PROBLEMAS DE GEOMETRIA DIFERENCIAL DE CURVAS Y SUPERFICIES (Curso 15-16)

1. **Cicloide:** Parametrizar la curva que describe un punto del borde de un disco de radio $r > 0$, que rueda sin deslizar a lo largo de una recta. Determinar los puntos singulares. Realizar la parametrización también cuando el punto está dentro o fuera del disco.

   Probar que la recta tangente a la cicloide pasa por el punto superior del circulo generador, y la recta normal por el punto inferior.

2. Parametrizar la curva que describe un punto del borde de un disco de radio $r > 0$, que rueda sin deslizar alrededor de un disco de radio $R \geq r$. Se llama epicicloide.

3. Continuando con el problema anterior, Considerar también el caso de que la circunferencia pequeña ruede *por dentro* de la grande. Se llama hipocicloide. Estudiar especialmente, y dibujar los casos $R = r$, $R = 2r$.

4. Una epicicliode con $R = r$, se llama cardioide. Probar que las tangentes a la **Cardioide** por los extremos de una cuerda cualquiera que pasa por el punto de retroceso, son ortogonales.

5. **Tractriz:** Dibujar razonadamente la curva $\alpha\colon (0, \pi) \to \mathbb{R}^2$ definida como

$$\alpha(t) = \left(\sin t, \cos t + \log \tan \frac{t}{2}\right)$$

   Estudiar lo(s) punto(s) singular(es) de α. Demostrar que la longitud del segmento de la tangente a la tractriz entre el punto de tangencia y el eje OY es constantemente 1. ¿Cual es la interpretación geométrica del parámetro t?

6. (★★) La curva del ejercicio 3 cuando $R = 4r$ se denomina **Astroide** y tiene de ecuación implícita $x^{2/3}+y^{2/3} = R^{2/3}$. Probar que $x = R\cos^3 t$, $y = R\sin^3 t$ es una parametrización. Probar que tiene cuatro puntos de retroceso de primera especie. Demostrar que tiene la siguiente propiedad geométrica: Los segmentos que determinan las tangentes con los ejes de coordenadas tienen longitud constante. ¿Cuál es la interpretación geométrica del parámetro t?

7. (★★★)Consideramos una circunferencia $\mathcal{C}$, y una recta L tangente a ella. Sea S es el punto de tangencia, y A es el punto diametralmente opuesto, se define la cisoide de la siguiente manera: *Si R es un punto movil a lo largo de L, y Q es la intersección de $\mathcal{C}$ con el segmento AR, la cisoide es el lugar geométrico de los puntos P en AR tales que* $d(A, P) = d(Q, R)$....etc (ver enunciado oculto)

8. Calcular la longitud de: (a) El segmento de la parábola $x = t$, $y = t^2$ entre $t = 0$, y $t = 1$. (b) La Catenaria $x = t$, $y = \cosh t$, $0 \leq t \leq a$.(c) La cicloide $\alpha(t) = (rt - r\sin t, r - r\cos t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$

9. ★★ Probar que la curva:

$$\alpha : \begin{cases} x = \frac{s}{\sqrt{2}} \cos\left(\ln \frac{s}{\sqrt{2}}\right) \\ x = \frac{s}{\sqrt{2}} \sin\left(\ln \frac{s}{\sqrt{2}}\right) \end{cases}$$

   es PPA. Determinar su curvatura. Probar que $\alpha'(s)$ forma un ángulo constante con el radio vector $\alpha(s)$, y dibujar razonadamente la curva.

10. Dada la hipérbola parametrizada por $\alpha(t) = (\frac{1}{2}(t+\frac{1}{t}), \frac{1}{2}(t-\frac{1}{t}))$, representarla y hallar el cambio de coordenadas para que la rama de la derecha sea $\beta(s) = (\cosh s, \sinh s)$.

11. Es frecuente expresar una curva plana en coordenadas polares mediante $\rho = \rho(\theta)$, $a < \theta < b$.

$$\alpha : \begin{cases} x = \rho(\theta)\cos\theta \\ y = \rho(\theta)\sin\theta \end{cases}$$

   Demostrar que la longitud de arco es $\int_a^b \sqrt{\rho^2 + (\rho')^2} d\theta$.Demostrar que la curvatura es:

$$\kappa(\theta) = \frac{2(\rho'\ )^2 - \rho\rho''\ + \rho^2}{((\rho'\ )^2 + \rho^2)^{3/2}}$$

   y si $\rho(\theta)$ tiene un máximo relativo en θ_0, entonces $|\kappa(\theta_0)| \geq 1/\rho(\theta_0)$. Interpretar geométricamente este resultado.

12. Determinar la curvatura de una cardioide con ecuación en polares $\rho = 2r(1 - \cos\theta)$ y hacer un dibujo razonado de la curva.

