PROBLEMAS DE VARIEDADES DIFERENCIABLES
Hoja 1

1. Se considera la recta proyectiva

$$\mathbb{R}P^1 = \big\{[x,y] : (x,y) \in \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}\big\}$$

con la topología usual dada por la topología inicial de $\pi : (x,y) \to [x,y]$, y las cartas naturales

$$\begin{aligned} \varphi &: \mathcal{U} = \{[x,y] : x \neq 0\} \ni [x,y] \to u = \frac{y}{x} \in \mathbb{R} \\ \overline{\varphi} &: \overline{\mathcal{U}} = \{[x,y] : y \neq 0\} \ni [x,y] \to \overline{u} = \frac{x}{y} \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

probar que forman un atlas determinando explícitamente las ecuaciones del cambio de coordenadas.

2. (★★) Generalizar la construcción anterior determinando un atlas para el plano proyectivo $\mathbb{R}P^2$.

3. Identificando el cuerpo $\mathbb{C}$ de los números complejos con $\mathbb{R}^2$ mediante la biyección canónica:

$$\mathbb{C} \ni x + iy \to (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

probar que las cartas naturales en la recta proyectiva compleja $\mathbb{C}P^1$.

$$\begin{aligned} \varphi &: \mathcal{U} = \{[z_0,z_1] : z_0 \neq 0\} \ni [z_0,z_1] \to \frac{z_1}{z_0} \in \mathbb{R}^2 \\ \overline{\varphi} &: \overline{\mathcal{U}} = \{[z_0,z_1] : z_1 \neq 0\} \ni [z_0,z_1] \to \frac{z_0}{z_1} \in \mathbb{R}^2 \end{aligned}$$

forman un atlas estudiando las ecuaciones del cambio de coordenadas.

4. Sea M el conjunto de todas las rectas afines de $\mathbb{R}^2$. Demostrar la aplicación φ que hace corresponder a la recta de ecuación $y = mx + b$ el par (m,b) define una carta de M. Encontrar otra carta análoga que forme con la anterior un atlas para M.

5. (★★★) Determinar un atlas natural modelado en $\mathbb{R}^3$ sobre el conjunto

$$M = \left\{ (R,p) \Big/ \begin{array}{l} R \text{ es recta afin de } \mathbb{R}^2 \\ p \in R \end{array} \right\}$$

de *rectas punteadas del plano* de forma que la aplicación $M \ni (R,p) \to p \in \mathbb{R}^3$ sea diferenciable.

6. Demostrar que la topología de una variedad diferenciable M:

   a) Es T_1 pero no tiene porqué ser T_2.
   b) Es $I.A.N.$ pero no tiene porqué ser $II.A.N.$
   c) No tiene porqué ser conexa, pero si es localmente conexa. Además, si es conexa, entonces necesariamente es conexa por caminos.

7. (★★★) Sea M el conjunto de las rectas afines de $\mathbb{R}^3$.

   a) Demostrar que la aplicación
   $$\varphi^{-1} : \mathbb{R}^4 \ni (u_1, u_2, u_3, u_4) \rightsquigarrow \begin{cases} y = u_1 x + u_2 \\ z = u_3 x + u_4 \end{cases}$$
   define una carta $\varphi = (u_1, u_2, u_3, u_4)$, sobre M.
   b) Construir cartas análogas $\psi = (v_1, v_2, v_3, v_4)$, $\eta = (w_1, w_2, w_3, w_4)$ que formen con φ, un atlas de M modelado en $\mathbb{R}^4$
   c) Demostrar que la aplicación $\phi : M \to \mathbb{R}P^2$ que hace corresponder a cada recta su dirección, es diferenciable.

8. Sea $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y^2 - 4x^2\,(1 - x^2) = 0\}$. Demostrar que las siguientes aplicaciones son biyectivas
   $$\begin{array}{c} P : (0, 2\pi) \ni u \rightsquigarrow (\sin u, \sin 2u) \in M \\ \overline{P} : (-\pi, \pi) \ni \overline{u} \rightsquigarrow (\sin \overline{u}, \sin 2\overline{u}) \in M \end{array}$$
   pero $\varphi = P^{-1}$ y $\overline{\varphi} = \overline{P}^{-1}$ definen estructuras diferenciables distintas sobre M. ¿Son difeomorfas ambas estructuras? . ¿Admite M con su topología usual (heredada de $\mathbb{R}^2$), estructura de variedad diferenciable?

9. Demostrar que la aplicación
   $$F : \mathbb{S}^1 \ni (x, y) = \left\{(x, y) : x^2 + (y - 1)^2 = 1\right\} \to [x, y] \in \mathbb{R}P^1$$
   da lugar (por extensión continua) a un difeomorfismo.

10. Identificando $\mathbb{C}P^1$ con $\widetilde{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ mediante la biyección
    $$[z_0, z_1] \to \begin{cases} z_1/z_0 \text{ si } z_0 \neq 0 \\ \infty \text{ si } z_0 = 0 \end{cases}$$
    probar, usando la proyección estereográfica en $\mathbb{S}^2$ que $\mathbb{C}P^1$ es difeomorfo a $\mathbb{S}^2$.

