Prácticas de **GEOMETRIA LINEAL, Curso 2019-20, grupo E**

1. Hoja 1

   a) Demuestra que los puntos $(2:-1:3)$, $(1:0:-1)$ y $(-1:1:-4)$ son colineales y encuéntrese la ecuación implícita de una recta que les contenga. Encuéntrese el corte de dicha recta con la recta que pasa por los puntos $(0:1:1)$ y $(5:-1:2)$

   b) En $\mathbb{P}_2$ encuentra el punto de intersección de la recta de ecuación $2x_0+x_1-x_2=0$ y la recta que pasa por los puntos $(1:-1:-1)$ y $(2:1:-2)$

   c) Demuestra que las rectas $x_0-2x_1+z=0, 2x_0+x_1+x_2=0$ y $4x_0+7x_1+x_2=0$ son concurrentes y encuéntrese el punto común a las tres. Encuéntrese la recta que pasa por dicho punto común y por el punto $(0:0:1)$

   d) En $\mathbb{P}_2$ encuentra la ecuación de la recta proyectiva que pasa por el punto $(2:1:1)$ y por el punto de intersección de las rectas de ecuaciones $x_0-x_1-x_2=0$ y $2x_0+x_1-2x_2=0$. Probar que es la completada de una recta afín, y calcular su punto del infinito. Hacer un dibujo en el plano afín

   e) En el plano proyectivo $\mathbb{P}_2$ determinar la ecuación de la recta $\mathbf{L}=V(p,q)$ que pasa por los puntos $p=(2:-2:3)$ y $q=(1:2:3)$. Probar que es la extensión proyectiva $\overline{L}$ de una recta afín L y determinar la ecuación de L en coordenadas cartesianas. ¿Cual es su punto del infinito?

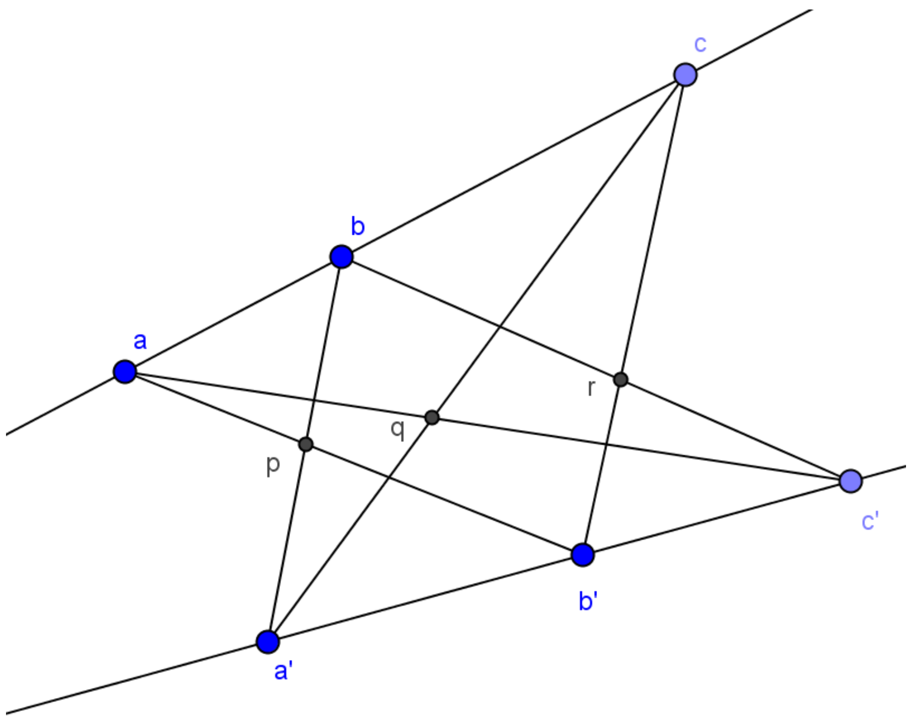
   f) Probar que la intersección de dos rectas proyectivas distintas en $\mathbb{P}_2$ es siempre un punto. Además: (a) Si las dos rectas son completados proyectivos de rectas afines no paralelas, su único punto de intersección es el de las correspondientes rectas afines. (b) Si las dos rectas son completados proyectivos de rectas afines paralelas, su único punto de intersección es el punto del infinito que corresponde a la dirección de las dos rectas afines. (c) Si una de las rectas es la recta del infinito, el único punto de intersección es el punto del infinito de la otra recta.

   g) Demostrar que por dos puntos distintos del plano proyectivo $\mathbb{P}_2$ pasa una única recta.

   h) Encontrar el enunciado dual del ejercicio $1g$.

   i) Demostrar que tres rectas del plano proyectivo $\mathbb{P}_2$ forman un triángulo, si y solo si son tres puntos no alineados del plano proyectivo dual $\mathbb{P}_2^*$

j) ★★★ **Teorema de Pappus:** Sean $\mathbf{L}$ y $\mathbf{L}'$ dos rectas proyectivas distintas de $\mathbb{P}_2$ y $a, b, c \in \mathbf{L}$, $a', b', c' \in \mathbf{L}'$ seis puntos distintos. Entonces los puntos $p = V(a, b') \cap V(a', b)$, $q = V(a, c') \cap V(a', c)$, $r = V(b, c') \cap V(b', c)$ están alineados. Comprobar el teorema cuando se toma $a = (1 : 0 : 0)$, $b = (0 : 1 : 0)$, $a' = (0 : 0 : 1)$, $b' = (1 : 1 : 1)$ y los puntos $c \in V(a, b)$ y $c' \in V(a', b')$ arbitrarios. Encontrar el enunciado dual del teorema de Pappus.



k) ★★ Comprobar el Teorema de Pappus cuando se toma $a = (2 : 0 : 2)$, $b = (1 : 0 : 0)$, $c = (1 : 0 : -1)$, $a' = (0 : 1 : 0)$, $b' = (0 : 1 : 1)$, $c' = (0 : 1 : -1)$. Hacer un dibujo ilustrativo de este ejemplo en el plano afín.