13. Sea $\alpha \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ una curva cerrada PPA de periodo L tal que $\theta(L) = \theta(0) + 2\pi$, siendo $\theta(s)$ un determinación del ángulo de $\alpha'(s)$ y tal que $0 < \kappa(s) \leq 1/R$, $\forall s$. Demostrar que long$(\alpha) \geq 2\pi R$. ¿Cómo se expresa en palabras este resultado?

14. ★★★ **Espiral logarítmica.** Se sabe que el ángulo η formado por el radio vector de un punto cualquiera de $\alpha(t)$ de una curva, con la tangente en dicho punto a la curva, es constante. Entonces, la curva α se llama espiral logarítmica. Probar que en coordenadas polares, la condición se expresa:

$$\frac{\rho d\theta}{d\rho} = \frac{1}{a} \text{ lo que da } \rho = Ce^{a\theta}$$

   para a y $C > 0$ constantes. Determinar su curvatura y esbozar su dibujo según los valores de a.

15. ★★★ Sea $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función diferenciable Demostrar que la curvatura (salvo el signo) en un punto de una curva $C = \{(x,y) : F(x,y) = 0\}$ $\left((F_x, F_y)|_{(x,y)} \neq (0,0) \; \forall (x,y) \in C \right)$ viene dada por

$$-\frac{F_{xx}F_y^2 - 2F_{xy}F_xF_y + F_{yy}F_x^2}{\left(\sqrt{F_x^2 + F_y^2}\right)^3}$$

Usando este hecho, probar que la ecuación $5x^2 + 6xy + 2y^2 + 2y = 0$ define una curva y calcular su curvatura en el origen $(0,0)$.

16. ★★ Determinar una curva $\alpha : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^2$ parametrizada por el arco cuya curvatura sea $\kappa_\alpha(s) = 1/s$, y a valor $s = 1$ del parámetro se tenga

$$\alpha(1) = (1/2, -1/2), \; \alpha'(1) = (1,0)$$

Probar que se trata de una espiral logarítmica

17. Dada una curva $\alpha : I \to \mathbb{R}^2$ PPA, demostrar que

   a) α es un segmento de recta $\iff$ todas las rectas tangentes concurren en un punto p_0.

   b) α es un arco de circunferencia $\iff$ todas las rectas normales concurren en un punto p_0.

   ¿Son ciertas las equivalencias para curvas en el espacio?

18. Demuestre que las líneas tangentes a la curva $\alpha(t) = (3t, 3t^2, 2t^3)$ forman un ángulo constante con la recta $y = 0$, $z = x$.

19. Reparametrizar por el arco la curva $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, $\gamma(t) = (e^t \cos t, e^t \mathrm{sen} t, e^t)$. Calcular la longitud de la curva para $0 \leq t \leq \pi$.

20. Hallar las ecuaciones de la recta tangente, los planos rectificante, normal y osculador así como la curvatura y torsión de la curva $\gamma(t) = (1+t, -t^2, 1+t^3)$. ¿Cómo es el valor de $\kappa(t)$ y $\tau(t)$ cuando $t \to \infty$?

   Lo mismo con $\gamma(t) = (\cos t, \mathrm{sen} t, \cosh t)$.

21. Determinar curvatura y torsión de la curva $\gamma(t) = (\frac{1}{\sqrt{2}} \cos t, \mathrm{sen}\, t, \frac{1}{\sqrt{2}} \cos t)$. ¿De qué curva se trata?

22. Sea α una curva regular cuya traza está sobre una esfera de radio r. Probar que es biregular, y que su curvatura cumple $\kappa \geq 1/r$.

23. Dada la curva parametrizada (hélice)

$$\alpha(s) = \left(a\cos\left(\frac{s}{c}\right), a\,sen\left(\frac{s}{c}\right), b\frac{s}{c}\right), \ s \in \mathbb{R}\ , \ c^2 = a^2 + b^2$$

   a) Demostrar que el parámetro s es la longitud de arco.
   b) Determinar las funciones de curvatura y la torsión de α
   c) Fijado s, determinar el plano osculador de α en $\alpha(s)$
   d) Demostrar que las rectas con dirección $N(s)$ y que pasan por $\alpha(s)$ cortan al eje z bajo un angulo constante igual a $\pi/2$

24. ★★ Demostrar que la línea definida por $x^2 = 3y$, $2xy = 9z$ es una hélice, y determinar la dirección ortogonal a todas sus rectas normales.

25. ★★★ Hallar las condiciones en las cuales la línea $x = at$, $y = bt^2$, $z = ct^3$ es una hélice

26. Sea α una curva PPA de Frenet en $\mathbb{R}^3$. A partir de ella se construye T, la curva con valores en la esfera de centro 0 y radio 1, dada por su tangente unitaria llamada *indicatriz esférica*. Se pide probar que las fórmulas de κ_T y τ_T están dadas por

$$\kappa_T = \sqrt{1+q^2} \quad , \quad \tau_T = \frac{q'}{\kappa\,(1+q^2)},$$

siendo $q = \tau/\kappa$, el cociente de la curvatura y torsión de α. Probar que α es una hélice si y solo si su indicatriz es un arco de circunferencia.

