Prácticas de **GEOMETRIA DIFERENCIAL, Curso 2018-19.**

1. Hoja 1

a) Sea $P \subset \mathbb{R}^3$ el paraboloide de ecuación $x^2 + y^2 - 2z = 0$, y M el conjunto de los isomorfismos lineales de $\mathbb{R}^3$ con determinante positivo, que dejan invariante P. Demostrar que M se identifica con un conjunto de matrices del tipo

$$A = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & 0 \\ x_2 & y_2 & 0 \\ 0 & 0 & \rho^2 \end{pmatrix}$$

cuyos elementos cumplen ciertas condiciones adicionales, y deducir que $M \subset \mathbb{R}^5$ es una superficie diferenciable. Tomar una parametrización y calcular la primera forma fundamental.

b) Identificamos el espacio de las matrices cuadradas reales de orden 2 con $\mathbb{R}^4$ mediante

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} \to (x_1, x_2, x_3, x_4)$$

Demostrar que el conjunto $SL(2) = \{x \in \mathbb{R}^4 : \det x = 1\}$ es una hipersuperficie de $\mathbb{R}^4$. Tomar una parametrización en torno a la matriz identidad y calcular la primera forma fundamental.

c) Estudiar si $M = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C} : z_1^2 + z_2^2 = 1\}$ constituye una subvariedad de $\mathbb{R}^4$ (se identifica $\mathbb{C}$ con $\mathbb{R}^2$ de la forma habitual). Dar una parametrización (local) que contenga al punto $(1, 0) \in M \subset \mathbb{C} \times \mathbb{C}$ y determinar en ella la primera forma fundamental.

d) Sea $\alpha : [a, b] \to \mathbb{M} \subset \mathbb{R}^n$ una curva regular en la VRC $(\mathbb{M}, g)$. Probar que podemos reparametrizar α con $t = \mathbf{t}(s)$, $\mathbf{t} : [a, b] \to [a, b]$ de forma que $\beta = \beta(s) = \alpha(\mathbf{t}(s))$ verifica $|\beta'|_g = cte$

e) (★★)**Semiplano de Poincaré.** Sea $\mathbb{H}^2 = \{(x, y) : y > 0\}$ con la métrica riemanniana

$$g = \frac{1}{y^2}\left(dx^2 + dy^2\right)$$

1) (★★) Calcular la longitud del segmento rectilineo que une los puntos $p = \left(\sqrt{3}, 1\right)$ y $q = (0, 2)$. Parametrizar el segmento por la longitud de arco. Probar que el arco de la curva $\gamma : x = 2\cos t$, $y = 2\sin t$, $0 < t < \pi$, que une estos dos puntos tiene longitud menor.

2) (★) *Fundamentar* el hecho de que la curva γ, es la más corta en $\mathbb{H}^2$ que une los puntos p y q.
Se sugiere utilizar las coordenadas polares $x = \rho \cos$, $y = \rho \sin \theta$ y *conformarnos* con comparar la longitud de γ con la de las curvas α que admiten ecuación en polares de la forma $\rho = \rho(\theta)$

2. Hoja 2

   a) (OPEN) Sea $(\mathbb{M}, g)$ una VRC $p, q \in \mathbb{M}$, y

$$\Omega(p,q) = \left\{ \alpha : [a,b] \to \mathbb{M} \Big/ \begin{array}{c} \alpha \text{ es regular} \\ \alpha(a) = p, \ \alpha(b) = q \end{array} \right\}$$

   Sean $\alpha, \gamma \in \Omega(p,q)$. Demostrar que:

   1) Si γ minimiza la energía, entonces necesariamente $|\gamma'| = cte$.
   2) Si γ minimiza la longitud y $|\gamma'| = cte$, entonces se verifica la equivalencia

$$E(\alpha) = E(\gamma) \Leftrightarrow L(\alpha) = L(\gamma) \text{ y } |\alpha'| = cte.$$

   b) **Péndulo doble en un plano.** Dos masas puntuales m_1 y m_2 están unidas por una barra rígida de masa despreciable de longitud l_2 y se mueven en un plano de forma que m_1 mantiene una distancia constante l_1 a un punto fijo O del plano. Determinar el espacio de posiciones y de estados, dar unas coordenadas locales generalizadas y determinar en estas coordenadas la expresión de la energía cinética.

   c) **Pesas •−• con extremos en la esfera.** Dos masas puntuales m_1 y m_2 están unidas por una barra rígida de masa despreciable de longitud 1 y se mueven en una esfera de radio 1. Probar que se trata de un sistema holónomo, dar unas coordenadas locales generalizadas y determinar en estas coordenadas la expresión de la energía cinética.

   d) (OPEN) Si I denota la matriz identidad y X^t es la transpuesta de la matriz $X \in \mathbb{R}^{n\times n}$, demostrar que el conjunto $O(n) = \{X \in \mathbb{R}^{n\times n} : X^tX = I\}$ es una subvariedad de $\mathbb{R}^{n\times n}$, con dimensión $n(n-1)/2$. Encontrar una parametrización en torno a $I \in O(n)$. ¿Es $O(n)$ conexo?.

