UNED cuadernos

Geometrías lineales y grupos de transformaciones

Antonio Félix Costa González
Javier Lafuente López

GEOMETRÍAS LINEALES
Y GRUPOS DE TRANSFORMACIONES

CUADERNOS DE LA UNED

Antonio Félix Costa González
Javier Lafuente López

GEOMETRÍAS LINEALES Y GRUPOS DE TRANSFORMACIONES

UNIVERSIDAD NACIONAL DE EDUCACIÓN A DISTANCIA

CUADERNOS DE LA UNED (35040CU21A03)
GEOMETRÍAS LINEALES Y GRUPOS DE TRANSFORMACIONES

Librería UNED: C/ Bravo Murillo, 38; 28015 Madrid
Teléfs.: 91 398 75 60 / 73 73, E-mail: libreria@adm.uned.es

ISBN: 84-362-2253-9
Depósito legal: M. 32.683-2004

Tercera edición: junio de 1991
Cuarta reimpresión: julio de 2004

Impreso en España - Printed in Spain
Imprime: Impresos y Revistas, S. A. (IMPRESA)
Herreros, 42. Políg. Ind. Los Ángeles. Getafe (Madrid)

Estamos en deuda con nuestro común amigo Leopoldo Villarreal por su eficaz y desinteresada colaboración, y con nuestras respectivas familias por habernos soportado durante el largo periodo de dedicación completa a este libro.

INTRODUCCION

El álgebra y la geometría lejos de ser dos disciplinas independientes, están íntimamente relacionadas, y se deben recíprocamente gran parte de los logros alcanzados en ellas. El nacimiento de la Geometría analítica en el siglo XVII *es el ejemplo histórico de más relevancia que pone de manifiesto dichas relaciones. Hasta entonces, los únicos métodos eficaces en geometría eran los de la Grecia antigua, pero gracias al uso de las coordenadas, los métodos algebraicos permitieron resolver problemas antes impensables, y sobre todo ampliar la generalidad de los conceptos geométricos clásicos. La geometría analítica fue también el antecedente necesario del cálculo infinitesimal que apareció años más tarde.*

Ya en el siglo XIX, *gracias al concepto algebraico de grupo introducido por Galois para la resolución de ecuaciones algebraicas, F Klein consigue dar una definición de geometría que aglutina de modo preciso los rasgos comunes generales de todas las teorías geométricas existentes en su época. Según Klein, una geometría sobre un conjunto* X *viene definida por un grupo* G *de transformaciones actuando sobre él. El conjunto* X, *puede estar eventualmente dotado de otras estructuras algebraicas, topológicas, diferenciables, ... etc. (Piénsese por ejemplo en* $\mathbb{R}^n$*). La actuación de* G *sobre* X, *puede inducir actuaciones sobre determinadas familias de objetos* Ω *deducidas del conjunto* X *o de sus eventuales estructuras adicionales. La propiedad que define entonces a los objetos* Ω *se denomina propiedad geométrica o invariante de la geometría en cuestión.*

Siguiendo a Klein, el estudio de una geometría consiste en la búsqueda y análisis de las propiedades y conceptos geométricos, que permanecen invariantes por la acción del grupo.

Para fijar ideas, supongamos que nuestro conjunto, es el conjun-

to de puntos del plano determinado por un a hoja de papel. Creemos que el lector ya tiene un criterio formado para reconocer a «ojo» cuándo dos figuras dibujadas sobre este papel son iguales. El proceso de comparación está intrínsecamente ligado a la idea de transportar una de las figuras para intentar hacerla coincidir con la otra. Desde el punto de vista geométrico, es preferible pensar que ha sido una aplicación biyectiva del conjunto de puntos del plano en sí mismo, la que ha llevado una figura a superponerse con la otra. De aquí surge la idea intuitiva de movimiento: El grupo de los movimientos, (*que define la geometría afín euclídea del plano*) *es el grupo formado por las transformaciones* (*del plano*), *que aplican cada figura en otra figura igual. Por otra parte estas transformaciones están caracterizadas por la propiedad de conservar la distancia entre puntos. Así el concepto de distancia es un invariante de esta geometría.*

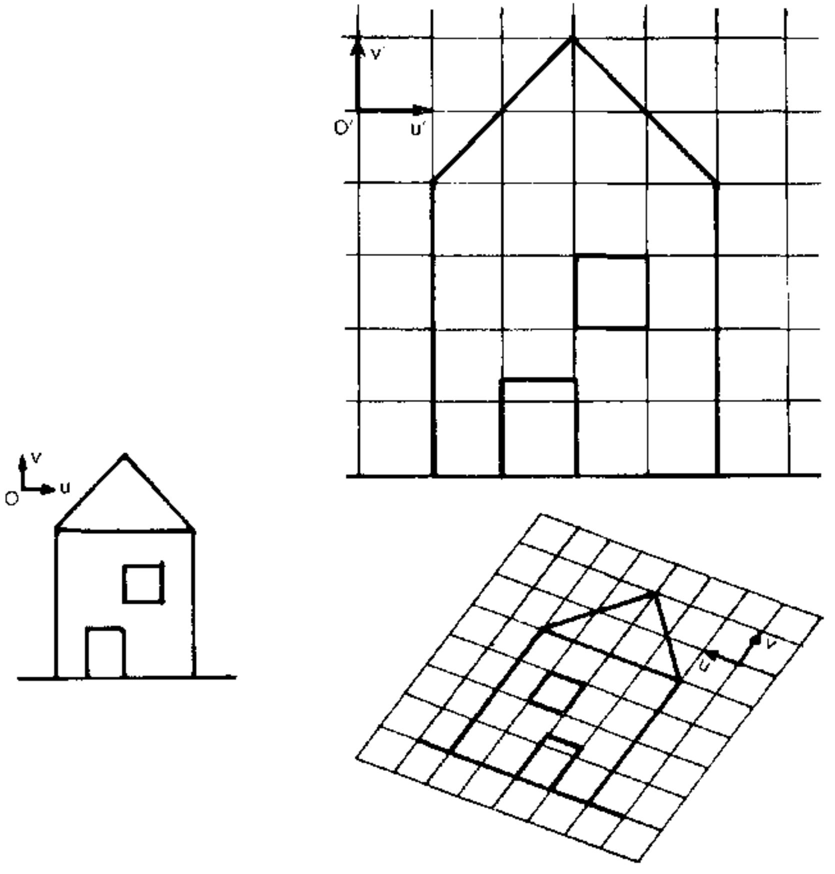
Fijemos en nuestro plano, dos rectas perpendiculares X, Y *que se cortan en un punto origen* o, *y elijamos sobre cada una de ellas los puntos* u *y* v *con distancia unidad al origen. Esto es un sistema de referencia euclídeo* R; *a partir de él, y mediante un proceso bien conocido, podemos asignar a cada punto* p *del plano una única pareja de números* (x, y) *que se denominan coordenadas euclídeas.*

Un movimiento, transforma un sistema de referencia euclídeo R *en otro* R′, *y cada punto* p *con coordenadas* (x, y) *respecto a* R, *en un punto* p′ *con las mismas coordenadas* (x, y) *respecto a* R′. *Recíprocamente, la transformación antes descrita, cuando se toman* R *y* R′ *sistemas de referencia euclídeos arbitrarios, es un movimiento.*

En esto se basa una conocida técnica utilizada por algunos dibujantes, consistente en trazar dos cuadriculados iguales, uno sobre la figura original, y el otro en el lugar en donde se desea hacer la copia (véase figura).

Si nuestro dibujante lo que desea es hacer una ampliación del original deberá servirse de un cuadriculado más grande. En un lenguaje más técnico, diríamos que su copia es el resultado de transportar la figura original, mediante una transformación del plano que envía cada punto p *con coordenadas* (x, y) *respecto al sistema de referencia euclídeo* R, *al punto* p′ *con las mismas coordenadas* (x, y) *respecto a un sistema de referencia* R′ *que es euclídeo en todo, salvo que para su construcción puede haberse cambiado la unidad de medida.*

Este tipo de transformaciones se denominan semejanzas, y defi-



nen la geometría afín equiforme del plano. Todos los conceptos relativos a la forma de las figuras (círculo, cuadrado, triángulo equilátero, ...) permanecen invariantes en esta geometría, sin embargo no sucede así con los tamaños (círculo de radio unidad, cuadrado de lado dos..., no tienen ya consistencia).

El concepto de distancia, ha perdido pues significado en esta geometría, conservándose, sin embargo, un concepto algo más abstracto que usualmente se denomina razón de distancias. Por ejemplo, un par de segmentos de la misma longitud se transforman mediante una semejanza cualquiera en otro par de segmentos con la misma longitud, aunque quizás distinta de la de los segmentos originales.

Nuestro inhábil dibujante puede recurrir aún a métodos más gro-

seros para realizar sus copias, sirviéndose ahora de un cuadriculado homogeneo formado por paralelogramos idénticos (véase figura). Las transformaciones del plano que pasan del cuadriculado euclídeo original a otro del tipo antes mencionado, se denominan transformaciones afines, y definen la geometría afín del plano. En esta geometría el concepto de forma ha perdido también significado. Un cuadrado puede transformarse en un paralelogramo arbitrario, y una circunferencia en una elipse.

La geometría afín se encarga del estudio y análisis de las propiedades y conceptos que permanecen invariantes al aplicarles cualquier transformación de este tipo. Indiquemos a modo de ejemplo alguno de ellos:

— *Línea recta y segmento.*
— *Razón simple de tres puntos alineados.*
— *Paralelismo de rectas.*
— *Paralelogramo, triángulo, elipse...*

Se observará que a medida que el grupo de transformaciones aumenta de tamaño, el concepto geométrico de igualdad de figuras se hace mas abstracto, y las propiedades geométricas más profundas. Parece estar reflejada en este esquema la misma esencia de la capacidad de abstracción del intelecto humano.

El estudio de la geometría afín, afín euclídea, y afín equiforme en espacios de dimensión finita, constituye el núcleo fundamental del libro. Hemos tomado para ello como punto de referencia las ideas de Klein acerca de las geometrías, y como instrumento básico de trabajo, el álgebra lineal. Se incluye también el estudio de la geometría vectorial (como prerrequisito), y de las geometrías de los espacios vectoriales métricos. El modelo de Lorentz, como caso particular, tiene interés especial para los físicos relativistas.

Están aquí resueltos además, diversos problemas de clasificación geométrica, alguno de los cuales, como el de clasificación lineal de endomorfismos vectoriales, y los de clasificación lineal y euclídea de las formas cuadráticas, tienen marcado interés en otros campos, aparentemente lejanos, tales como Ecuaciones diferenciales, Sistemas dinámicos, Geometría diferencial, Mecánica, Topología geométrica..., etc.

RECOMENDACIONES AL LECTOR

La materia de este libro está pensada para cubrir una asignatura del Primer Ciclo en Ciencias Matemáticas o Físicas. Supondremos que el lector conoce la definición de grupo, y los rudimentos del álgebra lineal.

Hemos incluido en cada lección gran número de ejemplos y ejercicios resueltos, que en muchos casos completan algunos aspectos de la teoría, y tienen por objetivo conseguir soltura en el manejo de los conceptos y resultados introducidos en el texto. Alguno de los ejercicios requiere para su solución conocer los enunciados de otros que le preceden.

Las soluciones de los ejercicios marcados con una estrella se encuentran al final del libro. En ocasiones, algunas proposiciones enunciadas en la teoría, tienen su demostración en este apartado.

Para una buena parte de los ejercicios propuestos no se ha incluido solución en el libro. La mayor parte de ellos son inmediatos, o parecidos a otros ya resueltos. Otros requieren para su solución de cierto ingenio, y unos pocos están decididamente propuestos para lectores aventajados.

Los ejercicios (resueltos o no) de cada lección están propuestos en el orden que corresponde a la exposición teórica. Por tanto, no es necesario (ni conveniente) esperar a terminar el estudio de la lección para comenzar a resolverlos. Tampoco parece aconsejable recurrir de forma sistemática al apartado de «Soluciones a los ejercicios» sin antes haber trabajado sobre ellos.

Damos, por último, las referencias de algunos textos cuya lectura recomendamos a quienes deseen profundizar más en los temas aquí expuestos.

M. Berger; Géométrie. Cedic-Fernand Natan (1977). *Vol. 1 (Chap 1, 2, 3), Vol. 2, 3, y Vol. 4 (Chap 13).*

J. Frenkel; Géométrie Pour l'éléve-professeur. *Hermann (1973). Partie I, II.*

Tisseron; Géométrie affine projective et euclidienne. *Hermann (1983). Noyay 1, 3.*

En estos libros hay propuestos además ejercicios teóricos de cierto nivel de dificultad. Otros más sencillos pueden encontrarse por ejemplo en los siguientes textos:

M. Anzola, J. Caruncho, G. Perez Canales: Problemas de álgebra. *Tomos 3 y 6 (1982).*

I. V. Proskuriakov: 2000 Problemas de álgebra lineal. *Reverté (1978).*

INDICE TEMATICO

CAPITULO III: CLASIFICACION LINEAL DE ENDOMORFISMOS EN UN ESPACIO VECTORIAL 1 PARCIAL

CAPITULO IV: GEOMETRIA AFIN 1 PARCIAL

CAPITULO I

GEOMETRIA Y GRUPOS DE TRANSFORMACIONES

LECCION 1

GEOMETRIA Y GRUPOS DE TRANSFORMACIONES

El tema está dedicado a exponer las nociones básicas acerca de la actuación de grupos sobre conjuntos, y de los problemas de clasificación que inducen.

El objetivo final es el de desarrollar la idea general de geometría (expresada por Klein en 1872), como el estudio de las propiedades y conceptos que permanecen invariantes por la actuación de un grupo de transformaciones.

Este punto de vista es especialmente útil para la sistematización del estudio de las geometrías definidas por grupos de transformaciones lineales (geometrías lineales).

1. ACTUACION DE UN GRUPO SOBRE UN CONJUNTO

Comenzaremos introduciendo el concepto de actuación de un grupo sobre un conjunto con numerosos ejemplos, algunos de ellos con utilidad posterior. Por último se estudian los tipos más usuales de actuación.

Definición 1.1: Actuación

Sea G *un grupo y* X *un conjunto. Una actuación (por la izquierda) de* G *sobre* X *es una aplicación*

$$G \mathrm{x} X \ni (g, x) \to gx \in X$$

que verifica las siguientes propiedades:

i) Para todo par de elementos g, h $\in$ G *y todo* x $\in$ X *se verifica* (gh) x = g (hx).

ii) Para todo x $\in$ X *se tiene* ex = x, *siendo* e *el elemento neutro de* G.

Ejemplo 1.2

Sea P un polígono regular de n lados en $\mathbb{R}^2$ cuyos vértices son $X=\{x_1, \ldots, x_n\}$. Considérese la familia de rotaciones de $\mathbb{R}^2$ con centro en el centro del polígono P y amplitud $\theta_l = 2\pi l/n$ que denotamos por g_l. $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $l=1, \ldots, n$. El conjunto $G=(g_1, \ldots, g_n)$ de tales rotaciones tiene estructura natural de grupo respecto a la composición de aplicaciones. La aplicación

$$G \times X \ni (g_l, x_r) \longrightarrow g_l(x_r) \in X$$

define una actuación de G en X.

Ejemplo 1.3

Sea $S(X)$ el grupo de permutaciones de un conjunto X, es decir: el conjunto de biyecciones de X en X dotado de estructura de grupo por la composición de aplicaciones. Si G es un subgrupo de $S(X)$, el grupo G actúa de forma natural sobre X:

$$G \times X \ni (g, x) \longrightarrow g(x) \in X.$$

Ejemplo 1.4

Pueden establecerse algunas actuaciones naturales de un grupo G sobre sí mismo:

a) Traslación por la izquierda L

$$L: G \times G \ni (g, x) \longrightarrow L_g x = gx \in G$$

b) Conjugación por la izquierda C

$$C: G \times G \ni (g, x) \longrightarrow g\, x\, g^{-1} \in G$$

De modo análogo a 1.1 puede establecerse el concepto de actuación por la derecha.

Definición 1.5

Un grupo G *actúa por la derecha sobre un conjunto* X *cuando se ha dado una aplicación*

$$X \times G \ni (x, g) \longrightarrow xg \in X$$

que verifica las siguientes propiedades:

i) $x(gh) = (xg)h$ *para todo* $x \in X$ *y todo* $g, h \in G$.
ii) $xe = x$ *para todo* $x \in X$.

Aunque restringiremos nuestra atención a las actuaciones de grupos por la izquierda, todos los conceptos y resultados tienen una traducción natural para las actuaciones por la derecha.

Ejemplo 1.6.

Siguiendo con el ejemplo 1.4 también existen actuaciones naturales de un grupo G sobre sí mismo por la derecha:

a) Traslación por la derecha R

$$R : G \times G \ni (x, g) \longrightarrow R_g x = xg \in G$$

b) Conjugación por la derecha C'

$$C' : G \times G \ni (x, g) \longrightarrow g^{-1}xg \in G$$

Ejemplo 1.7.

Si un grupo G actúa sobre un conjunto X, puede establecerse una actuación natural de G sobre el conjunto de partes de X, $P(X)$:

$$G \times P(X) \ni (g, A) \longrightarrow gA = \{ga \mid a \in A\} \in P(X).$$

Ejemplo 1.8.

La familia de matrices $G(\theta)=\begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta & 0 \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\theta \in \mathbb{R}$,

permite definir una actuación del grupo aditivo $(\mathbb{R}, +)$ sobre la esfera de radio unidad

$$S=\left\{x=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in V_3(\mathbb{R}) \mid x^t x = x_1^2+x_2^2+x_3^2=1\right\}$$

mediante la aplicación

$$\mathbb{R}\times S \ni \left(\theta, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}\right) \longrightarrow G(\theta)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in S \qquad (1.8.1)$$

En efecto, la familia de matrices $G(\theta)$ representa la familia de giros en $V_3(\mathbb{R})$ de eje x_3 y verifica las propiedades:

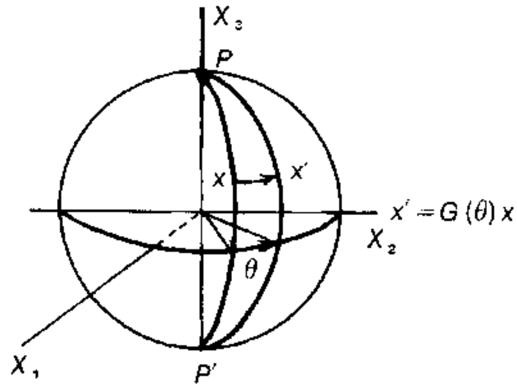
i) $G(\theta)^t\ G(\theta)=I$ (matriz identidad)
ii) $G(\theta_1)\ G(\theta_2)=G(\theta_1+\theta_2)$
iii) $G(0)=I$

que tienen comprobación algebraica inmediata.

La propiedad i) permite comprobar que si $x \in S$ (es decir, $x^t x = 1$), entonces $G(\theta)x \in S$:

$$(G(\theta)x)^t\ (G(\theta)x)=x^t(G(\theta)^t\ G(\theta))x=x^t I x=x^t x=1.$$

Las propiedades ii) y iii) indican que la aplicación (1.8.1) es en efecto una actuación.



(Figura 1)

Los ejemplos de actuaciones expuestos a continuación serán de utilidad en el estudio de las geometrías lineales:

Ejemplo 1.9: El grupo lineal general GL (n, $\mathbb{K}$)

Fijado el cuerpo $\mathbb{K}$, denotamos por $GL(n, \mathbb{K})$ (o simplemente $GL(n)$ si se sobreentiende el cuerpo) al conjunto de matrices no singulares cuadradas de orden n con coeficientes en $\mathbb{K}$, dotado de estructura de grupo por el producto usual.

Se denomina a $GL(n, \mathbb{K})$ grupo lineal de orden n sobre $\mathbb{K}$ y actúa sobre el espacio $V_n(\mathbb{K})$ de matrices columna

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad x_i \in \mathbb{K},$$

de la forma:

$$GL(n, \mathbb{K}) \times V_n(\mathbb{K}) \ni \left(A, \begin{pmatrix} x_1 \\ \\ x_n \end{pmatrix}\right) \longrightarrow A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in V_n(\mathbb{K}).$$

Ejemplo 1.10: Grupo afín general

Sea $GA(n, \mathbb{K})$ (o $GA(n)$) el conjunto de matrices con coeficientes en el cuerpo $\mathbb{K}$ de la forma

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0^t \\ a & \vec{A} \end{pmatrix}$$

siendo

$$a = \begin{pmatrix} a_1 \\ \\ a_n \end{pmatrix} \in V_n(\mathbb{K}), \quad 0 = \begin{pmatrix} 0 \\ \\ 0 \end{pmatrix} \in V_n(\mathbb{K}) \quad \text{y} \quad \vec{A} \in GL(n, \mathbb{K}).$$

Es fácil comprobar que $GA\ (n, \mathbb{K})$ tiene estructura de grupo con el producto de matrices y se denomina grupo afín de orden n sobre $\mathbb{K}$. Su actuación natural sobre $V_n(\mathbb{K})$ es la siguiente

$$GA(n, \mathbb{K}) \times V_n(\mathbb{K}) \ni (A, \begin{pmatrix} x_1 \\ \\ x_n \end{pmatrix}) \longrightarrow a + \vec{A}\begin{pmatrix} x_1 \\ \\ x_n \end{pmatrix} \in V_n(\mathbb{K})$$

Obsérvese que si G es un grupo que actúa sobre un conjunto X y G' es un subgrupo de G entonces se puede definir una actuación de G' sobre X de modo natural.

Veremos ahora algunos ejemplos de esta situación.

Ejemplo 1.11: Grupo ortogonal lineal euclídeo O(n)

Tomando $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, el conjunto $O(n) = \{A \in GL(n) \mid A^t A = I\}$ es un subgrupo del grupo lineal general $GL(n)$ y se denomina grupo ortogonal lineal de orden n.

El grupo $O(n)$ actúa sobre $V_n(\mathbb{R})$ igual que $GL(n)$.

Ejemplo 1.12: Grupo ortogonal afín euclídeo OA(n)

Está formado por las matrices de la forma

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0^t \\ a & \vec{A} \end{pmatrix} \in GA(n, \mathbb{R})$$

tales que $\vec{A} \in O(n)$ y es un subgrupo de $GA(n)$. $OA(n)$ actúa de forma natural en $V_n(\mathbb{R})$ como en 1.10.

Ejemplo 1.13: Grupos ortogonales O(p, q)

Sean p, q enteros mayores o iguales que cero, $n=p+q>0$ y sea S_{pq} la matriz:

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc}
1 &&&&&&& \\
&1&&&&&& \\
&&\ddots\,(p&&&&& \\
&&&1&&&& \\ \hline
&&&&-1&&& \\
&&&&&-1&& \\
&&&&&&\ddots\,(q& \\
&&&&&&&-1
\end{array}\right]$$

El conjunto de matrices:

$$O(p, q) = \{A \in GL(n, \mathbb{R}) | A^t S_{pq} A = S_{pq}\}$$

es un subgrupo de $GL(n)$ que denominamos grupo ortogonal de tipo p, q.

Nótese que $O(n, 0) = O(n)$ es el grupo ortogonal euclídeo.

$O(p, q)$ actúa en $V_n(\mathbb{R})$ de la forma natural, habida cuenta de que $O(p, q)$ es subgrupo de $GL(n)$.

Ejemplo 1.14: Grupo afín ortogonal OA(p, q)

$OA(p, q)$ está formado por el conjunto de matrices $A \in GA(n, \mathbb{R})$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & O^t \\ a & \vec{A} \end{pmatrix} \text{ tales que } \vec{A} \in O(p, q)$$

$OA(p, q)$ actúa en $V_n(\mathbb{R})$ como subgrupo de $GA(n, \mathbb{R})$.

Se definen a continuación algunas de las propiedades usuales de una actuación:

Definición 1.15: Actuación fiel

Sea G *un grupo que actúa sobre el conjunto* X, *diremos que actúa fielmente sobre* X *si se verifica la siguiente condición:*

Si gx = x *para todo* x ∈ X, *entonces* g = e.

Ejemplo 1.16

Sea G un grupo cuyo centro

$$Z_G = \{g \in G \mid \text{para cada } h \in G \text{ es } gh = hg\}$$

es distinto de $\{e\}$. Entonces la actuación de G sobre sí mismo por conjugación (por la izquierda o la derecha) no es fiel. Sin embargo, la actuación de G sobre sí mismo por traslación (por la izquierda o la derecha) siempre es fiel.

Ejemplo 1.17

La actuación del grupo lineal $GL(n)$ sobre $V_n(\mathbb{K})$ dada en 1.9 es fiel. En efecto, si $A = (a_{ij})$ y $Ax = x$ para todo

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in V_n(\mathbb{K})$$

se tiene en particular para

$$I_i=\begin{pmatrix} 0 \\ 1_i \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad AI_i=\begin{pmatrix} a_{1i} \\ \vdots \\ a_{ni} \end{pmatrix}=I_i \text{ y } A=I.$$

De forma análoga se puede comprobar que la actuación de $GA(n)$ en $V_n(\mathbb{K})$ es fiel.

Ejemplo 1.18

Si el grupo G actúa fielmente sobre el conjunto X y G' es subgrupo de G entonces G' actúa fielmente sobre X.

Como consecuencia del ejemplo anterior se concluye que las actuaciones de los grupos lineales $O(n)$, $O(p, q)$, $OA(n)$ y $OA(p, q)$ son fieles.

Ejemplo 1.19

La actuación de $(\mathbb{R}, +)$ sobre la esfera de radio unidad dada en el ejemplo 1.8 no es fiel, ya que $G(2\pi)x=x$ para todo $s \in S$ y 2π es distinto de 0.

Definición 1.20: Actuación transitiva

Sea G *un grupo que actúa sobre el conjunto* X, *diremos que actúa transitivamente si se verifica la siguiente condición:*

Para cada par x, y $\in$ X *existe* g $\in$ G *tal que* gx=y.

Ejemplo 1.21

La actuación del grupo $GL(n)$ sobre $V_n(\mathbb{K})$ no es transitiva, ya que si $A \in GL(n)$ es $A0=0$ siendo

$$0=\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in V_n(\mathbb{K})$$

Evidentemente tampoco es transitiva la actuación de $O(n)$ y $O(p, q)$ por ser subgrupos de $GL(n)$.

Ejemplo 1.22

La actuación de $GA(n, \mathbb{K})$ en $V_n(\mathbb{K})$ definida en 1.10 es transitiva:

si $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ son elementos de $V_n(\mathbb{K})$, tomando

$$a = \begin{pmatrix} y_1 - x_1 \\ \vdots \\ y_n - x_n \end{pmatrix}$$

y

$A = \begin{pmatrix} 1 & O^t \\ a & I \end{pmatrix}$, ($I \in GL(n)$, matriz identidad) se tiene que $Ax = y$.

Tomando $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, la matriz A anterior está en los grupos $OA(n)$ y $OA(p, q)$, por tanto la actuación de estos grupos en $V_n(\mathbb{R})$ es también transitiva.

Ejemplo 1.23

La actuación de $(\mathbb{R}, +)$ sobre la esfera S del ejemplo 1.8 no es transitiva. Nótese por ejemplo que el punto

$$p = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

permanece fijo por la actuación de $(\mathbb{R}, +)$.

Definición 1.24: Grupo de isotropía

Sea G *un grupo que actúa sobre el conjunto* X. *Dado* x ∈ X *se denomina grupo de isotropía de* x *a*

$$G_x = \{g \in G;\, gx = x\}.$$

Ejemplo 1.25

En la actuación natural de $GA(n, \mathbb{K})$ en $V_n(\mathbb{K})$, el grupo de isotropía de

$$0 = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in V_n(\mathbb{K}) \text{ es } G_0 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0^t \\ 0 & \vec{A} \end{pmatrix} \middle| \vec{A} \in GL(n, \mathbb{K}) \right\}$$

que puede identificarse canónicamente con $GL(n)$ mediante el isomorfismo de grupos

$$GL(n) \ni \vec{A} \to \begin{pmatrix} 1 & 0^t \\ 0 & \vec{A} \end{pmatrix} \in G_0$$

Ejemplo 1.26

Continuando con el ejemplo 1.23, el grupo de isotropía del punto

$$p = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ es todo } (\mathbb{R}, +).$$

El grupo de isotropía $\mathbb{R}_x$ de

$$x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in S$$

está determinado por el conjunto de los $\theta \in \mathbb{R}$ tales que

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta & 0 \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{es decir: } \begin{cases} \cos\theta = 1 \\ \operatorname{sen}\theta = 0 \end{cases}$$

Así $\mathbb{R}_x = 2\pi\mathbb{Z} = \{2\pi k \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

Proposición 1.27

Si G *actúa sobre* X, *entonces para cada* $x \in X$.
i) G_x *es subgrupo de* G.
ii) *Si* $g \in G$ *y* $x' = gx$ *se tiene que* $G_{x'} = gG_xg^{-1}$

Demostración

i) Si $g, h \in G_x$ entonces

$$(hg^{-1})x = h(g^{-1}x) = h(g^{-1}(gx)) =$$
$$= h((g^{-1}g)x) = h(ex) = hx = x.$$

Por tanto $hg^{-1} \in G_x$.

ii) Si $x' = gx$ y $h \in G_x$ se tiene que

$$(ghg^{-1})\, x' = (gh)\,(g^{-1}x') = (gh)\, x = gx = x'$$

así pues gG_xg^{-1} está contenido en $G_{x'}$. Del mismo modo se prueba la inclusión en sentido contrario. □

Observación 1.28

Si G actúa transitivamente sobre X, entonces todos los subgrupos de isotropía son conjugados.

2. RELACION DE EQUIVALENCIA INDUCIDA POR UNA ACTUACION

Toda actuación de un grupo sobre un conjunto induce sobre éste una relación de equivalencia.

Definición 2.1

Si G *actúa en* X, *dos elementos* x, x' *de* X, *se dicen equivalentes* ($x \sim x'$) *si existe* $g \in G$ *tal que* $gx = x'$.

Es inmediato comprobar que esta relación es de equivalencia. Las clases de equivalencia se denominan *órbitas*. La órbita de un elemento x es por tanto $O(x) = \{gx \mid g \in G\}$.

El conjunto cociente, que denominaremos *espacio de órbitas*, se denota por X/G.

Observación 2.2

Si G actúa transitivamente sobre X entonces existe una sola órbita en X/G, es decir $X/G = \{X\}$.

Ejemplo 2.3

Consideremos la actuación de $GL(n, \mathbb{K})$ sobre $V_n(\mathbb{K})$ definida en 1.9. El espacio de órbitas $V_n(\mathbb{K})/GL(n, \mathbb{K})$ está formado por dos elementos: $\{0\}$ y $V_n(\mathbb{K}) - \{0\}$.

Ejemplo 2.4

Considérese la actuación del grupo $(\mathbb{R}, +)$ sobre la esfera S definida en el ejemplo 1.8.

Un método usual para resolver problemas de clasificación inducidos por la actuación de un grupo es determinar sistemas completos de invariantes que sean calculables en la práctica. (El invariante p_3 del ejemplo 2.6 es un invariante completo y fácilmente calculable.)

Tendremos oportunidad de practicar este método de trabajo en muchas ocasiones a lo largo del texto.

3. GRUPOS DE TRANSFORMACIONES Y GEOMETRIA

La actuación de un grupo G sobre un conjunto X determina, siguiendo a Klein, una geometria sobre el conjunto. El estudio de esta geometría es el estudio de aquellas propiedades y conceptos que permanecen invariantes por la actuación del grupo.

La «geometría» definida por G en X está determinada por el grupo de transformaciones inducido por la actuación:

Definición 3.1. Grupo de transformaciones

Un grupo de transformaciones de un conjunto X *es un subgrupo* T *del grupo* S(X) *de permutaciones de* X.

Como se adelantó en el ejemplo 1.3 el grupo T actúa naturalmente sobre X:

$$T \times X \ni (g, x) \to g(x) \in X$$

y esta actuación es fiel.

Ejemplo 3.2.

Si $\mathbb{K}$ es un cuerpo, el conjunto $GL(V_n(\mathbb{K}))$ de biyecciones lineales $g: V_n(\mathbb{K}) \longrightarrow V_n(\mathbb{K})$ es un grupo de transformaciones de $V_n(\mathbb{K})$. Recuérdese que una aplicación $g: V_n(\mathbb{K}) \longrightarrow V_n(\mathbb{K})$ se dice lineal si para todo x e y de $V_n(\mathbb{K})$ y $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ se verifica:

$$f(\lambda x+\mu y)=\lambda f(x)+\mu f(y).$$

A continuación estableceremos cómo una actuación induce un grupo de transformaciones.

Proposición 3.3.

Sea G un grupo que actúa sobre un conjunto X. Si g ∈ G, denotamos por Φ(g) a la aplicación definida por

$$\Phi(g) : X \ni x \longrightarrow gx \in X$$

se tiene entonces que Φ(g) ∈ S(X) para todo g ∈ G y Φ : G → S(X) es homomorfismo de grupos.

Demostración

Nótese que si g, $h \in G$ y $x \in X$ se verifica

$$\Phi(gh)(x)=(gh)x=g(hx)=\Phi(g)(hx)=(\Phi(g)\,\Phi(h))(x)$$

y por tanto $\Phi(gh)=\Phi(g)\,\Phi(h)$.

En particular $\Phi(g) : X \longrightarrow X$ es biyectiva, pues

$\Phi(g)\,\Phi(g^{-1})=\Phi(gg^{-1})=\Phi(e)=id_X$ $(\Phi(e)(x)=ex=x$ para todo $x \in X)$

con lo que se concluye la demostración. □

Definición 3.4: Grupo de transformaciones inducido por una actuación

En las hipótesis de la proposición anterior se denomina a im $\Phi = G_X$ *grupo de transformaciones inducido por la actuación de* G *sobre* X. *El homomorfismo suprayectivo de grupos* $\Phi : G \to G_X$ *se denomina homomorfismo natural.*

Observación 3.5

Si G actúa sobre X, nótese que Ker $\Phi = \{g \in G \mid gx = x$ para todo $x \in X\}$ y por tanto Φ es isomorfismo si y sólo si la actuación es fiel.

Ejemplo 3.6

La actuación natural de $GL(n, \mathbb{K})$ en $V_n(\mathbb{K})$ es fiel (ver 3.3). Cada elemento $A \in GL(n, \mathbb{K})$ puede identificarse con la aplicación

$$A : V_n(\mathbb{K}) \ni \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \longrightarrow A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in V_n(\mathbb{K})$$

a través del isomorfismo Φ.

Si $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ son elementos de $V_n(\mathbb{K})$, λ, $\mu \in \mathbb{K}$, por las propiedades del producto de matrices se tiene para $A \in GL(n, \mathbb{K})$:

$$A(\lambda x + \mu y) = \lambda(Ax) + \mu(Ay)$$

por tanto A es una biyección lineal de $GL(V_n(\mathbb{K}))$ (ver 3.2). Probemos que $GL(V_n(\mathbb{K}))$ (grupo de biyecciones lineales de $V_n(\mathbb{K})$) es el grupo de transformaciones inducido por la actuación. En efecto, si

$$g \in GL(V_n(\mathbb{K})) \quad \text{y} \quad g(I_i) = \begin{pmatrix} a_{1i} \\ \vdots \\ a_{ni} \end{pmatrix} \in V_n(\mathbb{K}) \quad \text{siendo} \quad I_i = \begin{pmatrix} 0 \\ 1_i \\ 0 \end{pmatrix}$$

se verifica para $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in V_n(\mathbb{K})$:

$$g(x) = g(\Sigma x_i l_i) = \Sigma x_i g(l_i) = \Sigma x_i \begin{pmatrix} a_{1i} \\ \vdots \\ a_{ni} \end{pmatrix} = Ax$$

siendo $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \cdots & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$

Si det $A = 0$ entonces el sistema $Ax = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ tiene infinitas soluciones y g no sería biyectiva, por tanto $A \in GL(n)$ y $\Phi(A) = A = g$.

Definición 3.7: Geometría

a) Una geometría es un par (X, G) *donde* X *es un conjunto y* G *es un grupo que actúa fielmente sobre* X.

b) El grupo de transformaciones de la geometría es el grupo G_X *inducido por la actuación de* G *sobre* X.

c) Dos geometrías (X, G) *y* (X, G′) *sobre el mismo conjunto* X *se consideran iguales si definen el mismo grupo de transformaciones.*

Proposición 3.8.

Las geometrías (X, G) *y* (X, G′) *coinciden si y sólo si existe* θ: G→G′ *isomorfismo de grupos tal que*

$$\theta(g)x = gx \quad \textit{para todo} \quad x \in X \ \textit{y todo} \ g \in G. \qquad (3.8.1)$$

Demostración

Sean $\Phi: G \to G_X$ y Φ' $G \to G'_X$ los isomorfismos naturales. Si $G_X = G'_X$ entonces

$$\theta = \Phi'^{-1} \cdot \Phi : G \to G'$$

es isomorfismo de grupos que verifica la propiedad (3.8.1).

Recíprocamente si $\theta : G \rightarrow G'$ es isomorfismo de grupos que verifica (3.8.1) entonces $\Phi' \cdot \theta(g) = \Phi(g)$ para todo $g \in G$ y

$$G_X = \Phi(G) = \Phi' \cdot \theta(G) = \Phi'(G') = G'_X. \quad \square$$

Ejemplos 3.9

1. $(V_n(\mathbb{K}), GL(n, \mathbb{K}))$ con la actuación dada en 1.9 se denomina geometría vectorial de $V_n(\mathbb{K})$. Su grupo de transformaciones es el de biyecciones lineales $GL(n, \mathbb{K})$.
2. $((V_n(\mathbb{K}), GA(n, \mathbb{K}))$ con la actuación dada en 1.10 define la geometría afín de $V_n(\mathbb{K})$.
3. $((V_n(\mathbb{R}), O(n))$ con la actuación definida en 1.11 define la geometría vectorial euclídea de $V_n(\mathbb{R})$.
4. $(V_n(\mathbb{R}), OA(n))$ define la geometría afín euclídea de $V_n(\mathbb{R})$.

Por último introduciremos una ordenación entre las geometrías definidas sobre un conjunto dado:

Definición 3.10. Subgeometría

Sean (X, G) *y* (X, G′) *dos geometrías sobre el mismo conjunto* X. *Diremos que* (X, G) *es subgeometría de* (X, G′) *si el grupo* G_X *de transformaciones de* (X, G) *es subgrupo del grupo de transformaciones* G'_X *de* (X, G′).

Proposición 3.11

Si (X, G) *y* (X, G′) *son dos geometrías sobre el mismo conjunto* X, *entonces* (X, G) *es subgeometría de* (X, G′) *si y sólo si existe* $\xi : G \rightarrow G'$ *monomorfismo (homomorfismo inyectivo) de grupos tal que* $\xi(g)x = gx$ *para todo* $x \in X$.

Demostración: Véase el ejercicio 1.9. $\square$

Ejemplos 3.12

1. El monomorfismo:

$$GL(n,\ \mathbb{K}) \ni \vec{A} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & O^t \\ 0 & \vec{A} \end{pmatrix} \in GA(n,\ \mathbb{K})$$

   muestra que la geometría vectorial de $V_n(\mathbb{K})$ es subgeometría de la afín.

2. Análogamente, se ve que la geometría vectorial euclídea $(V_n(\mathbb{R}),\ O(n))$ es subgeometría de la afín euclídea $(V_n(\mathbb{R}),\ OA(n))$.

3. Por ser $O(n)$ subgrupo de $GL(n)$, la geometría vectorial euclídea de $V_n(\mathbb{R})$ es subgeometría de la vectorial.

4. Análogamente la geometría afín euclídea de $V_n(\mathbb{R})$ es subgeometría de la afín de $V_n(\mathbb{R})$.

Definición 3.13

Se denomina invariante de una geometría (X, G) *a todo invariante en* X *respecto a la actuación de* G.

Nótese que los invariantes respecto a la actuación del grupo G son exactamente los invariantes respecto a la actuación del grupo de transformaciones G_X.

Nota 3.14. Conceptos y propiedades geométricas

Como se observa en los ejemplos 3.9 habitualmente las geometrías vienen dadas por actuaciones sobre conjuntos que poseen estructuras matemáticas adicionales que dan pie a la definición de conceptos y al establecimiento de propiedades. Dada una geometría $(X,\ G)$ diremos que un concepto o propiedad (obtenido gracias a alguna estructura matemática definida en X) es geométrico si permanece invariante respecto la actuación de G sobre X. Cobra ahora sentido la definición de geometría como la ciencia que estudia las propiedades y conceptos que permanecen invariantes por la actuación de un grupo de transformaciones.

Ejemplo 3.15

En la geometria vectorial euclidea $(V_n(\mathbb{R}), O(n))$ la aplicación

$$\|\cdot\| : V_n(\mathbb{R}) \ni \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \to \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2} = \sqrt{x^t x} \in \mathbb{R}$$

define un invariante, ya que si

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \\ x_n \end{pmatrix} \in V_n(\mathbb{R}), \; A \in O(n)$$

se verifica:

$$\|Ax\| = \sqrt{(Ax)^t \; (Ax)} = \sqrt{x^t (A^t A) \, x} = \sqrt{x^t x} = \|x\|$$

Un elemento $x \in V_n(\mathbb{R})$ se dice unitario, si $\|x\| = 1$. La propiedad «ser elemento unitario» es una propiedad geométrica para la geometria $(V_n(\mathbb{R}), O(n))$.

Observación 3.16

Si (X, G) es subgeometria de (X, G'), los invariantes de (X, G') son también invariantes de (X, G) pero no reciprocamente. Análoga observación es válida también para las propiedades y conceptos geométricos.

Ejemplo 3.17

La aplicación $\| \; \|$: $V_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ definida en 3.15 no es invariante para la geometría vectorial de $V_n(\mathbb{R})$. Por ejemplo para $n = 2$:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ y } \left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\| = 1 \neq 2 = \left\| \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\|.$$

EJERCICIOS

1.1.* Sea P un polígono regular de n lados en $\mathbb{R}^2$, n impar, cuyos vértices son $X=\{x_1, ..., x_n\}$. Sean $g_i : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ las rotaciones de $\mathbb{R}^2$ con centro el centro de P y amplitud $2\pi i/n$ y s_i: $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ las simetrías respecto de una recta que dejan invariante P. El conjunto, G, formado por dichas rotaciones y simetrías tiene estructura de grupo con la composición de aplicaciones. Definir una actuación de G en X. Estudiar si se trata de una actuación fiel y transitiva. Calcular los subgrupos de isotropía de cada elemento de X.

1.2. ¿La actuación del ejemplo 1.2 es fiel? ¿Es transitiva? Calcúlense los grupos de isotropía de cada elemento de X.

1.3. Respóndase las preguntas del ejercicio anterior para la actuación sobre un conjunto X del grupo $S(X)$ definida en el ejemplo 1.3.

1.4. Supongamos que G actúa sobre el conjunto X. Si $A \in P(X)$ encuéntrense ejemplos donde el grupo de isotropía de A en la acción de g sobre $P(X)$ no coincide con la intersección de los grupos de isotropía de los elementos de A en la acción de G sobre X.

1.5.* Considérese la matriz:

$$M=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Compruébese que $G=\{I, M\}$ tiene estructura de grupo con el producto de matrices. Definir una actuación de G sobre el cono:

$$C=\left\{ x=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in V_3(\mathbb{R})/x_1^2+x_2^2=x_3^2 \right\}$$

Estudiar si se trata de una actuación fiel y transitiva. Calcular los grupos de isotropía de cada elemento de C. Describir el espacio de órbitas y dar un sistema completo de invariantes para la clasificación dada por la actuación.

1.6. Sea $G(\theta)$ el grupo de matrices del ejemplo 1.8. Definir una actuación de $G(\theta)$ sobre $V_3(\mathbb{R})$. Estudiar si se trata de una actuación fiel y transitiva. Calcular los grupos de isotropía de cada elemento de $V_3(\mathbb{R})$. Describir un sistema completo de invariantes para la clasificación dada por la actuación.

1.7.* Calcular los grupos de isotropía de cualquier elemento de $V_n(\mathbb{K})$ en las actuaciones de $GL(n, \mathbb{K})$ y $GA(n, \mathbb{K})$ definidas en la lección.

1.8.* Determinar los grupos de transformaciones de las geometrías

$$(V_n(\mathbb{R}), O(n)) \text{ y } (V_n(\mathbb{R}), O(p, q)).$$

1.9.* Probar la proposición 3.11.

1.10. Probar que la geometría dada por la actuación fiel del ejemplo 1.2, es una subgeometría de la geometría definida por la actuación del ejercicio 1.1.

1.11.* Construir un invariante para la geometría $(V_n(\mathbb{R}), GL(n, \mathbb{K}))$ que no lo sea para la geometría $(V_n(\mathbb{K}), GA(n, \mathbb{K}))$.

CAPITULO II

ESPACIOS VECTORIALES Y MODULOS

Hemos supuesto que el lector posee algunos conocimientos de álgebra lineal. Sin embargo, este capítulo preliminar tiene por objeto dar un repaso breve a los resultados de álgebra lineal de mayor uso a lo largo del texto. A su vez establecemos las notaciones y terminología que utilizaremos. Como única novedad a lo que es habitual en un primer curso de álgebra lineal muchos de los resultados serán establecidos para módulos, que, como se estudiará a continuación, son una generalización sencilla del concepto de espacio vectorial y serán útiles en capítulos posteriores.

Por otra parte, teniendo en cuenta la definición de geometría del capítulo I, se introduce la geometría vectorial.

LECCION 2

MODULOS, ESPACIOS VECTORIALES Y DEPENDENCIA LINEAL

El objetivo de esta lección es la definición de las estructuras de espacio vectorial y módulo, el estudio de la relación de dependencia lineal y de los conceptos de submódulo y subespacio vectorial.

A lo largo de la lección $\mathbb{A}$ denotará a un anillo conmutativo con elemento unidad. Si $\lambda, \mu \in \mathbb{A}$, las operaciones que dotan a $\mathbb{A}$ de estructura de anillo serán denominadas:

— suma: $\mathbb{A} \times \mathbb{A} \ni (\lambda, \mu) \rightarrow \lambda + \mu \in \mathbb{A}$
— producto: $\mathbb{A} \times \mathbb{A} \ni (\lambda, \mu) \rightarrow \lambda\mu \in \mathbb{A}$

$1 \in \mathbb{A}$ es el elemento unidad para el producto y $0 \in \mathbb{A}$ es el elemento neutro del grupo $(\mathbb{A}, +)$.

En el caso de tener $\mathbb{A}$ estructura de cuerpo, con las dos operaciones anteriores, será denotado por $\mathbb{K}$.

1. MODULOS Y ESPACIOS VECTORIALES

Los conceptos de módulo y espacio vectorial tienen su origen geométrico en la abstracción de las propiedades algebraicas esenciales de los vectores libres del plano y del espacio.

Definición 1.1: Módulo y espacio vectorial

Una estructura de módulo sobre $\mathbb{A}$ *para un grupo abeliano* $(M, +)$ *se establece por una aplicación:*

$$\mathbb{A} \times \mathrm{M} \ni (\lambda, \mathrm{v}) \mapsto \lambda \mathrm{v} \in \mathrm{M}$$

que verifica las siguientes propiedades: para todo λ, $\mu \in \mathbb{A}$ *y todo* u, v $\in$ M

i) $\lambda(\mathrm{u}+\mathrm{v}) = \lambda\mathrm{u} + \lambda\mathrm{v}$

ii) $(\lambda+\mu)\mathrm{v} = \lambda\mathrm{v} + \mu\mathrm{v}$

iii) $(\lambda\mu)\mathrm{v} = \lambda(\mu\mathrm{v})$

iv) $1\mathrm{v} = \mathrm{v}$.

Se dice entonces que M *es un módulo sobre* $\mathbb{A}$.

Si $\mathbb{K}$ *es un cuerpo y* (V, +) *un grupo abeliano con estructura de módulo sobre* $\mathbb{K}$, *entonces se dice que* V *es un espacio vectorial sobre* $\mathbb{K}$.

A los elementos de un espacio vectorial se les denomina habitualmente vectores y a los elementos del cuerpo escalares.

Ejemplos 1.2

1. El anillo $\mathbb{A}$ está dotado de estructura de módulo sobre $\mathbb{A}$ con el producto de la estructura de anillo.

2. Sea n un entero positivo y sea

$$V_n(\mathbb{A}) = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} / x_i \in \mathbb{A} \right\}$$

Si $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ son elementos de $V_n(\mathbb{A})$ se define:

$$x+y = \begin{pmatrix} x_1+y_1 \\ \vdots \\ x_n+y_n \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \lambda x = \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \vdots \\ \lambda x_n \end{pmatrix} \quad \text{para} \quad \lambda \in \mathbb{A}.$$

Con estas operaciones $V_n(\mathbb{A})$ es un módulo sobre $\mathbb{A}$. Si $\mathbb{K}$ *es un cuerpo*, $V_n(\mathbb{K})$ es espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ y se denomina modelo analítico de espacio vectorial de dimensión n.

3. Sea X un conjunto y M un módulo sobre $\mathbb{A}$. El conjunto M^X formado por todas las aplicaciones de X en M tiene estructura de módulo sobre $\mathbb{A}$ con las operaciones:

— suma, $(f+g): X \ni x \longrightarrow f(x)+g(x) \in M$ para $f,\ g \in M^X$.

— producto, $\lambda f: X \ni x \longrightarrow \lambda f(x) \in M$ para $\lambda \in \mathbb{A}$ y $f \in M^X$.

4. Fijados los enteros positivos m y n, se denomina matriz de m filas y n columnas con coeficientes en $\mathbb{A}$, a una aplicación:

$$A: \{1, \ldots, m\} \times \{1, \ldots, n\} \ni (i, j) \longrightarrow a_{ij} \in \mathbb{A}$$

Llamaremos $FL\ (m, n; \mathbb{A})$ (o simplemente $FL(m, n)$ si se sobreentiende el anillo de los coeficientes) al conjunto de todas las matrices de m filas y n columnas con coeficientes en $\mathbb{A}$. Como caso particular del ejemplo anterior $FL(m, n; \mathbb{A})$ tiene estructura de módulo sobre $\mathbb{A}$.

Tradicionalmente una matriz $F \in FL(m, n; \mathbb{A})$ se expresa como una tabla de la forma:

$$F = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = (a_{ij}) \in FL(m, n; \mathbb{A})$$

En particular se denota por $EL\ (n, \mathbb{A}) = EL\ (n) = FL\ (n, n)$ al módulo de matrices de n filas y n columnas sobre $\mathbb{A}$.

Obsérvese que $V_n(\mathbb{A}) = FL(n, 1)$.

5. Sea $\mathbb{K}$ un cuerpo y $\mathbb{K}[t]$ el anillo de polinomios en la variable t. Si V es un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ *se puede definir una estructura de módulo sobre* $\mathbb{K}[t]$ en V mediante la operación:

$$\mathbb{K}[t] \times V \ni (a_n t^n + a_{n-1} t^{n-1} + \ldots + a_0,\ v) \longrightarrow a_n v + a_{n-1} v + \ldots + a_0 v \in V.$$

Definición 1.3: Algebra

Sea $\mathbb{K}$ un cuerpo. Supongamos que un grupo abeliano $(V, +)$ tiene estructura de espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$. Diremos que V tiene estructura de álgebra sobre $\mathbb{K}$ si hay definida una operación interna:

$$\times : V \times V \longrightarrow V$$

de modo que $(V, +, \times)$ *tiene estructura de anillo.*

Ejemplos 1.4.

1. El anillo de polinomios $\mathbb{K}[t]$ sobre el cuerpo $\mathbb{K}$ tiene estructura natural de álgebra. En efecto, $\mathbb{K}[t]$ es un anillo con el producto y suma usuales entre polinomios. El producto (usual) de un número por un polinomio da estructura de espacio vectorial al grupo $(\mathbb{K}[t], +)$.

2. Sean m, n, r enteros positivos. Si

$$A=(a_{ij}) \in FL(m, n; \mathbb{A}) \quad \text{y} \quad B=(b_{jk}) \in FL(n, r; \mathbb{A})$$

se define el producto $AB=C=(c_{ik}) \in FL(m, r; \mathbb{A})$ por las fórmulas:

$$c_{ik}=\sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk}.$$

Esta operación se denomina producto de matrices y en el caso de considerar matrices en $EL(n; \mathbb{A})$ es una operación interna:

$$EL(n; \mathbb{A}) \times EL(n; \mathbb{A}) \ni (A, B) \longrightarrow AB \in EL(n; \mathbb{A})$$

Si $\mathbb{K}$ *es un cuerpo* $EL(n; \mathbb{K})$ tiene estructura de álgebra sobre $\mathbb{K}$ pues por el ejemplo 1.3 tiene estructura de espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$, y con la suma y producto de matrices tiene estructura de anillo.

2. DEPENDENCIA LINEAL

La relación de dependencia lineal es el concepto fundamental del álgebra lineal y tiene su origen geométrico en los conceptos de vectores libres con la misma dirección en el plano y vectores libres coplanarios en el espacio.

En toda esta sección M designará un módulo sobre $\mathbb{A}$ y V un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$. *Si* r es un entero positivo, a un elemento $(v_1, \ldots, v_r)$ de M^r (o V^r) lo llamaremos *sistema*. Obsérvese que en un sistema es esencial el orden y pueden aparecer elementos de M repetidos.

Definición 2.1: Dependencia lineal

Sea S *un subconjunto de* M *y* $v \in M$. *Diremos que* v *depende linealmente de* S *(o es combinación lineal de elementos de* S*) y escribimos* v d.l. S, *si existe un sistema* $(v_1, \ldots, v_r) \in S^r$ y $(\lambda_1, \ldots, \lambda_r) \in \mathbb{A}^r$ *tales que:*

$$v = \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_r v_r$$

Se dice que en este caso v d. l. $(v_1, \ldots, v_r)$.

Finalmente, si S_1 *y* S_2 *son subconjuntos (o sistemas) de* M, *diremos que* S_1 *depende linealmente de* S_2 (S_1 d.l. S_2) *si para cada* v *de* S_1, v d.l. S_2.

Para manipular combinaciones lineales de sistemas es útil conocer el producto de sistemas por matrices y las reglas básicas de cálculo con este tipo de producto.

Definición 2.2.

Sea $(v_1, \ldots, v_r) \in M^r$ *y* $A = (a_{ij}) \in FL(r, m; \mathbb{A})$. *Se define el sistema* $(w_1, \ldots, w_m) = (v_1, \ldots, v_r)A$ *por las fórmulas:*

$$w_j = \sum_{i=1}^{r} a_{ij} v_i \quad \textit{para} \quad j = 1, \ldots, m.$$

Proposición 2.3.

Sean $(v_1, ..., v_r)$ *y* $(w_1, ..., w_s)$ *dos sistemas de* M. *Entonces* $(v_1, ..., v_r)$ d.l. $(w_1, ..., w_s)$ *si y sólo si existe una matriz* $A \in FL(s, r)$ *tal que* $(v_1, ..., v_r) = (w_1, ..., w_s) A$.

Demostración. Véase ejercicio 2.4. □

Proposición 2.4.

Sean $(v_1, ..., v_r) \in M^r$, $A \in FL(r, m)$ *y* $B \in FL(m, s)$. *Entonces:*

$$((v_1, ..., v_r) A) B = (v_1, ..., v_r)(AB)$$

Si $(v_1, ..., v_r)$, $(w_1, ..., w_r) \in M^r$ *y* $\lambda, \mu \in \mathbb{A}$ *se denota por*

$$\lambda(v_1, ..., v_r) + \mu(w_1, ..., w_r)$$

al sistema $(\lambda v_1 + \mu w_1, ..., \lambda v_r + \mu w_r)$.

Sean $(v_1, ..., v_r) \in M^r$, $A, B \in FL(r, m)$ *y* $\lambda, \mu \in \mathbb{A}$, *entonces:*

$$(v_1, ..., v_r)(\lambda A + \mu B) = \lambda(v_1, ..., v_r) A + \mu(v_1, ..., v_r) B$$

Demostración. Véase ejercicio 2.4. □

Nota 2.5: Notación

Si $S \subset M$ denotaremos por $\langle S \rangle$ al conjunto $\{v \in M / v \text{ d.l. } S\}$. Análogamente en el caso de un sistema $(v_1, ..., v_r) \in M^r$ denotaremos

$$\langle v_1, ..., v_r \rangle \quad a \quad \langle \{v_1, ..., v_r\} \rangle.$$

Proposición 2.6

Sean $(v_1, ..., v_r)$ *y* $(w_1, ..., w_s)$ *dos sistemas de* M. *Si* $\{w_1, ..., w_s\} \subset \langle v_1, ..., v_r \rangle$ *entonces* $\langle w_1, ..., w_s \rangle \subset \langle v_1, ..., v_r \rangle$.

Demostración

Si $\{w_1, ..., w_s\} \subset \langle v_1, ..., v_r \rangle$ entonces $(w_1, ..., w_s)$ d.l. $(v_1, ..., v_r)$ y por la proposición 2.3 existe una matriz $A \in FL(r, s)$ tal que $(w_1, ..., w_s) = (v_1, ..., v_r)A$. Si $w \in \langle w_1, ..., w_s \rangle$ existe $B \in FL(s, 1)$ tal que $w = (w_1, ..., w_s)B$ y así $w = ((v_1, ..., v_r)A)B = (v_1, ..., v_r)(AB)$ con lo que $w \in \langle v_1, ..., v_r \rangle$. □

Proposición 2.7

i) Si $S \subset M$ es $S \subset \langle S \rangle$.

ii) Si $S_1 \subset S_2 \subset M$ es $\langle S_1 \rangle \subset \langle S_2 \rangle$.

iii) Si $S \subset M$ se verifica $\langle \langle S \rangle \rangle = \langle S \rangle$.

Demostración. Véase el ejercicio 2.5

Definición 2.8: Sistema generador

Sea S $\subset$ M, *diremos que* S *genera* M *si* $\langle S \rangle = M$. *Un sistema* $(v_1, ..., v_r) \in M^r$ *es un sistema generador (finito) si* $\langle v_1, ..., v_r \rangle = M$. *Si* M *admite un sistema generador finito se dice que* M *es finitamente generado.*

Ejemplo 2.9

1. El sistema $(I_1, ..., I_n) \subset V_n(\mathbb{A})$ con

$$I_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1\,(i) \\ \\ 0 \end{pmatrix},$$

es un sistema de generadores de $V_n(\mathbb{A})$. Por tanto, $V_n(\mathbb{A})$ es finitamente generado.

2. El anillo de polinomios $\mathbb{K}[t]$, considerado como espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$, no es finitamente generado. En efecto, si $(\gamma_1, ..., \gamma_r)$ es un sistema de $\mathbb{K}[t]$, el conjunto:

$$\langle\gamma_1, ..., \gamma_r\rangle = \{\lambda_1\gamma_1 + ... + \lambda_r\gamma_r / \lambda_i \in \mathbb{K}\}$$

no contiene polinomios de grado superior al máximo de los grados de los γ_i. Por otra parte el conjunto infinito $\{1, t, t^2, ..., t^n, ...\}$ genera $\mathbb{K}[t]$.

Definición 2.10

Sea $(v_1, ..., v_r) \in M^r$ *un sistema, diremos que es linealmente dependiente (l.d.) si existe* $(\lambda_1, ..., \lambda_r) \in \mathbb{A}^r$, $(\lambda_1, ..., \lambda_r) \neq (0, ..., 0)$ *tal que* $\lambda_1 v_1 + ... + \lambda_r v_r = 0$. *Sea* $S \subset M$, *diremos que S es linealmente dependiente (l.d.) si existe un sistema linealmente dependiente formado por elementos distintos de* S. *Si* $(v_1, ..., v_r) \in M^r$ (o $S \subset M$) *no es l.d. diremos que es linealmente independiente (l.i.).*

Ejemplo 2.11

El subconjunto $\{1, t, t^2, ..., t^n, ...\} \subset \mathbb{K}[t]$ es l.i. Véase el ejercicio 2.6.

***Observación 2.12**

Con la notación matricial la definición 2.10 se escribe así: $(v_1, ..., v_r)$ es l.d. si y sólo si existe $A \in FL(r, 1)$ tal que $(v_1, ..., v_r)A = 0$ y $A \neq 0$.

Proposición 2.13

Si $(v_1, ..., v_r) \in M^r$ *es un sistema linealmente independiente y* $A, B \in FL(r, m)$ *son tales que*

$$(v_1, ..., v_r)A = (v_1, ..., v_r)B$$

entonces $A = B$.

Demostración

Si $(v_1, ..., v_r)A=(v_1, ..., v_r)B$ entonces $(0, ..., 0)=(v_1, ..., v_r)A-$ $-(v_1, ..., v_r)B$ y por la proposición 2.4 se tiene $(0, ..., 0)=$ $=(v_1, ..., v_r)(A-B)$. Aplicando la observación 2.12 a cada columna tendremos que $A-B=0$. □

A continuación estableceremds algunos resultados que son válidos para espacios vectoriales y no para módulos en general:

Proposición 2.14

Sea V *un espacio vectorial sobre* $\mathbb{K}$. *Si* $(v_1, ..., v_r) \in V^r$, *el sistema* $(v_1, ..., v_r)$ *es l.d. si y sólo existe* $i \in \{1, ..., r\}$ *tal que*

$$v_i \text{ d.l. } (v_1, ..., v_{i-1}, v_{i+1}, ..., v_r).$$

Demostración

Si $(v_1, ..., v_r)$ es l.d. existe $(\lambda_1, ..., \lambda_r) \in \mathbb{K}^r$ tal que

$$\lambda_1 v_1 + ... + \lambda_r v_r = 0$$

y algún λ_i es distinto de cero. Por ser $\mathbb{K}$ *un cuerpo podemos escribir:*

$$-v_i = \frac{\lambda_1}{\lambda_i} v_1 + ... + \frac{\lambda_{i-1}}{\lambda_i} v_{i-1} + \frac{\lambda_{i+1}}{\lambda_i} v_{i+1} + ... + \frac{\lambda_r}{\lambda_i} v_r$$

por tanto, v_i d.l. $(v_1, ..., v_{i-1}, v_{i+1}, ..., v_r)$.

Recíprocamente, si v_i d.l. $(v_1, ..., v_{i-1}, v_{i+1}, ..., v_r)$ para algún i, entonces:

$$v_i = \lambda_i v_1 + ... + \lambda_{i-1} v_{i-1} + \lambda_{i+1} v_{i+1} + ... + \lambda_r v_r$$

y pasando todo a un miembro se concluye que $(v_1, ..., v_r)$ es l.d. □

Observación 2.15

El resultado anterior no es válido para módulos en general, no es cierto en el módulo del ejemplo 5 de 1.2. En dicho ejemplo habíamos definido una estructura de módulo sobre $\mathbb{K}[t]$ en un espacio vectorial V sobre $\mathbb{K}$. Supongamos que existe en V un sistema (v_1, v_2) l.i. en la estructura vectorial de V. El sistema es l.d. en V como módulo sobre $\mathbb{K}[t]$, pues

$$(t-1)v_1 + 0v_2 = 0.$$

Sin embargo, en este módulo, no se verifica que v_1 d.l. (v_2) ni v_2 d.l. (v_1). En efecto, si existe

$$\gamma(t) = a_0 + a_1 t + \ldots + a_m t^m \in \mathbb{K}[t]$$

tal que $v_1 = \gamma(t)v_2$, entonces $v_1 = (a_0 + \ldots + a_m)v_2$, con lo que v_1 d.l. (v_2) en el espacio vectorial V y por la proposición 2.14 (v_1, v_2) es l.d. en V, en contra de lo supuesto. Análogamente tampoco v_1 d.l. (v_2) en el módulo V.

Proposición 2.16

Sea V *un espacio vectorial sobre* $\mathbb{K}$. *Si* $(v_1, \ldots, v_r) \in V^r$ *es un sistema l.i. y* $v \in V$ *no depende linealmente de* $(v_1, \ldots, v_r)$, *entonces el sistema* $(v_1, \ldots, v_r, v)$ *es l.i.*

Demostración. Ver ejercicio 2.8.

3. BASES Y DIMENSION

Un sistema generador linealmente independiente se denomina base. El concepto de base es de importancia fundamental en álgebra lineal pues permite el estudio algebraico de un espacio vectorial de generación finita mediante los modelos analíticos $V_n(\mathbb{K})$ (véase el parágrafo 3 de la lección 3: geometría analítica vectorial). En el presente parágrafo enunciaremos el teorema de la base que asegura que todo espacio vectorial tiene una base y que todas las bases de un espacio vectorial dado tienen el mismo número de elementos.