2. Hoja 2

a) En $\mathbb{A}_3$ consideramos las rectas afínes

$$r : \left\{ \begin{array}{c} x - y + z = 0 \\ 2x + y + z = 1 \end{array} \right. \quad s : \left\{ \begin{array}{c} x = 1 - \lambda \\ y = 2 + \lambda \\ z = \lambda \end{array} \right.$$

1) Determinar las ecuaciones de sus extensiones proyectivas, y sus correspondientes puntos del infinito.
2) Halla las ecuaciones de una recta afín que pase por el punto $(0, 1, 0)$ y es paralela a los planos

$$x + y + 2z - 4 = 0;\ 2x + y + 3z - 4 = 0$$

3) Halla las ecuaciones de una recta paralela a los planos anteriores, que corte a r y a s.

b) Encuentra la ecuación del hiperplano de $\mathbf{H}$ que pasa por el punto $(0 : 1 : 1 : 0)$ y contiene a la recta $\mathbf{L}$ de ecuaciones

$$\mathbf{L} : \left\{ \begin{array}{c} x_0 - x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 : \end{array} \right.$$

¿Es $\mathbf{L}$ la completada de una recta afín?

c) Demostrar que en $\mathbb{P}_3$ las rectas proyectivas L_1 y L_2 siguientes tienen intersección vacía, y el punto $p = (0 : 1 : -1 : 1)$ no pertenenece a ninguna de ellas. Encontrar las ecuaciones de una recta proyectiva L que pasa por el punto p y corta a L_1 y L_2.

$$L_1 : \left\{ \begin{array}{c} x_1 = 0 \\ x_0 - x_2 + x_3 = 0 \end{array} \right. ; L_2 : \left\{ \begin{array}{c} x_2 = 0 \\ x_0 - x_3 = 0 \end{array} \right.$$

d) Probar que: (a) Dos planos proyectivos distintos de $\mathbb{P}_3$ se cortan en una recta. (b) El único plano que no es el completado de un plano afín es el hiperplano del infinito. (c) Dos planos afines son paralelos si y solo si se cortan en (una recta del plano de) el infinito. (d) Por tres puntos no alineados pasa un único plano. (e) Una recta no contenida en un plano lo corta en un punto. Encontrar los enunciados duales de (a) (d) y (e).

e) Demostrar que si dos rectas de $\mathbb{P}_3$ se cortan en un punto entonces existe un unico plano que las contiene. Enunciar el resultado dual. interpretar estos resultados en el espacio afín $\mathbb{A}_3$

f) Demostrar que dado un punto p y una recta $\mathbf{L}$ de $\mathbb{P}_3$ con $p \notin \mathbf{L}$, existe un único plano $\mathbf{H}$ de $\mathbb{P}_3$ que contiene a p y a $\mathbf{L}$. Encontrar el enunciado dual, e interpretar estos enunciados en el espacio afín $\mathbb{A}_3$

g) ★★★ Demostrar que, dadas dos rectas disjuntas L_1 y L_2 de $\mathbb{P}_3$ y un punto p que no esté en ninguna de ellas, existe una unica recta L que pasa por p y corta a las rectas L_1 y L_2. Encontrar el enunciado dual. Interpretar estos resultados en el espacio afín $\mathbb{A}_3$.

3. Hoja 3

a) Se consideran en $\mathbb{P}_3$ los puntos $a = (1 : 2 : -1 : 1)$, $a' = (1 : -1 : 2 : -1)$, $b = (3 : 0 : 1 : 1)$ y $b' = (-1 : 1 : 0 : k)$, donde k es un escalar. Sean r la recta que pasa por a y a' y s la que pasa por b y b' . Determinar k para que $r \cap s \neq \emptyset$, y calcular el plano que contiene a ambas. Calcular el punto del infinito de r

b) Sea S un subconjunto con al menos dos puntos distintos de un espacio proyectivo P. Demostrar que S es subespacio proyectivo de P, si y solo si para todo $a, b \in S$, $a \neq b$, la recta $V(a, b)$ está contenida en S.

c) Demostrar que una recta y un hiperplano proyectivo siempre se cortan.

d) Sea H un hiperplano de un espacio proyectivo P. Probar que si una variedad proyectiva X de P no está contenida en H entonces $\dim(X \cap H) = \dim X - 1$, y por tanto $X \cap H$ es un hiperplano de X.

e) Describir todas las posibles *posiciones relativas* de dos planos en un espacio proyectivo de dimensión 4.

f) Demostrar que, dadas dos rectas disjuntas L_1 y L_2 de $\mathbb{P}_3$ y un punto p que no esté en ninguna de ellas, existe una unica recta L que pasa por p y corta a las rectas L_1 y L_2.

g) En $\mathbb{P}_4$ se considera la variedad X generada por los puntos $(1 : 0 : -1 : 0 : 1)$, $(0 : 1 : 0 : 1 : -1)$, $(2 : 2 : -2 : 1 : 2)$ y la variedad Y con ecuaciones $x_0 - x_1 + x_4 = 0 = 2x_0 + x_2 - x_3$. Calcular las variedades $X \cap Y$ y $X + Y$

h) (★★★) El cuerpo $\mathbb{K} = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ de las clases de restos módulo 3 puede *describirse* como $\mathbb{K} = \{-1, 0, 1\}$ donde 0 y 1 son los elementos neutros de la suma $+$ y multiplicación respectivamente. Obsérvese que $1 + 1 = -1$. Sea $\mathbb{K}P_n = P(\mathbb{K}^{n+1})$, $n = 1, 2, ...$ el espacio proyectivo sobre el espacio vectorial $\mathbb{K}^{n+1}$.