   Indicación: Identificando $S(n) = \{Y \in \mathbb{R}^{n\times n} : Y^t = Y\}$ con $\mathbb{R}^k$, $k = n(n+1)/2$ comprobar *geométricamente* que la función diferenciable $F : \mathbb{R}^{n\times n} \ni X \to X^tX - I \in \mathbb{R}^k$ tiene rango máximo en los puntos $X \in O(n)$, es decir que $DF|_X : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}^k$ es suprayectiva.

e) ★★★ **Disco de Poincaré**

Sea $\mathbb{B} = \{(x,y) : x^2 + y^2 < 1\} \subset \mathbb{R}^2$ con la métrica riemanniana

$$g = \frac{4}{\left(1-(x^2+y^2)\right)^2}\left(dx^2 + dy^2\right)$$

1) Demostrar que los giros

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \cos\eta & -\sin\eta \\ \sin\eta & \cos\eta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

inducen isometrías en $(\mathbb{B}, g)$.

2) Aplicando las ecuaciones de Euler-Lagrange a la *energía cinética*, $K = \frac{2}{(1-(x^2+y^2))^2}\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right)$, determinar las ecuaciones diferenciales de las geodésicas.[1]

3) Parametrizar por el arco la curva $\alpha(t) = (0,t)$, $-1 < t < 1$ y probar que así reparametrizada es geodésica.

4) Demostrar que la curva γ definida por

$$\gamma : \begin{cases} x = \sqrt{2} - \sin t \\ y = \cos t \end{cases} \quad \frac{\pi}{4} < t < \frac{3\pi}{4}$$

está contenida en $\mathbb{B}$ y reparametrizada por el arco es una geodésica.

5) Más general, fijado θ con $0 < \theta < \pi/2$, demostrar que la curva $\gamma_\theta(t)$ definida por

$$\gamma_\theta : \begin{cases} x = \frac{1}{\cos\theta} - \tan\theta \sin t \\ y = \tan\theta \cos t \end{cases} \quad \theta < t < \pi - \theta$$

está contenida en $\mathbb{B}$ y reparametrizada por el arco es geodésica.

6) Determinar razonadamente todas las geodésicas de $(\mathbb{B}, g)$

[1] ...que son las curvas extremales de la acción energía. La primera ecuación debería salir $\left(1-x^2-y^2\right)x'' + 2x\left(x'^2 - y'^2\right) + 4yx'y' = 0$

3. Hoja 3

a) (OPEN) Hallar las ecuaciones de Euler-Lagrange y extremales de la acción
$$\mathcal{L}(\alpha) = \int_0^{\pi} \left(2xy - 2x^2 + \dot{x}^2 - \dot{y}^2\right) dt$$
con las condiciones $\alpha(0) = p = (0,0)$, $\alpha(\pi) = q = (1,-1)$.

b) (OPEN) Hallar la trayectoria $y = y(x)$ de descenso más rápido de un punto material (que se mueve por un plano vertical) cuando está sometido a la acción de la fuerza de la gravedad, desde el punto $A = (0,0)$, al punto $B = (a, -y_1)$ $(a > 0,\ y_1 > 0)$.

Indicación: Determinar primero el Lagrangiano $T(y, \dot{y})$ que proporcione el tiempo de descenso de la bolita por la gráfica $y = y(x)$ con $y(0) = 0$, $y(a) = (a, -y_1)$

c) Demostrar que en el espacio $n-$dimensional de Minkowski
$$\mathbb{R}_1^n = \left(\mathbb{R}^n, g = -dx_0^2 + \cdots + dx_n^2\right)$$
las geodésicas son las rectas afínmente parametrizadas. En el espacio de Minkowski $\mathbb{R}_1^3$ se consideran dos sucesos $p, q \in \mathbb{R}_1^2$ tales que el vector $\overrightarrow{pq}$ es temporal futuro. Demostrar que existen curvas temporales $\alpha : [0,1] \to \mathbb{R}_1^3$ $(g(\alpha', \alpha') < 0)$ que unen p y q con longitud $(=\int_0^1 \sqrt{-g(\alpha', \alpha')}dt)$ arbitrariamente pequeña, y el segmento rectilineo que une los puntos p y q tiene longitud máxima.

d) En el espacio tridimensional de Minkowski,
$$\mathbb{R}_1^3 = \left(\mathbb{R}^3, G = dx^2 + dy^2 - dz^2\right)$$
se considera la esfera la esfera $\mathbb{S}^2$ de ecuación $x^2+y^2+z^2 = 1$. Estudiar la *métrica* g inducida por G en $\mathbb{S}^2$ indicando en qué puntos es degenerada, y los abiertos de $\mathbb{S}^2$ en donde g es riemanniana y donde g es Lorentziana. Encontrar las ecuaciones de las geodésicas en cada uno de estos abiertos.

e) ★★★ **Disco de Klein-Beltrami.**

Sean

$$M = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = -1 + z^2,\ z > 0\right\}$$
$$\mathbb{B} = \left\{(u, v) : u^2 + v^2 < 1\right\}$$
$$G = dx^2 + dy^2 - dz^2 \quad \text{métrica (Lorentziana) en } \mathbb{R}^3$$

1) Probar que M es una variedad diferenciable de $\mathbb{R}^3$.
2) Demostrar que

$$\varphi : M \ni (x, y, z) \to (u, v) = \left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}\right) \in \mathbb{B}$$

define una biyección. Calcular su inversa $P = \varphi^{-1} : \mathbb{B} \to M \subset \mathbb{R}^3$, y probar que $P = P(u, v)$ es una parametrización de M.
3) Demostrar que G induce (por pullback) una métrica riemanniana $g = P^*G$ sobre $\mathbb{B}$, calcular su expresión(1) en las coordenadas (u, v).
4) Calcular los símbolos de Christoffel y determinar las ecuaciones diferenciales de las geodésicas en $(\mathbb{B}, g)$.
5) Comprobar que la curva $u = 0$, $v = t$, $-1 < t < 1$ es una pregeodésica(2) de $(\mathbb{B}, g)$.
6) Admitiendo que para cada $u_0 \in (0, 1)$ el segmento (contenido en $\mathbb{B}$) de la curva $u = u_0$, $v = t$ es una pregeodésica, calcular todas las pregeodésicas de $(\mathbb{B}, g)$.
7) Probar que las pregeodésicas de M con la métrica riemanniana inducida por G son las intersecciones de M con planos que pasan por el origen.