11. (★★) Demostrar que la función
    $$[x, y, z] \to \left[x^2, 2xy, 2xz + y^2, 2yz\right]$$
    define una aplicación diferenciable del plano proyectivo $\mathbb{R}P^2$ en $\mathbb{R}P^3$.

12. ★★★ Identificando $\mathbb{C}P^1$ con $\widetilde{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ mediante la biyección

$$[z_0, z_1] \to \begin{cases} z_1/z_0 \text{ si } z_0 \neq 0 \\ \infty \text{ si } z_0 = 0 \end{cases}$$

probar, usando la proyección estereográfica en $\mathbb{S}^2$ que $\mathbb{C}P^1$ es difeomorfo a $\mathbb{S}^2$.

13. ★★ Demostrar que la aplicación

$$(x, y, z) \to [x, y, z]$$

induce por restricción una aplicación diferenciable de la esfera

$$\mathbb{S}^2 = \left\{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 = 1\right\}$$

en el plano proyectivo $\mathbb{R}P^2$. ¿Es difeomorfismo? ¿Es difeomorfismo local?

14. Demostrar que la función $\widetilde{f} : (x, y, z) \to [x, y + 2]$ define una función diferenciable de la esfera unitaria $\mathbb{S}^2$ en la recta proyectiva $\mathbb{R}P^1$.

15. Probar que en torno a cada punto p de una variedad diferenciable M^m, siempre existe una carta $(\mathcal{U}, \varphi)$ con $\varphi(\mathcal{U}) = \mathbb{R}^m$, y $\varphi(p) = (0, \ldots, 0)$.

16. Demostrar que si p y q son dos puntos de una variedad diferenciable M siempre existe una función $f : M \to \mathbb{R}$ diferenciable tal que $f(p) = 1$, $f(q) = 2$.

17. Sea $\mathcal{U}$ un abierto de una variedad diferenciable M, que contiene a un compacto K no vacio de M

    a) Probar que existe una función $h \in \mathcal{F}(M)$ con $h \geq 0$, $h(p) > 0$ para todo $p \in K$, y $sop\,(h)$ compacto y contenido en $\mathcal{U}$.

    b) Probar que existe una función $\mu \in \mathcal{F}(M)$ con $\mu \geq 0$, $\mu(p) = 1$ para todo $p \in K$, y $sop\,(\mu)$ compacto y contenido en $\mathcal{U}$.

18. ★★★ Dar estructura de variedad diferenciable al conjunto M de las matrices reales

$$(u,v,w)=\begin{pmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{pmatrix}$$

con rango igual a la unidad, de manera que la aplicación $F : M \ni (u,v,w) \to L(u,v,w) \in \mathbb{R}P_1$ sea diferenciable. Determinar los puntos de M en donde la diferencial de F se anula.

19. Sea p un punto de una variedad diferenciable M^m y $\xi \in T_pM$ un vector tangente no nulo. Demostrar que existe una carta $(\mathcal{U}, \varphi = (u_1,\ldots,u_m))$ en torno a p con

$$\varphi(\mathcal{U}) = \mathbb{R}^m,\ \varphi(p) = (0,\ldots,0)\,,\ \text{y}\ \xi = \left(\frac{\partial}{\partial u_1}\right)_p$$

20. Probar que la función $F(x,y,z) = xyz$ define por restricción una aplicación diferenciable f en la esfera $\mathbb{S}^2$ de ecuación $x^2+y^2+z^2=1$, encontrar los puntos p de $\mathbb{S}^2$ para los cuales se tenga $\xi(f) = 0$ para todo $\xi \in T_p\mathbb{S}^2$

21. Probar que la función

$$F : \mathbb{R}^3 - \{0\} \ni (x,y,z) \to \frac{x^2+z^2}{x^2+y^2+z^2} \in \mathbb{R}$$

induce una aplicación diferenciable, $f : \mathbb{R}P^2 \to \mathbb{R}$, $f([x,y,z]) = F(x,y,z)$ que se anula *sólo* en un punto. Determinar los puntos $q \in \mathbb{R}P^2$ tales que $\xi(f) = 0$ para todo $\xi \in T_q(\mathbb{R}P^2)$.

22. ★★ Demostrar que la función $\widetilde{f} : (x,y,z) \to [x, y+2]$ define una función diferenciable $f : \mathbb{S}^2 \to \mathbb{R}P^1$ de la esfera unitaria $\mathbb{S}^2$ en la recta proyectiva $\mathbb{R}P^1$. Determinar en que puntos p de $\mathbb{S}^2$ se verifica $df(p) = 0$.

23. ★★ Demostrar que el conjunto M de $\mathbb{R}^3$ definido por la ecuación cartesiana

$$\left(x^2+y^2+z^2-5\right)^2 = 16\left(1-z^2\right)$$

es un toro obtenido por rotación alrededor del eje Z, de una circunferencia con centro en el eje X y $x = (2+\cos u)\cos v$, $y = (2+\cos u)\sin v$, $z = \sin u$, $-\pi < u < \pi$, $-\pi < v < \pi$ es una parametrización de M. Demostrar que la aplicación

$$F : M \ni (x, y, z) \to [x, y, z] \in \mathbb{R}P^2$$

es diferenciable y encontrar todos los puntos $p \in M$ tales que $dF|_p$ no es inyectiva..