27. Demostrar que el conocimiento del vector normal $N(s)$ de una curva α cuya torsión nunca es nula, determina la curvatura $\kappa(s)$ y la torsión $\tau(s)$ de α, y por tanto determinan la curva salvo movimientos..

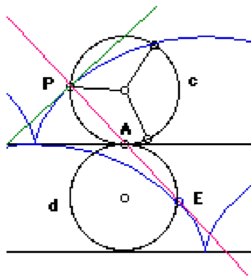
28. Demostrar que la evoluta de la espiral logarítmica del ejercicio 9 es otra espiral logarítmica congruente.

29. Demostrar que la curvatura k_α en valor absoluto de una evolvente $\alpha(s) = \beta(s) + (C - s)\beta'(s)$ de β viene dada por la fórmula:

$$|k_\alpha(s)| = \frac{1}{|C - s|}$$

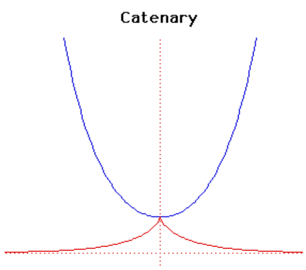
supuesto que s es el parámetro arco de β. Interpretarlo geométricamente ¿Que es lo paradógico de este resultado?

30. ★★★ Demostrar que el segmento que une un punto arbitrario de una cicloide con el centro de curvatura correspondiente a ese punto se biseca por la base de la cicloide.



Demostrar que su evoluta es otra cicloide congruente.

31. ★★ Calcular el parámetro arco de la catenaria $\alpha(t) = (t, cosh\ t)$ y probar que una evolvente suya es una tractriz.



32. Estudiar si son superficies los conjuntos $M = \{(x,y,z) : F(x,y,z) = 0\}$ para las siguientes funciones F: a) $F(x,y,z) = xy + z(z-2) + 1$ b) $F(x,y,z) = x\sin(z) - y\cos z$. c) $F(x,y,z) = x^2 + y^2 - az^2 = a$, $(a \in \mathbb{R})$. d) $F(x,y,z) = x^2 + 2xy + y^2$. Hacer un dibujo aproximado de cada una de ellas.

33. Probar que es superficie el conjunto unión de todas las rectas que cortan a la recta r de ecuaciones $2x - y = 4, 3x + z = 3$ y al eje Z y que además son paralelas al plano $z = 0$.

34. ★★★Sean $R > r > 0$ números fijos. Probar que es superficie el conjunto M definido por

$$M = \left\{(x,y,z) : (x^2 + y^2 + z^2 - R^2 - r^2)^2 - 4R^2(r^2 - z^2) = 0\right\}$$

Demostrar que la intersección de M con el plano $y = 0$ son dos circunferencias.

35. Sea $\rho = \rho(z)$ una función diferenciable $\rho : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con $\rho(z) > 0$ $\forall z$. Demostrar que el conjunto M de $\mathbb{R}^3$ definido por la ecuación $x^2 + y^2 - \rho(z)^2 = 0$ es una superficie. Probar que esta superficie se obtiene girando la gráfica: $\{(\rho(z), 0, z) : z \in \mathbb{R}\}$ alrededor del eje Z. Tomando una de las coordenadas como el ángulo girado (y la otra z) construir una parametrización de la superficie.

36. Se considera la aplicación $P : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ definida de la siguiente forma: $P(u,v)$ es la intersección de la recta definida por los puntos $(u,v,0)$ y el *polo norte* $p^+ = (0,0,1)$ con la esfera $\mathbb{S}^2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$. Se denomina a P proyección estereográfica desde el polo norte p^+.

    a) Determinar las ecuaciones de P y probar que es una PL de $\mathbb{S}^2$ cuya imagen es $\mathbb{S}^2 - \{p^+\}$

    b) Se define análogamente $\overline{P}(\overline{u},\overline{v})$ como intersección de $\mathbb{S}^2$ con la recta que pasa por $(\overline{u},\overline{v},0)$, y $p^- = (0,0,-1)$. Probar que $\overline{P} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ es tambien parametrización local con imagen $\mathbb{S}^2 - \{p^-\}$. Determinar las ecuaciones del cambio de coordenadas entre P y $\overline{P}$

37. ★★ Se considera la hoja superior $M = \{z^2 = 1 + x^2 + y^2, z > 0\}$ del hiperboloide de dos hojas. Sea $\mathbb{U} = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 | u^2 + v^2 < 1\}$. Calcular la aplicación $P\colon \mathbb{U} \to M$ descrita con el siguiente procedimiento geométrico: para $(u,v) \in U$, se traza la recta desde el origen pasando por el punto $(u,v,1)$ y se toma el punto de corte con M. Demostrar que así construida, P es parametrización.