4. Hoja 4

a) Dar estructura de variedad diferenciable al espacio proyectivo

$$\mathbb{R}P^2 = \left\{[x,y,z] : (x,y,z) \in \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}\right\}$$

mediante las cartas naturales

$$\begin{aligned} \varphi_z \quad &: \quad \mathcal{U} = \{[x,y,z] : z \neq 0\} \ni [x,y,z] \to \left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}\right) \in \mathbb{R}^2 \\ &\quad (\text{análogo } \varphi_x,\ \varphi_y) \end{aligned}$$

En todo caso demostrar que la topología de $\mathbb{R}P^2$ como variedad coincide con la topología final para la proyección canónica $\mathbb{R}^3 - \{o\} \ni (x,y,z) \xrightarrow{\pi} \in [x,y,z] \in \mathbb{R}P^2$.

b) Identificando el cuerpo $\mathbb{C}$ de los números complejos con $\mathbb{R}^2$ mediante la biyección canónica:

$$\mathbb{C} \ni x + iy \to (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

Dar estructura de variedad diferenciable bidimensional a la recta proyectiva $\mathbb{C}P^1$ mediante las cartas naturales.

$$\begin{aligned} \varphi \quad &: \quad \mathcal{U} = \{[z_0,z_1] : z_0 \neq 0\} \ni [z_0,z_1] \to \frac{z_1}{z_0} \in \mathbb{R}^2 \\ \overline{\varphi} \quad &: \quad \overline{\mathcal{U}} = \{[z_0,z_1] : z_1 \neq 0\} \ni [z_0,z_1] \to \frac{z_0}{z_1} \in \mathbb{R}^2 \end{aligned}$$

determinando explícitamente el cambio de coordenadas.

c) Dar estructura de variedad diferenciable de dimensión 2, al conjunto $M = \mathbb{G}_2(\mathbb{R}^3)$ de los planos vectoriales de $\mathbb{R}^3$ dotado con la topología final para la aplicación

$$\mathbb{R}^3 - \{(0,0,0)\} \ni (a,b,c) \to \{(x,y,z) : ax + by + cz = 0\} \in M$$

d) ★★ Sean

$$\begin{aligned} M &= \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = -1 + z^2,\ z > 0\right\} \\ \mathbb{B} &= \left\{(u,v) : u^2 + v^2 < 1\right\} \end{aligned}$$

se consideran las aplicaciones

$$\begin{aligned} \varphi &: M \ni (x,y,z) \to (u,v) = \left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}\right) \in \mathbb{R}^2 \\ \overline{\varphi} &: M \ni (x,y,z) \to (\overline{u},\overline{v}) = \left(\frac{x}{z+1}, \frac{y}{z+1}\right) \in \mathbb{R}^2 \end{aligned}$$

1) Probar que $\varphi(M) = \overline{\varphi}(M) = \mathbb{B}$. Interpretar geométricamente las aplicaciones φ y $\overline{\varphi}$. (Ver la figura de atrás)
2) Demostrar (M, φ) y $(M, \overline{\varphi})$ son cartas compatibles de M, determinando explícitamente las ecuaciones del cambio de coordenadas $\phi = \overline{\varphi} \circ \varphi^{-1}$.
3) Demostrar[(1)] que ϕ da lugar a una isometría $\phi : (\mathbb{B}, g) \to (\mathbb{B}, \overline{g})$ donde[(**)]

$$g = \frac{1}{(1-u^2-v^2)^2}\left(\left(1-v^2\right)du^2 + 2uvdudv + \left(1-u^2\right)dv^2\right)$$
$$\overline{g} = \frac{4}{(1-(\overline{u}^2+\overline{v}^2))^2}\left(d\overline{u}^2 + d\overline{v}^2\right)$$

e) ★★★ Identificando $z = x + iy \in \mathbb{C}$ con $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ demostrar que la aplicación

$$z \to \frac{z-i}{1-iz}$$

induce una isometría entre $\mathbb{H}^2 = \{(x, y) : y > 0\}$ con la métrica riemanniana

$$g = \frac{1}{y^2}\left(dx^2 + dy^2\right)$$

y $\mathbb{B} = \{(u, v) : u^2 + v^2 < 1\}$ con la métrica riemanniana

$$h = \frac{4}{(1-(u^2+v^2))^2}\left(du^2 + dv^2\right)$$

Siguiendo la idea del enunciado $4d$, probar que el **disco de Poincaré** $(\mathbb{B}, h)$ es isométrico al **disco de Klein-Beltrami.**

5. Hoja 5

a) Sea M la variedad diferenciable obtenida a partir del atlas

$$\mathcal{A} = \{(\mathcal{U}_\alpha, \varphi_\alpha) : \alpha \in A\}$$

modelado en $\mathbb{R}^m$.