24. Sea $\widehat{M}$, el conjunto de matrices reales 3×2 de rango 2

$$(u, v) = \begin{pmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \\ u_3 & v_3 \end{pmatrix}$$

y M el conjunto de los planos vectoriales de $\mathbb{R}^3$.

   a) Probar que $\widehat{M}$ es un abierto de $\mathbb{R}^{3\times 2}$

   b) Dar estructura de variedad diferenciable a M de forma que la aplicación $\pi : \widehat{M} \to M$, que hace corresponder a cada $(u, v) \in \widehat{M}$, el plano vectorial $L(u, v)$ generado por ambos vectores, sea una submersión.

25. Demostrar que la proyección canónica $\pi : \mathbb{R}^3 - \{0\} \ni (x, y, z) \to [x, y, z] \in \mathbb{R}P^2$ es una submersión, y que

$$\ker\left(d\pi|_p\right) = L\left((\overrightarrow{op})_p\right)\ \forall p \in \mathbb{R}^3 - \{0\}$$

26. Sea M una superficie de $\mathbb{R}^3$. Demostrar que la aplicación inclusión $\iota : M \hookrightarrow \mathbb{R}^3$ es una aplicación diferenciable. Probar que en las coordenadas (u, v) de la carta $\varphi = P^{-1}$ de una parametrización $P = (P_1(u, v), P_2(u, v), P_3(u, v))$, se verifica

$$\begin{aligned} \iota_*\left(\frac{\partial}{\partial u}\right)_p &= \left(P_u|_{\varphi(p)}\right)_p = \\ & \left.\frac{\partial P_1}{\partial u}\right|_{\varphi(p)}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)_p + \left.\frac{\partial P_2}{\partial u}\right|_{\varphi(p)}\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)_p + \left.\frac{\partial P_3}{\partial u}\right|_{\varphi(p)}\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)_p \end{aligned}$$

27. ★★★ Si M es una superficie de $\mathbb{R}^3$ que no contiene al origen $o = (0, 0)$, y sea $\iota : M \hookrightarrow \mathbb{R}^3$ la aplicación inclusión. Probar que la proyección canónica $\pi : \mathbb{R}^3 - \{o\} \ni (x, y, z) \to [x, y, z] \in \mathbb{R}P^2$ induce por restricción sobre M una aplicación diferenciable en $F = \pi \circ \iota : M \to \mathbb{R}P^2$. Demostrar que los puntos p de M en donde F es inmersión son exactamente los que verifican que $(\overrightarrow{op})_p \notin T_pM$. Usar este hecho para determinar los puntos singulares de F, cuando se toma $M = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + (z-2)^2 = 1\right\}$.

28. Sea M la variedad diferenciable de las rectas afines de $\mathbb{R}^3$ construida en el ejercicio 7. Demostrar que la aplicación que hace corresponder a cada recta afín su dirección define una aplicación diferenciable $F : M \to \mathbb{R}P^2$, que es submersión suprayectiva. Probar que todas las *fibras* $F^{-1}(p)$ para $p \in \mathbb{R}P^2$ son difeomorfas.

29. ★★★

   a) ¿Es el cono $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 - z^2 = 0,\ z \geq 0\}$ subvariedad regular de $\mathbb{R}^3$? ¿Podemos dar a M estructura de variedad diferenciable de dimensión 2 con la topología relativa de $\mathbb{R}^3$?

   b) Ahora $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y^2 - 4x^2(1 - x^2) = 0\}$. Demostrar que las siguientes aplicaciones son biyectivas

$$\begin{aligned} P &: (0, 2\pi) \ni u \rightsquigarrow (\sin u, \sin 2u) \in M \\ \overline{P} &: (-\pi, \pi) \ni \overline{u} \rightsquigarrow (\sin \overline{u}, \sin 2\overline{u}) \in M \end{aligned}$$

   pero $\varphi = P^{-1}$ y $\overline{\varphi} = \overline{P}^{-1}$ definen estructuras diferenciables distintas sobre M. ¿Son difeomorfas ambas estructuras? . ¿Admite M con su topología usual (heredada de $\mathbb{R}^2$), estructura de variedad diferenciable?

30. ★★ Demostrar que la función

$$[x, y, z] \to \frac{1}{x^2 + y^2 + z^2}\left(x^2, 2xy, 2xz + y^2, 2yz\right)$$

   es un *embedding* del plano proyectivo $\mathbb{R}P^2$ en $\mathbb{R}^4$.