38. Demostrar que la superficie de ecuación $z = x^2 - y^2$ es una superficie reglada con directriz $x = u,\ y = 0,\ z = u^2$.

39. ★★★ Se considera la superficie M de ecuación $x^2 + y^2 - z^2 = 1$. Se trata de ver que es una superficie reglada, pero que de hecho por cada punto de M pasan dos rectas distintas contenidas en M. Para ello, primero consideramos la curva $\alpha(u) = (\cos u, \sin u, 0)$:

    a) Probar que α está contenida en M, y por cada punto de $\alpha(u)$, pasan exactamente dos rectas contenidas en M, que se obtienen intersecando M con su plano afín tangente en $\alpha(u)$.

    b) Basandose en estas dos rectas como generatrices y en α como directriz construir dos parametrizaciones de M como superficie reglada.

    c) Demostrar que por cada punto de M pasan dos rectas distintas contenidas en M.

    d) Estudiar el conjunto de los puntos de M en donde estas dos rectas son perpendiculares.

40. Encontrar una superficie reglada desarrollable que contenga a las parábolas $\{y^2 = 4x, z = 0\}$ $\{x^2 = 4y,\ z = 1\}$

41. Demostrar que el conjunto (a, b, c) de los valores de las constantes a, b, y c para que la superficie de ecuacion paramétrica $x = u^2 + av$, $y = bu^3 + uv$, $z = u^4 + cu^2v$ sea desarrollable, es una superficie.

42. a) Probar que $P(u,v) = ((u\cos v, u\sin v, u + \log(\cos v))$ con $u \in \mathbb{R}$, $-\pi/2 < v < \pi/2$, define una superficie parametrizada, y demostrar que el par de curvas $v \to P(u_1, v)$, $v \to P(u_2, v)$ cortan a cada curva $u \to P(u, v_0)$ en segmentos con igual longitud.

   b) Se considera la esfera parametrizada por

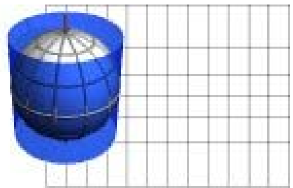
$$P(u,v) = (\sin u \cos v, \sin u \sin v, \cos u)$$

   con $0 < u < \pi$, $-\pi < v < \pi$. Probar que la curva $\alpha(t) = P(2\operatorname{arctg} t, \log t)$ corta a los meridianos de la esfera bajo un ángulo constante θ.

43. Un sistema de coordenadas sobre una superficie se llama *isotermo* si los coeficientes E, F, G de la primera forma fundamental verifican $F = 0$, y $E = G$. Probar que los *mapas* basados en coordenadas isotermas preservan el ángulo entre los vectores. Probar que la proyección estereográfica desde polo norte para la esfera dada en el ejercicio 36 es isoterma.

44. PROYECCION DE LAMBERT:

   Consideremos la proyección de la esfera en el cilindro circunscrito usando perpendiculares al eje del cilindro. Demuestra que es isoareal (es decir, esta transformación preserva el área de las figuras). A continuación, desarrollando el cilindro en el plano, obtenemos una aplicación de la esfera en el plano que se llama proyección de Lambert. Demuestra que también es isoareal.



45. ★★★ PROYECCION DE MERCATOR:

   Determina una función $\rho(v)$, con $\rho(0) = \pi/2$, para que la parametrización de la esfera

$$P(u,v) = (\operatorname{sen}\rho(v)\cos u, \operatorname{sen}\rho(v)\operatorname{sen} u, \cos\rho(v))$$

   de lugar a coordenadas isotermas. Determinar el dominio de la nueva parametrización y hallar explícitamente la matriz de la primera forma fundamental para la parametrización que resulta. ¿En que se transforman los meridianos por P^{-1}?

46. Probar que las siguientes superficies son difeomorfas:

$$M = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 = 1\}$$
$$\overline{M} = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 = z^2 + 1\}$$

47. Sea M una superficie (a) Sea $p \notin M$, demostrar que los puntos singulares de la función $f(x) = |x - p|^2$ ocurren exactamente en los puntos $q \in M$ tales que $\overrightarrow{pq} = q - p$ es ortogonal a M en q. (b) Supuesto M compacta. Pruébese que existen puntos $p, q \in M$ tales que la recta R determinada por $\{p, q\}$ corta a M perpendicularmente en p y q.(*Indicación:* La función $f : M \times M \to \mathbb{R}$ dada por $f(x, y) = |x - y|$ alcanzara (por la compacidad de $M \times M$) un máximo en cierto (p, q)).(c) Demostrar que si todas las rectas afines normales a M pasan por un punto fijo, entonces M es una esfera.

