

# *Inversiones en espacios afines métricos no degenerados*

J. LAFUENTE LÓPEZ y L. VILLARREAL SÁEZ DE URABAIN

*Nos complace dedicar este trabajo —precisamente de  
geometría analítica lineal— al profesor Botella Raduán,  
en homenaje a su larga trayectoria docente.*

## INTRODUCCIÓN

Berger presenta en el capítulo 10 de su obra «Géométrie» [1], una original exposición, desde el punto de vista proyectivo, de la teoría clásica de inversiones en espacios afines euclídeos. El considera allí el conjunto  $E$  de las esferas de un espacio afín euclídeo  $X$ , incluidas las de radio imaginario, las de radio infinito (que se identifican con hiperplanos), y el hiperplano del infinito. El conjunto  $E$  admite una estructura natural de espacio proyectivo, en el que los puntos de  $X$  —considerados como esferas de radio nulo— determinan una cuádrlica cuya imagen  $\overline{X} = X \cup \{\infty\}$  es una esfera topológica. Se trata de la esfera de Riemann o compactificación de Alexandroff del espacio afín  $X$ .

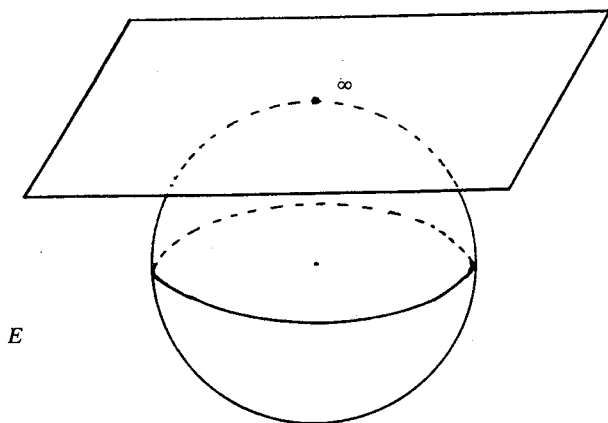


FIGURA 1.

Los puntos del interior de  $\overline{X}$ —desde los cuales no puede trazarse una recta tangente a  $\overline{X}$ — representan esferas de radio imaginario. Los del exterior de  $\overline{X}$  representan, o bien hiperplanos—si están situados sobre el hiperplano tangente a  $\overline{X}$  en  $\infty$ — o bien esferas de radio positivo, en otro caso.

Desde esta perspectiva es posible definir la inversión respecto a una esfera  $e \in E - \overline{X}$  de centro  $c$ , como la restricción a  $X - \{c\} \subset \overline{X}$  de la homología armónica en  $E$  de centro  $e$  que deja invariante  $\overline{X}$ .

La primera parte de nuestro trabajo está dedicado a la generalización de estas ideas para un espacio afín métrico no degenerado  $X$  cualquiera. La inmersión canónica de  $X$  en el espacio proyectivo de las pseudoesferas  $E$ , da lugar a una cuádrica en  $E$ , cuya imagen  $\overline{X}$  representa cierta ampliación del espacio afín  $X$ , que denominamos extensión cuádrica de  $X$ . Esta ampliación proporciona el marco natural para el estudio de las inversiones de  $X$  como restricciones al espacio afín de ciertas homologías armónicas en  $E$  que dejan invariante  $\overline{X}$ . Por otra parte, el grupo proyectivo de la cuádrica  $GP(\overline{X})$ , representa una ampliación natural del grupo  $GO(X)$  de las semejanzas del espacio afín métrico  $X$ .

En la segunda parte, ya en el ámbito de la geometría proyectivo-afín del espacio  $X$ , se describen las ecuaciones de las inversiones y se obtienen propiedades encaminadas a establecer el concepto general de proyección estereográfica  $\varepsilon$ , de una pseudoesfera  $\mathcal{S}$  sobre cierto hiperplano  $Y$ ; se prueba que  $\varepsilon$  «eleva» de forma natural el grupo de las semejanzas de  $Y$  a cierto subgrupo de transformaciones proyectivas que dejan invariante  $\mathcal{S}$ .

Finalmente, cuando el cuerpo base es real, se prueba que las inversiones determinan aplicaciones conformes (en el sentido de la geometría semi-riemanniana). Este resultado y la idea de elevación de semejanzas a través de la proyección estereográfica, nos permiten demostrar a partir de un artículo de Zeeman [5], algunas curiosas propiedades relacionadas con aplicaciones conformes en hipercuádricas de Lorentz.

## 1. EL ESPACIO PROYECTIVO DE LAS PSEUDOESFERAS

En el presente trabajo  $\mathbb{K}$  denota un cuerpo conmutativo de característica distinta de dos.

$X = (X, \overline{X}, \vec{p})$  denota un espacio afín métrico con espacio vectorial asociado  $\overline{X}$  de dimensión finita sobre  $\mathbb{K}$ . La métrica de  $X$  está determinada por la forma cuadrática no degenerada  $\vec{p} : \overline{X} \rightarrow \mathbb{K}$ , cuya forma bilineal simétrica asociada se representará mediante

$$\vec{P} : \overline{X} \cdot \overline{X} \rightarrow \mathbb{K},$$

es decir:

$$\vec{P}(\vec{x}, \vec{y}) = \frac{1}{2} (\vec{p}(\vec{x} + \vec{y}) - \vec{p}(\vec{x}) - \vec{p}(\vec{y})),$$

para

$$\vec{x}, \vec{y} \in \vec{X}.$$

$\vec{X}$  será la extensión vectorial canónica de  $X$ , donde la forma lineal  $\mu: X \rightarrow \mathbb{K}$ , llamada masa, es tal que  $\mu^{-1}(0) = \vec{X}$  y  $\mu^{-1}(1) = X$ .

$\vec{X}$  será la extensión proyectiva de  $X$ , es decir:  $\vec{X} = P(\vec{X})$ . Representaremos mediante  $X_\infty$  al conjunto de puntos del infinito de  $X$ :  $X_\infty = P(\vec{X})$ , hiperplano proyectivo de  $\vec{X}$ .

Si  $\hat{q}: \vec{X} \rightarrow \mathbb{K}$  es una forma cuadrática, denotaremos con  $\vec{q}$  a la restricción de  $\hat{q}$  a  $\vec{X}$ .  $\hat{Q}$  (resp.  $\vec{Q}$ ) representa la forma bilineal simétrica asociada a  $\hat{q}$  (resp.  $\vec{q}$ ), o bien el homomorfismo  $\vec{X} \rightarrow \vec{X}^*$  asociado a  $\hat{q}$  (resp.  $\vec{X} \rightarrow \vec{X}^*$  asociado a  $\vec{q}$ ).

El objeto de esta sección es el estudio del conjunto de las cuádricas proyectivas  $q$  de  $\vec{X}$  cuya cuádriga del infinito  $q \cap X_\infty$  es  $[\vec{p}]$ , la inducida en  $X_\infty$  por la métrica de  $X$ . Para ello se estudiarán las formas cuadráticas no nulas  $\hat{q}$  de  $\vec{X}$ , tales que  $\vec{q} \in \mathbb{K}\vec{p}$ . Es claro que éstas forman (junto con la forma cuadrática nula) un subespacio vectorial  $\hat{E}$  del espacio de formas cuadráticas sobre  $\vec{X}$ .

Sea  $a$  un punto cualquiera del espacio afín  $X$ . Se tiene:

$$\hat{X} = \mathbb{K}a \oplus \vec{X}.$$

Llamando  $\delta_a$  a la proyección sobre el segundo sumando, se verifica de modo inmediato la siguiente relación:

$$\forall \hat{x} \in \hat{X}, \hat{x} = \mu(\hat{x})a + \delta_a(\hat{x}).$$

Obsérvese también que si  $b \in X$ , entonces  $\delta_a(b) = \overline{ab}$ , el vector de  $\vec{X}$  representado por el par  $(a, b) \in X^2$ .

Si  $\hat{q}$  es una forma cuadrática de  $\hat{E}$ , se verifica:

$$\begin{aligned} \forall \hat{x} \in \hat{X}, \hat{q}(\hat{x}) &= \hat{q}(\mu(\hat{x})a + \delta_a(\hat{x})) = \hat{q}\delta_a(\hat{x}) + 2\mu(\hat{x})\hat{Q}(a, \delta_a(\hat{x})) + \\ &+ \mu^2(\hat{x})\hat{q}(a) = k\vec{p}\delta_a(\hat{x}) + 2\mu(\hat{Q}(a) \cdot \delta_a(\hat{x})) + \hat{q}(a)\mu^2(\hat{x}), \end{aligned}$$

si

$$\vec{q} = k\vec{p},$$

por lo que se tiene:

$$\hat{q} = k\vec{p}\delta_a + 2\mu\hat{Q}(a)\delta_a + \hat{q}(a)\mu^2.$$

### Proposición 1.1

Sean  $\hat{q} \in \hat{E}$ ,  $a \in X$ .