1) Demostrar que un subconjunto $\mathcal{U}$ de M es abierto de M, si y solo si $\varphi_\alpha (\mathcal{U}_\alpha \cap \mathcal{U})$ es abierto de $\mathbb{R}^m$ para todo $\alpha \in A$.
2) Demostrar que si $(\mathcal{U}, \varphi)$ y $(\mathcal{V}, \psi)$ son dos cartas compatibles con (todas las cartas de) $\mathcal{A}$ entonces necesariamente son compatibles entre si.

b) En $\mathbb{R}^2$ con coordenadas (u, v) se considera la métrica

$$G^{(u,v)} = \frac{1}{(u^2 + v^2 + 1)^2} \left\{ \left(v^2 + 1\right) du^2 - 2uvdudv + \left(u^2 + 1\right) du^2 \right\}$$

y en el plano proyectivo

$$\mathbb{R}P^2 = \left\{ [x, y, z] : (x, y, z) \in \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\} \right\}$$

se consideran la carta las cartas naturales

$$\varphi_z \;:\; \mathcal{U} = \{[x, y, z] : z \neq 0\} \ni [x, y, z] \to \left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}\right) \in \mathbb{R}^2$$

(análogo φ_x, φ_y)

1) Demostrar que en $\mathbb{R}P^2$ existe una única estructura riemanniana g tal que

$$g^{\varphi_z} = G^{(u_z, v_z)},\; g^{\varphi_x} = G^{(u_x, v_x)},\; g^{\varphi_y} = G^{(u_y, v_y)}$$

2) Demostrar que las rectas proyectivas son pregeodésicas de $(\mathbb{R}P^2, g)$

c) ★★ Dar estructura de variedad diferenciable de dimensión 2, al conjunto $M = \mathbb{G}_2(\mathbb{R}^3)$ de los planos vectoriales de $\mathbb{R}^3$ dotado con la topología final para la aplicación

$$\mathbb{R}^3 - \{(0, 0, 0)\} \ni (a, b, c) \to \{(x, y, z) : ax + by + cz = 0\} \in M$$

d) ★★★Dar estructura de variedad diferenciable al conjunto $M = \mathbb{G}_2(\mathbb{R}^4)$

de los planos vectoriales de $\mathbb{R}^4$ construyendo un atlas con cartas del tipo

$$M \supset \mathcal{U}_{12} \ni \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ u_1 & u_2 \\ u_3 & u_4 \end{bmatrix} \overset{\varphi_{12}}{\to} \begin{pmatrix} u_1 & u_2 \\ u_3 & u_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2} = \mathbb{R}^4$$

donde

$$[v,w] = \begin{bmatrix} v_1 & w_1 \\ v_2 & w_2 \\ v_3 & w_3 \\ v_4 & w_4 \end{bmatrix}$$

representa el plano generado por los vectores columna (linealmente independientes) v y w de $\mathbb{R}^4$

6. Hoja 6

a) Si M es una variedad diferenciable de dimensión n dar estructura *natural* de variedad diferenciable de dimensión $2n$ al conjunto

$$TM = \bigcup_{x \in M} T_p M$$

Indicación a partir de una carta $(\mathcal{U}, \varphi = (x^1, \ldots, x^n))$ de M construir una carta $T\mathcal{U}, T\varphi = \left(x^1, \ldots, x^n, \dot{x}^1, \ldots, \dot{x}^n\right)$ con imagen $T(\varphi(\mathcal{U}))$.

b) Probar que el mapa antipodal $A : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$, $A(p) = -p$ es una isometría en $\mathbb{S}^n$. Usar esto para dar una métrica riemanniana en $\mathbb{R}P^n$ de forma que la proyección canónica $\mathbb{S}^n \ni (x^0, \ldots, x^n) \to [x^0, \ldots, x^n] \in \mathbb{R}P^n$ sea isometría local.

c) Probar $SO(3)$ actua en $\mathbb{S}^2$ por isometrías. Demostrar que dados dos puntos $p, q \in \mathbb{S}^2$ existe una isometría $\phi : \mathbb{S}^2 \to \mathbb{S}^2$ con $\phi(p) = q$.

d) ★★.Se considera $\mathbb{S}^1 = \{(x, y) : x^2 + (y-1)^2 = 1\}$ con su estructura diferenciable como subvariedad de $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}P^1$ la recta proyectiva real con su estructura diferenciable canónica. Demostrar que la aplicación:

$$\mathbb{S}^1 \ni (x, y) \to \begin{cases} [x, y] \in \mathbb{R}P^1 \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ [1, 0] \in \mathbb{R}P^1 \text{ si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

es un difeomorfismo entre $\mathbb{S}^1$ y $\mathbb{R}P^1$.

e) ★★★ Se considera el conjunto formado por los puntos de $\mathbb{R}^2$ y un punto más, ℓ que no pertenece a $\mathbb{R}^2$ es decir:

$$M = \mathbb{R}^2 \cup \{\ell\}$$

se consideran tambien los subconjuntos $\mathcal{U} = M - \{\ell\}$, y $\mathcal{V} = (M - \{0\}) \cup \{\ell\}$,

1) Demostrar que la aplicación $Q : \mathbb{R}^2 \to \mathcal{V}$ definida por

$$Q(y_1, y_2) = \begin{cases} \left(\dfrac{y_1}{y_1^2 + y_2^2}, \dfrac{-y_2}{y_1^2 + y_2^2}\right) \text{ si } (y_1, y_2) \neq (0, 0) \\ \ell \text{ si } (y_1, y_2) = (0, 0) \end{cases}$$

es una biyección.

2) Probar que $\{(\mathcal{U}, \varphi), (\mathcal{V}, \psi)\}$ es un atlas que da estructura de variedad diferenciable a M, siendo $^{(*)}$

$$\begin{aligned} \varphi &= id : \mathcal{U} \ni (x_1, x_2) \to (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \\ \psi &= Q^{-1} : \mathcal{V} \to \mathbb{R}^2 \end{aligned}$$

3) Demostrar que existe una única métrica riemanniana g en M tal que su expresión local en las coordenadas $\varphi = (x_1, x_2)$ es

$$g^{\varphi} = \frac{4}{(x_1^2 + x_2^2 + 1)} \left(dx_1^2 + dx_2^2\right)$$

calcular su expresión local g^{ψ} en las coordenadas $\psi = (y_1, y_2)$.