Definición 3.1: Base

Sea M *un módulo sobre* $\mathbb{A}$ *y* $\varepsilon=(e_1, \ldots, e_n) \in M^n$ *un sistema de* M. *Diremos que* ε *es una base de* M, *si* ε *es un sistema generador y linealmente independiente.*

Aquellos módulos que admiten una base se denominan módulos libres.

Ejemplo 3.2

1. Supongamos que $\mathbb{K}$ *es un cuerpo. El sistema* $(I_1, \ldots, I_n)$ de $V_n(\mathbb{K})$ definido en el ejemplo 1 de 2.9, es una base de $V_n(\mathbb{K})$ y se denomina base canónica. Para $\mathbb{A}=\mathbb{Z}$ (anillo de los números enteros), el sistema anterior es también base, así $V_n(\mathbb{Z})$ es módulo libre.

2. El modulo sobre $\mathbb{K}[t]$, V, definido en el ejemplo 5 de 1.2, no es libre (véase el ejercicio 2.10).

Proposición 3.3. Teorema de la base

Sea V *un espacio vectorial sobre* $\mathbb{K}$ *finitamente generado (distinto de* $\{0\}$*).*

i) Existe una base $\varepsilon=(v_1, \ldots, v_n)$ *de* V.

ii) Todas las bases de V *tienen el mismo número de elementos.*

Demostración. Ver ejercicios 2.11 y 2.12. □

Existen versiones más generales del teorema de la base, para nuestros fines será, sin embargo, suficiente el teorema 3.3.

Definición 3.4: Dimensión

Sea V *un espacio vectorial finitamente generado. Se llama dimensión de* V (dim V) *al número de elementos de que consta una cualquiera de sus bases.*

La definición anterior se puede enunciar en contextos más generales que los espacios vectoriales de generación finita, gracias a las versiones más potentes del teorema de la base.

Obsérvese que imponer la condición de ser finitamente generado a un espacio vectorial es equivalente, en virtud de 3.3, a decir que dicho espacio tiene *dimensión finita*.

Nota 3.5

La expresión *espacio vectorial de dimensión finita* sustituirá a partir de este lugar a espacio vectorial de generación finita.

Uno de los resultados más útiles en álgebra lineal es que todo sistema l.i., en un espacio vectorial se puede ampliar a una base.

Proposición 3.6. Teorema de prolongación de una base

Si la dimensión de un espacio vectorial V *es* n *y* $(v_1, ..., v_r)$ *es un sistema l.i., existe una base de la forma:*

$$(v_1, ...v_r, v_{r+1}, ..., v_n)$$

Demostración. Véase el ejercicio 2.14.

4. SUBMODULOS Y SUBESPACIOS VECTORIALES

Los subconjuntos de un módulo *M* que a su vez tienen estructura de módulo con las operaciones de *M* restringidas se denominan submódulos.

En el conjunto de todos los submodulos de M se definen dos operaciones que dotan a dicho conjunto de estructura de retículo.

Definición 4.1: Submódulo

Sea M *un módulo sobre el anillo* $\mathbb{A}$. *Diremos que* $U \subset M$, $U \neq \phi$, *es un submódulo de* M *si:*

1. *Para cada* u, $v \in U$, $u+v \in U$.
2. *Si* $u \in U$ *y* $\lambda \in \mathbb{A}$ *entonces* $\lambda u \in U$.

Si V *es un subespacio vectorial sobre el cuerpo* $\mathbb{K}$, *a los submódulos de* V *se les denomina subespacios vectoriales de* V.

Notación 4.2. Si U es un submódulo de M notaremos $U<M$.

Proposición 4.3

Sea $U \subset M$, $U \neq \phi$, U *es un submódulo de* M *si y sólo si para cada* u, $v \in U$, λ, $\mu \in \mathbb{A}$ *se tiene que* $\lambda u+\mu v \in U$.

Demostración. Ver el ejercicio 2.15. □

Observación 4.4

Si U es un submódulo de M, entonces U admite una estructura natural de módulo con las operaciones de M restringidas a U. Si U es un subespacio vectorial de V (espacio vectorial de dimensión finita), entonces U es a su vez un espacio vectorial y tiene sentido hablar de dimensión de U. Se verifica que $0 \leqslant \dim U \leqslant \dim V$. Los subespacios vectoriales de dimensión uno se denominan *rectas vectoriales*, los de dimensión dos *planos vectoriales* y los de dimensión $n-1$ *hiperplanos vectoriales*, donde $n = \dim V$.

Ejemplos 4.5

1. Si $S \subset M$ entonces $\langle S \rangle$ es submódulo de M.
2. Sea $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{A}^n$, el conjunto

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in V_n(\mathbb{A}) / \lambda_1 x_1 \ldots + \lambda_n x_n = 0 \right\} \subset V_n(\mathbb{A})$$

es un submódulo de $V_n(\mathbb{A})$. Diremos que $\lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_n x_n = 0$ es la ecuación implícita de U.

Proposición 4.6

S $\subset$ M *es submódulo de* M *si y sólo si* $\langle S \rangle = S$.

Demostración. Supongamos que S es submódulo de M. Si v d.l. S entonces $v = \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_r v_r$ con $(v_1, \ldots, v_r) \in S^r$ y $(\lambda_1, \ldots, \lambda_r) \in \mathbb{A}^r$, por ser S submódulo $v = \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_r v_r \in S$, luego $\langle S \rangle \subset S$ y por 2.7i) se tiene el contenido en el sentido contrario.

Recíprocamente si $\langle S \rangle = S$ por el primer ejemplo de 4.5, $\langle S \rangle$ es submódulo de M. $\square$

A continuación estudiaremos el conjunto de los submódulos de un módulo M.

Notación 4.7.

Llamaremos $\mathscr{L}(M)$ al conjunto de todos los submódulos de M.

La intersección nos da una primera operación interna en $\mathscr{L}(M)$:

Proposición 4.8.

Si $\{U_i\}_{i \in I} \subset \mathscr{L}(M)$ *entonces* $\bigcap_{i \in I} U_i \in \mathscr{L}(M)$.

Demostración. Véase el ejercicio 2.16.

Ejemplo 4.9.

En $V_n(\mathbb{A})$ consideramos:

$$U_i = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \cdot \\ x_n \end{pmatrix} \in V_n(\mathbb{A}) / \lambda_{i1} x_1 + \dots + \lambda_{in} x_n = 0 \right\}$$

$i = 1, \dots, m$, entonces:

$$U = \bigcap_{i=1}^{m} U_i = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \cdot \\ x_n \end{pmatrix} \in V_n(\mathbb{A}) / \lambda_{i1} x_1 + \dots + \lambda_{in} x_n = 0,\ i = 1, \dots, m \right\}$$

es un submódulo de $V_n(\mathbb{A})$.

Llamaremos ecuaciones implícitas de U a:

$$\left. \begin{array}{c} \lambda_{11} x_1 + \dots + \lambda_{1n} x_n = 0 \\ \vdots \\ \lambda_{m1} x_1 + \dots + \lambda_{mn} x_n = 0 \end{array} \right\}$$

Proposición 4.10.

Sea S $\subset$ M *entonces:*

$$\langle S \rangle = \bigcap_{\substack{U \in \mathscr{L}(M) \\ S \subset U}} U$$

Demostración

Como $S \subset U$, aplicando 2.7ii), $\langle S \rangle \subset \langle U \rangle = U$ pues $U \in \mathscr{L}(M)$ por lo tanto

$$\langle S \rangle \subset \bigcap_{\substack{U \in \mathscr{L}(M) \\ S \subset U}} U.$$

Por otra parte $\langle S\rangle \in \mathscr{L}(M)$ y $S \subset \langle S\rangle$ se tiene que

$$\bigcap_{\substack{U \in \mathscr{L}(M)\\ S \subset U}} U \subset \langle S\rangle. \quad \square$$

La proposición anterior nos dice que $\langle S\rangle$ es el submódulo más pequeño que contiene a S. Más rigurosamente:

Corolario 4.11.

Dado $S \subset U$ *y* $U<M$, *entonces* $U=\langle S\rangle$ *si y sólo si para cada* $U'<$ $<M$ *tal que* $S \subset U'$ *entonces* $U \subset U'$.

A continuación definiremos otra operación interna en $\mathscr{L}(M)$:

Definición 4.12.

Sea $\{U_1, ..., U_m\} \subset \mathscr{L}(M)$ *entonces definimos suma de dichos submódulos del siguiente modo:*

$$U_1+...+U_m=<\bigcup_{i=1}^{m} U_i>$$

Proposición 4.13.

Si $\{U_1, ..., U_m\} \subset \mathscr{L}(M)$ *entonces:*

$$U_1+...+U_m=\{u_1+...+u_m/u_i \in U_i,\ i=1, ..., m\}$$

Demostración

Sea $\{U_1, ..., U_m\} \subset \mathscr{L}(M)$ llamaremos

$$U=\{u_1+...+u_m/u_i \in U_i,\ i=1, ..., m\}.$$

Es claro que U es submódulo de M y que $\bigcup_{i=1}^{m} U_i \subset U$, por 4.11,

$U_1+\ldots+U_m \subset U$. Por otra parte si $u_i \in U_i$, $i=1, \ldots, m$ se tiene que

$$u_1+\ldots+u_m \text{ d.l. de } \bigcup_{i=1}^{m} U_i \text{ luego } u_1+\ldots+u_m \in U_1+\ldots+U_m. \square$$

Proposición 4.14

El conjunto $\mathscr{L}(M)$ *con las operaciones + y* $\cap$ *de dos submodulos, tiene estructura de retículo, no distributivo, con elemento universal y elemento nulo.*

Demostración. Las propiedades de retículo de la intersección en $\mathscr{L}(M)$ son inmediatas, pues se verifican para todo tipo de subconjuntos de M.

En cuanto a las propiedades de la suma:

— Si $U \in \mathscr{L}(M)$, $U+U=\langle U \cup U\rangle=\langle U\rangle=U$.

— Si $U_1, U_2, U_3 \in \mathscr{L}(M)$, como consecuencia de 4.13 podemos escribir

$$U_1+(U_2+U_3)=\{u_1+(u_2+u_3)/u_i \in U_i,\ i=1,\ 2,\ 3\}=$$
$$=\{(u_1+u_2)+u_3/u_i \in U_i,\ i=1,\ 2,\ 3\}=(U_1+U_2)+U_3.$$

— Si $U_1, U_2 \in \mathscr{L}(M)$, $U_1+U_2=\langle U_1 \cup U_2\rangle=\langle U_2 \cup U_1\rangle=U_2+U_1$.

— Si $U \in \mathscr{L}(M)$ entonces $0 \in U$, luego $U+\{0\}=\langle U \cup \{0\}\rangle=\langle U\rangle=$ $=U$.

— Si $U_1, U_2 \in \mathscr{L}(M)$, $U_1+(U_2 \cap U_1)=\langle U_1 \cup (U_2 \cap U_1)\rangle=\langle U_1\rangle=$ $=U_1$.

— Si $U_1, U_2 \in \mathscr{L}(M)$, $U_1 \cap (U_2+U_1)=U_1$, pues $U_1 \subset U_1+U_2$.

En cuanto al hecho de no ser retículo distributivo en general, considérese el siguiente ejemplo: En $\mathbb{R}^2$ como espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ consideramos $U_1=\langle(1,\ 0)\rangle$, $U_2=\langle(0,\ 1)\rangle$ y $U_3=\langle(1,\ 1)\rangle$, entonces:

$$-U_1+(U_2 \cap U_3)=U_1+\{0\}=U_1 \neq \mathbb{R}^2=(U_1+U_2) \cap (U_1+U_3).$$

$$-U_1 \cap (U_2+U_3)=U_1 \cap \mathbb{R}^2=U_1 \neq \{0\}=(U_1 \cap U_2)+(U_1 \cap U_3). \square$$

Observación 4.15

En general $\mathscr{L}(M)$ no es un retículo con complementario. En efecto, considérese, por ejemplo, el anillo de los enteros $\mathbb{Z}$ como módulo sobre $\mathbb{Z}$. El conjunto de todos los enteros pares, $\langle 2 \rangle$, es un submódulo de $\mathbb{Z}$. Si $U \in \mathscr{L}(\mathbb{Z})$ es tal que $U + \langle 2 \rangle = \mathbb{Z}$, debe ser $U \neq \{0\}$ por lo que existe $p \in U$, $p \neq 0$; ahora bien $2p \in U \cap \langle 2 \rangle$, luego $U \cap \langle 2 \rangle \neq \{0\}$ con lo que U no es complementario de $\langle 2 \rangle$.

Sin embargo para espacios vectoriales el conjunto de subespacios tiene estructura de retículo con complementario:

Proposición 4.16

Si V *es un espacio vectorial de dimensión finita,* $\mathscr{L}(V)$ *es un retículo con complementario.*

Demostración

Hemos de probar que si $U \in \mathscr{L}(V)$ existe $U' \in \mathscr{L}(V)$ tal que $U + U' = V$ y $U \cap U' = \{0\}$. Si $U = \{0\}$ basta tomar $U' = V$. Supongamos que $1 \leqslant \dim U \leqslant \dim V$ y sea $(e_1, \ldots, e_r)$ una base de U. Por el teorema de prolongación 3.6, existe $(e_{r-1}, \ldots, e_n) \in V^{n-r}$ tal que $(e_1, \ldots, e_n)$ es base de V. Es fácil concluir que $\langle e_{r+1}, \ldots, e_r \rangle$ es un complementario de U. $\square$

Proposición 4.17: Fórmula de las dimensiones

Sean U_1 *y* U_2 *dos subespacios de dimensión finita del espacio vectorial* V*, entonces* $\mathrm{U}_1 \cap \mathrm{U}_2$ *y* $\mathrm{U}_1 + \mathrm{U}_2$ *tienen dimensión finita y se verifica:*

$$\dim (U_1 + U_2) = \dim U_1 + \dim U_2 - \dim U_1 \cap U_2.$$

Demostración

Sea $p = \dim U_1$ y $q = \dim U_2$ entonces como $U_1 \cap U_2 \subset U_1$ (y en U_2) la dimensión de $U_1 \cap U_2$ es finita y si $\dim U_1 \cap U_2 = r$ se tiene que $r \leqslant p$ y $r \leqslant q$. Tomemos $(e_1, \ldots, e_r)$ una base de $U_1 \cap U_2$ aplicando

EJERCICIOS

1. Dotar al conjunto de los números complejos, $\mathbb{C}$, de estructura de espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ y sobre $\mathbb{C}$. Dotar al conjunto de los números reales de estructura de módulo sobre $\mathbb{Z}$.

2. Se consideran las operaciones siguientes en $\mathbb{C}^2$:

— $(x, y)+(x', y')=(x+x', y+y')$ para

$$(x, y), (x', y') \in \mathbb{C}^2 \text{ y}$$

— $\lambda(x, y)=(\bar{\lambda}x, \bar{\lambda}y)$, siendo

$$\lambda \in \mathbb{C}, \ \bar{\lambda} \text{ su conjugado y } (x, y) \in \mathbb{C}^2.$$

Estudiar si $\mathbb{C}^2$ con las operaciones anteriores tiene estructura de espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$.

3.* Sea $\mathbb{A}$ un anillo conmutativo con unidad. Estudiar si $\mathbb{A}^2$ tiene estructura de módulo sobre $\mathbb{A}$ con las operaciones:

— $(\lambda, \mu)+(\lambda', \mu')=(\lambda+\lambda', \mu+\mu')$ para cada

$$(\lambda, \mu), (\lambda', \mu') \in \mathbb{A}^2.$$

— $\nu(\lambda, \mu)=(\nu\lambda, 1)$ para cada $\nu \in \mathbb{A}$, $(\lambda, \mu) \in \mathbb{A}^2$.

4.* Probar las proposiciones 2.3 y 2.4.

5.* Probar la proposición 2.7.

6.* Considérese $\mathbb{K}[t]$ como espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$. Probar que $\{1, t, t^2, ..., t^n, ...\} \subset \mathbb{K}[t]$ es linealmente independiente.

7. Considérese el anillo $\mathbb{Z}$ de los números enteros como módulo sobre $\mathbb{Z}$. Demostrar que (3) es un sistema l.i., que 2 no d.l. de (3) y sin embargo, (3,2) es un sistema l.d.

8.* Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$. Probar que si $(v_1, ..., v_r)$

$\in V^r$ es un sistema l.i. y $v \in V$ no depende linealmente de $(v_1, ..., v_r)$ entonces $(v_1, ..., v_r, v)$ es l.i.

9. Sea $\mathbb{K}_3[t]$ el conjunto de polinomios de grado inferior o igual a tres con coeficientes en $\mathbb{K}$. Probar que $\mathbb{K}_3[t]$ es un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ con las operaciones usuales de polinomios y encontrar una base de dicho espacio vectorial.

10.* Sea V el modulo sobre $\mathbb{K}[t]$ del ejemplo 5 de 1.2, demostrar que V no es módulo libre sobre $\mathbb{K}[t]$.

11.* Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$. Si $(v_1, ..., v_m)$ es un sistema generador de V, $V \neq \{0\}$, probar que existe una base de V, $\varepsilon = (e_1, ..., e_n)$ tal que $\{e_1, ..., e_n\} \subset \{v_1, ..., v_m\}$.

12.* Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$. Si $(v_1, ..., v_n)$ es l.i., y $\{u_1, ..., u_s\} \subset \langle v_1, ..., v_n \rangle$ con $s > n$ entonces $(u_1, ..., u_s)$ es l.d. Deducir que si V es de generación finita, todas las bases de V tienen el mismo número de elementos.

13. Probar que si V es un espacio vectorial de dimensión n, todo sistema l.i., o generador con n elementos es una base de V.

14.* Demostrar el teorema de prolongación de una base 3.6.

15.* Sea M un módulo sobre $\mathbb{A}$ y $U \subset M$, $U \neq \phi$. El subconjunto U es un submódulo de M si y sólo si para cada u, $v \in U$, λ, $\mu \in \mathbb{A}$, se tiene $\mu u + \mu v \in U$.

16.* Pruébese que si $\{U_i\}_{i \in I} \subset \mathscr{L}(M)$ entonces

$$\bigcap_{i \in I} U_i \subset \mathscr{L}(M).$$

17.* ¿Todo submodulo de un módulo libre es un módulo libre? Justifíquese la respuesta.

18. Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ y U_1, U_2, $U_3 \in \mathscr{L}(V)$. Probar que si $U_1 \subset U_3$ entonces:

$$U_1 + (U_2 \cap U_3) = (U_1 + U_2) \cap U_3$$

19. Probar que dos hiperplanos vectoriales distintos se cortan en una recta vectorial en un espacio vectorial de dimensión tres.

20.* Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$, de dimensión finita. Si U_1 y U_2 son dos subespacios de V de dimensiones n_1 y n_2, respectivamente, ¿cuáles son las posibles dimensiones de U_1+U_2 y de $U_1 \cap U_2$?

LECCION 3

HOMOMORFISMOS

En el primer parágrafo de esta lección estudiaremos algunas nociones sobre homomorfismos entre módulos y espacios vectoriales. En particular, la definición de automorfismos de un espacio vectorial permite la introducción del grupo general lineal con el que se define la *geometría vectorial*. En el segundo epígrafe se establecen varios resultados sobre submódulos y homomorfismos que serán de uso posterior. Por último se estudia un tipo particular de homomorfismos entre un espacio vectorial de dimensión n sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ y el espacio $V_n(\mathbb{K})$ (llamados sistemas de coordenadas), con los que se introduce la geometría analítica vectorial.

Como en la lección anterior $\mathbb{A}$ denotará un anillo conmutativo con elemento unidad y $\mathbb{K}$ será un cuerpo conmutativo.

1. HOMOMORFISMOS Y GEOMETRIA VECTORIAL

Los homomorfismos son las aplicaciones naturales entre módulos, es decir: son las aplicaciones que conservan la relación de dependencia lineal.

Definición 1.1: Homomorfismo

Sean M *y* M′ *dos módulos sobre el anillo* $\mathbb{A}$. *Diremos que una aplicación* $f : M \to M'$ *es un homomorfismo (o aplicación lineal) si se verifica:*

$$f(v_1+v_2)=f(v_1)+f(v_2) \textit{ para cada } v_1,\ v_2 \in M$$

$$f(\lambda v)=\lambda f(v) \textit{ para cada } \lambda \in \mathbb{A} \textit{ y } v \in M$$

Proposición 1.2

Sea $f: M \to M'$ *un homomorfismo entre módulos. Si* $(w_1, \ldots, w_s) = (v_1, \ldots, v_r)A$ *con* $(w_1, \ldots, w_s) \in M^s$; $(v_1, \ldots, v_r) \in M^r$ *y* $A \in FL(r, s)$, *entonces* $(f(w_1), \ldots, f(w_s)) = (f(v_1), \ldots, f(v_r))A$.

La prueba es una consecuencia inmediata de la definición de homomorfismo.

Corolario 1.3.

Supongamos que $f: M \to M'$ *es un homomorfismo. Si* $v \in M$ *y* $S \subset M$ *entonces:*

$$v \text{ } d.l. \text{ } S \Rightarrow f(v) \text{ } d.l. \text{ } f(S).$$

Definición 1.4. Monomorfismos, epimorfismos e isomorfismos

Sea $f: M \to M'$ *un homomorfismo entre modulos.*

a) Diremos que f *es un monomorfismo si* f *es inyectiva.*

b) Si f *es sobreyectiva, entonces diremos que* f *es un epimorfismo.*

c) Si f *es biyectiva, entonces diremos que* f *es un isomorfismo.*

Definición 1.5. Núcleo

Supongamos que $f: M \to M'$ *es un homomorfismo entre módulos. Se llama núcleo de* f *al conjunto*

$$Ker\ f = \{v \in M | f(v) = 0\}.$$

Proposición 1.6.

Dado un homomorfismo $f : M \to M'$ *se tiene:*

i) *Ker* f *es un submódulo de* M.

ii) f *es monomorfismo si y sólo si ker* $f = \{0\}$.

Demostración. Ver ejercicio 3.4. □

Proposición 1.7. Teorema fundamental de homomorfismos

Sean M *y* M' *dos módulos sobre* $\mathbb{A}$, $(v_1, \dots, v_r) \in M^r$ *una base de* M *y* $(v'_1, \dots, v'_r) \in (M')^r$. *Existe un único homomorfismo* $f : M \to M'$ *que verifica* $f(v_i) = v'_i$. *Además:*

i) $(v'_1, \dots, v'_r)$ *es* l.i. *si y sólo si* f *es monomorfismo.*

ii) $(v'_1, \dots, v'_r)$ *es sistema generador si y sólo si* f *es epimorfismo.*

iii) $(v'_1, \dots, v'_r)$ *es base si y sólo si* f *es isomorfismo.*

Demostración

Sea $v \in M$. Por ser $(v_1, \dots, v_r)$ base de M, existe $(\lambda_1, \dots, \lambda_r) \in \mathbb{A}^r$ tal que $v = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_r v_r$. Entonces definimos $f(v) = \lambda_1 v'_1 + \dots + \lambda_r v'_r$. Es fácil comprobar que f es un homomorfismo y que debe ser único, así como el resto del teorema. □

Definición 1.8.

Diremos que dos módulos M *y* M' *son isomorfos si existe un isomorfismo* $f : M \to M'$.

Corolario 1.9.

Dos espacios vectoriales V *y* V' de dimensión finita sobre $\mathbb{K}$ *son isomorfos si y sólo si* $\dim V = \dim V'$.

Proposición 1.10.

Sean M, M′, M″ *módulos sobre* $\mathbb{A}$ *y* $f: M \to M'$, $f': M' \to M''$ *dos homomorfismos. Entonces* $f' \circ f$ *es un homomorfismo. Además, si* f *y* f′ *son isomorfismos también* $f' \circ f$ *es un isomorfismo.*

Demostración. Véase el ejercicio 3.5. □

Proposición 1.11.

Dados dos modulos M *y* M′ *sobre* $\mathbb{A}$, *llamaremos* FL(M, M′) *al conjunto de todos los homomorfismos de* M *en* M′. *Las siguientes operaciones:*

$$+ : FL(M, M')^2 \ni (f_1, f_2) \to f_1 + f_2 \in FL(M, M')$$

definiéndose $(f_1+f_2)(v) = f_1(v) + f_2(v)$ *para* $v \in M$ *y*

$$\cdot : \mathbb{A} \times FL(M, M') \ni (\lambda, f) \to \lambda f \in FL(M, M')$$

donde $(\lambda f)(v) = \lambda f(v)$ *para* $v \in M$, *dotan a* FL(M, M′) *de estructura de módulo sobre* $\mathbb{A}$.

Además, si V *y* V′ *son espacios vectoriales sobre* $\mathbb{K}$ *de dimensiones* n *y* m *respectivamente, se verifica* $\dim FL(V, V') = nm$.

Demostración. Ver ejercicio 3.6. □

Definición 1.12. Endomorfismos y automorfismos

Sea M *un modulo. Los homomorfismos* $f: M \to M$ *se denominan endomorfismos y los isomorfismos* $f: M \to M$ *se llaman automorfismos.*

El conjunto de los endomorfismos de un espacio vectorial *V* sobre $\mathbb{K}$, $EL(V) = FL(V, V)$, tiene estructura de álgebra sobre $\mathbb{K}$ *con las operaciones definidas en* 1.11 *y* 1.10.

Las matrices de $FL(m, n)$ se identifican con los homomorfismos de $V_n(\mathbb{A})$ en $V_m(\mathbb{A})$ vía la aplicación:

$$FL(m, n) \ni F \to F \in FL(V_n(\mathbb{A}), V_m(\mathbb{A})),$$

donde:

$$F : V_n(\mathbb{A}) \ni \begin{pmatrix} x_1 \\ \\ x_n \end{pmatrix} \to F \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in V_m(\mathbb{A}).$$

Es fácil comprobar que se trata de un isomorfismo. Del mismo modo se identifica $EL(n)$ con $EL(V_n(\mathbb{A}))$.

En virtud de la proposición 1.10., los automorfismos de un módulo forman un grupo con la operación composición de aplicaciones. En el caso de tratarse de los automorfismos de un espacio vectorial dicho grupo tiene una relevancia especial:

Definición 1.13. Grupo general lineal

Sea V *un espacio vectorial sobre* $\mathbb{K}$, *el grupo de los automorfismos de* V *se denomina grupo general lineal de* V, GL(V).

El grupo $GL(V)$ actúa sobre V de forma natural:

Proposición 1.14

Sea V *un espacio vectorial, la aplicación*

$$\mathrm{GL}(\mathrm{V}) \times \mathrm{V} \ni (\mathrm{f}, \mathrm{v}) \to \mathrm{f}(\mathrm{v}) \in \mathrm{V}$$

es una actuación fiel.

Demostración. Véase el ejercicio 3.7. □

La actuación de 1.13 permite definir la geometría vectorial:

Definición 1.15. Geometría vectorial

(V, GL(V)) *con la actuación dada en* 1.13 *se denomina geometría vectorial sobre* V.

Por lo tanto el estudio de la geometría vectorial es el estudio de las propiedades invariantes por la actuación del grupo general lineal.

Ejemplo 1.16

Dado un espacio vectorial *V*, en virtud del teorema 1.7, las propiedades de dependencia e independencia lineal para sistemas son propiedades geométricas vectoriales.

2. SUBMODULOS Y HOMOMORFISMOS

En este parágrafo estableceremos algunos resultados sobre submódulos y homomorfismos. Finalmente se estudia la descomposición de un módulo en suma directa de submódulos y los sistemas de proyecciones así determinados; este estudio será de uso importante en capítulos posteriores.

Proposición 2.1.

Sea $f: M \to M'$ *un homomorfismo entre módulos. Entonces:*

i) Si $U < M$, *se tiene* $f(U) < M'$ *y* $f|_U : U \to f(U)$ *es homomorfismo.*
ii) Si $U' < M'$, *se tiene* $f^{-1}(U') < M$ *y* $f|f^{-1}(U') : f^{-1}(U') \to U'$ *es homomorfismo.*

Nota 2.2. Imagen

En particular $f(M) < M'$ se denomina *imagen* de *f* y se denota im *f*.

Corolario 2.3

Si $f: M \to M'$ *es homomorfismo y* $S \subset M$ *entonces* $f(\langle S \rangle) = \langle f(S) \rangle$.

Demostración

Por la proposición anterior $f(\langle S \rangle)$ es un submódulo de M' y $f(\langle S \rangle) \supset \langle f(S) \rangle$. Por otra parte, por conservar f la dependencia lineal, $f(\langle S \rangle) \subset \langle f(S) \rangle$. □

A continuación estableceremos el concepto de módulo cociente. Sea M un módulo sobre $\mathbb{A}$:

Definición 2.4

Sea U *un submódulo del módulo* M. *Definimos la siguiente relación:*

$$v_1 \equiv v_2 \pmod{U} \Leftrightarrow v_2 - v_1 \in U.$$

Observación 2.5

La relación anterior es de equivalencia.

Definición 2.6. Espacio cociente

Sea $U < M$. *Al conjunto de las clases de equivalen a dadas por la relación definida anteriormente en* M, *lo denotaremos* $M/U = \{v + U \mid v \in M\}$, *donde* $v + U = \{v + u \mid u \in U\}$. *Se definen dos operaciones*

$$M/U \times M/U \to M/U$$
$$(v_1 + U, \ v_2 + U) \to (v_1 + U) + (v_2 + U) = (v_1 + v_2) + U$$
$$\mathbb{A} \times M/U \to M/U$$
$$(\lambda, \ v + U) \to \lambda(v + U) = \lambda v + U$$

Observación 2.7

Las operaciones de la definición anterior están «bien definidas», es decir:

$$(v_1+U)+(v_2+U)=(v'_1+U)+(v'_2+U)$$

si

$$v_1+U=v'_1+U \text{ y } v_2+U=v'_2+U,$$

y análogamente para $\lambda(v+U)$. (Ver ejercicio 3.11).

Proposición 2.8. Espacio cociente

Sea U *un submódulo de* M. *Entonces* M/U *admite una estructura de módulo con las operaciones de la definición anterior. Ademas la aplicación:*

$$\begin{aligned} \theta : \mathrm{M} &\longrightarrow \mathrm{M/U} \\ \mathrm{v} &\longrightarrow \mathrm{v+U} \end{aligned}$$

es un homomorfismo.

Demostración

Es consecuencia directa de la definición de las operaciones. □

Proposición 2.9

Si V *es espacio vectorial de dimensión finita y* U<V, *entonces* dim (V/U) = dim V − dim U.

Demostración

Sea $(e_1, ..., e_r)$ base de U. La ampliamos a $(e_1, ..., e_n)$ base de V. Entonces $(e_{r+1}+U, ..., e_n+U)$ es una base de V/U y podemos concluir la fórmula requerida. □

Proposición 2.10. Primer teorema de isomorfía

Sea $f: M \to M'$ *un homomorfismo entre módulos. Existe un isomorfismo entre* $M/\mathrm{Ker}\, f$ *y* $f(M) = \mathrm{im} f$.

Demostración

Se define $f': M/\mathrm{Ker}\, f \longrightarrow \mathrm{im} f$

$$v + \mathrm{Ker}\, f \longrightarrow f(v)$$

En primer lugar f' está bien definido: supongamos que $v + \mathrm{Ker}\, f = v' + \mathrm{Ker}\, f$, entonces $v - v' \in \mathrm{Ker}\, f$, por tanto $f(v) = f(v')$, luego

$$f'(v + \mathrm{Ker}\, f) = f'(v' + \mathrm{Ker}\, f).$$

Es claro que f' es sobreyectiva y por último si $f'(v + \mathrm{Ker}\, f) = 0$, entonces $f(v) = 0$, y así $v + \mathrm{Ker}\, f = \mathrm{Ker}\, f$, de donde f' es también inyectiva. □

Corolario 2.11

Si $f: V \longrightarrow V'$ *es un homomorfismo y* V *es un espacio vectorial de dimensión finita, se verifica:*

$$\dim V = \dim \mathrm{im} f + \dim \mathrm{Ker}\, f.$$

Definición 2.12. Suma directa

Sea M *un módulo sobre* $\mathbb{A}$ *y* $\{U_1, \ldots, U_r\} \subset \mathscr{L}(M)$, $U = U_1 + \ldots + U_r$. *Diremos que* U *es suma directa de* $U_1, \ldots, U_r$ *y lo denotaremos* $U = U_1 \oplus \ldots \oplus U_r$, *si para cada* $u \in U$ *existen vectores únicos* $u_i \in U_i$ *tales que* $u = u_1 + \ldots + u_r$.

Ejemplo 2.13

Tomemos $V_n(\mathbb{A})$ y $U_i = \langle l_i \rangle$, $i = 1, \ldots, n$. Entonces

$V_n(\mathbb{A}) = U_1 \oplus \dots \oplus U_n$, pues dado

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in V_n(\mathbb{A}), \text{ se tiene de forma única:}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \dots + \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ x_i \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in U_i, \; i = 1, \dots, n$$

Proposición 2.14

Sea M *un módulo y* $\{U_1, \dots, U_r\} \subset \mathscr{L}(M)$. *Supongamos que* $U_i \neq \{0\}$, $i = 1, \dots, r$, *y* $U = U_1 + \dots + U_r$. *Las siguientes condiciones son equivalentes:*

i) $U = U_1 \oplus \dots \oplus U_r$

ii) *Para todo* $i = 1, \dots, r$ *es* $U_i \cap (\Sigma_{j \neq i} U_j) = \{0\}$

iii) *Para todo* $j = 1, \dots, r-1$ *es* $(U_1 + \dots + U_j) \cap U_{j+1} = \{0\}$

Si V *es un espacio vectorial de dimensión finita y* $\{U_1, \dots, U_r\} \subset \mathscr{L}(V)$, *entonces las siguientes condiciones también son equivalentes a las anteriores:*

iv) *dim* $U =$ *dim* $U_1 + \dots +$ *dim* U_r

v) *Si* ε_i *es base de* U_i, $i = 1, \dots, r$ *entonces* $\varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_r)$ *es base de* U

vi) *si* $u_i \in U_i - \{0\}$ $i = 1, \dots, r$ *entonces* $(u_1, \dots, u_r)$ *es* l.i.

Demostración

Probaremos:

$$\begin{tikzcd} & \text{ii)} \arrow[dr, Rightarrow] & \\ \text{i)} \arrow[ur, Rightarrow] & & \text{iii)} \arrow[ll, Rightarrow] \arrow[d, Rightarrow] \\ \text{vi)} \arrow[u, Rightarrow] & & \text{iv)} \arrow[dl, Rightarrow] \\ & \text{v)} \arrow[ul, Rightarrow] & \end{tikzcd}$$

para submódulos

i) $\Rightarrow$ ii) Sea $i \in \{1, ..., r\}$ y $u \in U_i \cap (\Sigma_{l \neq i} U_l)$. Entonces es $u = 0 + ... + u + ... + 0 = u_1 + ... + u_{i-1} + 0 + u_{i+1} + ... + u_r$ siendo única la forma de expresión, por lo que $u = 0$.

ii) $\Rightarrow$ iii) Inmediato.

iii) $\Rightarrow$ i) Razonaremos por inducción sobre r. Para $r=2$ supongamos que $U = U_1 + U_2$ y $U_1 \cap U_2 = \{0\}$. Si $u \in U$ admite dos expresiones

$$u = u_1 + u_2 = u'_1 + u'_2 \text{ con } u_1, u'_1 \in U_1 \quad \text{y} \quad u_2, u'_2 \in U_2$$

entonces debe ser

$u_1 - u'_1 = u_2 - u'_2 \in U_1 \cap U_2 = \{0\}$, luego $u_1 = u'_1$ y $u_2 = u'_2$. Supongamos el resultado cierto para $r-1$. Si $u \in U$ se escribe:

$$u = u_1 + ... + u_{r-1} + u_r = u'_1 + ... + u'_{r-1} + u'_r \text{ con } u_i, u'_i \in U_i,$$

por el caso $r=2$ y iii) se tiene $(U_1 + ... + U_{r-1}) \oplus U_r = U$, luego

$$u_r = u'_r \text{ y } u_1 + ... + u_{r-1} = u'_1 + ... + u'_{r-1}.$$

Entonces por hipótesis de inducción se tiene $u_i = u'_i$, $i = 1, ..., r-1$.

Supongamos a partir de aquí que V es espacio vectorial de dimensión finita y que $\{U_1, ..., U_r\} \subset \mathscr{L}(V)$.

iii) $\Rightarrow$ iv) Se razona por inducción sobre r. Para $r=2$ tenemos $U_1 \cap U_2 = \{0\}$ y $U_1 + U_2 = U$. Entonces, por la fórmula de las dimensiones, $\dim U = \dim U_1 + \dim U_2$. Supongamos ahora cierto el resultado para $r-1$, hemos de probarlo para r. Así:

$$\dim (U_1 + ... + U_{r-1}) = \dim U_1 + ... + \dim U_{r-1}$$

y como

$$(U_1 + ... + U_{r-1}) \cap U_r = \{0\},$$

por la fórmula de las dimensiones

$$\dim U = \dim (U_1 + ... + U_{r-1}) + \dim U_r = \dim U_1 + ... + \dim U_r.$$

iv) $\Rightarrow$ v) El sistema $\varepsilon = (\varepsilon_1, ..., \varepsilon_r)$ es un sistema generador de U con $\dim U_1 + ... + \dim U_r = \dim U$ vectores, luego ε es base de U.

v) $\Rightarrow$ vi) Si $u_i \in U_i - \{0\}$ $i=1, \ldots, r$ ampliamos cada sistema (u_i) a una base ε_i del subespacio U_i. Entonces $\varepsilon=(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_r)$ es una base de U por lo que $(u_1, \ldots, u_r)$, formado por elementos de ε, es l.i.

vi) $\Rightarrow$ i) Supongamos que $v=u_1+\ldots+u_r=u'_1+\ldots+u'_r$ con $u_i, u'_i \in U_i$, $i=1, \ldots, r$. Entonces $0=(u_1-u'_1)+\ldots+(u_r-u'_r)$ y por vi) es $u_1=u'_1, \ldots, u_r=u'_r$. □

Proposición 2.15. Sistema de proyecciones

Supongamos que V *es un espacio vectorial y que* $V=U_1 \oplus \ldots \oplus U_r$. *Para cada* $i=1, \ldots, r$ *se define* $\pi_i: V \ni v \to \pi_i(v) \in V$ *de modo que* $\pi_i(v) \in U_i$ *y* $v=\pi_1(v)+\ldots+\pi_r(v)$. *Entonces* $\pi_1, \ldots, \pi_r$ *son aplicaciones lineales que verifican:*

i) $\pi_1+\ldots+\pi_r=id_V$.

ii) $\pi_i^2=\pi_i$ *para* $i=1, \ldots, r$

iii) $\pi_i \; \pi_j=0$ *si* $i \neq j$

Además $\mathrm{im}\,\pi_i=U_i$. *Al sistema de endomorfismos* $(\pi_1, \ldots, \pi_r)$ *se le denomina sistema de proyecciones asociado a la descomposición en suma directa* $V=U_1 \oplus \ldots \oplus U_r$.

Demostración

Ver ejercicio 3.13. □

Proposición 2.16

Supongamos que $(\pi_1, \ldots, \pi_r)$ *es un sistema de endomorfismos de un espacio vectorial* V *sobre* $\mathbb{K}$ *que verifica las propiedades i), ii) y iii) de la proposición anterior. Entonces si* $U_i=\mathrm{im}\,\pi_i$ *se verifica* $V=U_1 \oplus \ldots \oplus U_r$ *y* $(\pi_1, \ldots, \pi_r)$ *es el sistema de proyecciones asociado a la descomposición anterior.*

Demostración

Para cada $v \in V$, $v=id_V(v)=\pi_1(v)+\ldots+\pi_r(v) \in U_1+\ldots+U_r$, por tanto $V=U_1+\ldots+U_r$. Como $\pi_i=\pi_i^2$, entonces $\pi_i(u)=u$ para cada

$u \in U_i = im\pi_i$. Supongamos que $u_i \in U_i - \{0\}$ para $i=1, \ldots, r$ y tomemos $\lambda_1 u_1 + \ldots + \lambda_r u_r = 0$ con $\lambda_i \in \mathbb{K}$, $i=1, \ldots, r$. Se verifica que $0 = \lambda_1 \pi_1(u_1) + \ldots + \lambda_r \pi_r(u_r)$ y aplicando ahora π_j se tiene $\lambda_j \pi_j(u_j) = = \lambda_j u_j = 0$, luego $\lambda_j = 0$, $j=1, \ldots, r$, así pues $(u_1, \ldots, u_r)$ es l.i. □

El siguiente caso particular tiene interés especial, como veremos en el próximo capítulo:

Definición 2.17. Proyección

Sea $\pi : V \longrightarrow V$ un endomorfismo. Diremos que π es una proyección si se verifica $\pi^2 = \pi$. A $B = \mathrm{im}\pi$ se le denomina base de la proyección y a $D = \mathrm{Ker}\pi$ dirección de la misma.

Proposición 2.18. Base y dirección de una proyección

Sea $\pi : V \longrightarrow V$ una proyección. Entonces $V = B \oplus D$, siendo B la base y D la dirección de π y $(\pi, \mathrm{id}_V - \pi)$ es el sistema de proyecciones asociado a dicha descomposición en suma directa.

Demostración

Es una comprobación inmediata que $(\pi, \mathrm{id}_V - \pi)$ verifica las condiciones i) ii) y iii) de 2.15 y que $\mathrm{im}(\mathrm{id}_V - \pi) = \ker \pi$. □

Ejemplo 2.19.

La aplicación $V_2(\mathbb{R}) \ni \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \end{pmatrix} \in V_2(\mathbb{R})$ es la proyección de base $\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle$ y dirección $\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle$.

En el siguiente capítulo estudiaremos como todo endomorfismo de un espacio vectorial da lugar a una descomposición en suma directa. Un caso particular sencillo es el siguiente:

Definición 2.20. Simetría

Sea $\sigma: V \longrightarrow V$ *un endomorfismo de un espacio vectorial* V. *Diremos que* σ *es una simetría si se verifica* $\sigma^2 = id_V$. *Al subespacio* $B = Ker\ (\sigma - id_V)$ *se le denomina base de la simetría y a* $D = Ker\ (\sigma + id_V)$ *dirección de la misma.*

Proposición 2.21.

Sea $\sigma: V \longrightarrow V$ *una simetría del espacio vectorial* V *sobre el cuerpo* $\mathbb{K}$ *de característica distinta de dos (es decir: en* $\mathbb{K}$ *es* $1+$ $+1 \neq 0$). *Entonces* $V = B \oplus D$, *siendo* B *la base y* D *la dirección de* σ. *Además, si* π *es la proyección de base* B *y dirección* D, *se tiene* $\sigma = 2\pi - id_V$.

Demostración

Basta comprobar que $(1/2)\ (\sigma + id_V)$ es la proyección π. En efecto:

$$(1/2(\sigma + id_v))^2 = (1/4)\ (\sigma^2 + 2\sigma + id_v) = (1/2)\ (\sigma + id_v)$$

y

$$Ker\ (\sigma + id_V) = Ker\ (1/2)\ (\sigma + id_V),$$

con lo que resta verificar que

$$Ker\ (\sigma - id_V) = im\,(1/2)\ (\sigma + id_V):$$

Si $v \in Ker(\sigma - id_V)$ entonces $(1/2)\ (\sigma + id_V)v = v$, luego

$$v \in im\,(1/2)\ (\sigma + id_V).$$

Recíprocamente, si $v \in im\,(1/2)\ (\sigma + id_V)$, existe

$$w \in V \text{ tal que } v = (1/2)\ (\sigma(w) + w),$$

ahora bien

$$\sigma(v) = (1/2)\ (\sigma^2(w) + \sigma(w)) = (1/2)\ (w + \sigma(w)) = v.$$

Así $v \in Ker\ (\sigma - id_V)$. ❐

Corolario 2.22.

Sea $\sigma : V \longrightarrow V$ *una simetría de base* B *y dirección* D. *Si* (π_1, π_2) *es el sistema de proyecciones asociado a la descomposición* $V = B \oplus D$ *entonces* $\sigma = \pi_1 - \pi_2$.

Demostración

Obsérvese que π_1 es la proyección de base B y dirección D, luego aplicando 2.18 $\pi_2 = \mathrm{id}_V - \pi_1$ y por 2.21 $\sigma = 2\pi_1 - \mathrm{id}_V = \pi_1 - (\mathrm{id}_V - \pi_1) = \pi_1 - \pi_2$. □

Ejemplo 2.23.

La aplicación $V_2(\mathbb{R}) \ni \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ -x_2 \end{pmatrix} \in V_2(\mathbb{R})$ es la simetría de base $\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$ y dirección $\left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$.

3. GEOMETRIA ANALITICA VECTORIAL

El objetivo del parágrafo es la representación de los elementos de la geometría de espacios vectoriales de dimensión finita mediante expresiones matriciales. Este método de representación aporta una técnica algebraica para la resolución de problemas geométricos.

Supondremos en adelante que V es un espacio vectorial de dimensión n sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ (conmutativo).

Proposición 3.1.

Sea $\varepsilon = (e_1, \ldots, e_n)$ *una base de* V. *La aplicación definida por:*

$$x : V \ni v \to \begin{pmatrix} x_1(v) \\ \vdots \\ x_n(v) \end{pmatrix} \in V_n(\mathbb{K}) \textit{ siendo } v = x_1(v)\ e_1 + \ldots + x_n(v)\, e_n$$

es un isomorfismo y la aplicación lineal inversa es:

$$\varepsilon : V_n(\mathbb{K}) \ni X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \\ x_n \end{pmatrix} \to (e_1, \ldots, e_n) \begin{pmatrix} x_1 \\ \\ x_n \end{pmatrix} = \varepsilon X = x_1 e_1 + \ldots + x_n e_n \in V.$$

Demostración

Basta observar que x transforma la base $(e_1, \ldots, e_n)$ de V en la base $(l_1, \ldots, l_n)$ de $V_n(\mathbb{K})$. □

Definición 3.2. Sistema de coordenadas

El isomorfismo $x : V \to V_n(\mathbb{K})$ *se denomina sistema de coordenadas respecto a la base* $\varepsilon = (e_1, \ldots, e_n)$.

La importancia de la definición 3.2 estriba en que un sistema de coordenadas permite el estudio de la geometría vectorial de un espacio vectorial V de dimensión n sobre $\mathbb{K}$ mediante el estudio del modelo analítico $V_n(\mathbb{K})$. A su vez el estudio de $V_n(\mathbb{K})$ se facilita gracias al cálculo matricial.

Proposición 3.3. Matriz del cambio de base

Sean $\varepsilon = (e_1, \ldots, e_n)$ *y* $\varepsilon' = (e'_1, \ldots, e'_n)$ *dos bases de* V *y sea* $x : V \to V_n(\mathbb{K})$ *el sistema de coordenadas respecto a la base* ε. *Si llamamos:*

$$P = (x(e'_1), \ldots, x(e'_n)) = \begin{pmatrix} x_1(e'_1) & \ldots & x_1(e'_n) \\ \\ x_n(e'_1) & \ldots & x_n(e'_n) \end{pmatrix} \in GL(n)$$

se verifica $\varepsilon' = \varepsilon P$ *La matriz* P *se denomina matriz de paso de* ε *a* ε'.

La prueba es una comprobación inmediata.

Proposición 3.4. Cambio de coordenadas

Sean $\varepsilon = (e_1, ..., e_n)$ *y* $\varepsilon' = (e'_1, ..., e'_n)$ *dos bases de* V *y* $P \in GL(n)$ *la matriz del cambio de base:* $\varepsilon' = \varepsilon P$ *Si* x *y* $x' : V \to V_n(\mathbb{K})$ *son los sistemas de coordenadas correspondientes entonces para cada* $v \in V$ *se tiene* $x(v) = Px'(v)$ *(ecuaciones del cambio de coordenadas).*

Demostración

Para cada $v \in V$ es $v = \varepsilon' x'(v) = \varepsilon P x'(v) = \varepsilon x(v)$, por consiguiente $x(v) = Px'(v)$. □

Proposición 3.5. Matriz de una aplicación lineal

Sean $\varepsilon = (e_1, ..., e_n)$ *y* $\varepsilon' = (e'_1, ..., e'_m)$ *bases respectivas de* V *y* V', *espacios vectoriales sobre* $\mathbb{K}$ *de dimensiones* n *y* m. *Sea* $x' : V' \to V_m(\mathbb{K})$ *el sistema de coordenadas en* V' *respecto a la base* ε'. *Consideremos una aplicación lineal* $f : V \to V'$. *Designaremos por* $M_{\varepsilon,\varepsilon'}(f)$ *la matriz:*

$$(x'(f(e_1)), ..., x'(f(e_n))) = \begin{pmatrix} x'_1(f(e_1)) & \dots & x'_1(f(e_n)) \\ \vdots & & \\ x'_m(f(e_1)) & \dots & x'_m(f(e_n)) \end{pmatrix} \in FL(m, n)$$

Si llamamos $f(\varepsilon) = (f(e_1), ..., f(e_n))$ *se verifica:*

$$f(\varepsilon) = \varepsilon' M_{\varepsilon,\varepsilon'}(f).$$

A la matriz $M_{\varepsilon,\varepsilon'}(f)$ *se le denomina matriz de la aplicación lineal* f *respecto de las bases* ε *y* ε'.

La prueba es una sencilla comprobación.

Proposición 3.6. Ecuaciones de una aplicación lineal

Sean $\varepsilon=(e_1, \ldots, e_n)$ *y* $\varepsilon'=(e'_1, \ldots, e'_m)$ *bases de los espacios vectoriales* V *y* V′ *respectivamente,*

$$x : V \longrightarrow V_n(\mathbb{K}) \ y \ x' : V' \longrightarrow V_m(\mathbb{K})$$

los sistemas de coordenadas respectivos. Si $f : V \longrightarrow V'$ *es una aplicación lineal, entonces para cada* $v \in V$ *es*

$$x'(f(v)) = M_{\varepsilon,\varepsilon'}(f)\, x(v)$$

(ecuaciones de una aplicación lineal).

Demostración

Para cada $v \in V$,

$$f(v) = \varepsilon' x'(f(v)) = f(\varepsilon x(v)) =$$
$$= f(\varepsilon)\, x(v) = \varepsilon' M_{\varepsilon,\varepsilon'}(f)\, x(v). \ \square$$

Observación 3.7

En las condiciones del resultado 3.6, dado que una matriz $F \in FL(m,n)$ se identifica con una aplicación lineal de

$$FL(V_n(\mathbb{K}),\ V_m(\mathbb{K})),$$

el teorema 3.6 se reparafrasea diciendo que el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "f"] \arrow[d, "x"'] & V' \arrow[d, "x'"] \\ V_n(\mathbb{K}) \arrow[r, "M_{\varepsilon,\varepsilon'}(f)"'] & V_m(\mathbb{K}) \end{tikzcd}$$

Proposición 3.8.

Sean ε, δ *bases de* V *y* ε', δ' *bases de* V′ *con sistemas de coordenadas*

$$x,\ y : V \longrightarrow V_n(\mathbb{K}) \ \text{ y } \ x',\ y' : V' \longrightarrow V_m(\mathbb{K})$$

respectivamente. Supongamos que $f : V \longrightarrow V'$ *es una aplicación lineal,* P *es la matriz de paso de* ε *a* δ ($\delta = \varepsilon P$) *y* P′ *es la matriz de paso de* ε' *a* δ' ($\delta' = \varepsilon' P'$). *Entonces se verifica:*

$$M_{\delta,\delta'}(f) = P'^{-1} M_{\varepsilon,\varepsilon'}(f)\, P.$$

Demostración

Para cada $v \in V$,

$$x'(f(v)) = M_{\varepsilon,\varepsilon'}(f)\, x(v),$$

aplicando 3.4

$$x'(f(v)) = P' y'(f(v)) = M_{\varepsilon,\varepsilon'}(f)\, P y(v),$$

luego $y'(f(v)) = P'^{-1} M_{\varepsilon,\varepsilon'}(f)\, P y(v)$, con lo cual

$$M_{\delta,\delta'}(f) = P'^{-1} M_{\varepsilon,\varepsilon'}(f)\, P. \ \square$$

Proposición 3.9.

Si ε, ε', ε'' *son bases de los espacios vectoriales* V, V′ *y* V″ *respectivamente y* $f : V \longrightarrow V'$, $g : V' \longrightarrow V''$ *son homomorfismos, entonces:*

$$M_{\varepsilon,\varepsilon''}(g \cdot f) = M_{\varepsilon',\varepsilon''}(g)\, M_{\varepsilon,\varepsilon'}(f).$$

Demostración. Ver ejercicio 3.20 $\square$

Proposición 3.10.

Sea U *un subespacio vectorial de dimensión menor o igual a* r *de* V. *Existe una aplicación lineal* $f : V_r(\mathbb{K}) \longrightarrow V$ tal que $\text{imf} = U$.

Demostración

Tomamos $(l_1, \ldots, l_r)$ la base canónica de $V_r(\mathbb{K})$ y $(u_1, \ldots, u_r)$ un sistema generador de U. Por el teorema fundamental de homomorfismos 1.7, existe $f : V_r(\mathbb{K}) \longrightarrow V$ tal que $f(l_i) = u_i$ para $i = 1, \ldots, r$. Entonces se verifica $\text{imf} = U$. □

Proposición 3.11. Ecuaciones paramétricas de un subespacio

Sea $(e_1, \ldots, e_n)$ *una base de* V *y* $x : V \longrightarrow V_n(\mathbb{K})$ *el sistema de coordenadas correspondiente. Si* U *es un subespacio vectorial de* V *de dimensión menor o igual a* r, *existe una matriz* $A \in EL\,(r, n)$ verificando:

$$v \in U \text{ si y sólo si existe } \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_r \end{pmatrix} \in V_r(\mathbb{K}) \text{ tal que } A \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_r \end{pmatrix} = x(v)$$

(ecuaciones explícitas o paramétricas de U*). Además* $rgA = \dim U$.

Demostración

Basta tomar como matriz A la matriz de la aplicación lineal construida en 3.10 respecto a las bases $(l_1, \ldots, l_r)$ y $(e_1, \ldots, e_n)$. □

Usualmente las ecuaciones paramétricas de un subespacio U se escriben en forma de sistema:

$$\begin{cases} x_1 = a_{11}\lambda_1 + \ldots + a_{1r}\lambda_r \\ \qquad \ldots \\ x_n = a_{n1}\lambda_1 + \ldots + a_{nr}\lambda_r \end{cases}$$

Proposición 3.12

Sea U *un subespacio vectorial de* V, *de dimensión mayor o igual a* r. *Existe una aplicación lineal* $f: V \longrightarrow V_{n-r}(\mathbb{K})$ *tal que* Ker $f = U$.

Demostración

Tomamos $(e_1, \ldots, e_s)$ una base de U, la ampliamos a una base $(e_1, \ldots, e_s, e_{s+1}, \ldots, e_n)$ de V. Por el teorema fundamental de homomorfismos 1.7, existe una aplicación lineal $f: V \longrightarrow V_{n-r}(\mathbb{K})$ tal que

$$f(e_i) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} i=1, \ldots, s \text{ y } f(e_i) = l_{i-s} \; i = s+1, \ldots, n$$

siendo $(l_1, \ldots, l_{n-r})$ la base canonica de $V_{n-r}(\mathbb{K})$. Claramente $U = \text{Ker } f$. □

Corolario 3.13. Ecuaciones implícitas de un subespacio

Sea V *un espacio vectorial sobre* $\mathbb{K}$ *de dimensión* n *y* $\varepsilon = (e_1, \ldots, e_n)$ *una base de* V *con* $x: V \longrightarrow V_n(\mathbb{K})$ *el sistema de coordenadas correspondiente. Si* U *es un subespacio vectorial de* V *de dimensión mayor o igual a* r, *existe una matriz* $A \in FL(n-r, n)$ *tal que* $v \in U$ *si y sólo si* $Ax(v) = 0$ (*ecuaciones implícitas de* U). *Además* $\text{rg}A = n - \dim U$.

Las ecuaciones implícitas de un subespacio se escriben en forma de sistema usualmente:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n = 0 \\ \qquad \ldots \\ a_{d1}x_1 + \ldots + a_{dn}x_n = 0 \end{cases} \quad (\text{siendo } d = n - r)$$

El paso de ecuaciones implícitas de un subespacio a ecuaciones paramétricas se lleva a cabo mediante la resolución de un sistema y en el sentido contrario mediante la eliminación de parámetros, que son las dos operaciones fundamentales en álgebra lineal.

EJERCICIOS

3.1. Estudiar cuales de las siguientes aplicaciones son homomorfismos:

i) $f_1 : V_2(\mathbb{R}) \ni \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \to (x_1^2) \in V_1(\mathbb{R})$.

ii) $f_2 : \mathbb{R}[t] \ni a_n t^n + \ldots + a_0 \to \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} \in V_2(\mathbb{R})$.

iii) $f_3 : V_2(\mathbb{Z}) \ni \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix} \in V_3(\mathbb{Z})$.

iv) $f_4 . V_2(\mathbb{R}) \ni \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix} \in V_3(\mathbb{Z})$.

3.2. Estudiar si la aplicación f_2 definida en ii) del ejercicio anterior es un epimorfismo, un monomorfismo o un isomorfismo. Realizar el mismo estudio con f_3.

3.2. Sean las aplicaciones:

$$f_1 : V_2(\mathbb{Q}) \ni \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2x_1 \\ 2x_3 \end{pmatrix} \in V_2(\mathbb{Q}) \text{ y}$$

$$f_2 : V_2(\mathbb{Z}) \ni \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2x_1 \\ 2x_2 \end{pmatrix} \in V_2(\mathbb{Z}).$$

Probar que f_1 es un isomorfismo mientras que f_2 no lo es.

3.4.* Sea $f : M \to M'$ un homomorfismo entre módulos sobre $\mathbb{A}$. Demostrar:

1. $\operatorname{Ker} f$ es un submódulo de M.
2. f es un monomorfismo si y sólo si $\operatorname{Ker} f = \{0\}$.

3.5.* Sean M, M' y M'' módulos sobre $\mathbb{A}$ y $f : M \to M'$, $f' : M' \to M''$ dos homomorfismos. Probar que $f' \cdot f : M \to M''$ es un homomorfismo. ¿Cuál es su núcleo?

3.6.* Pruébese la proposición 1.11.

3.7.* Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$, $V \neq \{0\}$. Probar que la aplicación:

$$GL(V) \times V \ni (f, v) \to f(v) \in V$$

es una actuación fiel. Demostrar que no es transitiva y determinar las órbitas de la actuación.

3.8. Estudiar si las siguientes propiedades para pares de elementos de $V_2(\mathbb{R})$ son propiedades geométricas vectoriales:

1. $\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix}\right) \in V_2^2(\mathbb{R})$ verifica la propiedad (*) si

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix}$$

2. $\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix}\right) \in V_2^2(\mathbb{R})$ verifica la propiedad (**) si

$$(x_1 - x'_1)^2 + (x_2 - x'_2)^2 = 1.$$

3.9.* Dado un espacio vectorial V sobre $\mathbb{K}$, la actuación de $GL(V)$ en V induce una actuación de $GL(V)$ sobre $\mathscr{L}(V)$. Encontrar un invariante completo para la clasificación de $\mathscr{L}(V)$ inducida por dicha actuación.

3.10.* Dado un espacio vectorial V sobre $\mathbb{K}$. Definir una actuación de $GL(V)$ sobre $\mathscr{L}(V)^2$. Encontrar un sistema completo de invariantes para la clasificación inducida por dicha actuación.

3.11.* Sea M un módulo sobre $\mathbb{A}$ y U un submódulo de M. Demostrar, con las notaciones de la definición 2.6:

1. Si

$$v_1+U,\ v_2+U,\ v'_1+U,\ v'_2+U \in M/U \text{ y}$$
$$v_1+U=v'_1+U,\ v_2+U=v'_2+U$$

entonces

$$(v_1+v_2)+U=(v'_1+v'_2)+U.$$

2. Si $\lambda \in \mathbb{A}$ y $v+U=v'+U \in M/U$ entonces $\lambda v+U=\lambda v'+U$.

3.12. Dado el homomorfismo:

$$f: V_3(\mathbb{R}) \ni \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} x_1+x_2+x_3 \\ x_1+x_2 \end{pmatrix} \in V_2(\mathbb{R}),$$

hallar bases de $\operatorname{Ker} f$, $V_3(\mathbb{R})/\operatorname{Ker} f$ e $\operatorname{im} f$.

3.13.* Probar la proposición 2.15.

3.14. Probar la expresión:

$$\mathbb{R}_4[t]=\langle t^4\rangle \oplus \langle t^3+1,\ t^2+1\rangle \oplus \langle t+1,\ t-1\rangle,$$

donde $\mathbb{R}_4[t]$ es el espacio vectorial de los polinomios de grado inferior o igual a cuatro con coeficientes reales. Describir el sistema de proyecciones inducido por la descomposición en suma directa anterior.

3.15. Sea $\mathbb{K}_3[t]$ el espacio vectorial de los polinomios de grado menor o igual a tres con coeficientes en el cuerpo $\mathbb{K}$. Determínense los sistemas de coordenadas x, x' respecto las bases:

$$\varepsilon=(1,\ t,\ t^2,\ t^3) \text{ y } \varepsilon'=(1, 1-t, (1-t)^2,\ (1-t)^3),$$

respectivamente. Calcúlense las ecuaciones del cambio de coordenadas $x'=Px$.

3.16. Considérense las dos bases de $V_4(\mathbb{R})$ siguientes:

$$\varepsilon=(I_1,\ I_2,\ I_3,\ I_4) \text{ y } \varepsilon'=(I_1,\ I_1+I_2,\ I_1+I_2+I_3,\ I_1+I_2+I_3+I_4).$$

Calcúlense los sistemas de coordenadas respecto a ε y ε' y las ecuaciones de cambio de coordenadas.

3.17. **Hallar la matriz, respecto de las bases canónicas, de la aplicación lineal:**

$$f: V_4(\mathbb{R}) \to V_3(\mathbb{R}) \text{ que verifica:}$$

$$f\left(\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}\right)=l_1;\ f\left(\begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix}\right)=l_2,\ f\left(\begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\end{pmatrix}\right)$$

$$=l_3,\ f\left(\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}\right)=l_3$$

3.18. Calcular la matriz de la proyección de $V_4(\mathbb{R})$ cuya base es $x_1+x_2+x_3+x_4=0$ (en coordenadas respecto la base canónica) y cuya dirección es la recta $\langle l_1\rangle$.

3.19. Hallar las matrices del sistema de proyecciónes inducido por la descomposición en suma directa:

$$V_4(\mathbb{R})=\langle l_1,\ l_2\rangle\oplus\langle l_3\rangle\oplus\langle l_4\rangle,$$

respecto la base $\varepsilon=(l_1+l_3,\ l_2+l_4,\ l_3+l_4,\ l_4)$.

3.20.* Sean ε, ε', ε'' bases de los espacios vectoriales V, V' y V'' respectivamente y $f: V\to V'$, $g: V'\to V''$ dos homomorfismos. Probar que:

$$M_{\varepsilon\varepsilon''}(g\cdot f)=M_{\varepsilon'\varepsilon''}(g)\ M_{\varepsilon\varepsilon'}(f).$$

3.21.* Sean ε y ε' dos bases de los espacios vectoriales V y V' respectivamente, cuyas dimensiones son n y m. Probar que la aplicación:

$$M_{\varepsilon\varepsilon'}: FL(V,\ V')\ni f\to M_{\varepsilon\varepsilon'}(f)\in FL(m,\ n)$$

es un isomorfismo.

Demostrar que;

$$M_{\mathcal{B}} \cdot EL(V) \ni f \to M_{\mathcal{B}}(f) \in EL(n)$$

es un isomorfismo de álgebras.

3.22. Dados los subespacios de $V_5(\mathbb{R})$:

$$U_1 : \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_1 + x_2 = 0 \end{cases}; \quad U_2 : \begin{cases} 5x_1 + 3x_2 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \\ x_4 + x_5 = 0 \end{cases}$$

en coordenadas respecto la base canónica de $V_5(\mathbb{R})$. Calcular las ecuaciones implícitas y paramétricas de $U_1 + U_2$ y $U_1 \cap U_2$.