1) (★) *Describir* los puntos de $\mathbb{K}P_1$. ¿Cuantos puntos tiene cada recta proyectiva de $\mathbb{K}P_n$?
2) (★) *Describir* una a una cada recta proyectiva de $\mathbb{K}P_2$. ¿Cuantas son?
3) (★) Dar un ejemplo de dos rectas proyectivas en $\mathbb{K}P_3$ con intersección vacía, y *describir* cada una de ellas.

i) (★★) En un espacio proyectivo $\mathbb{P}_4$ se consideran los subespacios proyectivos

$$X : \begin{cases} x_0 = -\lambda + 2\mu \\ x_1 = \lambda - \mu \\ x_2 = -\lambda + k\mu \\ x_3 = m\lambda + \mu \\ x_4 = -\lambda + 3\mu \end{cases} ; \; Y : \begin{cases} x_0 + x_1 - x_2 = 0 \\ x_0 + x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$$

¿Qué dimensión tienen estos subespacios? Obtener, según los valores de k y de m, la dimensión de la suma y de la intersección de dichos subespacios.

4. Hoja 4

a) Dados los puntos $a = (2 : -1 : 1)$, $b = (1 : 0 : 0)$, $c = (-1 : 2 : 1)$, $d = (0 : 1 : 0)$, de $\mathbb{P}_2$. Probar que forman un sistema de referencia proyectivo. Calcular las coordenadas de un punto cualquiera $(x_0 : x_1 : x_2) \in \mathbb{P}_2$ respecto a dicho sistema.

b) Sea $\mathcal{R} = (a, b, c; d)$ un sistema de referencia de un espacio proyectivo de dimensión 2. Demostrar que $\mathcal{R}' = (a, b, d; c)$ es otro sistema de referencia proyectivo ¿Qué relación existe entre los correspondientes sistemas de coordenadas homogéneas?

c) Sea $\mathcal{R} = \{a, b, c; d\}$ un sistema de referencia proyectivo de un espacio proyectivo de dimensión 2. Probar que los puntos m, n, p definidos como $m = V(a, d) \cap V(b, c)$, $n = V(a, c) \cap V(b, d)$, $p = V(a, b) \cap V(d, c)$ no están alineados.

   Nota: Se sugiere trabajar en las coordenadas definidas por la propia $\mathcal{R}$

d) Demostrar el teorema de Pappus en un plano proyectivo a partir del ejercicio $1j$

e) En el plano proyectivo real $\mathbb{P}_2$, se consideran los puntos $p_0 = (1 : 0 : -1)$, $p_1 = (2 : 4 : 0)$, $p_2 = (-1 : 1 : 0)$ $p = (1 : 0 : 2)$.

   1) Demuestra que $\mathcal{R} = \{p_0, p_1, p_2; p\}$ es una referencia proyectiva. Hallar una base asociada de $\mathbb{R}^3$.
   2) Hallar las coordenadas $(y_0 : y_1 : y_2)$ respecto de $\mathcal{R}$ del punto $q = (1 : 0 : 0) \in \mathbb{P}_2$.
   3) Hallar en las coordenadas canónicas $(x_0 : x_1 : x_2)$ de $\mathbb{P}_2$, la ecuación de la recta L cuya ecuación respecto de $\mathcal{R}$ es $y_1 - y_2 = 0$.

f) Se consideran en el plano proyectivo $\mathbb{P}_2$ las dos referencias proyectivas: $\mathcal{R} = \{(2 : 0 : -1), (1 : -1 : 0), (1 : -1 : 1); (1 : 0 : -1)\}$, y $\mathcal{R}' = \{(1 : 1 : 1), (0 : 1 : 1), (1 : 0 : 1); (2 : 2 : 3)\}$. Se considera asímismo la recta $r \subset \mathbb{P}_2$ que pasa por los puntos a y b, cuyas coordenadas respecto de la primera referencia son $(1 : 0 : 1)$ y $(2 : -1 : 0)$, respectivamente. Calcular las coordenadas de a y b respecto de $\mathcal{R}'$, y una ecuación implícita de r respecto de $\mathcal{R}'$.

g) (★★) Sea $\mathcal{R} = \{p_0, p_1, p_2; p\}$ un sistema de referencia proyectivo en un plano proyectivo P.

   1) Probar que $\mathcal{S} = \{p_2, p, p_1; p_0\}$ es tambien sistema de referencia proyectivo.
   2) Determinar las coordenadas homogeneas respecto de $\mathcal{S}$ del punto $a \in P$ cuyas coordenadas respecto de $\mathcal{R}$ son $(x_0 : x_1 : x_2)$
   3) ¿Cuáles son las coordenadas respecto de $\mathcal{S}$ del punto a con coordenadas $(3 : 2 : 1)$ respecto a $\mathcal{R}$?

4) ¿Existe algún punto cuyas coordenadas respecto de ambas referencias coincidan? En caso afirmativo, calcular todos

h) (★★★) Encuentra una referencia proyectiva $\mathcal{R} = (p_0, p_1, p_2; p)$ de $\mathbb{P}_2$ de forma que las rectas cuyas ecuaciones respecto de la referencia canónica son $x_2 = x_0 + x_1$, $x_0 = x_2$ y $x_1 = 2x_0$ tengan respectivamente ecuaciones $x_0' = 0$, $x_1' = 0$, $x_2' = 0$ respecto de la nueva referencia $\mathcal{R}$. Determinar *todas las posibles* referencias que son solución del problema ¿alguna de ellas tiene por primer punto $p_0 = (1 : 0 : 2)$?