4) Sea $\mathbb{S}^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ la esfera unitaria con su métrica riemanniana canónica $g_{\mathbb{S}^2}$. Demostrar que es una isometría la aplicación $F : (\mathbb{S}^2, g_{\mathbb{S}^2}) \to (M, g)$ definida por:

$$\mathbb{S}^2 \ni (x, y, z) \xrightarrow{F} \begin{cases} \left(\frac{x}{1-z}, \frac{y}{1-z}\right) & \text{si } z \neq 1 \\ \ell \text{ si } z = 1 \end{cases}$$

5) Probar que M es difeomorfa a la recta proyectiva compleja $\mathbb{C}P^1$ con la estructura diferenciable dada en el ejercicio **4b**

7. Hoja 7

a) (OPEN) Demostrar que el grupo de isometrías de la esfera $\mathbb{S}^n$ es (isomorfo a) $O\,(n)$.

Nota: *Puede usarse el hecho de que dos isometrías definidas sobre una variedad riemanniana conexa coinciden, si coinciden en un punto y coinciden sus diferenciales en ese punto.*

b) (OPEN) Demostrar que el grupo de isometrías del plano hiperbólico es (isomorfo a) $O\,(1,2)$.

Indicación: *Úsese el modelo del disco de Klein-Beltrami obtenido a partir de la hoja del hiperboloide riemanniano del ejercicio* **3.e**

c) (OPEN) Se considera el semiplano de Poincaré,

$$\mathbb{H}^2 = \{(x,y) \simeq x + yi = z \in \mathbb{C} : y > 0\}$$

con la métrica

$$g = \frac{1}{y^2}\left(dx^2 + dy^2\right)$$

1) Probar que en las transformaciones

$$z \longrightarrow -\frac{1}{z},\ z \longrightarrow z + v,\ \ (v \in \mathbb{R})$$

definen isometrías en $\mathbb{H}^2$.

2) (++) Más general:
Demostrar las transformaciones (llamadas de Möbius)

$$z \longrightarrow \frac{az+b}{cz+d} \text{ con } a,b,c,d \in \mathbb{R},\ \left|\begin{array}{cc} a & b \\ c & d \end{array}\right| = 1$$

definen isometrías en $\mathbb{H}^2$.

3) Probar que el grupo de isometrías de $\mathbb{H}^2$ es (isomorfo a) $SL\,(2,\mathbb{R})$

d) Demostrar que los campos en $\mathbb{R}^3$:

$$X = zx\frac{\partial}{\partial x} + zy\frac{\partial}{\partial y} + (z^2-1)\frac{\partial}{\partial z},\ Y = -y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y}$$

son tangentes a la superficie $M = \{(x,y,z) : x^2+y^2-z^2 = -1,\ z > 0\}$.

1) Probar que la aplicación:

$$\left\{\begin{array}{l} u = x/z \\ v = y/z \end{array}\right.$$

induce una carta global $\varphi = (u,v)$ de M determinar $\varphi(M)$.

2) Determinar la expresión analítica V y W de los campos restricción de X e Y a M, en la carta $\psi = (\rho, \theta)$, obtenida a partir de $\varphi = (u, v)$ mediante el cambio de coordenadas:

$$\begin{cases} u = \rho \cos\theta \\ v = \rho \sin\theta \end{cases}$$

3) calcular el corchete $[X, Y]$, comprobar que es tangente a M y demostrar que su restricción coincide con el corchete $[V, W]$.

e) ★★Se consideran los campos X, Y definidos en las coordenadas canónicas (x, y, z) de $\mathbb{R}^3$ por:

$$X = -zx\frac{\partial}{\partial x} - zy\frac{\partial}{\partial y} + (1 - z^2)\frac{\partial}{\partial z},$$
$$Y = (-y + yz)\frac{\partial}{\partial x} + (x - xz)\frac{\partial}{\partial y}$$

1) Probar que son tangentes a la esfera $\mathbb{S}^2$ de ecuación $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.
2) Determinar la expresión analítica de las respectivas restricciones V y W de X e Y a $\mathbb{S}^2$ en la carta $\varphi = (u, v) : \mathbb{S}^2 \setminus \{(0, 0, 1)\} \to \mathbb{R}^2$ dada por la proyección estereográfica de polo norte con ecuaciones

$$\varphi : \begin{cases} u = \frac{x}{1-z} \\ v = \frac{y}{1-z} \end{cases}$$

3) Calcular el corchete $[X, Y]$, comprobar que es tangente a $\mathbb{S}^2$ y demostrar que su restricción a $\mathbb{S}^2$ coincide con el corchete $[V, W]$.

f) ★★★.Se supone que M es una variedad diferenciable de dimensión m sumergida en $\mathbb{R}^n$, con $0 < m < n$. $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es una función diferenciable, y $f = F|_M : M \to \mathbb{R}$ es la restricción de F a M, X e Y son un campos de vectores diferenciables de $\mathbb{R}^n$, que son tangentes a M, y $V = X|_M$, $W = Y|_M$ son los campos en M restricción de X e Y a M.

Decir si son verdaderas o falsas las afirmaciones siguientes y justificar razonadamente las respuestas[2].