3.23. Idem que 3.22 para:

$$U_1 : \begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0; \\ x_4 = 0 \end{cases} \quad U_2 : \begin{cases} x_1 + x_3 = 0 \\ x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0 \end{cases}$$

3.24. Sea $f : V_4(\mathbb{R}) \to V_3(\mathbb{R})$ el homomorfismo cuya matriz respecto las bases canónicas de $V_4(\mathbb{R})$ y de $V_3(\mathbb{R})$ es:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 3 \\ 2 & 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

Calcúlense las ecuaciones implícitas y paramétricas de la imagen y el núcleo de f.

3.25. Considérese en $V_3(\mathbb{R})$ la terna de subespacios, dada por las siguientes ecuaciones respecto de la base canónica:

$$U_1 : x_1 + x_2 = 0; \ U_2 : x_2 + x_3 = 0; \ U_3 : x_1 + x_2 + x_3 = 0.$$

Probar que $V_3(\mathbb{R}) = (U_1 \cap U_2) \oplus U_3$. Calcular las matrices de las proyecciones inducidas por la descomposición anterior.

3.26. Calcular las ecuaciones paramétricas e implícitas de la base y la dirección de la proyección $\pi : V_3(\mathbb{R}) \to V_3(\mathbb{R})$ respecto la base canónica, siendo la matriz de π respecto a dicha base:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

3.27. *Idem* que 3.26 para la simetría $\sigma : V_3(\mathbb{R}) \to V_3(\mathbb{R})$ cuya matriz es:

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -4 & -4 & -3 \end{pmatrix}$$

CAPITULO III

CLASIFICACION LINEAL DE ENDOMORFISMOS EN UN ESPACIO VECTORIAL

El grupo lineal de un espacio vectorial actúa por conjugación sobre el álgebra de endomorfismos dando lugar a un importante problema de clasificación que desde diversos puntos de vista tiene relevancia en otros muchos campos de la matemática (ecuaciones diferenciales, sistemas dinámicos, álgebras de Lie... etc.).

Informalmente, dos endomorfismos de un espacio vectorial son linealmente equivalentes, si se «ven» actuar de la misma forma desde puntos de vista vectoriales adecuadamente elegidos. Rigurosamente, esto significa que pueden elegirse sistemas lineales de coordenadas «adaptados» a uno y otro endomorfismo, de manera que las ecuaciones de ambos en los correspondientes sistemas sean formalmente iguales. La solución del problema, pasa por establecer métodos generales para la obtención de representaciones matriciales sencillas de un endomorfismo arbitrario. Estas representaciones que denominamos de Jordan tienen interés por sí mismas, pues hacen transparente la «estructura» del endomorfismo, y facilitan su manipulación algebraica, y el estudio de sus propiedades geométricas.

LECCION 4

APROXIMACION AL PROBLEMA DE CLASIFICACION LINEAL DE ENDOMORFISMOS

La lección está dedicada a establecer el planteamiento general del problema de clasificación de endomorfismos en un espacio vectorial, y fijar las directrices básicas que permitirán alcanzar más adelante su solución.

§1. EQUIVALENCIA LINEAL Y SEMEJANZA

El grupo $GL(V)$ de un espacio vectorial V actúa por conjugación sobre el álgebra de endomorfismos $EL(V)$ de la forma:

$$GL(V) \times EL(V) \ni (g, f) \to g \cdot f \cdot g^{-1} \in EL(V)$$

ya que $id \cdot f \cdot id^{-1} = f$, y

$$(g \cdot h) \cdot f \cdot (g \cdot h)^{-1} = g(hfh^{-1})\, g^{-1},$$

para todo $g, h \in GL(V)$ y todo $f \in EL(V)$.

Esta actuación da lugar a una relación de equivalencia que pasamos ahora a describir explícitamente.

V denotará en este epígrafe a un espacio vectorial de dimensión finita n sobre el cuerpo $\mathbb{K}$.

Definición 1.1.

Dos endomorfismos f *y* f′ *del espacio vectorial* V *se dicen linealmente equivalentes, si existe* g *transformación lineal en* V *tal que:*

$$f' = g \cdot f \cdot g^{-1}$$

La relación de equivalencia lineal inducida en el álgebra $EL(V_n) = EL(n)$ *(matrices cuadradas de orden* n*) la denominamos relación de semejanza y puede definirse así:*

Definición 1.2.

Dos matrices A *y* A′ *de* EL(n) *se dicen semejantes, si existe una matriz* $P \in GL(n)$ *tal que:*

$$A' = P^{-1}AP$$

La relación entre semejanza de matrices y equivalencia lineal de endomorfismos, puede establecerse a través de los sistemas lineales de coordenadas.

Proposición 1.3.

Sea ε *una base del espacio vectorial* V. *Dos endomorfismos* f, $f' \in EL(V)$ *son linealmente equivalentes, si y sólo si sus representaciones matriciales* $M_\varepsilon(f)$ *y* $M_\varepsilon(f')$ *son semejantes.*

Demostración

Sea $A = M_\varepsilon(f)$, $A' = M_\varepsilon(f')$. Si son semejantes, existe $P \in GL(n)$ con

$$A' = P^{-1}AP$$

Tomando $g \in GL(V)$ con $M_\varepsilon(g) = P^{-1}$, se concluye que:

$$M_\varepsilon(g \cdot f \cdot g^{-1}) = M_\varepsilon(g)\ M_\varepsilon(f)\ M_\varepsilon(g^{-1}) = P^{-1}AP = A' = M_\varepsilon(f')$$

y por tanto,

$$g \cdot f \cdot g^{-1} = f'.$$

El recíproco se prueba de forma análoga. □

Por otra parte, el conjunto de representaciones matriciales de un mismo endomorfismo, constituye una clase de semejanza.

Proposición 1.4.

Sea f *endomorfismo de* V *y* A, A′ ∈ EL(n).

i) Si A *y* A′ *son representaciones matriciales de* f, *entonces son semejantes.*

ii) Si A *es representación matricial de* f, *y* A′ *es semejante* a A, *entonces* A′ *es también representación matricial de* f.

Demostración

i) Sean ε y ε' bases de V y $P \in GL(n)$ la matriz del cambio de base:

$$\varepsilon' = \varepsilon P$$

Si $M_\varepsilon(f) = A$, y $M_{\varepsilon'}(f) = A'$, se tiene:

$$f(\varepsilon') = f(\varepsilon P) = f(\varepsilon)\, P = \varepsilon A P = \varepsilon' (P^{-1} A P) = \varepsilon' A'.$$

Se concluye así que $A' = P^{-1} AP$.

ii) Supóngase $A = M_\varepsilon(f)$, y $A' = P^{-1} AP$ para cierto $P \in GL(n)$. Se tiene entonces que $M_{\varepsilon'}(f) = A'$ para $\varepsilon' = \varepsilon P$. □

Finalmente se tiene:

Proposición 1.5.

Sea ε *base de* V, f *y* f′ *endomorfismos. Son equivalentes las siguientes afirmaciones:*

i) *f es linealmente equivalente a* f'.

ii) *Existe* ε' *base de* V *tal que* $M_\varepsilon(f)=M_{\varepsilon'}(f')$.

iii) *Existe* ε' *base de* V *tal que* $M_\varepsilon(f)$ *es semejante a* $M_{\varepsilon'}(f')$.

Demostración

Supóngase $A=M_\varepsilon(f)$, es decir $f(\varepsilon)=\varepsilon A$.

i) $\Rightarrow$ ii) Sea $f'=gfg^{-1}$ para cierto $g\in GL(V)$. Tomando $\varepsilon'=g(\varepsilon)$ se tiene:

$$f'(\varepsilon')=f'(g(\varepsilon))=g(f(\varepsilon))=g(\varepsilon A)=g(\varepsilon)\,A=\varepsilon' A$$

y por tanto $M_{\varepsilon'}(f')=A$.

ii) $\Rightarrow$ iii) Es trivial.

iii) $\Rightarrow$ i) Supóngase que $M_{\varepsilon'}(f')=A'$ es semejante a $A=M_\varepsilon(f)$. Por la proposición anterior, es $M_\varepsilon(f')$ semejante a A', y por la propiedad transitiva $M_\varepsilon(f)$ es semejante a $M_\varepsilon(f')$. Nuevamente por 1.3 se concluye que f es linealmente equivalente a f'. □

Ejemplo 1.6.

Sea $\pi: V\to V$ una proyección con base U y dirección W (véase L.3, 2.18). Tomando una base adaptada a la descomposición $V=U\oplus W$, de la forma:

$$\varepsilon=(e_1, \ldots, e_r, \ldots, e_n)$$

con: $(e_1, \ldots, e_r)$ base de U,

$(e_{r+1}, \ldots, e_n)$ base de W.

La matriz de π respecto a ε es:

$J=\begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O\end{pmatrix}$ donde I_r denota la matriz identidad de orden r.

Por la proposición anterior se concluye que fijado r, todas las proyecciones vectoriales de V con base r-dimensional, son linealmente equivalentes.

El siguiente resultado, cuya demostración ya es inmediata, resume en cierta forma la idea general de este epígrafe.

Corolario 1.7.

Fijado el espacio vectorial V, *existe una biyección canónica* M *entre los espacios de órbitas* EL (V)/GL (V) *y* EL (n)/GL (n) *que hace conmutativo el diagrama*

$$\begin{tikzcd} EL(V) \arrow[r, "M_{\varepsilon}"] \arrow[d] & EL(n) \arrow[d] \\ EL(V)/GL(V) \arrow[r, "M"] & EL(n)/GL(n) \end{tikzcd}$$

Para toda base ε *de* V. *Las flechas verticales, indican las proyecciones canónicas (que hacen corresponder a cada elemento su órbita).*

§2. SISTEMAS DE INVARIANTES

Llamaremos invariante lineal (en $EL(V)$) a un invariante para la clasificación lineal de endomorfismos del espacio vectorial V, es decir, a una aplicación

$$\rho : EL(V) \to X \quad (X \text{ conjunto})$$

tal que se verifique la implicación:

$$f \text{ linealmente equivalente a } f' \Rightarrow \rho(f) = \rho(f').$$

Los invariantes lineales en $EL(n)$ se denominarán invariantes de semejanza.

Los invariantes lineales y los de semejanza se relacionan a través de la aplicación canónica M definida en 1.7:

Proposición 2.1.

Sea $\rho : \mathrm{EL}(n) \to X$ *un invariante de semejanza. Fijada la base* ε *de* V, *la aplicación*

$$\rho' : \mathrm{EL}(V) \ni f \to \rho(M_\varepsilon(f)) \in X \tag{2.1.1}$$

no depende de la base ε, *y define un invariante lineal.*

Recíprocamente, si ρ' *es un invariante lineal, puede construirse un único* ρ *invariante de semejanza, relacionado con* ρ' *por* (2.1.1) *respecto a cualquier base* ε.

(Usualmente se denotan por el mismo nombre al invariante de semejanza ρ y al lineal ρ' cuando están relacionados por (2.1.1)).

Demostración

La aplicación $\rho' : EL(V) \to X$ definida en (2.1.1) no depende de la base ε, ya que por 1.4 i) $M_{\varepsilon'}(f)$ es semejante a $M_\varepsilon(f)$ para cualquier otra base ε', y por ser ρ invariante de semejanza:

$$\rho(M_{\varepsilon'}(f)) = \rho(M_\varepsilon(f))$$

Además, si f y f' son linealmente equivalentes, por 1.3 $M_\varepsilon(f)$ y $M_\varepsilon(f')$ son semejantes, y $\rho'(f) = \rho(M_\varepsilon(f)) = \rho(M_\varepsilon(f')) = \rho'(f')$.

La obtención de ρ a partir de ρ', se hace de forma análoga. $\square$

Ejemplos 2.2. Algunos invariantes

1. La aplicación determinante, $\det : EL(n) : \to \mathbb{K}$ es invariante de semejanza:

Si $A \in EL(n)$ y $A' = P^{-1}AP$, con $P \in GL(n)$ entonces:

$$\det A' = \det(P^{-1}) \det A \det P = (\det P)^{-1} \det A \det P = \det A$$

El invariante lineal inducido en $EL(V)$ se denota también por:

$$\det : EL(V) \to \mathbb{K}$$

y viene definido por la fórmula, $\det f = \det A$, para cualquier representación matricial A de f.

2. Se denomina rango de un endomorfismo $f \in EL(V)$ a la dimensión del subespacio imagen $im\, f$. Probemos que la aplicación:

$$rg : EL(V) \ni f \to \dim (im\, f) \in \{0, 1, 2, ..., n\}$$

es invariante lineal.

En efecto, si $f \in EL(V)$, y $f' = g \cdot f \cdot g^{-1}$, entonces $g(im\, f) = im\, f'$, ya que $g(f(v)) = f'(g(v))$ para $v \in V$. Por ser g transformación lineal conserva la dimensión, y se tiene:

$$rg\ f = \dim (im\, f) = \dim (g(im\, f)) = \dim (im\, f') = rg\, f'$$

La aplicación rango $rg : EL(n) \to \{0, 1, ..., n\}$ inducida es el invariante lineal de semejanza definido por el rango usual de una matriz (número máximo de filas o columnas que constituyen un sistema linealmente independiente).

3. De forma más general, fijado $\lambda \in \mathbb{K}$, la aplicación:

$$rg_\lambda : EL(V) \ni f \to rg(f - \lambda\, id) \in \{0, 1, ..., n\}$$

es un invariante lineal, ya que si $f \in EL(V)$ y $f' = g \cdot f \cdot g^{-1}$ para $g \in GL(V)$, entonces:

$$g \cdot (f - \lambda\, id) \cdot g^{-1} = g \cdot f \cdot g^{-1} - \lambda\, id = f' - \lambda\, id$$

y por el ejemplo 2 es $rg(f - \lambda\, id) = rg(f' - \lambda\, id)$.

En particular, el invariante:

$$n - rg_1 : EL(V) \ni f \to n - rg(f - id) \in \{0, 1, ..., n\}$$

indica la dimensión del subespacio de vectores fijos de un endomorfismo.

Para que dos endomorfismos f, $f' \in EL(V)$ no sean linealmente equivalentes, es suficiente con que exista un invariante lineal que tome distinto valor sobre f y f'. Veamos un ejemplo.

Ejemplo 2.3.

Las matrices reales A, B, C, D de $EL(2)$ que a continuación se indican, determinan clases distintas de semejanza.

$$A=\begin{pmatrix}-2 & 0\\ 1 & -2\end{pmatrix} \; B=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 1 & 2\end{pmatrix} \; C=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -4\end{pmatrix} \; D=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & -2\end{pmatrix}$$

En efecto, comparando determinantes se ve que:

$$4=\det A=\det B \neq -4=\det C=\det D$$

Por tanto A no es semejante a C o D. Análogamente B.

Por otra parte:

$$rg_{-2}(A) = rg\,(A+2I) = 1 \neq 2 = rg\,(B+2I) = rg_{-2}(B)$$

y en consecuencia, A no es semejante a B.

De forma análoga se ve que C no es semejante a D.

Definamos el siguiente concepto general relativo a la actuación de grupos sobre conjuntos:

Definición 2.4. Clase invariante

Un subconjunto no vacío Ω *de* EL (V) *se denomina clase invariante si verifica:*

$$f \in \Omega, \text{ y } f \text{ linealmente equivalente a } f' \Rightarrow f' \in \Omega$$

Observaciones 2.5.

1. Si Ω es una clase invariante de endomorfismos, el grupo lineal $GL(V)$ actúa por restricción:

$$GL(V)\times\Omega \ni (g, f)\rightarrow g\cdot f\cdot g^{-1} \in \Omega$$

Esta actuación induce en Ω una relación de equivalencia que es justamente la de equivalencia lineal de endomorfismos, es decir, para todo $f \in \Omega$ la órbita de f en Ω coincide con la órbita de f en $EL(V)$.

2. Si $\rho : EL(V) \to X$ es un invariante (suprayectivo), entonces para cada $Y \subset X$, es $\rho^{-1}(Y)$ una clase invariante.

En particular, la familia $\{\rho^{-1}(x) : x \in X\}$ constituye una partición de $EL(V)$ en clases invariantes.

Ejemplo 2.6.

La familia de endomorfismos:

$$\Pi = \{\pi \in EL(V) : \pi^2 = \pi\}$$

es una clase invariante, ya que:

Si $\pi \in \Pi$, y $\pi' = g \cdot \pi \cdot g^{-1}$ para cierto $g \in GL(V)$, entonces:

$$\pi'^2 = (g \cdot \pi \cdot g^{-1})(g \cdot \pi \cdot g^{-1}) = g \cdot \pi^2 \cdot g^{-1} = g \cdot \pi \cdot g^{-1} = \pi'$$

Como sabemos por 2.18 de la lección 3, cada $\pi \in \Pi$ es una proyección de base $im\,\pi$, y dirección $\ker \pi$. El ejemplo 1.6 muestra entonces que:

$$\text{si } \pi,\ \pi' \in \Pi \,.\, \pi \text{ lin} \cdot eq \cdot a\ \pi' \text{ si y sólo si } rg\pi = rg\pi'$$

Se dice por esto que $rg : \Pi \to \{0, 1, ..., n\}$ es un invariante completo para la clasificación de proyecciones.

Establecemos la siguiente definición general:

Definición 2.7.

Sea Ω una clase invariante de EL (V), *y $\{\rho_1, ..., \rho_r\}$ una colección de invariantes lineales.*

Se dice que $\{\rho_1, ..., \rho_r\}$ es un sistema completo de invariantes para Ω si se verifica:

f, f' $\in \Omega$, $\rho_i(f) = \rho_i(f')$ *para* $i = 1, ..., r \Rightarrow$ f *linealmente equivalente a* f'

Recuérdese que la implicación recíproca ($\Leftarrow$) es automática por ser los ρ_i invariantes lineales.

Nota 2.8. Directrices para la solución del problema

Resolver el problema de clasificación de endomorfismos para una clase invariante Ω de $EL(V)$ significa esencialmente conseguir los dos objetivos siguientes:

i) Establecer criterios que permitan decidir en la práctica cuándo dos endomorfismos de Ω son linealmente equivalentes.

ii) Dar una descripción explícita del espacio de órbitas $\Omega/GL(V)$.

Nótese que estos objetivos se han alcanzado en el ejemplo 2.6 (ver también 1.6) sobre la clase invariante $\Omega=\Pi$ de las proyecciones, y se han seguido los siguientes pasos:

a) Encontrar representaciones matriciales sencillas para los endomorfismos de Ω, y obtener así una colección bien definida de matrices reducidas que denominamos matrices de Jordan.

En el caso $\Omega=\Pi$, las matrices de Jordan son $\{J_r : r=0, 1, ..., n\}$ donde:

$$J_r=\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

b) Dar un criterio práctico para reconocer cuándo dos matrices de Jordan son semejantes.

Para $\Omega=\Pi$, el criterio es trivial:

$$J_r \text{ es semejante a } J_s \Leftrightarrow rg(J_r)=r=s=rg(J_s)$$

c) Establecer reglas que permitan obtener a partir de un endomorfismo $f\in\Omega$ una representación reducida de Jordan (dos endomorfismos con representaciones de Jordan semejantes serían (por 1.5) linealmente equivalentes).

En particular, esto podría conseguirse a partir de los valores que f tome sobre un sistema completo de invariantes.

Cuando $\Omega = \Pi$ el criterio es claro, si $\pi \in \Pi$, y $rg(\pi) = r$, su representación reducida es J_r.

La solución que en este capítulo se dará al problema global de clasificación lineal de endomorfismos, pasa por establecer una partición previa de $EL(V)$ en clases invariantes Ω (por el procedimiento indicado en 2.5), y definir sistemas finitos y completos de invariantes (del tipo de los descritos en 2.2) sobre cada clase Ω.

§3. RECTAS INVARIANTES. POLINOMIO CARACTERISTICO

Fijado en endomorfismo f del espacio vectorial V, un subespacio U de V se dice invariante (por f), si $f(U) \subset U$.

La aplicación $f_U: U \ni u \to f(u) \in U$ es un endomorfismo del espacio vectorial U, que denominamos restricción de f a U.

La determinación de subespacios invariantes tiene interés con vistas a la obtención de representaciones matriciales sencillas para el endomorfismo. En efecto, tomando una base $(u_1, ..., u_r)$ del subespacio invariante U, y completándola a una base de V $\varepsilon = (u_1, ..., u_r, w_1, ..., w_s)$, la matriz de f respecto a ε será de la forma:

$$M_\varepsilon(f) = \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix},$$

donde A es la representación matricial de f respecto a $(u_1, ..., u_r)$.

Si además $W = \langle w_1, ..., w_s \rangle$ es también invariante, entonces $M_\varepsilon(f)$ es una matriz diagonal por bloques de la forma:

$$M_\varepsilon(f) = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$$

En este epígrafe estableceremos una técnica para la determinación de rectas invariantes de un endomorfismo arbitrario.

Una recta vectorial $R = \langle v \rangle$ de V es invariante por f si y sólo si $f(v) = \lambda v$ para cierto escalar λ. Se tiene así la siguiente definición:

Definición 3.1. Autovalores y autovectores

Un escalar $\lambda \in \mathbb{K}$ *se denomina autovalor del endomorfismo* f *de* V, *si existe* $v \in V - \{0\}$ *tal que:*

$$f(v) = \lambda v$$

Se dice entonces que v *es autovector asociado al autovalor* λ.

El subespacio $V(\lambda) = \{v \in V : f(v) = \lambda v\} = Ker(f - \lambda id)$ *constituido por los autovectores asociados a* λ *(y el vector nulo), se denomina autoespacio del autovalor* λ.

La siguiente proposición proporciona ya un método efectivo para la determinación de autovalores:

Proposición 3.2.

Sea A *una representación matricial del endomorfismo* f *de* V, *y* $\lambda \in \mathbb{K}$. *Son equivalentes las siguientes afirmaciones:*

i) λ *es autovalor de* f.

ii) $ker(\lambda id - f) \neq \{0\}$.

iii) $det(\lambda id - f) = 0$.

iv) $det(\lambda I - A) = 0$.

Demostración

Las equivalencias i) $\Leftrightarrow$ ii) $\Leftrightarrow$ iii) son elementales. iii) $\Leftrightarrow$ iv) es consecuencia de ser $A - \lambda id$ una representación matricial de $f - \lambda id$. □

Los autovalores de *f* son pues las raices de cierto polinomio que describimos a continuación.

Definición 3.3. Polinomio característico

Sea $A = (a_{ij})$ *una matriz cuadrada de orden* n. *Se denomina polinomio caracteristico de* A *al polinomio mónico de grado* n:

$$\chi_A(t)=\det(tI-A)=\det\begin{pmatrix} t-a_{11} & -a_{12} & \dots & -a_{1n} \\ -a_{21} & t-a_{22} & \dots & -a_{2n} \\ & & \dots & \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \dots & t-a_{nn} \end{pmatrix}$$

Proposición 3.4.

La aplicación $\chi : \mathrm{EL}(n) \ni A \to \chi_A(t) \in \mathbb{K}[t]$ *es un invariante de semejanza, es decir, si* A, $A' \in \mathrm{EL}(n)$ *son semejantes, entonces* $\chi_A(t)=\chi_{A'}(t)$.

Demostración

Sea $P \in GL(n)$ tal que $A'=P^{-1}AP$. Para todo $\lambda \in \mathbb{K}$ se verifica:

$$A'-\lambda I=P^{-1}(A-\lambda I)P$$

Por ser det: $EL(n)\to\mathbb{K}$ invariante de semejanza, se concluye que:

$$\chi_{A'}(\lambda)=\det(A'-\lambda I)=\det(A-\lambda I)=\chi_A(\lambda)$$

En consecuencia, los polinomios $\chi_{A'}(t)$ y $\chi_A(t)$ coinciden. Teniendo en cuenta 2.1 y la equivalencia i) $\Leftrightarrow$ iv) de 3.2 se tiene:

Corolario 3.5.

Sea f *endomorfismo de* V:

a) *El polinomio* $\chi_f(t)=\chi_A(t)$ *es independiente de la representación matricial* A *de* f, *y se denomina polinomio característico de* f.

b) *Las raíces de* $\chi_f(t)$ *son justamente los autovalores de* f.

c) *La aplicación* $\chi : \mathrm{EL}(V) \ni f \to \chi_f(t) \in \mathbb{K}[t]$ *es un invariante lineal.*

Ejemplo 3.6.

Determinemos las rectas invariantes, del endomorfismo f de V que respecto a la base $\varepsilon=(e_1, e_2, e_3)$ tiene por matriz:

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Los autovalores son las raíces del polinomio:

$$\chi_f(t)=\det\begin{pmatrix} t & -1 & 1 \\ -1 & t & -1 \\ -1 & -1 & t \end{pmatrix}=(t-2)(t+1)^2$$

Calculemos ahora las ecuaciones de los autoespacios de $\lambda=2$ y $\lambda=-1$ en las coordenadas (x_i) de la base ε:

$$(2I-A)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

son las ecuaciones de $V(2)$ de las cuales sólo hay dos independientes: $\left.\begin{aligned} 2x_1-x_2-x_3&=0 \\ -x_1+2x_2-x_3&=0 \end{aligned}\right\}$.

Así pues $V(2)$ es una recta invariante generada *por el vector*

$$u=\varepsilon\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{es decir } u=e_1+e_2+e_3 \cdot (1.6.1)$$

De forma análoga se ve que $V(-1)$ tiene por ecuaciones: x_1+x_2+ $+x_3=0$, y es por tanto un plano vectorial. Son también invariantes por tanto, todas las rectas contenidas aquí.

Obsérvese que en este caso es $V=V(2)\oplus V(-1)$, y es posible construir una base respecto a la cual la matriz de f es diagonal. En efecto, tomando:

$u_2-\varepsilon\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix} u_3-\varepsilon\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}$ base de $V(-1)$, y u_1 el vector de (1.6.1)

la matriz de t respecto a (u_1, u_2, u_3) es

$$J=\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}$$

Las matrices J y A son semejantes. Concretamente, tomando P la matriz (de cambio de base) que tiene por columnas las coordenadas de (u_1, u_2, u_3) respecto a ε:

$$P=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 1 & -1 & -1\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix} \quad \text{se tiene } J=P^{-1}AP$$

EJERCICIOS

NOTA: Se supone fijado un espacio vectorial V con dimensión $n \neq 0$, sobre un cuerpo $\mathbb{K}$.

4.1. Fijado $r=0,1,2, \ldots,$ y $\lambda \in \mathbb{K}$ probar que la aplicación:

$$rg^r_\lambda : EL(V) \ni f \to rg\ [(f-\lambda id)^r] \in \{0, 1, \ldots, n\}$$

es un invariante lineal.

4.2. Demostrar que $\eta=\{f \in EL(V) : f^2=\mathrm{id}\}$ es una clase invariante. Resolver el problema de clasificación lineal de los endomorfismos de η.

4.3. Estudiar si las matrices:

$$A=\begin{pmatrix} -2 & -3 & -2 \\ 3 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B=\begin{pmatrix} -2 & -2 & -3 \\ 4 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

son semejantes.

4.4. Sea $A=(a_{ij}) \in EL(n)$. Probar que se verifica:

$$\chi_A(t)=t^n-(tr\ A)\ t^{n-1}+\ldots+(-1)^n \det A$$

Donde χ_A es el polinomio característico, y $tr\ A=a_{11}+\ldots+a_{nn}$. Concluir que la traza es un invariante lineal.

4.5. Demostrar que si $\dim V=2$ se verifica la identidad:

$$\chi_f(f)=f^2-(tr\ f)f+(\det f)\ \mathrm{id}=0$$

para todo endomorfismo f de V.

4.6.* Sea $\varepsilon=(e_1, e_2, e_3)$ base de V, f y f' dos endomorfismos de V con matrices respectivas respecto a ε:

$$A=\begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 \\ -8 & -7 & -4 \\ 6 & 6 & 5 \end{pmatrix} \quad A'=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & -4 & -3 \\ 0 & 6 & 5 \end{pmatrix}$$

Probar que f y f' son linealmente equivalentes, y encontrar una transformación lineal g tal que $f'=g\cdot f\cdot g^{-1}$.

4.7. Sea f endomorfismo de V. Demostrar la equivalencia entre las siguientes afirmaciones:

i) f es homotecia vectorial, e. d., $f=\lambda id_V$ $\lambda\in\mathbb{K}$.

ii) f deja invariantes todos los subespacios vectoriales de V.

iii) Todas las rectas vectoriales de V son invariantes por f.

4.8.* Se llama centro Z del grupo lineal $GL(V)$, al conjunto de transformacioones lineales h de V tales que:

$$hg=gh \text{ para todo } g\in GL(V)$$

Demostrar que Z es un subgrupo de $GL(V)$ que coincide con el de homotecias vectoriales, es decir:

$$Z=\{\lambda\ id : \lambda\in\mathbb{K}\}$$

4.9.* Demostrar que si $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ son autovalores distintos del endomorfismo f, y $V(\lambda_i)$ denotan los correspondientes autoespacios, entonces la suma:

$$U=V(\lambda_1)+\ldots+V(\lambda_r)$$

es directa.

4.10.* Un endomorfismo f de V se dice diagonizable, si admite una representación matricial diagonal de la forma:

$$J = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Probar que f es diagonizable si y sólo si el espacio V se descompone en la suma (directa) de los autoespacios de f.

4.11. Si $\dim V=3$, y f es un endomorfismo de V con matriz respecto a la base ε:

$$M_\varepsilon(f) = \begin{pmatrix} -4 & -3 & -3 \\ 0 & -1 & 0 \\ 6 & 6 & 5 \end{pmatrix}$$

Demostrar que f es diagonalizable, y determinar la base que lo diagonaliza.

4.12.* Para un endomorfismo f de V, demostrar la equivalencia entre las siguientes afirmaciones:

i) f es diagonalizable.
ii) $\chi_f(t)$ se descompone en factores lineales de la forma:

$$\chi_f(t) = (t-\lambda_1)^{n_1} \dots (t-\lambda_r)^{n_r} \quad \text{con} \quad n_i \geq 1,\ \lambda_i \neq \lambda_j \quad \text{para} \quad i \neq j$$

Además, $\dim \operatorname{Ker}(f-\lambda_i id) = n_i$ para $i=1, \dots, r$.

4.13.* Estudiar cuáles de las siguientes matrices A son diagonalizables:

$$A = \begin{pmatrix} -3 & -3 & -2 \\ 8 & 7 & 4 \\ -4 & -3 & -1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ -6 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 \\ 8 & 3 & 4 & 8 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Determinar cuando así sea una matriz diagonal J semejante, y una matriz de paso, tal que $J=P^{-1}AP$

4.14. Probar que el polinomio característico determina un invariante completo para la clase (invariante) de los endomorfismos diagonalizables.

4.15.* Si V es un plano vectorial real, y f es un endomorfismo de V, probar que existe una base (u, v) de V respecto a la cual la matriz de f es de alguno de los siguientes tipos:

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 1 & \lambda \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} \quad (\beta>0).$$

Se denominan a estas matrices, matrices de Jordan de orden 2.

4.16.* Resolver el problema de clasificación lineal de endomorfismos en un plano vectorial real o complejo.

4.17. En el plano vectorial real V se dan los endomorfismos que tienen por matriz (respecto a una base ε de V):

$$\begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & -6 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -10 & -18 \\ 6 & 11 \end{pmatrix}$$

Determinar para cada una de ellas una representación de Jordan, y una base que de lugar a dicha representación.

LECCION 5

POLINOMIO MINIMO. PRIMER TEOREMA DE DESCOMPOSICION

Para encontrar representaciones matriciales sencillas de un endomorfismo f, interesa buscar técnicas que controlen la posible descomposición de V en suma directa de subespacios invariantes. El establecimiento de este tipo de técnicas requiere de algunos preliminares algebraicos en los que intervienen algunos conceptos y resultados elementales relativos al anillo de polinomios en una variable, que utilizaremos libremente. El lector no familiarizado con este tema puede consultar el apéndice I.

En lo que sigue, se supondrá fijada una pareja (V, f) donde como es ya habitual, V denotará a un espacio vectorial de dimensión finita n, sobre un cuerpo $\mathbb{K}$, y f un endomorfismo de V.

§ 1. ESTRUCTURA DE MODULO INDUCIDA POR UN ENDOMORFISMO

El endomorfismo f induce en el grupo abeliano $(V, +)$ del espacio vectorial una estructura de módulo sobre el anillo $\mathbb{K}[t]$ de polinomios.

El estudio algebraico de este módulo proporciona como veremos, toda la información geométrica acerca del endomorfismo f. La construcción del módulo exige alguna elaboración previa.

Si $\varphi(t) = a_m t^m + \ldots + a_1 t + a_0$ es un polinomio de $\mathbb{K}[t]$, y f es un endomorfismo de V, la estructura natural de álgebra para $EL(V)$

permite calcular el «valor» del polinomio $\varphi(t)=a_m t^m+\ldots+a_1 t+a_0 \in \mathbb{K}[t]$ para $t=f$, de la forma:

$$\varphi(f)=a_m f^m+\ldots+a_1 f+a_0 id$$

y el resultado $\varphi(f)$ es un nuevo endomorfismo. Establezcamos algunas reglas de calculo.

Proposición 1.1.

La aplicación

$$\mathbb{K}[t] \ni \varphi \longrightarrow \varphi(f) \in EL(V)$$

es un homomorfismo de álgebras. Es decir, para todo φ, $\psi \in \mathbb{K}[t]$ se verifica:

i) $(\varphi+\psi)(f)=\varphi(f)+\psi(f)$.
ii) $(\varphi\psi)(f)=\varphi(f)\cdot\psi(f)$

Demostración

La propiedad i) es evidente. Para probar ii), es suficiente hacerlo cuando el polinomio $\psi(t)$ es de la forma:

$$\psi(t)=t^k \quad \text{para} \quad k=0,\ 1,\ \ldots$$

Supóngase $\varphi(t)=a_m t^m+\ldots+a_1 t+a_0$, entonces:

$$(\varphi(t)t^k)(f)=(a_m t^{m+k}+\ldots+a_0 t^k)(f)=a_m f^{m+k}+\ldots+a_0 f^k=\varphi(f)\cdot f^k \quad \square$$

El siguiente resultado es ya inmediato.

Corolario 1.2: Módulo V_f

La aplicación

$$\mathbb{K}[t]\times V \ni (\varphi,\ v) \longrightarrow \varphi v=\varphi(f)(v) \in V \qquad (1.2.1)$$

define una estructura de módulo sobre $\mathbb{K}[t]$ *para el grupo abeliano* (V, +). *Es decir, para todo* u, v $\in$ V *y todo* φ, $\psi \in \mathbb{K}[t]$ *se verifica:*

1) $\varphi(u+v)=\varphi u+\varphi v$
2) $(\varphi+\psi)v=\varphi v+\psi v$
3) $(\varphi\psi)v=\varphi(\psi v)$
4) $1v=v$

Se denota a este módulo por V_f.

Observaciones 1.3.

1. Al restringir el producto (1.2.1) a los elementos de $\mathbb{K}$ (polinomios de grado cero) se obtiene el producto usual de escalares por vectores.

2. Como consecuencia de lo anterior, todo submódulo de V_f es subespacio vectorial. Además, si $(v_1, ..., v_r)$ es un sistema de V el subespacio vectorial $\langle v_1, ..., v_r\rangle$ generado por el sistema en V está contenido en el submódulo $\langle v_1, ..., v_r\rangle_f$ generado por el sistema en V_f, ya que para $\lambda_1, ..., \lambda_r \in \mathbb{K}$ se tiene:

$$\lambda_1 v_1+...+\lambda_r v_r=\varphi_1 v_1+...+\varphi_r v_r$$

donde $\varphi_i(t)$ es el polinomio constante λ_i.

Proposición 1.4: Submódulos de V_f

Un subconjunto no vacío U *de* V *es submódulo de* V_f *(y escribimos,* $U<V_f$*) si y sólo si* U *es subespacio invariante* (por f) *de* V.

En particular, la familia $\mathscr{L}(V_f)$ *de subespacios invariantes por* f *constituye un subretículo del retículo* $\mathscr{L}(V)$ *de subespacios vectoriales.*

Demostración

Si $U<V_f$, en particular $tu=f(u)\in U$ para todo $u\in U$, y U es invariante.

Recíprocamente, supóngase U subespacio invariante de V. Tenemos que probar que para todo polinomio φ y todo vector $u \in U$ se tiene $\varphi u \in U$, pero ésto equivale a decir que U es subespacio vectorial invariante por el endomorfismo $\varphi(f)$. La demostración de éste hecho es consecuencia inmediata de las siguientes observaciones:

1. Si U es invariante por los endomorfismos f y h, también lo es por $f+h$ y $f \cdot h$, y λf para todo $\lambda \in \mathbb{K}$.
2. U es invariante por la aplicación identidad.

De esta forma, como U es por hipótesis invariante por f, lo es por cualquier potencia f^k de f ($k=0, 1, \ldots$) y cualquier combinación lineal de ellas.

La última afirmación de 1.4 es consecuencia de que la suma de subespacios, sólo depende del grupo $(V, +)$ común a las estructuras de módulo y espacio vectorial.□

Observación 1.5.

Si U es subespacio invariante por f y $f_U \in EL(U)$ es el endomorfismo restricción, entonces para todo polinomio $\varphi \in \mathbb{K}[t]$ se verifica:

$$\varphi(f_U) = \varphi(f)_U$$

En consecuencia, la estructura de modulo sobre $\mathbb{K}[t]$ inducida en $(U, +)$ por f_U coincide con la inducida en U como submódulo de V_f.

Ejemplo 1.6.

Considérese en $V = V_2(\mathbb{K})$ el endomorfismo:

$$A : V \ni \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in V.$$

Calculemos el retículo de submódulos de V_A. Para ello vamos a analizar previamente cómo «funciona» en este caso el producto de polinomios por vectores:

Nótese en primer lugar, que se verifica la identidad:

$$(A-I)^2=0, \text{ y por tanto, si } \phi(t)=(t-1)^2, \text{ se tiene } \phi(A)=0.$$

Asi, para todo $v \in V$ se tiene $\phi v=0$. En consecuencia, si $\varphi \in \mathbb{K}[t]$ es un polinomio cualquiera, aplicando el algoritmo de división por ϕ se tiene que:

$\varphi=\phi q+\rho$ siendo q, $\rho \in \mathbb{K}[t]$ y $gr(\rho) < 2$ si $\rho \neq 0$. Por tanto:

$$\varphi v=(\phi q+\rho)v=q(\phi v)+\rho v=\rho v$$

y $\langle v\rangle_A=\{\varphi v : \varphi \in \mathbb{K}[t]\}=\{(\alpha t+\beta)v : \alpha, \beta \in \mathbb{K}\}$. Si $v=\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ se tiene:

$$(\alpha t+\beta)v=(\alpha A+\beta I)v=\begin{pmatrix} \alpha+\beta & 0 \\ \alpha & \alpha+\beta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \alpha v_1+\beta v_1 \\ \alpha(v_1+v_2)+\beta v_2 \end{pmatrix}=$$

$$=\alpha\begin{pmatrix} v_1 \\ v_1+v_2 \end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$$

de aqui se deduce inmediatamente que:

— Si $v_1=0$ entonces $\langle v\rangle_A=\langle v\rangle$

— Si $v_1\neq 0$ entonces $\langle v\rangle_A=V$

En consecuencia los únicos submódulos de V_f (es decir, subespacios invariantes por A) son: $\{0\}$, V y la recta vectorial

$$R=\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ x \end{pmatrix} : x \in \mathbb{K}\right\}.$$

Establecemos por último una técnica para la determinación de subespacios invariantes.

Proposición 1.7.

Si φ *es un polinomio de* $\mathbb{K}[t]$ *los subespacios* Ker $\varphi(f)$ *y* im$(\varphi(f))$ *son invariantes por* f.

Demostración

Si $u \in \ker \varphi(f)$ *entonces* $\varphi u = 0$ *y por tanto:*

$$\varphi(f)\ (f(u)) = \varphi(tu) = t(\varphi u) = t0 = 0.$$

luego $f(u) \in \ker \varphi(f)$.

Análogamente, si $u = \varphi(f)(v) \in \operatorname{im}(\varphi(f))$ *se tiene:*

$$f(u) = t(\varphi v) = \varphi(tv) = \varphi(f)(tv) \in \operatorname{im}(\varphi(f)) \ \square$$

§ 2. POLINOMIOS ANULADORES

Según se vio en el ejemplo 1.6, la determinación de polinomios φ tales que $\varphi(f) = 0$, simplifica notablemente los cálculos de productos de polinomios por vectores. Por otra parte, en la proposición 1.7 se muestra el interés de encontrar polinomios φ con $\ker \varphi(f) \neq \{0\}$ para la determinación de subespacios invariantes. La teoria de anuladores que ahora vamos a exponer, proporciona técnicas para búsqueda de estos polinomios.

La pareja (V, f) se considera fijada de antemano.

Definición 2.1

Si S *es un subconjunto no vacio de* V, *se denomina anulador de* S *(respecto a* f*) al conjunto de polinomios:*

$$An_f(S) = \{\varphi \in \mathbb{K}[t] : \varphi v = 0 \ \textit{para todo}\ v \in S\}$$

Proposición 2.2. Propiedades

Sea S un subconjunto cualquiera, no vacio de V:

1. $An_f(S)$ *es un ideal de* $\mathbb{K}[t]$.
2. *Si* $S \subset T \subset V$, *entonces* $An_f(S) \supset An_f(T)$.

3. $An_t(S) = An_t(\langle S \rangle)$.

4. *Si* $(U_1, ..., U_r)$ *es una familia de subespacios vectoriales de* V *y* $U = U_1 + ... + U_r$, *entonces* $An_t(U) = \bigcap_{i=1}^{r} An_t(U_i)$.

5. $An_t(v)$ *es un ideal no nulo para todo* $v \in V$.

6. $An_t(V)$ *es un ideal no nulo.*

7. $An_t(S)$ *es un ideal no nulo.*

8. *Si* U *es subespacio invariante, entonces:*

$$An_t(U) = An_{t_u}(U).$$

Demostración

1. Si $\varphi \in An_t(S)$, y $\psi \in \mathbb{K}[t]$ entonces para todo $v \in S$ se tiene:

$$(\psi\varphi)\, v = \psi\,(\varphi v) = \psi 0 = 0$$

y por tanto, $\psi\varphi \in An_t(S)$.

2. Si $\varphi v = 0$ para todo $v \in T$, en particular, $\varphi v = 0$ para todo $v \in S$ si $S \subset T$.

3. Por la propiedad anterior, se verifica: $An_t(\langle S \rangle) \subset An_t(S)$, ya que $S \subset \langle S \rangle$.

   Recíprocamente, si $\varphi \in An_t(S)$ entonces para todo $v = \lambda_1 v_1 + ... + \lambda_r v_r \in \langle S \rangle$ $(v_i \in S)$ se tiene:

$$\varphi\,(\lambda_1\, v_1 + ... + \lambda_r\, v_r) = \lambda_1\,(\varphi v_1) + ... + \lambda_r\,(\varphi v_r) = 0$$

   ya que cada φv_i es nulo por hipótesis.

4. Se tienen las igualdades:

$$\bigcap_{i=1}^{r} An_t(U_i) = An_t(U_1 \cup ... \cup U_r) = An_t(\langle U_1 \cup ... \cup U_r \rangle)$$
$$= An_t(U_1 + ... + U_r).$$

5. El sistema de $n+1$ vectores $(v, tv, \ldots, t^n v)$ es (por ser $n = \dim V$) linealmente dependiente. Una relación de dependencia lineal entre ellos, da lugar a un polinomio no nulo φ, tal que $\varphi v = 0$.

6. Sea $(v_1, \ldots, v_n)$ base de V. Por la propiedad 5 se deduce que existen polinomios no nulos φ_i tales que $\varphi_i v_i = 0$ para $i = 1, \ldots, n$. El polinomio $\varphi = \varphi_1 \ldots \varphi_n$ es no nulo y verifica:

$$\varphi \in \bigcap_{i=1}^{n} An_f(v_i) = \bigcap_{i=1}^{n} An_f(\langle v_i \rangle) = An_f(\langle v_1 \rangle + \ldots + \langle v_n \rangle) = An_f(V).$$

7. Se deduce de las propiedades 6 y 2.

8. Se obtiene a partir de las identidades:

$$\varphi(f)(u) - \varphi(f_U)(u) = \varphi(f)_U(u) \text{ para todo } u \in U \text{ y todo } \varphi \in \mathbb{K}[t].$$

Como consecuencia inmediata de estas propiedades se tienen los siguientes resultados:

Corolario 2.3. Polinomio mínimo anulador

Si S *es un subconjunto no vacío de* V, *existe un único polinomio mónico* ϕ_S *tal que:*

$$\mathrm{An}_f(S) = \mathbb{K}[t]\,\phi_S \qquad (2.3.1)$$

y se verifican las propiedades:

i) $\phi_S = 1 \Leftrightarrow S = \{0\}$.

ii) Si $S \subset T \subset V$ *es* ϕ_T *múltiplo de* ϕ_S.

iii) $\phi_S = \phi_{\langle S \rangle}$.

iv) Si $(U_1, \ldots, U_r)$ *son subespacios vectoriales de* V, *y*

$U = U_1 + \ldots + U_r$, *entonces* $\phi_U = \text{m. c. m.}\,(\phi_{U_1}, \ldots, \phi_{U_r})$.

Demostración

Como $An_f(S)$ es un ideal no nulo de $\mathbb{K}[t]$, existe un único polinomio mónico verificando la propiedad (2.3.1) (véase apéndice I).

La equivalencia i) es trivial. □

Las demás afirmaciones son una reformulación de las propiedades 2.2, que se obtienen inmediatamente utilizando la teoría de ideales dada en el apéndice I.

Corolario 2.4. Polinomio mínimo

Existe un único polinomio mónico ϕ_f verificando las siguientes condiciones:

i) $\phi_f(f)=0$.

ii) *Si* $\varphi \in \mathbb{K}[t]$, *y* $\varphi(f)=0$, *entonces* φ *es múltiplo de* ϕ_f.

Se denomina a ϕ_f *polinomio mínimo de* f.

Demostración

El polinomio ϕ_f buscado, es justamente el polinomio mínimo anulador de V, ϕ_v.

Nótese que ϕ_f viene definido por la condición:

$$\{\varphi \in \mathbb{K}[t] : \varphi(f)=0\} = \mathbb{K}[t]\, \phi_f \; \square$$

Observaciones 2.5.

1. La propiedad 8 de 2.2, puede reformularse ahora diciendo que el polinomio mínimo anulador de un subespacio invariante U coincide con el polinomio mínimo de f_U, es decir:

$$\phi_{f_U} = \phi_U$$

2. De la propiedad i) de 2.3 se deduce que si $\phi_f(t)=1$, entonces necesariamente el espacio vectorial $V=\{0\}$ (pues $\phi_f=\phi_v$), y recíprocamente.

3. El polinomio mínimo ϕ_A de una matriz $A \in EL(n)$ viene definido por la condición:

$$\{\varphi \in \mathbb{K}[t] : \varphi(A) = 0\} = \mathbb{K}[t]\, \phi_A$$

y es el polinomio mínimo del endomorfismo $A : V_n(\mathbb{K}) \to V_n(\mathbb{K})$ definido por A.

Ejemplos 2.6.

Supóngase $V \neq \{0\}$:

1. El polinomio mínimo del endomorfismo nulo es $\phi_f(t) = t$.
2. Las homotecias vectoriales $f = \lambda id$ vienen caracterizadas por la condición: $\phi_f(t) = t - \lambda$.
3. Un endomorfismo $f \neq \pm id$, es simetría vectorial ($f^2 = id$) si y sólo si su polinomio mínimo es $\phi_f(t) = (t+1)(t-1)$.
4. Un endomorfismo $f \neq 0$ es proyección ($f^2 = f$) si y sólo si su polinomio mínimo es $\phi_f(t) = t(t-1)$.

Proposición 2.7.

i) $\phi_f = \phi_A$ *para cualquier representación matricial* A *de* f.

ii) *La aplicación* ϕ: $EL(V) \ni f \to \phi_f \in \mathbb{K}[t]$ *es un invariante lineal.*

Demostración

i) Fijada una base ε de V, la aplicación $M_\varepsilon : EL(V) \to EL(n)$, es un isomorfismo de álgebras, y por tanto para todo $\varphi \in \mathbb{K}[t]$ se tiene:

$$M_\varepsilon(\varphi(f)) = \varphi(M_\varepsilon(f))$$

Así, si $M_\varepsilon(f) = A$, se verifica la equivalencia:

$$\varphi(f) = 0 \Leftrightarrow \varphi(A) = 0$$

y la igualdad: $\mathbb{K}[t]\,\phi_f = \mathbb{K}[t]\,\phi_A$, por tanto $\phi_f = \phi_A$.

ii) Para todo $g \in GL(V)$, y todo $\varphi \in \mathbb{K}[t]$, se verifica la igualdad:

$$\varphi(g \cdot f \cdot g^{-1}) = g \cdot \varphi(f) \cdot g^{-1} \tag{2.7.1}$$

Por tanto, si $f' = g \cdot f \cdot g^{-1}$ se tiene la equivalencia:

$$\varphi(f') = 0 \Leftrightarrow \varphi(f) = 0$$

Esto prueba que $\mathbb{K}[t]\,\phi_f = \mathbb{K}[t]\,\phi_{f'}$ y $\phi_f = \phi_{f'}$. □

Nota 2.8.

La identidad (2.7.1) muestra que fijado un polinomio $\varphi \in \mathbb{K}[t]$, la aplicación:

$$EL(V) \ni f \to rg(\varphi(f)) \in \{0, 1, \ldots, n\}$$

es un invariante lineal. Nótese que los invariantes de rango definidos en L.4, 2.2, son un caso particular de éste.

Este tipo de invariantes lineales jugarán un importante papel más adelante.

§ 3. PRIMER TEOREMA DE DESCOMPOSICION

Una descomposición del módulo V_f en suma directa de submódulos de la forma:

$$V_f = U_1 \oplus \ldots \oplus U_r \tag{3.0.1}$$

es exactamente una descomposición del espacio vectorial V en suma directa de los subespacios invariantes U_i:

$$V = U_1 \oplus \ldots \oplus U_r$$

La descomposición se llamará trivial, si algún sumando U_i es igual a V.

Diremos que la descomposición es propia, si todos los sumandos son no nulos.

A partir de una descomposición propia de V_f como la (3.0.1), es posible obtener una representación matricial del endomorfismo f, diagonal por cajas.

En efecto, eligiendo ε_i, base de U_i, y llamando A_i a la matriz que representa a $f_i = f_{U_i}$, la representación matricial de f respecto a la base $\varepsilon = \varepsilon_1 \cup \ldots \cup \varepsilon_r$ es:

$$M_\varepsilon(f) = \begin{pmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_r \end{pmatrix} = A$$

Se tiene así el siguiente resultado:

Proposición 3.1.

Supuesto V_f *descompuesto en suma directa* $V_f = U_1 \oplus \ldots \oplus U_r$, *y denotando* $f_i = f_{U_i}$, *se tiene:*

$$\chi_f = \chi_{f_1} \cdots \chi_{f_r} \text{ y } \phi = \text{m. c. m.}(\phi_{f_1}, \ldots, \phi_{f_r})$$

donde χ *y* ϕ *indican respectivamente, polinomio característico, y polinomio mínimo.*

Demostración

Con las notaciones establecidas antes, se tiene:

$$\chi_f(t) = \chi_A(t) = \det \begin{pmatrix} tI_1 - A_1 & & & \\ & tI_2 - A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & tI_r - A_r \end{pmatrix} =$$

$$= \det(tI_1 - A_1) \ldots \det(tI_r - A_r).$$

Esto prueba que $\chi_f = \chi_{f_1} \cdots \chi_{f_r}$.

Esto concluirá evidentemente la demostración.

La demostración de (1) requiere las siguientes comprobaciones:

a) $\pi_1 + \ldots + \pi_r = id$.

En efecto, «multiplicando» por cualquier vector $v \in V$ los dos miembros de la igualdad (3.2.1) se deduce:

$$\pi_1(v) + \ldots + \pi_r(v) = \eta_1 \psi_1 v + \ldots + \eta_r \psi_r v = 1v = v$$

b) $\pi_i \pi_j = 0$ si $i \neq j$.

Para $i \neq j$ el polinomio $\psi_i \psi_j$ es múltiplo de ϕ, pues contiene todos los factores $\varphi_1, \ldots, \varphi_r$. Por tanto $(\psi_i\ \psi_j)(f) = 0$, y en particular:

$$\pi_i \pi_j = (\eta_i \psi_i \eta_j \psi_j)(f) =$$
$$(\eta_i \eta_j)(\psi_i \psi_j)(f) = (\eta_i \eta_j)(0) = 0$$

c) $\pi_i^2 = \pi_i$ para $i = 1, \ldots, r$.

La igualdad anterior puede escribirse como: $\pi_i(id - \pi_i) = 0$. Por tanto es suficiente probar que el polinomio $\eta_i \psi_i (1 - \eta_i \psi_i)$ anula a f, o de forma equivalente, que es múltiplo de ϕ. Pero nuevamente por (3.2.1) se tiene:

$$\eta_i \psi_i (1 - \eta_i \psi_i) = \eta_i \psi_i (\sum_{j \neq i} \eta_j \psi_j) = \sum_{j \neq i} \eta_i \eta_j \psi_i \psi_j$$

y cada sumando es múltiplo de ϕ, por tanto lo es el resultado de la suma.

La descomposición de V según (3.2.2) es ya automática.

Demostremos por último la afirmación (2).

Supóngase que $u \in \operatorname{Ker} \varphi_i(f)$. Entonces:

$$u - \pi_i(u) = (1 - \eta_i\ \psi_i)u = (\sum_{j \neq i} \eta_j \psi_j)u = \sum_{j \neq i} (\eta_j \psi_j)u$$

y cada sumando del último miembro es nulo, ya que para $j \neq i$, $\eta_j\ \psi_j$ es múltiplo de φ_i. Por tanto $\pi_i(u) = u$, y $u \in im\ \pi_i$.

Recíprocamente, para todo $v \in V$ es:

$$\varphi_i(f)(\pi_i(v)) = (\varphi_i \eta_i \psi_i) v = \eta_i(\phi v) = \eta_i 0 = 0$$

así, $im\ \pi_i \subset \ker \varphi_i(f)$, y la demostración está concluida. □

Este resultado tiene particular interés cuando se aplica a la descomposición en factores primos del polinomio mínimo de f:

Proposición 3.3.

Supóngase el polinomio mínimo ϕ_f de f descompuesto en factores primos:

$$\phi_f = p_1^{m_1} \dots p_r^{m_r} \qquad (3.3.1)$$

(es decir, $p_1, \dots, p_r$ son todos los factores primos distintos, y $m_i \geqslant 1$ es el orden de multiplicidad de p_i como divisor primo de ϕ_f). Sea $U_i = \ker p_i^{m_i}(f)$. Entonces:

i) El módulo V_f se descompone en suma directa:

$$V_f = U_1 \oplus \dots \oplus U_r \qquad (3.3.2)$$

ii) Llamando $f_i : U_i \to U_i$ a la restricción de f a U_i, se tiene:

$$\phi_{f_i} = p_i^{m_i}$$

En particular, la descomposición (3.3.2) es propia.

Demostración

i) Los polinomios $\psi_i = \phi / p_i^{m_i} = 1, \dots, r$ son primos entre sí, ya que por construcción no tienen divisores primos comunes. Aplicando directamente 3.2, se obtiene la descomposición (3.3.2).

ii) Evidentemente $p_i^{m_i}(f_i) = 0$, por lo que existen polinomios η_i tales que:

$$p_i^{m_i} = \eta_i \phi_{f_i}$$

Por ser p_i primo, se deduce que ϕ_{f_i} debe ser de la forma $\phi_{f_i}=p_i^{s_i}$ para cierto $s_i>0$. Por otra parte, por 3.1 se deduce que:

$$\phi_f=p_1^{m_1}\ \dots\ p_r^{m_r}=\text{m. c. m.}\,(\phi_{f_1},\ \dots,\ \phi_{f_r})=p_1^{s_1}\ \dots\ p_r^{s_r}$$

Por tanto $m_i=s_i$ para $i=1,\ \dots,\ r$.

Como cada $\phi_{f_i}\neq 1$, por 2.3 i) se concluye que cada U_i es no nulo, y la descomposición (3.3.2) es propia. □

El resultado anterior admite una reformulación más completa, si se introduce el siguiente concepto:

Definición 3.4. Subespacio característico

Se denomina subespacio característico asociado a un divisor primo p *del polinomio mínimo* ϕ_f, *al conjunto:*

$$V_p=\{v\in V: p^k v=0 \text{ para algun } k=0,1,\ \dots\}$$

Nótese que V_p puede expresarse como:

$$V_p=\bigcup_{k=0}^{\infty} \operatorname{Ker} p^k(f)$$

Proposición 3.5.

Si p *es divisor primo de* ϕ_f *con multiplicidad* $m\,(m>1)$, *se tiene la cadena:*

$$\{0\}\subsetneqq \ker p(f)\subsetneqq \dots \subsetneqq \ker p^m(f)=\ker p^{m+1}(f)=\dots \qquad (3.5.1)$$

En particular, se tiene $\ker p^m(f)=V_p$.

Demostración

Claramente es $\ker p^r(f)\subset \ker p^s(f)$ para $r\leqslant s$. Por otra parte, tomando $\varphi\in \mathbb{K}[t]$ con

$$\phi_f=p^m\,\varphi$$

se tiene que m. c. d. $(p^k, \varphi)=1$ para todo $k=0, 1, \ldots$. En particular para $k \geqslant m$ se tiene, aplicando 3.2 al polinomio $p^k\varphi$ que anula a f:

$$V=\ker p^k(f) \oplus \ker \varphi(f)$$

Como Ker $p^m(f) \subset$ Ker $p^k(f)$ y ambos subespacios tienen la misma dimensión igual a $n-$ dim ker $\varphi(f)$ se concluye que son iguales.

Si $k<m$ entonces necesariamente se verifica:

$$\ker p^k(f) \subsetneq \ker p^m(f)$$

ya que si f' es la restricción de f a $\ker p^m(f)$, su polinomio mínimo es por 3.3 igual a p^m; por lo que $p^k(f') \neq 0$, y en particular ker $p^k(f) \neq$ ker $p^m(f)$.

La demostración se concluye probando que para un endomorfismo h se verifica la siguiente implicación trivial:

$$\ker h^k=\ker h^{k+1} \Rightarrow \ker h^{k+1}=\ker h^{k+2} (k=0, 1, \ldots)$$

Aplíquese para $h=p(f)$ □

Corolario 3.6. Teorema de decomposición

El módulo V_f *se descompone en suma directa propia de los subespacios característicos:*

$$V_f=V_{p_1} \oplus \cdots \oplus V_{p_r}$$

Donde $p_1, \ldots, p_r$ *son los divisores primos distintos del polinomio mínimo* ϕ_f.

Además $\phi_{V_p}=p^m$, *para cada divisor primo* p *con multiplicidad* $m \geqslant 1$ *del polinomio mínimo* ϕ_f.

Terminamos el epígrafe un resultado útil de carácter técnico:

Corolario 3.7.

i) *Si* m. c. d. $(\varphi, \phi_f)=1$ entonces $\ker \varphi(f)=\{0\}$.

ii) *El polinomio primo* p *es divisor de* ϕ_f *si y sólo si* $\ker p(f) \neq \{0\}$.

Demostración

i) Como el polinomio $\varphi\ \phi_f$ anula al endomorfismo, aplicando 3.3 queda:

$$V_f = \ker \varphi(f) \oplus \ker \phi_f(f)$$

y $\ker \phi_f(f) = V$, luego $\ker \varphi(f) = \{0\}$.

ii) Si p es divisor primo de ϕ_f, la cadena (3.5.1) muestra que $\ker p(f) \neq \{0\}$.

El recíproco es consecuencia de i). $\square$

EJERCICIOS

5.1. Sea M un módulo sobre el anillo de polinomios $\mathbb{K}[t]$.

a) Demostrar que la estructura de modulo, induce sobre M una estructura de espacio vectorial sobre el cuerpo $\mathbb{K}$.

b) Denotando por V al espacio vectorial construido en a), probar que fijado $\varphi \in \mathbb{K}[t]$, la aplicación:

$$V \ni v \longrightarrow \varphi v \in V$$

es un endomorfismo lineal.

c) Demostrar que existe un único endomorfismo f de V, tal que $V_f = M$, es decir:

$$\varphi v = \varphi(f)(v), \text{ para todo } v \in V, \text{ y todo } \varphi \in \mathbb{K}[t]$$

5.2.* Sea V espacio vectorial tridimensional, $\varepsilon = (e_1, e_2, e_3)$ una base de V, y f un endomorfismo con matriz respecto a ε.

$$M_\varepsilon(f) = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 2 \\ 3 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Determinar el polinomio mínimo anulador de cada uno de los vectores:

$$u = \varepsilon \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad v = \varepsilon \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \quad w = \varepsilon \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

b) Calcular el polinomio mínimo de f.

c) Calcular las ecuaciones del mínimo subespacio invariante que contiene al vector u.

5.3. Demostrar que un endomorfismo es diagonalizable, si y sólo si todos los divisores primos del polinomio mínimo tienen grado y orden de multiplicidad igual a la unidad.

5.4.* En el espacio vectorial real V se dá la base $\varepsilon=(e_1, e_2, e_3, e_4)$, y el endomorfismo f de matriz respecto a ε:

$$A=\begin{pmatrix} -2 & -2 & -1 & -1 \\ 8 & 7 & 4 & 8 \\ -8 & -7 & -5 & -8 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

a) Demostrar que el subespacio U de ecuación:

$$\begin{aligned} x_1 \quad -x_3+x_4&=0 \\ x_2+2x_3 \quad &=0 \end{aligned}$$

es invariante por f.

b) Determinar el polinomio mínimo de U. ¿Es f diagonalizable?

5.5.* En las mismas condiciones del ejercicio 5.4. se pide:

a) Descomponer V en suma directa no trivial de subespacios invariantes.

b) Determinar el polinomio mínimo de f.

5.6.* Sea f endomorfismo del espacio vectorial V, y $v \in V-\{0\}$ tal que:

$$f^{m-1}(v) \neq 0, \quad f^m(v)=0$$

Probar que el sistema: $(v, f(v), \ldots, f^{m-1}(v))$ es linealmente independiente.

5.7.* Dado un endomorfismo f del espacio vectorial V, probar que las raíces del polinomio mínimo, son exactamente las del polinomio característico con orden de multiplicidad menor o igual.

5.8.* Sea V un espacio tridimensional real, y f un endomorfismo de V. Demostrar que f admite una representación matricial de alguno de los siguientes tipos:

$$\begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 1 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 1 & \lambda & 0 \\ 0 & 1 & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & -\beta \\ 0 & \beta & \alpha \end{pmatrix}$$

A las matrices anteriores se les denomina matrices de Jordan tridimensionales.

5.9.* Resolver el problema de clasificación de endomorfismos en un espacio vectorial tridimensional real o complejo.

5.10.* Sea $\varepsilon=(e_1, e_2, e_3)$ una base del espacio vectorial real V, se dan los endomorfismos f, g, h con matrices:

$$M_\varepsilon(f)=\begin{pmatrix} -3 & -1 & -4 \\ 4 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad M_\varepsilon(g)=\begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 \\ -4 & 4 & -3 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$M_\varepsilon(h)=\begin{pmatrix} -2 & -5 & -3 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Determinar en cada caso una representación matricial de Jordan, y la base que da lugar a dicha representación.

5.11. Determinar el polinomio mínimo de las matrices:

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & \lambda & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \lambda \end{pmatrix} \in EL(n), \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

LECCION 6

TEOREMA DE CLASIFICACION DE JORDAN

Un endomorfismo f se dice reducible, si el módulo V_f se puede descomponer en suma directa propia:

$$V = U_1 \oplus \dots \oplus U_r \quad (r \geqslant 2) \tag{1}$$

Llamando f_i a la restricción $f_{U_i}: U_i \longrightarrow U_i$, la suma directa (1) también se suele escribir en la forma:

$$f = f_1 \oplus \dots \oplus f_r \tag{2}$$

y se dice que f se ha descompuesto en las componentes f_i.

En la lección anterior se ha establecido una descomposición canónica para un endomorfismo f en la que las componentes f_i son endomorfismos con polinomio mínimo primario. Si el endomorfismo f de partida es ya de este tipo, la descomposición que resulta es trivial.