Existen  $k, t_a \in \mathbb{K}$  y  $\vec{v}_a \in \vec{X}$  únicos, de modo que:

$$\hat{q} = k\vec{p}\delta_a + 2\mu\vec{P}(\vec{v}_a)\delta_a + t_a\mu^2.$$

*Demostración*

Basta tomar:  $k \in \mathbb{K}$  tal, que

$$\vec{q} = k\vec{p}, \quad t_a = \hat{q}(a).$$

Obsérvese además que,

$$\hat{Q}(a)\delta_a = \hat{Q}(a)|_{\vec{X}}\delta_a.$$

Ahora,

$$\hat{Q}(a)|_{\vec{X}} \in \vec{X}^*,$$

y como  $\vec{P}: \vec{X} \rightarrow \vec{X}^*$  es isomorfismo por ser  $\vec{p}$  no degenerada, existe  $\vec{v}_a \in \vec{X}$  tal, que

$$\vec{P}(\vec{v}_a) = \hat{Q}(a)|_{\vec{X}}.$$

La unicidad es inmediata.  $\square$

*Corolario 1.2*

$$\dim \hat{E} = 2 + \dim X.$$

*Demostración*

Es consecuencia de que la aplicación

$$\Gamma_a: \mathbb{K} \times \vec{X} \times \mathbb{K} \rightarrow \hat{E}$$

definida mediante:

$$\Gamma_a(k, \vec{v}, t) = k\vec{p}\delta_a + 2\mu\vec{P}(\vec{v})\delta_a + t\mu^2,$$

para

$$(k, \vec{v}, t) \in \mathbb{K} \times \vec{X} \times \mathbb{K}$$

es un isomorfismo de espacios vectoriales.  $\square$

Es conveniente conocer el efecto de un cambio del punto base  $a$  para la expresión de los elementos de  $\hat{E}$  dada por la proposición 1.1. Se tiene:

### Proposición 1.3

Sea  $\hat{q} \in \hat{E}$ . Sean  $a, b \in X$ . Si:

$$\hat{q} = k\vec{p}\delta_a + 2\mu\vec{P}(\vec{v}_a)\delta_a + t_a\mu^2 = k\vec{p}\delta_b + 2\mu\vec{P}(\vec{v}_b)\delta_b + t_b\mu^2$$

entonces es:

$$t_b = t_a + k\vec{p}(\overline{ab}) + 2\vec{P}(\vec{v}_a, \overline{ab}) \quad (1)$$

$$\vec{v}_b = \vec{v}_a + k\overline{ab} \quad (2)$$

### Demostración

$$\begin{aligned} t_b = \hat{q}(b) &= \hat{q}(a + \overline{ab}) = \hat{q}(a) + \hat{q}(\overline{ab}) + 2\hat{Q}(a, \overline{ab}) = \\ &= t_a + k\vec{p}(\overline{ab}) + 2\vec{P}(\vec{v}_a, \overline{ab}). \end{aligned}$$

Por otra parte, para  $\vec{x} \in \vec{X}$  se tiene:

$$\begin{aligned} \vec{P}(\vec{v}_b, \vec{x}) &= \hat{Q}(b, \vec{x}) = \hat{Q}(a + \overline{ab}, \vec{x}) = \\ &= \hat{Q}(a, \vec{x}) + \hat{Q}(\overline{ab}, \vec{x}) = \vec{P}(\vec{v}_a, \vec{x}) + k\vec{P}(\overline{ab}, \vec{x}) = \\ &= \vec{P}(\vec{v}_a + k\overline{ab}, \vec{x}), \end{aligned}$$

de donde se deduce (2) por ser  $\vec{P}$  isomorfismo.

### Definición 1.4

Llamaremos pseudoesferas del espacio afín métrico  $X$  a los elementos de  $E = P(\hat{E})$ , es decir, a las cuádricas proyectivas de  $X$  que derivan de formas cuadráticas no nulas de  $\hat{E}$ .

Con objeto de determinar las pseudoesferas, utilizaremos la fórmula (2) de 1.3 para obtener expresiones normalizadas de las formas cuadráticas de  $\hat{E}$ . En concreto, se tiene:

**Teorema 1.5**

Sea  $\hat{q} \in \hat{E}$  tal que  $\vec{q} = k\vec{p}$ .

Si  $k \neq 0$ , existe un único  $c \in X$  de modo que,

$$\hat{q} = k\vec{p}\delta_c + t\mu^2.$$

Si  $k = 0$ , existe un único  $\vec{v} \in \vec{X}$  de modo que,

$$\hat{q} = 2\mu\vec{P}(\vec{v})\delta_b + \hat{q}(b)\mu^2, \forall b \in X.$$

**Demostración**

Supóngase:

$$\hat{q} = k\vec{p}\delta_a + 2\mu\vec{P}(\vec{v}_a)\delta_a + t_a\mu^2.$$

Si  $k \neq 0$ , obsérvese que,

$$c = \frac{1}{k} \vec{v}_a \Leftrightarrow \vec{v}_c = \vec{0},$$

en virtud de (2). Tomando  $t = \hat{q}(c)$  es:

$$\hat{q} = k\vec{p}\delta_c + t\mu^2 + 2\mu\vec{P}(\vec{0})\delta_c = k\vec{p}\delta_c + t\mu^2.$$

Si  $k = 0$ , tomando  $\vec{v} = \vec{v}_a$  se obtiene mediante (2)  $\vec{v}_b = \vec{v}$ , con lo que se deduce el resultado.  $\square$

**Observaciones 1.6**

a) Si  $k \neq 0$ , la cuádrica proyectiva  $q = [\hat{q}]$  de  $\vec{X}$  tiene asociada la cuádrica afín

$$[\hat{q}|_X] = q \cap X,$$

con centro (único) el punto  $c$ .  $q$  tiene un representante de la forma:

$$\hat{q}' = \vec{p}\delta_c + \beta\mu^2;$$

así  $q \cap X$  se representa mediante

$$\vec{p}(x - c) + \beta = 0.$$

Se llama entonces a la cuádrlica  $q$  pseudoesfera de centro  $c \in X$  y potencia  $\beta \in \mathbb{K}^{(*)}$ , que se denota con  $\tilde{\sigma}(c, \beta)$ .  $\tilde{\sigma}(c, 0)$  es el cono isótropo de vértice  $c$ .

b) Si  $k = 0$  y  $\vec{v} \neq 0$ , entonces  $q \cap X$  es un hiperplano afín de  $X$  cuya dirección es ortogonal en  $\bar{X}$  al vector  $\vec{v}$ .

c) Si  $k = 0$  y  $\vec{v} = \vec{0}$ , la cuádrlica proyectiva  $q = [\mu^2]$  se representa por el símbolo  $\infty$ .

d) En resumen, los elementos de  $E$  se distribuyen en tres subconjuntos disjuntos: el conjunto  $\Sigma$  de pseudoesferas con centro, el conjunto  $\Theta$  de los hiperplanos de  $X$  y el conjunto unitario  $\{\infty\}$ . Obsérvese que  $\Theta \cup \{\infty\}$  es un hiperplano proyectivo de  $E$ .

e) En virtud del corolario 1.2,  $\dim E = 1 + \dim X$ .

f) Se seguirán las siguientes notaciones:

$$\bar{S}(c, \beta) := \text{im } \tilde{\sigma}(c, \beta).$$

$$S(c, \beta) := \bar{S}(c, \beta) \cap X.$$

$$\Lambda(c) := S(c, 0).$$

$$\Lambda_\infty := \text{im } [\vec{p}] \subset X_\infty.$$

$$\bar{\Lambda}(c) := \Lambda(c) \cup \Lambda_\infty = \text{im } \tilde{\sigma}(c, 0).$$

## 2. EXTENSIÓN CUÁDRICA DE UN ESPACIO AFÍN MÉTRICO

En esta sección se representa el conjunto de puntos de  $X$  como subconjunto de la imagen  $\bar{X}$  de una cuádrlica proyectiva de  $E$ , construida de manera canónica a partir de la métrica  $\vec{p}$  de  $X$ .

### Proposición 2.1

Se define la correspondencia  $\hat{\xi}: \hat{E} \rightarrow \mathbb{K}$  del siguiente modo: si

$$\hat{q} \in \hat{E}, \hat{q} = k\vec{p}\delta_a + 2\mu\vec{P}(\vec{v}_a)\delta_a + t_a\mu^2, \hat{\xi}(\hat{q}) = \vec{p}(\vec{v}_a) - kt_a.$$

Se verifica que  $\hat{\xi}$  es una forma cuadrática no degenerada.

\* Esta denominación se extenderá, cuando no haya confusión, tanto a  $q \cap X$  como a  $\text{im } q$ ,  $\text{im } q \cap X$ .

*Demostración*

Obsérvese en primer lugar que la definición de  $\hat{\xi}$  no depende del punto  $a$ . En efecto, utilizando las fórmulas (1) y (2) de 1.3, se obtiene:

$$\begin{aligned} \forall b \in X, \vec{p}(\vec{v}_b) - kt_b &= \vec{p}(\vec{v}_a + k\vec{a}b) - \\ &- k(t_a + k\vec{p}(\vec{a}b) + 2\vec{P}(\vec{v}_a, \vec{a}b)) = \vec{p}(\vec{v}_a) - kt_a, \end{aligned}$$

por lo que  $\hat{\xi}$  es aplicación.

Se verifica que  $\hat{\xi}$  es forma cuadrática: basta observar que la aplicación  $\Psi : \hat{E} \times \hat{E} \rightarrow \mathbb{K}$  tal, que para

$$\hat{q} = k\vec{p}\delta_a + 2\mu\vec{P}(\vec{v}_a)\delta_a + t_a\mu^2$$

y

$$\hat{q}' = k'\vec{p}\delta_a + 2\mu\vec{P}(\vec{v}'_a)\delta_a + t'_a\mu^2$$

toma el valor

$$\Psi(\hat{q}, \hat{q}') = \vec{P}(\vec{v}_a, \vec{v}'_a) - \frac{1}{2}(kt'_a + k't_a)$$

es una forma bilineal simétrica, y además

$$\forall \hat{q} \in \hat{E}, \Psi(\hat{q}, \hat{q}) = \hat{\xi}(\hat{q}).$$

Finalmente, a partir de la expresión de  $\Psi$  es inmediato comprobar que el radical de  $\hat{\xi}$ , es decir,  $\hat{E}^\perp$ , se reduce al subespacio cero, y así  $\hat{\xi}$  es no degenerada.  $\square$

Llamaremos  $\xi$  a la cuádrica proyectiva inducida en  $E$  por  $\hat{\xi}$ , es decir:  $\xi = [\hat{\xi}]$ . El conjunto de puntos de la cuádrica se representará mediante  $\overline{X}$ , y se denominará extensión cuádrica de  $X$ .

Estudiaremos algunas propiedades de la cuádrica  $\xi$ .