31. Consideremos la esfera $\mathbb{S}^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ parametrizada por

$$P(\theta, \phi) = (\sin\theta\cos\phi, \sin\theta\sin\phi, \cos\theta)\ \ 0 < \theta < \pi,\ 0 < \phi < 2\pi$$

   y sea $F : \mathbb{S}^2 \to \mathbb{S}^2$ la aplicación diferenciable inducida por el automorfismo de $\mathbb{R}^3$ dado por la matriz

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

   Calcular

$$F_*\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\right)_p,\ F_*\left(\frac{\partial}{\partial\phi}\right)_p \ \text{ con } p = P\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$$

32. Sea $F : M \to N$ un *embedding* entre variedades. Probar que entonces $F(M)$ es una subvariedad regular de N.

33. Se considera el campo X definido en las coordenadas canónicas (x, y, z) de $\mathbb{R}^3$ por:
$$X = -zx\frac{\partial}{\partial x} - zy\frac{\partial}{\partial y} + (1 - z^2)\frac{\partial}{\partial z}$$

   a) Probar que X es tangente a la esfera $\mathbb{S}^2$ de ecuación $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

   b) Determinar la expresión analítica de la restricción V de X a $\mathbb{S}^2$ en la carta $\varphi = (u, v) : \mathbb{S}^2 \backslash \{(0, 0, 1)\} \to \mathbb{R}^2$ dada por la proyección estereográfica de polo norte con ecuaciones
$$\varphi : \begin{cases} u = \frac{x}{1-z} \\ v = \frac{y}{1-z} \end{cases}$$

   c) Determinar la expresión de V en la carta $\psi = (\rho, \theta)$, obtenida a partir de $\varphi = (u, v)$ mediante el cambio de coordenadas:
$$\begin{cases} u = \rho \cos\theta \\ v = \rho \sin\theta \end{cases}$$

34. ★★★

   a) Se considera en $\mathbb{R}^2 - \{0\}$ el campo $V = -y\partial/\partial x + x\partial/\partial y$. Determinar explícitamente todos los campos $X \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^2 - \{0\})$ tales que $[V, X] = 0$. *Indicación: Resolver el problema usando coordenadas polares, y cambiar luego otra vez a coordenadas cartesianas.*

   b) Sea M una variedad arbitraria , $p \in M$ y $\xi \in T_pM$, $\xi \neq 0$. Demostrar que existen campos V y W en M tales que $V(p) = W(p) = \xi$, pero $[V, W]|_p \neq 0$. *Indicación: Suponer primero que la variedad está globalmente coordenada*

35. ★★ Si X, $Y \in \mathfrak{X}(M)$ son campos en una variedad M se define el corchete de Lie como la aplicación
$$[X, Y] : \mathcal{F}(M) \to \mathcal{F}(M), f \rightsquigarrow X(Y(f)) - Y(X(f))$$
   Probar que $[X, Y] \in \mathfrak{X}(M)$, y que $[X, fY] = f[X, Y] + X(f)Y$, $\forall \in f\mathcal{F}(M)$.

   Calcular $[X, Y]$ para los campos de $\mathbb{R}^3$ dados por
$$X = x\frac{\partial}{\partial z}, Y = xz\frac{\partial}{\partial x} + yz\frac{\partial}{\partial y} + \left(z^2 - 1\right)\frac{\partial}{\partial z}$$

36. Sea $\pi : \mathbb{R}^3 - \{0\} \ni (x,y,z) \to [x,y,z] \in \mathbb{R}P^2$ la proyección canónica. Demostrar que $\pi_*(\vec{\xi}_p) = \pi_*\left((\lambda\vec{\xi})_{\lambda p}\right)$. Probar que una condición suficiente para que un campo X definido en un abierto de $\mathbb{R}^3 - \{0\}$, esté π-relacionado con un campo $\bar{X}$ en un abierto de $\mathbb{R}P^2$ es que la parte vectorial $\vec{X}$ de X, verifique la propiedad:

$$\vec{X}(\lambda p) = \lambda\vec{X}(p)\ ,\ \forall\lambda \in \mathbb{R} - \{0\} \text{ y } \forall p$$

37. Usando el ejercicio anterior, demostrar que los campos en (un abierto de) $\mathbb{R}^3$

$$X = \frac{y^2+z^2}{x}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{x^2+z^2}{y}\frac{\partial}{\partial y} + \frac{x^2+y^2}{z}\frac{\partial}{\partial z}$$

$$Y = x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y} - z\frac{\partial}{\partial z}$$

están π-relacionados con campos $\bar{X}$, $\bar{Y}$ en (un abierto) $\mathbb{R}P^2$. Determinar la expresión analítica en la carta $(\mathcal{U}, \varphi = (u,v))$ de los campos $\bar{X}$, $\bar{Y}$, y $[\bar{X}, \bar{Y}]$ donde $\mathcal{U} = \{[x,y,z] \in \mathbb{P}_2(\mathbb{R})\ /z \neq 0\}$ y

$$\begin{cases} u = x/z \\ v = y/z \end{cases}$$

38. Calcular las curvas integrales de los campos X y V del ejercicio 33. ¿Son campos completos?

39. ★★★ Sea X un campo de vectores en la variedad M y $f : M \to \mathbb{R}$ una función diferenciable. ¿Que relación existe entre las curvas integrales de X y las de $\left(e^f\right)X$?. Si X es completo, ¿es necesariamente $\left(e^f\right)X$ completo? Justifíquense las respuestas.

40. ★★Demostrar que el campo en $\mathbb{R}^3$:

$$X = zx\frac{\partial}{\partial x} + zy\frac{\partial}{\partial y} + (z^2-1)\frac{\partial}{\partial z}$$

es tangente a la superficie $M = \{(x,y,z) : x^2+y^2-z^2 = -1,\ z > 0\}$.

