S.Kobayashi. *Transformation Groups in Differential Geometry.* Springer-Verlag, 1972.

[14] K.Nomizu S.Kobayashi. *Foundations of Differential Geometry.* Interscience Publisher, 1963.

[15] S.Sternberg. *Lectures on Differential Geometry.* Prentice Hall Inc., 1964.

[16] S.Haperlin W.Greub. *Connections, Curvature and Cohomology.* Academic Press, 1973.

[17] Kentaro Yano. *Integral formulas in Riemannian Geometry.* Marcel Dekker Innc., 1970.