5. Hoja 5

a) Demostrar que los puntos $a = (2 : -1 : 1)$, $b = (4 : 5 : 3)$ $c = (3 : 2 : 2)$, y $d = (5 : 1 : 3)$ de $\mathbb{P}_2$ están alineados. Determinar su razón doble.

b) Sea L una recta de $\mathbb{P}_2$ que no contiene al punto $(0 : 0 : 1)$. Demostrar que la aplicación

$$h : L \to \mathbb{P}_1,\ (x_0 : x_1 : x_2) \to (x_0 : x_1)$$

define un sistema de coordenadas homogeneas en L. Con este *truco* calcular la razón doble de los cuatro puntos del ejercicio anterior.

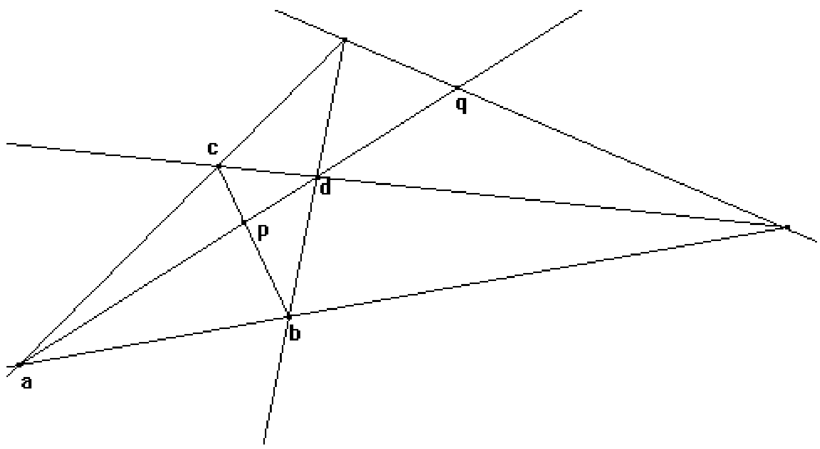
c) Dados cuatro puntos distintos a, b, c, d de una recta proyectiva L, y sea $\rho = [a, b, c, d]$. Determinar todos los valores posibles que se pueden obtener calculando la razón doble de todas las posibles permutaciones de los cuatro puntos.

d) Estudiar si es posible obtener el valor la razón doble $[a, b, c, d]$, cuando el conjunto $\{a, b, c, d\}$ consta de sólo de dos o de tres puntos.

e) En $\mathbb{P}_2$ se dan los puntos , $a = (1 : 0 : 0)$, $b = (1 : 2 : 0)$, $c = (1 : 1 : 1)$, $d = (1 : 0 : 1)$, $e = (1 : -2 : 0)$

1) Probar que a, b, e están alineados.
2) Determinar un punto q en la recta $V(a, b)$ tal que $[e, q, a, b] = -1$

f) ★★ Calcular las razones dobles $[a, d, p, q]$, y $[a, p, d, q]$



g) ★★★ Demostrar que las rectas r_1, r_2, r_3, r_4 de $\mathbb{P}_2$ dadas respectivamente por las ecuaciones $x_0 + x_1 = 0$, $2x_0 + x_1 - x_2 = 0$, $x_1 + x_2 = 0$, $3x_0 + 4x_1 + x_2 = 0$, pasan todas por un punto $p \in \mathbb{P}_2$. Calcular en el espacio proyectivo dual la razón doble, $[r_1, r_2, r_3, r_4]$ y comprobar que coincide con la razón doble $[r_1 \cap r, r_2 \cap r, r_3 \cap r, r_4 \cap r]$ para cualquier recta r de $\mathbb{P}_2$ que no contenga al punto p

6. Hoja 6

a) Determinar las ecuaciones de la proyección cónica con centro $p = (1:1:0:0) \in \mathbb{P}_3$ del hiperplano $H : (x_1 = 0)$ sobre el $H' : (x_0 = 0)$, respecto a sistemas de coordenadas homogéneas previamente elegidos en H y en H'.

b) Encontrar las ecuaciones de una homografía $f : \mathbb{P}_2 \to \mathbb{P}_2$ que deja fijo el punto $(0 : -1 : 3)$ y transforma

$$\begin{gathered}(1:0:-1) \to (0:1:-1)\\ (-2:1:1) \to (-1:0:2)\\ (0:0:1) \to (-2:0:7)\end{gathered}$$

calcular los hiperplanos invariantes.

c) Sean L_1 y L_2 dos rectas distintas en un plano proyectivo P, y $a, b \in L_1 - L_2$ dos puntos distintos. Sean c,$d \in P - (L_1 \cup L_2)$ dos puntos distintos. Demostrar que existe una unica homografía $f : P \to P$ tal que $f(a) = a$, $f(b) = b$, $f(c) = d$ y $f(L_2) = L_2$.

d) Hallar las ecuaciones respecto al sistema de referencia canónico de la proyectividad de $f : \mathbb{P}_2 \to \mathbb{P}_2$ que deja fijo el punto $(1 : 1 : 1)$ y transforma

$$\begin{gathered}(1:0:1) \to (1:0:0)\\ (0:1:1) \to (-1:2:3)\\ (1:1:0) \to (1:2:1)\end{gathered}$$

Determinar todos los puntos fijos de f y sus rectas invariantes.

e) Sean p_0, p_1, p_2 tres puntos no alineados de $\mathbb{P}_2$. Sea $f : \mathbb{P}_2 \to \mathbb{P}_2$ una transformación proyectiva tal que

$$f(p_0) = p_1,\ f(p_1) = p_2,\ f(p_2) = p_0$$

1) Demostrar que $f^3 = id$
2) Determinar cuántos puntos fijos tiene f.
3) Determinar cuantas rectas invariantes tiene f.