48. Se considera el hiperboloide $M = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 - z^2 = 3\}$.

   a) Demostrar que la aplicación $\widetilde{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por
   $$\widetilde{F}(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{3 + 2z^2}}(x, y, -z)$$
   induce una aplicación diferenciable $F : M \to \mathbb{S}^2$.

   b) Probar que M se obtiene girando la curva $x = \sqrt{3}\cosh v$, $y = 0$, $z = \sqrt{3}\sinh v$ alrededor del eje Z.

   c) Determinar una expresión analítica local $\widehat{\phi}$ de ϕ usando parametrizaciones locales de M y $\mathbb{S}^2$.

   d) Probar que ϕ es difeomorfismo local. ¿Es isometría local? ¿Es difeomorfismo?

   e) Determinar $dF|_p$ en el punto $p = \left(1, 2, \sqrt{2}\right) \in M$.

49. ★★★ Demostrar que la aplicación

$$\widetilde{F} : \begin{cases} \overline{x} = x \Big/ \sqrt{x^2 + y^2} \\ \overline{x} = y \Big/ \sqrt{x^2 + y^2} \\ \overline{z} = z \end{cases}$$

induce por restricción una aplicación diferenciable F entre el toro M obtenido al girar la circunferencia

$$\begin{cases} (x - 2)^2 + z^2 = 1 \\ y = 0 \end{cases}$$

alrededor del eje Z, y el cilindro $\overline{M} : (\overline{x}^2 + \overline{y}^2 = 1)$. Determinar el conjunto de puntos singulares de F:

a) A partir de representaciones locales $\widehat{F}$ de F (es decir, usando parametrizaciones).

b) A partir de $\widetilde{F}$, sin usar parametrizaciones.

50. Se considera una curva de Frenet $\alpha\colon I \to \mathbb{R}^3$ PPA , siendo $I = (a,b)$ un intervalo acotado. Se define la parametrización $P\colon I \times (-\pi,\pi) \to \mathbb{R}^3$ con $P(u,v) = \alpha(u) + r(\cos v\, N_\alpha(u) + \sin v\, B_\alpha(u))$. Siendo $r > 0$.

    a) Interpretar geométricamente el objeto definido por P.

    b) Suponiendo que $M = \operatorname{Im} P$ es superficie, dese la expresión de la primera forma fundamental y calcular el area de M. Aplicar estos resultados al toro.

51. Demostrar que la aplicación

$$\Psi : \Pi \ni (\rho\cos\theta, \rho\sin\theta, 0) \to \left(\frac{\rho}{2}\cos 2\theta, \frac{\rho}{2}\sin 2\theta, \frac{\rho\sqrt{3}}{2}\right) \in \mathbb{R}^3$$

    induce una isometría local entre el plano $\Pi = \{(x,y,z) : z = 0,\ (x,y) \neq (0,0)\}$ y el cono $M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 3x^2 + 3y^2 = z^2, z > 0\}$. Determinar en el punto $p = (1,1,0) \in \Pi$, los planos vectoriales tangentes $T_p\Pi$, $T_{\Psi(p)}M$ y la diferencial $d\Psi|_p : T_p\Pi \to T_{\Psi(p)}M$.

52. ★★ Sea M la superficie imagen de la aplicación

$$P(u,v) = (v\cos u, v\sin u, u),\ u, v \in \mathbb{R}$$

    y $\overline{M}$ la imagen de

$$\overline{P}(u,v) = \left(\sqrt{1+v^2}\cos u, \sqrt{1+v^2}\sin u, \ln\left(v + \sqrt{1+v^2}\right)\right)$$

    Demostrar que $\overline{M}$ es superficie de revolución y $\overline{P}$ es parametrización cuando se restringe convenientemente el dominio de u. Demostrar que la aplicación ϕ que lleva $P(u,v)$ a $\overline{P}(u,v)$ define una isometría local $\phi : M \to \overline{M}$

53. ★★★ Demostrar que si $\phi : M \to \overline{M}$ es una aplicación diferenciable entre superficies son equivalentes las siguientes afirmaciones:

    a) ϕ es isometría local. (i.e. para cada $p \in M$, $\exists M_0 \underset{ab}{\subset} M$, $p \in M_0$, y $\phi : M_0 \to \phi(M_0) \underset{ab}{\subset} \overline{M}$ isometría)

    b) $d\phi|_p : T_pM \to T_{\phi(p)}\overline{M}$ es isometría lineal $\forall p \in M$ (i.e $\left\langle d\phi|_p\,\xi, d\phi|_p\,\eta\right\rangle = \langle \xi, \eta\rangle\ \forall \xi, \eta \in T_pM$).

    c) Existe representación local de ϕ, en torno a cada punto de M, digamos $\widehat{\phi} : \mathbb{U} \ni (u,v) \to (\overline{u}, \overline{v}) = \widehat{\phi}(u,v) \in \overline{\mathbb{U}}$ se verifica

$$\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} = \left(\frac{\partial\left(\widehat{\phi}_1, \widehat{\phi}_2\right)}{\partial(u,v)}\right)^t \left.\begin{pmatrix} \overline{E} & \overline{F} \\ \overline{F} & \overline{G} \end{pmatrix}\right|_{\widehat{\phi}} \left(\frac{\partial\left(\widehat{\phi}_1, \widehat{\phi}_2\right)}{\partial(u,v)}\right) \tag{0.1}$$

54. Sea M una superficie de revolución obtenida al hacer girar una curva regular simple PPA $\alpha(v) = (\rho(v), 0, h(v))$, $a < v < b$ ($\rho(v) > 0$ para todo v). Probar que todos los puntos de un paralelo $u \to P(u, v_0)$ son del mismo tipo. Determinar en función de $\alpha'(v_0)$ y $\alpha''(v_0)$ que paralelos son elipticos, hiperbólicos, parabólicos, planos y umbílicos.