*Propiedades 2.2*

- (i)  $\infty^\pi = \Theta \cup \{\infty\}$ , donde el superíndice  $\pi$  denota polar respecto a  $\xi$ .  
En efecto, sea

$$\hat{q} = k\vec{p}\delta_a + 2\mu\vec{P}(\vec{v}_a)\delta_a + t_a\mu^2.$$



Se verifica:

$$\Psi(q, \mu^2) = 0 \Leftrightarrow \vec{P}(\vec{v}_a, \vec{0}) - \frac{1}{2}(k + 0t_a) = 0 \Leftrightarrow k = 0. \square$$

Obsérvese que, en particular,  $\infty \in \overline{X}$ .

(ii)  $\forall c \in X, \forall \beta \in \mathbb{K}$ , la recta  $\langle \infty, \tilde{\sigma}(c, \beta) \rangle$  corta a  $\overline{X}$  en  $\tilde{\sigma}(c, 0)$ .  
Para probarlo, obsérvese en primer lugar que,

$$\langle \infty, \tilde{\sigma}(c, \beta) \rangle = \{\infty\} \cup \{\tilde{\sigma}(c, \gamma), \gamma \in \mathbb{K}\}.$$

En efecto, sea

$$\hat{q} = \vec{p}\delta_c + \beta\mu^2,$$

de modo que

$$[\hat{q}] = \tilde{\sigma}(c, \beta).$$

La recta  $\langle \infty, \tilde{\sigma}(c, \beta) \rangle$  está determinada por el plano de formas cuadráticas:

$$\hat{q}' = \varrho\hat{q} + \tau\mu^2, \quad \varrho, \tau \in \mathbb{K}$$

es decir:

$$\hat{q}' = \varrho\vec{p}\delta_c + (\beta + \tau)\mu^2$$

que representan las cuádricas:

$$\infty \text{ (si } \varrho = 0)$$

y

$$\tilde{\sigma}\left(c, \frac{\beta + \tau}{\varrho}\right) \text{ (si } \varrho \neq 0).$$

Ahora,

$$\tilde{\sigma}(c, \gamma) \in \overline{X} \Leftrightarrow \gamma = 0. \square$$

Estamos en condiciones de definir una inmersión de  $X$  en el conjunto  $\overline{X}$  de puntos de  $\xi$ .

*Proposición 2.3*

La aplicación  $\bar{e} : X \rightarrow \bar{X}$  definida mediante  $\bar{e}(c) = \bar{\sigma}(c, 0)$  para  $c \in X$ , es una biyección de  $X$  en  $\bar{X} - \infty^\pi$ .

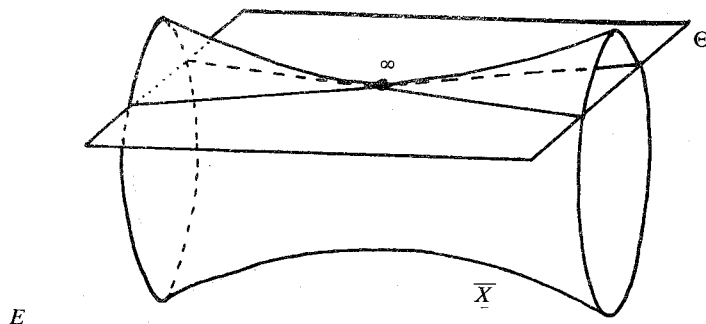


FIGURA 2.

*Demostración*

Queda únicamente probar que:

$$\bar{e}(X) = \bar{X} - \infty^\pi.$$

Puesto que  $\bar{\sigma}(c, 0)$  es una pseudoesfera con centro, necesariamente está fuera de  $\infty^\pi$  en virtud de (i). Esto prueba el contenido,

$$\bar{e}(X) \subset \bar{X} - \infty^\pi.$$

Recíprocamente, todo elemento de  $E - \infty^\pi$  es una cuádrica con centro. Si además está en  $\bar{X}$ , su potencia es nula, por lo que debe ser la imagen de algún punto de  $X$ .  $\square$

La siguiente propiedad relaciona el conjunto de puntos de una pseudoesfera de  $X$  con la pseudoesfera como punto de  $E$ .

*Teorema 2.4*

$$\forall q \in E, \bar{e}(\text{im } q \cap X) = q^\pi \cap (\bar{X} - \infty^\pi).$$

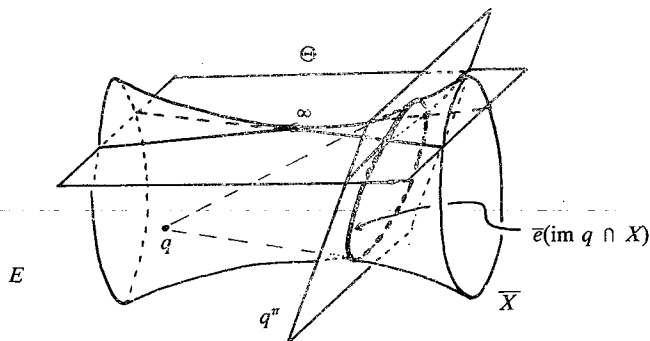


FIGURA 3.

**Demostración**

Sea:

$$\tilde{\alpha}(a, 0) \in \bar{X} - \infty^\pi.$$

Supóngase que  $q = [\hat{q}]$ , donde,

$$\hat{q} = k\vec{p}\delta_a + 2\mu\vec{P}(\vec{v}_a)\delta_a + t_a\mu^2.$$

Se verifica que:

$$\tilde{\alpha}(a, 0) \in q^\pi \Leftrightarrow \Psi(\hat{q}, \vec{p}\delta_a) = 0 \Leftrightarrow \vec{P}(\vec{v}_a, \vec{0}) - \frac{1}{2}(0 + t_a) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow t_a = 0 \Leftrightarrow a \in \text{im } q \cap X \Leftrightarrow \tilde{\alpha}(a, 0) \in \bar{e}(\text{im } q \cap X),$$

ya que

$$\bar{e}(a) = \tilde{\alpha}(a, 0). \quad \square$$

**Observación 2.5**

Si  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  la aplicación  $\bar{e} : X \rightarrow \bar{X}$  es un homeomorfismo sobre la imagen  $\bar{e}(X) = \bar{X} \cap \Sigma$ . Además  $\bar{X}$  es una subvariedad compacta de  $E$ . De este modo resulta que  $\bar{X}$  es una compactificación de  $X$ . Si la métrica  $\vec{p}$  de  $X$  es euclídea, entonces  $\bar{X}$  es una esfera; se trata en este caso de la compactificación de Alexandroff de  $X$ .

## 3. ESTUDIO DE LAS INVERSIONES

Las homología involutivas del espacio proyectivo  $E$  que dejan invariante la cuádrica  $\xi$ , es decir, aquellas con punto base  $q \in E - \bar{X}$  e hiperplano de puntos fijos  $q^\pi$ , actúan sobre  $\bar{X}$  y generan el grupo proyectivo de la cuádrica,  $GP(\xi)$ . En particular, si  $h_q$  es la homología involutiva de  $GP(\xi)$  con base  $q \in E - \bar{X}$ , la imagen de  $q' \in \bar{X}$  se encuentra en  $\langle q, q' \rangle \cap \bar{X}$ .

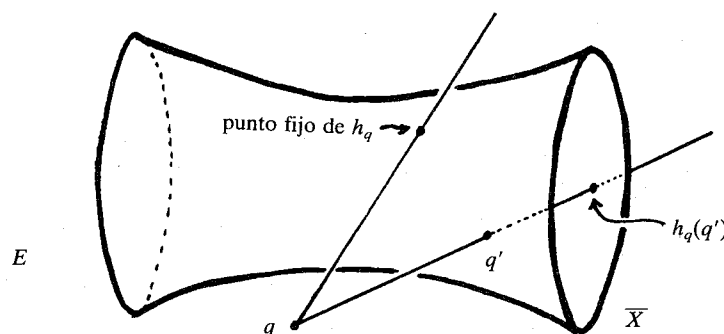


FIGURA 4.

Se observa que los puntos fijos de  $h_q$  son precisamente los de  $q^\pi \cap \bar{X}$ .

La homología  $h_q$  induce una correspondencia de  $X$  en sí mismo mediante la composición  $\bar{e}^{-1} h_q \bar{e}$ , que está definida en  $X - \bar{e}^{-1}(h_q^\infty)$ .

*Definición 3.1*

Se llamará inversión respecto a la cuádrica  $q \in E - \bar{X}$  a la aplicación  $i_q$  de  $X - \bar{e}^{-1}(h_q^\infty)$  en sí mismo, inducida por  $\bar{e}^{-1} h_q \bar{e}$ .

Obsérvese que, del mismo modo que en el caso euclídeo es preciso añadir un «punto del infinito» para que las inversiones estén definidas en todo el espacio, en el caso general se necesita la extensión cuádrica.

*Proposición 3.2*

a) Si  $q = \check{\sigma}(c, \beta)$ , entonces

$$\bar{e}^{-1}(h_q^\infty) = \Lambda(c),$$

y el conjunto de puntos fijos de  $i_q$  es  $S(c, \beta)$ . En este caso  $i_q$  se llamará inversión de centro  $c$  y potencia  $\beta$ , representándose con  $i_{c, \beta}$ .

b) Si  $q \in \Theta - \bar{X}$ , entonces

$$\bar{e}^{-1}(h_q \infty^n) = \phi$$

$i_q$  es una aplicación de  $X$  en sí mismo cuyo conjunto de puntos fijos es el hiperplano  $\text{im } q \cap X$ .

### Demostración

En ambos casos se tiene para  $x \in X$ :  $x$  es punto fijo de  $i_q \Leftrightarrow \bar{e}(x)$  es fijado por  $h_q \Leftrightarrow \bar{e}(x) \in q^n \Leftrightarrow x \in \text{im } q \cap X$ , en virtud del teorema 2.4.