Se establecerá un segundo teorema de descomposición para endomorfismos con polinomio mínimo primario, en bloques ya irreducibles. Aunque esta descomposición no es canónica, sí lo es la distribución de dimensiones de los bloques, que puede controlarse a través de un adecuado sistema de invariantes.

Finalmente, la determinación de representaciones matriciales canónicas para endomorfismos irreducibles permitirá resolver completamente este problema de clasificación. Analizaremos ahora la estructura de estos endomorfismos.

La pareja (V, f) se supone ya fijada.

§ 1. ESTRUCTURA DE LOS SUBESPACIOS IRREDUCIBLES

Comencemos con una definición:

Definición 1.1. Subespacio irreducible

Un subespacio U *no nulo e invariante por el endomorfismo* f *de* V *se dice irreducible, si la restricción* f_U *es irreducible, es decir, no existe una descomposición no trivial de* U *en suma directa de subespacios invariantes.*

Veamos que los subespacios irreducibles, hay que buscarlos dentro de los subespacios característicos:

Proposición 1.2.

Si U *es un subespacio irreducible (respecto al endomorfismo* f*) entonces el polinomio mínimo anulador de* U *es de la forma*

$$\phi_U = p^k \quad (k \geqslant 1) \tag{1.2.1}$$

siendo p *un divisor primo del polinomio mínimo* ϕ_f *de* f. *En particular,* U *está contenido en el subespacio característico* V_p.

Demostración

Si ϕ_U se descompone en producto (no trivial): $\phi_U = \varphi\psi$ con m. c. d. $(\varphi, \psi) = 1$, por 3.2, L. 5 U se descompone en suma directa:

$$U = \ker \varphi(f_U) \oplus \ker \psi(f_U)$$

que es no trivial ya que φ y ψ no anulan a f_U, pues tienen grado estrictamente menor que el de $\phi_U = \phi_{f_U}$

La hipótesis de irreducibilidad de U, prueba que el polinomio ϕ_U es primario, como el indicado en (1.2.1).

Además, por ser $U \subset V$, ϕ_f es múltiplo de ϕ_U, por tanto, p es divisor primo de ϕ_f, y U está contenido en el subespacio característico V_p. □

Restrinjamos pues de momento nuestra atención sobre un subespacio característico genérico.

En la demostración de la siguiente proposición utilizaremos libremente (sin mención explícita) las propiedades 2.2. de la lección 5.

Proposición 1.3.

Sea f endomorfismo de V con polinomio mínimo primario, $\phi_f = p^m$, donde $m \geqslant 1$ y p es polinomio primo:

1) *Si $\{0\} \neq S \subset V$ se verifica la igualdad: $\phi_S = p^k$ con $1 \leqslant k \leqslant m$.*

2) *Si V se escribe como suma de subespacios:*

$$V = U_1 + \ldots + U_r$$

para algún sumando U_i se verifica que: $\phi_{U_i} = p^m$.

3) *Existe un vector $v \in V$ tal que $\phi_v = p^m$.*

Demostración

1. ϕ_S divide a $\phi_V = \phi_f = p^m$, pues S está contenido en V, y por ser p primo, y $S \neq \{0\}$, ϕ_S debe ser de la forma p^k con $1 \leqslant k \leqslant m$.
2. Por lo anterior, cada U_i tiene polinomio mínimo anulador de la forma: $\phi_{U_i} = p^{k_i}$, y como $\phi_f = \text{m. c. m.}\ (p^{k_1}, \ldots, p^{k_r}) = p^m$, necesariamente algún p^{k_i} coincide con p^m.
3. Fijada una base $(e_1, \ldots, e_n)$ de V, se verifica:

$$V = \langle e_1 \rangle + \ldots + \langle e_n \rangle$$

y por 2. existe algún e_i tal que $\phi_{e_i} = \phi_f = p^m$ $\square$

Cuando el polinomio mínimo es primo el módulo V_f se comporta como un espacio vectorial.

Proposición 1.4.

Supóngase $\phi_f = p$ polinomio primo. Entonces V admite una estructura de espacio vectorial sobre el cuerpo $\mathbb{K}[t]/\mathbb{K}[t]p$ (véase apéndice I) con el mismo retículo de subespacios que V_f. En particular, todo subespacio invariante de V_f tiene un complementario también invariante, y fijado $v_1 \in V - \{0\}$, existen $v_2, \ldots, v_r \in V - \{0\}$ tales que:

$$V_f = \langle v_1 \rangle_f \oplus \ldots \oplus \langle v_r \rangle_f$$

Demostración

Sea $\mathbb{L}$ el cuerpo $\mathbb{K}[t]/\mathbb{K}[t]p$. Denotando por $\bar{\varphi}$ a la clase $\varphi + \mathbb{K}[t]p$, se define la operación externa:

$$\mathbb{L} \times V \ni (\bar{\varphi}, v) \longrightarrow \bar{\varphi}v = \varphi v \in V$$

Nótese que si $\bar{\varphi} = \bar{\psi}$ entonces $\varphi - \psi$ es múltiplo de p, y $(\varphi - \psi)v = 0$ para todo $v \in V$, y la operación está bien definida.

Se comprueba fácilmente, que ésta operación da estructura de espacio vectorial sobre el cuerpo $\mathbb{L}$, al grupo $(V, +)$. Basta para ello utilizar su estructura de módulo sobre $\mathbb{K}[t]$.

Las demás afirmaciones resultan ya inmediatas a partir de la definición de submódulo, de las propiedades del retículo de subespacios vectoriales, y del teorema de prolongación de una base. □

Si $u \in V - \{0\}$ el submódulo $\langle u \rangle_f$ generado por u en V viene definido por:

$$\langle u \rangle_f = \mathbb{K}[t]u = \{\varphi u : \varphi \in \mathbb{K}[t]\}$$

y la llamaremos recta modular (generada por u). Recordemos que se trata del subespacio invariante más pequeño que contiene al vector u.

Veamos que una recta modular con polinomio mínimo anulador primario, es subespacio irreducible:

Proposición 1.5.

Supóngase $U=\mathbb{K}[t]u$ *recta modular de* V_f, *con* $\phi_U=p^k$ $(k\geqslant 1)$.

1) El polinomio mínimo anulador de u *es justamente* $\phi_u=p^k$.

2) Si $K_r[t]$ *es el espacio vectorial de los polinomios de grado menor que* $r=\text{grado }(p^k)$, *entonces la aplicación:*

$$K_r[t]\ni\rho\longrightarrow\rho u\in U \qquad (1.5.1)$$

es un isomorfismo lineal. En particular,

$$\dim U=\text{grado }(p^k)$$

3) Si $v\in U$, y $\phi_v=p^k$ *entonces,* $U=\mathbb{K}[t]v$.

4) U *es un subespacio irreducible.*

Demostración

1) Es suficiente probar la igualdad: $An_f(U)=An_f(u)$.
Como $u\in U$ se deduce que $An_f(u)\supset An_f(U)$. Por otra parte:

si $\psi\in An_f(u)$, para todo $\varphi\in\mathbb{K}[t]$ es $\psi(\varphi u)=\varphi(\psi u)=\varphi 0=0$. Luego $\psi\in An_f(U)$.

2) La aplicación definida en (1.5.1) es claramente lineal, y es inyectiva, ya que si $\rho\in\mathbb{K}[t]$ verifica $\rho u=0$, es ρ múltiplo de p^k y con grado menor, luego $\rho=0$.

Probemos que es sobreyectiva:

Un elemento x cualquiera de U se escribe en la forma $x=\varphi u$ para cierto $\varphi\in\mathbb{K}[t]$. Aplicando a φ el algoritmo de división por p^k, se tiene:

$$\varphi=p^kq+\rho \text{ con } \rho\in K_r[t]$$

y por tanto: $x=\varphi u=(q\,p^k+\rho)u=q(p^k\,u)+\rho u=q0+\rho u=\rho u$.

3) Sea $v\in U$ con $\phi_v=p^k$. Claramente es $K[t]v\subset U$, y por 2) es:

$$\dim K[t]v=r=\dim K[t]u=\dim U$$

Luego se verifica la igualdad.

4) Si U se descompone en suma directa de subespacios invariantes:

$$U = U_1 \oplus U_2$$

entonces por 2) de 1.3 algún sumando tiene polinomio mínimo anulador p^k. Supóngase $\phi_{u_1} = p^k$, y sea $u \in U_1$ tal que $\phi_u = p^k$. Por la afirmación 3), se concluye que $U = K[t]u \subset U_1$, y así es $U = U_1$, $U_2 = \{0\}$, y la descomposición es trivial. $\square$

El siguiente resultado, que constituye la clave para la demostración del teorema de clasificación de Jordan, permite probar en particular, que los subespacios irreducibles son justamente las rectas modulares con polinomio mínimo anulador primario.

Proposición 1.6. Teorema de descomposición

Supongase $\phi_f = p^m$ *polinomio primario* $(m \geq 1)$, *y sea* $v_1 \in V$ *tal que:* $\phi_{v_1} = p^m$; *entonces existen vectores* $v_i \in V - \{0\}$ *tales que:*

$$V = K[t]v_1 \oplus \ldots \oplus K[t]v_s \qquad (s \geq 1)$$

En particular la recta modular $K[t]v_1$ *admite en* V *un complementario invariante.*

Demostración

Se hará por inducción sobre el exponente m. Para $m = 1$, el resultado se sigue de la proposición 1.4. Supongase cierto el teorema para endomorfismos h con $\phi_h = p^{m'}$ y $m' < m$ $(m \geq 2)$. Sea $f \in EL(V)$ con $\phi_f = p^m$, y $v_1 \in V$ tal que $\phi_{v_1} = p^m$. El subespacio $pV = \{pv: v \in V\} = \operatorname{im} p(f)$, es invariante por f (véase proposición 1.7 de la lección 5), y evidentemente es:

$$\phi_{pv_1} = p^{m-1} = \phi_{pV}$$

Aplicando a $f' = f_{pV}$ la hipótesis de inducción se deduce la existencia de vectores $pv_i \in pV - \{0\}$ tales que:

$$pV_r = \mathbb{K}[t]pv_1 \oplus \ldots \oplus \mathbb{K}[t]pv_r \quad (r \geq 1) \qquad (1.6.1)$$

Considérese el espacio vectorial:

$$V' = \mathbb{K}[t]v_1 \oplus \ldots \oplus \mathbb{K}[t]v_r \qquad (1.6.2)$$

Claramente es $pV' = \mathbb{K}[t]pv_1 + \ldots + \mathbb{K}[t]pv_r = pV$, y por tanto:

$$V = V' + U \quad (U = \ker p(f)) \qquad (1.6.3)$$

ya que si $v \in V$, entonces $pv \in pV = pV'$; y existe $v' \in V'$ con $pv = pv'$. Así

$$p(v - v') = 0, \text{ y } v - v' = u \in \ker p(f) = U.$$

Demostremos que la suma (1.6.2) es directa (si $r > 1$):

$$V' = \mathbb{K}[t]v_1 \oplus \ldots \oplus \mathbb{K}[t]v_r \qquad (1.6.4)$$

En efecto, dados $\varphi_1, \ldots, \varphi_r \in \mathbb{K}[t]$ supóngase:

$$\varphi_1 v_1 + \ldots + \varphi_r v_r = 0 \qquad (1.6.5)$$

Es suficiente probar que $\varphi_i v_i$ es nulo para todo $i = 1, \ldots, r$. Multiplicando por p los dos miembros de (1.6.5) se obtiene:

$$\varphi_1 pv_1 + \ldots + \varphi_r pv_r = 0$$

Por (1.6.1) se deduce que $\varphi_i(pv_i) = 0$, por lo que pv_i es un vector (no nulo) de Ker $\varphi_i(f)$; se concluye (ver L.5, 3.7) que m. c. d. $(\varphi_i, p^m) \neq 1$, y así p es divisor de cada φ_i, es decir:

$$\varphi_i = \psi_i p \quad i = 1, \ldots, r \text{ para ciertos } \psi_i \in \mathbb{K}[t]$$

Reescribiendo (1.6.5) se tiene la igualdad:

$$\psi_1 pv_1 + \ldots + \psi_r pv_r = 0$$

Nuevamente por (1.6.1) se concluye que $\psi_i p v_i = \varphi_i v_i = 0$ que es lo que queríamos probar.

Finalmente como $\phi_U = p$ ($U = \ker p(f)$), se deduce de **1.4** que el subespacio invariante $V' \cap U$ admite en U un complementario W también invariante:

$$U = (V' \cap U) \oplus W \qquad (1.6.6)$$

Si $W=\{0\}$ entonces U es subespacio de V' y por (1.6.3) es $V'=V$. La igualdad 1.6.4) prueba entonces el teorema.

Si $W\neq\{0\}$, como es subespacio invariante de U, aplicando el caso $m=1$ se deduce la existencia de una descomposición de la forma:

$$W=\mathbb{K}[t]w_1\oplus\ldots\oplus\mathbb{K}[t]w_k \quad w_i\in W-\{0\} \tag{1.6.7}$$

y se tiene

$$V=V'\oplus W \tag{1.6.8}$$

En efecto, teniendo en cuenta (1.6.6) y que $W\subset U$, se verifica:

$$V'\cap W=V'\cap W\cap U=\{0\}$$

y de (1.6.3) y (1.6.6) se deduce ahora que: $V=V'+(V'\cap U)+$ $+W=V'+W$, lo que prueba (1.6.8). Finalmente, de (1.6.8), (1.6.4), y (1.6.7) se obtiene:

$$V_r=\mathbb{K}[t]v_1\oplus\ldots\oplus\mathbb{K}[t]v_r\oplus\mathbb{K}[t]w_1\oplus\ldots\oplus\mathbb{K}[t]w_k$$

Lo que concluye la demostración. □

Corolario 1.7.

Los subespacios irreducibles de V *son justamente las rectas modulares con polinomio anulador primario.*

Demostración

Si U es subespacio irreducible, por 1.2 se sabe que: $\phi_U=p^k$, para $k\geqslant 1$, y p polinomio primo. Tomando $u\in U$ tal que $\phi_u=p^k$ (cuya existencia queda garantizada por 1.3) y aplicando el teorema anterior, se concluye que $\mathbb{K}[t]u$ admite en U complementario invariante U'. La hipótesis de irreducibilidad permite concluir que $U'=\{0\}$, y $U=$ $=\mathbb{K}[t]u$.

El resultado recíproco ya es conocido de 1.5. □

§ 2. CLASIFICACION LINEAL DE LOS ENDOMORFISMOS IRREDUCIBLES

La familia de endomorfismos irreducibles constituye una clase invariante, pues los retículos de endomorfismos linealmente equivalentes son isomorfos (véase ejercicio 6.3). Nos proponemos demostrar que el polinomio mínimo es aquí un invariante completo. Para ello estableceremos previamente un método general que permita determinar una representación matricial de Jordan para un endomorfismo irreducible arbitrario, que quede unívocamente determinada por el polinomio mínimo.

Supondremos pues fijado un endomorfismo irreducible f sobre el espacio vectorial V (con dimensión $n>0$). Esto significa que el espacio total V es irreducible, y por 1.2 el polinomio mínimo de f es primario de la forma:

$$\phi_f = p^k \text{ con } k \geqslant 1 \text{ y } p \text{ polinomio primo de grado } \nu \qquad (2.0.1)$$

Fijado $v \in V$ tal que $\phi_v = p^k$ (cuya existencia queda garantizada por 3) de 1.3 se tiene en virtud de 1.7 y 1.5:

$$V = \mathbb{K}[t]v \qquad (2.0.2)$$

y por 2) de 1.5, es $n = \dim V = \nu k$. En estas condiciones se tiene el siguiente resultado:

Proposición 2.1.

Existe una representación matricial para el endomorfismo irreducible f *de la forma:*

$$C_k(p) = \begin{pmatrix} A(p) & & & \\ N_\nu & A(p) & & \\ & & \ddots & \\ & & N_\nu & A(p) \end{pmatrix} \in EL(n)$$

Donde $p=t^{\nu}+\ldots+a_1t+a_0$ *es el polinomio primo dado por* (2.0.1), y:

$$A(p)=\begin{pmatrix} 0 & 0\ldots0 & -a_0 \\ 1 & 0\ldots0 & -a_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0\quad 1 & -a_{\nu-1} \end{pmatrix} \in EL(\nu),\quad N_{\nu}=\begin{pmatrix} 0 & 0\ldots1 \\ 0 & 0\ldots0 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & 0\ldots0 \end{pmatrix} \in EL(\nu).$$

Demostración

El sistema de polinomios:

$$\varepsilon(p,\ k)=(1,\ t,\ \ldots,\ t^{\nu-1},\ p,\ tp,\ \ldots t^{\nu-1}p,\ \ldots,\ p^{k-1},\ tp^{k-1},\ \ldots,\ t^{\nu-1}p^{k-1})$$

constituye una base para el espacio vectorial $K_n[t]$ de los polinomios de grado estrictamente menor que $n=\dim V=\nu k$.

En efecto, el número de elementos de $\varepsilon(p,\ k)$ es exactamente $\nu\cdot k=n=\dim \mathbb{K}_n[t]$. Es pues suficiente ver que el sistema es linealmente independiente.

Una combinación lineal de elementos de $\varepsilon(p,\ k)$ que dé lugar al polinomio nulo siempre se puede escribir de la forma:

$$\psi_0+\psi_1p+\ldots+\psi_{k-1}p^{k-1}=0, \text{ donde } \psi_i\subset\mathbb{K}_{\nu}[t] \qquad (2.1.1)$$

Despejando ψ_0, en (2.1.1) se deduce que $\psi_0\in\mathbb{K}[t]p$, y como el grado de ψ_0 es menor que ν es $\psi_0=0$.

Reescribiendo ahora (2.1.1) y dividiendo por p queda:

$$\psi_1+\psi_2p+\ldots+\psi_{k-1}p^{k-2}=0$$

y así $\psi_1=0$. Continuando este proceso inductivo se llega a que:

$$\psi_0=\psi_1=\ldots=\psi_{k-1}=0$$

que es lo que queríamos probar.

Si $v\in V$ es el vector dado por la condición (2.0.2), utilizando la afirmación 2) de 1.5 se tiene que la aplicación:

$$\mathbb{K}_n[t]\ni\rho\to\rho v\in\mathbb{K}[t]v=V$$

es isomorfismo lineal, y por tanto:

$$\varepsilon(p,\ k)\,v=(v,\ tv,\ \ldots,\ t^{\nu-1}v,\ \ldots,\ p^{k-1}v,\ tp^{k-1}v,\ \ldots,\ t^{\nu-1}p^{k-1}v)$$

es base de V. Probemos que la matriz de f respecto a esta base es de la forma indicada:

Para $j=0,\ \ldots,\ k-1$, $i=0,\ \ldots,\ \nu-2$, se tiene:

$$f(t^i p^j v)=t^{i+1}p^j v$$

y si $i=\nu-1$:

$$f(t^{\nu-1}p^j v)=t^\nu p^j v=-a_0 p^j v-a_1 tp^j v-\ldots-a_{\nu-1}t^{\nu-1}p^j v+p^{j+1}v$$

Finalmente, cuando $j=k-1$, $i=\nu-1$, el último sumando de la expresión anterior es $p^k v=0$, quedando:

$$f(t^{\nu-1}p^{k-1}v)=-a_0 p^{k-1}v-a_1 tp^{k-1}v-\ldots-a_{\nu-1}t^{\nu-1}p^{k-1}v$$

Todas estas expresiones pueden escribirse de la forma:

$$f(\varepsilon(p,\ k)\,v)=\varepsilon(p,\ k)\ C_k(p)$$

lo que concluye la demostración. □

Corolario 2.2.

Dos endomorfismos irreducibles del espacio vectorial V son linealmente equivalentes, si y sólo si tienen el mismo polinomio mínimo.

Demostración

La matriz $C_k(p)$ construida en la proposición anterior, sólo depende del polinomio primo p, y la dimensión n del espacio V. Por tanto $C_k(p)$ sirve de representación matricial a todos los endomorfismos irreducibles, con polinomio mínimo de la forma p^k (con $k=n/\nu$, donde ν es el grado de p). □

Observación 2.3.

Denotando por Ω a la clase invariante de los endomorfismos irreducibles del espacio vectorial V, la aplicación polinomio mínimo:

$$\phi : \Omega \ni f \to \phi_f \subset \mathbb{K}[t]$$

es un invariante completo que tiene por imagen $\phi(\Omega)$ el conjunto de los polinomios primarios de la forma:

$$p^k \text{ con } k = n/\nu, \text{ donde } \nu \text{ es el grado de } p$$

Por tanto, si $\mathscr{P}_n(\mathbb{K})$ denota al conjunto de los polinomios primos de $\mathbb{K}[t]$, cuyo grado ν divide a n, cada $p \in \mathscr{P}_n(\mathbb{K})$ determina un único $p^k \in \phi(\Omega)$. Se tiene así una correspondencia biyectiva canónica entre el espacio de órbitas $\Omega/GL(V)$ y $\mathscr{P}_n(\mathbb{K})$.

En particular:

— $\mathscr{P}_n(\mathbb{C}) = \{t-\lambda : \lambda \in \mathbb{C}\}$, para todo $n \geqslant 1$.

— $\mathscr{P}_n(\mathbb{R}) = \{t-\lambda : \lambda \in \mathbb{R}\} = \mathscr{P}_1(\mathbb{R})$ si n es impar.

— $\mathscr{P}_n(\mathbb{R}) = \mathscr{P}_1(\mathbb{R}) \cup \{(t-\alpha)^2+\beta^2 : \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \beta > 0\}$ si n es par.

Cuando se hace en la proposición 2.1 $p = t-\lambda$, la matriz $A(p)$ se reduce a (λ), y N_1 es igual a (1). Se tiene entonces:

Corolario 2.4.

Si f es endomorfismo irreducible de V con $\phi_f = (t-\lambda)^n$, existe una representación matricial para f de la forma:

$$C_n(t-\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & \lambda & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \lambda \end{pmatrix} \in EL(n)$$

Nótese que si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, esto es aplicable a todos los endomorfismos irreducibles de V.

Corolario 2.5.

Si f es endomorfismo irreducible, su polinomio mínimo, coincide con el característico.

Demostración

Si $\phi_f = p^k$, f admite una representación de la forma $C_k(p)$ dada en 2.2, y $\chi_f = \chi_{C_k(p)} = \chi^k_{A(p)}$. Es suficiente probar por tanto que:

$$\chi_{A(p)} = p \text{ para todo polinomio mónico (sea o no primo)}$$

Hagámoslo por inducción sobre el grado ν de p:

Si $\nu = 1$, el resultado es evidente.

Supuesto cierto para enteros menores que ν $(\nu \geq 2)$ se tiene:

$$\chi_{A(p)}(t) = \det \begin{pmatrix} t & 0 & \dots & 0 & a_0 \\ -1 & t & \dots & 0 & a_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & t & a_{\nu-2} \\ 0 & 0 & & -1 & t - a_{\nu-1} \end{pmatrix}$$

Desarrollando por los elementos de la primera fila, y aplicando la hipótesis de inducción queda:

$$\chi_{A(p)}(t) = (-1)^{\nu-1} a_0 \det \begin{pmatrix} -1 & t & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & -1 & t \\ 0 & 0 & \dots & 0 & -1 \end{pmatrix} + t(t^{\nu-1} + a_{\nu-1} t^{\nu-2} + \dots$$

$$+ a_2 t + a_1) = p$$

lo cual concluye la demostración. □

§ 3. CLASIFICACION LINEAL DE ENDOMORFISMOS CON POLINOMIO MINIMO PRIMARIO

En este epígrafe p denota a un polinomio primo mónico de $\mathbb{K}[t]$ con grado igual a ν, y f es un endomorfismo en el espacio vectorial V con polinomio mínimo de la forma:

$$\phi = p^m \text{ con } m \geqslant 1$$

La proposición 1.6 establece para este tipo de endomorfismos, una descomposición en subespacios irreducibles de la forma:

$$V = \mathbb{K}[t]v_1 + \dots + \mathbb{K}[t]v_s \text{ con } \phi_{v_i} = p^{k_i} \text{ y } m = k_1 \geqslant \dots \geqslant k_s \geqslant 1 \quad (3.0.1)$$

Proposición 3.1. Sucesión secular

La sucesión $(k_1, \dots, k_s)$ *de (3.0.1) viene unívocamente determinada por el endomorfismo* f. *Concretamente si:*

$$\rho^j(f) = \mathrm{rg}\,(p^j(f))/\nu, \quad j = 0, \dots, m$$

y c_j *es el número de veces que aparece el entero* j *en la sucesión anterior, se verifica:*

$$c_j = \rho^{j-1}(f) + \rho^{j+1}(f) - 2\rho^j(f) \qquad j = 1, \dots, m$$

Se denomina a $(k_1, \dots, k_s)$ *sucesión secular del endomorfismo* f, *y* $(\rho^0, \dots, \rho^m)$ *invariantes de rango.*

Demostración

«Multiplicando» los dos miembros de (3.0.1) por p^j $(j = 0, \dots, m)$ queda:

$$p^j V = \mathbb{K}[t]p^j v_1 + \dots + \mathbb{K}[t]p^j v_s$$

— Si $j \geqslant k_i$ es $p^j v_i = 0$, y $\mathbb{K}[t]p^j v_i = \{0\}$.

— Si $j < k_i$ es $\phi_{p^j v} = p^{k_i - j}$ y $\dim(\mathbb{K}[t]p^j v_i) = \nu(k_i - j)$.

Se tiene así: $\dim(p^j V) = \sum\limits_{j<k_i} \nu(k_i - j) = rg(p^j(f)) = \rho^j(f) \cdot \nu$.

Por tanto:

$$\rho^j(f) = \sum_{j<k_i} (k_i - j) = \sum_{i=j}^{m} (i-j)\, c_i, \text{ para } j=0, \ldots, m.$$

con lo que fijado j con $1 \leqslant j \leqslant m$ es:

$$\rho^{j-1}(f) - \rho^j(f) = \sum_{i=j-1}^{m} (i-j+1)\, c_i - \sum_{i=j}^{m} (i-j)\, c_i = \sum_{i=j}^{m} c_i.$$

Análogamente:

$$\rho^j(f) - \rho^{j+1}(f) = \sum_{i=j+1}^{m} c_i$$

restando ambas igualdades, queda:

$$(\rho^{j-1}(f) - \rho^j(f)) - (\rho^j(f) - \rho^{j+1}(f)) = \sum_{i=j}^{m} c_i - \sum_{i=j+1}^{m} c_i = c_j$$

que es lo que queríamos probar. □

Corolario 3.2.

Dos endomorfismos f, f′ *de* V *con el mismo polinomio mínimo (primario)* p^m*, son linealmente equivalentes, si y sólo si:*

$$\rho^i(f) = \rho^i(f') \text{ para } i=1, \ldots, m-1$$

Siendo los ρ^i *los invariantes de rango definidos en la proposición anterior.*

Demostración

A partir de los enteros $\rho^j(f)$ $j=1, \ldots, m-1$, pueden reconstruirse los elementos de la sucesión secular $(k_1, \ldots, k_s)$ del endomorfismo f determinados por (3.0.1).

Construyendo para cada $i=1, \dots s$ la base $\varepsilon_i = \varepsilon(p, k_i)$ de $\mathbb{K}\{t\}v$, indicada en la proposición 2.1, la representación matricial de f respecto a la base $\varepsilon = \varepsilon_1 \cup \dots \cup \varepsilon_s$ es:

$$J_p = \begin{pmatrix} C_{k_1}(p) \dots & & & \\ & C_{k_2}(p) & & \\ & & \cdot & \\ & & & C_{k_s}(p) \end{pmatrix} \tag{3.2.1}$$

Esta matriz J_p sólo depende de los enteros $\rho^i(f) = \rho^i(f')$, $i=1, \dots, m-1$, y es también una representación matricial para f', que, por tanto, es linealmente equivalente a f.

Por otra parte, las aplicaciones ρ^i son invariantes lineales (por L.5, 2.8). Esto concluye la demostración.□

Estamos ahora en situación de dar una demostración sencilla del clásico teorema de Cayley-Hamilton:

Corolario 3.3. Teorema de Cayley-Hamilton

Sea f un endomorfismo de V, y

$$\chi_f = p_1^{n_1} \dots p_r^{n_r} \quad 1 \leqslant n_i, \; p_i \neq p_j \text{ si } i \neq j$$

la descomposición en factores primos del polinomio característico de f. El polinomio mínimo de f es entonces de la forma:

$$\phi_f = p_1^{m_1} \dots p_r^{m_r} \text{ con } 1 \leqslant m_i \leqslant n_i$$

En particular, $\chi_f(f) = 0$.

Demostración

Sea p un divisor primo de ϕ con multiplicidad $m_p \geqslant 1$. Sea $(k_1, \dots, k_s)$ la sucesión secular del endomorfismo f_p restricción de f al subespacio característico V_p. Este endomorfismo admite una representación reducida de Jordan J_p como la (3.2.1), y se tiene:

$$\chi_{f_p} = \chi_{C_{k_1}(p)} \cdots \chi_{C_{k_s}(p)}$$

pero por la demostración de 2.5 es $\chi_{C_{k_i}(p)}=p^{k_i}$, por lo que:

$$\chi_{f_p}=p^{k_1}\dots p^{k_s}=p^{n_p} \text{ siendo } n_p=k_1+\dots+k_s=m_p+k_2+\dots+k_s\geqslant m_p.$$

Descomponiendo ahora V_f en suma directa de los subespacios característicos:

$$V_f=V_{p_1}\oplus\dots\oplus V_{p_r}, \text{ y llamando } f_i \text{ a } f_{V_{p_i}} \text{ y } n_i \text{ a } n_{p_i} \text{ se tiene:}$$

$\chi_f=\chi_{f_1}\cdots\chi_{f_r}=p^{n_1}\dots p^{n_r}$ con $n_i\geqslant m_i\geqslant 1$, siendo m_i el orden de multiplicidad de p_i como divisor primo de ϕ_f. □

§ 4. TEOREMA DE JORDAN

Resolveremos finalmente el problema general de clasificación de endomorfismos.

Supóngase f un endomorfismo de V cuyo polinomio mínimo $\phi_f=$ $=\phi$ se descompone en factores primos de la forma:

$$\phi=p_1^{m_1}\dots p_r^{m_r},\ 1\leqslant m_i,\ v_i \text{ es el grado de } p_i, \text{ y } p_i\neq p_j \text{ si } i\neq j. \quad (4.0.1)$$

Los enteros:

$$\rho_i^j\ (f)=rg\,(p_i^j(f))/v_i\ 1\leqslant i\leqslant r,\ 0\leqslant j\leqslant m$$

se denominan invariantes de rango para f.

Estamos ya en condiciones de establecer el teorema fundamental de este Capítulo:

Proposición 4.1. Teorema de Jordan

Sean f *y* f′ *dos endomorfismos de* V *con el mismo polinomio mínimo.* $\phi_f=\phi_{f'}=\phi=p_1^{m_1}\dots p_r^{m_r}$ *como en* (4.0.1). *Entonces:* f *y* f′ *son linealmente equivalentes, si y sólo si se verifican las igualdades:*

$$\rho_i^j(f)=\rho_i^j(f') \text{ para todo } 1\leqslant i\leqslant r,\ 1\leqslant j\leqslant m-1 \quad (4.1.1)$$

Demostración

Como las aplicaciones ρ_i^j: $EL(V) \to \{0, 1, ..., n\}$ son invariantes lineales (véase L.5, 1.7), si los endomorfismos f y f' son linealmente equivalentes, se verifican las igualdades (4.1.1).

Supóngase ahora que se verifican estas igualdades para f y f'. Se trata entonces de obtener una representación matricial reducida común (a f y f') que dependa sólo del polinomio mínimo ϕ y de los enteros

$$\rho_i^j = \rho_i^j\ (f) = \rho_i^j\ (f').$$

Trabajemos con el endomorfismo f:
Por el teorema de descomposición 3.6, el espacio vectorial V se descompone en la suma directa de los subespacios característicos:

$$V_f = V_{p_1} \oplus \dots \oplus V_{p_r} \text{ con } \phi_{V_{p_i}} = \phi_i = p_i^{m_i} \tag{4.1.2}$$

Por el teorema de descomposición 1.6 cada V_{p_i} se descompone en suma de subespacios irreducibles:

$$V_{p_i} = K[t]v_{i1} \oplus \dots \oplus K[t]v_{is_i} \text{ con } \phi_{v_{ij}} = p_i^{k_{ij}},\ m_i = k_{i1} \geqslant \dots \geqslant k_{is_i} \geqslant 1 \tag{4.1.3}$$

Sea c_{ij} el número de veces que aparece el entero j en la sucesión (4.1.3). Llamando $f_i = f_{V_{p_i}}$, sea:

$$\rho^j(f_i) = rg(p_i^j(f_i))/v_i$$

Por 3.1 se deduce que:

$$c_{ij} = \rho^{j-1}\ (f_i) + \rho^{j-1}(f_i) - 2\ \rho^j(f_i) \tag{4.1.4}$$

Para cada $i = 1, ..., r$ probemos la igualdad:

$$\rho_i^j(f) = \rho^j(f_i) + \frac{n - n_i}{v_i} \text{ para todo } j \text{ con } 1 \leqslant j \leqslant m_i \tag{4.1.5}$$

Donde $n = \dim V$, $n_i = \dim V_{p_i}$.

En efecto, «multiplicando» ambos miembros de la igualdad (4.1.2) por p_i^j, y teniendo en cuenta que $p_i^j\ V_{p_i} \subset V_{p_i}$ se tiene:

$$p_i^j\ V = p_i^j\ V_{p_1} \oplus \dots \oplus p_i^j\ V_{p_r}$$

para $k \neq i$ es m. c. d. $(p_i^j,\ \phi_{f_k} = p^{m_k}) = 1$; aplicando ahora el corolario 3.7 de la lección 5, se tiene que:

$$\ker p_i^j(f_k) = \{0\}, \text{ y por tanto } \operatorname{im} p_i^j(f_k) = V_{\rho_k} \text{ y } rg\, p_i^j(f_k) = n_k.$$

con lo que:

$$\dim p_i^j V = rg(p_i^j(f)) = \sum_{k=1}^{r} rg(p_i^j(f_k)) =$$

$$= rg(p_i^j(f_i)) + \sum_{k \neq i} n_k = rg(p_i^j(f_i)) + n - n_i.$$

y quedan probadas las igualdades (4.1.5).

Utilizando (4.1.4) y (4.1.5) se deduce inmediatamente que:

$$c_{ij} = \rho_i^{j-1}(f) + \rho_i^{j+1}(f) - 2\rho_i^j(f)$$

para todo

$$i,\ j \text{ con } 1 \leqslant i \leqslant r,\ 1 \leqslant j \leqslant m_i - 1 \tag{4.1.6}$$

y los c_{ij} sólo dependen de los ρ_i^j.

De la demostración de 2.1 se deduce la existencia de una base ε_i en cada V_{ρ_i} que da una representación matricial J_{ρ_i} de f_i que sólo depende de los c_{ij} y p_i. La representación matricial de f respecto a la base $\varepsilon = \varepsilon_1 \cup \dots \cup \varepsilon_r$ es entonces:

$$J = \begin{pmatrix} J_{\rho_1} & & \\ & \ddots & \\ & & J_{\rho_r} \end{pmatrix} \tag{4.1.7}$$

que sólo depende los enteros ρ_i^j.

Así aplicando la misma técnica al endomorfismo f' se obtiene también la representación matricial J, y ambos son, por tanto, linealmente equivalentes.□

Definición 4.2. Matriz de Jordan

A una matriz J como la (4.1.7) se le denomina matriz de Jordan. Las submatrices diagonales de J, J_p (que se corresponden con los subespacios característicos) se denominan cajas de Jordan. Finalmente, las submatrices del tipo $C_k(p)$ de que se componen las cajas de Jordan, J_p, se denominan celdas de Jordan (y se corresponden con los subespacios irreducibles).

Se tiene el siguiente criterio de semejanza para matrices de Jordan:

Proposición 4.3.

Dos matrices de Jordan J, $J' \in EL(n)$ son semejantes, si y sólo si se obtiene una de la otra por permutación de cajas.

Demostración

Sea ε una base del espacio vectorial V de dimensión n, y f un endomorfismo de V tal que:

$$M_\varepsilon(f) = J$$

Si J' se obtiene de J por permutación de cajas, es posible permutar adecuadamente los elementos de la base ε para dar lugar a una base ε' tal que:

$$M_{\varepsilon'}(f) = J'$$

y entonces J y J' son semejantes por ser dos representaciones matriciales de un mismo endomorfismo.

Para probar el recíproco, es suficiente observar que fijado un endomorfismo f de V con $M_\varepsilon(f) = J$, el conjunto de matrices J' de Jordan semejantes a J, es justamente el conjunto de representaciones matriciales de Jordan para f, y por la demostración de 4.1, se deducen unas de otras por permutación de cajas según se considere el orden de los divisores primos del polinomio mínimo. $\square$

Observación 4.4.

Podríamos establecer como definición de matriz de Jordan, una matriz J de la forma:

$$J = \begin{pmatrix} C_1 & & & \\ & C_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & C_s \end{pmatrix}$$

Donde las C_i son celdas de Jordan. Se puede probar entonces, que dos matrices de Jordan son semejantes si puede obtenerse una de la otra por permutación de celdas.

Por ejemplo, las matrices:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

son matrices de Jordan semejantes.

EJERCICIOS

6.1.* Sea f endomorfismos del espacio vectorial V con matriz respecto a cierta base $\varepsilon=(e_1, \ldots, e_n)$:

$$J=\begin{pmatrix} \lambda & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 1 & \lambda & \ldots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda & \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & \lambda \end{pmatrix}$$

Demostrar que el retículo de subespacios invariantes es exactamente:

$$\mathscr{L}(V_f)=\{\{0\}, \langle e_n\rangle, \langle e_{n-1}, e_n\rangle, \ldots, \langle e_2, \ldots, e_n\rangle, V\}$$

6.2. Sea f endomorfismo irreducible del espacio vectorial V, con polinomio mínimo de la forma:

$$\phi_f=p^m,\ p \text{ polinomio primo de grado } \nu, \text{ y } m\geqslant 1$$

Sea $V_i=\ker p^i(f)$ para $i=0, 1, \ldots, m$.

a) Probar que la familia de subespacios invariantes es exactamente:

$$\mathscr{L}(V_f)=\{V_0, V_1, \ldots, V_m\}$$

(todos los V_i son distintos).

b) Demostrar que para cada $v\in V_i-V_{i-1}$, el único subespacio irreducible $\mathbb{K}[t]v$ que contiene a V tiene dimensión νi.

c) Probar que todos los subespacios irreducibles de V se obtienen por este procedimiento.

6.3. Sean f y f' endomorfismos de V tales que $f'=g\cdot f\cdot g^{-1}$ para cierta transformación lineal g de V.

a) Probar que $g: V_f \longrightarrow V_{f'}$ es un isomorfismo de módulos.

b) Probar que g induce un isomorfismo entre los retículos de subespacios invariantes de f y f'.

6.4. Describir todos los posibles retículos de subespacios invariantes (salvo isomorfismos), de endomorfismos en espacios vectoriales reales tridimensionales.

6.5.* Sea f un endomorfismo de un espacio vectorial V con representación matricial A, respecto a cierta base $\varepsilon=(e_1, ..., e_n)$ y sean (x_i) las coordenadas respecto a ε. Si H es un hiperplano de V de ecuación: $u_1x_1+...+u_nx_n=0$.

Probar que H es invariante por f, si y sólo si:

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} \text{ es autovector del endomorfismo}$$

$$A^t: V_n(\mathbb{K}) \to V_n(\mathbb{K})$$

6.6.* Determinar el retículo de subespacios invariantes para los endomorfismos de $V_3(\mathbb{R})$ con matrices:

$$A=\begin{pmatrix} -3 & -3 & -2 \\ 8 & 7 & 4 \\ -4 & -3 & -1 \end{pmatrix} \quad B=\begin{pmatrix} 5 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ -6 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

$$C=\begin{pmatrix} -2 & -2 & -3 \\ 4 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad D=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 8 & 4 & 4 \\ -2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

6.7.* Demostrar que en espacio vectorial real V, puede sustituirse en la proposición 2.1. la matriz $A(p)$ por:

$$B(p)=\begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$$

si $p(t)=(t-\alpha)^2+\beta^2$.

6.8.* Sea f un endomorfismo en un espacio vectorial real V, tal que $f^2+id=0$.

a) Probar que V tiene dimensión par, y f admite una representación matricial formada por cajas diagonales de la forma:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

b) Demostrar que el grupo $(V, +)$ admite una única estructura de espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$ tal que:

$$(\alpha+i\beta)v=\alpha v+\beta f(v) \text{ para todo } \alpha,\ \beta \in \mathbb{R} \text{ y todo } v \in V$$

6.9. Determinar todas las matrices reales de Jordan de orden 4, y establecer un teorema de clasificación lineal de endomorfismos para espacios vectoriales reales de dimensión 4.

6.10.* Determinar una representación de Jordan, y una base de Jordan (respecto a la cual se tenga la representación reducida) para los endomorfismos de $V_4(\mathbb{R})$ dados por las matrices:

$$\begin{pmatrix} -2 & -2 & -1 & -1 \\ 8 & 7 & 4 & 8 \\ -8 & -7 & -5 & -8 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} -10 & -9 & -3 & -5 \\ 5 & 4 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 0 & 1 \\ 6 & 6 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -7 & -9 & -3 & -4 \\ 6 & 6 & 1 & 4 \\ 7 & 10 & 4 & 4 \\ 0 & 2 & 2 & -1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} -6 & -11 & -9 & -6 \\ 3 & 4 & 3 & 2 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 5 & 7 & 6 & 5 \end{pmatrix}$$

6.11. Determinar todas las posibles configuraciones de subespacios invariantes en espacios vectoriales reales de dimensión 4.

6.12. Determinar los retículos de subespacios invariantes de cada uno de los endomorfismos dados en el ejercicio 6.10.

6.13. Determinar las matrices de Jordan correspondientes a los endomorfismos de $V_n(\mathbb{R})$ dados por las matrices:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ 0 & 1 & 2 & \dots & n-1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ 2 & 3 & 4 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ n-1 & n & 1 & \dots & n-2 \\ n & 1 & 2 & \dots & n-1 \end{pmatrix}$$

6.14.* Determinar una matriz de Jordan semejante a la matriz A, cuando se toma el cuerpo $\mathbb{K}=\mathbb{C}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Z}_7$, $\mathbb{Z}_{11}$.

$$A=\begin{pmatrix} -6 & -6 & -6 & -4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 6 & 3 \end{pmatrix}$$

6.15. Sea f un endomorfismo del espacio vectorial V sobre el cuerpo $\mathbb{K}$, del que se sabe:

$$\chi_f(t)=(t-2)^7\ (t^4-t^2-2)$$

y además:

$$rg\,(f-2id)=7,\ rg\,[(f-2id)^2]=5,\ rg\,[(f-2id)^3]=rg\,[(f-2id)^4]=4$$

Determinar el polinomio mínimo de f y una matriz de Jordan en cada uno de los casos: $\mathbb{K}=\mathbb{C}$, $\mathbb{K}=\mathbb{R}$, $\mathbb{K}=\mathbb{Q}$.

6.16.* Demostrar que un endomorfismo en un espacio vectorial real de dimensión mayor o igual a dos, siempre admite un plano invariante.

6.17.* Demostrar que toda matriz cuadrada es semejante a su transpuesta.

6.18. Establecer un teorema para la clasificación de los endomorfismos f de un espacio vectorial real que verifiquen la ecuación:

$$f^3 = id$$

CAPITULO IV

GEOMETRIA AFIN

La estructura vectorial proporciona un modelo válido para representar algebraicamente nuestra idea intuitiva de recta, plano o espacio, con una salvedad, pues el vector cero desempeña en esta geometría un papel especial que lo distingue de los demás. Por ejemplo, todos los subespacios vectoriales están «obligados» a pasar por el origen, y todas las transformaciones de esta geometría dejan invariablemente fijo el vector nulo.

La geometría afín constituye en este sentido una especie de homogenización de la geometría vectorial, eliminando por una parte los puntos especiales, y conservando por otro lado las ventajas algebraicas de la estructura vectorial.

LECCION 7

ELEMENTOS DE LA GEOMETRIA AFIN

El objetivo de la lección es el de presentar los elementos básicos con los que se trabaja en la categoría de los espacios afines, y determinar sus relaciones. Este estudio se concreta en los siguientes puntos: espacio afín, subespacios, y aplicaciones afines. En un epígrafe final, se muestra cómo es posible reconstruir los subespacios e isomorfismos afines a partir de la familia de rectas.

§ 1. ESTRUCTURA AFIN

Para introducir la noción de estructura afín en un conjunto, estableceremos previamente una formalización del proceso intuitivo por el que habitualmente se llega al concepto de vector libre en geometría elemental.

Definición 1.1. Relación de equipolencia

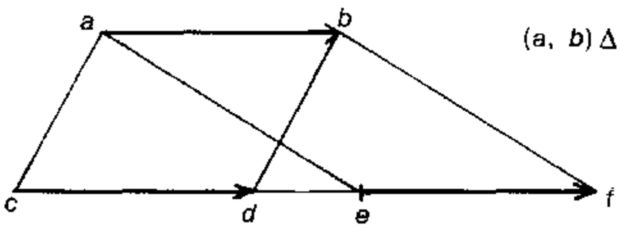
Sea X *un conjunto. Una relación de equipolencia es una relación de equivalencia* Δ *en el producto cartesiano* $X \times X$ *que verifica las siguientes propiedades:*

i) Si a, b, c son tres puntos cualesquiera de X, existe un único punto $d \in X$ tal que $(a, b)\,\Delta\,(c, d)$.

ii) Si a, b, c y d son cuatro puntos de X y se verifica la relación $(a, b)\,\Delta\,(c, d)$, entonces también se verifica $(a, c)\,\Delta\,(b, d)$.

Ejemplos 1.2.

1. En la geometría elemental del plano o el espacio, se suele introducir la equipolencia de pares de puntos (también llamados segmentos orientados, o vectores fijos) mediante construcciones con paralelogramos (ver figura). Es fácil comprobar que esta definición cumple las condiciones exigidas en la definición 1.1.



$(a,\ b)\,\Delta\,(c,\ d)\,\Delta\,(e,\ f)$

2. Si V es espacio vectorial, se define la siguiente relación en

$$(u,\ v)\,\Delta\,(u',\ v') \Leftrightarrow v-u=v'-u'$$

Puede verificarse sin dificultad que se trata de una relación de equipolencia.

3. Si $\vec{X}$ es un subespacio de un espacio vectorial V, y $a \in V-\vec{X}$, llamamos X a la clase $X=a+\vec{X}=\{a+\vec{v} : \vec{v} \in \vec{X}\}$ del cociente $V/\vec{X}$. En XxX se define la siguiente relación:

$$(x,\ y)\,\Delta\,(x',\ y') \Leftrightarrow y-x=y'-x'$$

Se trata también de una relación de equipolencia. Probaremos como indicación la propiedad i) de 1.1:

Sean $x=a+\vec{u}$, $y=a+\vec{v}$, $z=a+\vec{w}$ tres elementos de X ($\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w} \in \vec{X}$). Si $(x, y)\,\Delta\,(z, p)$, es $a+v-(a+u)=p-(a+w)$, por tanto $p=a+ +v-u+w \in X$, y queda unívocamente determinado por la condición anterior.

4. En este ejemplo X es un conjunto finito $\{a,\ b,\ c,\ d\}$. La relación de equivalencia Δ en XxX viene dada por:

$(a,\ b)\,\Delta\,(c,\ d)\,\Delta\,(b,\ a)\,\Delta\,(d,\ c)$;

$(a,\ c)\,\Delta\,(b,\ d)\,\Delta\,(c,\ a)\,\Delta\,(d,\ b)$; $(a,\ d)\,\Delta\,(b,\ c)\,\Delta\,(d,\ a)\,\Delta\,(c,\ b)$;

$(a,\ a)\,\Delta\,(b,\ b)\,\Delta\,(c,\ c)\,\Delta\,(d,\ d)$.

Una vez más se trata de una equipolencia.

Proposición 1.3. Propiedades

Sea Δ una relación de equipolencia de pares de puntos del conjunto X. *Denotando por* $\overline{xy}$ *la clase de equivalencia de* (x, y), *y por* $\overline{X}=X\times X/\Delta$ *al espacio cociente, se tiene:*

a) Cualquiera que sean los puntos x, y *de* X *es* $\overline{xx}=\overline{yy}$.

b) $\overline{X}$ *admite una estructura natural de grupo abeliano mediante una operación + que verifica la relación:*

$$\overline{xy}+\overline{yz}=\overline{xz} \quad \textit{(relación de Chasles)}$$

Para todo x, y, z $\in$ X.

c) Para todo a $\in$ X *la aplicación* Δ_a. $X\ni x \to \overline{ax} \in \overline{X}$ *es biyectiva.*

Demostración

a) La propiedad reflexiva asegura que $(x, y)\,\Delta\,(x, y)$. Se aplica entonces la propiedad ii) de 1.1.

b) Sean $u=\overline{xy}$, $u'=\overline{x'y'}$ dos elementos de $\overline{X}$. Existe en virtud de i) de 1.1, un único $z \in X$ tal que $u'=\overline{x'y'}=\overline{yz}$. Imponiendo a la operación + la relación de Chasles, la suma de u y u' debería ser:

$$u+u'=\overline{xy}+\overline{x'y'}=\overline{xy}+\overline{yz}=\overline{xz}$$

Veamos que el resultado no depende de los representantes tomados:

Si $u=\overline{xy}=\overline{ab}$, $u'=\overline{yz}=\overline{bc}$, aplicando ii) de 1.1 se obtienen $\overline{xa}=\overline{yb}$, $\overline{yb}=\overline{zc}$ y en particular $\overline{xa}=\overline{zc}$. Nuevamente por ii) de 1.1 queda $\overline{xz}=\overline{ac}$ como queríamos probar.

Puede demostrarse fácilmente que la operación + así definida da estructura de grupo abeliano al conjunto $\overline{X}$, con elemento neutro $o=\overline{xx}$, y el opuesto de $\overline{xy}$ es $\overline{yx}$ (para todo $x, y \in X$).

c) Es consecuencia de la existencia y unicidad exigidas en la condición i) de 1.1.

En efecto, dado $\overline{cd} \in \overline{X}$, existe $x \in X$ tal que $\overline{ax} = \overline{cd}$, por lo que Δ_a es suprayectiva. Para ver que es inyectiva, si $\Delta_a(x) = \Delta_a(y)$ es $\overline{ax} = \overline{ay}$, es decir $(a, x) \Delta (a, y)$ y por tanto $x = y$. □

El grupo de los vectores libres del plano o el espacio tiene una conocida estructura de espacio vectorial. Esto, y las propiedades 1.3 sugieren la siguiente definición general:

Definición 1.4. Espacio afín

Sea X *un conjunto,* $\overline{X}$ *un espacio vectorial, y una aplicación:*

$$\Delta : XxX \ni (a, b) \rightarrow \overrightarrow{ab} \in \overline{X}$$

verificando las propiedades:

Δ1) Para todo $a \in X$, *la aplicación* $\Delta_a : X \ni x \rightarrow \overrightarrow{ax} \in \overline{X}$ *es biyectiva.*

Δ2) Para todo a, b, $c \in X$ *se tiene la identidad:*

$$\overrightarrow{ab} + \overrightarrow{bc} = \overrightarrow{ac} \text{ (relación de Chasles)}$$

Se dice entonces que $X = (X, \overline{X}, \Delta)$ *es un espacio afín.*

Al espacio vectorial $\overline{X}$ *se le denomina dirección del espacio afín* X, *y al conjunto* X, *conjunto de puntos del espacio.*

A la dimensión de X, *se le denomina dimensión del espacio afín. No habiendo lugar a confusión, para denotar a un espacio afín se podrá omitir una mención explícita a* Δ *e incluso a* $\overline{X}$.

Observaciones 1.5.

1. Si Δ es una relación de equipolencia de pares de puntos en un conjunto X, una estructura vectorial para el grupo abeliano $(\overline{X}, +)$, da lugar en virtud de las propiedades 1.3 al espacio afín $X = (X, \overline{X}, \Delta)$, siendo ahora Δ la aplicación:

$$\Delta : XxX \ni (a, b) \rightarrow \overline{ab} \in \overline{X}$$

2. Recíprocamente, a partir de un espacio afín $X=(X, \vec{X}, \Delta)$ se construye una relación de equipolencia (que denotamos también por Δ) con el siguiente criterio:

$$(a, b)\,\Delta\,(c, d) \Leftrightarrow \overrightarrow{ab}=\overrightarrow{cd}$$

y la aplicación $\overline{X} \in \overline{ab} \to \overrightarrow{ab} \in \vec{X}$ es un isomorfismo entre el grupo $(\overline{X}, +)$ y el grupo aditivo $(\vec{X}, +)$ del espacio vectorial $\vec{X}$, que permite dar estructura vectorial al grupo $(\overline{X}, +)$, de forma que el isomorfismo anterior sea también lineal.

3. Nótese que en un espacio afín X, la relación de Chasles permite escribir: $\overrightarrow{aa}+\overrightarrow{aa}=\overrightarrow{aa}$ para todo $a \in X$, y en consecuencia $\overrightarrow{aa}=0$.

Por otra parte la identidad $\overrightarrow{ab}+\overrightarrow{ba}=\overrightarrow{aa}$ para todo $a, b \in X$ demuestra que $\overrightarrow{ab}=-\overrightarrow{ba}$.

Ejemplos 1.6.

1. Un espacio vectorial V puede considerarse también un espacio afín por medio de la aplicación:

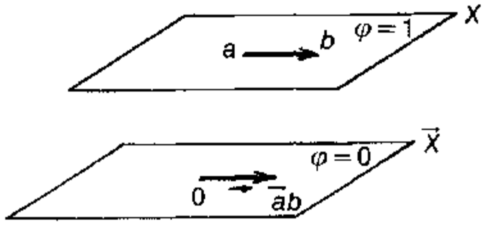
$$\Delta : VxV \ni (u, v) \to v-u \in V$$

Obsérvese que la relación de equipolencia inducida en VxV por Δ coincide con la dada en el ejemplo 2 de 1.2.

2. Sea V espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{K}$, y $\varphi : V \to \mathbb{K}$ una forma lineal no nula. Denotando por $\vec{X}=\mathrm{Ker}\,(\varphi)=\{\vec{v} \in V : \varphi(\vec{v})=0\}$ y $X=\{x \in V : \varphi(x)=1\}$, la aplicación:

$$\Delta : XxX \ni (a, b) \to b-a \in \vec{X}$$

dota a X de estructura de espacio afín sobre el espacio vectorial $\vec{X}$. Denotaremos a este espacio como (V, φ)



3. Considérese el modelo analítico de espacio vectorial sobre el cuerpo $\mathbb{K}$

$$\hat{V}_n(\mathbb{K}) = \left\{ \begin{pmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} : x_i \in \mathbb{K} \right\}$$

y la forma lineal

$$\varphi : \hat{V}_n(\mathbb{K}) \ni \begin{pmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \to x_0 \in \mathbb{K}.$$

El conjunto de puntos del espacio afín $(\hat{V}_n(\mathbb{K}), \varphi)$ es:

$$A_n(\mathbb{K}) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} : x_i \in \mathbb{K} \right\}$$ y su dirección es

$$\vec{A}_n(\mathbb{K}) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} : x_i \in \mathbb{K} \right\}$$

si $a = \begin{pmatrix} 1 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 1 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ entonces $\overrightarrow{ab} = \begin{pmatrix} 0 \\ b_1 - a_1 \\ \vdots \\ b_n - a_n \end{pmatrix}$

Se denomina a $A_n(\mathbb{K})$ modelo analítico cartesiano de dimensión n.

4. La forma lineal

$$\varphi : \hat{V}_n(\mathbb{K}) \ni \begin{pmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \to x_0 + \ldots + x_n \in \mathbb{K},$$

permite definir el espacio afín $(\hat{V}_n(\mathbb{K}), \varphi)$ cuyo conjunto de puntos es

$$B_n(\mathbb{K}) = \left\{ \begin{pmatrix} x_0 \\ \\ x_n \end{pmatrix} \in \hat{V}_n(\mathbb{K}) : x_0 + \ldots + x_n = 1 \right\}$$

y con dirección

$$\vec{B}_n(\mathbb{K}) = \left\{ \begin{pmatrix} x_0 \\ \\ x_n \end{pmatrix} \in \hat{V}_n(\mathbb{K}) : x_0 + \ldots + x_n = 0 \right\}$$

Se denomina a este espacio modelo analítico baricéntrico de espacio afín de dimensión n.

Proposición 1.7. Suma de punto y vector

Sea $\mathrm{X} = (\mathrm{X}, \vec{\mathrm{X}}, \Delta)$ *espacio afín,* $\mathrm{a} \in \mathrm{X}$, $\vec{\mathrm{v}} \in \vec{\mathrm{X}}$:

i) Existe un único punto x *tal que* $\overrightarrow{\mathrm{ax}} = \vec{v}$. *Denotamos al punto* x *por:*

$$\mathrm{x} = \mathrm{a} + \vec{\mathrm{v}} \in \mathrm{X}$$

ii) La aplicación $\Sigma : \mathrm{X} \times \vec{\mathrm{X}} \ni (\mathrm{a}, \vec{\mathrm{v}}) \to \mathrm{a} + \vec{\mathrm{v}} \in \mathrm{X}$ *verifica las propiedades:*

Σ1) $\Sigma_{\mathrm{a}} : \vec{\mathrm{X}} \ni \vec{\mathrm{v}} \to \mathrm{a} + \vec{\mathrm{v}} \in \mathrm{X}$ *es biyectiva para todo* $\mathrm{a} \in \mathrm{X}$.

Σ2) $(\mathrm{a} + \vec{\mathrm{v}}) + \vec{\mathrm{w}} = \mathrm{a} + (\vec{\mathrm{v}} + \vec{\mathrm{w}})$ *para todo* $\mathrm{a} \in \mathrm{X}$ *y todo* $\vec{\mathrm{v}}, \vec{\mathrm{w}} \in \vec{\mathrm{X}}$.

iii) El conjunto X, *el espacio vectorial* $\vec{\mathrm{X}}$, *y una aplicación*

$\Sigma : Xx\vec{X} \rightarrow X$ verificando las propiedades *Σ1) y Σ2) de ii) determinan un unico espacio afín* X *sobre el espacio vectorial* $\vec{X}$ *por medio de la equivalencia:*

$$\overrightarrow{ax} = \vec{v} \Leftrightarrow x = a + \vec{v}, \textit{ para todo } a \in X \textit{ y todo } \vec{v} \in \vec{X}$$

Demostración

La afirmación i) y la propiedad Σ1) son consecuencia de la biyectividad de la aplicación $\Delta_a : X \rightarrow \vec{X}$ (propiedad Δ1)), ya que $\Sigma_a = \Delta_a^{-1}$. Nótese por otra parte que si a, x son puntos de X, y $\vec{v} \in \vec{X}$, se verifica la equivalencia:

$$a + \vec{v} = x \Leftrightarrow \overrightarrow{ax} = \vec{v}, \text{ y la identidad } a + \overrightarrow{ax} = x$$

La propiedad Σ2) es consecuencia inmediata de la relación de Chasles Δ2). En efecto, si:

$$a + \vec{v} = x, \text{ y } x + \vec{w} = y \text{ se tiene } \overrightarrow{ax} = \vec{v}, \ \overrightarrow{xy} = \vec{w}.$$

Por tanto

$$(a + \vec{v}) + \vec{w} = x + \overrightarrow{xy} = y = a + \overrightarrow{ay} = a + (\overrightarrow{ax} + \overrightarrow{xy}) = a + (\vec{v} + \vec{w}).$$

La afirmación iii) es ya evidente. □

Observaciones 1.8.

1. En el espacio afín canónico definido por un espacio vectorial, la suma de punto y vector coincide con la suma usual de vectores. (Véase ejemplo 1 de 1.6).

2. En el modelo de espacio afín (V, φ) introducido en el ejemplo 2 de 1.6, la suma vectorial en V, induce la suma de punto y vector en (V, φ).

3. Si el grupo abeliano $(\vec{X}, +)$ de un espacio vectorial $\vec{X}$ actúa fiel y transitivamente sobre el conjunto X con la notación:

$$Xx\vec{X} \ni (a, \vec{v}) \rightarrow a + \vec{v} \in X$$

queda automáticamente inducida una estructura de espacio afín en X, con dirección $\vec{X}$ mediante la condición:

$$\Sigma(a, v)=a+v \text{ para todo } a \in X \text{ y todo } \vec{v} \in \vec{X}$$

En efecto, la propiedad $\Sigma 2)$ es consecuencia de la definición de actuación. La transitividad de la actuación implica que la aplicación $\Sigma_a : \vec{X} \ni \vec{v} \to a+v \in X$ es suprayectiva. Finalmente, si $a+\vec{v}=a+\vec{w}$ entonces es $a+(\vec{v}-\vec{w})=a$, y por tanto para todo punto $x=a+\vec{u}$ se verifica:

$$x+(\vec{v}-\vec{w})=a+\vec{u}+(\vec{v}-\vec{w})=a+(\vec{v}-\vec{w}+\vec{u})=(a+(\vec{v}-\vec{w}))+\vec{u}=a+\vec{u}=x.$$

Por ser la actuación fiel, se concluye que $v=w$, y Σ_a es inyectiva. Aplíquese ahora iii) de la propiedad anterior.

Como consecuencia de esta última observación, puede establecerse otra definición de espacio afín equivalente a la dada en 1.4:

Definición 1.9. Segunda definición de espacio afín

Un espacio afín es una terna $(X, \vec{X}, \Sigma)$ *donde:*

— X *es un conjunto, denominado conjunto de puntos.*

— $\vec{X}$ *es un espacio vectorial.*

— $\Sigma : X \text{x} \vec{X} \ni (a, \vec{v}) \to a+\vec{v} \in X$ *es una actuación fiel y transitiva del grupo abeliano* $(\vec{X}, +)$ *sobre el conjunto de puntos* X.

La relación entre ambas definiciones se concreta en la siguiente equivalencia:

$$a+\vec{v}=x \Leftrightarrow \overrightarrow{ax}=\vec{v}$$

§ 2. SUBESPACIOS DE UN ESPACIO AFIN

En este epígrafe $X=(X, \vec{X}, \Delta)$ denotará a un espacio afín. Llamaremos subespacios afines de X a aquellos subconjuntos de X que «heredan» la estructura afín del espacio ambiente. De forma más precisa:

Definición 2.1. Subespacio afín

Sea M *un subconjunto del espacio afín* X*, y* $\vec{M}$ *un subespacio vectorial de* $\vec{X}$*. Se dice que* (M, $\vec{M}$) *es un subespacio afín de* X *si se verifica la siguiente condición.*

La actuación Σ *de* ($\vec{X}$, +) *sobre* X *se puede restringir a una actuación transitiva de* ($\vec{M}$, +) *sobre* M *(actuación que denotamos por el mismo nombre* Σ*).*

Esta condición puede enunciarse también mediante las siguientes dos propiedades:

S1) Si $a \in M$ *y* $\vec{v} \in \vec{M}$ *entonces* $a + \vec{v} \in M$

S2) Si $a, b \in M$ *entonces* $\overrightarrow{ab} \in \vec{M}$

Obsérvese que M es un espacio afín sobre el espacio vectorial $\vec{M}$.

La siguiente proposición tiene por objeto probar que un subespacio afín queda univocamente determinado por su conjunto de puntos, o también por uno de sus puntos, y su dirección:

Proposición 2.2. Determinación de subespacios afines

Sea M *un subconjunto de un espacio afín* X*; si* $a \in M$ *se denota:*

$$\Delta_a(M) = \{\overrightarrow{ax} : x \in M\}$$

En estas condiciones se tiene:

i) si M *es subespacio vectorial de* X *tal que* (M, $\vec{M}$) *es subespacio afín, entonces* $\vec{M} = \Delta_a(M)$ *para todo* $a \in M$;

ii) si existe $a \in M$ *tal que* $\Delta_a(M) = \vec{M}$ *es subespacio vectorial de* X, *entonces* (M, $\vec{M}$) *es subespacio afín de* X.