AFIRMACIONES	**Verd.**	**Falsa**
$X(F)\|_M = V(f)$		
Si $p \in M$, y $df(p) = 0$, entonces $dF(p) = 0$		
Si $p \in M$, y $X(p) = 0$, entonces $[X, Y](p) = 0$		
$[X, Y]\|_M = [V, W]$		

[2] Si es verdadera, hay que demostrarla y si es falsa hay que poner un contraejemplo.

8. Hoja 8

a) (OPEN) **Gradiente de una función.** Sea (M, g) una variedad riemanniana, y $f : M \to \mathbb{R}$ una función diferenciable.

1) Demostrar que hay un único campo $\operatorname{grad} f \in \mathfrak{X}(M)$ tal que para todo campo $X \in \mathfrak{X}(M)$ se verifica

$$g(\operatorname{grad} f, X) = X(f)$$

se denomina a $\operatorname{grad} f$, gradiente de la función f.

2) Probar que en las coordenadas de una carta $(\mathcal{U}, \varphi = (x^1, \ldots, x^n))$ el campo $\operatorname{grad} f$ se escribe:

$$\operatorname{grad}(f) = g_\varphi^{ij} \frac{\partial f}{\partial x^j} \frac{\partial}{\partial x^i}$$

donde $\left(g_\varphi^{hk}\right)$ es la matriz inversa de $\left(g_{ij}^\varphi\right)$. Calcular en el plano de Poincaré el gradiente de la función $f(x, y) = y - x^2$.

b) (OPEN) **Producto de variedades Riemannianas.** Dar estructura *natural* de variedad riemanniana al producto cartesiano de variedades Riemannianas. Probar que con esta construcción el producto de geodésicas es una geodésica del producto. Dar un atlas para el producto riemanniano $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$ de las dos *esferas* unitarias con su estructura Riemanniana canónica. Determínense sus geodésicas.

c) En $\mathbb{R}^2$ se considera la conexión lineal que en coordenadas canónicas $(x, y) = (x^1, x^2)$ tiene por símbolos de Christoffel $\Gamma_{12}^1 = \Gamma_{21}^1 = 1$ y todos los demás nulos. Se pide:

1) Determinar la ecuación de una geodésica genérica γ dada por sus condiciones iniciales $\gamma(0) = (x_0, y_0)$ y $\gamma'(0) = (\dot{x}_0, \dot{y}_0)$.
2) Determinar las ecuaciones del transporte paralelo de $(0,0)$ a $(0,2)$ a lo largo de la curva de ecuación $(x-1)^2 + y^2 = 1$ $y > 0$.

d) ★★ En $M = \{(x, y) : y > 0\}$ se considera la conexión lineal ∇ que en coordenadas canónicas $(x, y) = (x^1, x^2)$ tiene por símbolos de Christoffel

$$\Gamma_{12}^1 = \Gamma_{21}^1 = \Gamma_{22}^2 = -\Gamma_{11}^2 = -\frac{1}{y}$$

y todos los demás nulos.

Se pide:

1) Determinar todas las funciones $A = A(t)$, $B = B(t)$ que hacen paralelo al campo

$$V(t) = A(t) \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)_{\alpha(t)} + B(t) \left(\frac{\partial}{\partial y}\right)_{\alpha(t)}$$

a lo largo de la curva $\alpha(t) = (t, 1)$.

2) Determinar la aplicación lineal $T_{(0,1)}M \to T_{(1,1)}\ M$ inducida por el transporte paralelo de vectores a lo largo de α, desde $\alpha(0)$ a $\alpha(1)$.

e) ★★★ Sea $\nabla : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \ni (X,Y) \to \nabla_X Y \in \mathfrak{X}(M)$ una conexión lineal simétrica$^{(1)}$ sobre la variedad diferenciable M, y $F : M \to \mathbb{R}$ una función diferenciable. Dados $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, se define

$$H_F(X,Y) = X(Y(F)) - (\nabla_X Y)(F)$$

se pide:

1) Probar que $H_F : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathcal{F}(M)$ es una aplicación $\mathcal{F}(M)$-bilineal$^{(2)}$ y simétrica.
2) Probar que $H_F(X,Y)|_p$ sólo depende de los valores $X(p)\ Y(p)$ de los campos X e Y en el punto $p \in M$, y define una forma bilineal simétrica $H_F(p) : T_pM \times T_pM \to \mathbb{R}$
3) Determinar la expresión $H_F = H^{\varphi}_{ij} dx^i dx^j$ en las coordenadas $\varphi = (x^1, \ldots, x^n)$ de una carta, en función de F y los símbolos de Christoffel.
4) Demostrar que si $dF(p) = 0$, entonces $H_F(p)$ es independiente de la conexión ∇ tomada inicialmente.
5) Probar que si $dF(p) = 0$ y $H_F(p)$ es definida positiva, entonces p es un mínimo local para F.