Si  $q = \bar{\sigma}(c, \beta)$ , es:

$$h_q \infty = \langle \infty, \bar{\sigma}(c, \beta) \rangle \cap \bar{X} - \{\infty\} = \bar{\sigma}(c, 0)$$

por la propiedad (ii). Aplicando el teorema 2.3,

$$\bar{e}^{-1}(\bar{\sigma}(c, 0)^n) = \text{im } \bar{\sigma}(c, 0) \cap X = \Lambda(c).$$

Si  $q \in \Theta - \bar{X}$ , es  $q \in \infty^n$ , por tanto,  $\infty \in q^n$  es un elemento fijado por  $h_q$ . Así,  $h_q \infty^n = \infty^n$ , que está fuera de la imagen de  $\bar{e}$ .  $\square$

### 3.3. Inversiones respecto a pseudoesferas con centro

La inversión  $i_{c, \beta}$  actúa sobre  $X - \Lambda(c)$ . Interesa poseer una fórmula que permita expresar las imágenes de los puntos mediante elementos del espacio afín métrico  $X$ .

En primer lugar, sabemos que para  $a \in X - \Lambda(c)$ , es:

$$i_{c, \beta}(a) = a' \Leftrightarrow h_{\bar{\sigma}(c, \beta)} \bar{\sigma}(a, 0) = \bar{\sigma}(a', 0).$$

De esto se deducen los siguientes resultados:

a) Sea  $\hat{q} = \vec{p}\delta_c + \beta\mu^2$  una forma cuadrática que representa a  $\bar{\sigma}(c, \beta)$ . La cuádrlica  $\bar{\sigma}(a, 0)$  está representada por:

$$\hat{q}_a = \vec{p}\delta_a = \vec{p}\delta_c + 2\mu\vec{P}(\overline{ac})\delta_c + \vec{p}(\overline{ac})\mu^2$$

(fórmulas de 1.3). Entonces la cuádrlica  $\bar{\sigma}(a', 0)$  está determinada por  $\hat{q}_{a'}$ , en las condiciones siguientes:

— Los vectores  $\hat{q}$ ,  $\hat{q}_a$  y  $\hat{q}_{a'}$  son linealmente dependientes en  $\hat{E}$ .

—  $\xi(\hat{q}_{a'}) = 0$ , lo que nos lleva a la conclusión de que:

$$\hat{q}_{a'} = \frac{\vec{p}(\vec{ac})}{\beta} \vec{p}\delta_c + 2\mu\vec{P}(-\vec{ac})\delta_c + \beta\mu^2.$$

y así se tiene, en virtud del teorema 1.5:

$$a' = c + \frac{\beta}{\vec{p}(\vec{ac})} \vec{ac} \quad (3)$$

Obsérvese en particular que  $a$ ,  $a'$  y  $c$  están alineados.

b) De la fórmula (3) se obtiene:

$$\vec{ca'} = \frac{\beta}{\vec{p}(\vec{ac})} \vec{ac}$$

por tanto,

$$\vec{p}(\vec{ca'}) = \frac{\beta^2}{\vec{p}(\vec{ac})^2} \cdot \vec{p}(\vec{ac}) = \frac{\beta^2}{\vec{p}(\vec{ca})},$$

de donde se deduce una fórmula semejante a la de la inversión en el caso euclídeo:

$$\vec{p}(\vec{ca}) \cdot \vec{p}(\vec{ca'}) = \beta^2 \quad (4)$$

c) Obsérvese que mediante la fórmula (4) se obtiene que el producto de inversiones respecto a pseudoesferas concéntricas es una homotecia. Más precisamente,

$$i_{c, \beta'} \cdot i_{c, \beta}$$

es la homotecia de centro  $c$  y razón

$$\frac{\beta'}{\beta}.$$

De este modo se recupera el grupo de dilataciones (homotecias + traslaciones) del espacio afín  $X$ .

3.4. Inversiones respecto a pseudoesferas sin centro

Si  $q$  es una pseudoesfera sin centro que no pertenezca a  $\overline{X}$ , entonces  $\text{im } q \cap X$  es un hiperplano  $H$  de  $X$  tal, que

$$\vec{H}^\perp \cap \vec{H} = \{\vec{0}\}$$

(hiperplano no degenerado). La inversión  $i_q$  está definida en todo  $X$  y, como se verá a continuación,  $i_q$  es la simetría ortogonal con base  $H$ , es decir, la dirección de simetría es precisamente  $\vec{H}^\perp$ .

En efecto, si  $c \in H$ , la pseudoesfera  $q$  está representada por la forma cuadrática

$$\hat{q} = 2\mu\vec{P}(\vec{v})\delta_c,$$

donde

$$\vec{v} \in \vec{H}^\perp.$$

Como en el apartado anterior la cuádrica  $\tilde{\sigma}(a, 0)$  se representa mediante:

$$\hat{q}_a = \vec{p}\delta_c + 2\mu\vec{P}(\vec{ac})\delta_c + \vec{p}(\vec{ac})\mu^2,$$

y

$$i_q(a) = a' \Leftrightarrow h_q\tilde{\sigma}(a, 0) = \tilde{\sigma}(a', 0),$$

donde una forma cuadrática  $\hat{q}_{a'}$  que represente a  $\tilde{\sigma}(a', 0)$  verifica las condiciones:

- Los vectores  $\hat{q}$ ,  $\hat{q}_a$  y  $\hat{q}_{a'}$  son linealmente dependientes en  $\hat{E}$ .
- $\hat{\xi}(\hat{q}_{a'}) = 0$ , con lo que podemos obtener:

$$\hat{q}_{a'} = \vec{p}\delta_c + 2\mu\vec{P}\left(\vec{ac} - \frac{2\vec{P}(\vec{v}, \vec{ac})}{\vec{p}(\vec{v})}\vec{v}\right) + \vec{p}(\vec{ac})\mu^2$$

de este modo, según el teorema 1.5, es:

$$a' = a + 2 \frac{\vec{P}(\vec{v}, \vec{ac})}{\vec{p}(\vec{v})} \vec{v} \tag{5}$$

Así, es claro, que el vector

$$\overline{aa'} \in \langle \vec{v} \rangle = \vec{H}^\perp.$$

Además, el punto

$$a'' = \frac{1}{2} a + \frac{1}{2} a' = a + \frac{\vec{P}(\vec{v}, \vec{ac})}{\vec{p}(\vec{v})} \vec{v}$$

pertenece a  $H$ . Basta observar que

$$\hat{q}(a'') = 2\vec{P}(\vec{v})\delta_c(a'') = 2\vec{P}\left(\vec{v}, \frac{\vec{P}(\vec{v}, \vec{ac})}{\vec{p}(\vec{v})} \vec{v} - \vec{ac}\right) = 0.$$

Obsérvese que hemos recuperado el grupo de movimientos del espacio métrico  $(X, \vec{p})$ . Así, y utilizando el resultado c) del apartado anterior, se tiene que el grupo de semejanzas de  $(X, \vec{p})$  es subgrupo del grupo de correspondencias  $GP(\xi)$  actuando sobre  $X$ .

### 3.5. Pseudoesferas ortogonales

Diremos que dos pseudoesferas  $q, q' \in E$  son ortogonales si  $q' \in q^\pi$ . La relación de ortogonalidad es simétrica.

Interesa aquí hacer notar la siguiente propiedad:

Si  $q'$  es ortogonal a  $q$ , entonces el conjunto  $\text{im } q' \cap X$  es invariante por  $i_q$  en el siguiente sentido, si:

$$x \in \text{im } q' \cap X - \bar{e}^{-1}(h_q \infty^\pi),$$

entonces,

$$i_q(x) \in \text{im } q' \cap X.$$

Para ello, basta probar que el conjunto

$$\bar{e}(\text{im } q' \cap X) - h_q \infty^\pi$$

es invariante por la homología  $h_q$ . Pero en virtud del teorema 2.4, este conjunto coincide con

$$q^\pi \cap (\bar{X} - \infty^\pi - h_q \infty^\pi).$$

La propiedad es consecuencia de que, tanto  $q^\pi$  como  $\bar{X}$  son invariantes por  $h_q$ .  $\square$

El siguiente resultado tiene interés para establecer el concepto de proyección estereográfica.



**Teorema 3.6**

Sea  $S(e, \alpha)$ ,  $\alpha \neq 0$ , una pseudoesfera que contiene al punto  $c \in X - \Lambda(e)$ . Entonces, para cada hiperplano  $Y$  ortogonal a  $\vec{c\bar{e}}$  que no pase por  $c$ , existe  $\beta \in \mathbb{K} - \{0\}$  tal, que:

$$i_{c,\beta}(S(e, \alpha) - \Lambda(c)) = Y - \Lambda(c).$$

**Demostración**

Una forma cuadrática de  $\hat{E}$  que representa a  $Y$  es:

$$\hat{q}_Y = 2\mu\vec{P}(\vec{c\bar{e}})\delta_c + t\mu^2,$$

con  $t \neq 0$ .

Del mismo modo, una forma cuadrática que representa a  $S(e, \alpha)$ , teniendo en cuenta que  $c \in S(e, \alpha)$ , es:

$$\hat{q}_S = \vec{p}\delta_e + \alpha\mu^2,$$

con  $\alpha + \vec{p}(\vec{c\bar{e}}) = 0$ .