Demostración

i) Si (M, $\vec{M}$) es subespacio afín de X, la propiedad S1) prueba que $\vec{M} \subset \Delta_a(M)$, pues si $\vec{v} \in \vec{M}$, $x = a + \vec{v} \in M$ y $\vec{v} = \overrightarrow{ax} \in \Delta_a(M)$. Por otra parte la propiedad S2) prueba trivialmente el contenido $\Delta_a(M) \subset \vec{M}$.

ii) Probemos en las hipótesis ii) que $(M, \Delta_a(M))$ verifica las propiedades S1) y S2):

S1) Si $x \in M$ y $\vec{v} \in \Delta_a(M)$ entonces $\vec{v} = \overrightarrow{ay}$ para cierto punto $y \in M$, y la suma $\overrightarrow{ax} + \overrightarrow{ay}$ está en $\Delta_a(M)$. Existe pues $z \in M$ que verifica:

$$\overrightarrow{az} = \overrightarrow{ax} + \overrightarrow{ay}$$

Así, $x + \vec{v} = x + \overrightarrow{ay} = a + (\overrightarrow{ax} + \overrightarrow{ay}) = a + \overrightarrow{az} = z \in M$.

S2) Si $x, y \in M$, por la relación de Chasles se tiene:

$$\overrightarrow{xy} = \overrightarrow{ay} - \overrightarrow{ax} \in \Delta_a(M), \text{ ya que } \overrightarrow{ax}, \overrightarrow{ay} \in \Delta_a(M) \text{ y } \Delta_a(M)$$

es subespacio vectorial. □

Las siguientes afirmaciones se deducen ahora de forma inmediata:

Proposición 2.3. Propiedades

1. Si $(M, \vec{M})$ y $(M, \vec{M}')$ son subespacios afines de X, entonces $\vec{M} = \vec{M}'$. En consecuencia un subespacio afín queda unívocamente determinado por su conjunto de puntos.

Si M es subespacio afín de X escribiremos $M < X$, y se denotará siempre por $\vec{M}$ a su dirección.

2. Un subespacio afín M de X se puede escribir de la forma:

$$M = a + \vec{M} (= \{a + \vec{v} : \vec{v} \in \vec{M}\}) \text{ para todo } a \in M$$

3. Recíprocamente, si U es subespacio vectorial de $\vec{X}$ y $a \in X$, entonces $M = a + U$ es subespacio afín de X (y $\vec{M} = U$).

4. Dos subespacios afines coinciden si tienen la misma dirección, y un punto común.

5. Un punto $a \in X$ constituye por sí mismo un subespacio afín con dirección el subespacio vectorial nulo.

Definición 2.4. Dimensión

Llamaremos dimensión r *de un subespacio afín* M *de* X *a la dimensión de su dirección* $\vec{M}$ *(si es finita).*

El conjunto vacío, ϕ será considerado por convenio un subespacio afín (sin dirección), y se le asocia dimensión igual a -1, *se llaman rectas afines de* X *a los subespacios de dimensión* 1, *planos a los de dimensión* 2, *y si dim* X$=$n, *se llamarán hiperplanos a los subespacios afines de dimensión* n$-$1.

Nótese que los puntos son subespacios afines de dimensión nula.

Ejemplos 2.5.

1. En el ejemplo 1 de 1.6 se probó que un espacio vectorial V es un espacio afín. Los subespacios afines de V, son todos de la forma $v+U$ donde $v \in V$ y U es subespacio vectorial de V. Así, la familia de subespacios con dirección U está formada por los elementos del conjunto V/U.

2. Considérese el modelo de espacio afín (V, φ) (φ forma lineal no nula de V) introducido en el ejemplo 2 de 1.6, donde el conjunto de puntos es $X=\{x \in V : \varphi(x)=1\}$ y su dirección $\vec{X}=\ker(\varphi)$.

Si $\hat{M}$ es subespacio vectorial de V no contenido en $\vec{X}$, entonces $\hat{M} \cap X=M$ es un subespacio afín no vacío de X, con dirección $\hat{M} \cap \vec{X}=\vec{M}$.

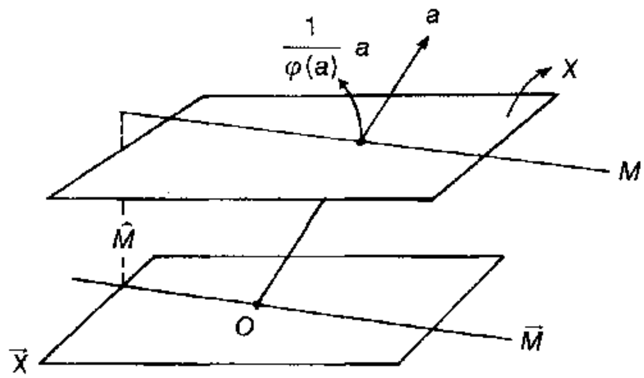
En efecto, como $\hat{M} \not\subset \vec{X}$, existe $a \in \hat{M}$ con $\varphi(\mathrm{a})\neq 0$, y $(1/\varphi(\mathrm{a}))\,a \in \hat{M} \cap X=M$ (ver figura).

Es fácil comprobar ahora las propiedades S1) y S2) para $(M, \vec{M})$; ya que M y $\vec{M}$ son subconjuntos del subespacio vectorial $\hat{M}$, se tiene:

— Si $a \in M$, $\vec{v} \in \vec{M}$ es $a+\vec{v} \in M$, y $\varphi(a+\vec{v})=\varphi(a)+\varphi(\vec{v})=1+0=$ $=1$. Así $a+\vec{v} \in M$.

— Si a $b \in M$ entonces $\overrightarrow{ab}=b-a \in M$, y $\varphi(\overrightarrow{ab})=\varphi(b-a)=\varphi(b)-$ $-\varphi(a)=1-1=0$, y $\overrightarrow{ab} \in \vec{M}$.

Nótese que si $\hat{M}$ tiene dimensión finita, entonces $\dim \hat{M} = \dim M + 1$, ya que M es el espacio afín $(\hat{M}, \varphi/\hat{M})$.



3. Considérese el modelo analítico cartesiano $A_n = A_n(\mathbb{K})$ introducido en el ejemplo 3 de 1.6.

Si M es subespacio afín de A_n con dimensión r, su dirección $\vec{M}$ es subespacio vectorial de $\vec{A}_n$ que admite una base formada por r vectores de la forma:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ v_{11} \\ \vdots \\ v_{1n} \end{pmatrix}, \ \ldots, \ v_r = \begin{pmatrix} 0 \\ v_{r1} \\ \vdots \\ v_{rn} \end{pmatrix} \quad \text{Sea } a = \begin{pmatrix} 1 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \in M,$$

$$\text{los puntos } x = \begin{pmatrix} 1 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad de \ M = a + \vec{M}$$

verifican:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} + t_1 \begin{pmatrix} 0 \\ v_{11} \\ \vdots \\ v_{1n} \end{pmatrix} + \ldots + t_r \begin{pmatrix} 0 \\ v_{r1} \\ \vdots \\ v_{rn} \end{pmatrix} \quad \text{para } t_i \in \mathbb{K}$$

y se tienen las ecuaciones:
$$\left.\begin{array}{l} x_1 = a_1 + v_{11}t_1 + \ldots + v_{r1}t_r \\ x_2 = a_2 + v_{12}t_1 + \ldots + v_{r2}t_r \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n = a_n + v_{1n}t_1 + \ldots + v_{rn}t_r \end{array}\right\}$$

que se denominan ecuaciones paramétricas de M. Nótese que el rango de la matriz (v_{ij}) es igual a r.

Estudiaremos ahora las operaciones habituales de suma e intersección de subespacios afines:

Proposición 2.6. Intersección de subespacios

Si $(M_i)_{i\in I}$ *es una familia de subespacios afines de* X *y* $\bigcap_{i\in I} M_i \neq \phi$, *entonces* $\bigcap_{i\in I} M$ *es subespacio afín de* X *con dirección* $\bigcap_{i\in I} \vec{M}_i$.

Demostración

Sea $a \in \bigcap_{i\in I} M_i$ por la propiedad 2 de 2.3 podemos escribir $M_i = a +$ $+\vec{M}_i$ para cada $i \in I$, y se verifican trivialmente las igualdades:

$$\bigcap_{i\in I} M_i = \bigcap_{i\in I} (a + \vec{M}_i) = a + \bigcap_{i\in I} \vec{M}_i$$

y $\bigcap_{i\in I} M_i$ es el subespacio vectorial dirección de $\bigcap_{i\in J} \bigcap_{i\in I} \vec{M}_i$ (véase propiedad 3 de 2.3). □

Nótese que por convenio, si $\bigcap_{i\in I} M_i = \phi$ entonces también es subespacio afín.

Ejemplo 2.7.

Considérese nuevamente el modelo analítico cartesiano $A_n = A_n(\mathbb{K})$.

El conjunto de puntos

$$x = \begin{pmatrix} 1 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in A_n$$

que verifican una ecuación del tipo: $\lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_n x_n = \lambda$, con algun λ_i no nulo, constituye un hiperplano afín H que tiene por dirección $\vec{H}$, el subespacio de los vectores

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ x_1 \\ \\ x_n \end{pmatrix} \in \vec{A}_n \text{ que verifican } \lambda x_1 + \ldots + \lambda x_n = 0,$$

pues como fácilmente se vé es $H = a + \vec{H}$ para $a \in H$.

Análogamente, un sistema compatible de r ecuaciones lineales independientes:

$$\left.\begin{array}{c} \lambda_{11} x_1 + \ldots + \lambda_{1n} x_n = \lambda_1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \lambda_{r1} x_1 + \ldots + \lambda_{rn} x_n = \lambda_r \end{array}\right\} \qquad (2.7.1)$$

representa el subespacio afín M de A_n obtenido como intersección de los hiperplanos definidos por cada una de las ecuaciones. Aplicando la proposición anterior, $\vec{M}$ es la intersección de las direcciones de cada uno de los hiperplanos, y tiene, por tanto, ecuaciones (implícitas):

$$\left.\begin{array}{c} \lambda_{11} x_1 + \ldots + \lambda_{1n} x_n = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_{r1} x_1 + \ldots + \lambda_{rn} x_n = 0 \end{array}\right\} \qquad (2.7.2)$$

Nótese que dim M = dim $\vec{M} - n - r$.

Recíprocamente, es fácil ver, que todo subespacio afín M de A_n con dimensión $n-r$, admite ecuaciones implícitas del tipo (2.7.1), y su dirección $\vec{M}$ las ecuaciones (2.7.2) (Elimínense los parámetros t_i en el ejemplo 3 de 2.5).

Proposición 2.8. Retículo de subespacios

Sea $\mathscr{A}(X)$ *la familia de subespacios afines de* X, *incluido el conjunto vacío.*

Si M, N $\in \mathscr{A}(X)$ *se define la suma:*

$$M+N=\bigcap\{L\in\mathscr{A}(X): M\cup N\subset L\}$$

Entonces:

i) M+N *es el subespacio afín más pequeño que contiene a* M *y a* N, *es decir, si* S *es subespacio afín tal que* S $\supset$ M *y* S $\supset$ N *entonces* S $\supset$ M+N.

ii) $(\mathscr{A}(X), +, \cap)$ *es un retículo (no distributivo).*

iii) Si M, N $\in \mathscr{A}(X)$, a $\in$ M *y* b $\in$ N, *entonces* $\overrightarrow{M+N}=\vec{M}+\vec{N}+\langle\vec{ab}\rangle$ *donde* $\langle\vec{ab}\rangle$ *es el subespacio vectorial generado por el vector* $\vec{ab}$.

Demostración

i) Por la proposición 2.6, $M+N$ es un subespacio afín; la propiedad indicada se sigue inmediatamente de la definición de $M+N$.

ii) Si se dan por válidas las propiedades reticulares de la intersección conjuntista (asociativa e idempotente), el enunciado ii) se reduce básicamente a comprobar para $M, N, P \in \mathscr{A}(X)$ las siguientes relaciones:

a) $M\subset N \Leftrightarrow M+N=N$.

b) $M+N=N+M$.

c) $(M+N)+P=M+(N+P)$.

Sólo la última afirmación no es absolutamente trivial:

Los subespacios M, N, P están claramente contenidos en el subespacio $M+(N+P)$, por i) se concluye que $M+N\subset M+(N+P)$ y que $(M+N)+P\subset M+(N+P)$. La otra inclusión se prueba de forma análoga.

iii) En primer lugar, de la inclusión $M \subset M+N$ se deduce que $\Delta_a(M) \subset \Delta_a(M+N)$ es decir, $\vec{M} \subset \overrightarrow{M+N}$.

Análogamente se ve que $\vec{N} \subset \overrightarrow{M+N}$. Por último, como $a \in M \subset M+N$ y $b \in N \subset M+N$ se tiene que $\overrightarrow{ab} \in \overrightarrow{M+N}$, y queda probado el contenido:

$$\vec{M}+\vec{N}+\langle\overrightarrow{ab}\rangle \subset \overrightarrow{M+N}$$

Por otra parte se tiene:

$$M=a+\vec{M} \subset a+(\vec{M}+\vec{N}+\langle\overrightarrow{ab}\rangle)$$

y además:

$$N=b+\vec{N}=(a+\overrightarrow{ab})+\vec{N} \subset a+(\vec{N}+\langle\overrightarrow{ab}\rangle) \subset a+(\vec{M}+\vec{N}+\langle\overrightarrow{ab}\rangle)$$

Por i), es $M+N \subset a+(\vec{M}+\vec{N}+\langle\overrightarrow{ab}\rangle)$ y aplicando Δ_a los dos miembros, se obtiene la otra inclusión:

$$\overrightarrow{M+N} \subset \vec{M}+\vec{N}+\langle\overrightarrow{ab}\rangle. \square$$

Nota 2.9. Subespacio generado por un sistema de puntos

En virtud de la propiedad asociativa para la suma de subespacios, no existe ambigüedad en la expresión:

$$A_1+\dots+A_r, \quad A_i \in \mathscr{A}(X) \quad i=1, \dots, r$$

y denota al subespacio más pequeño que contiene a la unión $A_1 \cup \dots\dots \cup A_r$. En particular si $A_i=\{a_i\}$, $a_1+\dots+a_r$ es el subespacio más pequeño que contiene el conjunto $\{a_1, \dots, a_r\}$, y se denomina subespacio generado por el sistema de puntos $(a_1, \dots, a_r)$. Este subespacio también se denota por $\langle a_1, \dots, a_r\rangle$.

Por ejemplo, el subespacio generado por dos puntos distintos a, $b \in X$, es:

$$\langle a, b\rangle = a+b=a+\langle\overrightarrow{ab}\rangle$$

En particular, se deduce que por dos puntos distintos «pasa» una única recta.

Los resultados de la proposición 2.8 muestran que el paso de un subespacio afín a su dirección no respeta totalmente las estructuras de retículo. La causa es la existencia de subespacios afines disjuntos. Esto se destaca aún más en las siguientes fórmulas:

Proposición 2.10. Fórmulas de dimensión

Sean M *y* N *subespacios afines de* X:

i) Si $M \cap N \neq \phi$ *entonces* $\dim (M+N) = \dim M + \dim N - \dim (M \cap N)$.

ii) Si $M \cap N = \phi$ *entonces* $\dim (M+N) = \dim M + \dim N - \dim (\vec{M} \cap \vec{N}) + 1$.

Demostración

En ambos casos se tiene:

$$\dim (M+N) = \dim (\overrightarrow{M+N}) = \dim (\vec{M} + \vec{N} + \langle \overrightarrow{ab} \rangle)$$

siendo $a \in M$ y $b \in N$.

Si $M \cap N \neq \phi$, podemos tomar $a = b \in M \cap N$, y entonces $\langle \overrightarrow{ab} \rangle = \{0\}$. Así se tiene:

$$\dim (M+N) = \dim (\vec{M} + \vec{N}) = \dim \vec{M} + \dim \vec{N} - \dim (\vec{M} \cap \vec{N}) =$$
$$= \dim M + \dim N - \dim (M \cap N)$$

La última igualdad es consecutiva de 2.6.

Si M y N son disjuntos, es contradictorio suponer que $\overrightarrow{ab} \in \overrightarrow{M+N}$ ya que entonces podríamos escribir $\overrightarrow{ab}$ de la forma:

$$\overrightarrow{ab} = \overrightarrow{ax} + \overrightarrow{yb} \quad \text{con } x \in M,\ y \in N$$

y entonces $\overrightarrow{xy} = \overrightarrow{xa} + \overrightarrow{ab} + \overrightarrow{by} = 0$ lo que implica $x = y \in M \cap N$.

Así pues se tiene:

$$\dim (M+N) = \dim (\overrightarrow{M+N}) = \dim (\vec{M}+\vec{N}+\langle\overrightarrow{ab}\rangle) = \dim (\vec{M}+\vec{N})+1 =$$
$$= \dim M + \dim N - \dim (\vec{M} \cap \vec{N}) + 1. \quad \square$$

Observaciones 2.11.

Con los resultados anteriores puede hacerse ya un estudio detallado de las posiciones relativas entre dos subespacios afines:

Si M y N son subespacios afines de X, siendo $n = \dim X$, $p = \dim M$, $q = \dim N$, $r = \dim (\vec{M} \cap \vec{N})$, y supuesto $p \leqslant q$ se verifica:

$$0 \leqslant r \leqslant p \leqslant q \leqslant \dim (M+N) \leqslant n$$

Si M y N se cortan, entonces la cadena anterior de desigualdades se transforma en

$$0 \leqslant r \leqslant p \leqslant q \leqslant p+q-r \leqslant n$$

que es equivalente a la condición:

$$\max \{0, p+q-n\} \leqslant r \leqslant p$$

Si M y N son disjuntos, se deduce de forma análoga que la cadena de desigualdades es:

$$0 \leqslant r \leqslant p \leqslant q \leqslant p+q-r+1 \leqslant n$$

y por tanto, las condiciones sobre r son:

$$\max \{0, p+q-n+1\} \leqslant r \leqslant p$$

Los subespacios M y N se dicen paralelos ($M//N$), si r toma el máximo valor posible p, es decir, si $\vec{M} \subset \vec{N}$. En particular esto se verifica si $M \subset N$. Nótese que si $M//N$ y $M \not\subset N$ entonces $M \cap N = \phi$.

En el ejercicio 7.6 se prueba que todas las posiciones entre dos subespacios aquí descritas son posibles.

Ejemplo 2.12.

Dos rectas distintas R y S de un plano afín X si no se cortan, son necesariamente paralelas, ya que si no fuera así, se tendría $\vec{R} \cap \vec{S} = \{0\}$, y por la fórmula de dimensiones:

$$\dim (R+S) = \dim R + \dim S - \dim (\vec{R} \cap \vec{S}) + 1 = 1+1+0+1 = 3$$

Lo cual es claramente contradictorio.

Estableceremos por último una caracterización no trivial de los subespacios de un espacio afín.

Proposición 2.13.

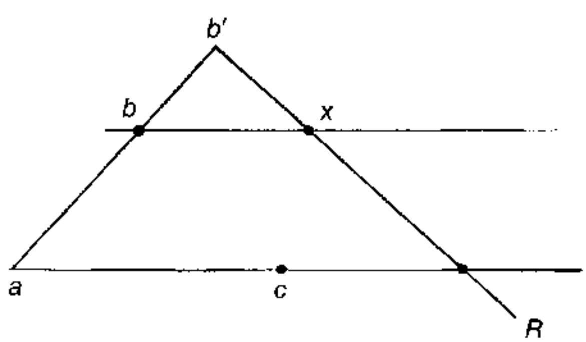
Sea M *un subconjunto (con más de un punto) de un espacio afín* X. *Supóngase que el cuerpo* $\mathbb{K}$ *posee más de dos elementos.*

Si M *contiene a cada recta que pasa por dos cualesquiera de sus puntos, entonces* M *es subespacio afín.*

Demostración

Si en M no hay tres puntos no alineados, se concluye fácilmente que $M = \langle a, b \rangle$ siendo a, b dos puntos distintos de M.

Supóngase que (a, b, c) es un sistema de tres puntos no alineados de M, y sea P el plano $\langle a, b, c \rangle$ generado por ellos. Probemos que $P \subset M$.



En efecto, por hipótesis las rectas $\langle a, b\rangle$ y $\langle a, c\rangle$ están contenidas en M. Si x es un punto de $P-(\langle a, b\rangle \cup \langle a, c\rangle)$, para probar que $x \in M$, basta demostrar (por la propiedad que verifica M) que x pertenece a alguna recta R que se «apoye» en $\langle a, b\rangle$ y $\langle a, c\rangle$. Pero esto es cierto, pues en principio, podría servir como recta R la recta $\langle b, x\rangle$, a no ser que sea paralela a $\langle a, c\rangle$. En este último caso, podríamos aún elegir otro punto b' en $\langle a, b\rangle$ distinto de a y de b (pues $\mathbb{K}$ tiene más de dos puntos), y como recta R podríamos tomar ahora la recta $\langle b', x\rangle$. (Véase figura.)

Puntualicemos que hemos utilizado, sin demostrar, dos resultados evidentes:

— Por un punto exterior a una recta pasa una única paralela.

— Hay biyecciones entre el conjunto de puntos de una recta afín, y el cuerpo $\mathbb{K}$ subyacente.

Para concluir la demostración, es suficiente probar que dados tres puntos cualesquiera a, b, c de M y escalares λ y μ, el punto $x = a-\lambda\overrightarrow{ab}+\mu\overrightarrow{ac}$ pertenece a M (así, $\vec{M}$ es subespacio vectorial), pero esta afirmación es cierta, ya que el punto x está en el subespacio $\langle a, b, c\rangle$ generado por los tres puntos, que puede ser una recta, contenida por hipótesis en M, o un plano, en cuyo caso también lo está por lo anterior. □

§3. APLICACIONES AFINES

Una aplicación entre espacios afines que actúa respetando la estructura afín de ambos, se denominará aplicación afín. Del mismo modo que los subespacios afines se definen mediante los subespacios vectoriales, las aplicaciones afines lo hacen por medio de aplicaciones lineales. El lector seguramente notará a medida que avanza en la lectura de éste epígrafe una cierta analogía —desde luego no casual— con el anterior.

Los símbolos X, X', X'', ..., etc., designarán a partir de aquí espacios afines con direcciones los espacios vectoriales $\vec{X}$, $\vec{X}'$, $\vec{X}''$, ..., etc. definidos sobre el mismo cuerpo $\mathbb{K}$, denotándose por Λ, Δ', Λ'' las correspondientes aplicaciones que dan la estructura de espacio afín. La notación de vector $\overrightarrow{ab}$, y de punto $a+\vec{v}$ será mantenida indistintamente en cada uno de los espacios afines.

Definición 3.1. Aplicaciones afines

Una aplicación $f : X \to X'$ *entre espacios afines, se llamará afín, si existe una aplicación lineal* $\vec{f}$ $\vec{X} \to \vec{X}'$ *tal que:*

$$f(x+\vec{v}) = f(x) + \vec{f}(\vec{v}) \quad \textit{para todo } x \in X \textit{ y todo } \vec{v} \in \vec{X}$$

o de forma equivalente, ya que $y = x + \overrightarrow{xy}$*:*

$$\overrightarrow{f(x)\,f(y)} = \vec{f}\,(\overrightarrow{xy}) \quad \textit{para todo } x,\ y \in X$$

Se llama a $\vec{f}$ *aplicación lineal asociada a* f.

Nota 3.2.

Si $f : X \to X'$ es una aplicación (no necesariamente afín), fijado el punto $a \in X$, y llamando $a' = f(a)$, podemos construir una única aplicación $f_a : \vec{X} \to \vec{X}'$, que hace conmutativo el diagrama:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\Delta_a"'] & X' \arrow[d, "\Delta'_a"] \\ \vec{X} \arrow[r, "f_a"] & \vec{X}' \end{tikzcd} \tag{3.2.1}$$

y viene definida por la condición:

$$f_a(\overrightarrow{ax}) = \overrightarrow{f(a)\,f(x)} \quad \text{o bien} \quad f(a+\vec{v}) = f(a) + f_a(\vec{v})$$

para todo $x \in X$ y todo $\vec{v} \in \vec{X}$.

Se tiene el siguiente resultado:

Proposición 3.3.

Sea $f : X \to X'$ *aplicación entre espacios afines.*

i) Si f *es afín entonces* $f_a = \vec{f}$ *para todo punto* $a \in X$.

ii) Si existe $a \in X$ *tal que* $f_a : \vec{X} \to \vec{X}'$, *es lineal, entonces* f *es afín, y* $\vec{f} = f_a$.

Demostración

i) Si f es afín con lineal asociada $\vec{f}$, por definición 3.1, se tiene para todo punto a de X y todo vector $\vec{v}$ de $\vec{X}$:

$$f(a) + f_a(\vec{v}) = f(a + \vec{v}) = f(a) + \vec{f}(\vec{v})$$

por tanto $f_a(\vec{v}) = \vec{f}(v)$.

ii) Si $f_a : \vec{X} \to \vec{X}'$ es lineal, entonces para todo $x, y \in X$ se tiene:

$$\overrightarrow{f(x)\,f(y)} = \overrightarrow{f(a)\,f(y)} - \overrightarrow{f(a)\,f(x)} = f_a(\overrightarrow{ay}) - f_a(\overrightarrow{ax}) =$$
$$= f_a(\overrightarrow{ay} - \overrightarrow{ax}) = f_a(\overrightarrow{xy}), \text{ y } f$$

es afín con lineal asociada f_a. □

Las siguientes afirmaciones se deducen ahora de forma inmediata:

Proposición 3.4. Propiedades

1. *Una aplicación afín* $f : X \to X'$ *determina unívocamente su lineal asociada* $\vec{f}$.
2. *Dos aplicaciones afines* $f, g : X \to X'$ *coinciden si* $\vec{f} = \vec{g}$, *y existe* $a \in X$ *tal que* $f(a) = g(a)$.
3. *Si* $\psi : \vec{X} \to \vec{X}'$ *es lineal,* $a \in X$, $a' \in X'$, *la aplicación:*

$$f : X \ni x = a + \overrightarrow{ax} \to a' + \psi(\overrightarrow{ax}) \in X'$$

es afín, y tiene por lineal asociada $\vec{f} = \psi$.

4. *Si* a' *es un punto dado de* X', *la aplicación constante:*

$$k : X \ni x \to a' \in X'$$

es afín, y su lineal asociada es la aplicación lineal nula $o : \vec{X} \to \vec{X}'$.

5. *Si* $f: X \to X'$ *es aplicación afín, entonces* f *es inyectiva (respectivamente sobreyectiva) si y sólo si lo es* $\vec{f}$. *(Utilícese la conmutatividad del diagrama* 3.2.1 *con* $f_a = \vec{f}$*).*

Definición 3.5.

a) Una aplicación afín $f: X \to X'$ *se denomina isomorfismo afín, si es biyectiva. Los espacios afines* X *y* X' *se dicen isomorfos, si existe un isomorfismo afín entre ambos.*

b) Una aplicación afín $f: X \to X$ *será denominada endomorfismo afín. Se denotará por* EA(X) *al conjunto de estos endomorfismos.*

c) Un endomorfismo afín de X *que sea isomorfismo se llamará transformación afín de* X. *Denotaremos por* $GA(X)$ *al conjunto de dichas transformaciones.*

Observaciones 3.6.

1. Utilizando la propiedad 5. de 3.4, se ve que la aplicación afín $f: X \to X'$ es isomorfismo afín, si y sólo si $\vec{f}: \vec{X} \to \vec{X}'$ es isomorfismo lineal. Por otra parte, teniendo en cuenta la proposición 3.3 y el diagrama conmutativo 3.2.1 (con $f_a = \vec{f}$), se prueba que si f es isomorfismo afín también lo es f^{-1}, y $\overrightarrow{(f^{-1})} = \vec{f}^{-1}$.

2. Los espacios afines X y X' son isomorfos, si y sólo si tienen la misma dimensión (supuesta finita).

Ejemplos 3.7.

1. Las aplicaciones afines entre espacios vectoriales V y V' (sobre el cuerpo $\mathbb{K}$) son suma de una constante y una aplicación lineal. De forma más precisa, si $f: V \to V'$ es afín, queda:

$$f: V \ni x \to v' + \vec{f}(x) \in V'$$

Donde $v' \in V'$ es la imagen del vector $o \in V$ por f, y $\vec{f}: V \to V'$ es la aplicación lineal asociada.

2. Proyecciones afines.

Sea B un subespacio afín de X, y $\vec{D}$ un subespacio vectorial de $\vec{X}$ tales que:

$$\vec{X}=\vec{B}\oplus\vec{D}$$

Para cada $x \in X$, los subespacios afines B y $x+\vec{D}$ se cortan en un punto. En efecto, por una parte si $(x+\vec{D}) \cap B=\phi$, por la fórmula de dimensiones de la proposición 2.9 se tendría:

$$\dim(B+(x+\vec{D}))=\dim\vec{B}+\dim\ \vec{D}+1=\dim\vec{X}+1$$

lo cual es claramente contradictorio.

Basta aplicar ahora la fórmula de dimensiones para el caso de intersección no vacía.

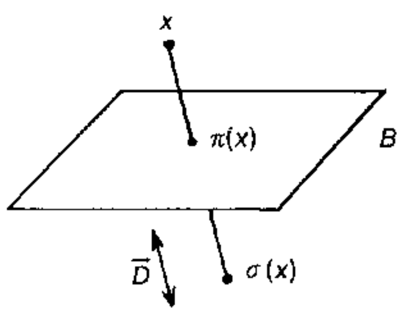
Para cada $x \in X$, sea $\pi(x)=(x+\vec{D}) \cap B$. Probaremos que la aplicación $\pi : X \to X$ es aplicación afín, cuya lineal asociada es la proyección vectorial $\pi_{\vec{B}} : \vec{X}\to\vec{X}$ con base $\vec{B}$ y dirección $\vec{D}$.

Fijemos un punto $b \in B$. Claramente es $\pi(b)=b$. Dado $x \in X$, por la definición de π, el punto $\pi(x)$ está en $x+\vec{D}$, y $\overrightarrow{x\pi(x)} \in \vec{D}$. Se tiene así:

$$\overrightarrow{bx}=\overrightarrow{b\pi(x)}+\overrightarrow{\pi(x)x},\ \overrightarrow{b\pi(x)} \in \vec{B},\ \overrightarrow{\pi(x)x} \in \vec{D}$$

Por tanto, $\pi_{\vec{B}}(\overrightarrow{bx})=\overrightarrow{b\pi(x)}=\overrightarrow{\pi(b)\,\pi(x)}$. Por la proposición 3.3 ii) se concluye que π es afín, y $\vec{\pi}=\pi_b=\pi_{\vec{B}}$.

Se denomina a $\pi : X \to X$, proyección afín de base B y dirección $\vec{D}$.



3. Simetrías afines.

Sea $\pi : X \to X$, como en el ejemplo anterior. Se define la simetría afín σ con base B y dirección $\vec{D}$ por la fórmula:

$$\sigma : X \ni x \to \sigma(x) = \pi(x) + \overrightarrow{x\pi(x)} \in X \text{ (véase figura)}$$

Probemos que σ es transformación afín, con transformación lineal asociada $\vec{\sigma} = 2\vec{\pi} - \vec{\mathrm{id}}$, que es la simetría vectorial con base $\vec{B}$ y dirección $\vec{D}$. En efecto, fijado $b \in B$ claramente es $\sigma(b) = b$, y para cada $x \in X$ es

$$\overrightarrow{\pi(x)\,\sigma(x)} = \overrightarrow{x\pi(x)},$$

por tanto:

$$\overrightarrow{\sigma(b)\,\sigma(x)} = \overrightarrow{b\sigma(x)} = \overrightarrow{b\pi(x)} + \overrightarrow{\pi(x)\,\sigma(x)} = \overrightarrow{b\pi(x)} + \overrightarrow{x\pi(x)} =$$
$$= \overrightarrow{b\pi(x)} + \overrightarrow{xb} + \overrightarrow{b\pi(x)} - 2\overrightarrow{b\pi(x)} - \overrightarrow{bx} = 2\vec{\pi}(\overrightarrow{bx}) - \overrightarrow{bx}$$

Nuevamente por 3.3 ii) se concluye que σ es transformación afín, y $\vec{\sigma} = \sigma_b = \sigma_{\vec{B}} = 2\pi_{\vec{B}} - id$.

4. Considérense los modelos analíticos cartesianos $A_n = A_n(\mathbb{K})$, $A_m = A_m(\mathbb{K})$.

Un punto de A_n será denotado por $\begin{pmatrix} 1 \\ x \end{pmatrix}$, donde $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \\ x_n \end{pmatrix}$ y un punto de $\vec{A}_n$ será $\begin{pmatrix} 0 \\ x \end{pmatrix}$.

Esta notación será mantenida de forma análoga para A_m y $\vec{A}_m$. Un aplicación afín $f : A_n \to A_m$ viene determinada por su lineal asociada

$\vec{f} : \vec{A}_n \to \vec{A}_m$ y la imagen por f del origen de A_n

$$\text{digamos } f\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ a \end{pmatrix}.$$

$$\text{Sea } \vec{A} = \begin{pmatrix} a_{11} \dots a_{1n} \\ \dots \\ \dots \\ a_{m1} \dots a_{mn} \end{pmatrix} \in FL(m, n)$$

$$\text{tal que } \vec{f}\begin{pmatrix}0\\x\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\x'\end{pmatrix} \Leftrightarrow x'=\vec{A}\,x. \text{ Se tiene}$$

$$f\begin{pmatrix}1\\x\end{pmatrix}=f\left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\x\end{pmatrix}\right)=f\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+\vec{f}\begin{pmatrix}0\\x\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\a\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\\vec{A}x\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\x'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\a & \vec{A}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\x\end{pmatrix}$$

y el sistema $x'_i=a_i-\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j$ representa las ecuaciones de f.

A las matrices de la forma $A=\begin{pmatrix}1 & 0\\a & \vec{A}\end{pmatrix}$ se les denomina matrices afines.

Usualmente se identifica la aplicación afín f, con la matriz A, y a $\vec{f}$ con $\vec{A}$. Denotamos por $FA(m, n)$ al conjunto de matrices afines del tipo de A.

Asi, el conjunto de matrices $FA(n, n)$, que denotamos por $EA(n)$ representa el conjunto de endomorfismos afines de A_n. El conjunto de transformaciones afines de A_n viene representado entonces por el conjunto $GA(n)$ de las matrices $A \in EA(n)$ tales que det $\vec{A}\neq 0$.

Proposición 3.8. Composición de aplicaciones afines

Sean $f: X \to X'$, $g: X' \to X''$ *aplicaciones afines. Entonces la composición* $g \cdot f: X \to X''$ *es aplicación afín, y se verifica:*

$$\overrightarrow{g \cdot f}=\vec{g}\ \vec{f}$$

Demostración

Para todo punto x de X y todo vector $\vec{v}$ de $\vec{X}$, por ser f y g afines se verifica:

$$(g \cdot f)(x+\vec{v})=g(f(x+\vec{v}))=g(f(x)+\vec{f}(\vec{v}))=$$
$$=g(f(x))+\vec{g}(\vec{f}(\vec{v}))=(g \cdot f)(x)+(\vec{g}\ \vec{f})(\vec{v})$$

Esto prueba según la definición 3.1, que $g \cdot f$ es afín, que tiene por aplicación lineal asociada: $\overrightarrow{g \cdot f}=\vec{g}\cdot\vec{f}$ □

La operación composición es, por tanto, operación interna en el conjunto $EA(X)$ de endomorfismos, y en el $GA(X)$ de transformaciones afines del espacio X. Se tiene así de forma inmediata el siguiente resultado:

Corolario 3.9. Grupo afín

El conjunto $GA(X)$ *de transformaciones afines del espacio afín* X, *tiene estructura de grupo respecto a la composición de aplicaciones. Por otra parte, si* $g \in GA(X)$ *entonces* $\vec{g} \in GL(\vec{X})$, *y la aplicación:*

$$\rightarrow : GA(X) \ni g \rightarrow \vec{g} \in GL(\vec{X})$$

es un epimorfismo de grupos.

El grupo $GA(X)$ es el grupo de transformaciones que define la geometría afín del espacio X (en el sentido de Klein), y se denomina por ésto, grupo afín del espacio.

Ejemplos 3.10.

1. Si $\sigma : X \rightarrow X$ es una simetría afín, entonces

$$\overrightarrow{\sigma \cdot \sigma} = \vec{\sigma} \cdot \vec{\sigma} = \mathrm{id} : \vec{X} \rightarrow \vec{X}$$

(pues $\vec{\sigma}$ es simetría vectorial) y además, si b es un punto de la base de σ, se tiene $\sigma^2(b) = b$. Aplíquese ahora la propiedad 2 de 3.4 para concluir que id y σ^2 coinciden.

De forma análoga se ve que si $\pi : X \rightarrow X$ es proyección, entonces $\pi \cdot \pi = \pi$.

2. Si $A \in FA(m, n)$, $B \in FA(p, m)$ entonces $BA \in FA(p, n)$ y representa la aplicación afín:

$$BA : A_p \rightarrow A_n \text{ composición de } A : A_n \rightarrow A_m \text{ y } B : A_m \rightarrow A_p.$$

(Véase ejemplo 2 de 3.7).

En particular, $GA(n)$ con su producto matricial usual, representa el grupo afín de A_n.

El epimorfismo de grupos $\to$ $GA(X) \to GL(\vec{X})$, no es isomorfismo, pues su núcleo es un grupo no trivial (cuando X tiene más de un punto) que denominamos grupo de traslaciones, y que ahora pasamos a describir:

Proposición 3.11. Grupo de traslaciones

Si $\vec{v} \in \vec{X}$ denotamos por $\tau_{\vec{v}}$ la transformación:

$$\tau_{\vec{v}} : X \ni x \to x + \vec{v} \in X$$

que denominamos traslación (de vector $\vec{v}$). Entonces:

a) Para todo $\vec{v} \in \vec{X}$, $\tau_{\vec{v}} . X \to X$ es transformación afín, y $\vec{\tau}_{\vec{v}} = \vec{id}$.

b) Recíprocamente, si $\tau : X \to X$ es transformación afín, con $\vec{\tau} = \vec{id}$, entonces existe $\vec{v} \in \vec{X}$ tal que $\tau = \tau_{\vec{v}}$.

c) El conjunto $T(X)$ de traslaciones de X es subgrupo abeliano del grupo afín $GA(X)$. Concretamente, se tiene para $v, w \in X$:

$$\tau_{\vec{v}} \quad \tau_{\vec{w}} = \tau_{\vec{v}+\vec{w}}, \ y \ \tau_{\vec{0}} = id.$$

Demostración

Fijado $a \in X$, para todo $x \in X$ se verifica:

$$\tau_{\vec{v}}(x) = \tau_{\vec{v}}(a + \vec{ax}) = (a + \vec{ax}) + \vec{v} = (a + \vec{v}) + \vec{ax} = \tau_{\vec{v}}(a) + \vec{ax}$$

Esto prueba que $\tau_{\vec{v}}$ es afín y $\vec{\tau}_{\vec{v}} = \vec{id}$.

Recíprocamente, si $\tau : X \to X$ es afín, y $\vec{\tau} = \vec{id}$, entonces fijado $a \in X$, sea $b = \tau(a)$. Para todo $x \in X$ se tiene:

$$\tau(x) = \tau(a + ax) = \tau(a) + \vec{\tau}(\vec{ax}) = b + \vec{ax} = a + \vec{ab} + \vec{ax} = (a + \vec{ax}) + \vec{ab} = x + \vec{ab}$$

y τ es traslación de vector $\vec{v} = \vec{ab}$. La última afirmación se deduce inmediatamente de la igualdad:

$$(x + \vec{v}) + \vec{w} = x + (\vec{v} + \vec{w}) \text{ para todo } x \in X \text{ y todo } \vec{v}, \vec{w} \in \vec{X}. \ \square$$

El grupo de homotecias vectoriales del espacio $\vec{X}$, $Z(\vec{X}) = \{\lambda\,\vec{id} \cdot \lambda \in \mathbb{K}-\{0\}\}$ constituye un subgrupo abeliano del grupo lineal $GL(\vec{X})$. Su imagen inversa por el epimorfismo $\to \cdot GA(X) \to GL(\vec{X})$ es un subgrupo de $GA(X)$ que contiene al de las traslaciones $T(X)$. Es el llamado grupo de dilataciones que ahora pasamos a describir:

Proposición 3.12. Homotecias afines

Dado un punto c *del espacio* X, *y* $\lambda \in \mathbb{K}-\{0,1\}$, *llamamos homotecia afín de centro* c *y razón* λ, *a la transformación* $h = h(c, \lambda)$ *definida por:*

$$h : X \ni x \to c + \lambda\,\vec{cx} \in X$$

a) $h = h(c, \lambda)$ *es transformación afín, y su transformación lineal asociada es:*

$$\vec{h} = \lambda\vec{id}$$

b) Recíprocamente, si f *es una transformación afín de* X *con* $\vec{f} = \lambda\vec{id}$ ($\lambda \in \mathbb{K}-\{0,1\}$) *entonces* f *es una homotecia afín de razón* λ.

c) El conjunto Dil(X) *formado por las homotecias afines, y las traslaciones de* X, *constituye un subgrupo de* GA(X), *que denominamos grupo de dilataciones de* X.

Demostración

a) Sea $h = h(c, \lambda)$. Teniendo en cuenta que $h(c) = c$, para cada $x \in X$ se tiene:

$\overrightarrow{h(c)\,h(x)} = \overrightarrow{ch(x)} = \lambda\,\vec{cx}$ (por la definición de h). Así $\vec{h} = \lambda\vec{id}$.

b) Supóngase ahora $h \cdot X \to X$ con $\vec{h} = \lambda\vec{id}$ ($\lambda \neq 0,1$). Si probamos que existe $c \in X$ con $f(c) = c$ la demostración está concluida, pues para todo $x \in X$ se tendría:

$$h(x) = h(c + \vec{cx}) - h(c) + h(\vec{cx}) = c + \lambda\vec{cx} \text{ y } h = h(c, \lambda)$$

Sea a un punto de X, y $b = h(a)$. Para cada $x \in X$ se tiene:

$$h(x) = h(a + \overrightarrow{ax}) = b + \lambda\overrightarrow{ax}$$

Por tanto la determinación de posibles puntos fijos, depende de la existencia de soluciones para la ecuación:

$$b + \lambda\overrightarrow{ax} = x$$

Podemos «despejar» x por medio de las siguientes equivalencias:

$$b + \lambda\overrightarrow{ax} = x \Leftrightarrow \overrightarrow{bx} = \lambda\overrightarrow{ax} \Leftrightarrow \overrightarrow{ba} + \overrightarrow{ax} = \lambda\overrightarrow{ax} \Leftrightarrow \overrightarrow{ab} =$$

$$= (1-\lambda)\overrightarrow{ax} \Leftrightarrow \overrightarrow{ax} = \frac{1}{1-\lambda}\overrightarrow{ab} \Leftrightarrow x = a + \frac{1}{1-\lambda}\overrightarrow{ab}$$

la existencia (y unicidad) de puntos fijos para f, queda garantizada, y esto concluye la demostración. □

Ejemplo 3.13.

El grupo de dilataciones del modelo analítico cartesiano A_n es:

$$\text{Dil }(A_n) = \left\{ D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & \lambda I \end{pmatrix} : \lambda \in \mathbb{K} - \{0\}, \begin{pmatrix} 1 \\ a \end{pmatrix} \in A_n \right\}$$

siendo $I \in GL(n)$ la matriz identidad.

§4. APLICACIONES AFINES Y SUBESPACIOS

Hemos definido las aplicaciones afines como aplicaciones que respetan la estructura afín de los espacios entre los que están definidas. Por esto es de esperar que respeten los subespacios afines. En particular, los isomorfismos afines transforman rectas en rectas. Denominamos colineaciones a las biyecciones entre espacios afines que cumplen esta propiedad. Ya que todo isomorfismo afín es colineación, es natural preguntarse si toda colineación es isomorfismo. La respuesta es afirmativa, si se imponen algunas restricciones al cuerpo base $\mathbb{K}$, y a la dimensión de los espacios afines. Nótese que para colineaciones entre rectas afines, la respuesta a la cuestión planteada es claramente negativa, a no ser que el cuerpo $\mathbb{K}$ posea sólo dos elementos.

Como es habitual, X X', ..., etc., denotan espacios afines sobre el cuerpo $\mathbb{K}$.

Proposición 4.1.

Sea $f : X \to X'$ *una aplicación afín,* M *subespacio afín de* X, *y* M' *subespacio afín de* X'. *Entonces:*

a) f(M) *es subespacio afín de* X', *y si* $M \neq \phi$ *entonces* $\overrightarrow{f(M)} = \vec{f}(\vec{M})$, *y la aplicación restricción:*

$$f/M : M \ni x \to f(x) \in f(M)$$

es afín, con lineal asociada $\vec{f}/\vec{M}$.

b) $f^{-1}(M')$ *es subespacio afín de* X, *y si* $f^{-1}(M') \neq \phi$ *entonces:*

$$\overrightarrow{f^{-1}(M')} = \vec{f}^{-1}(\vec{M}')$$

Demostración

Para cada punto $a \in X$, $b = f(a)$ considérese el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\Delta_a"'] & X' \arrow[d, "\Delta'_b"] \\ \vec{X} \arrow[r, "\vec{f}"] & \vec{X}' \end{tikzcd}$$

a) Si M es subespacio de X y $a \in M$, se tiene:

$$\Delta_b(f(M)) = \vec{f}(\Delta_a(M)) = \vec{f}(\vec{M})$$

Esto prueba que $f(M)$ es subespacio afín con dirección $\vec{f}(\vec{M})$. Las otras afirmaciones son triviales.

b) Sea $a \in X$ con $f(a)=b \in M'$. Por la conmutatividad del diagrama, es:

$$\Delta_a(f^{-1}(M'))=\vec{f}^{-1}(\Delta_b(M'))=\vec{f}^{-1}(\vec{M}')$$

y esto prueba el resultado. □

Las aplicaciones afines también respetan la suma de subespacios:

Proposición 4.2.

Sea $f: X \longrightarrow X'$ *aplicación afín,* M *y* N *subespacios afines de* X, *y* $(a_0, \ldots, a_r)$ *un sistema de puntos en* X. *Se verifica entonces:*

a) $f(M+N)=f(M)+f(N)$.

b) $f(\langle a_0, \ldots, a_r\rangle)=\langle f(a_0), \ldots, f(a_r)\rangle$

Demostración

a) Como $f(M) \subset f(M+N)$ y $f(N) \subset f(M+N)$, se concluye que $f(M)+f(N) \subset f(M+N)$. Probemos que $f(M+N)$ es el mínimo subespacio que contiene a $f(M)$ y $f(N)$:

Si S' es un subespacio de X' que contiene a $f(M)$ y a $f(N)$, se tiene:

$$f^{-1}(S') \supset M \quad \text{y} \quad f^{-1}(S') \supset N$$

Por tanto, $f^{-1}(S') \supset M+N$, y $S' \supset f(f^{-1}(S')) \supset f(M+N)$.

b) Como el resultado anterior es también válido para más de dos sumandos, la parte b) se deduce ya inmediatamente de la definición de $\langle a_0, \ldots, a_r\rangle$ como suma $a_0+\ldots+a_r$ □

Nótese que si a, b son puntos de X tales que $f(a)\neq f(b)$, f transforma biyectivamente la recta $\langle a, b\rangle$ que pasa por a y b, en la recta $\langle f(a), f(b)\rangle$ que pasa por sus imagenes. En particular se tiene:

Corolario 4.3.

Un isomorfismo afín $f : X \longrightarrow X'$ *transforma biyectivamente cada recta de* X *en una recta de* X'.

Para estudiar en qué condiciones es cierto el recíproco de este resultado, necesitamos establecer alguna terminología.

Definición 4.4. Colineación

Una biyección $f : X \longrightarrow X'$ *entre espacios afines, se llama colineación, si* $f(R)$ *es recta afín de* X', *para cada recta afín* R *de* X. *Esto también puede expresarse así:*

$$\textit{Para todo } a, b \in X \textit{ es } f\langle a, b\rangle = \langle f(a), f(b)\rangle$$

Definición 4.5. Cuerpo simple

Diremos que un cuerpo $\mathbb{K}$ es simple si el único automorfismo que admite es el automorfismo identidad.

El resto del parágrafo, está destinado a probar el siguiente teorema denominado en algunas veces Teorema Fundamental de la geometría afín, y puede enunciarse así:

Sean X y X' espacios afines sobre un cuerpo simple $\mathbb{K}$ distinto de $\{0, 1\}$. Supóngase que la dimensión de X' es mayor o igual que dos. Si $f : X \longrightarrow X'$ es colineación, entonces f es isomorfismo afín.

Observaciones 4.6.

1. Cuando el cuerpo $\mathbb{K}$ es $\{0, 1\}$, las rectas del espacio constan de dos puntos, y la condición de colineación no impone restricción alguna a una biyección.

2. El cuerpo $\mathbb{Q}$ de los números racionales, es un cuerpo simple. En efecto, sea $\sigma : \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q}$ un automorfismo. Esto quiere decir,

que σ es aplicación biyectiva que verifica para todo par de números racionales r, s:

$$\sigma(r+s)=\sigma(r)+\sigma(s), \quad \sigma(r)\ \sigma(s)=\sigma(rs)$$

y en particular, $\sigma(0)=0$, y $\sigma(1)=1$.

Probemos que $\sigma=id$:

— Si n es entero positivo, y $r\in\mathbb{Q}$, entonces $\sigma(nr)=n\sigma(r)$, ya que:

$$\sigma(nr)=\sigma(r+\ldots+r)=\sigma(r)+\ldots+\sigma(r)=n\sigma(r)$$

En particular, para $r=1$ se tiene que $\sigma(n)=n$ para todo entero positivo n, y teniendo en cuenta que $\sigma(-r)=-\sigma(r)$ se deduce:

$$\sigma(n)=n \quad \text{para todo entero } n$$

— Finalmente si p y q son enteros $p>0$, es:

$$p=\sigma(p)=\sigma(q(p/q))=q\sigma(p/q)$$

de donde $\sigma(p/q)=p/q$, y $\sigma=id$.

3. Análogamente puede probarse que los cuerpos de la forma $\mathbb{Z}_p$ (clases de restos módulo un entero primo p) son simples.

4. El cuerpo $\mathbb{R}$ de los números reales, es un cuerpo simple. Veámoslo: Si $\sigma:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ es automorfismo, se prueba de forma análoga a como se hizo en la observación 2 que:

$$\sigma(r)=r \text{ para todo } r\in\mathbb{Q}$$

Por otra parte, si $\lambda\in\mathbb{R}$ y $\lambda>0$, podemos tomar $\mu>0$ con $\mu^2=\lambda$, y se verifica:

$$\sigma(\lambda)=\sigma(\mu^2)=\sigma(\mu)^2>0.$$

Utilizando la aditividad de σ queda pues probada la siguiente implicación para λ y μ números reales:

$$\lambda<\mu\Rightarrow\sigma(\lambda)<\sigma(\mu)$$

Finalmente puede ya probarse que $\sigma=id$, por reducción al absurdo: Si existe $\lambda \in \mathbb{R}$ con $\sigma(\lambda) \neq \lambda$, podemos suponer, por ejemplo, que $\sigma(\lambda) < \lambda$, y existirá entonces un racional r tal que:

$$\sigma(\lambda) < r < \lambda$$

Aplicando σ a los dos últimos miembros de la desigualdad anterior y teniendo en cuenta que $\sigma(r) = r$ se tiene:

$$r < \sigma(\lambda)$$

Lo cual es claramente contradictorio.

5. El cuerpo $\mathbb{C}$ de los números complejos, no es un cuerpo simple. De hecho, la conjugación en $\mathbb{C}$ define un automorfismo distinto de la identidad.

En orden a probar el teorema fundamental estableceremos algunos resultados auxiliares:

Lema 4.7.

Sea $f : X \to X'$ *una colineación. Supóngase la dimensión de* X' *mayor o igual que dos, y* $\mathbb{K} \neq \{0, 1\}$.

a) Si M *es subespacio afín de* X, *entonces* f(M) *es subespacio afín de* X'.

b) La dimensión de X *es mayor o igual que dos, y la aplicación* f^{-1} *es colineación.*

c) f(P) *es un plano de* X' *para cada plano* P *de* X.

d) f *transforma cada par de rectas paralelas, en un par de rectas paralelas.*

Demostración

a) Por la proposición 2.10, es suficiente probar que para todo par de puntos a, $b \in M$ se verifica que $\langle f(a), f(b)\rangle \subset f(M)$, lo cual es cierto, ya que

$$\langle f(a), f(b)\rangle = f\langle a, b\rangle \subset f(M)$$

Pues $\langle a, b\rangle \subset M$ por ser M subespacio afín.

b) Si X fuera recta afín, $f(X)=X'$ sería recta afín, lo cual es contradictorio.

Veamos que f^{-1} es colineación:

Si $a'=f(a)$, $b'=f(b)$ son dos puntos arbitrarios de X', se tiene:

$$f\langle a, b\rangle = \langle a', b'\rangle, \quad \text{y por tanto} \quad f^{-1}\langle a', b'\rangle = \langle a, b\rangle.$$

c) Sea P un plano de X, y R, S dos rectas distintas de P. $f(R)$, $f(S)$ serán dos rectas distintas del subespacio $f(P)$, y necesariamente es $\dim f(P) \geqslant 2$.

Sea P' un plano de $f(P)$. Aplicando el mismo argumento a f^{-1} se concluye que:

$\dim f^{-1}(P') \geqslant 2$. Como $f^{-1}(P') \subset P$ y P es un plano, necesariamente $f^{-1}(P')=P$, y $f(P)=P'$ es un plano, como queríamos probar.

d) Dos rectas paralelas y distintas, R y S de X, están contenidas siempre en un plano P, y sus imágenes $f(R)$, $f(S)$ tienen intersección vacía, y están contenidas en el plano $f(P)$. Por el teorema de incidencia, se concluye que $f(R)$ y $f(S)$ son paralelas. (Véase el ejemplo 2.12). □

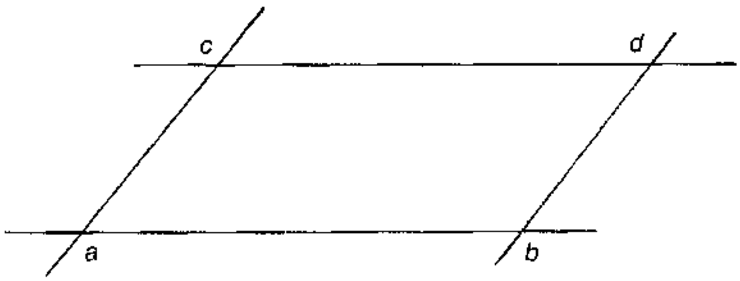
Probemos finalmente el teorema:

Proposición 4.8. Teorema fundamental

Sea $f: X \to X'$ *una colineación entre espacios afines definidos sobre un cuerpo simple distinto de* $\{0, 1\}$. *Si* $\dim X' \geqslant 2$, *entonces* f *es isomorfismo afín.*

Demostración

Demostraremos primero que f preserva la relación de equipolencia. Necesitamos para esto expresar la equipolencia de vectores en términos de paralelismo de rectas.



Sean a, b, c, d puntos distintos de X, supóngase que a, b, c no están lineados, se tiene entonces la equivalencia:

$$\overrightarrow{ab}=\overrightarrow{cd} \Leftrightarrow \langle a,\ b\rangle // \langle c,\ d\rangle \quad \text{y} \quad \langle a,\ c\rangle // \langle b,\ d\rangle \qquad (4.8.1)$$

La implicación $(\Rightarrow)$ es trivial. Probemos la otra:

Por ser $\langle a, b\rangle$ paralela a $\langle c, d\rangle$, los vectores $\overrightarrow{ab}$ y $\overrightarrow{cd}$ son proporcionales, es decir, para cierto λ no nulo se tiene:

$$\overrightarrow{cd}=\lambda\overrightarrow{ab}$$

De forma análoga se deduce que existe $\mu \in K-\{0\}$ tal que:

$$\overrightarrow{ac}=\mu\overrightarrow{bd}$$

Por tanto: $\overrightarrow{ac}=\mu(\overrightarrow{ba}+\overrightarrow{ac}+\overrightarrow{cd})=\mu\overrightarrow{ac}+\mu(\lambda-1)\overrightarrow{ab}$. Es decir:

$$(1-\mu)\overrightarrow{ac}+\mu(1-\lambda)\overrightarrow{ab}=0$$

Como $\overrightarrow{ab}$ y $\overrightarrow{ac}$ son por hipótesis vectores independientes, se concluye que

$$\lambda=\mu=1, \quad \text{y por lo tanto} \quad \overrightarrow{ab}=\overrightarrow{cd}.$$

Demostremos ya la implicación:

$$a,\ b,\ c,\ d \in X, \quad \overrightarrow{ab}=\overrightarrow{cd} \Rightarrow \overrightarrow{f(a)\,f(b)}=\overrightarrow{f(c)\,f(d)}$$

Si a, b, c no están alineados, aplicando la equivalencia (4.8.1) es

$$\langle a, b\rangle // \langle c, d\rangle \quad \text{y} \quad \langle a, c\rangle // \langle b, d\rangle.$$

Por el lema 4.7 d) se verifica

$$\langle f(a), f(b)\rangle // \langle f(c), f(d)\rangle \quad \text{y} \quad \langle f(a), f(c)\rangle // \langle f(b), f(d)\rangle.$$

Nuevamente por (4.8.1) se verifica

$$\overrightarrow{f(a)\,f(b)} = \overrightarrow{f(c)\,f(d)}.$$

Si a, b, c están alineados y $\overrightarrow{ab} = \overrightarrow{cd}$, entonces a, b, c, d están situados en una recta afín R. Tomando $\overrightarrow{pq} = \overrightarrow{ab}$ con $p \in X - R$, por lo anterior se concluye que:

$$\overrightarrow{f(a)\,f(b)} = \overrightarrow{f(p)\,f(q)} = \overrightarrow{f(c)\,f(d)}$$

Tenemos asi definida sin ambigüedad, una aplicación:

$$\vec{f} : \vec{X} \ni \overrightarrow{ab} \to \overrightarrow{f(a)\,f(b)} \in \vec{X}$$

Si probamos que es lineal, quedaría concluida la demostración, pues $\vec{f}$ es entonces la transformación lineal asociada al isomorfismo afín f. La biyección $\vec{f}$ es claramente un isomorfismo entre los grupos aditivos de los espacios vectoriales X y X', pues:

$$\vec{f}\,(\overrightarrow{ab} + \overrightarrow{bc}) = \vec{f}\,(\overrightarrow{ac}) = \overrightarrow{f(a)\,f(c)} = \overrightarrow{f(a)\,f(b)} + \overrightarrow{f(b)\,f(c)} = \vec{f}\,(\overrightarrow{ab}) + \vec{f}\,(\overrightarrow{bc})$$

Además $\vec{f} : \vec{X} \to \vec{X}'$, transforma rectas vectoriales de $\vec{X}$ en rectas vectoriales de $\vec{X}'$. En efecto:

Si $\vec{R}$ es recta vectorial de $\vec{X}$, tomando $a \in X$, $R = a + \vec{R}$ es recta afín de X; por ser f colineación $f(R)$ es recta afín de X', y $f(R) = f(a) + \vec{f}(\vec{R})$, ya que por la definición de $\vec{f}$, se verifica $f(a+v) = f(a) + \vec{f}(\vec{v})$ $(\vec{v} \in \vec{X})$. En particular, $\vec{f}(\vec{R})$ es recta vectorial de $\vec{X}'$.

Demostraremos finalmente la existencia de un automorfismo σ del cuerpo $\mathbb{K}$ tal que:

$$\vec{f}(\lambda\vec{v}) = \sigma(\lambda)\,\vec{f}(\vec{v}) \quad \text{para todo} \quad \vec{v} \in \vec{X} \quad \text{y todo} \quad \lambda \in \mathbb{K}.$$

Como por hipótesis $\mathbb{K}$ es un cuerpo simple, se concluye que $\sigma = id$, y $\vec{f}$ es isomorfismo lineal, lo cual concluiría la demostración.

La existencia del automorfismo $\sigma : \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ queda garantizada en el siguiente lema, que bien podría llamarse teorema fundamental de la geometría vectorial:

Lema 4.9.

Sea $g : V \to V'$ *una biyección aditiva entre espacios vectoriales sobre el mismo cuerpo* $\mathbb{K}$, *que transforma rectas vectoriales en rectas vectoriales. Supóngase* dim V *y* dim V′ *mayores o iguales que dos. Si* $v \in V - \{0\}$ *se define la biyección* $\sigma_v : \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ *por la condición:*

$$g(\lambda v) = \sigma_v(\lambda)\ g(v) \quad \textit{para todo} \quad \lambda \in K \tag{4.9.1}$$

Entonces:

i) $\sigma_v = \sigma_w$ *para todo* $v, w \in V - \{0\}$

ii) Llamando $\sigma : \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ *a la biyección común,* σ *es automorfismo del cuerpo* $\mathbb{K}$.

Demostración

i) Sean $v, w \in V - \{0\}$. Supóngase inicialmente que (v, w) es linealmente independiente. Necesariamente $(g(v), g(w))$ es linealmente independiente. Sea $u = v + w \in V - \{0\}$.

Para todo $\lambda \in \mathbb{K}$ se verifica por una parte:

$$g(\lambda u) = \sigma_u(\lambda)\ g(v+w) = \sigma_u(\lambda)\ g(v) + \sigma_u(\lambda)\ g(w) \tag{4.9.2}$$

y por otra:

$$g(\lambda u) = g(\lambda v) + g(\lambda w) = \sigma_v(\lambda)\ g(v) + \sigma_w(\lambda)\ g(w) \tag{4.9.3}$$

Comparando (4.9.2) y (4.9.3), y teniendo en cuenta que $(g(v), g(w))$ son linealmente independientes, se deduce que:

$$\sigma_v(\lambda) = \sigma_u(\lambda) = \sigma_w(\lambda)$$

Para el caso en que (v, w) sea linealmente dependientes, basta tomar un vector $x \in V - \langle v \rangle$, para concluir por lo anterior que:

$$\sigma_v = \sigma_x = \sigma_w$$

ii) Por i) y la igualdad (4.9.1) se concluye que $\sigma : \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ es una biyección que verifica la propiedad:

$$g(\lambda v) = \sigma(\lambda)\ g(v) \quad \text{para todo} \quad v \in V \text{ y todo } \lambda \in \mathbb{K}$$

Por tanto, fijado $v \in V - \{0\}$ $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ se tiene:

$$\sigma(\lambda + \mu)\ g(v) = g((\lambda + \mu)v) = g(\lambda v) + g(\mu v) = \sigma(\lambda)\ g(v) + \\ + \sigma(\mu)\ g(v) = (\sigma(\lambda) + \sigma(\mu))\ g(v)$$

y como $g(v) \neq 0$ se obtiene que

$$\sigma(\lambda + \mu) = \sigma(\lambda) + \sigma(\mu)$$

Análogamente, se verifica:

$$\sigma(\lambda\mu)\ g(v) = g(\lambda(\mu v)) = \sigma(\lambda)\ g(\mu v)) = \sigma(\lambda)\ \sigma(\mu)\ g(v)$$

y por tanto $\sigma(\lambda\mu) = \sigma(\lambda)\ \sigma(\mu)$.

Esto concluye la demostración. □

EJERCICIOS

7.1. Demostrar que la relación Δ definida en el ejemplo 4 de 1.2 es de equipolencia.

7.2. Demostrar la propiedad asociativa y conmutativa de la suma definida en el cociente $X \times X/\Delta$, donde Δ es una relación de equipolencia (ver 1.3 b)).

7.3.* Demostrar que el grupo $O^+(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} : \alpha \in \mathbb{R} \right\}$

es abeliano, y actúa de forma fiel y transitiva sobre la circunferencia

$$S^1 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} : x_1^2 + x_2^2 = 1 \right\}.$$

Partiendo de esta actuación, estudiar la posibilidad de dotar a S^1 de una estructura de espacio afín.

7.4. Si X e Y son espacios afines sobre el mismo cuerpo $\mathbb{K}$, dotar al producto cartesiano $X \times Y$ de una estructura natural de espacio afín.

7.5. Sea X espacio afín, y W subespacio vectorial de $\vec{X}$. Se define en X la siguiente relación:

$$x W x' \Leftrightarrow \overrightarrow{xx'} \in W$$

a) Probar que se trata de una relación de equivalencia en X.

b) Probar que la clase definida por cada punto x de X es de la forma:

$$x + W = \{x + \vec{w} : \vec{w} \in W\}$$

c) Dotar al cociente X/W de una estructura natural de espacio afín. Se denomina entonces a X/W espacio afín cociente.