Probar que la aplicación:

$$\begin{cases} u = x/z \\ v = y/z \end{cases}$$

induce una carta global $\varphi = (u,v)$ de M determinar $\varphi(M)$.

Determinar la expresión analítica del campo V, restricción de X a M, en la carta $\psi= (\rho, \theta)$, obtenida a partir de $\varphi = (u, v)$ mediante el cambio de coordenadas:

$$\left\{ \begin{array}{l} u = \rho \cos \theta \\ v = \rho \sin \theta \end{array} \right.$$

Calcular las curvas integrales de V y ver si es un campo completo.

41. ★★ + + Si M es variedad diferenciable, $V \in \mathfrak{X}(M)$, y $\alpha \in \mathfrak{X}^*(M)$ se define la derivada de Lie de α respecto a V, :

$$L_V\alpha{:}\mathfrak{X}(M) \ni X \to V(\alpha(X)) - \alpha([V,X]) \in \mathfrak{F}(M)$$

probar que $L_V\alpha \in \mathfrak{X}^*(M)$ y que $L_V : \mathfrak{X}^*(M) \to \mathfrak{X}^*(M)$ es una aplicación $\mathbb{R}$-lineal que verifica

$$L_V(f\alpha) = V(f)\alpha + fL_V\alpha \ \forall f \in \mathcal{F}(M)$$

y además:

$$L_V(df) = dL_V(f) \text{ para todo } f \in \mathcal{F}(M)$$

Determinar la expresión analítica de $L_V\alpha$, en una carta $(\mathcal{U}, \varphi = (u^1, \dots u^m))$ en función de las V_i y las α_i donde

$$V = \sum V^i \frac{\partial}{\partial u^i}, \text{ y } \alpha = \sum \alpha_i du_i$$

42. ★★★ Dada la superficie M en $\mathbb{R}^3, \iota : M \to \mathbb{R}^3$ la inclusión se denota

$$g_M = \iota^* (dx \otimes dx + dy \otimes dy - dz \otimes dz)$$

a) Si M es la superficie con ecuación $x^2 + y^2 - z^2 = -1$, $z > 0$, calcular g_M expresandolo en la carta dada en el ejercicio 40. Probar que g_M es una métrica riemanniana en M. b) Determinar la región de $\mathbb{S}^2$ en donde $g_{\mathbb{S}^2}$ es Riemanniana, y donde $g_{\mathbb{S}^2}$ es Lorentziana.

43. ★★★ Sea M una variedad diferenciable, $f : M \to \mathbb{R}$ aplicación diferenciable, y $p \in M$ con $df(p) = 0$. Se va a definir el Hessiano de f en p como un tensor $H_f^p \in L^2(T_pM)$ (que generaliza al Hessiano habitual) mediante el siguiente procedimiento

    a) Probar que la aplicación: $\mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \ni (V, W) \to V(W(f))(p) \in \mathbb{R}$ es simétrica, y solo depende de los vectores $\xi = V(p)$, $\eta = W(q)$. Da lugar por tanto a un tensor simétrico $H_f^p \in \Lambda^2(T_pM)$ que se denomina *Hessiano de* f en el punto p.

    b) Determinar la expresión analítica local de H_f^p respecto a una carta $(\mathcal{U}, \varphi = (u^1, \ldots u^m))$ cuyo dominio contenga a p.

    c) Explicar porqué necesitamos que $df(p) = 0$, para definir el Hessiano en p.

44. ★★ + +Sea M variedad diferenciable, $\alpha \in \mathfrak{X}^*(M)$ y $V \in \mathfrak{X}(M)$. Se define:

    $$\mathbf{d}\alpha : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \ni (X, Y) \to X(\alpha(Y)) - Y(\alpha(X)) - \alpha([X, Y]) \in \mathfrak{F}(M)$$

    Probar que $\mathbf{d}\alpha \in \Omega^2(M)$. Determinar la expresión analítica de la 2-forma $\mathbf{d}\alpha$ del ejercicio 44 en una carta $(\mathcal{U}, \varphi = (u^1, \ldots u^m))$ donde $\alpha = \sum \alpha_i du^i$. Probar que si $\alpha = df$ para cierto $f \in \mathcal{F}(M)$, entonces $\mathbf{d}\alpha = 0$. ¿Es cierto el recíproco?

45. a) Probar que la 2-forma en $\mathbb{R}^3$ dada por $\omega = xdy \wedge dz - ydx \wedge dz + zdx \wedge dy$ induce sobre la esfera $\mathbb{S}^2$ su forma canónica de volumen $\omega_{\mathbb{S}^2}$

    b) Probar lo análogo para la esfera $\mathbb{S}^3$ a partir de la 3-forma en $\mathbb{R}^3$ dada en sus coordenadas (x, y, z, w) por

    $$\omega = xdy \wedge dz \wedge dw - ydx \wedge dz \wedge dw + zdx \wedge dy \wedge dw - wdx \wedge dy \wedge dz$$

46. Si $V \in \mathfrak{X}(M^m)$, y $\alpha \in \Omega^{r+1}(M)$ se define

    $$(i_V\alpha)(V_1, \ldots, V_r) = \alpha(V, V_1, \ldots, V_r)$$

    probar que $i_V : \Omega^{r+1}(M) \to \Omega^r(M)$, y si $\alpha^0, \ldots, \alpha^r \in \Omega^1(M)$ entonces

    $$i_V\left(\alpha^0 \wedge \ldots \wedge \alpha^r\right) = \sum_{i=0}^{r} (-1)^i \alpha^i(V)\, \alpha^0 \wedge \ldots \alpha \wedge \widehat{\alpha^i} \wedge \ldots \wedge \alpha^r$$

    donde el sombrero$\widehat{\ }$indica *missing.* Demostrar que si ω es forma de volumen en M y V es transversal a la hipersuperficie N de M, entonces la restricción a N de $i_V\omega$ es forma de volumen en N.