55. Probar que la curvatura de Gauss K de la superficie anterior se escribe:

$$K \circ P(u, v) = \frac{-\rho''(v)}{\rho(v)}$$

con la parametrización $P(u, v) = (\rho(v)\cos u, \rho(v)\sin u, h(v))$.

Indicación: Como $\rho'(v)^2 + h'(v)^2 = 1$, derivando queda $\rho''h' + \rho'h'' = 0$.

Demostrar que las superficies de revolución conexas con curvatura de Gauss identicamente nula son abiertos de conos o cilindros.Aplicar esto al toro que se obtiene al girar la circunferencia $(x-1)^2 + z^2 = 1$, $y = 0$, alrededor del eje Z.

56. Probar que el valor absoluto de la torsión en un punto de una curva asintótica biregular está dada por $|\tau| = \sqrt{-K}$ siendo K la curvatura de Gauss de la superficie en el punto dado.

57. ★★+ Se considera el conjunto $M \subset \mathbb{R}^3$ de ecuación $x + y = \sin xz$. Probar que M es superficie y que el punto $(1, 0, \pi/2) \in M$ Calcular en el punto p, curvaturas, direcciones principales, y direcciones asintóticas. Probar que la curva

$$\alpha(t) = \left(t, -t+1, \frac{\pi}{2t}\right), \ t > 0$$

es línea asintótica y además linea de curvatura.

58. ★★★ Sea p un punto de una superficie M. Estudiar las relaciones lógicas que existen entre las siguientes afirmaciones, dando una demostración, o mostrando un contraejemplo. a) Hay dos direcciones asintóticas ortogonales en T_pM. b) La curvatura media en p de M es nula c) La curvatura de Gauss de M en p es no positiva. d) Por p pasan dos rectas ortogonales contenidas en la superficie M..

59. Probar que la condición necesaria y suficiente para que $\alpha(t) = P(u(t), v(t))$ sea linea de curvatura es que

$$\det \begin{pmatrix} v'^2 & u'v' & u'^2 \\ E & F & G \\ e & f & g \end{pmatrix} = 0$$

donde se entiende que $P = P(u, v)$ es una parametrización de la superficie M, y $E, F, ...g$ están restringidos a $u = u(t)$, $v = v(t)$

60. Demostrar que la curva intersección de un plano con la esfera $\mathbb{S}^2$ tiene en $\mathbb{S}^2$ curvatura geodésica constante. Determinar dicha curvatura en función de la distancia del plano al centro de la esfera. ¿Todas las curvas en $\mathbb{S}^2$ con curvatura geodésica constante pueden obtenerse por este procedimiento? Demostrar que todas las geodésicas de $\mathbb{S}^2$ son arcos de círculos máximos.

61. Sea $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ $u \to \alpha(u)$ una curva biregular PPA y (T, N, B) su triedro de Frenet. Llamamos *recta normal* de α en $\alpha(u)$ a la recta afín que pasa por $\alpha(u)$, y tiene por dirección la del vector $N(u)$. Supóngase que la unión de todas las rectas normales de α forman una superficie M. Se pide:

    a) Dar una parametrización local de M, en torno a cada punto de α. Expresar la curvatura de Gauss K de M en los puntos de α, en función de la curvatura κ y la torsión τ de α.

    b) Demostrar que α es curva plana si y solo si los puntos de α son todos planos. Probar que si α es plana entonces todos los puntos de M son planos.

    c) Estudiar si α es linea de curvatura de M. Estudiar si α es linea asintótica de M

62. ★★ Dada la superficie M con ecuación $z = e^x \ln y$, determinar sus puntos elipticos y sus puntos hiperbólicos y probar que el conjunto de los puntos parabólicos de M forman una curva plana. Calcular su curvatura normal. ¿Es curva asintótica? Determinar en el punto $p = (0, 1, 0) \in M$, el plano tangente, las curvaturas, y direcciones principales y las direcciones asintóticas.

63. ★★★ Sea α una curva de Frenet parametrizada por el arco, dibujada sobre una superficie M. Demostrar que α es geodésica, si y solo si el plano osculador de α es es ortogonal al plano tangente a M en cada punto. Probar que si α es geodésica plana entonces es linea de curvatura.