7.6.* Sea X espacio afín de dimensión n, y sean p, q, y r enteros mayores o iguales que cero tales que $p \leqslant n$, $q \leqslant n$.

a) Probar que si se verifica:

$$\text{máx}(0,\ p+q-n) \leqslant r \leqslant \text{mín}(p,\ q)$$

existen subespacios M de dimensión p, N de dimensión q, tales que:

$$M \cap N \neq \phi \text{ y } \dim\ (M \cap N) = r.$$

b) Demostrar que si se verifica:

$$\text{máx}(0,\ p+q-n+1) \leqslant r \leqslant \text{mín}(p,\ q)$$

existen subespacios M y N de dimensiones p y q respectivamente, y tales que $M \cap N = \phi$ y $\dim\ (\vec{M} \cap \vec{N}) = r$.

7.7.* Dos parejas de subespacios (M, N) (M', N') de un espacio afín X, se dice que están en la misma posición relativa si $\dim M = \dim M' = p$, $\dim N = \dim N' = q$, $\dim(\vec{M} \cap \vec{N}) = \dim(\vec{M}' \cap \vec{N}') = r$, y los subespacios $M \cap N$, $M' \cap N'$ son ambos vacíos, o ambos distintos del vacío.

Determinar todas las posibles posiciones relativas de:

a) Dos rectas en un espacio afín tridimensional.

b) Dos planos en un espacio afín de dimensión 4.

c) Dos subespacios tridimensionales de un espacio afín de dimensión siete.

7.8.* En el espacio afín $A_5(\mathbb{R})$ se dan los subespacios:

$$M : (x_1 = 1,\ x_2 = 0,\ x_3 = 1,\ x_4 = 0), \text{ y } N : (x_1 = 0,\ x_2 = 1,\ x_5 = 5)$$

a) Determinar la posición relativa de M y N.

b) Calcular ecuaciones implícitas para el subespacio afín $M + N$.

c) Determinar analíticamente, el conjunto de los puntos de $A_5(\mathbb{R})$ por los que pasa alguna recta que corta a M y a N.

7.9.* En las condiciones del ejercicio anterior, determinar la recta que pasa por el punto

$$p=\begin{pmatrix}1\\2\\-1\\0\\0\\0\end{pmatrix} \text{ y corta a } M \text{ y a } N.$$

7.10. En $A_3(\mathbb{R})$ se consideran las rectas:

$$R:(x_1=1,\ x_3=0),\ S:(x_1=0,\ x_2=1),\ T:(x_2=0,\ x_3=1)$$

Determinar el conjunto de puntos de $A_3(\mathbb{R})$, por los que pasa alguna recta que corta a R, S y T.

7.11. Sea H un hiperplano, y M un subespacio de un espacio afín X. Demostrar que si M no es paralelo a H, entonces $M \cap H$ es un hiperplano de M.

7.12.* Sean R_1 y R_2 dos rectas no coplanarias de un espacio afín tridimensional X.

a) Probar que existe un único plano P_1 que contiene a R_1 y es paralelo a R_2. Constrúyase análogamente P_2.

b) Demostrar que $X-(P_1 \cup P_2)$ es exactamente el conjunto de puntos x de X, para los cuales existe una única recta R que contiene al punto x, y corta a R_1 y R_2.

7.13. Sean P_1 y P_2 dos planos de un espacio afín X de dimensión 4, tales que: $P_1+P_2=X$, y $P_1 \cap P_2=\phi$.

a) Probar que existe un único hiperplano H_1 que contiene a P_1 y es paralelo a P_2. Constrúyase análogamente H_2.

b) Demostrar que $X-(H_1 \cup H_2)$ es exactamente el conjunto de puntos x de X para los cuales existe un único plano P que contiene al punto x, y corta a P_1 y P_2 en sendas rectas:

$$R_1=P \cap P_1,\ R_2=P \cap P_2$$

c) Demostrar que las rectas R_1 y R_2 anteriores son paralelas.

7.14.* Enunciar y demostrar una generalización para los ejercicios 7.12 y 7.13.

7.15. Demostrar que el retículo $\mathscr{A}(X)$ de los subespacios de un espacio afín X no es distributivo pero, sin embargo, verifica la siguiente propiedad: Si $M, N, P \in \mathscr{A}(X)$, y $M \subset P$ entonces $M + (N \cap P) = (M+N) \cap (M+P)$.

7.16.* El grupo afín $GA(X)$ del espacio afín X, actúa sobre el conjunto $\mathscr{A}(X)^2$ de parejas ordenadas de subespacios de la forma:

$$GA(X) x \mathscr{A}(X)^2 \ni (g, (M, N)) \to (g(M), g(N)) \in \mathscr{A}(X).$$

Demostrar que dos parejas (M, N) (M', N') de subespacios son equivalentes respecto a la actuación anterior, si y sólo si determinan la misma posición relativa. (Ver ejercicio 7.6).

7.17. Hallar la matriz afín A correspondiente a una transformación afín $f: A_3(\mathbb{R}) \to A_3(\mathbb{R})$ tal que $f(R)=S$, $f(S)=T$, y $f(T)=R$, siendo R, S, y T las rectas del ejercicio 7.10.

7.18. Sea X/W el espacio afín cociente del ejercicio 7.5, y sea

$$\pi : X \ni x \to x+W \in x/W$$

demostrar que es aplicación afín. Se denomina a π proyección canónica.

7.19. Sea $f : X \to X'$ aplicación afín. Demostrar que existe una única aplicación $\bar{f}$, que hace conmutativo el diagrama:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi"'] & X' \\ X/\mathrm{Ker}(\bar{f}) \arrow[r, "\bar{f}"] & \mathrm{im}\, f \arrow[u, "i"'] \end{tikzcd}$$

Donde π es la proyección canónica, y i es la inclusión. Probar que $\bar{f}$ es isomorfismo afín.

7.20. Dar estructura natural de espacio afín, al conjunto $EA(X)$ de endomorfismos afines del espacio afín X.

7.21.* Sean $h = h(c;\ \lambda)$, $h' = h'(c',\ \lambda')$ homotecias, y τ traslación de vector $\vec{v}$, en un espacio afín X.

Determinar en función de c, c', λ, λ', y $\vec{v}$ los elementos geométricos (centro razón..., etc.) que definen a las siguientes dilataciones:

a) $h' \;\; h$
b) $h \cdot \tau$
c) $\tau \cdot h$

7.22. Con las notaciones de 7.21, determinar en el espacio afín $A_2(\mathbb{R})$, el centro y razón de las homotecias $h' \;\; h$ y $\tau \cdot h$ cuando se toma:

$$c = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad c' = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \lambda = 2,\ \lambda' = 1/3,\ \text{y}\ v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

7.23.* Demostrar que un endomorfismo afín es dilatación si y sólo si transforma cada recta en otra paralela.

7.24. Sean a, b, c y d cuatro puntos no alineados de un espacio afín X, tales que las rectas $\langle a,\ b\rangle$ y $\langle c,\ d\rangle$ son paralelas.

Demostrar que existe una única dilatación h de X que transforma a en c y b en d.

7.25.* Teorema de Desargues.

Sean a, b, c, a', b', c' seis puntos de un plano afín X de forma que no hay tres alineados. Supóngase que:

$$\langle a,\ b\rangle // \langle a',\ b'\rangle,\ \langle b,\ c\rangle //\ \text{y}\ \langle a,\ c\rangle // \langle a',\ c'\rangle.$$

Demostrar que las rectas $\langle a,\ a'\rangle$, $\langle b,\ b'\rangle$, y $\langle c,\ c'\rangle$ son paralelas o concurrentes.

7.26. Teorema de Pappus.

Sean R y R' dos rectas distintas de un plano afín X, que se cortan en un punto p. Sean $a, b, c \in R-\{p\}$, $a', b', c' \in R'-\{p'\}$, seis puntos distintos, tales que:

$$\langle a, b' \rangle // \langle a', b \rangle, \ \langle a, c' \rangle // \langle a', c \rangle$$

Demostrar que $\langle b, c' \rangle // \langle b', c \rangle$.

7.27.* Demostrar que el conjunto de puntos fijos de un endomorfismo afín, es subespacio afín. Determinar su dirección.

7.28. En el espacio afín $A_3(\mathbb{R})$ se da el endomorfismo afín f de matriz:

$$A=A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & -1 & -1 \\ 4 & 4 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ el punto } P=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ y}$$

los subespacios

$$M:(x_1+x_2+x_3=1), \qquad N \cdot \begin{cases} x_1=0 \\ x_2+x_3=0 \end{cases}$$

Determinar las ecuaciones implícitas de:

a) El subespacio de puntos fijos para f.

b) Los subespacios $f(M)$, $f^{-1}(N)$, $f^{-1}(P)$, y el subespacio imagen de f.

7.29. Sea X un espacio afín, y $f: X \to X$ una aplicación que transforma biyectivamente cada recta afín de X en otra recta paralela. Demostrar que f es una dilatación, si $\dim X \geqslant 2$ y el cuerpo $\mathbb{K}$ es distinto de $\mathbb{Z}_2$.

7.30. Demostrar que toda biyección de $A_2(\mathbb{Z}_2)$ en sí mismo es transformación afín.

7.31. Encontrar una biyección $f: A_3(\mathbb{Z}_2) \to A_3(\mathbb{Z}_2)$ que no sea transformación afín.

7.32. Demostrar que la aplicación:

$$A_2(\mathbb{C}) \ni \begin{pmatrix} 1 \\ z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ \bar{z}_1 \\ \bar{z}_2 \end{pmatrix} \in A_2(\mathbb{C})$$

($\bar{z}$ es el complejo conjugado de z)

es un biyección que transforma rectas en rectas, y sin embargo, no es transformación afín.

LECCION 8

EXTENSIONES VECTORIALES. GEOMETRIA ANALITICA

Demostraremos que a partir de un espacio afín X, es posible construir de forma canónica un espacio vectorial $\hat{X}$ denominado de puntos másicos, y una forma lineal no nula $ms: \hat{X} \to \mathbb{K}$ que denominamos «masa» de forma que X se identifica con el conjunto $\{x \in \hat{X} : ms(x) = 1\}$ con su estructura afín canónica inducida (véase ejemplo 2 de 1.6 Lección 7).

Esta construcción exige el estudio previo de ciertas combinaciones lineales de puntos que tienen significado propio en un espacio afín abstracto. A posteriori, estas combinaciones lineales servirán para definir las del espacio vectorial $\hat{X}$.

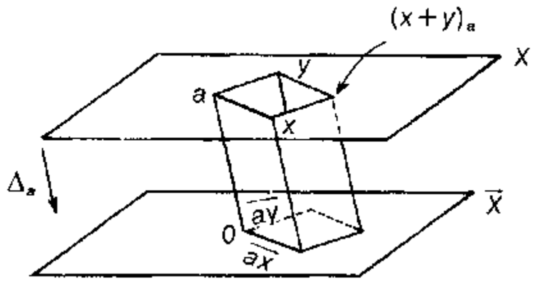
Ya en un «ambiente» vectorial estableceremos las bases de la geometría analítica afín cartesiana y baricéntrica a partir de ciertos sistemas de coordenadas en $\hat{X}$.

§1. COMBINACIONES LINEALES DE PUNTOS

Fijado un punto a del espacio afín X, la biyección $\Delta_a : X \to X$, permite dar una única estructura de espacio vectorial al conjunto de puntos X, de forma que Δ_a sea isomorfismo lineal. Dicho espacio vectorial, denotado por X_a, se denomina vectorialización del espacio afín en el punto a. Sus operaciones vienen explicitadas a continuación:

$(x+y)_a = a + \overrightarrow{ax} + \overrightarrow{ay}$

$(\lambda x)_a = a + \lambda\overrightarrow{ax}$



Nótese que si b es otro punto distinto de X, las vectorializaciones X_a y X_b son distintas.

Si el espacio afín de partida X, fuera el inducido por la pareja (V, φ) con V espacio vectorial, y $\varphi : V \to \mathbb{K}$ forma lineal no nula

$$(X = \{x \in V/\varphi(x) = 1\}, \ \vec{X} = \mathrm{Ker}(\varphi)),$$

una combinación lineal en la vectorialización X_a de X en $a \in X$, vendría definida para $(x_1, \ldots, x_r) \subset X$ y $\lambda_i \in \mathbb{K}$, por la fórmula:

$$\left(\sum_{i=0}^{r} \lambda_i x_i\right)_a = \sum_{i=0}^{r} (a + \lambda_i \overrightarrow{ax_i}) = \sum_{i=0}^{r} (a + \lambda_i x_i - \lambda_i a) =$$

$$= \left(1 - \sum_{i=0}^{r} \lambda_i\right) a + \sum_{i=0}^{r} \lambda_i x_i \in X \qquad (1.0.1)$$

En general una combinación lineal en V de puntos de X, no tiene por qué ser un punto de X, a no ser que la suma de los coeficientes sea la unidad. En efecto, si $(x_0, \ldots, x_r) \subset X$, $\lambda_i \in \mathbb{K}$ y $\sum_{i=0}^{r} \lambda_i = 1$, entonces:

$$\varphi\left(\sum_{i=0}^{r} \lambda_i x_i\right) = \sum_{i=0}^{r} \lambda_i \varphi(x_i) = \sum_{i=0}^{r} \lambda_i = 1, \text{ y } x = \sum_{i=0}^{r} \lambda_i x_i \in X$$

De la fórmula (1.0.1) se deduce que este punto x, también puede obtenerse como resultado de la misma combinación lineal de puntos en cualquier vectorialización X_a de X, ya que en este caso el coeficiente que afecta al punto a, $1-\sum_{i=0}^{r}\lambda_i$ es nulo.

Veamos que este resultado es también válido en un espacio afín general:

Proposición 1.1. Combinación afín de puntos

Sea $(x_0, \ldots, x_r)$ *un sistema de puntos en un espacio afín* X, *y* $(\lambda_0, \ldots, \lambda_r)$ un sistema de escalares de $\mathbb{K}$.

Si $\sum_{i=0}^{r}\lambda_i=1$, *entonces para todo par de puntos* a, b *de* X *se verifica la igualdad:*

$$x=a+\sum_{i=0}^{r}\lambda_i\overrightarrow{ax_i}=b+\sum_{i=0}^{r}\lambda_i\overrightarrow{bx_i}.$$

Se denomina al punto x *combinación afín de los puntos* $(x_0, \ldots, x_r)$ *(con masas* $(\lambda_0, \ldots, \lambda_r)$*) y lo denotamos por:*

$$x=\sum_{i=0}^{r}\lambda_i x_i$$

Demostración

$$a+\sum_{i=0}^{r}\lambda_i\overrightarrow{ax_i}=a+\sum_{i=0}^{r}\lambda_i(\overrightarrow{ab}+\overrightarrow{bx_i})=b+\overrightarrow{ba}+\left(\sum_{i=0}^{r}\lambda_i\right)\overrightarrow{ab}+$$
$$+\sum\lambda_i\overrightarrow{bx_i}=b+\overrightarrow{ba}+\overrightarrow{ab}+\sum\lambda_i\overrightarrow{bx_i}=b+\sum\lambda_i\overrightarrow{bx_i}$$

Observaciones 1.2.

1. Si $(x_0, \ldots, x_r)$ es un sistema de puntos del espacio afín X, y $(\lambda_0, \ldots, \lambda_r)$ un sistema de escalares con $\sum_{i=0}^{r}\lambda_i=1$, se deduce de lo anterior que son equivalente las afirmaciones:

i) $x=\sum_{i=0}^{r} \lambda_i x_i$

ii) Existe $a \in X$ tal que $\overrightarrow{ax}=\sum_{i=0}^{r} \lambda_i \overrightarrow{ax_i}$.

iii) Para todo $a \in X$ es $\overrightarrow{ax}=\sum \lambda_i \overrightarrow{ax_i}$.

2. Teniendo en cuenta que una combinación afín de puntos puede calcularse en cualquier vectorialización X_a del espacio afín, podemos manipular estas expresiones algebraicas como si se trataran de combinaciones lineales de vectores, teniendo naturalmente la precaución de que el resultado final tenga sentido en el espacio afín de partida X. Así por ejemplo:

a) Si $(x_0, \ldots, x_r)$, $(y_0, \ldots, y_s)$ son sistemas de puntos del espacio afín X, $(\lambda_0, \ldots, \lambda_r)$, $(\mu_0, \ldots, \mu_s)$

son sistemas de escalares con $\sum_{i=0}^{r} \lambda_i = \sum_{i=0}^{s} \mu_i = 1$, y $\lambda+\mu=1$, entonces:

$$\lambda\left(\sum_{i=0}^{r} \lambda_i x_i\right)+\mu\left(\sum_{i=0}^{s} \mu_i y_i\right)=\sum_{i=0}^{r} \lambda\lambda_i x_i+\sum_{i=0}^{s} \mu\mu_i y_i$$

Nótese que la última expresión es una combinación afín, pues:

$$\sum_{i=0}^{r} \lambda\lambda_i+\sum_{i=0}^{s} \mu\mu_i=\lambda\left(\sum_{i=0}^{r} \lambda_i\right)+\mu\left(\sum_{i=0}^{r} \mu_i\right)=\lambda+\mu=1$$

b) El resultado de la combinación afín de puntos $\sum_{i=0}^{r} \lambda_i x_i$ no cambia si se cambia el orden de los sumandos.

c) En la combinación afín de puntos $\sum_{i=0}^{r} \lambda_i x_i$ pueden suprimirse aquellos sumandos de la forma $0x$, sin que el resultado quede alterado.

d) Por convenio, en una combinación afín de puntos $\sum_{i=0}^{r} \lambda_i x_i$, los sumandos de la forma $1x$ se sustituyen por x, y los de la forma $(-1)x$ por $-x$. *Por ejemplo, la expresión:* $x=-a+b+c$, equivale a

$x=(-1)a+1b+1c$, y representa el punto x de X tal que $\overrightarrow{ax}=\overrightarrow{ab}+$ $+\overrightarrow{ac}$.

Ejemplo 1.3.

Una combinación afín de puntos $\Sigma\ \lambda_i \begin{pmatrix} 1 \\ a_{i1} \\ \vdots \\ a_{in} \end{pmatrix}$ en el espacio afín A_n $\left(\sum_{i=0}^{r} \lambda_i=1\right)$ viene dada por:

$$\sum_{i=0}^{r} \lambda_i \begin{pmatrix} 1 \\ a_{i1} \\ \\ a_{in} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \sum_{i=0}^{r} \lambda_i a_{i1} \\ \vdots \\ \sum_{i=0}^{r} \lambda_i a_{in} \end{pmatrix}$$

Analicemos ahora la combinación afín de dos puntos en un espacio afín arbitrario.

Proposición 1.4. Razón simple

Si a *y* b *son dos puntos distintos de un espacio afín* X.

a) *Para cada* $x \in \langle a, b\rangle$ *existe un único escalar* $\lambda \in \mathbb{K}$ *tal que* $x=$ $=a+\lambda\overrightarrow{ab}$. *Se denomina a* λ, *razón simple* e a, x, b *y lo denotamos por* $\lambda=(a:x:b)$.

b) *Se tienen las igualdades:*

$$\langle a, b\rangle=\{a+\lambda\overline{ab}\ .\ \lambda \in \mathbb{K}]=\{(1-\lambda)a+\lambda b : \lambda \in \mathbb{K}\}$$

c) *Para todo* $x \in \langle a, b\rangle$ *se tiene la identidad*

$$x=(b:x:a)a+(a:x:b)b$$

Demostración

Como se vió en 2.9, L.7, es $\langle a, b\rangle = a + \langle \overrightarrow{ab}\rangle$, por tanto los puntos x de $\langle a, b\rangle$ se escriben de la forma $x = a + \lambda\overrightarrow{ab}$, $\lambda \in \mathbb{K}$. Por otra parte, si $a + \lambda\overrightarrow{ab} = a + \mu\overrightarrow{ab}$, se deduce que $\lambda\overrightarrow{ab} = \mu\overrightarrow{ab}$, y por ser $\overrightarrow{ab} \neq 0$, se llega a $\lambda = \mu$.

Finalmente nótese que la igualdad $x = (1-\lambda)a + \lambda b$, equivale a

$$\overrightarrow{ax} = (1-\lambda)\overrightarrow{aa} + \lambda\overrightarrow{ab}, \quad \text{es decir,} \quad \overrightarrow{ax} = \lambda\overrightarrow{ab}. \ \square$$

Analicemos el comportamiento de las combinaciones afines de puntos frente a los subespacios y aplicaciones afines:

Proposición 1.5. Combinaciones afines y subespacios

Sea X *espacio afín sobre el cuerpo* $\mathbb{K}$.

a) Un subconjunto no vacío M *del espacio afín* X *es subespacio afín, si y sólo si contiene a cualquier combinación afín de sus puntos.*

b) Si $(x_0, \ldots, x_r)$ *es un sistema de puntos del espacio afín* X, *entonces el conjunto* M *de todas las combinaciones afines de los puntos del sistema, es un subespacio afín, y se verifica la igualdad:*

$$M = \langle x_0, \ldots, x_r\rangle$$

Demostración

a) Si M es subespacio afín de X, fijado $a \in X$, cualquiera que sea la combinación afín $x = \sum_{i=0}^{r} \lambda_i x_i$ de puntos x_i de M, se tiene que $\overrightarrow{ax_i} \in \overrightarrow{M}$, por tanto $\overrightarrow{ax} = \Sigma\lambda_i\overrightarrow{ax_i} \in \overrightarrow{M}$, y se verifica: $x = a + \overrightarrow{ax} \in M$.

Recíprocamente, si todas las combinaciones afines de puntos de M están en M, fijado $a \in M$, probemos que M_a es subespacio vectorial:

— Si $x \in M$, $\lambda \in \mathbb{K}$, y $\lambda\overrightarrow{ax} = \overrightarrow{ay}$, entonces $y = (1-\lambda)a + \lambda x \in M$, así hemos probado:

$$\vec{v} \in \overrightarrow{M}, \quad \lambda \in \mathbb{K} \Rightarrow \lambda\vec{v} \in \overrightarrow{M}$$

— Si $\vec{v}=\overrightarrow{ax} \in \vec{M}$ $(x \in M)$, $\vec{w}=\overrightarrow{ay} \in \vec{M}$ $(y \in M)$, sea $\overrightarrow{az}=\overrightarrow{ax}+\overrightarrow{ay}$. Se verifica entonces:

$$z=-a+x+y \in M, \quad \text{y por tanto} \quad \overrightarrow{az}=\vec{v}+\vec{w} \in \vec{M}$$

b) Si $a=\sum_{i=0}^{r} \lambda_i x_i$, $b=\sum_{i=0}^{r} \mu_i x_i$ son dos combinaciones afines de los puntos x_i, entonces para todo $\lambda \in K$ se verifica:

$$(1-\lambda)a+\lambda b=\sum_{i=0}^{r} ((1-\lambda)\lambda_i+\lambda\mu_i)x_i$$

que es combinación afín de los puntos x_i. Por tanto:

$$\langle a, b\rangle \subset M \quad \text{para todo} \quad a, b \in M$$

y M contiene a cada recta que pasa por dos cualesquiera de sus puntos. Si el cuerpo $\mathbb{K}$ es distinto de $\{0, 1\}$, por la proposición 2.13, L.7 se concluye que M es subespacio afín. Si no hacemos esta hipótesis, puede probarse de forma análoga que M contiene a cualquier combinación lineal de sus puntos y por a) M es subespacio afín.

La igualdad $M=\langle x_0, ..., x_r\rangle$ es ya inmediata, pues $M \supset \{x_0, ..., x_r\}$ (ya que cada x_i es combinación afín trivial de puntos del sistema), y si N es un subespacio afín que contiene a $\{x_0, ..., x_r\}$, por a) se verifica que $M \subset N$. □

Observaciones 1.6.

1. Si el cuerpo $\mathbb{K} \neq \{0, 1\}$, para que un subconjunto M de X sea subespacio afín, es suficiente que contenga a cualquier combinación afín de dos cualesquiera de sus puntos, pues entonces contiene a la recta que los une (ver 2.13, L.7).

2. Del razonamiento utilizado en a) se deduce que, para que un subconjunto M de X sea subespacio afín, es suficiente que contenga a cada combinación de tres cualesquiera de sus puntos.

Proposición 1.7. Combinaciones afines y aplicaciones afines

Sea $f: X \to X'$ *una aplicación entre espacios afines sobre el mismo cuerpo* $\mathbb{K}$.

a) f *es afín si y sólo si para toda combinación afín* $\sum_{i=0}^{r} \lambda_i x_i$ *de puntos de* X, se verifica:

$$f\left(\sum_{i=0}^{r} \lambda_i x_i\right) = \sum_{i=0}^{r} \lambda_i \, f(x_i)$$

b) Si $1+1$ *es distinto de* 0 *en* $\mathbb{K}$, *y* f *verifica:*

$$f((1-\lambda)a+\lambda b) = (1-\lambda)\, f(a) + \lambda f(b)$$

Para todo $\lambda \in \mathbb{K}$, *y todo* a, b $\in \mathbb{K}$, *entonces* f *es afín.*

Demostración

a) Supóngase que $f: X \to X'$ es afín. Fijado un punto a de X, y supuesto $x = \sum_{i=0}^{r} \lambda_i x_i$, con $\sum_{i=0}^{r} \lambda_i = 1$, *se verifica:*

$$\overrightarrow{ax} = \sum_{i=0}^{r} \lambda_i \overrightarrow{ax_i}, \text{ y } \overrightarrow{f(a)\, f(x)} = \vec{f}(\overrightarrow{ax}) = \sum_{i=0}^{r} \lambda_i \, \vec{f}(\overrightarrow{ax_i}) = \sum_{i=0}^{r} \lambda_i \, \overrightarrow{f(a) f(x_i)}.$$

Por tanto $f(x) = \Sigma \, \lambda_i f(x_i)$.

Reciprocamente, si f verifica la condición anterior para toda combinación afín de puntos, fijado $a \in X$ probemos que la aplicación:

$$f_a: \vec{X} \ni \overrightarrow{ax} \to \overrightarrow{f(a)\, f(x)} \in \vec{X}'$$

es lineal.

Si $\overrightarrow{az} = \overrightarrow{ax} + \overrightarrow{ay}$, se tiene, $z = -a + x + y$, y $f(z) = -f(a) + f(x) + f(y)$, es decir:

$$f_a(\overrightarrow{ax} + \overrightarrow{ay}) = f_a(\overrightarrow{az}) = \overrightarrow{f(a)\, f(z)} = \overrightarrow{f(a)\, f(x)} + \overrightarrow{f(a)\, f(y)} = f_a(\overrightarrow{ax}) + f_a(\overrightarrow{ay}).$$

Esto prueba que f_a es aditiva. Por otra parte, si $\overrightarrow{ay}=\lambda\overrightarrow{ax}$, es

$$y=(1-\lambda)a+\lambda x; \quad \text{y} \quad f(y)=(1-\lambda)\ f(a)+\lambda f(x).$$

Por tanto:

$$f_a(\lambda\overrightarrow{ax})=f_a(\overrightarrow{ay})=\overrightarrow{f(a)\ f(y)}=\lambda\overrightarrow{f(a)\ f(x)}=\lambda f_a(\overrightarrow{ax}).$$

b) Probemos que fijado $a\in X$, la aplicación
$f_a: \vec{X}\ni\overrightarrow{ax}\to\overrightarrow{f(a)f(x)}\in\vec{X}'$ es aditiva.

Si $\overrightarrow{ax}=\overrightarrow{ab}+\overrightarrow{ac}$, se deduce que $x=-a+b+c=-a+2\left(\frac{1}{2}b+\frac{1}{2}c\right)$, y por hipótesis se verifica,

$$f(x)=-f(a)+2\left(\frac{1}{2}\ f(b)+\frac{1}{2}\ f(c)\right)=-f(a)+f(b)+f(c).$$

Por tanto:

$$f_a(\overrightarrow{ab}+\overrightarrow{ac})=f_a(\overrightarrow{ax})=\overrightarrow{f(a)\ f(x)}=\overrightarrow{f(a)\ f(b)}+\overrightarrow{f(a)\ f(c)}=f_a(\overrightarrow{ab})+f_a(\overrightarrow{ac}).$$

La linealidad de f_a se deduce del último argumento utilizado en a). □

Observaciones 1.8.

1. Del razonamiento utilizado en la demostración de a) se deduce que para que una aplicación entre espacios afines sea afín, es suficiente que conserve las combinaciones afines de ternas de puntos.

2. La afirmación b) de la proposición anterior sigue siendo válida si sólo se impone la restricción $\mathbb{K}\neq\{0,\ 1\}$. Sin embargo, su demostración en estas condiciones hubiera sido mucho más laboriosa.

3. Una aplicación $f: X\to X'$ entre espacios afines, se dice que conserva la razón simple, si para todo par de puntos a, b de X tales que $f(a)\neq f(b)$ se verifica la siguiente propiedad:

Si $x\in\langle a,\ b\rangle$ entonces $f(x)\in\langle f(a),\ f(b)\rangle$, y $(a:x:b)=$
$=(f(a):f(x):f(b))$.

La afirmación b) de la proposición anterior, prueba que en general, las aplicaciones afines de X en X' son justamente las que conservan la razón simple.

Pueden definirse otro tipo de combinaciones lineales de puntos que tienen significado en espacios afines generales, y cuyo resultado es un vector.

Proposición 1.9. Combinación vectorial de puntos

Sea $(x_0, \ldots, x_r)$ *un sistema de puntos en el espacio afín* X, *y* $(\lambda_0, \ldots, \lambda_r)$ *un sistema de escalares.*

Si $\sum_{i=0}^{r} \lambda_i = 0$, *entonces para todo par de puntos* a, b *de* X *se verifica:*

$$\sum_{i=0}^{r} \lambda_i \overrightarrow{ax_i} = \sum_{i=0}^{r} \lambda_i \overrightarrow{bx_i} = \vec{v}$$

Al vector $\vec{v}$ *se le denomina combinación vectorial de los puntos* $(x_0, \ldots, x_r)$, *y se escribe*

$$\vec{v} = \sum_{i=0}^{r} \lambda_i x_i$$

Demostración

$$\sum_{i=0}^{r} \lambda_i \overrightarrow{ax_i} = \sum_{i=0}^{r} \lambda_i (\overrightarrow{ab} + \overrightarrow{bx_i}) = \left(\sum_{i=0}^{r} \lambda_i \right) \overrightarrow{ab} + \sum_{i=0}^{r} \lambda_i \overrightarrow{bx_i} = \sum_{i=0}^{r} \lambda_i \overrightarrow{bx_i}.$$

Observaciones 1.10.

1. En el modelo de espacio afín (V, φ) utilizado al principio del epígrafe, las combinaciones vectoriales de puntos de X, son las lineales (en V) de puntos de X con suma nula de coeficientes.

2. Si $\sum_{i=0}^{r} \lambda_i x_i$ es una combinación vectorial de puntos en X, son equivalentes las afirmaciones:

i) $\vec{v}=\sum_{i=0}^{r} \lambda_i x_i$.

ii) Existe $a \in X$ tal que $\vec{v}=\sum \lambda_i \overrightarrow{ax_i}$.

iii) Para todo $a \in X$ es $\vec{v}=\sum_{i=0}^{r} \lambda_i \overrightarrow{ax}$.

Por ejemplo, para todo par de puntos a, b de X se tiene la identidad:

$$\overrightarrow{ab}=b-a \quad \text{(es decir } \overrightarrow{ab}=1b+(-1)a\text{)}.$$

3. Las combinaciones lineales (afines o vectoriales) de puntos en un espacio afín, pueden manipularse como si se trataran de combinaciones lineales de vectores.

Así, por ejemplo, de la igualdad $\overrightarrow{ax}=\lambda\overrightarrow{ab}$, obtenemos, $x-a=\lambda(b-a)=\lambda b-\lambda a$, y por tanto, $x=a+\lambda b-\lambda a=(1-\lambda)a+\lambda b$.

El resultado final es claramente correcto, aunque algunos pasos intermedios aún no han sido justificados.

4. Si $f: X \to X'$ es aplicación afín, y $\sum_{i=0}^{r} \lambda_i x_i$ es una combinación vectorial de puntos de X $\left(\sum_{i=0}^{r} \lambda_i=0\right)$, entonces:

$$\vec{f}\left(\sum_{i=0}^{r} \lambda_i x_i\right)=\sum_{i=0}^{r} \lambda_i f(x_i)$$

§2. EXTENSIONES VECTORIALES

Las combinaciones lineales de puntos (afines o vectoriales) en un espacio afín abstracto X, son en realidad combinaciones lineales de vectores, y en consecuencia pueden manipularse como tales.

De hecho probaremos que es posible construir de forma canónica un espacio vectorial $\hat{X}$ y una forma lineal no nula $ms: \hat{X} \to \mathbb{K}$ (que denominamos masa), de forma que $X=\{x \in \hat{X} : ms(x)=1\}$, y la estructura afín de X sea justamente la inducida por la pareja $(\hat{X}, ms)$. Utilizaremos el siguiente simbolismo:

Nota 2.1. Convenios y notaciones

Si V es un espacio vectorial sobre el cuerpo K, y $\varphi : V \rightarrow K$ es una forma lineal no nula de V, denotamos por $X(\varphi)$ al conjunto:

$$X(\varphi) = \{x \in V \,.\, \varphi(x) = 1\}$$

con su estructura canonica de espacio afín, sobre el espacio vectorial:

$$\overrightarrow{X}(\varphi) = \{\vec{v} \in V \cdot \varphi(\vec{v}) = 0\}$$

Como es habitual, X será un espacio afín con cuerpo base $\mathbb{K}$-

Por razones de simplicidad, supondremos que el cuerpo $\mathbb{K}$ tiene caracteristica distinta de dos (es decir, $1+1 \neq 0$ en $\mathbb{K}$), con objeto de poder utilizar las caracterizaciones de subespacios y aplicaciones afines en términos de combinación afín de dos puntos. El lector puede, sin embargo, subsanar fácilmente esta restricción, extendiendo la validez de las afirmaciones en donde intervienen combinaciones afines de dos puntos, a un número arbitrario de ellos.

Definición 2.2. Extensiones vectoriales de un espacio afín

Una extensión vectorial de un espacio afín X, *es una terna* $(\imath, \mathrm{V}, \varphi)$, *donde:*

— V *es un espacio vectorial.*

— $\varphi : \mathrm{V} \rightarrow \mathbb{K}$ *es una forma lineal no nula en* V.

— $\imath : \mathrm{X} \rightarrow \mathrm{X}(\varphi) \subset \mathrm{V}$ *es un isomorfismo afín.*

Ejemplos 2.3.

1. La terna (i, V, φ) constituye una extensión vectorial para el espacio afín $X(\varphi)$, siendo V espacio vectorial, φ forma lineal no nula de V, y $\imath . X(\varphi) \rightarrow X(\varphi)$ la aplicación identidad.

2. Un espacio vectorial V, es en particular un espacio afín. Construyamos una extensión vectorial:

Sea $\hat{V}=\left\{\begin{pmatrix}\lambda \\ v\end{pmatrix} : \lambda \in K,\ v \in V\right\}$ con su estructura vectorial canónica.

Sea $\varphi : \hat{V} \ni \begin{pmatrix}\lambda \\ v\end{pmatrix} \to \lambda \in \mathbb{K}$, y sea finalmente:

$$i : V \ni v \to \begin{pmatrix}1 \\ v\end{pmatrix} \in X(\varphi) = \left\{\begin{pmatrix}1 \\ v\end{pmatrix} : v \in V\right\}$$

La terna $(i, \hat{V}, \varphi)$ define una extensión vectorial de V como espacio afín. Nótese que la aplicación $\vec{i}$ viene definida por:

$$\vec{i} : V \ni v \to \begin{pmatrix}0 \\ v\end{pmatrix} \in \vec{X}(\varphi) = \left\{\begin{pmatrix}0 \\ v\end{pmatrix} : v \in V\right\}$$

3. Como caso particular del ejemplo anterior, tómese el espacio vectorial:

$$V_n(\mathbb{K}) = V = \left\{\begin{pmatrix}x_1 \\ \vdots \\ x_n\end{pmatrix} : x_i \in \mathbb{K}\right\},$$

entonces:

$$\hat{V} = \left\{\begin{pmatrix}x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_n\end{pmatrix} : x_i \in \mathbb{K}\right\}, \quad \varphi : \hat{V} \ni \begin{pmatrix}y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_n\end{pmatrix} \to y_0 \in \mathbb{K}$$

Por último

$$i : V \ni \begin{pmatrix}x_1 \\ \vdots \\ x_n\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}1 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_n\end{pmatrix} \in A_n$$

es el isomorfismo afín de la extensión.

Veamos que un espacio afín admite de forma trivial extensiones vectoriales:

Proposición 2.4.

Un espacio afín X, *admite siempre alguna extensión vectorial* (i, V, φ).

Demostración

Fijado el punto a de X, sea:

$$V=\left\{\begin{pmatrix}\lambda\\ \vec{v}\end{pmatrix} : \lambda \in \mathbb{K},\ \vec{v} \in \vec{X}\right\},\ \text{y}\ \varphi : V \ni \begin{pmatrix}\lambda\\ \vec{v}\end{pmatrix} \to \lambda \in \mathbb{K}.$$

La aplicación

$$i : X \ni x \to \begin{pmatrix}1\\ \overrightarrow{ax}\end{pmatrix} \in \vec{X}(\varphi)=\left\{\begin{pmatrix}1\\ \vec{v}\end{pmatrix} : \vec{v} \in \vec{X}\right\},$$

es claramente una biyección, y para todo x, $y \in X$, y todo λ, $\mu \in \mathbb{K}$ con $\lambda+\mu=1$, se tiene:

$$i(\lambda x+\mu y)=\begin{pmatrix}1\\ \lambda\overrightarrow{ax}+\mu\overrightarrow{ay}\end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix}1\\ \overrightarrow{ax}\end{pmatrix}+\mu\begin{pmatrix}1\\ \overrightarrow{ay}\end{pmatrix}=\lambda i(x)+\mu i(y).$$

Por 1.7 se concluye que i es isomorfismo afín. □

El siguiente resultado nos marcará la vía para construir una extensión canónica del espacio afín X (que no dependa de un punto concreto del espacio).

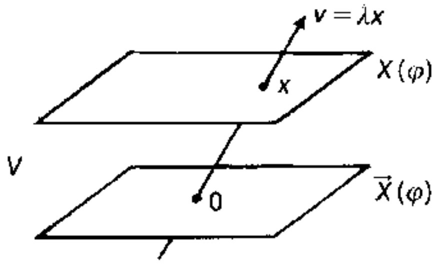
Proposición 2.5.

Sea $\mathrm{X}=\mathrm{X}(\varphi)$ *el espacio afín asociado al espacio vectorial* V *con la forma lineal no nula* φ, y $\vec{X}=\vec{X}(\varphi)=\ker(\varphi)$ *el espacio vectorial asociado.*

El espacio vectorial V *se puede escribir entonces como unión disjunta de la familia de conjuntos* $\mathbb{K}^*\mathrm{x}=\{\lambda \mathrm{x} : \lambda \in \mathbb{K}^*=\mathbb{K}-\{0\}\}$, *con* $\mathrm{x} \in \mathrm{X}$, *y el conjunto* $\vec{\mathrm{X}}$. *Brevemente:*

$$\mathrm{V}=(\mathbb{K}^*\mathrm{X}) \cup \vec{\mathrm{X}}$$

donde $\mathbb{K}^*\mathrm{X}=\{\lambda\mathrm{x} : \lambda \in \mathbb{K}^*,\ \mathrm{x} \in \mathrm{X}\}$.



Demostración. (véase figura)

El conjunto $\mathbb{K}^* X$ puede expresarse por:

$$\mathbb{K}^* X = \{v \in V : \varphi(v) \neq 0\}$$

ya que si $\varphi(v) \neq 0$, entonces

$$\frac{1}{\varphi(v)}\, v = x \in X \left(\text{pues } \varphi(x) = \varphi\left(\frac{1}{\varphi(v)} v\right) = \frac{1}{\varphi(v)}\, \varphi(v) = 1\right),$$

y $v = \varphi(v)\, x \in \mathbb{K}^* X$.

La intersección de $\mathbb{K}^* X$ y $\vec{X}(\varphi) = \ker(\varphi)$, es por tanto vacia, y se obtiene:

$$V = \{v \in V : \varphi(v) \neq 0\} \cup \{v \in V : \varphi(v) = 0\} = (\mathbb{K}^* X) \cup \vec{X}$$

por último, si x, $y \in X$ λ, $\mu \in \mathbb{K}$ y se verifica:

$$\lambda x = \mu y$$

aplicando φ a los dos miembros de la igualdad, se concluye que $\lambda = \varphi(\lambda x) = \varphi(\mu y) = \mu$, es decir:

$$\lambda x = \lambda y$$

de donde se deduce $\lambda(x-y) = 0$, y por ser λ no nulo es $x = y$.

En las hipótesis de la proposición anterior, un vector de la forma λx ($\lambda \in \mathbb{K}$, $x \in X$) puede interpretarse como el punto x del espacio afín X, «afectado» de la masa, $\varphi(\lambda x) = \lambda \varphi(x) = \lambda \cdot 1$.

Construyamos el conjunto base $\hat{X}$ de la extensión vectorial canónica que pretendemos establecer para un espacio afín abstracto X:

Definición 2.6. Conjunto de puntos másicos

a) Fijado el punto x *del espacio afín* X, *y un escalar* λ *no nulo de* $\mathbb{K}$, *denominamos a la pareja* (λ, x) *punto másico con masa* λ. *Por convenio, escribimos:*

$$(\lambda, x) = \lambda \; x$$

b) Un vector $\vec{v}$ *de* $\vec{X}$ *será denominado punto másico de masa nula.*

c) El conjunto de puntos másicos de X, *lo denotaremos por* $\hat{X}$:

$$\hat{X} = \mathbb{K}^* \; X \cup \vec{X} = \{\lambda \; x : \lambda \in \mathbb{K}^*, \, x \in X\} \cup \vec{X}$$

d) La aplicación $ms : \hat{X} \to \mathbb{K}$ *que hace corresponder a cada punto másico su masa, la denominamos aplicación «masa»*

e) La inyección $1. : X \ni x \to 1.x \in \hat{X}$, *se denomina inmersión canónica de* X *en* $\hat{X}$.

Observaciones 2.7.

1. Nótese que $ms(\lambda \; x) = \lambda$ para todo $x \in X$ y todo $\lambda \in \mathbb{K}$. Además, $\vec{X} = \{\hat{x} \in \hat{X} : ms(\hat{x}) = 0\}$.
2. La imagen de la inmersión canónica $1. : X \to \hat{X}$ es:

$$1.X = \{1.x : x \in X\} = \{\hat{x} \in \hat{X} : ms(\hat{x}) = 1\}$$

La proposición 2.5 permite obtener de forma inmediata el siguiente resultado de carácter estrictamente conjuntista:

Corolario 2.8.

Sea (i, V, φ) *una extensión vectorial del espacio afín* X, *y sea* $\hat{X}$ *el conjunto de sus puntos másicos.*

Considérese la aplicación $\hat{\imath} : \hat{X} \to V$ *definida por:*

— $\hat{\imath}(\vec{v}) = i'(\vec{v})$ *para todo* $\vec{v} \in \vec{X}$.

— $\hat{\imath}(\lambda \; x) = \lambda i(x)$ *para todo* $\lambda \in \mathbb{K}$ *y todo* $x \in X$.

Entonces:

1) $\hat{\imath} : \hat{X} \to V$ *es una biyección.*

2) Se verifica: $\mathrm{ms}(\hat{x}) = \varphi(\hat{\imath}(\hat{x}))$ *para todo* $\hat{x} \in \hat{X}$. *En particular,* $\hat{\imath}$ *aplica biyectivamente el conjunto* $1.X$ *en* $X(\varphi)$.

Demostración

Nótese que $\hat{\imath}$ envía biyectivamente $\vec{X}$ a $\vec{X}(\varphi)$ por medio del isomorfismo lineal $\vec{\imath} : \vec{X} \to \vec{X}(\varphi)$, y para cada $x \in X$, $\hat{\imath}$ envía biyectivamente la «fibra» $\mathbb{K}^* \cdot x = \{\lambda \cdot x : \lambda \in K^*\}$ a la correspondiente $\mathbb{K}^* i(x) = \{\lambda i(x) : \lambda \in \mathbb{K}^*\}$.

Teniendo en cuenta ahora que $i : X \to X(\varphi)$ es biyectiva, y las descomposiciones de V y $\hat{X}$ en unión disjunta dadas en 2.5 y la definición 2.6 se deduce la biyectividad de $\hat{\imath}$.

De cualquier forma, puede comprobarse directamente, que la aplicación inversa de $\hat{\imath}$, $\hat{\imath}^{-1} : V \to \hat{X}$ viene dada por las fórmulas:

$$\hat{\imath}^{-1}(v) = \begin{cases} \varphi(v) \cdot i^{-1}\left(\dfrac{1}{\varphi(v)}\, v\right), & \text{si } \varphi(v) \neq 0 \\ \vec{\imath}(v), & \text{si } \varphi(v) = 0 \end{cases} \tag{2.8.1}$$

Estamos ya en condiciones de probar el resultado fundamental de éste epígrafe:

Proposición 2.9. Teorema de extensión

Dado el espacio afín X, existe una estructura vectorial para el conjunto $\hat{X}$ de sus puntos másicos de forma que:

1) La aplicación masa $\mathrm{ms} : \hat{X} \to \mathbb{K}$ *es una forma lineal.*

2) $(1., \hat{X}, \mathrm{ms})$ *es extensión vectorial del espacio afín* X.

Por otra parte, una estructura vectorial para X *que verifica las propiedades* 1) *y* 2) *viene explicitada por las siguientes fórmulas, para* $x, y \in X$ $\lambda, \mu \in \mathbb{K}^*$, $\vec{v}, \vec{w} \in \vec{X}$:

$$\lambda \cdot x + \mu \cdot y = \begin{cases} (\lambda + \mu) \cdot \left(\dfrac{\lambda}{\lambda+\mu} x + \dfrac{\mu}{\lambda+\mu}\right) & \text{si } \lambda + \mu \neq 0 \\ \lambda x + \mu y \ \textit{(suma vectorial) si } \lambda + \mu = 0 \end{cases} \tag{2.9.1}$$

$$\lambda \cdot x+\vec{v}=\vec{v}+\lambda \cdot x=\lambda \cdot \left(x+\frac{1}{\lambda}\vec{v}\right)$$

$$\vec{v}+\vec{w}=\vec{v}+\vec{w} \text{ (en } \overline{X})$$

$$\lambda\vec{v}=\lambda\vec{v} \text{ (en } \overline{X})$$

$$\mu(\lambda \cdot x)=(\mu\lambda)\cdot x, \text{ y } 0\,(\lambda \cdot x)=0$$

Demostración

Sea (i, V, φ) una extensión vectorial cualquiera de X, cuya existencia queda garantizada por 2.4, y sea $\hat{\imath}: \hat{X} \to V$ la biyección establecida en 2.8.

Es posible dotar a $\hat{X}$ de una única estructura vectorial que haga $\hat{\imath}$ isomorfismo lineal, mediante las fórmulas:

$$\hat{x}+\hat{y}=\hat{\imath}^{-1}(\hat{\imath}(x)+\hat{\imath}(y)) \text{ para todo } \hat{x}, \hat{y} \in X \tag{2.9.2}$$

$$\lambda\hat{x}=\hat{\imath}^{-1}(\lambda\hat{\imath}(\hat{x})) \text{ para todo } \lambda \in \mathbb{K} \text{ y todo } \hat{x} \in \hat{X} \tag{2.9.3}$$

Nos proponemos demostrar que éstas fórmulas son las mismas que las dadas más arriba en (2.9.1).

Por ejemplo, si $x, y \in X$, $\lambda, \mu \in \mathbb{K}^*$ y $\lambda+\mu\neq 0$, se tiene por (2.9.2), y (2.8.1):

$$\lambda \cdot x+\mu \cdot y=\hat{\imath}^{-1}(\lambda i(x)+\mu i(y))=(\lambda+\mu)\cdot i^{-1}\left(\frac{\lambda}{\lambda+\mu} i(x)+\right.$$

$$\left.+\frac{\mu}{\lambda+\mu} i(y)\right)=(\lambda+\mu)\cdot\left(\frac{\lambda}{\lambda+\mu}x+\frac{\mu}{\lambda+\mu}y\right).$$

que coincide con la dada en (2.9.1).

De forma análoga pueden comprobarse el resto de los casos (véase ejercicio 8.9).

Esto prueba que las operaciones definidas en (2.9.1) dan estructura de espacio vectorial a $\hat{X}$.

El corolario 2.7 muestra que $ms=\varphi \cdot \hat{\imath}$ es forma lineal (pues $\hat{\imath}$ y φ son lineales). Por último, la aplicación:

$$1 \quad X \ni x \to 1 \cdot x \in 1 \cdot X$$

es afín, pues para todo x, $y \in X$, λ, $\mu \in \mathbb{K}$ con $\lambda+\mu=1$ se verifica por 2.8.1:

$$1 \cdot (\lambda x + \mu y) = \lambda \cdot x + \mu \cdot y = \lambda(1 \cdot x) + \mu(1 \cdot y)$$

Esto concluye la demostración. □

Definición 2.10.

Dado X *espacio afín, sea* $\hat{\mathrm{X}}$ *el espacio vectorial* X *construido en 2.9.*

— *Se denomina* $\hat{\mathrm{X}}$ *espacio vectorial de los puntos másicos de* X.

— *A la aplicación* $\mathrm{ms} : \hat{\mathrm{X}} \to \mathbb{K}$ *se la denomina forma lineal «masa».*

— $(1., \hat{\mathrm{X}}, \mathrm{ms})$ *o* $(\hat{\mathrm{X}}, \mathrm{ms})$ *o simplemente* $\hat{\mathrm{X}}$ *es la extensión vectorial canónica de* X.

Observaciones 2.11.

1. Como la aplicación $1 \cdot : X \ni x \to 1 \cdot x \in 1 \cdot X$, es isomorfismo afín, es natural identificar ambos conjuntos escribiendo:

$$x = 1 \cdot x \text{ para todo } x \in X$$

2. Como consecuencia de la identificación anterior, se verifica para todo $x \in X$, y todo $\lambda \in \mathbb{K}$

$$\lambda \cdot x = \lambda(1 \cdot x) = \lambda x$$

y $\lambda \cdot x$ queda identificado con λx.

3. La expresión $x = \lambda y + \mu z$ con x, $y \in X$, $\lambda+\mu=1$, es una combinación afín de dos puntos de X, que podría escribirse (en $\hat{X}$) de la forma, $1 \cdot x = \lambda \cdot y + \mu \cdot z$. Con las identificaciones anteriores, queda oculta (felizmente) la distinción entre ambas interpretaciones.

4. Para cada punto $a \in X$, podemos escribir la igualdad:

$$X = \mathbb{K}a \oplus \overline{X}$$

Siendo $\mathbb{K}a = \{\lambda a : \lambda \in \mathbb{K}\}$ la recta vectorial definida en $\hat{X}$ por a.

En efecto, si $\hat{x}$ es un vector de $\hat{X}$ con $ms(\hat{x}) = \lambda \neq 0$, entonces $x = \frac{1}{\lambda}\hat{x}$ tiene masa la unidad, y está por tanto en $X = a + \vec{X}$, es decir:

$$x = a + \vec{v} \text{ para cierto } \vec{v} \in \vec{X}, \text{ y } \hat{x} = \lambda(a+v) = \lambda a + \lambda v$$

Los elementos de la geometría afín —subespacios y aplicaciones— pueden expresarse vectorialmente por medio de las extensiones vectoriales, como veremos a continuación.

Proposición 2.12. Extensión vectorial de subespacios afines

Sea X *espacio afín, y* ($\hat{X}$, ms) *extensión vectorial de* X.

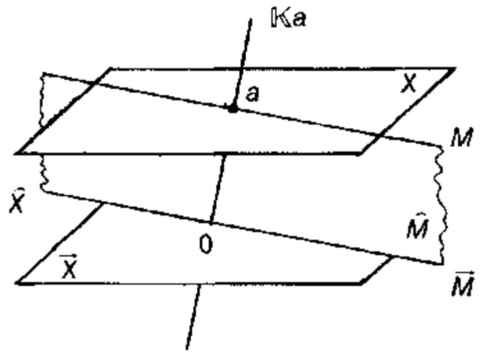
a) *Si* $\hat{M}$ *es un subespacio vectorial de* $\hat{X}$ *no contenido en* $\vec{X}$, *entonces* $M = \hat{M} \cap X$ *es un subespacio afín no vacío de* X *con dirección* $\vec{M} = \hat{M} \cap \vec{X}$.

b) *Recíprocamente, si* M *es un subespacio afín no vacío de* X, *existe un único subespacio vectorial* $\hat{M}$ *de* $\hat{X}$, *tal que* $\hat{M} \cap X = M$.

Por otra parte, la dirección de M *es* $\vec{M} = \hat{M} \cap \vec{X}$.

Demostración

a) Como por hipótesis $\hat{M} \not\subset \vec{X}$, es $ms/\hat{M} = \varphi : \hat{M} \to \mathbb{K}$, forma lineal no nula. Así: $M = \hat{M} \cap X = \{a \in \hat{M} : \varphi(a) = 1\}$ es espacio afín con dirección $\vec{M} = \{v \in \hat{M} : \varphi(v) = 0\}$, y subespacio afín de X.



b) Sea a un punto del subespacio afín M. Tomemos: $\hat{M} = \mathbb{K}a \oplus \vec{M}$, donde $\mathbb{K}a$ es la recta vectorial en $\hat{X}$ generada por a, y $\vec{M}$ es la dirección de M.

Probemos que $\hat{M} \cap X = M$. En efecto, claramente $M = a + \vec{M}$ está contenido en $\hat{M}$ y en X, luego:

$$M \subset \hat{M} \cap X$$

Recíprocamente, si $\lambda \in \mathbb{K}$ $\vec{v} \in \vec{M}$, y $\lambda a + \vec{v} \in X$, entonces

$$ms(\lambda a + \vec{v}) = \lambda ms(a) + ms(\vec{v}) = \lambda = 1, \text{ por tanto } \lambda a + \vec{v} = a + \vec{v} \in M,$$

y se tiene el otro contenido.

Sea $\tilde{M}$ otro subespacio vectorial tal que $\tilde{M} \cap X = M$. Por a), se tiene que $\tilde{M} \cap X = \vec{M}$. En particular, $a \in \tilde{M}$ y $\vec{M} \subset \tilde{M}$. Así:

$$\tilde{M} \supset \mathbb{K}a \oplus \vec{M} = \hat{M}$$

Por otra parte, si $\hat{x} \in \hat{M}$ y $ms(\hat{x}) = \lambda \neq 0$, entonces $x = \frac{1}{\lambda}\hat{x} \in M \subset \tilde{M}$, y por ser a subespacio vectorial, es $\hat{x} = \lambda x \in \tilde{M}$. Esto prueba el otro contenido. $\square$

Ejemplo 2.13.

Un subespacio afín M de dimensión p, en el modelo analítico cartesiano A_n, viene definido como sabemos por un sistema de $r = n - p$ ecuaciones independientes de la forma:

$$\left.\begin{array}{l} a_1 + a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_r + a_{r1}x_1 + \ldots + a_{rn}x_n = 0 \end{array}\right\}$$

Las ecuaciones en $\hat{V}_n$ de su extensión vectorial $\hat{M}$, son entonces:

$$\left.\begin{array}{l} a_1x_0 + a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_rx_0 + a_{r1}x_1 + \ldots + a_{rn}x_n = 0 \end{array}\right\}$$

ya que al añadir a estas últimas ecuaciones la de $A_0(x_0=0)$ se obtienen las de arriba.

Proposición 2.14. Extensión vectorial de aplicaciones afines

Sean $(\hat{X}, ms)$ $(\hat{X}', ms')$ *extensiones vectoriales respectivas de los espacios afines* X *y* X'.

a) Si $\hat{f}: \hat{X} \to \hat{X}'$ *es una aplicación lineal, tal que* $\hat{f}(X) \subset X'$, *entonces:*

i) $f=\hat{f}/X : X \ni x \to \hat{f}(x) \in X'$ *es aplicación afín.*

ii) $\hat{f}(\vec{X}) \subset \vec{X}$, *y la aplicación lineal* $\vec{f}$ *asociada a* f *es:*

$$\vec{f}=\hat{f}/\vec{X} : \vec{X} \ni \vec{v} \to \hat{f}(\vec{v}) \in \vec{X}$$

iii) $\hat{f}$ *hace conmutativo el diagrama:*

$$\begin{tikzcd}
\hat{X} \arrow[rr, dashed, "\hat{f}"] \arrow[dr, "ms"'] & & \hat{X}' \arrow[dl, "ms'"] \\
& \mathbb{K} &
\end{tikzcd}$$

b) Recíprocamente, si $f: X \to X'$ *es una aplicación afín, existe una única aplicación lineal* $\hat{f}: \hat{X} \to \hat{X}'$ *tal que* $\hat{f}(X) \subset X'$, *y* $f=\hat{f}/X . X \to X'$.

En particular $\hat{f}$ *verifica las propiedades ii) y iii) de* a), *es decir:*

$$\hat{f}(\vec{X}) \subset \vec{X}', \vec{f}=\hat{f}/\vec{X} : \vec{X} \to \vec{X}', \ ms' \cdot \hat{f} = ms$$

Demostración

a) Por hipótesis $f(X) \subset X'$. Así, si λ, $\mu \in \mathbb{K}$ $\lambda+\mu=1$, para todo x, $y \in X$ se verifica:

$$f(\lambda x+\mu y)=\hat{f}(\lambda x+\mu y)=\lambda\hat{f}(x)+\mu\hat{f}(y)=\lambda f(x)+\mu f(y)$$

Por tanto $f=\hat{f}/X: X \to X'$ es afín.

Un vector arbitrario $\vec{v}$ de $\vec{X}$, puede escribirse en la forma $\vec{v}=\overrightarrow{ab}$ para puntos $a, b \in X$, y se tiene:

$$\hat{f}(v)=\hat{f}(\overrightarrow{ab})=\hat{f}(b-a)=\hat{f}(b)-\hat{f}(a)=f(b)-f(a)=$$
$$=\overrightarrow{f(a)\,f(b)}=\vec{f}(\overrightarrow{ab})=\vec{f}(\vec{v}).$$

Esto prueba que $\hat{f}$ verifica la condición ii).

Finalmente, si $\hat{x} \in \hat{X}$ y $ms(\hat{x})=\lambda\neq 0$, entonces $x=\frac{1}{\lambda}\hat{x} \in X$, y

$$\hat{f}(x)=\hat{f}\left(\frac{1}{\lambda}\hat{x}\right)=\frac{1}{\lambda}\hat{f}(x) \in X',$$

por tanto,

$$ms'\left(\frac{1}{\lambda}\hat{f}(x)\right)=\frac{1}{\lambda}ms'(\hat{f}(x))=1, \text{ es decir } ms'(\hat{f}(\hat{x}))=\lambda=ms(\hat{x})$$

b) Supuesto que $f: X \to X'$ es afín, fijemos un punto $a \in X$. Se tiene entonces:

$$\hat{X}=\mathbb{K}a \oplus \vec{X},\ \mathbb{K}a=\{\lambda a : \lambda \in \mathbb{K}\}$$

Definimos $\hat{f}: \hat{X} \to \hat{X}'$ por la fórmula:

$$\hat{f}(\lambda a+\vec{v})=\lambda f(a)+\vec{f}(\vec{v}) \text{ para todo } \lambda \in \mathbb{K}, \text{ y todo } \vec{v} \in \vec{X} \quad (2.14.1)$$

Es fácil comprobar que $\hat{f}$ es lineal. Además, si

$$x=\lambda a+\vec{v} \in X\ (\lambda \in \mathbb{K},\ \vec{v} \in \vec{X}) \text{ es } ms(x)=\lambda ms(a)+ms(\vec{v})=\lambda+0=\lambda,$$

y por tanto $x=a+\vec{v}$, utilizando la fórmula (2.14.1) que define a $\hat{f}$, se tiene:

$$\hat{f}(x)=f(a)+\vec{f}(\vec{v})=f(a+\vec{v})=f(x).$$

Esto prueba que $\hat{f}(X) \subset X'$, y que $\hat{f}/X=f$, con lo que se concluye la demostración. □

Ejemplo 2.15.

Una aplicación afín $f: A_n \to A_m$ viene definida por ecuaciones de la forma:

$$\left.\begin{array}{l} x'_1 = a_1 + a_{11} x_1 + \ldots + a_{1n} x_n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x'_m = a_m + a_{m1} x_1 + \ldots + a_{mn} x_n \end{array}\right\}$$

Su extensión vectorial $\hat{f}: \hat{V}_n \to \hat{V}_m$ viene dada por las ecuaciones:

$$x'_0 = x_0$$

$$\left.\begin{array}{l} x'_1 = a_1 x_0 + a_{11} x_1 + \ldots + a_{1n} x_n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x'_m = a_m x_0 + a_{m1} x_1 + \ldots + a_{mn} x_n \end{array}\right\}$$

Nótese que ambas aplicaciones f y $\hat{f}$ vienen definidas por la misma matriz afín

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ a_1 & a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_m & a_{m1} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

El siguiente resultado tiene una demostración elemental:

Proposición 2.16.

Sean $f: X \to X'$ $g: X' \to X''$ *aplicaciones afines,* $\hat{f}: \hat{X} \to \hat{X}'$, $\hat{g}: \hat{X}' \to \hat{X}''$ *sus correspondientes extensiones vectoriales. Entonces:*

$$\widehat{g \cdot f} = \hat{g} \cdot \hat{f}$$

Demostración

Nótese que $(\hat{g} \cdot \hat{f})(X) = \hat{g}(\hat{f}(X)) \subset \hat{g}(X') \subset X''$, y para todo $x \in X$:

$$(\hat{g} \cdot \hat{f})(x) = \hat{g}(\hat{f}(x)) = \hat{g}(f(x)) = g(f(x)) = (g \cdot f)(x). \ \square$$

§3. SISTEMAS DE REFERENCIA. GEOMETRIA ANALITICA

Los sistemas de referencia en espacios afines de dimensión finita, establecen isomorfismos que permiten transcribir los elementos de la geometría afín —subespacios y aplicaciones afines— a los correspondientes elementos de los modelos analíticos, determinados aquí por sistemas lineales con coeficientes en el cuerpo base. Los dos tipos de modelos analíticos que utilizaremos son:

— El modelo baricéntrico B_n, introducido en la lección 7 (ejemplo 3 de 1.6), que se corresponden con los sistemas de referencia afines o baricéntricos.

— El modelo analítico cartesiano A_n, al que nos hemos referido sistemáticamente en muchos ejemplos del capítulo. (Ver ejemplo 4 de 1.6, Lección 7).

Los sistemas de referencia que inducen isomorfismos sobre estos modelos, se denominan cartesianos.

Como es ya habitual X y X' denotarán espacios afines sobre el cuerpo $\mathbb{K}$ con extensiones vectoriales respectivas ($\hat{X}$, *ms*) y ($\hat{X}'$, *ms'*).

Una introducción adecuada de los sistemas de referencia baricéntricos requiere algún trabajo preliminar:

Definición 3.1. Dependencia afín

Sea $\mathrm{S}=(\mathrm{a}_0, \ldots, \mathrm{a}_r)$ *un sistema de puntos en el espacio afín* X, *y* a $\in$ X.

i) Se dice que el punto a *depende afínmente de* S*— y escribimos* a d · a S *si existe un sistema de escalares* $(\lambda_0, \ldots, \lambda_r)$ *en* $\mathbb{K}$, con $\sum_{i=0}^{r} \lambda = 1$ *de forma que:*

$$\mathrm{a} = \lambda_0 \mathrm{a}_0 + \ldots + \lambda_r \mathrm{a}_r$$

ii) Diremos que S *es un sistema afínmente dependiente si algún elemento de* S *depende afínmente de los demás, es decir:*

Existe algún $i \in \{0, \ldots, r\}$ *tal que* $a_i \; d \cdot a(\ldots a_{i-1}, a_{i+1}, \ldots)$.

iii) Por último se dice que el sistema S *es afínmente independiente, si no es afínmente dependiente.*

Observación 3.2.