47. ★★★ Probar que $\mathbb{R}P^3$ es orientable. Determinar en $\mathbb{R}P^3$ una forma de volumen. Probar que $\mathbb{R}P^2$ no es orientable. ¿Cuáles son los n para los que $\mathbb{R}P^n$ es orientable?

48. Calcular $\int_D i^*\omega$ orientando previamente M, en los casos siguientes:

   a) $D = \mathbb{S}^2 \cap \{x+y+z=0\}$, $\omega = (y+z)dx + (x+z)dy + (x+y)dz$

   b) $D = \mathbb{S}^2 \cap \{z \geq 0\}$, $\omega = xdy \wedge dz - y^2 dx \wedge dz - 2yzdx \wedge dy$

   c) $D = \mathbb{T}_{(2,1)} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ 16(x^2+y^2) = (x^2+y^2+z^2+3)^2\}$,

$$\omega = \frac{1}{x^2+y^2}(xdy \wedge dz + ydz \wedge dx)$$

49. Dada $M \equiv x^2+y^2+z^4 = 1$, y la función

$$\begin{array}{rccc} F: & M & \longrightarrow & \mathbb{S}^2 \\ & (x,y,z) & & (x,y,z^2) \end{array}$$

estudiar dónde F es un difeomorfismo local y después de orientar las dos superficies, ¿dónde conserva la orientación? Calcular $\int_M F^*\omega$ para una forma arbitraria ω de grado dos en $\mathbb{S}^2$.

50. La terna $\overrightarrow{X} = (X_1, X_2, X_3)$ (donde $X_i = X_i\,(x,y,z)$ son funciones diferenciables $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$) puede *difrazarse* de campo $X = X_1\partial/\partial x + X_2\partial/\partial y + X_3\partial/\partial z$, de 1-forma $\omega_X^1 = X_1dx + X_2dy + X_3dz$ o de 2-forma $\omega_X^2 = X_1dy \wedge dz - X_2dx \wedge dz + X_3dx \wedge dy$. Si $\overrightarrow{Y} = (Y_1, Y_2, Y_3)$ es *otra* terna demostrar que $\omega_{fX+gY}^i = f\omega_X^i + g\omega_Y^i$ para $i = 1,2$ $f,g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ diferenciables. Probar que $\omega_X^1 \wedge \omega_Y^1 = \omega_{X\times Y}^2$ donde "$\times$"denota producto vectorial. Calcular la función $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ tal que $d\omega_X^2 = Fdx \wedge dy \wedge dz$; se denomina a F *divergencia* de X $(F = \operatorname{div}(X))$.

51. Continuando con el problema anterior y conocido $\overrightarrow{X} = (X_1, X_2, X_3)$ determinar $\overrightarrow{Z} = (Z_1, Z_2, Z_3)$ sabiendo que $d\omega_X^1 = \omega_Z^2$. Se denomina a Z *rotacional* de X $(z = rot\,(X)$. Demostrar que $\operatorname{div}(rotX) = 0$.

52. ★★★ Se considera en $\mathbb{R}^3$ la forma diferencial

$$\omega = f(x)dy \wedge dz - (4zx^3 + f\,(x))dx \wedge dy$$

a) Determinar f sabiendo que $d\omega = 0$, y $f\,(0) = 0$. b) Encontrar entonces otra 1-forma $\theta = Q\,(x,y,z)\,dy$ tal que $d\theta = \omega$. c) Usando el teorema de Stokes, calcular el valor de la integral de ω sobre el *hemisferio norte* $(z \geq 0)$ de la esfera $\mathbb{S}^2$

53. ★★ Se da en $\mathbb{R}^3$ la forma

$$\alpha = yzdx + (zf(x) + h(x))\,dy + (yg\,(x) + h\,(x))\,dz$$

donde $f,g,h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ son funciones diferenciables. Determinar f,g,h para que α sea cerrada, y probar que en este caso es α es exacta.

54. Sea $M \equiv x^2 + y^2 = 3z^2 + 1$, $0 \leq z \leq 1$, y $\omega = ydx - xdy + fdz$ siendo $f : M \to \mathbb{R}$ una función diferenciable. Calcular los dos miembros del teorema de Stokes y ver que coinciden.