64. Sea γ una geodésica en una superficie de revolución M y sea ρ la función distancia de un punto de M al eje de rotación, y ψ el ángulo entre γ' y los meridianos de M. Probar que $\rho \sin \psi$ es constante a lo largo de γ. Recíprocamente, si $\rho \sin \psi$ es constante sobre una curva γ en M PPA, y si γ no forma parte de un paralelo, entonces γ es geodésica.

65. Sea M una superficie y $\nu : M \to \mathbb{S}^2$ la aplicación de Gauss. Demostrar que para cada punto p eliptico o hiperbólico la curvatura de Gauss de M en p es:
$$K(p) = \pm \lim_{\mathcal{R} \to \{p\}} \frac{Area\left(\nu\left(\mathcal{R}\right)\right)}{Area\left(\mathcal{R}\right)}$$

66. ★★★

67. ★★★

68. Demostrar que la superficie obtenida al girar la Tractriz del ejercicio 5 alrededor del eje x, tiene curvatura de Gauss constante igual a -1.

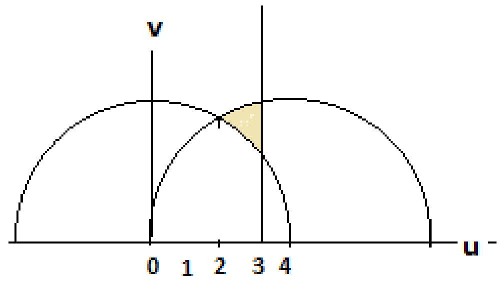
69. Demuéstrese que una superficie reglada es desarrollable si y solo si es localmente isométrica al plano

70. Sea $P : \mathbb{H} = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 : v > 0\} \to \mathbb{R}^3$ una superficie parametrizada y supóngase que la primera forma fundamental es
$$\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/v^2 & 0 \\ 0 & 1/v^2 \end{pmatrix}$$
a) Probar que la curvatura de Gauss de la superficie es igual a -1. b) Demostrar que las imágenes por P de las *rectas verticales* $u = u_0$ son lineas geodésicas. c) Fijado $r > 0$, probar que la curva $\alpha(t) = P(t, r)$ tiene curvatura geodésica constante y calcularla en función de r. d) Sea $\sigma : \begin{cases} u = \cos t \\ v = \sin t \end{cases}$ $0 < t < \pi$, probar que la reparametrización por el arco de $\alpha = P \circ \sigma$ es geodésica.

71. Continuando con el ejercicio 70 y fijado r calcular la curvatura geodésica de $\alpha(t) = P(rt, 1+t)$ con $t > -1$. Parametrizar α por el arco, y determinar su diedro intrínseco de Frenet.

72. Continuando con el ejercicio 70 determinar la curvatura geodésica de $\alpha(t) = P(t, t^2)$ $t > 0$.

73. Continuando con el ejercicio 70 calcular el área del triángulo geodésico sombreado. ¿Cuanto valen los ángulos del triángulo?



74. Sean M_1, M_2 superficies de $\mathbb{R}^3$, y sea $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ tal que

$$\forall t \in I,\ \alpha(t) \in M_1 \cap M_2, \text{ y } T_{\alpha(t)}M_1 = T_{\alpha(t)}M_2$$

Demostrar que M_1 y M_2 inducen sobre la curva α el mismo transporte paralelo.

75. Calcular el ángulo que girará un vector tangente a la esfera $\mathbb{S}^2$ despues de una traslación paralela a lo largo de una curva cerrada α, en los siguientes casos

   a) α es un meridiano.

   b) α es un paralelo.

   c) α se compone de dos meridianos, y una parte del ecuador contenida entre ellos.

   d) α se compone de dos meridianos, y una parte de un paralelo contenido entre ellos.

PROBLEMAS ABIERTOS DE GEOMETRIA DIFERENCIAL

Todas las curvas y superficies se considerarán de clase infinito

1. Un segmento BC de longitud constante l, se desplaza manteniendo sus extremos sobre dos rectas perpendiculares. Sea M un punto fijo del segmento BC. Calcular el lugar geométrico de los puntos del plano que describe M.

2. Representar las siguientes curvas expresadas en polares en $\mathbb{R}^2$ (con $a \in \mathbb{R}^+$)

   a) $\rho(\theta) = 2\cos n\theta + a$

   b) $\rho(\theta) = a \sec \frac{\theta}{3}$

3. Demostrar que la curva

$$x(s) = \int_1^s \cos(t\ln(t) - t)\,dt, y(s) = \int_1^s \sin(t\ln(t) - t)\,dt,\ 0 < s$$

   , es una curva PPA y está contenida en un compacto de $\mathbb{R}^2$. Su curvatura $\kappa = \kappa(s)$ verifica $\lim_{s\to 0}\kappa(s) = -\infty$, $\lim_{s\to\infty}\kappa(s) = +\infty$. Estudiar el *comportamiento* de la curva, cuando $s \to 0$ y cuando $s \to +\infty$.