9. Hoja 9

a) En el semiplano de Poincaré, $\mathbb{H}^2 = \{(x, y) : y > 0\}$ con la métrica riemanniana

$$g = \frac{1}{y^2}\left(dx^2 + dy^2\right)$$

1) Determinar las funciones $A = A(t)$, $B = B(t)$ que hacen paralelo al campo

$$V(t) = A(t)\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)_{\alpha(t)} + B(t)\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)_{\alpha(t)}$$

a lo largo de:

a' La curva $\alpha(t) = (t, 1)$.

b' La curva $\alpha(t) = (2\cos t, 2\sin t)$, $0 < t < \pi$

2) Calcular el angulo que giran los vectores [3] al dar una vuelta alrededor de la curva cerrada diferenciable a trozos que une en el primer trozo el punto $\left(-\sqrt{3}, 1\right)$ con $\left(\sqrt{3}, 1\right)$ mediante la curva del apartado i. , y en el segundo trozo el punto $\left(\sqrt{3}, 1\right)$ con el $\left(-\sqrt{3}, 1\right)$ mediante la curva del apartado ii

b) Sean M_1, M_2 variedades euclideas de $\mathbb{R}^n$, y sea $\alpha : I \to \mathbb{R}^n$ tal que

$$\forall t \in I,\ \alpha(t) \in M_1 \cap M_2, \text{ y } T_{\alpha(t)}M_1 = T_{\alpha(t)}M_2$$

Demostrar que M_1 y M_2 inducen sobre la curva α el mismo transporte paralelo.

c) Se considera el plano

$$\Pi = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 0,\ (x, y) \neq (0, 0)\right\}$$

y el cono

$$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 3x^2 + 3y^2 = z^2, z > 0\}$$

con sus correspondiente métricas riemannianas heredadas de la canónicas de $\mathbb{R}^3$

1) Demostrar que

$$\Psi : \Pi \ni (\rho\cos\theta, \rho\sin\theta, 0) \to \left(\frac{\rho}{2}\cos 2\theta, \frac{\rho}{2}\sin 2\theta, \frac{\rho\sqrt{3}}{2}\right) \in \mathbb{R}^3$$

da lugar a una aplicación bien definida entre el plano Π y el cono M. Probar que $\Psi : \Pi \to M$ es una una isometría local. ¿Es isometría global?

[3] **Sugerencia:** Calcular el coseno del angulo que forma el vector $\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)_{\left(-\sqrt{3},1\right)}$ con su transportado paralelo hasta el mismo punto $\left(-\sqrt{3}, 1\right)$ a lo largo de la curva cerrada que se indica.

2) Se considera ahora la curva α con ecuación

$$\alpha(t) = (\frac{1}{\sqrt{3}}\cos t, \frac{1}{\sqrt{3}}\sin t, 1) \text{ para } 0 \leq t \leq 2\pi$$

probar que está dibujada en M, y determinar todos los campos paralelos (en M) a lo largo de α.

3) Calcular el angulo que giran los vectores que se transportan paralelamente dando una vuelta a lo largo de la circunferencia α, es decir, determinar el ángulo del giro : $||_{0,2\pi}^{\alpha}$: $T_pM \to T_pM$ siendo $p = \alpha(0) = \alpha(2\pi)$.

d) ★★ En $\mathbb{R}^2$ se considera la métrica

$$g = \left(1 + x^2\right) dx^2 + 2xydxdy + \left(1 + y^2\right) dy^2$$

1) Determinar la expresión de la métrica en coordenadas polares$^{(*)}$

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \end{cases}$$

2) Determinar el ángulo que giran los vectores al dar una vuelta alrededor de la circunferencia de radio $r > 0$, centrada en el origen

e) ★★★ Sea (M, g) una variedad Riemanniana y ∇ su conexión de Levi-Civita, y sea $\sigma : M \to \mathbb{R}$ es una función diferenciable.

1) Probar que el operador $\overline{\nabla} : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$ definido por$^{(*)}$

$$\overline{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + X(\sigma) Y + Y(\sigma) X - g(X, Y) \operatorname{grad}_g \sigma$$

es una conexión.

2) Demostrar que $\overline{\nabla}$ es la conexión de Levi-Civita de la métrica riemanniana $\overline{g} = e^{2\sigma} g$.

3) Escribir que relación existe entre los símbolos de Christoffel Γ_{ij}^k de g y $\overline{\Gamma}_{ij}^k$ de $\overline{g}$ en una carta dada.

10. Hoja 10

a) Sea ∇ una conexión lineal en la variedad diferenciable M y $\gamma : I \to M$ una curva regular. Probar que γ es pregeodésica si y solo si existe una función $\lambda = \lambda(t)$ diferenciable tal que la derivada covariante a lo largo de γ verifica:

$$\left.\frac{\nabla \gamma'}{dt}\right|_t = \lambda(t)\,\gamma'(t)$$

b) Se considera para cada $R > 0$, la esfera

$$\mathbb{S}^n_R = \left\{(x_0, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} : x_0^2 + \cdots + x_n^2 = R^2\right\}$$

fijado $p \in \mathbb{S}^n_R$, y $\xi \in T_p\mathbb{S}^n_R$ vector unitario

1) Probar que la curva

$$\gamma(t) = \cos(t/R)p + R\sin(t/R)\,\xi$$

es una geodésica de $\mathbb{S}^n_R$, con condiciones iniciales $\gamma(0) = p$, $\gamma'(0) = \xi$.

2) Probar que el campo $\nu = \frac{1}{R}\sum x_i \partial/\partial x_i$ en $\mathbb{R}^{n+1}$ da lugar a un campo normal unitario a $\mathbb{S}^n_R$, y que

$$\left\langle \gamma'(0), (\nu \circ \gamma)'(0)\right\rangle = -\frac{1}{R}$$

en particular $II(\xi, \xi) = -\frac{1}{R}\nu(p)$

3) Probar que $II(\xi, \eta) = -\frac{1}{R}\langle \xi, \eta\rangle\,\nu(p)$ para todo $\xi, \eta \in T_p\mathbb{S}^n_R$, y en particular que $\mathbb{S}^n_R$ tiene curvatura seccional constante igual a $1/R^2$.

c) Sea $\mathbb{H}^n = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} : x_n > 0\}$ con la métrica

$$g = \frac{1}{x_n^2}\left(dx_1^2 + \cdots + dx_n^2\right)$$

la variedad riemanniana $(\mathbb{H}^n, g)$ se llama modelo hiperbólico n-dimensional. Demostrar que $(\mathbb{H}^n, g)$ tiene curvatura seccional constante igual a -1. Indicación: Usar el ejercicio $9e$ para calcular los símbolos de Christoffel de g.

d) ¿Cual es el modelo de curvatura seccional constante igual a $-1/R$ con $R > 0$?