La proposición 1.5 establece el conjunto de puntos que dependen afínmente de S es exactamente el subespacio $\langle S \rangle$ generado por S, así podemos escribir la equivalencia:

$$a \; d \cdot a \; S \Leftrightarrow a \in \langle S \rangle$$

La dependencia afín (en X) y la lineal (en $\hat{X}$) están íntimamente relacionadas:

Proposición 3.3.

Sea $S=(a_0, \ldots, a_r)$ *un sistema de puntos en el espacio afín* X.

i) El punto $a \in X$ *depende afínmente de* S, *si y sólo si* a *depende linealmente (en* $\hat{X}$*) de* S.

ii) El sistema S *es afínmente independiente, si y sólo si* S *es un sistema (de vectores en* $\hat{X}$*) linealmente independiente.*

iii) El sistema S *es afínmente dependiente, si y sólo si existe un sistema de escalares* $(\lambda_0, \ldots, \lambda_r)$ *no todos nulos, tales que:*

$$\lambda_0 a_0 + \ldots + \lambda_r a_r = 0, \quad \text{y} \quad \lambda_0 + \ldots + \lambda_r = 0$$

Demostración

i) Si a depende linealmente (en $\hat{X}$) del sistema S, existen escalares $\lambda_0, \ldots, \lambda_r \in K$, tales que $a=\lambda_0 a_0 + \ldots + \lambda_r a_r$. Como $a \in X$, se verifica,

$$1 = ms(a) = \lambda_0 ms(a_0) + \ldots + \lambda_r (ms)(a_0) = \lambda_0 + \ldots + \lambda_r$$

Por tanto, a depende afínmente de S. El recíproco es aún más trivial.

ii) Es inmediato a partir de i).

iii) Si S es afínmente dependiente, por ii) se deduce que S es linealmente dependiente, y existe un sistema de escalares $(\lambda_0, \ldots, \lambda_r)$ no todos nulos, tales que:

$$\lambda_0 a_0 + \ldots + \lambda_r a_r = 0$$

A posteriori, como $ms(0) = 0$ se deduce que $\lambda_0 + \ldots + \lambda_r = 0$. El recíproco es trivial. □

Ejemplo 3.4.

Los vectores $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ de $V_2(\mathbb{R})$, son linealmente dependientes.

Sin embargo, son afínmente independientes, ya que las condiciones:

$$\alpha\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}+\gamma\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \alpha+\beta+\gamma=0$$

implican que $\alpha=\beta=\gamma=0$.

Siguiendo el paralelismo con los espacios vectoriales, introduzcamos el concepto de sistema generador, y sistema de referencia (o base) afín:

Definición 3.5. Sistema de referencia afín

Sea $S = (a_0, \ldots, a_r)$ *un sistema de puntos del espacio afín* X.

i) Si todo punto x *de* X *depende afínmente de* S *(es decir,* $X = \langle S \rangle$*), se dice que* S *es sistema generador.*

ii) Un sistema generador e independiente, se llama sistema de referencia afín.

Observaciones 3.6.

1. De la proposición 3.3. se deduce inmediatamente que S es generador afín de X, si y sólo si es generador vectorial de $\hat{X}$. Los sistema de referencia afín son por tanto bases de $\hat{X}$ formadas por puntos de X.

2. Como consecuencia de lo anterior, se concluye que en un espacio afín de dimensión finita n, todos los sistemas de referencia afín tienen exactamente $n+1$ puntos.

El espacio vectorial, $\hat{V}_n = \left\{ \begin{pmatrix} \lambda_0 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} : \lambda_i \in \mathbb{K} \right\}$, con la forma lineal:

$$\beta = x_0 + \ldots + x_n : V \ni \begin{pmatrix} \lambda_0 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} \to \lambda_0 + \ldots + \lambda_n \in \mathbb{K} \qquad (3.6.1)$$

constituye la extensión vectorial natural del modelo baricéntrico:

$$B_n = \left\{ \begin{pmatrix} \lambda_0 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} \lambda_0 + \ldots + \lambda_n = 1 \right\} \text{ con } \vec{B}_n = \left\{ \begin{pmatrix} \lambda_0 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} : \lambda_0 + \ldots + \lambda_n = 0 \right\}.$$

El siguiente enunciado, establece las bases de la geometría analítica baricéntrica, y por ser suficientemente expositivo, no consideramos necesaria su demostración.

Proposición 3.7.

Sea $\varepsilon = (e_0, \ldots, e_n)$ un sistema de referencia afín en X. Entonces ε es base vectorial de $\hat{X}$, y el isomorfismo de coordenadas $x : \hat{X} \to \hat{V}_n$ inducido por esta base y definido por:

$$x(v) = \begin{pmatrix} \lambda_0 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} \Leftrightarrow v = \lambda_0 e_0 + \ldots + \lambda_n e_n$$

verifica la condición: $\beta \cdot x = ms$. *(Véase 3.6.1 para la definición de β).*

En particular $x(X) = B_n$, *y la restricción* $x = x/X : X \to B_n$ *es un isomorfismo afín, definido para cada punto* a *de* X *por la condición:*

$$x(a) = \begin{pmatrix} \lambda_0 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} \Leftrightarrow a = \lambda_0 e_0 + \dots + \lambda_n e_n \text{ (combinación afín de puntos en X)}$$

Se denominan a $x(a)$ *coordenadas baricéntricas del punto* a.

Por último, la restricción de $x : \hat{X} \to \hat{V}$ *a* $\vec{X}$ *—que denotamos por el mismo nombre— define un isomorfismo lineal* $x : \vec{X} \to \vec{B}_n$, *caracterizado por la condición:*

$$\vec{v} \in \vec{X},\ x(\vec{v}) = \begin{pmatrix} \lambda_0 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} \Leftrightarrow \vec{v} = \lambda_0 e_0 + \dots + \lambda_n e_n$$

(combinación vectorial en X)

$x(\vec{v})$ *son las coordenadas baricéntricas del vector* $\vec{v}$.

Estudiamos ahora la representación implícita de subespacios en coordenadas baricéntricas.

Proposición 3.8.

Sea $\varepsilon = (e_0, \dots, e_n)$ *un sistema de referencia afín en el espacio afín* X, y

$$x = \begin{pmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \text{sus correspondientes coordenadas.}$$

Un subespacio afín M *de* X *con dimensión* $p \geqslant 0$, *puede siempre venir representado por el conjunto de puntos del espacio cuyas coordenadas baricéntricas satisfacen un sistema de ecuaciones de la forma:*

$$\left.\begin{array}{r} x_0 + \ldots + x_n = 1 \\ a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n = a_1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{r1}x_1 + \ldots + a_{rn}x_n = a_r \end{array}\right\} \qquad (3.8.1)$$

donde:

$$r = n - p = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} a_{11} \ldots & a_{1n} \\ \ldots\ldots & \ldots \\ \ldots\ldots & \ldots \\ a_{r1} \ldots & a_{rn} \end{pmatrix} = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} & a_1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \\ \ldots & \ldots & \ldots & \\ a_n & \ldots & a_{rn} & a_r \end{pmatrix} \qquad (3.8.2)$$

y las ecuaciones baricéntricas de su dirección serán entonces:

$$\begin{array}{l} x_0 + \ldots + x_n = 0 \\ a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{r1}x_1 + \ldots + a_{rn}x_n = 0 \end{array} \qquad (3.8.3)$$

Demostración

La extensión vectorial $\hat{M}$ de M se podrá escribir en $\hat{X}$ con las coordenadas x como un sistema lineal de $n+1-(p+1)=n-p=r$ ecuaciones lineales independientes de la forma:

$$\left.\begin{array}{r} \alpha_{10}x_0 + \alpha_{11}x_1 + \ldots + \alpha_{1n}x_n = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha_{r0}x_0 + \alpha_{r1}x_1 + \ldots + \alpha_{rn}x_n = 0 \end{array}\right\} \qquad (3.8.4)$$

Como $M = \hat{M} \cap X \neq \phi$, el sistema anterior, junto con la ecuación:

$$x_0 + x_1 + \ldots + x_n = 1$$

es compatible, y determina ecuaciones implícitas para M en las coordenadas baricéntricas x de X. Despejando x_0 en la ecuación anterior: $x_0 = 1 - x_1 - \ldots - x_n$, y sustituyendo en (3.8.4), se obtienen ecuaciones como las (3.8.1), cuya condición de independencia y compatibilidad se expresa por:

$$r+1=\text{rg}\begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & a_{11} & \dots & a_{1n} \\ & & \dots & \\ 0 & a_{r1} & \dots & a_{rn} \end{pmatrix}=\text{rg}\begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & a_{11} & \dots & a_{1n} & a_1 \\ & & \dots & & \\ 0 & a_{r1} & \dots & a_{rn} & a_r \end{pmatrix}$$

que es claramente equivalente a la condición (3.8.2).

A las ecuaciones (3.8.1) se las denomina ecuaciones «normalizadas» del subespacio afín M en las coordenadas baricentricas x.

Finalmente, las ecuaciones (3.8.3) de $\vec{M}$ se obtienen a partir de (3.8.4) por sustitución de x_0 por $-x_1-...+x_n$ (ya que $\vec{M}=\hat{M}\cap\overline{X}$). □

El estudio de la representación analítica de aplicaciones afines en coordenadas baricéntricas, conduce al siguiente resultado previo, y fundamental en geometría afín:

Proposición 3.9.

Sea $\varepsilon=(e_0, ..., e_n)$ *un sistema de referencia afín en el espacio* X, *y* $S'=(a'_0, ..., a'_n)$ *un sistema de puntos en un espacio afín* X' *sobre el mismo cuerpo* $\mathbb{K}$.

Existe una única aplicación afín f: $X\to X'$ *que transforma* ε *en* S', *es decir:*

$$f(e_i)=a'_i \text{ para todo } i\in\{0, ..., n\}$$

Además, si S' *es sistema de referencia afín en* X', *entonces* f *es isomorfismo afín.*

Demostración

Como ε es base de $\hat{X}$, existe una única aplicación lineal $\hat{f}:\hat{X}\to\hat{X}'$ que envía la base ε al sistema de vectores S'. *Probemos que* $\hat{f}(X)\subset X'$. En efecto, un punto arbitrario a de X se escribe con sus coordenadas baricéntricas en la forma:

$$a=\lambda_0 e_0+...+\lambda_n e_n \text{ con } \sum_{i=0}^{n}\lambda_i=1$$

y $\hat{f}(a)=\lambda_0\hat{f}(e_0)+...+\lambda_n\hat{f}(e_n)=\lambda_0 a'_0+...+\lambda_n a'_n$, pertenece a X'.

La aplicación afín $f=\hat{f}/X: X\to X'$, es la única que transforma ε en S'. □

En las mismas hipótesis de la proposición anterior, si ahora tomamos en X' un sistema de referencia afín $\varepsilon' = (e'_0, ..., e'_m)$, cada elemento de S' se podrá escribir de una única forma como combinación afín de los elementos de ε':

$$a'_i = a_{0i} e'_0 + ... + a_{mi} e'_m \text{ donde } a_{0i} + ... + a_{mi} = 1 \text{ para todo } i = 0, ..., m.$$

Una matriz $A = (a_{ij})$ verificando esta condición se denomina afín baricéntrica.

Las ecuaciones de $\hat{f}: \hat{X} \to \hat{X}'$ en las coordenadas x (de ε) y x' (de ε') son:

$$\begin{pmatrix} x'_0 \\ \vdots \\ x'_m \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \qquad (3.9.1)$$

y representan también las ecuaciones de $f: X \to X'$ en los correspondientes sistemas de coordenadas baricéntricas.

Las ecuaciones (3.9.1) aún pueden interpretarse como las de una aplicación (afín) entre los modelos analíticos baricéntricos $A: B_n \to B_m$. Realmente, cada aplicación afín de B_n en B_m puede representarse de esta forma por una única matriz afín baricéntrica, y suele identificarse la aplicación con la correspondiente matriz. Hemos probado así el siguiente resultado:

Proposición 3.10.

Sean $\varepsilon = (e_0, ..., e_n)$ *y* $\varepsilon' = (e'_0, ..., e'_m)$ *sistemas de referencia afín en los espacios afines* X *y* X' *(sobre el mismo cuerpo), y sean* x *y* x' *sus correspondientes sistemas de coordenadas baricéntricas.*

Si $f: X \to X'$ *es una aplicación afín, existe una única matriz afín baricéntrica:*

$$A = \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & \cdots & a_{0n} \\ a_{10} & a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m0} & a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$\left(\sum_{i=0}^{m} a_{ij} = 1, \ j = 0, ..., m \right)$$

De forma que el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "x"'] & X' \arrow[d, "x'"] \\ B_n \arrow[r, "A"] & B_m \end{tikzcd}$$

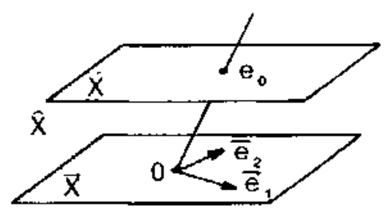
y las ecuaciones de f *(y de* $\hat{f}$*) en estas coordenadas, son las indicadas en (3.9.1).*

Definición 3.11. Sistemas de referencia cartesianos

Un sistema de referencia cartesiano en un espacio afín X*, es un sistema:*

$$\varepsilon=(e_0, \vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n)=(e_0, \vec{\varepsilon})$$

Donde e_0 *es un punto de* X*, y* $\vec{\varepsilon}=(\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n)$ *es una base de* $\vec{X}$.



Establezcamos los fundamentos de la geometría analítica cartesiana:

Proposición 3.12.

Un sistema de referencia cartesiano $\varepsilon=(e_0, \vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n)=(e_0, \vec{\varepsilon})$ *en el espacio afín* X*, es en particular una base vectorial de* $\hat{X}$*. El isomorfismo de coordenadas respecto a* ε*:*

$$\hat{x}=\begin{pmatrix} x_0 \\ \vec{x} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} : X \ni a \to \begin{pmatrix} x_0(a) \\ x_1(a) \\ \\ x_n(a) \end{pmatrix} \in \hat{V}_n$$

induce un isomorfismo afín:

$$x=\begin{pmatrix} 1 \\ \vec{x} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ x_1 \\ \cdot \\ x_n \end{pmatrix} . X \ni a \to \begin{pmatrix} 1 \\ x_1(a) \\ \vdots \\ x_n(a) \end{pmatrix} \in A_n$$

y se tiene la identidad:

$$a=e_0+x_1(a)\vec{e}_1+\ldots+x_n(a)\vec{e}_n \textit{ para todo } a\in X$$

Se denominan a $x_i(a)$ *coordenadas cartesianas del punto* a.

Por otra parte, el isomorfismo de coordenadas $\hat{x}$ *induce al isomorfismo lineal:*

$$\begin{pmatrix} 0 \\ \vec{x} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ x_1 \\ \cdot \\ x_n \end{pmatrix} \quad \vec{X} \ni \vec{v} \to \begin{pmatrix} 0 \\ x_1(\vec{v}) \\ \vdots \\ x_n(\vec{v}) \end{pmatrix} \in \vec{A}_n$$

Demostración

Un punto cualquiera $a \in X$, se escribe como combinación lineal (en $\hat{X}$) de la forma:

$$a=x_0(a)e_0+x_1(a)e_1+\ldots+x_n(a)\vec{e}_n.$$

Como $ms(a)=1$ y $ms(\vec{e}_i)=0$, se deduce que $x_0(a)=1$. Por tanto X queda definido en $\hat{X}$ por la ecuación $x_0=1$. Análogamente, las ecuaciones de $\vec{X}$ en $\hat{X}$ son $x_0=0$. El resto de las afirmaciones, no exigen más comentarios. □

La representación analítica cartesiana de subespacios y aplicaciones afines, ya ha sido expuesta implícitamente en diversos ejemplos del capítulo. Resumimos éstos en las siguientes dos proposiciones:

Proposición 3.13.

Con las hipótesis de la proposición anterior, un subespacio afín (con dimensión p*)* M *de* X*, viene representado en las coordenadas cartesianas* x*, por un sistema compatible de* $r=n-p$ *ecuaciones lineales independientes:*

$$\left.\begin{array}{l} \alpha_{11}x_1+\ldots+\alpha_{1n}x_n=\alpha_1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha_{r1}x_1+\ldots+\alpha_{rn}x_n=\alpha_r \end{array}\right\} \qquad (3.13.1)$$

Las ecuaciones de $\hat{M}$ *en las coordenadas lineales* $\hat{x}$ *de* $\hat{X}$ *serán entonces:*

$$\left.\begin{array}{l} \alpha_{11}x_1+\ldots-\alpha_{1n}x_n=\alpha_1 x_0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha_{r1}x_1+\ldots+\alpha_{rn}x_n=\alpha_r x_0 \end{array}\right\} \qquad (3.13.2)$$

Finalmente, las ecuaciones de $\vec{M}$ *en las coordenadas lineales* $\vec{x}$ *de* $\vec{X}$ *son:*

$$\left.\begin{array}{l} \alpha_{11}x_1+\ldots+\alpha_{1n}x_n=0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha_{r1}x_1+\ldots+\alpha_{rn}x_n=0 \end{array}\right\} \qquad (3.13.3)$$

Demostración

$\hat{x}(M)$ es un subespacio afín de A_n, que admite (en A_n) unas ecuaciones como las de (3.13.1), con dirección definida por las ecuaciones (3.13.3) (ver ejemplo 1.2.7).

Haciendo en (3.13.2) $x_0=1$, se obtienen las ecuaciones (3.13.1), esto prueba que (3.13.2) determina las ecuaciones de $\hat{M}$. □

Proposición 3.14.

Sean $\varepsilon=(e_0, \vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n)$, $\varepsilon'=(e'_0, \vec{e}'_1, \ldots, \vec{e}'_m)$ *dos sistemas de referencia cartesianos en los espacios afines* X *y* X'*, y sean* x *y* x' *los correspondientes sistemas de coordenadas.*

Si $f: X \to X'$ *es una aplicación afín, existe una única matriz afín:*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & \vec{A} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ a_1 & a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_m & a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \in FA(m, n)$$

que hace conmutativo el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "x"'] & X' \arrow[d, "x'"] \\ A_n \arrow[r, "A"] & A_m \end{tikzcd} \tag{3.14.1}$$

Las ecuaciones de f, $\vec{f}$, *y* $\hat{f}$ *son respectivamente:*

$$\begin{pmatrix} 1 \\ \vec{x}' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} 1 \\ \vec{x} \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 0 \\ \vec{x}' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} 0 \\ \vec{x} \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} x_0 \\ \vec{x}' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_0 \\ \vec{x} \end{pmatrix}$$

Demostración

La aplicación $x' \cdot f \cdot x^{-1} : A_n \to A_m$ es afín, y viene representada por una matriz afín A (ver ejemplo 4 de 1.3.7), y las ecuaciones de f son por tanto las indicadas. Por otra parte, las ecuaciones propuestas para $\hat{f}$ dan por restricción a X ($x_0 = 1$) las de f. Esto prueba que son las correctas, y concluye la demostración. □

Definición 3.15. Representación cartesiana de una aplicación afín

La matriz afín A *anterior que hace conmutativo el diagrama (3.14.1), se denomina representación matricial de* f *respecto a los sistemas de referencia cartesianos* ε *y* ε', *y escribimos:*

$$M_{\varepsilon, \varepsilon'}(f) = A$$

Si $X = X'$ $\varepsilon = \varepsilon'$, escribimos $M_\varepsilon(f) = A$.

Nótese que la aplicación $M_\varepsilon : EA(X) \to EA(n)$ *es una biyección que verifica:* $M_\varepsilon(f \cdot g) = M_\varepsilon(f) \cdot M_\varepsilon(g)$ *para todo* f, g $\in EA(X)$.

Estudiemos por último los cambios de coordenadas cartesianas:

Si $\varepsilon = (e_0, \vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n)$ y $\varepsilon' = (e'_0, \vec{e}'_1, \ldots, \vec{e}'_n)$ son dos sistemas de referencia cartesianos en el espacio afín X, por ser en particular bases de $\hat{X}$, existe una matriz P de cambio de base, y necesariamente es de tipo afín:

$$\varepsilon \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ p_1 & p_{11} & \cdots & p_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ p_n & p_{n1} & \cdots & p_{nn} \end{pmatrix} = \varepsilon', \quad \vec{P} = \begin{pmatrix} p_{11} & \cdots & p_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ p_{n1} & \cdots & p_{nn} \end{pmatrix} \text{ no singular}$$

a la matriz $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ p & \vec{P} \end{pmatrix}$ se le denomina matriz de cambio de referencia.

Nótese que $\vec{P}$ es la matriz del cambio de base de $\vec{\varepsilon}$ a $\vec{\varepsilon}'$. Se tiene la siguiente proposición:

Proposición 3.16.

Sean ε *y* ε' *dos sistemas de referencia cartesianos sobre los espacios afines* X *y* X', *y se* $f : X \to X'$ *una aplicación afín.*

i) Se tiene la equivalencia:

$$M_{\varepsilon, \varepsilon'}(f) = A \Leftrightarrow f(\varepsilon) = \varepsilon' A$$

Donde $f(\varepsilon) = (f(e_0), \vec{f}(e_1), \ldots, \vec{f}(\vec{e}_n))$.

ii) Si η *y* η' *sistemas de referencia cartesianos en* X *y* X' *con matrices respectivas de cambio de referencia* P *y* Q, *es decir:*

$$\eta = \varepsilon P, \quad \eta' = \varepsilon' Q$$

Si $M_{\varepsilon, \varepsilon'}(f) = A$, *entonces:*

$$M_{\eta, \eta'}(f) = Q^{-1} A P$$

En particular, si $X=X'$ $\varepsilon=\varepsilon'$ *y* $\eta=\eta'$, *es* $P=Q$, *y se tiene:*

$$M_{\eta}(f)=P^{-1}AP$$

Demostración

i) Sea $\hat{f}$ la extensión vectorial de f. La proposición 3.14 muestra que $M_{\varepsilon,\varepsilon'}(\hat{f})=M_{\varepsilon,\varepsilon'}(f)$; teniendo en cuenta que $\hat{f}/X=f$ y $\hat{f}/\vec{X}=\vec{f}$, se concluye que $f(\varepsilon)=\hat{f}(\varepsilon)$, y por tanto:

$$M_{\varepsilon,\varepsilon'}(f)=A\Leftrightarrow M_{\varepsilon,\varepsilon'}(\hat{f})=A\Leftrightarrow\hat{f}(\varepsilon)=\varepsilon' A\Leftrightarrow f(\varepsilon)=\varepsilon' A.$$

ii) Sea $B=M_{\eta,\eta'}(f)=M_{\eta,\eta'}(\hat{f})$. Como $A=M_{\varepsilon,\varepsilon'}(f)$ se tiene:

$$\hat{f}(\eta)=\hat{f}(\varepsilon P)=f(\varepsilon)P=\varepsilon' AP=\eta'(Q^{-1}AP)=\eta' B.$$

Por tanto, $B=Q^{-1}AP=M_{\eta,\eta'}(\hat{f})=M_{\eta,\eta'}(f)$. □

EJERCICIOS

NOTA: Mientras no se advierta lo contrario, todos los espacios afines están definidos sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ de característica cero, es decir, $1+1+...+1\neq 0$ cualquiera que sea el número de sumandos.

8.1. Se denomina baricentro de un sistema de puntos $(a_0, ..., a_r)$ del espacio afín X, al punto:

$$b=\sum_{i=0}^{r} \frac{1}{r+1} a_i \text{ (suma afín)}$$

Supóngase $r\geqslant 2$, y sea b_i el baricentro del sistema $(... a_{i-1}, a_{i+1}, ...)$. Demostrar que para $i=0, ...r$, todos los subespacios $\langle a_i, b_i\rangle$ se cortan en el baricentro b.

8.2.* Cuatro puntos (no coplanarios) (a_0, a_1, a_2, a_3) de un espacio afín (tales que no hay tres alineados), determinan los vértices de un tetraedro. Probar que las rectas que unen los puntos medios de los lados opuestos se cortan en el baricentro del tetraedro.

8.3.* Teoremas de Menelao y Ceva.

Sean a, b, c tres puntos no alineados de un espacio afín X, y sean:

$$a'\in\langle b, c\rangle-\{b, c\},\ b'\in\langle a, c\rangle-\{a, c\},\ c'\in\langle a, b\rangle-\{a, b\}.$$

Considérese el número:

$$\rho=(a' : b : c)\,(b' : c : a)\,(c' : a : b)$$

i) Demostrar que los puntos a', b', y c' están alineados, si y sólo si $\rho=1$.

ii) Probar que las rectas $\langle a, a'\rangle$, $\langle b, b'\rangle$ $\langle c, c'\rangle$ son concurrentes o paralelas, si y sólo si $\rho=-1$.

8.4. Dados dos puntos distintos de un espacio afín real X, se denomina segmento definido por a y b al conjunto:

$$[a, b] = \{(1-\lambda)a + \lambda b : 0 \leqslant \lambda \leqslant 1\}$$

Un subconjunto C de X se dice convexo, si contiene a cada segmento definido por dos cualesquiera de sus puntos.

a) Probar que todo subespacio afín es convexo.

b) Probar que la intersección de una familia cualquiera de conjuntos convexos es un conjunto convexo.

c) Si S es un subconjunto cualquiera de X, demostrar que existe un convexo mínimo, Conv (S) que contiene a S, y está formado exactamente por los puntos $x \in X$ que se escriben de la forma:

$$x = \lambda_0 s_0 + \ldots + \lambda_r s_r \text{ con } \lambda_i \geqslant 0 \ \sum_{i=0}^{r} \lambda_i = 1 \text{ y } s_i \in S$$

8.5. Sean a, b, c tres puntos no alineados de un plano afín real X. Demostrar que el conjunto $A = X - (\langle a, b\rangle \cup \langle a, c\rangle \cup \langle b, c\rangle)$ se puede obtener como unión disjunta de siete regiones convexas. Describir cada una de ellas con ayuda de la coordenadas baricéntricas inducidas por (a, b, c) en X.

8.6.* Teorema de Thales.
Sea X un espacio afín, y H_1, H_2, H_3 tres hiperplanos paralelos.

Si R es una recta afín de X no paralela a los hiperplanos, probar que la intersección $R \cap H_i$ es un punto a_i, y la razón simple $(a_1 : a_2 : a_3)$ no depende de la recta transversal elegida.

8.7. Sean (a, b, c, d) cuatro puntos de un espacio afín X, tales que:

$$2a - b + 2c - 3d = 4a - 2b - c - d = 0$$

Demostrar que los cuatro puntos están alineados, y calcular las razones simples: $(b : a : c)$ y $(b : c : d)$.

8.8.* a) Si f, g son aplicaciones afines de X en X', y λ, $\mu \in \mathbb{K}$ con $\lambda + \mu = 1$, demostrar que la aplicación:

$$h = \lambda f + \mu g : X \ni x \to \lambda f(x) + \mu g(x) \in X' \tag{8.8.1}$$

es también aplicación afín, y tiene por aplicación lineal asociada $\lambda\overline{f} + \mu\overline{g}$.

b) Dotar al conjunto $FA(X, X')$ de aplicaciones afines de X en X' de una estructura de espacio afín tal que la fórmula (8.8.1) sea válida para definir la combinación afín de dos puntos en $FA(X, X')$.

8.9.* Comprobar que las fórmulas (2.9.1) (proposición 2.9) dan estructura de espacio vectorial al conjunto $\hat{X}$ de los puntos másicos de un espacio afín X.

8.10.* (Un modelo de extensión vectorial canónica para espacios afines.)
Sea X un espacio afín sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ cualquiera:

a) Probar que el conjunto $\overline{X}$ de todas las aplicaciones: $\lambda : X \to \mathbb{K}$, tales que se anulan sobre todos los puntos de X excepto un número finito de ellos, tiene estructura natural de espacio vectorial.

b) Demostrar que la aplicación:

$$ms : \overline{X} \ni \lambda \to \sum_{x \in X} \lambda(x) \in \mathbb{K}$$

es una forma lineal, y probar que:

$$\overline{ms}(\lambda) = 0 \Rightarrow \sum \lambda(x)x \in \overline{X}, \text{ y } \overline{ms}(\lambda) = 1 \Rightarrow \sum \lambda(x)x \in X$$

c) Demostrar que el conjunto $\overline{X}_0 = \{\lambda \in \overline{X} : ms(\lambda) = 0, \ \Sigma\lambda(x)x = 0\}$ constituye un subespacio vectorial de $\overline{X}$. Sea $p : \overline{X} \to \overline{X}/\overline{X}_0$ la proyección canónica.

Llamamos:

$\hat{X} = \overline{X}/\overline{X}_0$, y se escribe $\sum_{i=0}^{r} \lambda_i \cdot x_i$ para denotar a $\lambda + \overline{X}_0$, donde:

$$\lambda(x) = 0 \text{ para todo } x \in X - \{x_0, \ldots, x_r\}, \text{ y } \lambda(x_i) = \lambda_i.$$

d) Demostrar que existe una forma lineal que denominamos masa $ms : \hat{X} \to \mathbb{K}$ que hace conmutativo el diagrama:

$$\begin{tikzcd} \overline{X} \arrow[rr, "\overline{ms}"] \arrow[d, "p"'] & & \mathbb{K} \\ \hat{X} \arrow[urr, "ms"'] & & \end{tikzcd}$$

e) Llamando $i : X \ni x \to 1\ x \in \hat{X}$, demostrar que $(i, \hat{X}, ms)$ es extensión vectorial del espacio afín X. Establézcanse las identificaciones habituales.

8.11. (Otra extensión canónica.)

Sea X espacio afín sobre un cuerpo cualquiera $\mathbb{K}$. Si $\lambda \in \mathbb{K} - \{0\}$ $a \in X$, y $\vec{v} \in \vec{X}$ se definen las aplicaciones:

$$f_{\lambda \cdot a} : X \ni x \to \lambda \overrightarrow{ax} \in \vec{X}, \quad f_{\vec{v}} : X \ni x \to \vec{v} \in \vec{X}$$

a) Demostrar que el conjunto $\hat{X}$ formado por todas las aplicaciones definidas de esta forma constituye un subespacio vectorial del espacio vectorial $L(X, \vec{X})$ de todas las aplicaciones de X en $\vec{X}$.

b) Demostrar que la aplicación, $ms : \hat{X} \to \mathbb{K}$ tal que:

— $ms(f_{\lambda \cdot a}) = \lambda$ para todo $a \in X$ y todo $\lambda \in K - \{0\}$.

— $ms(f_{\vec{v}}) = 0$ para todo $\vec{v} \in \vec{X}$.

es una forma lineal.

c) Sea $i : X \in x \to f_{1 \cdot x} \in \hat{X}$. Demostrar que $(i, \hat{X}, ms)$ es una extensión vectorial del espacio afín X.

8.12. Sean M y N subespacios afines no vacios de X. Demostrar que si $\hat{M}$ y $\hat{N}$ denotan las correspondientes extensiones vectoriales, se verifica:

$$\widehat{M+N} = \hat{M} + \hat{N}, \text{ y si } M \cap N \neq \phi \text{ es } \widehat{M \cap N} = \hat{M} \cap \hat{N}.$$

8.13.* Demostrar que la aplicación $\hat{f}: \hat{X} \to \hat{X}$, definida en (2.14.1) es lineal.

8.14. Sea $f: X \to X'$ una aplicación afín, M subespacio afín de X, y M' subespacio de X'.

Probar que $\hat{f}(\hat{M}) = \widehat{f(M)}$ y $\hat{f}^{-1}(\hat{M}') = \widehat{f^{-1}(M')}$

8.15.* Sea $\alpha = (a_0, a_1, \ldots, a_n)$ un sistema de puntos en el espacio afín X. Demostrar que es sistema de referencia afín, si y sólo si $\varepsilon = (a_0, \overrightarrow{a_0 a_1}, \ldots, \overrightarrow{a_0 a_n})$ es sistema de referencia cartesiano en X. Estudiar la relación que existe entre las coordenadas baricéntricas de α y las cartesianas de ε.

8.16.* Estudiar que relación existe entre la matriz baricéntrica y cartesiana de un mismo endomorfismo f de X, cuando el sistema de referencia baricéntrico y el cartesiano, están relacionados como en el ejercicio anterior.

8.17.* Sea $\varepsilon = (e_0, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ un sistema de referencia cartesiano en el espacio afín X, y sean:

$$a_0 = \varepsilon \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad a_1 = \varepsilon \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad a_2 = \varepsilon \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad a_3 = \varepsilon \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

a) Demostrar que (a_0, a_1, a_2, a_3) constituye un sistema de referencia afín.

b) Calcular en las coordenadas cartesianas de ε las ecuaciones de la transformación afín f tal que:

$$f(a_0, a_1, a_2, a_3) = (a_0, a_2, a_1, a_3)$$

LECCION 9

CLASIFICACION DE ENDOMORFISMOS AFINES

El problema de clasificación de endomorfismos afines, se plantea en términos análogos al de clasificación de endomorfismos lineales, siendo de hecho éste un caso particular de aquél.

La teoría de invariantes lineales desarrollada en el capítulo III, y en particular, el teorema de Jordan, constituye la herramienta básica con la que abordaremos este problema de clasificación.

En esta lección, X denotará permanentemente un espacio afín de dimensión finita n, sobre un cuerpo $\mathbb{K}$; $(\hat{X}, ms)$ es una extensión vectorial de X donde $ms : \hat{X} \to \mathbb{K}$ es la forma lineal «masa», y

$$X = \{x \in \hat{X} : ms(x) = 1\} \quad y \quad \overline{X} = \{\overline{v} \in \hat{X} : ms(\overline{v}) = 0\}$$

§1. PRELIMINARES

El grupo natural de transformaciones $GA(X)$ del espacio afín X, actúa por conjugación sobre la familia $EA(X)$ de endomorfismos afines de X de la forma:

$$EA(X) \times GA(X) \ni (f, g) \mapsto g \cdot f \cdot g^{-1} \in EA(X)$$

Esta actuación da lugar a la relación de equivalencia en $EA(X)$, que a continuación definimos de manera explícita.

Definición 1.1.

Dos endomorfismos afines f *y* f′ *del espacio afín* X *se dicen afínmente equivalentes, si existe una transformación afín* g *en* X *tal que:*

$$f' = g \cdot f \cdot g^{-1}$$

Dos endomorfismos afínmente equivalentes, admiten representaciones matriciales cartesianas iguales, respecto a sistemas de referencia cartesianos adecuadamente elegidos, y recíprocamente. Establezcamos de forma precisa este criterio.

Proposición 1.2.

Sea ε *un sistema de referencia cartesiano en el espacio afín* X. *Dos endomorfismos afines de* X, f *y* f′ *son afínmente equivalentes, si y solo si, existe* ε' *sistema de referencia cartesiano de* X, *tal que:*

$$M_{\varepsilon}(f) = M_{\varepsilon'}(f')$$

Demostración

Supóngase f afínmente equivalente a f', y sea $g \in GA(X)$ con $f' = g \cdot f \cdot g^{-1}$. Tomemos $\varepsilon' = g(\varepsilon)$ que es también sistema de referencia cartesiano. Si $M_{\varepsilon}(f) = A$ (es decir, $f(\varepsilon) = \varepsilon\ A$) entonces:

$$f'(\varepsilon') = g \cdot f \cdot g^{-1}(g(\varepsilon)) = g(f(\varepsilon)) = g(\varepsilon\ A) = \varepsilon'\ A$$

y así es $M_{\varepsilon'}(f') = A$.

Recíprocamente, supóngase que existe ε' sistema de referencia cartesiano tal que:

$$M_{\varepsilon}(f) = M_{\varepsilon'}(f') = A$$

Tomando $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ p & \overline{P} \end{pmatrix} \in GA(n)$ matriz de cambio de referencia con $\varepsilon' = \varepsilon\ P$, si g es la transformación afín tal que $M_{\varepsilon}(g) = P$, se tiene que $g(\varepsilon) = \varepsilon\ P = \varepsilon'$ y por tanto:

$$(g \cdot f \cdot g^{-1})\ (\varepsilon') = g(f(\varepsilon)) = g(\varepsilon\ A) = g(\varepsilon)\ A = \varepsilon' A = f'(\varepsilon').$$

Esto indica que $g \cdot f \cdot g^{-1} = f'$ con lo cual se concluye la demostración. □

Analicemos la relación equivalencia afín para los endomorfismos del modelo analítico cartesiano A_n.

Definición 1.3.

Dos matrices afines $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & \vec{A} \end{pmatrix}$, $A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a' & \vec{A}' \end{pmatrix}$ *de* EA(n) *se dicen afínmente semejantes, si existe* $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ p & \vec{P} \end{pmatrix} \in GA(n)$ *de forma que* $A' = P^{-1}\ AP$.

En particular, se tiene también $\vec{A}' = \vec{P}^{-1}\ \vec{A}\ \vec{P}$, por tanto, la semejanza afín de las matrices A y A' implica la semejanza lineal de A y A' y la de $\vec{A}$ y $\vec{A}'$.

Por otra parte, la relación de semejanza afín en $EA(n)$ es justamente la de equivalencia afín sobre la familia de endomorfismos afines de A_n.

El siguiente resultado proporciona una condición suficiente para la equivalencia lineal de endomorfismos de un espacio afín X, por medio de la semejanza afín de matrices cartesianas.

Proposición 1.4.

Para que dos endomorfismos f *y* f' *del espacio afín* X *sean afínmente equivalentes, es suficiente con que existan sistemas de referencia cartesianos* ε *y* ε' *de* X *tales que las matrices cartesianas* $M_\varepsilon(f)$ *y* $M_{\varepsilon'}(f')$ *sean afínmente semejantes.*

Demostración

Como las matrices $A = M_\varepsilon(f)$, y $A' = M_{\varepsilon'}(f')$ son afínmente semejantes, existe una matriz cartesiana no singular P, tal que $A' = P^{-1}$ $A\ P$. Tomando el sistema de referencia cartesiano $\eta = \varepsilon\ P$, se concluye por 3.16, L. 8 que $M_{\eta}(f)=P^{-1}\,A\,P=A'=M_{\xi'}(f')$. Aplicando ahora 1.2, se deduce que f y f' son afínmente equivalentes. □

El teorema de Jordan (establecido en el Capítulo III) puede aplicarse directamente para resolver el problema de clasificación afín para endomorfismos afines con puntos fijos, gracias al siguiente resultado.

Proposición 1.5.

Sea $EA_0(X)$ *la familia de endomorfismos con puntos fijos del espacio afín* X:

i) $EA_0(X)$ *constituye una clase invariante de* $EA(X)$, *es decir: Si* $f \in EA_0(X)$ *y* f *es afínmente equivalente a* $f' \in EA(X)$, *entonces* $f' \in EA_0(X)$.

ii) Dos endomorfismos f, $f' \in EA_0(X)$ *son afínmente equivalentes, si y sólo si sus correspondientes endomorfismos lineales asociados* $\vec{f}$ *y* $\vec{f}'$ *son linealmente equivalentes.*

Demostración

i) Sea $fix(f)=\{x \in X : f(x)=x\}$ que por hipótesis es no vacío. Si $g \in GA(X)$ verifica $f'=g \cdot f \cdot g^{-1}$, entonces $g\,(fix(f))=fix(f')$ ya que si $f(x)=x$, entonces $f'(g(x))=g(f(x))=g(x)$. Por tanto $fix(f')\neq\phi$ y $f' \in EA_0(X)$.

ii) Sea $a \in fix\,(f)$, $a' \in fix\,(f')$, y supóngase que $\vec{f}$ y $\vec{f}'$ son linealmente equivalentes. Si $\psi \in GL(\vec{X})$ es tal que:

$$\vec{f}' = \psi \cdot \vec{f} \cdot \psi^{-1}$$

construyamos la única transformación afín g tal que $g(a)=a'$, y $\vec{g}=\psi$. Probemos que el endomorfismo afín f' coincide con $h= =g \cdot f \cdot g^{-1}$ Para ello es suficiente comprobar que tienen la misma aplicación lineal asociada, y que toman el mismo valor sobre algún punto. En efecto:

$$\vec{h}=\overrightarrow{g \cdot f \cdot g^{-1}}=\vec{g}\cdot\vec{f}\cdot\vec{g}^{-1}=\psi\cdot\vec{f}\cdot\vec{\psi}^{-1}=\vec{f}'$$

$$h\,(a')=(g \cdot f)\;(g^{-1}(a'))=g\,(f\,(a))=g\,(a)=a'=f'\,(a')$$

El recíproco es trivial. □

Observaciones 1.6.

1. Como consecuencia de 1.5, podemos aplicar a la clase invariante de endomorfismos con puntos fijos, los mismos criterios de equivalencia dados en el Teorema de Jordan. En particular, se deduce que todo endomorfismo afín f de X admite una representación matricial respecto a algún sistema de referencia cartesiano $\varepsilon=(e_0, \vec{\varepsilon})$ de la forma:

$$J=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \vec{J} \end{pmatrix}$$

Donde $\vec{J}=M_{\vec{\varepsilon}}(\vec{f})$ es una matriz de Jordan. El origen e_0 de ε es desde luego un punto fijo para f, y $\vec{\varepsilon}$ es una base de Jordan para $\vec{f}$. Se denomina a ε sistema de referencia cartesiano de Jordan para f.

2. Si dos endomorfismos f y f' de un espacio afín X son afínmente equivalentes, sus correspondientes endomorfismos lineales asociados $\vec{f}$ y $\vec{f'}$ son linealmente equivalentes. En efecto, si $g \in GA(X)$ verifica:

$$f'=g \cdot f \cdot g^{-1}$$

entonces, es $\vec{f'}=\vec{g} \cdot \vec{f} \cdot \vec{g}^{-1}$

Análogamente, denotando con «$\hat{\ }$» las correspondientes extensiones vectoriales, se tiene:

$$\hat{f'}=\hat{g} \cdot \hat{f} \cdot \hat{g}^{-1}$$

Esto significa que también $\hat{f}$ es linealmente equivalente a $\hat{f'}$

En particular, todos los invariantes lineales de $EL(\vec{X})$ y $EL(\hat{X})$ establecidos en el capítulo IV, son invariantes afines de $EA(X)$.

Definición 1.7. Subespacios afines invariantes

Fijado el endomorfismo afín f *de* X, *un subespacio afín* M *se dice invariante por* f *(o invariante, si se sobrentiende* f*), si*

$$f(M) \subset M$$

La aplicación $f|_M : M \ni x \to f(x) \in M$, *es un endomorfismo del espacio afín* M, *que denominamos restricción de* f *a* M.

Teniendo en cuenta, que por la proposición 4.2, L. 7 es $f(M+N) = f(M)+f(N)$, para M y N subespacios afines de X, y $f(M \cap N) \subset f(M) \cap f(N)$, se deduce de forma inmediata que la familia $\mathscr{A}(X_f)$ de subespacios invariantes por f es un subretículo del retículo $\mathscr{A}(X)$ de subespacios afines de X. Estudiemos qué relación existe entre éste retículo y el de subespacios vectoriales invariantes de $\vec{X}$ y $\hat{X}$.

Proposición 1.8.

Sea f *un endomorfismo afín de* X, *y* M *un subespacio afín. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

i) M *es invariante por* f.

ii) $\vec{M}$ *es invariante por* $\vec{f}$, *y para todo* $a \in M$ *es* $\overrightarrow{af(a)} \in \vec{M}$.

iii) $\vec{M}$ *es invariante por* $\vec{f}$, *y existe* $a \in M$ *tal que* $\overrightarrow{af(a)} \in \vec{M}$

iv) $\hat{M}$ *es invariante por* $\hat{f}$.

Demostración

i) $\Rightarrow$ ii) Si $\vec{v} = \overrightarrow{ab} \in \vec{M}$ $(a,\ b \in M)$ entonces $\vec{f}(\vec{v}) = \overrightarrow{f(a)\,f(b)} \in \vec{M}$, pues $f(a)$, $f(b)$ están en M. Por análogo motivo, se verifica que $\overrightarrow{af(a)} \in \vec{M}$ para todo $a \in M$.

ii) $\Rightarrow$ iii) Es trivial.

iii) $\Rightarrow$ iv) Se tiene que $\hat{M} = \mathbb{K}a \oplus \vec{M}$, y así para $\hat{a} = \lambda a + \vec{v}$ con $\lambda \in \mathbb{K}$ y $\vec{v} \in \vec{M}$ se tiene:

$$\hat{f}(\hat{a}) = \hat{f}(\lambda a + \vec{v}) = \lambda \hat{f}(a) + \hat{f}(v) = \lambda\ (a + \overrightarrow{af(a)}) + \vec{f}(\vec{v}) = \lambda a + (\lambda \overrightarrow{af(a)} + \vec{f}(\vec{v})) \in \mathbb{K}a + \vec{M} = \hat{M}.$$

iv) $\Rightarrow$ i) Si $a \in M \subset \hat{M}$, por hipótesis se tiene que $f(a) = \hat{f}(a) \in \hat{M} \cap X = M$. $\square$

§2. REPRESENTACIONES CARTESIANAS DE JORDAN PARA UN ENDOMORFISMO AFIN

Un sistema de referencia cartesiano ε de X, se dice de Jordan para el endomorfismo afín f, si la matriz que representa a f respecto a ε, es una matriz (cartesiana) de Jordan.

La existencia de estos sistemas de referencia para cualquier endomorfismo, será el resultado principal de este epígrafe.

f denotará un endomorfismo afín de X, y $\hat{f}$ será su extensión vectorial en $\hat{X}$.

Estudiemos en primer lugar, qué se deduce desde el punto de vista afín al aplicar el endomorfismo lineal $\hat{f}: \hat{X} \to \hat{X}$ el primer teorema de descomposición dado en el capítulo III.

Proposición 2.1.

i) $\lambda = 1 \in \mathbb{K}$ *es autovalor de* $\hat{f}$, *y* $t-1$ *es divisor primo del polinomio mínimo* $\phi_{\hat{f}}$ *de* $\hat{f}$.

ii) Si p *es un divisor primo del polinomio mínimo* $\phi_{\hat{f}}$ *distinto de* $t-1$, *entonces el subespacio característico* $\hat{X}_p$ *está contenido en* $\vec{X}$.

Demostración

i) Para cada $\hat{x} \in \hat{X}$, se verifica:

$$ms((\hat{f}-id)(\hat{x})) = ms(\hat{f}(\hat{x})) - ms(\hat{x}) = ms(\hat{x}) - ms(\hat{x}) = 0$$

y por tanto $im\ (\hat{f}-id) \subset \vec{X}$.

En particular, $\hat{f}-id: \hat{X} \to \hat{X}$ no es suprayectiva, y Ker $(\hat{f}-id) \neq \{0\}$. Esto prueba i).

ii) Si $p(t) \neq t-1$ es un divisor primo del polinomio mínimo $\phi_{\hat{f}}(t)$, entonces para cada k entero positivo se tiene la implicación:

$$p(\hat{f})^k(\hat{x}) = 0 \Rightarrow \hat{x} \in \vec{X} \tag{2.1.1}$$

En efecto, si $p^k(t)=a_0+a_1t+...+t^m$ entonces para cada $\hat{x}\in\overline{X}$ se tiene:

$$ms\,(p(\hat{f})^k)(\hat{x}))=ms\,(a_0+a_1\hat{f}(\hat{x})+...+\hat{f}^m(\hat{x}))=(a_0+a_1+...+1)\quad ms(\hat{x})=p^k(1)\ \ ms(\hat{x}).$$

Como $(t-1)$ no divide a p^k, se concluye que $p^k(1)\neq 0$ obteniéndose así (2.1.1).

A partir de aquí, la conclusión ii) se deduce inmediatamente de la definición de subespacio característico $\hat{X}_p$, como conjunto de vectores que se anulan por alguna potencia de $p(\hat{f})$. □

Se obtiene enseguida la siguiente consecuencia:

Corolario 2.2.

Si $\hat{X}_1$ es el subespacio característico asociado al divisor primo $t-1$ de $\phi_{\hat{f}}$, existe $\overline{Y}$ subespacio vectorial invariante de $\hat{X}$ tal que:

$$\hat{X}=\hat{X}_1\oplus\overline{Y}$$

Por otra parte, $X_1=\hat{X}_1\cap X$ es subespacio afín invariante por f y el endomorfismo restricción $f_1=f/X_1:X_1\ni x\to f(x)\in X_1$, tiene por polinomio mínimo $\phi_{\hat{f}_1}=(t-1)^m$ siendo $m\geq 1$ el orden de multiplicidad de $(t-1)$ como divisor de $\phi_{\hat{f}}$.

Demostración

Es inmediata a partir de la descomposición de $\hat{X}$ en suma directa de los subespacios característicos dada en 3.8, L.5 y de la proposición anterior. El hecho de que $X_1=\hat{X}_1\cap X$ es subespacio invariante, se deduce de 1.8. □

Observación 2.3.

Con las notaciones de 2.2, se ve que para encontrar un sistema de referencia de Jordan para f, es suficiente con buscarlo para el endomorfismo afín $f_1 : X_1\to X_1$.

En efecto, si $\varepsilon_1=(e_0, \ldots, \vec{e}_r)$ es un sistema de referencia en X_1 respecto al cual f_1 se representa por la matriz de Jordan J_1, entonces eligiendo una base de Jordan $\vec{\varepsilon}'=(\vec{e}_{r+1}, \ldots, \vec{e}_n)$ en el subespacio vectorial $\vec{Y}$ de $\vec{X}$ para $\vec{f}/\vec{Y}: \vec{Y} \ni \vec{y} \to \vec{f}(\vec{y}) \in \vec{Y}$, la representación matricial para f (y $\hat{f}$) respecto al sistema de referencia cartesiano $\varepsilon=(e_0, \vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_r, \vec{e}_{r+1}, \ldots, \vec{e}_n)$ es de la forma:

$$J=\begin{pmatrix} J_1 & 0 \\ 0 & J' \end{pmatrix} \text{ donde } J'=M_{\vec{\varepsilon}'}(\vec{f}/\vec{Y})$$

y J es por tanto matriz de Jordan.

Es natural pues restringir momentáneamente nuestro estudio a endomorfismos afines f con polinomio mínimo $\phi_{\vec{f}}$ de la forma $(t-1)^m$. Empezamos analizando qué significado afín tienen las rectas modulares de $\hat{X}$ respecto a $\hat{f}$.

Proposición 2.4.

Sea f *un endomorfismo afín de* X, *tal que* $\phi_{\vec{f}}(t)=(t-1)^m$ $(m\geqslant 1)$. *Entonces:*

i) Para cada $\hat{v}\in\hat{X}$ *el polinomio mínimo anulador de* $\hat{v}$ *(respecto a* $\hat{f}$*) es de la forma:*

$$\phi_{\hat{v}}(t)=(t-1)^r \quad \text{con} \quad r\leqslant m$$

y el subespacio vectorial invariante (de $\hat{X}$*) más pequeño que contiene al vector* $\hat{v}$ *es:*

$$\hat{M}(\hat{v})=\langle \hat{v}, (\hat{f}-\widehat{id})(\hat{v}), \ldots, (\hat{f}-\widehat{id})^{r-1}(\hat{v})\rangle$$

Además se tiene que $\dim(\hat{M}(\hat{v}))=r$.

ii) Existe $\hat{v}\in\hat{X}$ *tal que* $\phi_{\hat{v}}(t)=(t-1)^m$, *y entonces* $\hat{M}(\hat{v})$ *admite en* $\hat{X}$ *un complementario* $\hat{N}$ *invariante, es decir:*

$$\hat{X}=\hat{M}(\hat{v})\oplus\hat{N}$$

iii) Si $\vec{v}\in\vec{X}$ *entonces* $\hat{M}(\vec{v})=\vec{M}$ *es subespacio vectorial (invariante) de* $\vec{X}$. *Además existe* $\vec{v}\in\vec{X}$ *tal que* $\phi_{\vec{v}}(t)=\phi_{\vec{f}}(t)$, *y entonces* $\vec{M}$ *admite en* $\vec{X}$ *un complementario* $\vec{N}$ *también invariante, es decir:*

$$\vec{X} = \vec{M} \oplus \vec{N}$$

iv) Si a $\in$ X, *entonces* $M(a) = \hat{M}(a) \cap X$ *es el subespacio afín invariante por* f *más pequeño que contiene al punto* a, *y se verifica:*

$$\overrightarrow{M(a)} = \hat{M}(a) \cap \vec{X} = \hat{M}(\overrightarrow{af}(a))$$

Demostración

La demostración de i) ii) y iii) es inmediata a partir de las proposiciones 1.3, 1.5, 1.6 y 2.3, de la Lección 6, particularizadas al caso $p(t) = t - 1$.

Puntualizemos simplemente, que $\hat{M}(\hat{v})$, $(\hat{v} \in \hat{X})$ es lo que allí llamábamos recta modular generada por $\hat{v}$, es decir $\mathbb{K}[t]\hat{v}$.

iv) Si $a \in X$, como $a \in \hat{M}(a) \cap X = M(a)$, se concluye por 1.6 que $M(a)$ es subespacio afín invariante.

Por otra parte como $(\hat{f} - \widehat{id})(a) = f(a) - a = \overrightarrow{af(a)} \in \vec{X}$, utilizando la expresión de $\hat{M}(a)$ dada en i) es:

$$\hat{M}(a) = \mathbb{K}a \oplus \hat{M}(\overrightarrow{af(a)})$$

Por ii) $\hat{M}(\overrightarrow{af(a)})$ está contenido en $\vec{X}$, y así es $\overrightarrow{M(a)} = \hat{M}(\overrightarrow{af}(a))$.

La minimalidad de $M(a)$ como subespacio afín invariante que contiene al punto a, se deduce de la propia minimalidad de $\hat{M}(a)$ indicada en i).

Estamos ya en disposición de obtener el resultado «clave» de este epígrafe:.

Proposición 2.5.

Sea f *un endomorfismo afín de* X *con polinomio mínimo* $\phi_1(t) = (t-1)^m$ *con* $m \geqslant 1$.

Existe entonces un punto a $\in$ X, *y un subespacio* $\vec{Y}$ *de* $\vec{X}$ *invariante, tal que:*

$$X = \hat{M}(a) \oplus \vec{Y}$$

Demostración

Si f tiene un punto fijo $a \in X$, entonces $\overrightarrow{af(a)} = 0$, y $\hat{M}(a) = \mathbb{K}a$, con lo que se tiene: $\hat{X} = \hat{M}(a) \oplus \vec{X}$, y $\vec{X}$ es claramente invariante.

Supóngase pues que f no tiene puntos fijos (por tanto es $m > 1$). La demostración se hace entonces por inducción sobre la dimensión n de X:

Para $n = 1$, fijado $a \in X$ es $f(a) = a' \neq a$, y el mínimo subespacio afín invariante que contiene al punto a, contiene a $a + \langle\overrightarrow{aa'}\rangle = X$. Así:

$$M(a) = X, \ \hat{M}(a) = \hat{X}, \ \text{y} \ X = \hat{M}(a) \oplus \{0\}.$$

Supuesto cierto el teorema para dimensión menor que $n (n > 1)$, y dim $X = n$, hay dos posibilidades excluyentes:

a) Existe $\vec{v} \in \vec{X}$ con $\phi_{\vec{v}}(t) = (t-1)^m = \phi_{\vec{f}}(t)$.

La proposición 2.4 muestra que en este caso $\hat{M}(\vec{v}) = \vec{M}$ es un subespacio invariante no nulo de $\vec{X}$ que admite en $\hat{X}$ un complementario $\hat{X}'$ también invariante, es decir:

$$\hat{X} = \hat{X}' \oplus \vec{M} \tag{2.5.1}$$

$X' = \hat{X}' \cap X$ es un espacio afín de dimensión menor que n, y podemos aplicar al endomorfismo restricción $f' = f/X' : X' \to X'$ la hipótesis de inducción (pues $\phi_{\vec{f'}}$ es también potencia de $(t-1)$). Sea pues $a \in X'$ y $\vec{Y}'$ subespacio vectorial invariante de $\vec{X}'$ tal que:

$$\hat{X}' = \hat{M}(a) \oplus \vec{Y}'$$

Se tiene entonces utilizando la igualdad (2.5.1), $\hat{X} = \hat{M}(a) \oplus \vec{Y}' \oplus \vec{M}$, por tanto:

$$\hat{X} = \hat{M}(a) \oplus \vec{Y}$$

donde $\vec{Y} = \vec{Y}' \oplus \vec{M}$ es un subespacio invariante de $\vec{X}$.

b) Si no existe $\vec{v} \in \vec{X}$ tal que $\phi_{\vec{v}}(t) = (t-1)^m$, entonces por 2.4 iii) es $\phi_{\vec{v}}(t) = (t-1)^r$ con $r < m$. Probemos que $r = m - 1$.

En efecto, como $\phi_{\hat{f}}(t) = (t-1)^m$ existe $\hat{a} \in \hat{X}$ tal que $\phi_{\hat{a}}(t) = (t-1)^m = \phi_a(t)$, siendo:

$$a = \frac{1}{ms(\hat{a})}\,\hat{a} \in X, \text{ y } \vec{v} = \overrightarrow{af(a)} = (\hat{f} - \widehat{id})(a)$$

pertenece a $\vec{X}$, y verifica

$$\phi_{\vec{v}}(t) = (t-1)^{m-1}.$$

Aplicando nuevamente 2.4 a $\vec{v}$ y $\vec{f}$ se concluye que $\hat{M}(\vec{v}) = \vec{M}$ es subespacio invariante de $\vec{X}$ que admite en $\vec{X}$ un complementario $\vec{Y}$ también invariante, es decir:

$$\vec{X} = \vec{M} \oplus \vec{Y}$$

así, como $\hat{M}(a) = \mathbb{K}a \oplus \vec{M}$ se tiene:

$$\hat{X} = \mathbb{K}a \oplus \vec{X} = \mathbb{K}a \oplus \vec{M} \oplus \vec{Y} = \hat{M}(a) \oplus \vec{Y}$$

Esto concluye la demostración. □

El resultado final es el siguiente:

Corolario 2.6.

Para todo endomorfismo afín f *de* X, *existe un sistema de referencia cartesiano,* $\varepsilon = (e_0, \vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n)$ *respecto al cual la matriz de* f *es de la forma:*

$$J = \begin{pmatrix} C & 0 \\ 0 & J' \end{pmatrix} \text{ donde } C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 1 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ & & \ldots & & \\ 0 & 0 & & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ es una caja de Jordan}$$

de orden $r \geq 1$, *y* J' *es una matriz de Jordan.*

(Nótese que para r = 1, *se tiene* C = (1), *y* f *es endomorfismo con puntos fijos, caso ya estudiado en* 1.4 *y* 1.5*).*

Demostración

Empezamos tomando la descomposición $\hat{X} = \hat{X}_1 \oplus \vec{Y}$ del corolario 2.2. Por la proposición anterior, existe $a \in X_1$ y $\vec{Y}_1$ subespacio invariante de $\vec{X}_1$ tal que $\hat{X}_1 = \hat{M}(a) \oplus \vec{Y}_1$, y por tanto se tiene:

$$\hat{X} = \hat{M}(a) \oplus \vec{Z}$$

Con $\vec{Z} = \vec{Y}_1 \oplus \vec{Y}$ subespacio invariante de $\vec{X}$.

Tomamos $e_0 = a$; si $\phi_i(t) = (t-1)^r$ elegimos $\vec{e}_1 = \vec{v} = \overrightarrow{af(a)}$ (si $\vec{v} = 0$, a es punto fijo, y por 1.4 se concluye la demostración). Sea $\vec{e}_i = (\vec{f} - id)^i(\vec{v})$ para $i = 1, \ldots, r-1$. El sistema $\varepsilon = (e_0, \vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_{r-1})$ es de referencia para $M(a)$, y la representación matricial de f restringido a $M(a)$ es la matriz C del enunciado, ya que por construcción es:

$$f(e_0) = e_0 + \vec{e}_1,\ \vec{f}(\vec{e}_i) = \vec{e}_i + \vec{e}_{i+1} \text{ para } i = 1, \ldots, r-1, \text{ y } \vec{f}(\vec{e}_{r-1}) = 0.$$

Eligiendo ahora una base de Jordan $(\vec{e}_r, \ldots, \vec{e}_n)$ para la restricción de $\vec{f}$ a $\vec{Z}$, la matriz cartesiana que representa a f respecto al sistema de referencia

$$\varepsilon = (e_0, \vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n)$$

es como la indicada en el enunciado.

§3. TEOREMA DE CLASIFICACION

Hemos visto que en endomorfismo f del espacio afín X admite una representación cartesiana de Jordan de la forma:

$$J = \begin{pmatrix} C(r) & 0 \\ 0 & J' \end{pmatrix} \text{ donde } C(r) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 1 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

es una caja de Jordan de orden r, y J' es una matriz de Jordan. Esta matriz J también puede considerarse matriz de Jordan del endomorfismo lineal $\hat{f}: \hat{X} \to \hat{X}$. Desde el punto de vista de la equivalencia lineal, es indiferente el orden en que se distribuyan las cajas de Jordan de J. Esto no sucede exactamente así respecto de la equivalencia afín. Concretamente, el orden r de la caja $C(r)$ que ocupa el vertice superior izquierdo de la matriz J es decisivo para determinar la clase de equivalencia afín de f. Comencemos con un ejemplo sencillo:

Ejemplo 3.1.

Sean f y f' endomorfismos de un espacio afín de dimensión igual a dos. Supóngase que hemos encontrado sistemas de referencia cartesianos

$\varepsilon=(e_0, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ y $\varepsilon'=(e'_0, \vec{e}'_1, \vec{e}'_2)$ de forma que las matrices $M_\varepsilon(f)=J$, $M_{\varepsilon'}(f')=J'$ son las siguientes:

$$J=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad J'=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Estas matrices de Jordan son semejantes desde el punto de vista lineal, ya que se obtiene una de la otra por permutación de cajas.

Como $M_\varepsilon(\hat{f})=J$, y $M_{\varepsilon'}((\hat{f}')=J'$, se deduce que los endomorfismos lineales $\hat{f}$ y $\hat{f}'$ son linealmente equivalentes.

Sin embargo, los endomorfismos afines f y f' no son afínmente equivalentes, ya que f' tiene a e'_0 como punto fijo, y f carece de ellos. En efecto, las ecuaciones del subespacio de puntos fijos de f en las coordenadas cartesianas inducidas por ε son:

$$J\begin{pmatrix} 1 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \text{ o también } \begin{matrix} 1+x_1=x_1 \\ \\ x_2=x_2 \end{matrix}$$

que es claramente incompatible.

El siguiente resultado, proporciona la pista para determinar un nuevo variante afín fácilmente computable, que determine el orden r de la caja $C(r)$:

Proposición 3.2.

Si f *es un endomorfismo afín de* X, *que admite respecto a cierto sistema de referencia cartesiano* ε *una matriz:*

$$J=\begin{pmatrix} C(r) & 0 \\ 0 & J_1 \end{pmatrix} \; con \; C(r)=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

y J_1 *matriz de Jordan, el orden* r *de la caja* C(r) *viene determinado por:*

$$r=\delta(f)=min\,\{k\in N : X \cap Ker\,[(\hat{f}-\widehat{id})^k]\neq\phi\} \qquad (3.2.1)$$

Demostración

Sea $H=C(r)-I(r)$ ($I(r)$ es la matriz identidad de orden r). Por ejemplo, para $r=5$ se tiene:

$$H=\begin{pmatrix} 0&0&0&0&0\\ 1&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&0\\ 0&0&1&0&0\\ 0&0&0&1&0 \end{pmatrix}, \qquad H^2=\begin{pmatrix} 0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0\\ 1&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&0\\ 0&0&1&0&0 \end{pmatrix},$$

$$H^3=\begin{pmatrix} 0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0\\ 1&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&0 \end{pmatrix}, \qquad H^4=\begin{pmatrix} 0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0\\ 1&0&0&0&0 \end{pmatrix}$$

y finalmente $H^5=0$. El lector puede deducir a partir de aquí fácilmente cuál es la ley de formación de las potencias de H para un r arbitrario.

Las ecuaciones de ker $[(\hat{f}-\widehat{id})^k]$, en las coordenadas lineales x_i inducidas por ε en X son de la forma:

$$\begin{pmatrix} H^k & 0 \\ 0 & J_1^k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

, y para $k<r$, aparece la ecuación

$$x_0=0$$

que resulta incompatible con la de ecuación «$x_0=1$» de X. Así:

$$\ker\ [(\hat{f} - \widehat{id})^k] \cap X = \phi \text{ para } k < r.$$

Justamente cuando $k = r$, es $H^k = 0$ y en el sistema de ecuaciones anterior, no interviene la variable x_0. Si añadimos ahora la ecuación $x_0 = 1$, el sistema resultante es compatible; y por tanto:

$$\ker\ [(\hat{f} - \widehat{id})^r] \cap X \neq \phi \quad \square$$

Proposición 3.3.