f) ★★★ En $\mathbb{P}_2$ se dan los puntos $c = (1 : 1 : 2)$, $a = (0 : 1 : 1)$ y $a' = (3 : 1 : 4)$ y la recta $r : (2x_0 - 3x_1 = 0)$. Se pide:

1) (★) Demostrar que $c, a,$ y a' están alineados y calcular la razón doble $\rho = [c, V(a, c) \cap r, a, a']$
2) (+) Demostrar que existe una única homografía $f : \mathbb{P}_2 \to \mathbb{P}_2$ que deja fijos los puntos de la recta r y el punto c, y transforma el punto a en el a'.
3) (++) Calcular las ecuaciones de f en las coordenadas canónicas.
4) (★) Demostrar que para todo punto $p \notin r$, $p \neq c$ se verifica que $\rho = [c, V(p, c) \cap r, p, f(p)]$

7. Hoja 7

a) Probar que las homografías f y g de $\mathbb{P}_2$ dadas por las ecuaciones

$$\begin{pmatrix} x_0' \\ x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_0' \\ x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

admiten unas mismas ecuaciones reducidas.

b) Calcular la ecuación reducida de la homografía en $\mathbb{P}_1$ definida por las ecuaciones:

$$\begin{cases} x_0' = -x_1 \\ x_1' = 4x_0 + 4x_1 \end{cases}$$

y un sistema de referencia respecto al cuál f tiene esta ecuación reducida.

c) Determinar para cada valor real de λ la ecuación reducida de la homografía en $\mathbb{P}_1 = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ que transforma x en x' mediante la fórmula

$$xx' + (3 + \lambda)\, x + \lambda x' + \lambda + 8 = 0$$

d) Se considera la transformación proyectiva $f : \mathbb{P}_1 \to \mathbb{P}_1$ ($\mathbb{P}_1 = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$) dada por la ecuación:

$$x' = -\frac{1}{x}$$

Encontrar todas las transformaciones proyectivas $g : \mathbb{P}_1 \to \mathbb{P}_1$ que conmutan con f (es decir $f \circ g = g \circ f$) y probar que si g tiene algun punto fijo, y $g \neq id$ entonces necesariamente g es involución (es decir $g^2 = id$). Probar que sólo hay una involución sin puntos fijos que conmuta con f.

e) (★★)

f) (★★★)

8. Hoja 8.

a) Se considera la aplicación afín $F : \mathbb{A}_2 \to \mathbb{A}_2$ que transforma los puntos de coordenadas (canónicas) $(1, -1)$, $(1, 1)$, $(2, 1)$ en los puntos de coordenadas $(2, 0)$, $(-2, 0)$, $(1, 1)$ respectivamente. Se pide:

1) Calcular las ecuaciones de F en las coordenadas cartesianas canónicas
2) Calcular las ecuaciones de la extensión proyectiva $\widetilde{F} : \mathbb{P}_2 \to \mathbb{P}_2$ de F.
3) Determinar los puntos fijos de F y $\widetilde{F}$.
4) Calcular en las coordenadas canónicas, las ecuaciones de la homografía $F_\infty = \widetilde{F}\Big| \infty_{\mathbb{A}_2} : \infty_{\mathbb{A}_2} \to \infty_{\mathbb{A}_2}$
5) Calcular las ecuaciones reducidas de F_∞ y el sistema de coordenadas homogéneas que da lugar a dichas ecuaciones
6) Calcular las ecuaciones reducidas de $\widetilde{F}$ y el sistema de coordenadas homogéneas que da lugar a dichas ecuaciones.

b) Demostrar que si la extension proyectiva $\widetilde{F}$ de una transformación afín $F : \mathbb{A}_n \to \mathbb{A}_n$ deja fijo cada punto del infinito $\infty_{\mathbb{A}_n}$. entonces necesariamente F es una homotecia, o una traslación.

c) Halla el centro, la razón y las ecuaciones en el sistema de referencia cartesiano canónico de $\mathbb{A}_4$ de la homotecia de $\mathbb{A}_4$ que trasforma el punto (de coordenadas canónicas) $(1, -1, 0, 1)$ en el $(0, 1, 1, 0)$ y el $(1, 0, 0, 1)$ en el punto $(0, 3, 1, 0)$.

d) Sea $a \in \mathbb{R}$ y f transformación afín en $\mathbb{A}_3$ que deja fijos todos los puntos de las rectas cuyas ecuaciones implícitas respecto de las coordenadas cartesianas canónicas son

$$L_1 : \left\{ \begin{array}{c} 2x + y = 0 \\ 1 - 2x + y = 0 \end{array} \right. ; L_2 : \left\{ \begin{array}{c} x - ay + 2z = 1 \\ x + z = 1 \end{array} \right.$$

y transforma el punto de coordenadas $(0, 0, 2)$ en el punto de coordenadas $(0, 1, 3)$. Calcular a y las ecuaciones de f.Determinar unas ecuaciones reducidas para $\widetilde{f}\Big|_{\infty_{\mathbb{A}_3}}$.

e) Determinar en las coordenadas canónicas las ecuaciones de la simetría F de $\mathbb{A}_3$ con base el plano $x + y - z = 3$ y dirección la del vector $(-1, 1, 1)$. Encontrar las ecuaciones reducidas de su extensión proyectiva $\widetilde{F} : \mathbb{P}_3 \to \mathbb{P}_3$, y el sistema de referencia proyectivo respecto al cual $\widetilde{F}$ tiene esas ecuaciones.

f) (★★★) Sean a, b, c d cuatro puntos afínmente independientes del espacio afín $\mathbb{A}_3$. Se pide:

1) Determinar en las coordenadas (Y_1, Y_2, Y_3) del sistema de referencia cartesiano $\mathcal{R} = \left(a; \overrightarrow{ab}, \overrightarrow{ac}, \overrightarrow{ad}\right)$,
2) las ecuaciones de la transformación afín $f : \mathbb{A}_3 \to \mathbb{A}_3$ tal que $f(a) = b$, $f(b) = a$, $f(c) = d$, $f(d) = c$.
3) Calcular los puntos fijos de f.
4) Si $\widetilde{f} : \mathbb{P}_3 \to \mathbb{P}_3$ es la extensión proyectiva de f calcular la ecuación reducida de la homografía $\infty_{\mathbb{A}_3} \to \infty_{\mathbb{A}_3}$ obtenida por la restricción $\widetilde{f}$ a $\infty_{\mathbb{A}_3}$.