11. Hoja 11

a) Una acción propiamente discontinua (por la izquierda) de un grupo Γ, sobre una variedad M viene definida por una aplicación $\Phi : \Gamma \times M \to M$ tal que: i) La función $\phi_\alpha : M \to M$ definida para cada $\alpha \in \Gamma$ dado por $p \to \Phi(\alpha, p)$ es diferenciable. ii) Si $\alpha, \beta \in \Gamma$, $\phi_\alpha \circ \phi_\beta = \phi_{\alpha\beta}$. iii) Si $e \in \Gamma$ es el elemento neutro del grupo entonces $\phi_e = id$. iv) Para cada $p \in M$, existe $\mathcal{U}$ entorno de p en M, tal que $\phi_\alpha(\mathcal{U}) \cap \mathcal{U} = \varnothing$ para todo $\alpha \in \Gamma - \{e\}$, siendo e el elemento neutro de Γ.

   1) Probar que la acción de Γ induce sobre M una relación de equivalencia definida por $p\Gamma q \Leftrightarrow \exists\alpha \in \Gamma,\ q = \phi_\alpha(p)$ y podemos considerar el espacio cociente $\overline{M} = M/\Gamma$, cuyos elementos $\Gamma p = \{\phi_\alpha(p) : \alpha \in \Gamma\}$ se denominan órbitas de la acción.
   2) Probar que $\overline{M}$ admite una estructura de variedad diferenciable de forma que la aplicación $\pi : M \ni p \to \Gamma p \in \overline{M}$ es difeo local
   3) Demostrar que si (M, g) es riemanniana y cada ϕ_α es isometría entonces hay una única estructura riemanniana $\overline{g}$ en $\overline{M}$ que hace a $\pi : (M, g) \to \left(\overline{M}, \overline{g}\right)$ isometría local.

b) **Toro.** El grupo $\Gamma = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ actua por isometrías de forma propiamente discontinua sobre $\mathbb{R}^2$ mediante

$$\phi_{(n,m)}(x, y) = (x + n, y + m)$$

sea $\pi : \mathbb{R}^2 \to M = \mathbb{R}^2/G$ la proyección canónica. Probar que $\mathcal{R} = [0, 1] \times [0, 1]$ es una región fundamental.[4]

c) **Banda de Moebius.** Probar que $\mathbb{Z}$ actúa por isometrías de forma propiamente discontinua sobre $(\mathbb{R}^2, g_{can})$ si la acción está determinada por la función: $\Phi : \mathbb{Z} \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$definida por $\Phi((x, y), n) = (x + n, (-1)^n y)$. Demostrar que el dominio $\mathcal{R} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 :\ 0 \le x \le 1\}$ constituye una región fundamental.

d) **Botella de Klein.** Consideremos en $(\mathbb{R}^2, g_{can})$ $(g_{can} = dx^2 + dy^2)$ el grupo Γ de isometrías generado por las siguientes transformaciones:

$$\phi_1(x, y) = (x + 1, -y),\ \ \phi_2(x, y) = (x, y + 1).$$

Comprobar que el grupo Γ actúa de forma propiamente discontinua sobre $\mathbb{R}^2$, y el espacio cociente $M = \mathbb{R}^2/\Gamma$ hereda por tanto una estructura Riemanniana (ver ejercicio 11*a*). Determinar una región fundamental, y demostrar que en efecto el espacio cociente $M = \mathbb{R}^2/\Gamma$ es una botella de Klein. Estudiar si existe alguna geodésica cuya imagen sea densa en M.

[4] Esto significa que $\mathcal{R}$ es cerrado y $\pi : \mathcal{R} \to \overline{M}$ es suprayectiva, e inyectiva sobre su interior. Así $\overline{M}$ como espacio topológico se obtiene a partir de $\mathcal{R}$ identificando puntos del borde.

12. Hoja 12

a) Determinar la aplicación exponencial $\exp_p : T_pM \to M$ en un punto p *elegido* en algún modelo de variedad riemanniana completa y simplemente conexa de curvatura seccional constante $K = 1, -1, 0$

b) Sean (M, g) y $\left(\overline{M}, \overline{g}\right)$ variedades riemannianas conexas.

   1) Probar que si $\phi : M \to M$ es isometría y existe $p \in M$, con $\phi(p) = p$, y $d\phi|_p = id$, entonces $\phi = id$.

   2) Probar que si $\phi, \psi : M \to \overline{M}$ son isometrías y existe $p \in M$ con $\phi(p) = \psi(p)$, $d\phi|_p = d\psi|_p$ entonces $\phi = \psi$.

c) Probar que si (M, g) es una variedad riemanniana completa de dimensión $m = 2n$ par, curvatura seccional constante igual a $K = 1$, entonces es difeomorfa a la esfera $\mathbb{S}^m$ o al espacio proyectivo $\mathbb{R}P^m$. ¿Sigue siendo cierta la afirmación cuando m es impar?

d) Probar que una superficie riemanniana conexa localmente homogénea tiene curvatura seccional constante. ¿Es esta afimación válida en para variedades localmente homogeneas conexas de dimensión 3?