Aplicando las fórmulas de 1.3, es:

$$\hat{q}_S = \vec{p}\delta_c + 2\mu\vec{P}(\vec{c\bar{e}})\delta_c.$$

Sea  $q_Y = [\hat{q}_Y]$ , y sea  $q_S = [\hat{q}_S]$ . Las siguientes igualdades son equivalentes:

$$i_{c,\beta}(S(e, \alpha) - \Lambda(c)) = Y - \Lambda(c)$$

$$\vec{e}^{-1}h_{\vec{\alpha}(c, \beta)}\vec{e}(S(e, \alpha) - \Lambda(c)) = Y - \Lambda(c)$$

(aplicando la definición 3.1).

$$h_{\vec{\alpha}(c, \beta)}((q_S^\pi - \vec{\alpha}(c, 0)^\pi) \cap (\bar{X} - \infty^\pi)) = (q_Y^\pi - \vec{\alpha}(c, 0)^\pi) \cap (\bar{X} - \infty^\pi)$$

(aplicando el teorema 2.4).

$$h_{\vec{\alpha}(c, \beta)}(q_S^\pi) - \infty^\pi - \vec{\alpha}(c, 0)^\pi = q_Y^\pi - \vec{\alpha}(c, 0)^\pi - \infty^\pi$$

(ya que  $h_{\vec{\alpha}(c, \beta)}$  está determinada por su acción en  $\bar{X}$ ).

$$h_{\vec{\alpha}(c, \beta)}(q_S^\pi) = q_Y^\pi,$$

y finalmente,

$$h_{\bar{\alpha}(c, \beta)}(q_S) = q_Y,$$

por ser

$$h_{\bar{\alpha}(c, \beta)} \in GP(\tilde{S}).$$

Así pues, lo que hay que probar es que para cada hiperplano  $Y$  existe  $\beta \in \mathbb{K}$ , verificando

$$h_{\bar{\alpha}(c, \beta)}(q_S) = q_Y.$$

Probaremos que

$$h_{\bar{\alpha}(c, -t)}(q_S) = q_Y.$$

En primer lugar, se tiene:

$$c \in \text{im } q_S \cap X \Rightarrow \bar{c}(c) = \bar{\alpha}(c, 0) \in q_S^\pi$$

(en virtud del teorema 2.4). Entonces,

$$q_S \in \bar{\alpha}(c, 0)^\pi,$$

de donde obtenemos:

$$h_{\bar{\alpha}(c, -t)}(q_S) \in h_{\bar{\alpha}(c, -t)}\bar{\alpha}(c, 0)^\pi = \infty^\pi,$$

es decir, se trata de un hiperplano.

Queda entonces únicamente comprobar que  $\bar{\alpha}(c, -t)$ ,  $q_S$  y  $q_Y$  están alineados en  $E$ . Para ello basta observar que, en  $\tilde{E}$ :

$$\hat{q}_S - \hat{q}_Y = \bar{p}\delta_c - t\mu^2,$$

que es una forma cuadrática que representa a  $\bar{\alpha}(c, -t)$ .  $\square$

*Escolio*

$\forall \beta \in \mathbb{K} - \{0\}$ ,  $i_{c, \beta}(S(e, \alpha) - \Lambda(c))$  está contenido en un hiperplano ortogonal a  $\bar{c}\bar{e}$ .

## 4. PROYECCIÓN ESTEREOGRÁFICA

En esta sección  $\tilde{S}$  denota a la pseudoesfera  $\tilde{S}(e, \alpha)$ ,  $\alpha \neq 0$ , que viene representada por la forma cuadrática:

$$\hat{q} = \vec{p}\delta_e + \alpha\mu^2,$$

cuya forma bilineal simétrica asociada es:

$$\hat{Q}(\hat{x}, \hat{y}) = \vec{P}(\delta_c(\hat{x}), \delta_c(\hat{y})) + \alpha\mu(\hat{x})\mu(\hat{y}).$$

Se denota con  $S$  a la pseudoesfera  $S(e, \alpha)$ .

Dado el punto  $c \in S$  y un hiperplano afín  $Y$  con dirección  $\vec{c}e^\perp$ ,  $c \notin Y$ , se obtendrá la proyección estereográfica de  $\tilde{S}$  sobre  $Y$  como una extensión natural de la inversión  $i_{c,\beta}$  (establecida en 3.6) que aplica  $S$  en  $Y$ . Esto exige alguna elaboración previa.

## 4.1. Hiperplanos tangentes a pseudoesferas

Si  $c \in \tilde{S}$ ,  $c = [\hat{c}]$ , entonces  $c^\pi = \hat{H}$  representa el hiperplano tangente a  $\tilde{S}$  en  $c$ , que puede describirse en la forma:

$$\hat{H} = \{x = [\hat{x}] \in \tilde{X} / \vec{P}(\delta_e(\hat{c}), \delta_e(\hat{x})) + \alpha\mu(\hat{c})\mu(\hat{x}) = 0\}$$

y se tiene:

a) Si  $c \in \tilde{S} \cap X_\infty = \Lambda_\infty$ , es

$$\mu(\hat{c}) = 0$$

y

$$H = \hat{H} \cap X = \{x \in X / \vec{P}(\hat{c}, \vec{x}) = 0\}$$

es un hiperplano afín con dirección  $\hat{c}^\perp \subset \tilde{X}$  que contiene al punto  $c$ . Obsérvese que  $\hat{H}$  no depende de  $\alpha$  y es tangente a la cuádrlica  $\tilde{\Lambda}(e)$  en todos los puntos de la recta  $\langle e, c \rangle \subset \tilde{\Lambda}(e)$ .

b) Si  $c \in S$ , podemos tomar

$$\hat{c} = c, \quad (\mu(c) = 1)$$

y

$$H = \bar{H} \cap X = \{x \in X \mid \vec{P}(\vec{ec}, \vec{ex}) + \alpha = 0\}$$

es un hiperplano afín que contiene a  $c$  y tiene dirección  $\bar{H} = \vec{ec}^\perp$ .

Estudiamos la intersección de  $H$  con la cuádrica:

(i) Se verifica:

$$H \cap S = H \cap \Lambda(c).$$

En efecto, de la igualdad

$$\vec{P}(\vec{ec}, \vec{cx}) = \vec{P}(\vec{ec}, \vec{ce}) + \vec{P}(\vec{ec}, \vec{ex})(x \in X)$$

se deduce la equivalencia:

$$x \in H \Leftrightarrow \vec{P}(\vec{ec}, \vec{cx}) = 0,$$

que muestra que si  $x \in H$ , es:

$$\vec{p}(\vec{ex}) = \vec{p}(\vec{ec}) + \vec{p}(\vec{cx}) = -\alpha + \vec{p}(\vec{cx}).$$

Así, se tiene (para  $x \in H$ ):

$$x \in \Lambda(c) \Leftrightarrow \vec{p}(\vec{cx}) = 0 \Leftrightarrow \vec{p}(\vec{ex}) = -\alpha \Leftrightarrow x \in S.$$

(ii) Si  $\bar{H} \cap \bar{S} \neq \{c\}$ , entonces todas las rectas  $\langle c, x \rangle$  con  $x \in \bar{H} \cap \bar{S}$  están contenidas en  $\bar{S}$ .

Recíprocamente, si la recta  $\langle c, x \rangle$  está contenida en  $\bar{S}$ , entonces  $x$  es conjugado de  $c$ , y  $x \in \bar{H} \cap \bar{S}$ .

#### Definición (proposición) 4.2

Sea  $c \in S$  e  $Y$  un hiperplano afín paralelo (y distinto) al hiperplano  $H$  tangente a  $S$  en  $c$ . Entonces la aplicación

$$\varepsilon : \bar{S} - (\bar{S} \cap \bar{H}) \rightarrow Y$$

definida mediante

$$\varepsilon(x) = \langle c, x \rangle \cap Y$$

está bien definida y es biyectiva. Se denomina a  $\varepsilon$  proyección estereográfica de  $\tilde{S}$  sobre  $Y$  con polo  $c$ .

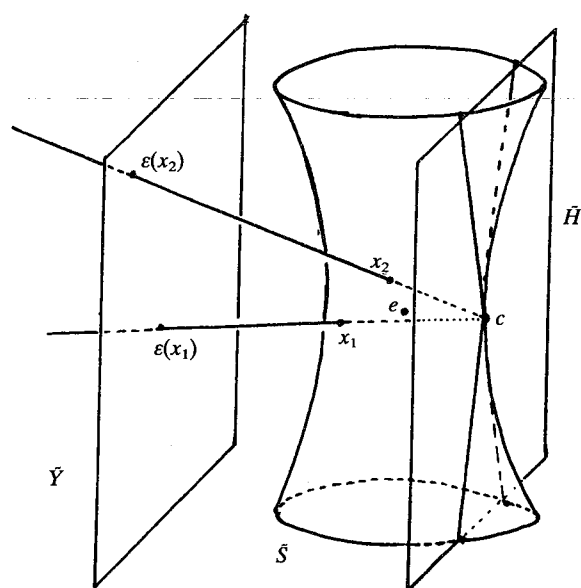


FIGURA 5.

*Demostración*

De 4.1 b) se deduce que para una recta afín  $R$  que contenga a  $c$  se verifica la implicación

$$R \subset S \Rightarrow R \subset H.$$

Así, si  $R \not\subset H$ , por ser  $Y$  paralelo a  $H$  es  $R \cap Y = \{y\}$ ; además,

$$\tilde{R} \cap (\tilde{S} - \{c\}) = \{x\} \quad \text{y} \quad x \in \tilde{S} - (\tilde{S} \cap \tilde{H}).$$

Así,  $\varepsilon(x) = y$ .

Nótese por otra parte que las rectas  $\tilde{R}$  de la forma  $\langle c, x \rangle$  con  $x \in \tilde{S} - (\tilde{S} \cap \tilde{H})$  o  $\langle c, y \rangle$  con  $y \in Y$  no están contenidas en  $\tilde{H}$  ni en  $\tilde{S}$ . Esto prueba la biyectividad de  $\varepsilon$ .  $\square$

A partir del teorema 2.6, teniendo en cuenta que

$$\tilde{H} = \tilde{Y} = \overline{ec}^\perp,$$

es inmediato el siguiente resultado:

*Proposición 4.3*

Dada la proyección estereográfica  $\varepsilon$  de  $\tilde{S}$  en  $Y$  con polo  $c \in S$ , existe una única inversión  $i$  de centro  $c$ , tal que:

$$\varepsilon|_{S - \Lambda(c)} = i.$$

Por otra parte,  $\varepsilon$  se obtiene como restricción de la proyección cónica  $\bar{\varepsilon}$  de centro  $c$  y base  $\tilde{Y}$  a  $\tilde{S} - (\tilde{S} \cap c^\pi)$ .

En particular se deduce que  $\varepsilon$  transforma cualquier recta contenida en  $S$  que no pase por  $c$  en una recta de  $Y$ .  $\square$

*Teorema 4.4: Elevación de simetrías ortogonales*

(i) En las hipótesis de la definición 4.2, si  $a \in \tilde{H} - \tilde{\Lambda}(c)$ , entonces la homología armónica  $h : \tilde{X} \rightarrow \tilde{X}$  con centro  $a$  y base  $a^\pi$  deja invariante la cuádrica  $\tilde{S}$  y el hiperplano  $\tilde{H}$ . Además

$$h' = \varepsilon h \varepsilon^{-1} : Y \rightarrow Y$$

es una simetría ortogonal en  $(Y, \bar{p}|_{\tilde{Y}})$  con base el hiperplano afín  $a^\pi \cap Y = L$ .