55. Dada $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ diferenciable se considera el grafo $M \equiv z = f(x^2 + y^2)$ sobre la corona $1 \leq x^2 + y^2 \leq 4$, y la forma

$$\omega = f'(y)dy \wedge dz + f'(z)dz \wedge dx + dx \wedge dy$$

Calcular $\int_M \omega$ usando el teorema de Stokes

56. Sea $M \subset \mathbb{R}^3$ el cilindro dado por $x^2 + y^2 = 1$, y

$$\mathcal{R} = \{(x, y, z) \in M : -1 \leq z \leq 1\}$$

Sea $f : M \to M$, la aplicación que en coordenadas $x = \cos\theta$, $y = \sin\theta$, $z = t$ se expresa por

$$f(\cos\theta, \sin\theta, t) = (\cos 4\theta, \sin 4\theta, -t)$$

a) Orientar M y estudiar si $f|_{\partial\mathcal{R}}$ conserva la orientación inducida en el borde.

b) Calcular el elemento de volumen Ω_M y una función h tal que $f^*\Omega_M = h\Omega_M$

c) Calcular la integral $\int_{\mathcal{R}} f^* (dx \wedge dz)$ utilizando el teorema de Stokes y la diferencial de xdz

d) Demostrar que f induce un difeomorfismo de cualquier abierto $\mathcal{U} \subset \mathcal{R}$ dado por $\theta_0 < \theta < \theta_0 + \frac{\pi}{2}$ sobre un abierto denso, y deducir que

$$\int_{\mathcal{R}} f^*\omega = -4 \int_{\mathcal{R}} \omega$$

para toda forma ω.

57. Calcular: $\int_C (yzdx + xzdy + xydz)$ donde C es la intersección del cilindro $x^2 + y^2 = 1$, y la superficie $z = y^2$.

58. Se considera en $\mathbb{R}^3 - \{0\}$ la forma

$$\alpha = \frac{-xz}{x^2 + y^2 + z^2} dy \wedge dz + \frac{yz}{x^2 + y^2 + z^2} dx \wedge dz + f(x, y, z) dx \wedge dy$$

siendo f una función diferenciable arbitraria en $\mathbb{R}^3$. Demostrar que la restricción ω de α al cilindro $x^2 + y^2 = a^2$ es exacta.

59. Sea $\alpha = (2x + y\cos xy)\, dx + (x\cos xy)\, dy$. Probar que α es cerrada, y encontrar una función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ diferenciable tal que $\alpha = df$.

60. Demostrar que $D = \left\{ x \in \underset{ab}{\mathbb{A}} \subset \mathbb{R}^{m+2} : \Big/ \begin{array}{c} F(x) = 0 \\ a \leq G(x) \leq b \end{array} \right\}$ es un dominio regular de $M = F^{-1}(0)$ en el supuesto de que M sea hipersuperficie, $D \neq \varnothing$, y $rang\left(DF|_x, DG|_x\right) = 2$ si $F(x) = 0$, y $G(x) = a$ o $G(x) = b$

61. Sean $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z(x^2 + y^2) = 1\}$, $\alpha = z^7 dz \wedge (ydx - xdy)$, $D = \{(x, y, z) \in M : x^2 + y^2 \geq 1\}$, y para cada $r > 0$, sea $D_r = \{(x, y, z) \in M : r^2 \geq x^2 + y^2 \geq 1\}$. Se pide: (a) Probar que M es una superficie de $\mathbb{R}^3$ y que D y D_r son dominios regulares de M. (b) Demostrar que *no existe* una forma β tal que $\mathbf{d}\beta = \alpha$. (c) Si $\omega = j_M^* \alpha$ es la restricción de α a M, probar que existe $\vartheta \in \Omega^1(M)$ con $\mathbf{d}\vartheta = \omega$. (d) Calcular para cada $r > 0$, $I_r = \int_{D_r} \omega$ (e) Probar que ni la adherencia de D, ni el soporte de ω son compactos, pero sin embargo la integral $I = \int_D \omega$ tiene sentido. Determinar el valor de I.

62. Sea $D \subset \mathbb{R}^3$ el tronco de hiperboloide $x^2 + y^2 = z^2 + 1$, $0 \leq z \leq 1$, y $\omega = ydx \wedge dy - dx \wedge dz$. (a) Demostrar que D es un dominio regular del hiperboloide. Dar una orientación a D y determinar la orientación inducida en su frontera ∂D. (b) Determinar los puntos en donde se anula la restricción de ω al hiperboloide. (c) Determinar $\int_D \omega$, y demostrar que coincide con $\int_C \omega$ siendo C el tronco de cono con frontera orientada $\partial C = \partial D$.

63. A una función diferenciable $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, le asociamos el dominio

$$\mathcal{R}_f = \left\{ (x, y, z) \Big/ \begin{array}{c} z = f(x, y) \\ x^2 + y^2 \leq 1 \end{array} \right\}$$

y sea $\omega = A(y)dx \wedge dy - dx \wedge dz + B(z)dz \wedge dy$, donde donde se interpreta que por ejemplo que $A = A(y)$ es una función diferenciable de $\mathbb{R}^3$ en $\mathbb{R}$ que solo depende de la segunda coordenada coordenada y, ...etc.Se pide: a) Demostrar que $\mathcal{R}_f$ es un dominio regular de la superficie $z = f(x, y)$, y determinar su borde $\partial\mathcal{R}_f$. b) Fijada ω, probar que la integral $\int_{\mathcal{R}_f} \omega$ solo depende de la restricción de f a $\mathbb{S}^1 = \{(x, y) : x^2 + y^2 = 1\}$. c) Calcular $\int_{\mathcal{R}_f} \omega$ suponiendo que $f(x, y) = 0$ si $x^2 + y^2 = 1$.