4. Una curva $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, PPA con curvatura $\kappa(s) = s, \forall s$ se llama Clotoide. Demostrar que $\overrightarrow{\alpha(0)\,\alpha(s)} = -\overrightarrow{\alpha(0)\,\alpha(-s)}$, y que existe el punto $p_+ = \lim_{s\to+\infty}\alpha(s)$ alrededor del cual α da infinitas vueltas. Supuesto que $\alpha(0) = (0,0)$, $\alpha'(0) = (1,0)$, determinar las coordenadas de p_+ con un par de cifras decimales.

5. Sea $\alpha : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ una curva regular que no pasa por el origen $(0,0)$.

   a) Demostrar que existen una funciones diferenciables $\rho,\ \theta : [a,b] \to \mathbb{R}$ tales que $\alpha(t) = (\rho(t)\cos\theta(t), \rho(t)\sin\theta(t))$.

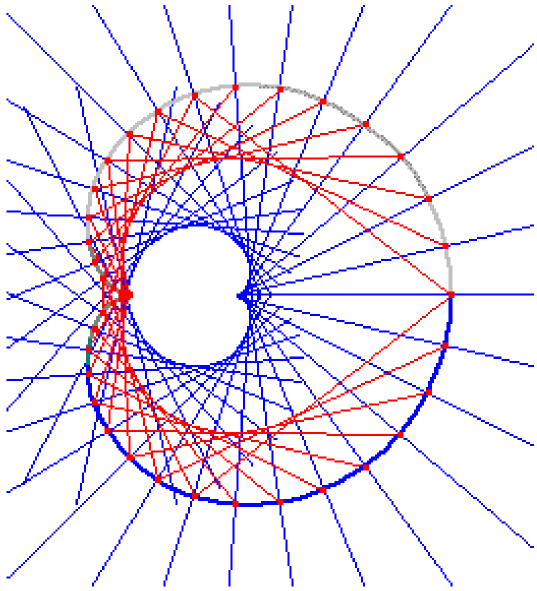
   b) Probar que si $\theta'(t_0) \neq 0$ para cierto $t_0 \in (a,b)$ entonces existe una función diferenciable f definida en torno a $\theta(t_0)$ de manera que $\rho = f(\theta)$ es la ecuación en polares de un trozo de curva α en torno $\alpha(t_0)$.

   c) Determinar en función de $\rho(t)$, y $\theta(t)$ una fórmula para calcular la longitud de la curva.

   d) Usando lo anterior probar que la curva de longitud mas corta que une el origen con un punto (x_0, y_0) es la linea recta.

   Nota: sustituir el origen por $(\varepsilon x_0, \varepsilon y_0)$ para $\varepsilon > 0$ arbitrariamente pequeño.

6. Demostrar que el radio de curvatura de la cardioide $\rho = \rho(\theta) = 2r(1+\cos\theta)$ en un punto cualquiera es igual a $(2/3)\,\rho(\theta)$, es decir 2/3 de la longitud del segmento que une el origen (punto de retroceso) con el punto de la curva. Probar que la evoluta de la cardioide es otra cardioide.



7. Dos curvas regulares $\alpha : I \to \mathbb{R}^2$, $\beta : J \to \mathbb{R}^2$ se dicen congruentes si existe un cambio de parámetro $t = \mathbf{t}(s)$, $\mathbf{t} : J \to I$ y un movimiento $\mathcal{A} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que

$$\mathcal{A}\alpha(\mathbf{t}(s)) = \beta(s), \forall s \in J$$

   a) Demostrar que las espirales logaritmicas con ecuaciones polares $\rho = C_1 e^{a_1\theta}$, $\rho = C_2 e^{a_2\theta}$ son congruentes, si y solo si $a_1 = a_2$.

   b) Probar que si sometemos a una espiral logarítmica $\rho = Ce^{a\theta}$ a una homotecia de razón positiva, centrada en el origen , obtenemos otra espiral logarítmica congruente.

8. Se considera la aplicación $\widetilde{F} : \mathbb{R}^3 - \{0\} \to \mathbb{R}^3$, $p \to p/|p|$, y sea M una superficie contenida en $\mathbb{R}^3 - \{0\}$

   a) Probar que $\widetilde{F}$ es diferenciable, y $\widetilde{F}$ induce por restricción una aplicación diferenciable $F : M \to \mathbb{S}^2$

   b) si $\alpha = \alpha(t)$ es una curva diferenciable en $\mathbb{R}^3 - \{0\}$ entonces $\left(\widetilde{F} \circ \alpha\right)'(t_0) = 0$ si y solo si $\alpha'(t_0)$ es *radial* (es decir, existe λ con $\alpha'(t_0) = \lambda\alpha(t_0)$.

   c) Usando este hecho, demostrar que si $p \in M$, $dF|_p : T_pM \to T_{F(p)}\mathbb{S}^2$ es singular si y solo si $\overrightarrow{op} \in T_pM$ (es decir, T_pM contiene vectores radiales).