(ii) Recíprocamente, si  $h' : Y \rightarrow Y$  es una simetría ortogonal respecto al hiperplano  $L$  de  $Y$ , entonces la aplicación

$$\varepsilon^{-1} h' \varepsilon : \tilde{S} - (\tilde{S} \cap \tilde{H}) \rightarrow \tilde{S} - (\tilde{S} \cap \tilde{H})$$

se extiende en  $\tilde{X}$  a una única homología armónica con centro

$$a = \langle \{c\} \cup \tilde{L} \rangle^\pi \in \tilde{H} - \tilde{\Lambda}(c)$$

e hiperplano central  $\langle \{c\} \cup \tilde{L} \rangle$ . Por otra parte, la recta  $\langle a, c \rangle \cap X \subset H$  define la dirección de la simetría.

*Demostración*

(1) Como  $a \in \tilde{H} - \tilde{\Lambda}(c)$  se concluye por 4.1 que  $a \notin \tilde{S}$ , por tanto, la homología armónica  $h$  está bien definida, y deja invariante la cuádrica  $\tilde{S}$ . Además  $h$  deja invariante el hiperplano  $\tilde{H}$ , ya que para  $x \in \tilde{H}$  los puntos  $a, x$  y  $h(x)$  están alineados. Así,

$$h(\tilde{H} \cap \tilde{S}) = \tilde{H} \cap \tilde{S}.$$

Como  $\varepsilon : \tilde{S} - (\tilde{H} \cap \tilde{S}) \rightarrow Y$  es biyectiva, se concluye que

$$h' = \varepsilon h \varepsilon^{-1}|_Y : Y \rightarrow Y$$

es biyectiva.

(2) Por ser  $a$  conjugado de  $c$ ,  $c \in a^\pi \cap X$ . Como  $a \notin a^\pi \cap X$  es  $a^\pi \cap X \neq H$  y, por tanto, los hiperplanos  $Y$  (paralelo a  $H$ ) y  $a^\pi \cap X$  se cortan en:

$$L = a^\pi \cap X \cap Y = a^\pi \cap Y$$

que es hiperplano de  $Y$ .

(3) Por otra parte,  $h'$  deja fijos los puntos de  $L$ . Si:

$$y \in L = a^\pi \cap Y$$

entonces,

$$\varepsilon^{-1}(y) = \langle c, y \rangle \cap \tilde{S} \in a^\pi$$

(pues,  $c \in a^\pi$ ) y

$$h(\varepsilon^{-1}(y)) = \varepsilon^{-1}(y).$$

(4) Si  $a$  es un punto propio ( $a \in H$ ), la dirección

$$[\overline{ac}] \in H_\infty = Y_\infty$$

es ortogonal a  $L$ , ya que

$$\langle a, c \rangle^\pi = a^\pi \cap c^\pi = a^\pi \cap \tilde{H},$$

y por tanto,

$$[\overline{ac}] \in \langle a, c \rangle \cap Y_\infty$$

es conjugado de todos los puntos de

$$a^\pi \cap \tilde{H} \cap X_\infty = L_\infty.$$

La conjugación es respecto a la cuádrica  $[\overline{p}|_{\tilde{Y}}]$ , ya que la cuádrica del infinito de  $\tilde{S}$  es  $[\overline{p}]$ .

Si  $a \in H_\infty = Y_\infty$  se prueba de forma análoga que  $\overline{ac}$  define una dirección ortogonal a  $L$ .

(5)  $h' : Y \rightarrow Y$  es aplicación afín:

Si  $\dim X \geq 3$ , es decir:  $\dim Y \geq 2$ , sea  $R$  una recta de  $Y$  y sea  $\tilde{\pi}$  el plano generado por  $c$  y  $R$  en  $\tilde{X}$ . Se tiene:

$$\begin{aligned} h'(R) &= h'(\tilde{\pi} \cap Y) = \varepsilon h \varepsilon^{-1}(\tilde{\pi} \cap Y) = \varepsilon h(\tilde{\pi} \cap (\tilde{S} - \tilde{H})) = \\ &= \varepsilon(h(\tilde{\pi}) \cap (\tilde{S} - \tilde{H})) = h(\tilde{\pi}) \cap Y, \end{aligned}$$

ya que  $h(\tilde{\pi}) \not\subset \tilde{H}$ . Como  $h(\tilde{\pi})$  es un plano, se tiene que  $h'(R)$  es una recta. Por el teorema fundamental de la geometría afín [3],  $h'$  es una aplicación semiafín que deja fijos los puntos del hiperplano  $L$  de  $Y$ ; así  $h'$  es necesariamente afín.

Si  $X_1 = \langle c, y, h'(y) \rangle$  y  $Y_1 = X_1 \cap Y$ , entonces  $h'|_{Y_1}$  también es afín, y ésta es la situación más general para  $\dim X_1 \leq 2$ .

(6)  $h' : Y \rightarrow Y$  es la simetría ortogonal con base  $L$ :

Evidentemente  $h'^2 = id$ , y por tanto,  $h'$  es una simetría afín con base al hiperplano  $L = a^\pi \cap Y$  de puntos fijos.

Si  $y \in Y - L$  su imagen  $y' = h'(y)$  está (por la demostración de (5)) sobre la recta  $\langle a, y, c \rangle \cap Y$ , que por (4) es ortogonal a  $L$ . Esto prueba nuestra afirmación, y la parte (i) del teorema.

La parte (ii) es inmediata a partir de (i).  $\square$

#### Elevación de inversiones

Sea  $c \in S$ . Como se vio en 4.1,  $[\overline{c\bar{e}}]$  define una dirección ortogonal al hiperplano  $H = c^\pi \cap X$  tangente a  $S$  en el punto  $c$ . Tomemos  $Y$  hiperplano afín de  $X$  paralelo a  $H$  que contiene al centro  $e$  de  $S$ , y sea  $\varepsilon : \tilde{S} - (\tilde{H} \cap \tilde{S}) \rightarrow Y$  la proyección estereográfica definida en 4.2 con polo  $c$ . En estas condiciones se tiene el siguiente:

#### Teorema 4.5

Sea  $a \in \langle c, e \rangle$ ,  $a \neq c$ ,  $a \neq e$  y  $R = \langle c, e \rangle \cap X$ . Sea  $h : \tilde{X} \rightarrow \tilde{X}$  la homología armónica de centro  $a$  e hiperplano base  $a^\pi$ . Entonces:

(i) Si  $a \in R$ , la aplicación  $h' = \varepsilon h \varepsilon^{-1}$  define en  $Y$  una inversión de centro  $e$  y potencia

$$\beta = \frac{r+1}{r-1} \alpha,$$

siendo  $r$  la razón simple  $(e, a, c)$ .

(ii) Si  $a \in R_\infty$ ,  $\varepsilon h \varepsilon^{-1}$  define asimismo una inversión en  $Y$  de centro  $e$  y potencia  $\beta = \alpha$ .



*Demostración*

(i) Si  $y \in Y - \Lambda(e)$ , los puntos

$$x = \varepsilon^{-1}(y) = \langle c, y \rangle \cap (S - \{c\})$$

$$h(x) \equiv x' = \langle a, x \rangle \cap S$$

e

$$y' = \varepsilon(x') = \langle c, x' \rangle \cap Y = h'(y),$$

están situados en el plano  $X_1 = \langle c, e, y \rangle$ . En particular, la imagen por  $h'$  de los puntos de la recta  $Y_1 = X_1 \cap Y$  (distintos del punto  $e$ ) están en  $Y_1 - \{e\}$ .

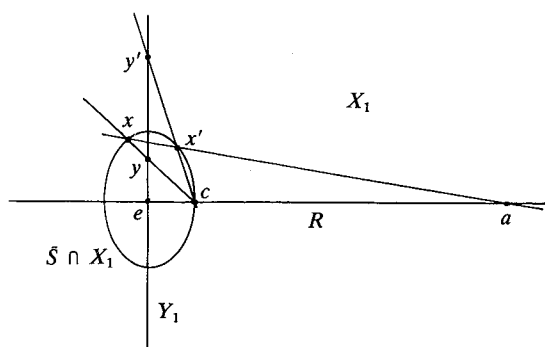


FIGURA 6.

Fijemos en  $X_1$  el sistema de referencia cartesiano  $(e; \vec{e}_1, \vec{e}_2)$  con coordenadas  $(x_0, x_1, x_2)$ , donde  $\vec{e}_1 = \vec{ec}$  y el vector  $\vec{e}_2$  está tomado en la dirección de la recta  $Y_1$ .

La cuádrica  $\tilde{S}$  tiene por ecuación

$$\vec{p}\delta_e + \alpha\mu^2 = 0,$$

y  $\tilde{S}_1 = \tilde{S} \cap X_1$  se escribe en coordenadas  $(x_i)$  como:

$$-x_0^2 + x_1^2 + \gamma x_2^2 = 0,$$

siendo

$$\gamma = -\frac{p(\vec{e}_2)}{\alpha}.$$

Sustituyendo los puntos por sus coordenadas, se tiene:

$$a = \begin{bmatrix} 1 \\ r \\ 0 \end{bmatrix} \quad c = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad e = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

e  $Y_1$  tiene por ecuación  $x_1 = 0$ . Si

$$y = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \theta \end{bmatrix}$$

es un punto cualquiera de  $Y_1(\theta \neq 0)$ , calculando analíticamente los puntos  $x = \varepsilon^{-1}(y)$ ,  $x' = h(x)$  se llega a la expresión:

$$y' = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \theta' \end{bmatrix}$$

donde,

$$\theta' = \frac{r+1}{\theta\gamma(r-1)},$$

es decir:

$$-\theta\theta'\vec{p}(\vec{e}_2) = \frac{r+1}{r-1}\alpha,$$

con lo que

$$\begin{aligned} -\vec{P}(\overline{e\vec{y}}, \overline{e\vec{y}'}) &= -\vec{P}(\theta\vec{e}_2, \theta'\vec{e}_2) = \\ &= -\theta\theta'\vec{p}(\vec{e}_2) = \frac{r+1}{r-1}\alpha = \beta \end{aligned}$$

que es la potencia de inversión.