9. Hoja 9.

a) Dados los puntos $a = (1 : 2 : -1)$, $b = (2 : 4 : 1)$, $c = (1 : 2 : 0)$ de $\mathbb{P}_2$ probar que están alineados, y calcular la razón simple (abc) en el espacio afín $\mathbb{P}_2 - r$, donde r es la recta $r : (3x_0 + 2x_1 - x_2 = 0)$

b) Dados los puntos $a = (2 : -1 : 1)$, $b = (1 : 0 : 0)$, $c = (-1 : 2 : 1)$, $d = (0 : 1 : 0)$, de $\mathbb{P}_2$ a) Probar que forman un sistema de referencia proyectivo. b) Encontrar una recta r tal que en el espacio afín $\mathbb{P}_2 - r$ se verifique la igualdad $\overrightarrow{ab} + \overrightarrow{ac} = \overrightarrow{ad}$. c) Calcular las coordenadas cartesianas (Y_1, Y_2) de un punto arbitrario $p = (x_0 : x_1 : x_2) \in \mathbb{P}_2 - r$ respecto del sistema de referencia cartesiano $\mathcal{C} = \left\{a; \overrightarrow{ab}, \overrightarrow{ac}\right\}$

c) En el plano proyectivo $\mathbb{P}_2$ se dan los puntos $a = (1 : 1 : 2)$ $b = (2 : 1 : 1)$ $c = (1 : 0 : 1)$ y la recta $r : (x_0 - x_1 + x_2 = 0)$. Calcular el punto $p = (p_0 : p_1 : p_2) \in \mathbb{P}_2$ que es el baricentro del triángulo de vertices a, b y c en el plano afín $A = \mathbb{P}_2 - r$.

d) ★★★ En el plano proyectivo $\mathbb{P}_2$ se dan los puntos $a = (1 : 0 : 1)$ $b = (0 : 1 : 0)$ $c = (0 : 1 : 1)$ determinar una recta r, de forma que el punto $p = (1 : 1 : -1)$ sea el baricentro del triángulo de vertices a, b y c en el plano afín $A = \mathbb{P}_2 - r$.

e) ★★ En el plano proyectivo $\mathbb{P}_2$ sea r la recta de ecuación $3x_0 - x_1 + 2x_2 = 0$ y consideremos el plano afín $\mathbb{P}_2 - r$. Hallar la ecuación de la recta afín que pasa por los puntos $(1 : 2 : -3)$ y $(2 : 1 : 5)$, respecto de la referencia cartesiana $\{p_0; \overrightarrow{p_0a_1}, \overrightarrow{p_0a_2}\}$ de $\mathbb{P}_2 - r$, donde $p_0 = (0 : 1 : 1)$, $a_1 = (1 : 0 : -1)$ y $a_2 = (0 : 3 : 1)$.

f) Dar las ecuaciones en las coordenadas homogéneas canónicas (x_0, x_1, x_2) de $\mathbb{P}_2$ de la extensión proyectiva de la homotecia de centro $c = (1 : 1 : 2)$ y razón 2 en el plano afín $\mathbb{P}_2 - r$, siendo $r : (2x_0 - 3x_1 = 0)$.

g) Dar las ecuaciones en las coordenadas homogéneas canónicas (x_0, x_1, x_2) de $\mathbb{P}_2$ de la extensión proyectiva de la traslación que lleva $a = (1 : 1 : 0)$ a $b = (1 : 2 : 1)$ en el plano afín $\mathbb{P}_2 - r$, siendo $r : (x_0 - 2x_1 + x_2 = 0)$. Determinar el conjunto puntos fijos y el de las rectas invariantes.

10. Hoja 10

a) Se supone dado en un plano proyectivo P, un sistema de referencia proyectivo

$$\mathcal{R} = (p_0,p_1,p_2;p)$$

y se considera la transformación proyectiva $f : P \to P$ tal que

$$(f(p_0),\ f(p_1),\ f(p_2)\ \ f(p)) = (p_1,p_0,p,p_2)$$

1) Determinar en las coordenadas homogeneas $(y_0 : y_1 : y_2)$ inducidas por $\mathcal{R}$, las ecuaciones de f. 2) Probar que f es una homología. Determinar en estas coordenadas su centro, su recta base y su razón. 3) Probar que la recta $r = V(p_0,p_1)$ es invariante por f, y describir la aplicación afín $f|_A : A \to A$ donde A es el plano afín $A = P - r$.

b) Se considera la homografía $f : \mathbb{P}_2 \to \mathbb{P}_2$, dada por las ecuaciones

$$\begin{cases} x_0' = 3x_0 - 2x_1 + x_2 \\ x_1' = 2x_1 \\ x_2' = -x_0 + 2x_1 + x_2 \end{cases}$$

a) Demostrar que tiene una recta r de puntos fijos, b) Probar que hay punto $p \in \mathbb{P}_2$ tal que f deja invariante cada recta que pasa por p.c) Si A es el plano afín $A = P - r$, probar que la transformación afín $f|_A : A \to A$ es una traslación.