64. Dada la función $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ y la superficie $M \subset \mathbb{R}^3$ de ecuación $x^2 + 2y^2 + z^2 = 36$ encontrar los puntos $p \in M$ en donde $d\left(F|_M\right)(p) = 0$. Estudiar para que valores $a \in \mathbb{R}$, podemos asegurar que $\mathcal{R}_a = \{p \in M : F(p) \leq a\}$ es un dominio regular.de M. Calcular que en cada región regular $\mathcal{R}_a$ la integral $\int_{\mathcal{R}_a} \cos(x + y)\, dx \wedge dy$

PROBLEMAS ABIERTOS DE GEOMETRIA
DE VARIEDADES DIFERENCIABLES

Todas las variedades salvo aviso explícito serán de clase infinito, T_2 y $IIAN$

1. Probar que una variedad ddiferenciable es IIAN si y solo si admite un atlas numerable.

2. Poner un ejemplo de variedad diferenciable conexa que no sea IIAN.

3. Poner un ejemplo de una variedad diferenciable M con un punto p, que no admita entornos U con adherencia compacta. Probar que en todo caso tal variedad no puede ser T_2

4. Sean M_1 y M_2 dos variedades diferenciables con el mismo conjunto de puntos, digamos M. Probar que $M_1 = M_2$ si y solo si el anillo de funciones $\mathcal{F}(M_1)$ coincide con $\mathcal{F}(M_2)$

5. Sea $\mathcal{F}$ un anillo conmutativo con elemento unidad y $\mathcal{M}$ la familia de sus ideales maximales. Para cada $f \in \mathcal{F}$, se define $\mathcal{U}_f = \{x \in \mathcal{M} : f \notin x\}$.

   a) Probar que la familia $\{\mathcal{U}_f : f \in \mathcal{F}\}$ es base para una topología de $\mathcal{M}$ denominada topología de Zariski.

   b) Supuesto que M es variedad diferenciable compacta y$\mathcal{F} = \mathcal{F}(M)$ demostrar que $\mathcal{F}_x = \{f \in \mathcal{F} \ : f(x) = 0\}$ es un ideal máximal y la aplicación
   $$M \ni x \to \mathcal{F}_x \in \mathcal{M}$$
   es un homeomorfismo cuando se dota a $\mathcal{M}$ de la topología de Zariski.

6. Estudiar si es válido el apartado b) del problema anterior para M variedad diferenciable no compacta, tomando como anillo
   $$\mathcal{F} = \mathcal{F}^c(M) = \{f \in \mathcal{F}(M) : \ sop(f) \ \text{es compacto}\}$$

7. Completar todos los detalles que faltan en el Manual del Curso para demostrar la existencia de la función meseta.

8. Dar estructura de variedad diferenciable al conjunto $M = \mathbb{G}_2(\mathbb{R}^4)$ de los planos vectoriales de $\mathbb{R}^4$ construyendo cartas del tipo

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ u_1^1 & u_2^1 \\ u_1^2 & u_2^2 \end{bmatrix} \to \begin{pmatrix} u_1^1 & u_2^1 \\ u_1^2 & u_2^2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2} = \mathbb{R}^4$$

donde $[v, w]$ representa el plano generado por los vectores (columna) v y w de $\mathbb{R}^4$.

Demostrar que la familia $\widehat{\mathbb{G}}_2(\mathbb{R}^4)$ de todas las matrices (v, w) de rango 2, formadas por vectores (columna) v y w de $\mathbb{R}^4$, constituye un abierto de $\mathbb{R}^8$, y la proyección $\widehat{\mathbb{G}}_2(\mathbb{R}^4) \ni (v, w) \to [v, w] \in \mathbb{G}_2(\mathbb{R}^4)$ es una submersión.

9. Sea M variedad diferenciable, $F \in \mathcal{F}(M)$ y sea $\varnothing \neq N = F^{-1}(0)$. Supongamos $dF(x) \neq 0$ para todo $x \in N$ (se dice por esto que $F = 0$ es una *buena ecuación* para N). Demostrar que entonces para todo $f \in \mathcal{F}(M)$ tal que $f|_N = 0$, existe $h \in \mathcal{F}(M)$ tal que $f = hF$. Esto significa que el ideal $I(N) = \{f \in \mathcal{F}(M) : f|_N = 0\}$ es principal. Probar que si una función $G \in I(N)$ es generador de $I(N)$, entonces $G = 0$, es una buena ecuación para N.

10. Sea F un difeomorfismo local entre las variedades M y $\overline{M}$, y sea $G : I_\varepsilon \times M \to \overline{M}$ una aplicación diferenciable. Denotando $G(t, x) = F_t(x)$, supóngase que $F_0 = F$ y que existe una sucesión $(t_m) \to 0$ tal que F_{t_m} es inyectiva para todo m. Probar que entonces necesariamente es F inyectiva.