(ii) La comprobación para el caso  $a = R_\infty$  se realiza de forma análoga.  $\square$

#### Corolario 4.6

Manteniendo las hipótesis del teorema anterior, sea ahora  $Y'$  hiperplano paralelo a  $Y$ , sea  $e' = Y' \cap \langle c, e \rangle$  y  $\lambda$  la razón simple  $(c, e', e)$ .

Si  $\varepsilon'$  denota la proyección estereográfica de  $\bar{S}$  sobre  $Y'$  con polo  $c$ , entonces la aplicación  $h'' = \varepsilon' h \varepsilon'^{-1}$  define sobre  $Y$  una inversión de centro  $e'$  y potencia

$$\beta' = \lambda^2 \frac{r+1}{r-1} \alpha.$$

Si  $a = R_\infty$ , entonces  $\beta' = \lambda^2 \alpha$ .

*Demostración*

Obsérvese que la homotecia  $\varphi$  de centro  $c$  y razón  $\lambda$  transforma el hiperplano  $Y$  en el  $Y'$ , y que  $\varepsilon' = \varphi \varepsilon$ , por tanto,

$$h'' = \varepsilon' h \varepsilon'^{-1} = \varphi \varepsilon h \varepsilon^{-1} \varphi^{-1} = \varphi h' \varphi^{-1}.$$

Si  $y' \in Y' - \{e'\}$ ,  $y = \varphi^{-1}(y') \in Y - \{e\}$ , por tanto, es:

$$h''(y') = h'' \varphi(y) = \varphi h'(y),$$

y se tiene:

$$\begin{aligned} -\bar{P}(e'y', e'h''(y')) &= -\bar{P}(\lambda e\bar{y}, \lambda e h'(y)) = \\ &= -\lambda^2 \bar{P}(e\bar{y}, e h'(y)) = \lambda^2 \frac{r+1}{r-1} \alpha. \end{aligned}$$

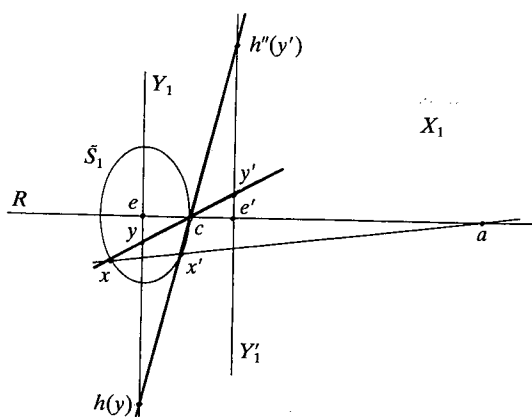


FIGURA 7.

Es inmediato ahora el siguiente resultado.

*Proposición 4.7*

Sea  $\varepsilon$  la proyección estereográfica de  $\bar{S}$  sobre un hiperplano afín  $Y$  con polo  $c \in S$ , y sea  $e' = \langle c, e \rangle \cap Y$ . Si  $i$  es una inversión en  $Y$  de centro  $e'$  y razón  $\beta$ , entonces  $\varepsilon^{-1}i\varepsilon$  es una correspondencia de la cuádrica  $\bar{S}$ , que se extiende (de forma única) a una homología armónica  $h$  de  $\bar{X}$  con centro un punto  $a$  contenido en la recta  $\langle c, e \rangle$ , de modo que  $h$  deja invariante la cuádrica.

*Demostración*

Sea  $\lambda$  la razón simple  $(c, e', e)$ .

Si  $\beta \neq \lambda^2\alpha$ , tómesese  $a \in \langle c, e \rangle \cap X$  tal, que:

$$(e, a, c) = r = \frac{\beta + \lambda^2\alpha}{\beta - \lambda^2\alpha}$$

Por el corolario anterior, si  $h$  es la homología armónica de centro  $a$  e hiperplano  $a^\pi$ , se tiene  $eh\varepsilon^{-1} = i$ , es decir,  $h = \varepsilon^{-1}i\varepsilon$ .

Si  $\beta = \lambda^2\alpha$ , tómesese  $a = \langle c, e \rangle \cap X_\infty$ .  $\square$

Denotaremos por  $GP(\bar{S})$  al grupo de transformaciones proyectivas de  $\bar{X}$  que dejan invariante la cuádrica  $\bar{S}$  (grupo proyectivo de  $\bar{S}$ ). Es conocido que dicho grupo está generado por sus homologías armónicas [1].

Se denotará por  $GO(X)$  al grupo de semejanzas del espacio afín métrico  $X$ .

*Teorema 4.8: Elevación de semejanzas*

Sea  $\varepsilon$  la proyección estereográfica de  $\bar{S}$  sobre el hiperplano afín  $Y$  con polo  $c \in S$ . Si  $f \in GO(Y)$ , entonces  $\varepsilon^{-1}f\varepsilon$  es una correspondencia en  $\bar{S}$  que se extiende (de forma única) a una transformación  $\bar{f} \in GP(\bar{S})$ .

*Demostración*

Sea  $e' = \langle e, c \rangle \cap Y$ . Si  $f$  es homotecia de centro  $e'$ ,  $f$  puede descomponerse [en virtud de 3.3. c)] en producto de dos inversiones  $i_1$  e  $i_2$  de centro  $e'$ ,  $f = i_2i_1$ . Entonces,

$$\varepsilon^{-1}f\varepsilon = (\varepsilon^{-1}i_2\varepsilon)(\varepsilon^{-1}i_1\varepsilon).$$

Por la proposición 4.7 se concluye que  $\varepsilon^{-1}i_j\varepsilon$  ( $j = 1, 2$ ) se extiende a una homología armónica  $h_j$  de  $GP(\bar{S})$ , y así  $\varepsilon^{-1}f\varepsilon$  se extiende a  $\bar{f} = h_2h_1 \in GP(\bar{S})$ .

En general, si  $f \in GO(Y)$ ,  $f$  se descompone en producto de simetrías ortogonales respecto a hiperplanos y una homotecia de centro  $e'$ . Aplíquese entonces 4.4.  $\square$

## 5. APLICACIONES

En esta sección el cuerpo  $\mathbb{K}$  será el de los números reales  $\mathbb{R}$ , y la forma cuadrática  $\vec{p}$  tiene signatura  $v$ . Utilizaremos libremente algunos conceptos y resultados básicos relativos a geometría semi-Riemanniana [4].

### Teorema 5.1

La inversión  $i = i_{c,\beta} : X - \Lambda(c) \rightarrow X$  de centro  $c \in X$  y potencia  $\beta \neq 0$ , es una aplicación conforme entre variedades semi-Riemannianas.

### Demostración

Si  $a \in X$ , la aplicación  $\vec{X} \rightarrow T_a X$  tal, que

$$\vec{v} \mapsto \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (a + t\vec{v})$$

es una isometría lineal que permite identificar ambos vectores.

Si  $a \in X - \Lambda(c)$ , probemos que  $di(a) : \vec{X} \rightarrow \vec{X}$  es una semejanza lineal. Podemos escribir:

$$i = c - \frac{\beta}{\vec{p} \cdot \delta_c} \delta_c$$

como suma de la función constante  $c$ , y la función

$$\vec{i} = - \frac{\beta}{\vec{p} \cdot \delta_c} \delta_c : X - \Lambda(c) \rightarrow \vec{X}.$$

Teniendo en cuenta que  $d\delta_c(a) = id$ , tomando

$$\eta = \frac{-\beta}{\vec{p} \cdot \delta_c} : X - \Lambda(c) \rightarrow \mathbb{R}$$

es  $i = \eta \delta_c$ , y se tiene:

$$di(a)(\vec{v}) = d\vec{i}(a)(\vec{v}) = \eta'(a)\vec{c\bar{a}} + \eta(a)\vec{v} \quad \text{para } \vec{v} \in \vec{X} \quad (6)$$

Pero  $\text{grad}(\vec{p} \cdot \delta_c) = 2\delta_c$  [4], por tanto, si  $\xi = \vec{p} \cdot \delta_c$  se tiene para  $\vec{v} \in \vec{X}$ :

$$\xi'(a)(\vec{v}) = 2\vec{P}(\vec{c\bar{a}}, \vec{v}),$$

y

$$\eta' = \frac{\beta}{\xi^2} \xi',$$

es decir:

$$\eta'(a)(\vec{v}) = \frac{\beta}{\xi(a)^2} \xi'(a)(\vec{v}) = \frac{2\beta}{\vec{p}(\vec{c\bar{a}})^2} \vec{P}(\vec{c\bar{a}}, \vec{v}).$$

Volviendo a la fórmula (6) queda:

$$di(a)(\vec{v}) = \frac{-\beta}{\vec{p}(\vec{c\bar{a}})} \left( \vec{v} - 2\vec{P}\left(\frac{c\bar{a}}{\vec{p}(\vec{c\bar{a}})}, \vec{v}\right) \vec{c\bar{a}} \right)$$

La aplicación  $\tau: \vec{X} \rightarrow \vec{X}$  tal, que

$$\tau(\vec{v}) = \vec{v} - 2 \frac{\vec{P}(\vec{c\bar{a}}, \vec{v})}{\vec{p}(\vec{c\bar{a}})} \vec{c\bar{a}},$$

es una simetría ortogonal respecto al hiperplano  $\vec{H} = \vec{c\bar{a}}^\perp$ . La aplicación  $\varphi: \vec{X} \rightarrow \vec{X}$  tal, que

$$\varphi(\vec{w}) = \frac{-\beta}{\vec{p}(c\bar{a})} \vec{w}$$

es una homotecia, como  $di(a) = \varphi \cdot \tau$  se concluye la demostración.  $\square$

Se denota como es habitual por  $\vec{S}$  a la pseudoesfera  $\vec{S}(e, \alpha)$  y  $S = \vec{S} \cap X$ .  $\vec{S}$  es una variedad diferenciable, y  $S$  es una subvariedad semi-Riemanniana de  $X$  con signatura  $\nu$  si  $\alpha < 0$  y  $\nu - 1$  si  $\alpha > 0$ .