c) (★★★) En $\mathbb{P}_3$ se dan los puntos $c = (1 : -1 : -2 : 0)$, $a = (0 : 1 : 0 : 0)$ y $a' = (-1 : 3 : 2 : 0)$ y el hiperplano $H : (2x_0 + x_1 + x_3 = 0)$. Se pide

1) Demostrar que c, a, y a' están alineados y calcular la razón doble $\rho = [c, V(a,c) \cap H, a, a']$.
2) Encontrar las ecuaciones de la homografía $f : \mathbb{P}_3 \to \mathbb{P}_3$ que deja fijos los puntos del hiperplano H y el punto c, y transforma el punto a en el a'
3) Encontrar todos los puntos fijos, rectas y planos invariantes de f.

d) (★★) Probar que la aplicación $f : \mathbb{P}_3 \to \mathbb{P}_3$ definida por las ecuaciones

$$x_0' = -x_1 - x_3, x_1' = 2x_0 + 3x_1 + x_3, x_2' = 4x_0 + 2x_1 + 2x_2 + 2x_3,\ x_3' = 2x_3$$

es una homología. Determinar su hiperplano central y su razón.

e) Clasificar las siguentes cónicas proyectivas reales de $\mathbb{P}_2$, y cuando dos de ellas sean proyectivamente equivalentes encontrar el cambio de coordenadas que permite pasar de la una a la otra. (a) $x_1^2 + x_2^2 - 6x_1x_0 + 4x_2x_0 + 12x_0^2 = 0$. (b) $x_1^2 + 2x_1x_2 - 3x_2^2 - 4x_2x_0 = 0$. (c) $x_0^2 + x_1^2 + 2x_1x_0 + 2x_2x_0 + 2x_1x_2 - x_2^2 = 0$. (d) $5x_0^2 + 5x_1^2 + 5x_2^2 + 4x_1x_0 + 4x_2x_0 + 4x_1x_2 = 0$. (e) $x_1x_0 - x_1x_2 + x_2x_0 = 0$ (f) $2x_0^2 + 4x_1x_2 + x_2^2 - 4x_1x_0 - 2x_2x_0 - 4x_1x_2 = 0$.

f) Clasificar la cuádrica proyectiva del espacio proyectivo real $\mathbb{P}_3$ que respecto de la referencia proyectiva estándar tiene por ecuación $x_0^2+3x_1^2+3x_2^2+x_3^2-2x_0x_1-2x_0x_2-2x_1x_2=0$.

g) ¿Para qué valor de $a \in \mathbb{R}$ la cónica de $\mathbb{P}_2$ de ecuación $x_1^2-3x_1x_2+2x_2^2+x_0x_1-x_0x_2+ax_0^2=0$ es un par de rectas? Para el valor hallado obtener las ecuaciones de dichas rectas.

11. Hoja 11.

a) Determina las rectas tangentes a la cónica de $\mathbb{P}_2$ de ecuación $x_0^2+x_1x_2+x_2^2=0$ que pasan por el punto $(1:1:0)$.

b) Dar la ecuación de la cónica de $\mathbb{P}_2$ que es tangente a las rectas $x_2=0$, $x_0-x_1+x_2=0$, $x_0+x_2=0$, $x_0+x_1+2x_2=0$ y $x_0+2x_1-x_2=0$.

c) Dada la cónica $4x_0^2+4x_1^2+x_2^2-2x_0x_2-4x_1x_2=0$, y la recta $2x_1-x_2=0$, obténgase la expresión analítica de la involución inducida por la cónica en la recta respecto a la referencia formada por los puntos $(1:0:0)$, $(0:1:2)$, y $(1:1:2)$.

d) Calcúlese la cónica que contiene a los puntos $(-1:0:1)$ y $(0:0:1)$, tal que el punto $(0:1:1)$ está en la polar del punto $(2:1:1)$ y tal que el polo de la recta $x_0+x_1+x_2=0$, es el punto $(-1:1:1)$.

e) Calcula la ecuación de una cónica de $\mathbb{P}_2$ que pase por los puntos $(1:0:0)$, $(1:1:0)$,$(1:-1:1)$ y sea tangente a la recta $x_0=0$ en el punto $(0:1:1)$. ¿Es unica dicha cónica?

f) Una cónica $\mathcal{C}$ del plano proyectivo real $\mathbb{P}_2$, tiene las siguientes propiedades: 1) La polar del punto $(1:0:0)$ respecto a $\mathcal{C}$ es la recta $r:(x_0+x_1=0)$. 2) El polo de la recta $(2x_0+x_1-2x_2=0)$ es el punto $(0:2:1)$. 3) La recta $(x_2=0)$ corta a la cónica $\mathcal{C}$ en un único punto. Se pide: a) Probar que $(0:2:1)\in\mathcal{C}$, pero $(1:0:0)\notin\mathcal{C}$. b) La ecuación de $\mathcal{C}$ en las coordenadas canónicas $(x_0:x_1:x_2)$.

g) ★★★ Sea $\mathcal{C}$ una cónica con puntos, no degenerada en un plano proyectivo real P, y sea r una recta que no corta a $\mathcal{C}$ y s otra recta que contiene al polo de r.

1) Probar que el punto $p=r\cap s$ no está en $\mathcal{C}$, y hay dos rectas α, y β tangentes a la cónica desde el punto p.
2) Demostrar que $[\alpha,\beta,r,s]=-1$.

h) ★★ En el plano proyectivo real $\mathbb{P}_2$ con las coordenadas canónicas $(x_0:x_1:x_2)$ se da cónica

$$\mathcal{C}:\left(2x_1^2-x_2^2+2x_0x_1+4x_0x_2+4x_1x_2=0\right)$$

y las rectas $r:(x_0+2x_1+x_2=0)$ y $s:(x_1+x_2=0)$.