### Definición 5.2

Una transformación conforme en  $\vec{S}$ , es un difeomorfismo  $f: \vec{S} \rightarrow \vec{S}$  que es conforme como aplicación de  $S - f^{-1}(\Lambda_\infty)$  en  $f(S) - \Lambda_\infty$ .

*Observaciones 5.3*

a) Por razones de continuidad, y teniendo en cuenta que  $\Lambda_\infty$  es un subconjunto de  $\tilde{S}$  con interior vacío, se prueba fácilmente que la composición de transformaciones conformes de  $\tilde{S}$  es transformación conforme. Denotamos por  $\text{Conf}(\tilde{S})$  a dicho grupo.

b) El grupo proyectivo de la cuádrica  $GP(\tilde{S})$  es subgrupo del de transformaciones proyectivas en  $\tilde{X}$ ,  $GP(\tilde{X})$ . No obstante, si  $f \in GP(\tilde{S})$  identificaremos  $f$  con su restricción  $f|_{\tilde{S}} : \tilde{S} \rightarrow \tilde{S}$ . Con este convenio, puede establecerse el siguiente resultado:

*Teorema 5.4*

El grupo proyectivo de la cuádrica  $GP(\tilde{S})$  es subgrupo del grupo de transformaciones conformes  $\text{Conf}(\tilde{S})$ .

*Demostración*

Sea  $h \in GP(\tilde{S})$  homología armónica de centro  $a \in X$ . La aplicación  $h : \tilde{S} \rightarrow \tilde{S}$  es por 3.5 extensión de cierta inversión  $i$  en  $X$  con centro  $a$ , que (por 5.1) es aplicación conforme de  $X - \Lambda(a)$  en  $X$ , e induce por tanto aplicaciones conformes cuando se restringe a subvariedades semi-Riemannianas de  $X$ . Esto prueba que  $h \in \text{Conf}(\tilde{S})$ .

Si el centro  $a$  de la homología armónica  $h \in GP(\tilde{S})$  está en  $X_\infty$ , entonces  $h|_X : X \rightarrow X$  es una simetría ortogonal respecto al plano  $a^\pi \cap X$  que deja invariante la cuádrica, y  $h \in \text{Conf}(\tilde{S})$ .

Como las homologías armónicas de  $GP(\tilde{S})$  generan el grupo completo, el teorema está probado.  $\square$

Escribamos  $D(\tilde{S})$  para denotar al grupo de homeomorfismos de  $\tilde{S}$  que transforman rectas (contenidas en  $\tilde{S}$ ) en rectas.

Evidentemente  $GP(\tilde{S}) \subset D(\tilde{S})$ . Utilizando una extensión para métricas no definidas del teorema clásico de Liouville [2], se deduce un resultado (teorema 5.5) que será utilizado junto con las técnicas de elevación descritas en la sección 4, para probar la igualdad  $\text{Conf}(\tilde{S}) \cap D(\tilde{S}) = GP(\tilde{S})$  para  $\dim S > 2$ .

*Teorema 5.5 [2]*

Si  $Y$  es un espacio afín métrico no degenerado de dimensión mayor que dos, y  $g : Y \rightarrow Y$  es una biyección conforme, entonces  $g$  es semejanza en  $Y$ .

**Teorema 5.6**

Si  $\dim S > 2$ , entonces  $\text{Conf}(\tilde{S}) \cap D(\tilde{S}) = GP(\tilde{S})$ .

**Demostración**

El contenido  $GP(\tilde{S}) \subset \text{Conf}(\tilde{S}) \cap D(\tilde{S})$  se deduce de 5.4.

Sea  $f \in \text{Conf}(\tilde{S}) \cap D(\tilde{S})$ . Como  $GP(\tilde{S})$  actúa transitivamente sobre  $\tilde{S}$ , podemos suponer sin pérdida de generalidad [componiendo si fuera necesario con cierta transformación de  $GP(\tilde{S})$ ] que  $f$  deja fijo algún punto  $c \in S$ . Como  $f \in D(\tilde{S})$ , por 4.1 se concluye:

$$f(c^\pi \cap \tilde{S}) = c^\pi \cap \tilde{S} \quad (7)$$

Sea  $\varepsilon$  la proyección estereográfica de  $S$  con polo  $c$ , sobre cierto hiperplano afín  $Y$  de  $X$  (que tiene dirección  $\bar{Y} = \bar{c}^\perp$ ). Por (7) 4.2 y 5.1 se deduce que  $g = \varepsilon f \varepsilon^{-1} : Y \rightarrow Y$  es una biyección conforme. Aplicando el teorema 5.5 se deduce que  $g$  es semejanza en  $Y$ , y por 4.8  $f \in GP(\tilde{S})$ .

En particular, si  $\tilde{S}$  no contiene rectas (que es esencialmente el caso Riemanniano), entonces  $\text{Conf}(\tilde{S}) = GP(\tilde{S})$ .

Finalmente a partir del siguiente teorema 5.8 (debido a Zeeman) puede probarse la igualdad entre los grupos  $GP(\tilde{S})$  y  $D(\tilde{S})$  para ciertas pseudoesferas.

**Definición 5.7**

Diremos que  $\tilde{S}$  es una pseudoesfera de Lorentz si  $\alpha < 0$  y  $\nu = 1$ .

Nótese que la signatura de  $S$  como variedad semi-Riemanniana es igual a la unidad [4].

**Teorema 5.8 [5]**

Si  $Y$  es un espacio afín de Lorentz (es decir, no degenerado y con signatura igual a la unidad) de dimensión mayor que dos, y  $g : Y \rightarrow Y$  es un homeomorfismo que transforma rectas isótropas en rectas isótropas, entonces  $g$  es una semejanza en  $Y$ .

**Teorema 5.9**

Si  $S$  es una pseudoesfera de Lorentz de dimensión mayor que dos, entonces  $GP(\tilde{S}) = D(\tilde{S})$ .



*Demostración*

Sea  $f \in D(\tilde{S})$ . Igual que en 5.6 podemos suponer sin pérdida de generalidad que  $f$  deja fijo un punto  $c \in S$ . Entonces  $f$  verifica (7), y si  $\varepsilon$  es la proyección estereográfica de  $S$  con polo  $c$  sobre cierto hiperplano afín  $Y$ , se deduce que la aplicación  $g = \varepsilon f \varepsilon^{-1} : Y \rightarrow Y$  es un homeomorfismo.

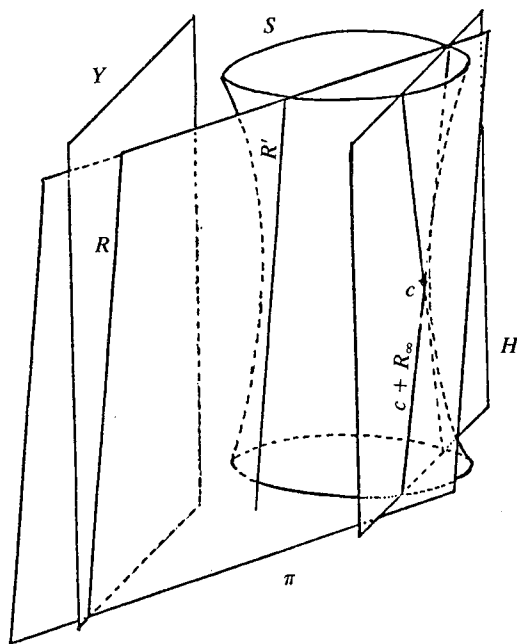


FIGURA 8.

Probemos que  $g$  verifica las hipótesis del teorema 5.8: Si  $R$  es recta isótropa de  $Y$ , entonces  $R_\infty \in c^\pi \cap \tilde{S}$  (pues  $Y$  es paralelo a  $c^\pi \cap X$ , y  $\vec{R}$  es recta vectorial isótropa). Por 4.1 la recta  $\langle c, R_\infty \rangle$  está contenida en  $\tilde{S}$ , y en el plano proyectivo  $\tilde{\pi}$  extensión proyectiva del plano afín  $\pi$  generado por  $c$  y  $R$ . La intersección  $\tilde{\pi} \cap \tilde{S}$  está pues formada por la unión de la recta  $\langle c, R_\infty \rangle$  y cierta recta  $\vec{R}'$ , (véase figura 8). Se tiene que

$$R' = \vec{R}' \cap X = \varepsilon^{-1}(R) \subset \tilde{S} - (c^\pi \cap \tilde{S}).$$

Por hipótesis  $f(\vec{R}') = \vec{R}_1$  es una recta contenida en  $\tilde{S}$ . Si  $R_1 = \vec{R}_1 \cap X$ , entonces  $\varepsilon(R_1) = g(R)$  es recta afín de  $Y$  por 4.3.

Aplicando 5.8 se concluye que  $g$  es una semejanza en  $Y$ , y por 4.8 se verifica que  $f = \varepsilon g \varepsilon^{-1} \in GP(\tilde{S})$ .

## BIBLIOGRAFÍA

- [1] BERGER, M.: *Géométrie*. Fernand Nathan, París (1977).
- [2] EPSTEIN, D. B. A.: *Isomorfismi Conformi e Geometria Iperbolica*. Quaderno dei gruppi di ricerca matematica del C.N.R., Editrice Universitaria Levroto & Bella, Torino (1984).
- [3] FRENKEL, J.: *Géométrie pour l'élève-professeur*. Hermann, París (1973).
- [4] O'NEILL, B.: *Semi-Riemannian geometry with applications to Relativity*. Academic Press Inc., Nueva York (1983).
- [5] ZEEMAN, E. C.: *Causality Implies the Lorentz Group*. Journal of Mathematical Physics, Vol. 5, N.º 4 (1964).