1) Probar que $\mathcal{C}$ es una cónica con puntos, no degenerada.
2) Demostrar que la recta r no corta a $\mathcal{C}$ y que la recta s contiene al polo de r.
3) Probar que el punto $p=r\cap s$ no está en $\mathcal{C}$, y hay dos rectas α, y β tangentes a la cónica desde el punto p.
4) Demostrar que (en $\Omega(p)$) la razón doble $[\alpha,\beta,r,s]=-1$.

5) Hacer un dibujo esquemático de la situación.

i) Sea $\mathcal{C}$ una cónica no degenerada y $\mathcal{C}^*$ su cónica dual. Probar que dos rectas r y s son conjugadas respecto a $\mathcal{C}^*$ si y solo si s contiene al polo de r.

12. Hoja 12.

a) ★★★

b) Clasificar afínmente, según los valores de t, la cónica de $\mathbb{A}_2$ de ecuación

$$1 - 2x - 2y + tx^2 + 2xy + ty^2 = 0$$

c) Clasificar las cónicas afínes de $\mathbb{A}_2$ con las ecuaciones siguientes y determinar, cuando existan, su centro y sus asíntotas:

1) $3x^2 - 2xy - y^2 - 2y = 0.$
2) $5 + 5x^2 + 5y^2 + 4x + 4y + 4xy = 0.$
3) $3 - 5x^2 - 3y^2 - 4x + 4y - 4xy = 0.$
4) $2 + x^2 + y^2 - 4x - 2y - xy = 0.$
5) $2x^2 - 13xy + 15y^2 + 5x - 11y + 7 = 0.$

d) Clasificar las siguientes cuádricas afines de $\mathbb{A}_3$

1) $5x^2 + 4xy - 2xz + z^2 - 4x - 4y + 1 = 0.$
2) $x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2xz + 2yz + 2x = 0.$
3) $x^2 - y^2 - x - z - 1 = 0.$

e) Determinar el centro y el cono asintótico a la cuádrica c-i. del Ejercicio anterior.

f) Demostrar que la cónica $C : (1 + 2x + 4y + x^2 + y^2 + 2xy = 0)$ es una parábola, calcular su dirección asintótica y un sistema de coordenadas cartesianas que de lugar a sus ecuaciones reducidas.

13. Hoja 13

a) Dada la cónica afín de ecuación

$$1 + 5x^2 + 2y^2 + 2x + 6xy = 0$$

clasifíquese afínmente. Calcúlese su centro. Probar que la recta D de ecuación

$$x + y = 1$$

es un diámetro. Calcúlese su diámetro conjugado. Calculense las tangentes a la cónica en los puntos de corte de la misma con D. ¿Tienen la dirección del diámetro conjugado? ¿Ocurre siempre así? ¿Porqué?

b) Demostrar que en una cónica afín no singular, los puntos medios de las cuerdas de una misma dirección no asintótica pertenecen al diámetro correspondiente a la polar de dicha dirección.

c) Sea $\mathcal{C}$ la cónica proyectiva de ecuación en las coordenadas homogeneas canónicas de $\mathbb{P}_2$:

$$x_0^2 + x_0x_1 + x_0x_2 + x_1x_2 + x_2^2 = 0$$

Sea r_λ la recta $\lambda x_0 + x_1 + (1 - \lambda)\, x_2 = 0$, y consideremos el plano afín $A_\lambda = \mathbb{P}_2 - r_\lambda$.

1) Determinar qué tipo de cónica es la cónica afín $\mathcal{C}_\lambda = \mathcal{C} \cap A_\lambda$
2) Probar que $\mathcal{C}_2$ es una hipérbola y calcular sus asíntotas.
3) Determinar el lugar geométrico de los centros de las cónicas.

14. Hoja 14

a) Sea r una recta de $\mathbb{P}_2^{\mathbb{C}}$. Demostrar que

1) Si r es imaginaria (i.e no real) entonces $r \cap \overline{r}$ es un punto real
2) Si r contiene un punto imaginario es imaginaria.
3) Si r contiene a dos punros reales distintos, entonces es real
4) Si r contiene un punto p imaginario y a su conjugado, entonces r es real

b) Sea $f : \mathbb{P}_1^{\mathbb{C}} \to \mathbb{P}_1^{\mathbb{C}}$ una homografía de la recta proyectiva compleja. Probar que son equivalentes las siguientes afirmaciones:

1) f manda puntos reales a puntos reales (y por tanto induce una homografía real $f|_{\mathbb{P}_1} : \mathbb{P}_1 \to \mathbb{P}_1$).
2) f manda tres puntos reales a tres puntos reales.
3) f manda un punto real a un punto real, y un par de puntos imaginarios conjugados a un par de puntos imaginarios conjugados
4) f manda dos pares de puntos conjugados a dos pares de puntos conjugados.

c) Si $v = (0 : v_1 : v_2)$, $w = (0 : w_1 : w_2)$ son dos puntos del infinito del plano euclideo $\mathbb{E}_2$, demostrar que

$$[I, J, v, w] = \cos 2\theta + i \sin 2\theta$$

siendo θ el ángulo antihorario que va del vector $\overrightarrow{v} = (0, v_1, v_2)$ al $\overrightarrow{w} = (0, w_1, w_2)$.

d) Determinar los objetos geométricos (ejes focos,...etc) asociados cada una de las siguientes cónicas euclideas.

1) $2x^2 - 6xy + 5y^2 - 2x + 3y = 0$
2) $x^2 - 4xy + 2y^2 + 3 = 0$
3) $4x^2 + 4xy + y^2 + x + y + 1 = 0$