La aplicación $\delta : \mathrm{EA}(X) \ni f \to \delta(f) \in \{1, ..., n\}$ *definida en (3.2.1) es un invariante para la clasificación afín de endomorfismos.*

Demostración

Si $f' = gfg^{-1}$, siendo $f, f' \in EA(X)$ y $g \in GA(X)$, entonces se verifica también:

$$\hat{f}' = \hat{g}\hat{f}\hat{g}^{-1}; \text{ y } (\hat{f}' - \widehat{id})^k = \hat{g}(\hat{f} - \widehat{id})^k \hat{g}^{-1}$$

lo cual permite demostrar fácilmente que
$\ker\ [(\hat{f}' - \widehat{id})^k] = \hat{g}(\ker\ [(\hat{f} - \widehat{id})^k])$, y se tiene en particular que:

$$\ker\ [(\hat{f}' - \widehat{id})^k] \cap X = \hat{g}(\ker\ [(\hat{f} - \widehat{id})^k]) \cap X$$

Esto prueba evidentemente que $\delta(f) = \delta(f')$. $\square$

Tenemos así el siguiente criterio para la semejanza afín de matrices cartesianas de Jordan:

Corolario 3.4.

Dos matrices cartesianas de Jordan de orden n:

$$J = \begin{pmatrix} C(r) & 0 \\ 0 & J_1 \end{pmatrix} \qquad J' = \begin{pmatrix} C(r') & 0 \\ 0 & J'_1 \end{pmatrix}$$

son afínmente semejantes, si y sólo si $r = r'$ *y* J'_1 *puede obtenerse a partir de* J_1 *por permutación de cajas.*

Demostración

Consideradas J y J' como endomorfismos afines de A_n, si J es afínmente equivalente a J', por 3.2 y 3.3 se deduce que $r=\delta(J) = =\delta(J')=r'$, y como J_1 es (linealmente) semejante a J'_1 se deduce (por el teorema de Jordan) que una se obtiene de la otra por permutación de cajas.

Recíprocamente, si $r=r'$ y J_1 es linealmente semejante a J'_1, sea P_1 matriz cuadrada no singular tal que $J'_1=P_1^{-1}J_1P_1$ tomando $P= =\begin{pmatrix} I(r) & 0 \\ 0 & P_1 \end{pmatrix}$ donde $I(r)$ es la matriz identidad de orden r, se tiene que $P\in GA(n)$, y $J'=P^{-1}AP$ Esto prueba que J y J' son afínmente semejantes.

Corolario 3.5.

Dos endomorfismos afines f *y* f′ *de* X *son afínmente equivalentes, si y sólo si los endomorfismos lineales* $\hat{\mathrm{f}}$ *y* $\hat{\mathrm{f}}'$ *de* X *son linealmente equivalentes, y* $\delta(\mathrm{f})=\delta(\mathrm{f}')$.

Demostración

Si $\hat{f}$ y $\hat{f}'$ son linealmente equivalentes, es posible determinar una representación matricial J de Jordan común a $\hat{f}$ y $\hat{f}'$ respecto a bases de $\hat{X}$ convenientemente elegidas. Si además $r=\delta(f)=\delta(f')$, es posible reordenar las cajas de Jordan de J para colocar $C(r)$ en el vértice superior izquierdo de la forma:

$$J=\begin{pmatrix} C(r) & 0 \\ 0 & J_1 \end{pmatrix}$$

y todas las matrices cartesianas de Jordan así obtenidas son (por 3.4) afínmente semejantes. Utilizando ahora 2.6 se concluye que f y f' admiten representaciones cartesianas de Jordan J y J' respectivamente, obtenidas de esta forma. Por ser J y J' afínmente semejantes, se deduce que f y f' son afínmente equivalentes. (Véase 1.3.)

El recíproco es consecuencia de ser δ un invariante afín. □

EJERCICIOS

9.1. Probar que dos endomorfismos f y f' de un espacio afín X son afínmente equivalentes, si y sólo si existen sistemas de referencia afín ε y ε' en X tales que $M_\varepsilon(f)=M_{\varepsilon'}(f')$.

9.2.* Establecer un teorema de clasificación afín para simetrías afines, y otro para proyecciones.

9.3. En las coordenadas cartesianas (x_i) relativas al sistema de referencia $\varepsilon=(e_0, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ del espacio afín X, se da la aplicación afín

$$x'_1=2+x_1+2x_2$$
$$x'_2=-2-x_2$$

Demostrar que se trata de una simetría afín, determinar su base y dirección, y calcular las ecuaciones de la proyección afín con la misma base y dirección.

9.4.* Dar un teorema para la clasificación afín de dilataciones en un espacio afín.

9.5. Establecer un teorema para la clasificación afín de endomorfismos en una recta afín.

9.6.* Sea B subespacio afín de X, y $\vec{D}$ subespacio vectorial de $\vec{X}$ tales que:

$$\vec{X}=\vec{B}\oplus\vec{D}$$

y $\pi: X\to X$ la proyección de base B y dirección $\vec{D}$.

Se llama deformación afín con base B dirección $\vec{D}$ y razón $\rho\in K$, a la aplicación $f: X\to X$ definida por:

— $f(x)=x$ para todo $x\in B$

— Si $x\in X-B$, $f(x)\in\langle x, \pi(x)\rangle$ y verifica:

$$(\pi(x) : f(x) : x)=\rho$$

a) Probar que f es aplicación afín, que puede describirse por la igualdad:

$$f=(1-\rho)\pi+\rho id \quad \text{(véase ejercicio 8.8)}$$

b) Determinar una matriz cartesiana de Jordan para f, y establecer un teorema para la clasificación afín de deformaciones.

9.7. En el espacio afín $A_3(\mathbb{R})$ determinar las ecuaciones de la deformación afín con base:

$$B:(2+x_1+x_2=0;\ x_3=0),\ \text{dirección}\ \vec{D}:(2x_1+x_2+2x_3=0)\ \text{y razón}\ \rho=-2.$$

9.8.* Sea f una transformación afín del espacio X, que deja fijos los puntos de un hiperplano H, y sea $a\in X-H$, $b=f(a)$.

i) Probar que si $a=b$ entonces $f=id$.

ii) Si $a\neq b$, y $\langle a, b\rangle \cap H\neq\phi$ demostrar que f es una deformación afín con base H.

iii) Si $a=b$, y $\langle a, b\rangle // H$, demostrar que f deja invariante cada hiperplano H_1 paralelo a H, e induce traslación sobre él. Se denomina entonces a f transvección con base en H y dirección $\langle\overrightarrow{ab}\rangle$.

9.9.* Demostrar que cualquier transvección admite una representación cartesiana de la forma:

$$J=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

y en consecuencia todas son afínmente equivalentes.

9.10. Probar que el producto de dos simetrías afines con base en el mismo hiperplano y direcciones distintas, es una transvección.

9.11. Probar que el endomorfismo afín de $A_2(\mathbb{R})$ que tiene por matriz:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & -1 & -1 \\ 6 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

es una transvección. Determinar su base y dirección.

9.12. Determinar las ecuaciones en $A_3(\mathbb{R})$ del endomorfismo afín f que deja fijos los puntos del hiperplano:

$$H:(5+x_1+3x_2+2x_3=0)$$

y transforma el punto

$$a=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{en} \quad b=\begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 5 \\ -5 \end{pmatrix}$$

Demostrar que f induce traslación sobre cada hiperplano de la forma: $x_1+3x_2+2x_3=k$. Calcular en función de k el vector de la traslación.

9.13. Determinar las ecuaciones en $A_3(\mathbb{R})$ del endomorfismo afín f que deja fijos los puntos del hiperplano:

$$H=x_1+x_2+x_3=1, \text{ y transforma } a=\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{en}$$

$$b=\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Probar que f es deformación afín, y calcular su dirección y su razon.

9.14. Demostrar que la aplicación lineal asociada a un endomorfismo afín sin puntos fijos, tiene vectores fijos no nulos.

9.15.* Sea $f: X \to X$ una deformación afín con base B y dirección $\vec{D}$, y $\tau: X \to X$ la traslación de vector $\vec{v}$, $\vec{v} \neq 0$.

1) Demostrar que si $\vec{v} \in \vec{D}$, entonces $f \cdot \tau$ y $\tau \cdot f$ son deformaciones afines con base paralela a B, y la misma dirección y razón que f.

2) Probar que si $\vec{v} \in \vec{B}$ entonces $\tau \cdot f = f \cdot \tau = g$. Se denomina a g deformación con deslizamiento, y a $\vec{v}$ vector de deslizamiento.

3) Demostrar que el producto de $\tau_{\vec{v}} \cdot f$ es una deformación con deslizamiento, siempre que $\vec{v}$ no esté en la dirección $\vec{D}$.

9.16.* Establecer un teorema para la clasificación afín de las deformaciones con deslizamiento.

9.17. En las coordenadas cartesianas (x_i) respecto al sistema de referencia $\varepsilon = (e_0, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ del espacio afín X, se da el endomorfismo de ecuaciones:

$$\begin{aligned} x'_1 &= 4 + x_1 + 3x_2 + 3x_3 \\ x'_2 &= 3 \qquad\; + 4x_2 + 3x_3 \\ x'_3 &= -6 \quad\; - 6x_2 - 5x_3 \end{aligned}$$

Demostrar que se trata de una deformación con deslizamiento.

Determinar la base, dirección, razón y vector de deslizamiento.

9.18. Demostrar que un endomorfismo afín $f: X \to X$ es simetría con deslizamiento, si y sólo si no tiene puntos fijos, y $\vec{f} \cdot \vec{f} = \overrightarrow{id}$.

9.19. En $A_2(\mathbb{R})$ determinar las ecuaciones de la simetría con deslizamiento que tiene por base $B: (x_1 + x_2 = 1)$, dirección $\vec{D}$: $(2x_1 + x_2 = 0)$ y transforma el punto

$$a=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad en \quad b=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

9.20. En $A_3(\mathbb{R})$, se da la transformación afín que tiene por matriz cartesiana:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 9 & 6 & 4 \end{pmatrix}$$

a) Demostrar que f induce traslación sobre cada hiperplano de la familia:

$$3x_1+2x_2+x_3=k$$

Determinar en función de k el vector de la traslación.

b) Determinar una representación cartesiana de Jordan para f.

9.21. Establecer un teorema de clasificación de endomorfismos para planos afines reales.

9.22. En un plano afín real X y referidos a un sistema cartesiano $\varepsilon=(e_0, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ se dan los endomorfismos con matrices:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 3 \\ -1 & -6 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Determinar en cada caso un sistema de referencia cartesiano que dé lugar a una representación de Jordan del endomorfismo.

9.23.* Establecer un teorema de clasificación de endomorfismos para espacios afines reales tridimensionales.

9.24.* En espacio afín real de dimensión 3, y referidos a un sistema cartesiano ε, se dan los endomorfismos con matrices:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & -3 & -1 & -2 \\ 6 & 8 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \\ -5 & -4 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 5 & 5 & 2 & 4 \\ -2 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ -2 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 7 & 4 & 4 & 3 \\ -2 & -1 & -3 & -1 \\ -7 & -3 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Determinar en cada caso un sistema de referencia cartesiano respecto al cual, la matriz del endomorfismo es de Jordan.

9.25. Estudiar geométricamente cada uno de los endomorfismos de $A_4(\mathbb{R})$ con matrices cartesianas:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 3 & 2 \\ -6 & 0 & -6 & -6 & -5 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & -5 & -6 & -4 \\ 4 & 1 & 6 & 6 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -4 & -1 & -5 & -6 & -3 \end{pmatrix}$$

9.26. Sean f y f' endomorfismos afines de X. Probar que f es afínmente equivalente a f' si y sólo si $\vec{f}$ es linealmente equivalente a $\vec{f}'$, y $\hat{f}$ es linealmente equivalente a $\hat{f}'$.

9.27. En un espacio afín X de dimensión 7 se da un endomorfismo f. Sabiendo que:

— $\chi_{\hat{f}}(t)=(t-1)^6\,(t+1)^2$

— $rg\,(\hat{f}-id)=5,\ rg\,(\vec{f}-\vec{id})=4$

— $rg\,[(\hat{f}-id)^2]=3,\ rg\,[(\vec{f}-\vec{id})^2]=2.$

Encontrar una matriz cartesiana de Jordan para el endomorfismo afín f.

9.28.* Sea f endomorfismo afín de X. Probar que $\delta(f)-1$ representa el mínimo de las dimensiones de los subespacios afines invariantes de f. (Véase (3.2.1) para la definición de δ).

CAPITULO V

FORMAS CUADRATICAS

Informalmente, una forma cuadrática es un polinomio homogéneo de grado dos. La teoría algebraica de formas cuadráticas se aplica en muchos campos de las matemáticas: geometría, mecánica, topología, análisis y en sí misma constituye una teoría difícil y apasionante. En nuestro estudio, con una motivación principalmente geométrica, se lleva a cabo una introducción a los resultados más sencillos y de mayor utilidad en la teoría de formas cuadráticas.

LECCION 10

FORMAS LINEALES, BILINEALES Y CUADRATICAS

En términos clásicos, un polinomio $\Phi(x_1, ..., x_r)$ en las variables $x_1, ..., x_r$ y con coeficientes en un cuerpo $\mathbb{K}$, es decir $\Phi \in \mathbb{K}[x_1, ..., x_r]$ se dice que es una forma de grado p si todos los términos de Φ tienen grado p respecto al conjunto de las variables. A las formas de primer grado se las llama formas lineales, a las de segundo grado cuadráticas, a las de tercero cúbicas, etc.

Una forma de grado p, Φ, define por sustitución una aplicación de $V_r(\mathbb{K})$ en $\mathbb{K}$:

$$V_r(\mathbb{K}) \ni \begin{pmatrix} x_1 \\ \cdot \\ x_r \end{pmatrix} \to \Phi(x_1, ..., x_r) \in \mathbb{K}$$

La abstracción de las propiedades de estas aplicaciones permite definir formas de grado p, en particular lineales y cuadráticas, como aplicaciones de un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ en $\mathbb{K}$.

Supondremos en toda la lección que $\mathbb{K}$ *es un cuerpo conmutativo con caracteristica distinta de dos y que* V es un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$.

1. ESPACIO DUAL

Como hemos adelantado en la introducción, una forma lineal de $V_r(\mathbb{K})$ es una aplicación:

$$V_r(\mathbb{K}) \ni \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_r \end{pmatrix} \to \alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_r x_r \in \mathbb{K}$$

Por tanto el concepto de forma lineal de $V_r(\mathbb{K})$ coincide con el de aplicación lineal de $V_r(\mathbb{K})$ en $V_1(\mathbb{K})$.

Definición 1.1. Forma lineal

Una forma lineal de V *es una aplicación lineal de* V *en* $V_1(\mathbb{K})$.

Ejemplo 1.2.

Considérese el conjunto de polinomios $\mathbb{K}[t]$, con coeficientes en $\mathbb{K}$ y variable t, con estructura de espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ (ver ejemplo 1 de 1.4, lec. 2). Entonces definimos la aplicación:

$$\mathbb{K}[t] \ni a_k t^k + \ldots + a_0 \to a_0 \in V_1(\mathbb{K})$$

Es claro que se trata de una forma lineal de $\mathbb{K}[t]$.

Proposición 1.3.

El conjunto de todas las formas lineales de un espacio vectorial V *tiene estructura de espacio vectorial.*

Demostración

Es una consecuencia de 1.11 de la lección 3. □

Definición 1.4. Espacio dual

Se denomina espacio dual de V *al espacio vectorial de las formas lineales de* V *y se denota por* V^*.

Notación 1.5.

Si $v \in V$ y $x \in V^*$ se denotará indistintamente a $x(v)$ por $(x|v)$ o por $(v|x)$. En general, la expresión $(a|b)$ significa que uno de los elementos a o b pertenece a V, el otro a V^* y se evalúa la forma sobre el vector.

A continuación establecemos las reglas formales de cálculo con la notación dada en 1.5:

Proposición 1.6.

1. $(a|b)=(b|a)$.

2. $(\lambda a+\mu b|c)=\lambda(a|c)+\mu(b|c)$

3. Supongamos que V *tiene dimensión finita* n. *Si* $(a|b)=0$ *para todo* b, *entonces* $a=0$.

La propiedad 3 es también cierta sin la restricción de dimensión finita, sin embargo, para nuestro estudio será suficiente el caso particular enunciado.

Demostración

Las propiedades 1 y 2 son consecuencia inmediata de la notación, de las propiedades de la estructura de espacio vectorial y de que las formas son aplicaciones lineales.

En cuanto a la propiedad 3, si $a \in V^*$ entonces $a(v)=0$ para cada $v \in V$, por tanto, $a=0$. En el caso de ser $a \in V$, supongamos que $a \neq 0$. Por el teorema de prolongación de bases (3.6 lección 2), existe $\varepsilon=(a, e_2, ..., e_n)$ base de V y por el teorema fundamental de homomorfismos (1.7 lección 3) existe una forma lineal de V, b, que verifica $b(a)=1$ y $b(e_i)=0$, $i=2, ..., n$. Por tanto $(a|b)=1\neq 0$. □

La construcción que hemos efectuado en la demostración anterior de la forma b a partir de $a \in V$ es de gran interés, pues como veremos proporciona la relación entre el sistema de coordenadas respecto a una base y el espacio dual.

Por la definición de f, $(b_1, ..., b_n)$ es base dual de $(a_1, ..., a_n)$ y es única por ser f isomorfismo.

Si $a \in \langle a_1, ..., a_n \rangle$ es $a = \lambda_1 a_1 + ... + \lambda_n a_n$ con $(\lambda_1, ..., \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$ y tenemos $(a|b_i) = \lambda_1 (a_1|b_i) + ... + \lambda_n (a_n|b_i) = \lambda_i (a_i|b_i) = \lambda_i$ para $i = 1, ..., n$, luego $a = (a|b_1)a_1 + ... + (a|b_n)a_n$. □

Corolario 1.9.

Sea V *un espacio vectorial de dimensión finita y* $\varepsilon = (e_1, ..., e_n)$ *una base de* V. *Si* $\varepsilon^* = (e_1^*, ..., e_n^*)$ *es la base dual de* ε *entonces la aplicación:*

$$x : V \ni v \to \begin{pmatrix} (e_1^*|v) \\ \vdots \\ (e_n^*|v) \end{pmatrix} \in V_n(\mathbb{K})$$

es el sistema de coordenadas respecto a la base ε *(véase 3.2, lección 3).*

A continuación definiremos una aplicación entre el conjunto de las partes de V (o V^*) y el de las partes de V^* (resp. V). Las propiedades de esta aplicación que llamaremos ortogonalidad (dual) son, como veremos, muy similares a las de otras aplicaciones que se definirán más adelante y que se denominarán también ortogonalidades (véase 1.9, lección 11).

Definición 1.10. Ortogonalidad

Sea S *un subconjunto del espacio vectorial* V *(o* V*). *Se llama ortogonal de* S, S^{ω}, *al conjunto de todos los elementos* a *de* V^* *(resp. de* V*) tales que* $(a|s) = 0$ *para todo elemento* $s \in S$.

He aquí algunas de las propiedades más características:

Proposición 1.11.

Sean S *y* T *subconjuntos de* V *(o* V^**). Entonces:*

1. S^{ω} *es subespacio vectorial.*

2. *Si* $S \subset T$ *entonces* $T^{\omega} \subset S^{\omega}$.
3. $S^{\omega} = \langle S \rangle^{\omega}$.
4. $S \subset S^{\omega\omega}$

Demostración

1. Sean $a_1, a_2 \in S^{\omega}$ y $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$. Entonces para cada $s \in S$,

$$(\lambda a_1 + \mu a_2 | s) = \lambda (a_1 | s) + \mu (a_2 | s) = 0,$$

luego $\lambda a_1 + \mu a_2 \in S^{\omega}$.

2. Sea $a \in T^{\omega}$. Para cada $s \in S$, como $S \subset T$, $s \in T$ y por tanto $(a|s)=0$. Luego $T^{\omega} \subset S^{\omega}$
3. Sean $s_1, s_2 \in S$ y $\lambda, \mu \in K$. Entonces para cada $a \in S^{\omega}$,

$$(a | \lambda s_1 + \mu s_2) = \lambda (a | s_1) + \mu (a | s_2) = 0, \quad \text{luego } S^{\omega} \subset \langle S \rangle^{\omega}.$$

Por otra parte como $S \subset \langle S \rangle$, por el apartado 2 es $\langle S \rangle^{\omega} \subset S^{\omega}$.

4. Si $s \in S$, se verifica que $(a|s)=0$ para cada $a \in S^{\omega}$, luego $s \in S^{\omega\omega}$ □

Estudiaremos ahora la relación existente entre la ortogonalidad y las operaciones del retículo $\mathscr{L}(V)$ (o $\mathscr{L}(V^*)$).

Proposición 1.12.

Sean U *y* W *dos subespacios de* V *(o* V**). Supondremos que* V *tiene dimensión finita* n.

1. $(U+W)^{\omega} = U^{\omega} \cap W^{\omega}$.
2. $\dim U + \dim U^{\omega} = \dim V = n$
3. $U = U^{\omega\omega}$
4. $(U \cap W)^{\omega} = U^{\omega} + W^{\omega}$.

Demostración

1. Como $U+W$ contiene a U y a W, se deduce por el apartado 2 de 1.1 que $(U+W)^\omega \subset U^\omega \cap W^\omega$. Por otra parte si $s \in U^\omega \cap W^\omega$ y $u \in U$, $w \in W$, es $(u+w|s)=(u|s)+(w|s)=0$.

2. Sea $(a_1, ..., a_r)$ una base de U que se extiende a $(a_1, ..., a_r, ..., a_n)$ base de V (o V^*). Sea $(b_1, ..., b_r, ..., b_n)$ la base dual de la anterior. Bastará probar que $\langle b_{r+1}, ..., b_n\rangle = U^\omega$. En efecto:

$$(a_i|b_j)=0 \text{ si } i=1, ..., r \text{ y } j=r+1, ..., n,$$

por tanto, para $j=r+1, ..., n$, es $b_j \in \{a_1, ..., a_r\}^\omega=\langle a_1, ..., a_r\rangle^\omega=U^\omega$. Luego $\langle b_{r+1}, ..., b_n\rangle \subset U^\omega$.

Por otra parte, si $b \in U^\omega$, por la proposición 1.8, $b=(b|a_1)b_1+ +...+(b|a_r)b_r+...+(b|a_n)b_n$, y como $(b|a_i)=0$ para $i=1, ..., r$ se concluye que $b \in \langle b_{r+1}, ..., b_n\rangle$.

3. Por 1.11 se tiene $U \subset U^{\omega\omega}$ y por el apartado anterior dim $U= =n-\text{dim } U^\omega=n-(n-\text{dim } U^{\omega\omega})=\text{dim } U^{\omega\omega}$; luego $U=U^{\omega\omega}$.

4. Por el primer apartado aplicado a U^ω y W^ω se obtiene $(U^\omega+W^\omega)^\omega=U^{\omega\omega} \cap W^{\omega\omega}=U \cap W$ y aplicando la ortogonalidad a los dos miembros se concluye la igualdad deseada. $\square$

2. FORMAS BILINEALES Y CUADRATICAS

Las formas bilineales nacen al estudiar polinomios en dos sistemas de variables: $X_1, ..., X_r$ e $Y_1, ..., Y_r$. Un polinomio se llama forma si es homogéneo respecto a cada uno de los sistemas de variables por separado. Son de nuestro interés las formas lineales respecto a cada uno de los sistemas de variables. Estas formas se llaman bilineales. Las formas bilineales dan lugar a formas cuadráticas identificando los dos sistemas de variables.

Una forma bilineal Φ define por sustitución una aplicación:

$$V_r(\mathbb{K}) \times V_r(\mathbb{K}) \ni \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_r \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_r \end{pmatrix} \right) \to \Phi(x_1, ..., x_r, y_1, ..., y_r) \in \mathbb{K}$$

Análogamente al caso de formas lineales la abstracción de las propiedades de esta aplicación permite definir el concepto de forma bilineal en un espacio vectorial arbitrario.

Definición 2.1. Forma bilineal

Una forma bilineal de un espacio vectorial V *sobre* $\mathbb{K}$ *es una aplicación* $\Phi : V \times V \to \mathbb{K}$ *tal que para* $v \in V$ *las aplicaciones:*

$\Phi_i(v) : V \ni x \to \Phi_i(v)\ (x) = \Phi(v,\ x) \in V_1(\mathbb{K})$ y
$\Phi_d(v) : V \ni x \to \Phi_d\ (v)\ (x) = \Phi\ (x,\ v) \in V_1\ (\mathbb{K})$

son aplicaciones lineales.

Ejemplos 2.2.

1. Consideremos $\mathbb{R}[X]$ como espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$, *entonces la aplicación:*

$$\Phi : \mathbb{R}[X] \times \mathbb{R}[X] \ni (\varphi_1(X),\ \varphi_2(X)) \to \int_0^1 \varphi_1(t)\ \varphi_2(t)\, dt \in \mathbb{R}$$

es una forma bilineal.

2. Considérese $V_n(\mathbb{K})$ y una matriz $A \in EL(n,\ \mathbb{K})$. La aplicación:

$$\Phi_A : V_n(\mathbb{K}) \times V_n(\mathbb{K}) \ni \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} y_1 \\ \cdot \\ y_n \end{pmatrix} \right) \to$$

$$(x_1,\ \ldots,\ x_n)\, A \begin{pmatrix} y_1 \\ \\ y_n \end{pmatrix} \in V_1(\mathbb{K})$$

es una forma bilineal.

$$=(x_1, \ldots, x_n)A\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}=\left[(x_1, \ldots, x_n)A\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}\right]^t=$$

$$=(y_1, \ldots, y_n)A^t\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}=$$

$$=\Phi\left(\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}\right).$$

Si Φ es simétrica y

$$A=(a_{ij}),\ a_{ij}=\Phi(l_i, l_j)=\Phi(l_j, l_i)=a_{ji},\ i, j \in \{1, \ldots, n\},$$

luego A es simétrica.

Observación 2.7.

Una forma bilineal Φ es simétrica si y solamente si $\Phi_d=\Phi_i$.

En la introducción del parágrafo observamos que con el concepto de formas bilineales como polinomios en dos sistemas de variables, al identificar ambos sistemas el resultado era una forma cuadrática. Este hecho nos va a servir para definir forma cuadrática de un espacio vectorial general.

Si Φ es una forma bilineal de V, podemos construir la aplicación:

$$q : V \ni v \to q(v)=\Phi(v, v) \in \mathbb{K}$$

y esta aplicación responde a nuestra idea a priori de forma cuadrática. Es inmediato comprobar que q verifica las dos propiedades siguientes:

a) $q(\lambda v)=\lambda^2 q(v)$, para $\lambda \in \mathbb{K}$ y $v \in V$.

b) $\Phi(v_1, v_2)=(1/2)(q(v_1+v_2)-q(v_1)-q(v_2))$, para $v_1, v_2 \in V$, si Φ es simétrica.

La propiedad *b* permite la «reconstrucción» de la forma bilineal Φ a partir de *q*. Gracias a estas dos propiedades podemos definir forma cuadrática sin una forma bilineal previa:

Definición 2.8. Forma cuadrática

Una forma cuadrática q *de un espacio vectorial* V *sobre* $\mathbb{K}$ *(cuerpo de característica distinta de dos) es una aplicación* $q : V \to \mathbb{K}$ *que verifica:*

1. *Para todo* $v \in V$ *y* $\lambda \in \mathbb{K}$, $q(\lambda v) = \lambda^2 q(v)$.
2. *La aplicación*

$$Q : V \times V \in (v_1, v_2) \to (1/2)\,(q(v_1 + v_2) - q(v_1) - q(v_2))$$

es una forma bilineal (simétrica).

La forma bilineal Q *se denomina* polar *de* q.

Ejemplo 2.9.

1. La aplicación $q : \mathbb{R}[X] \ni \varphi(X) \to \int_0^1 \varphi^2(t)\,dt \in \mathbb{R}$ es una forma cuadrática.
2. Si $A \in EL(n, \mathbb{K})$, la aplicación

$$q_A : V_n(\mathbb{K}) \ni \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \to (x_1, \ldots, x_n)\, A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}$$

es también una forma cuadrática.

Observaciones 2.10.

a) Releyendo la justificación de la definición de forma cuadrática podemos afirmar que dada una forma bilineal Φ de *V*, la aplicación $q : V \ni v \to \Phi(v, v) \in \mathbb{K}$ es una forma cuadrática que se denomina *inducida por* Φ.

b) Dada una forma cuadrática q, la forma polar Q está unívocamente determinada y la forma cuadrática inducida por Q es de nuevo q. Sin embargo, si Φ es una forma bilineal y q es la forma cuadrática inducida por Φ, en general Q es distinta de Φ. Obsérvese que la forma polar es siempre una forma bilineal simétrica y Φ puede no serlo.

c) En la definición 2.8 se utiliza el hecho de que el cuerpo $\mathbb{K}$ tiene característica distinta de dos para poder escribir en la expresión de Q la fracción (1/2).

En el caso de formas bilineales y cuadráticas definidas en espacios vectoriales de dimensión finita, los métodos de geometría analítica vectorial (parágrafo 3 de la lección 3) nos permiten asociar a cada una de dichas formas una matriz:

Proposición 2.11. Expresiones analíticas

Sea V *un espacio vectorial de dimensión finita sobre* $\mathbb{K}$ *y* $\varepsilon=(\mathrm{e}_1, \ldots, \mathrm{e}_n)$ *una base de* V *cuyo sistema de coordenadas asociado es* $\mathrm{x} : \mathrm{V} \to \mathrm{V}_n(\mathbb{K})$.

Si $\Phi : \mathrm{V} \times \mathrm{V} \to \mathbb{K}$ *es una forma bilineal denotaremos* $\mathrm{M}_\varepsilon(\Phi)$ *a la matriz de* $\mathrm{EL}(\mathrm{n}, \mathbb{K})$ *cuyo elemento de la fila i-ésima y la columna j-ésima es* $\Phi(\mathrm{e}_i, \mathrm{e}_j)$. *Entonces, si* $\mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2 \in \mathrm{V}$ *se verifica:*

$$\Phi(\mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2)=\mathrm{x}(\mathrm{v}_1)^t\mathrm{M}_\varepsilon(\Phi)\,\mathrm{x}(\mathrm{v}_2).$$

La matriz $\mathrm{M}_\varepsilon(\Phi)$ *se denomina matriz de la forma bilineal* Φ *respecto a la base* ε.

Si $\mathrm{q} : \mathrm{V} \to \mathbb{K}$ *es una forma cuadrática cuya forma polar es* Q, *se designa* $\mathrm{M}_\varepsilon(\mathrm{q})$ *a la matriz* $\mathrm{M}_\varepsilon(\mathrm{Q})$. *Si* $\mathrm{v} \in \mathrm{V}$ *se verifica:*

$$\mathrm{q}(\mathrm{v})=\mathrm{x}(\mathrm{v})^t\mathrm{M}_\varepsilon(\mathrm{q})\,\mathrm{x}(\mathrm{v}).$$

La matriz $\mathrm{M}_\varepsilon(\mathrm{q})$ *se llama matriz de la forma cuadrática* q *respecto a la base* ε.

La demostración es una comprobación inmediata.

Corolario 2.12.

Si Φ es una forma bilineal definida sobre un espacio vectorial V *de dimensión finita y* ε *es una base de* V, Φ *es simétrica si y sólo si* $M_\varepsilon(\Phi)$ *es simétrica.*

Demostración

Es consecuencia inmediata del ejemplo 2.6 y de la proposición anterior. □

Obsérvese que una expresión matricial del tipo

$$(x_1(v_1), \ldots, x_n(v_1))M_\varepsilon(\Phi) \begin{pmatrix} x_1(v_2) \\ \vdots \\ x_n(v_2) \end{pmatrix}$$

al ser desarrollada da lugar a un polinomio homogéneo de segundo grado. Es decir, la proposición 2.11 nos hace recuperar la idea clásica de forma cuadrática. Sin embargo, en dicha proposición se ha realizado una elección de partida muy importante: se ha elegido la base ε de V. Por tanto no tenemos así una biyección entre polinomios homogéneos (o matrices) y formas cuadráticas pues, dependiendo de la base elegida, una misma forma cuadrática puede tener gran cantidad de expresiones polinómicas (resp. matriciales) distintas. La proposición siguiente nos explica cómo pueden cambiar dichas expresiones de una misma forma cuadrática al cambiar de base.

Proposición 2.13.

Sean ε *y* ε' *dos bases del espacio vectorial de dimensión finita* V *y sea* P *la matriz del cambio de base* ($\varepsilon' = \varepsilon$P). *Si* Φ *es una forma bilineal de* V, *entonces:*

$$M_{\varepsilon'}(\Phi) = P^t\, M_\varepsilon(\Phi)\, P$$

Análogamente, si q *es una forma cuadrática de* V, *entonces:*

$$M_{\varepsilon'}(q) = P^t\, M_\varepsilon(q)\, P$$

Demostración

Sean x y x' los sistemas de coordenadas respecto a ε y ε'. Para cada v, $w \in V$ es

$$\Phi(v, w) = x(v)^t M_\varepsilon(\Phi)\, x(w) = x'(v)^t P^t M_\varepsilon(\Phi)\, Px'(w) = x'(v)^t M_{\varepsilon'}(\Phi)\, x'(w).$$

Eligiendo como v y w los elementos de ε y ε' se concluye:

$$M_{\varepsilon'}(\Phi) = P^t M_\varepsilon(\Phi)\, P$$

Análogamente para el caso de formas cuadráticas. □

Observación 2.14.

Como consecuencia de la proposición 2.13 dos matrices A, $B \in EL\,(n, \mathbb{K})$ de una forma bilineal respecto a dos bases distintas verifican la siguiente relación:

$$A = P^t BP, \text{ con } P \in GL\,(n, \mathbb{K}).$$

Dos matrices así relacionadas se dice que son *congruentes*.

A continuación veremos cuál es la relación entre la matriz de una forma bilineal, $M_\varepsilon(\Phi)$ y las de los homomorfismos Φ_i y Φ_d.

Proposición 2.15.

Sea Φ una forma bilineal en V, *espacio vectorial de dimensión finita. Si ε es una base de* V *y ε^* es su dual, entonces:*

$$\mathrm{M}_\varepsilon(\Phi) = \mathrm{M}_{\varepsilon,\varepsilon^*}(\Phi_\mathrm{d}) = [\mathrm{M}_{\varepsilon,\varepsilon^*}(\Phi_\mathrm{i})]^t$$

Demostración

Sea $\varepsilon = (e_1, \ldots, e_n)$ y $\varepsilon^* = (e_1^*, \ldots, e_n^*)$. Las columnas de $M_{\varepsilon,\varepsilon^*}(\Phi_i)$ son las coordenadas de $\Phi_i(e_i)$, $i = 1, \ldots, n$, respecto a la base ε^* Ahora bien, como ε es dual de ε^*, aplicando 1.9 se tiene:

$$\Phi_i(e_j) = (e_1 | \Phi_i(e_j))\, e_1^* + \dots + (e_n | \Phi_i(e_j))\, e_n^* = \Phi(e_j, e_1)\, e_1^* + \dots +$$

$$+ \Phi(e_j, e_n)\, e_n^*$$

Por lo tanto el elemento de la columna j y fila k de $M_{\varepsilon,\varepsilon^*}(\Phi_i)$ es $\Phi(e_j, e_k)$, con lo cual $M_\varepsilon(\Phi) = [M_{\varepsilon,\varepsilon^*}(\Phi_i)]^t$. Análogamente se razona para Φ_d. □

El haber conseguido una relación entre matrices y formas bilineales y cuadráticas nos va a permitir la definición de algunos conceptos interesantes con cierta facilidad.

Definición 2.16. Rango

Sea Φ una forma bilineal definida en un espacio vectorial V *de dimensión finita. Se llama rango de Φ al rango de la matriz de Φ respecto a cualquier base de* V.

La definición anterior es consistente, es decir: el rango de Φ no depende de la elección de una base de V. Para comprobarlo basta por ejemplo aplicar 2.15. En efecto, el rango de Φ será igual a la dimensión de la imagen de Φ_d ó Φ_i.

El caso en que una forma bilineal tiene rango máximo es de importancia especial y se puede caracterizar por otra condición que tomaremos como definición:

Definición 2.17. Forma bilineal no degenerada

Sea Φ una forma bilineal sobre V, espacio vectorial de dimensión finita. Decimos que Φ es no degenerada si, para cada $v \in V$ *que verifique la condición:*

$$\Phi(v, v') = 0 \text{ para todo } v' \in V$$

se tiene que $v = 0$.

Ejemplo 2.18.

Sea Φ una forma bilineal en $V_n(\mathbb{R})$ y ε una base de $V_n(\mathbb{R})$. Si $M_\varepsilon(\Phi)$ es la matriz unidad, entonces Φ es no degenerada. En particular $\Phi(v, v) \neq 0$ si $v \neq 0$.

Obsérvese que Φ es no degenerada si y sólo si Ker $\Phi_i = \{0\}$, es decir: $rg\ \Phi_i = \dim V^* = \dim V$. Como $rg\ \Phi_i = rg\ \Phi_d$ (véase 2.15), la condición:

si $v \in V$ verifica $\Phi(v, v') = 0$ para todo v', entonces $v = 0$ (equivalente a Ker $\Phi_i = \{0\}$) puede ser sustituida en 2.17 por la condición:

si $v \in V$ verifica $\Phi(v', v) = 0$ para todo v' entonces, $v = 0$ (equivalente a Ker $\Phi_d = \{0\}$) aún en el caso de no ser Φ una forma bilineal simétrica.

Por último, como $rg\ \Phi_i\ (= rg\ \Phi_d)$ coincide con el rango de Φ, se tiene:

Proposición 2.19.

Sea Φ una forma bilineal en V, *espacio vectorial de dimensión* n. *Entonces Φ es no degenerada si y sólo si el rango de Φ es* n *(o equivalentemente, cualquier matriz de Φ tiene determinante no nulo).*

EJERCICIOS

10.1. Sea ε la base canónica de

$$V_3(\mathbb{R}) \text{ y } \varepsilon' = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

otra base cuyos vectores están expresados en coordenadas respecto a ε. Calcúlense las matrices respecto a las bases ε de $V_3(\mathbb{R})$ y (1) de $V_1(\mathbb{R})$ de las formas lineales que constituyen la base dual de ε' : ε'^* Calcúlense también las coordenadas de los elementos de ε'^* respecto la base dual de ε : ε^*.

10.2.* Sean ε y ε' dos bases de V espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$. Estudiar la relación entre las matrices de las formas lineales que constituyen la base dual de ε' respecto las bases ε y (1) (base de $V_1(\mathbb{R})$) y las coordenadas de dichas formas respecto a la base dual de ε.

10.3. Se definen en $V_3(\mathbb{R})$ las formas lineales:

$$f_1 : V_3(\mathbb{R}) \ni \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \to x_1 + x_2 + x_3 \in V_1(\mathbb{R})$$

$$f_2 . V_3(\mathbb{R}) \ni \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \to x_1 - x_2 + x_3 \in V_1(\mathbb{R})$$

$$f_3 . V_3(\mathbb{R}) \ni \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \to x_3 \in V_1(\mathbb{R}).$$

¿$\varepsilon'^* = (f_1, f_2, f_3)$ es una base de $V_3(\mathbb{R})^*$? ¿Cuál es la base ε' de $V_3(\mathbb{R})$ dual de ε'^*?

10.4. Dados los subespacios U_1, U_2 de $V_4(\mathbb{R})$ cuyas ecuaciones implícitas son:

$$U_1 : x_1+x_2+x_3+x_4=0 \text{ y } U_2 : x_4=0.$$

Hallar las ecuaciones implícitas de U_1^ω; U_2^ω; $(U_1 \cap U_2)^\omega$ y $(U_1+U_2)^\omega$ respecto a la base dual de la canónica de $V_4(\mathbb{R})$.

10.5.* Sean ε y ε' dos bases de V y ε^*, ε'^* las bases duales respectivas. Estudiar la relación existente entre la matriz de paso de ε a ε' y la matriz de paso de ε^* a ε'^*.

10.6.* Sea $f : V \to V'$ una aplicación lineal. Probar que si $a' \in V'^*$ entonces $a' \circ f \in V^*$. Se define aplicación traspuesta de f, f^t, del siguiente modo:

$$f^t : V'^* \ni a' \to a' \circ f \in V^*.$$

Probar que f^t es una aplicación lineal.

10.7.* Si $f : V \to V'$ es aplicación lineal y ε y ε' son bases de V y V' respectivamente, probar que:

$$M_{\varepsilon'^*, \varepsilon^*}(f^t)=M_{\varepsilon, \varepsilon'}(f)^t$$

10.8.* Probar que la aplicación

$$t : FL(V,\ V') \ni f \to f^t \in FL(V'^*,\ V^*)$$

es un isomorfismo. En el caso particular $V=V'$, probar que es isomorfismo de álgebras.

10.9.* Demostrar que si f es una aplicación lineal entre espacios vectoriales, la aplicación f^t viene caracterizada por la condición: $(f^t(a)/b)=(a/f(b))$ para a y b arbitrarios. Concluir que $(f^t)^t=f$.

10.10. Estudiar si las siguientes aplicaciones son formas bilineales:

i) $\Phi_1 : \mathbb{R}[X]^2 \ni (a_0+\ldots+a_nX^n;\ a'_0+\ldots+a'_mX^m) \to a_0a_2 \in \mathbb{R}.$

ii) $\Phi_2 . \mathbb{R}[X]^2 \ni (a_0+\ldots+a_nX^n;\ a'_0+\ldots+a'_mX^m) \to a_0a'_2 \in \mathbb{R}.$

10.11. Sea la aplicación:

$$\Phi : V_n(\mathbb{C})^2 \ni \left(\begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} z'_1 \\ \vdots \\ z'_n \end{pmatrix} \right) \to \sum_{i=1}^{n} z_i \overline{z'_i}$$

donde $\bar{z}_i$ es el conjugado de z_i.

Probar que Φ no es una aplicación bilineal. Probar que la restricción de Φ a $V_n(\mathbb{R})^2$ sí lo es.

10.12.* Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ (*cuerpo conmutativo con característica distinta de dos*). Probar que una aplicación $q : V \to \mathbb{K}$ es una forma cuadrática si y sólo si:

1. Para todo $v \in V$, $q(v) = q(-v)$.
2. La aplicación $Q : V^2 \ni (v_1, v_2) \to 1/2(q(v_1+v_2) - -q(v_1) - q(v_2))$ es una forma bilineal.

10.13. Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ (cuerpo conmutativo de característica distinta de dos). Probar que una aplicación $q : V \to \mathbb{K}$ es una forma cuadrática si y sólo si:

$$\mu q(\lambda v_1 + v_2) + \lambda q(v_1 - \mu v_2) = (1 + \lambda\mu)(\lambda q(v_1) + \mu q(v_2))$$

para cada λ, $\mu \in \mathbb{K}$ y v_1, $v_2 \in V$.

10.14. Sea V un espacio vectorial de dimensión finita sobre $\mathbb{K}$ (cuerpo de característica distinta de dos) y $\varepsilon = (e_1, ..., e_n)$ una base de V cuyo sistema de coordenadas es $x : V \to V_n(\mathbb{K})$. Si Φ es una forma bilineal de V y $A \in EL(n, \mathbb{K})$ verifica para todo $(v_1, v_2) \in V^2$, $\Phi(v_1, v_2) = x(v_1)^t Ax(v_2)$, entonces $A = M_\varepsilon(\Phi)$. Si q es una forma cuadrática de V y $A \in EL(n, \mathbb{K})$ *verifica* para cada $v \in V$, $q(v) = x(v)^t Ax(v)$, ¿se tiene $M_\varepsilon(q) = A$?

10.15. Considérese el espacio vectorial $V_n(\mathbb{K})$ ($\mathbb{K}$ con característica distinta de dos) y q una forma cuadrática de $V_n(\mathbb{K})$. Probar que existe un único polinomio $\varphi \in \mathbb{K}[X_1, ..., X_n]$ que verifica:

$$\text{para todo } \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in V_n(\mathbb{K}) \text{ se tiene } q\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \varphi(x_1, ..., x_n).$$

10.16. Sea $\mathbb{R}_2[X]$ el espacio vectorial de polinomios de grado inferior o igual a dos y $\varepsilon=(1, t, t^2)$ una de sus bases. Considérese la forma cuadrática:

$$q : \mathbb{R}_2[X] \ni \varphi(X) \to \int_{-1}^{1} \varphi(t)^2 dt \in \mathbb{R}$$

Calcular $M_\varepsilon(q)$. ¿Cuál es su rango?

10.17. Sean f_1, f_2 dos formas lineales de V y $\varepsilon=(e_1, ..., e_n)$ una base de V. Probar que:

$$\Phi : V^2 \ni (v_1, v_2) \to f_1(v_1) \cdot f_2(v_2) \in \mathbb{K}$$

es una forma bilineal. Calcúlese $M_\varepsilon(\Phi)$ en función de las matrices de f_1 y f_2.

10.18.* Calcular la matriz de la forma bilineal:

$$\Phi : V_2(\mathbb{R})^2 \ni \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}\right) \to x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_2$$

respecto la base de $V_2(\mathbb{R}) : \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right)$. ¿Cuál es el rango de Φ? Calcular la matriz de la forma cuadrática q inducida por Φ.

10.19. Sea Φ una forma bilineal de V y q la forma cuadrática inducida por Φ. Probar que

$$M_\varepsilon(q) = 1/2\,(M_\varepsilon(\Phi) + M_\varepsilon(\Phi)^t)$$

10.20. Sea Φ una forma bilineal de V y f_1, f_2 dos endomorfismos de V. Probar que la aplicación:

$$\Phi' : V^2 \ni (v_1, v_2) \to \Phi(f_1(v_1), f_2(v_2)) \in \mathbb{K}$$

es una forma bilineal. Calcular la matriz de Φ' en función de la matriz de Φ y de las matrices de f_1 y f_2.

10.21.* Sea $\mathcal{Q}(V)$ el conjunto de todas las formas cuadráticas definidas en un espacio vectorial V, sea ε una base de V. Dotar a $\mathscr{Q}(V)$ de estructura de espacio vectorial de modo que la aplicación:

$$\mathscr{Q}(V) \ni q \to M_{\mathscr{L}}(q) \in EL(n)$$

sea un isomorfismo.

10.22.* Dada una forma bilineal $\Phi : V \to \mathbb{K}$ y $(v_1, v_2), (v'_1, v'_2) \in V^2$ Probar que si

$$v_1 - v'_1 \in \ker \Phi_i \text{ y } v_2 - v'_2 \in \ker \Phi_d$$

entonces $\Phi(v_1, v_2) = \Phi(v'_1, v'_2)$. Suponiendo que es simétrica defínase una forma bilineal no degenerada

$$\Phi' : (V/\ker \Phi_i)^2 = (V/\ker \Phi_d)^2 \to \mathbb{K}$$

a partir de Φ.

10.23. Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$. Se dice que una forma bilineal

$$\Phi : V^2 \to \mathbb{K}$$

es antisimétrica si para cada $(v_1, v_2) \in V^2$ se tiene $\Phi(v_1, v_2) = -\Phi(v_2, v_1)$. Probar que las matrices de una forma bilineal antisimétrica son antisimétricas. Si Φ es antisimétrica, ¿qué relación existe entre Φ_i y Φ_d?

LECCION 11

ORTOGONALIDAD Y CLASIFICACION DE FORMAS CUADRATICAS

El hecho de considerar una forma cuadrática q en un espacio vectorial V permite la definición de una nueva geometría: aquella cuyo grupo de transformaciones deja invariante la forma cuadrática. Esta invarianza enriquece la geometría vectorial con la propiedad clásica de perpendicularidad u ortogonalidad.

Diremos que dos vectores v_1 y v_2 de V son ortogonales respecto a q si $Q(v_1, v_2)=0$ siendo Q la forma bilineal polar de q. De forma natural se extiende la definición a subespacios y subconjuntos ortogonales. En la presente lección ofreceremos las propiedades fundamentales de la ortogonalidad así definida.

Como consecuencia del estudio de la ortogonalidad podremos abordar uno de los problemas clásicos de la teoría de formas cuadráticas, a saber: establecer criterios prácticos para saber si dos formas cuadráticas pueden admitir una misma expresión analítica. Dicho problema será resuelto completamente en el caso de que el espacio vectorial esté definido sobre los cuerpos $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$ y además tiene relevancia geométrica como se estudia en el parágrafo 4.

En toda la lección nos restringiremos a espacios vectoriales de dimensión finita sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ de característica distinta de dos.

1. ESPACIOS VECTORIALES METRICOS

Comenzamos estableciendo la terminología que usaremos:

Definición 1.1. Espacio vectorial métrico y producto escalar

Un espacio vectorial métrico es un par $\mathbb{E}=(V, q)$ *donde* V *es un espacio vectorial y* q *es una forma cuadrática en* V. *La forma* Q, *polar de* q, *se denomina producto escalar de* $\mathbb{E}$.

Notaciones 1.2.

Usualmente identificaremos $\mathbb{E}$ con V y escribiremos por abuso de notación $\mathbb{E}=(\mathbb{E}, q)$. El producto escalar de dos vectores $v, w \in \mathbb{E}$ se denotará por $(v|w)$, es decir: $Q(v, w)=(v|w)$.

Nota 1.3.

El producto escalar es una forma bilineal simétrica.

Definiciones 1.4. Rango y radical

Sea $\mathbb{E}=(\mathbb{E}, q)$ *un espacio vectorial métrico.*

1. *Diremos que* $\mathbb{E}$ *es no singular si* q *es no degenerada.*
2. *Llamaremos rango de* $\mathbb{E}$ *al rango de* q.
3. *Se llama radical de* $\mathbb{E}$ *al conjunto:*

$$rad\,\mathbb{E}=\{v \in \mathbb{E}\,|\,(v|w)=0 \text{ para todo } w \in \mathbb{E}\}.$$

Proposición 1.5.

Si $\mathbb{E}=(\mathbb{E}, q)$ *es un espacio vectorial métrico,* $rad\,\mathbb{E}=Ker\,Q_i$.

La demostración es consecuencia inmediata de la definición de radical.

Proposición 1.6.

Si $(\mathbb{E}, \mathrm{q})$ *es un espacio vectorial métrico y* F *es un subespacio de* $\mathbb{E}$, *llamando* $\mathrm{q}|_{\mathrm{F}}$ *a la restricción de la forma cuadrática* q *a* F, *tenemos que* $\mathrm{F}=(\mathrm{F}, \mathrm{q}|_{\mathrm{F}})$ *es un espacio vectorial métrico.*

Ejemplos 1.8. Modelos analíticos

Si n, r y s son enteros no negativos y $r+s \leqslant n$ se denota por $\mathbb{E}^n_{r,s}$ o bien $\mathbb{E}^n_{r,s}(\mathbb{K})$ *al espacio vectorial métrico formado por* $V_n(\mathbb{K})$ con la forma cuadrática:

$$q: V_n(\mathbb{K}) \ni \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \to x_1^2+\dots+x_r^2-x_{r+1}^2-\dots-x_{r+s}^2 \in \mathbb{K}$$

La matriz de q respecto a la base canónica $(I_1, \dots, I_n)$ de $V_n(\mathbb{K})$ es:

$$\left[\begin{array}{c:c:c} \begin{matrix}1 & & \\ & \ddots^{(r} & \\ & & 1\end{matrix} & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & \begin{matrix}-1 & & \\ & \ddots^{(s} & \\ & & -1\end{matrix} & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & \begin{matrix}0 & & \\ & \ddots & \\ & & 0\end{matrix} \end{array}\right]$$

Por lo tanto el rango de $\mathbb{E}^n_{r,s}$ es $r+s$ y rad $\mathbb{E}^n_{r,s}=\langle I_{r+s+1}, \dots, I_n\rangle$.

Si $n=r+s$ se denota $\mathbb{E}^n_{r,s}=\mathbb{E}_{r,s}$ y $\mathbb{E}_{n,0}=\mathbb{E}_n$.

Si $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ a $\mathbb{E}_n$ se le denomina *modelo analítico de espacio vectorial euclídeo* y a $\mathbb{E}_{0,n}$ espacio vectorial euclídeo negativo de dimensión n.

Todos los espacios vectoriales métricos $\mathbb{E}_{r,s}$ son no singulares.

Nótese que un espacio singular puede contener subespacios de modo que al restringir el producto escalar se obtengan espacios no singulares. Por ejemplo, en $\mathbb{E}^3_{1,1}$ el plano $x_3=0$ da lugar a un espacio vectorial métrico no singular. Recíprocamente, un espacio no singular puede contener subespacios que al restringir la forma cuadrática dan lugar a espacios vectoriales métricos singulares. Por ejemplo en $\mathbb{E}_{1,1}$ las rectas $\left\langle\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}\right\rangle$ y $\left\langle\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right\rangle$ son singulares.

A continuación estudiaremos el concepto de ortogonalidad en un espacio vectorial métrico.

Definición 1.9. Ortogonalidad

Sea $\mathbb{E}$ *un espacio vectorial métrico. Dos vectores* v *y* w *se dicen ortogonales si* $(v|w)=0$ *y se escribe* $v \perp w$. *Si* A *y* B *son subconjuntos de* $\mathbb{E}$, *se dice que* A *es ortogonal a* B *(o que son ortogonales)*, $A \perp B$, *si para cada par* $(a, b) \in A \times B$ *se verifica* $a \perp b$. *Si* A *es un subconjunto de* $\mathbb{E}$, *se llama subespacio ortogonal de* A *al conjunto* $A^{\perp}=\{v \in \mathbb{E} \mid (v|a)=0$ *para cada* $a \in A\}$.

Ejemplo 1.10.

Con la notación de 1.8, en $\mathbb{E}^n_{r,s}$ se tiene:

$$l_i \perp l_j \text{ para } i \neq j$$

$$\langle l_1, \ldots, l_i\rangle \perp \langle l_{i+1}, \ldots, l_{i+k}\rangle \text{ para } 0 \leqslant k+i \leqslant n$$

$$\langle l_i\rangle^{\perp}=\langle l_1, \ldots, l_{i-1}, l_{i+1}, \ldots, l_n\rangle \text{ si } i \leqslant r+s$$

$$\langle l_i\rangle^{\perp}=\mathbb{E}^n_{r,s} \text{ si } r+s<i \leqslant n.$$

Algunas de las propiedades más usuales de la ortogonalidad son:

Proposición 1.11.

Sea $\mathbb{E}$ *un espacio vectorial métrico.*

i) *Si* $A \subset \mathbb{E}$, $A^{\perp}$ *es subespacio vectorial de* $\mathbb{E}$

ii) *Si* $A \subset B \subset \mathbb{E}$ *entonces* $B^\perp \subset A^\perp$

iii) $A^\perp = \langle A \rangle^\perp$

iv) $\mathbb{E}^\perp = rad\, \mathbb{E}$

v) *Si* F *es subespacio de* E *entonces* $rad\, F = F \cap F^\perp$.

Demostración

i) Sean $v, w \in A^\perp$ y $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$. Entonces, para cada $a \in A$,

$$(\lambda v + \mu w \mid a) = \lambda (v \mid a) + \mu (w \mid a) = 0, \text{ luego } \lambda v + \mu w \in A^\perp$$

ii) Si $v \in B^\perp$, para cada $a \in A$, como $A \subset B$, $(v \mid a) = 0$, luego $v \in A^\perp$.

iii) Como $A \subset \langle A \rangle$ se tiene $\langle A \rangle^\perp \subset A^\perp$ Por otra parte, si $v \in A^\perp$, para cada

$$\lambda_1 a_1 + \ldots + \lambda_r a_r \in \langle A \rangle \text{ donde } (\lambda_1, \ldots, \lambda_r) \in \mathbb{K}^r \text{ y } (a_1, \ldots, a_r) \in A^r$$

se verifica

$$(v \mid \lambda_1 a_1 + \ldots + \lambda_r a_r) = \lambda_1 (v \mid a_1) + \ldots + \lambda_r (v \mid a_r) = 0.$$

Luego $A^\perp \subset \langle A \rangle^\perp$

iv) $\mathbb{E}^\perp = \{v \in \mathbb{E} \mid (v \mid w) = 0 \text{ para todo } w \in \mathbb{E}\} = \text{rad } \mathbb{E}$.

v) $\text{rad } F = \{v \in F \mid (v \mid w) = 0 \text{ para todo } w \in F\} =$
$= F \cap \{v \in \mathbb{E} \mid (v \mid w) = 0 \text{ para todo } w \in F\} = F \cap F^\perp$. □

En las propiedades i) a iii) que acabamos de establecer se aprecia cierta similitud con las propiedades de la ortogonalidad dual que estudiamos en la lección anterior. El siguiente resultado precisará la relación entre ambas ortogonalidades.

Proposición 1.12.

Sea $(\mathbb{E}, q)$ *un espacio vectorial métrico. Entonces, si* $A \subset \mathbb{E}$, $A^\perp = Q_l^{-1}(A^\omega)$.

Demostración

$A^{\perp}=\{v \in \mathbb{E} | (v|a)=(a|v)=0$ para cada $a \in A\}=\{v \in \mathbb{E} | Q_l(v)(a)=$ $=0$ para cada $a \in A\}=\{v \in \mathbb{E} | Q_l(v) \in A^{\omega}\}=Q_l^{-1}(A^{\omega})$. □

Gracias al resultado anterior y recordando las propiedades de la ortogonalidad dual estableceremos algunas propiedades de la ortogonalidad de subespacios en el caso de espacios vectoriales métricos no degenerados:

Corolario 1.13.

Supongamos que $(\mathbb{E}, q)$ *es un espacio vectorial métrico (de dimensión finita) no singular y* U *un subespacio vectorial de* $\mathbb{E}$. *Entonces:*

i) $\dim \mathrm{U} + \dim \mathrm{U}^{\perp} = \dim \mathbb{E}$.

ii) $\mathrm{U}^{\perp\perp}=\mathrm{U}$.

iii) $(\mathrm{U}, q|_{\mathrm{U}})$ *es no singular equivale a* $\mathbb{E}=\mathrm{U} \oplus \mathrm{U}^{\perp}$

iv) $(\mathrm{U}, q|_{\mathrm{U}})$ *es no singular equivale a* $(\mathrm{U}^{\perp}, q|_{\mathrm{U}^{\perp}})$ *es no singular.*

Demostración

i) Si $(\mathbb{E}, q)$ es no singular, la aplicación $Q_l : \mathbb{E} \to \mathbb{E}^*$ es un isomorfismo (ver 1.5). Entonces:

$$\dim U^{\omega} = \dim Q_l^{-1}(U^{\omega}) = \dim U^{\perp}$$

Por 1.12 de la lección 10, $\dim U^{\omega} = \dim \mathbb{E} - \dim U$ con lo que $\dim U + \dim U^{\perp} = \dim \mathbb{E}$.

ii) Si $u \in U$, para cada $u' \in U^{\perp}$ se tiene que $(u|u')=0$ luego $u \in U^{\perp\perp}$, con lo cual $U \subset U^{\perp\perp}$. Por i) $\dim U = \dim \mathbb{E} - \dim U^{\perp} =$ $= \dim U^{\perp\perp}$ con lo que se tiene la igualdad.

iii) Por 1.11 v) $(U, q|_U)$ no singular equivale a $U \cap U^{\perp} =$ $= \mathrm{rad}\, U = \{0\}$ y por i) $\dim \mathbb{E} = \dim U + \dim U^{\perp}$ luego la condición anterior es equivalente a $\mathbb{E} = U \oplus U^{\perp}$.

iv) Es consecuencia directa de iii) y ii). □

Por último estudiaremos la relación existente entre la ortogonalidad y las operaciones con subespacios:

Proposición 1.14.

Sea $\mathbb{E}$ *un espacio vectorial métrico y* $\{U_1, ..., U_r\}$ *una familia de subespacios de* $\mathbb{E}$. *Entonces:*

i) $\left(\sum_{i=1}^{r} U_i\right)^{\perp} = \bigcap_{i=1}^{r} U_i^{\perp}$.

ii) Si $\mathbb{E}$ *es no singular entonces*

$$\left(\bigcap_{i=1}^{r} U_i\right)^{\perp} = \sum_{i=1}^{r} U_i^{\perp}$$

Demostración

i) Como $U_j \subset \sum_{i=1}^{r} U_i$ para cada $j \in \{1, ..., r\}$, entonces por 1.11

ii) es $\left(\sum_{i=1}^{r} U_i\right)^{\perp} \subset U_j^{\perp}$, $j \in \{1, ..., r\}$, luego $\sum_{i=1}^{r} U_i \subset \bigcap_{i=1}^{r} U_i^{\perp}$

Si $v \in \bigcap_{i=1}^{r} U_i^{\perp}$, dado $u \in \sum_{i=1} U_i$, $u = u_1 + ... + u_r$ con $u_i \in U_i$ $i \in \{1, ..., r\}$, entonces se tiene

$$(v|u_1 + ... + u_r) = (v|u_1) + ... + (v|u_r) = 0.$$

Por tanto $v \in \left(\sum_{i=1}^{r} U_i\right)^{\perp}$

ii) Por i) y 1.13 ii) se tiene:

$$\left(\sum_{i=1}^{r} U_i^{\perp}\right)^{\perp} = \bigcap_{i=1}^{r} U_i$$

y aplicando la ortogonalidad a ambos miembros:

$$\sum_{i=1}^{r} U_i^{\perp} = \left(\bigcap_{i=1}^{r} U_i\right)^{\perp}. \quad \square$$

2. BASES ORTOGONALES

En el capítulo III, para estudiar un endomorfismo de un espacio vectorial se utilizaron descomposiciones en suma directa de subespacios invariantes donde la descripción del endomorfismo era más sencilla. En el caso de tener definida una forma cuadrática sobre un espacio vectorial existe una técnica similar: se trata de considerar descomposiciones en suma directa de subespacios ortogonales entre sí.

Definición 2.1. Descomposición ortogonal

Sea $\mathbb{E}$ *un espacio vectorial métrico y* $(F_1, \ldots, F_r)$ *una familia de subespacios de* $\mathbb{E}$. *Decimos que* $\mathbb{E}$ *se descompone en suma directa ortogonal de* $F_1, \ldots, F_r$ *y se escribe* $\mathbb{E}=F_1 \overset{\perp}{\oplus} \cdots \overset{\perp}{\oplus} F_r$ *si:*

1. $\mathbb{E}=F_1 \oplus \cdots \oplus F_r$.
2. *Si* $i, j \in \{1, \ldots, r\}$ *y* $i \neq j$ *entonces* $F_i \perp F_j$.

Ejemplo 2.2.

Consideremos el espacio vectorial métrico $\mathbb{E}^n_{r,s}$. Entonces si

$$F_1=\langle I_1, \ldots, I_r\rangle,\ F_2=\langle I_{r+1}, \ldots, I_{r+s}\rangle$$

y $F_3=\langle I_{r+s+1}, \ldots, I_n\rangle$, claramente $\mathbb{E}^n_{r,s}=F_1 \overset{\perp}{\oplus} F_2 \overset{\perp}{\oplus} F_3$.

El siguiente resultado nos indica el comportamiento del producto escalar en una descomposición en suma directa ortogonal:

Proposición 2.3.

Sea $\mathbb{E}$ *un espacio vectorial métrico tal que* $\mathbb{E}=F_1 \overset{\perp}{\oplus} \cdots \overset{\perp}{\oplus} F_r$. *Si* $v, w \in \mathbb{E}$ *y* $v=v_1+\cdots+v_r$, $w=w_1+\cdots+w_r$ *con* $v_i, w_i \in F_i$ $i=1, \ldots, r$ *entonces*

$$(v|w)=(v_1|w_1)+\cdots+(v_r|w_r).$$

Demostración

Se trata de una comprobación inmediata. □

El caso más simple de descomposición en suma directa ortogonal es cuando los subespacios de la descomposición tienen dimensión uno. Las descomposiciones de estas características dan lugar al concepto de base ortogonal:

Definición 2.4. Base ortogonal

Sea $\mathbb{E}$ *un espacio vectorial métrico. Diremos que una base* $\varepsilon = (e_1, \ldots, e_n)$ *de* $\mathbb{E}$ *es ortogonal si para cada par* $(i, j) \in \{1, \ldots, n\}^2$ *con* $i \neq j$ *se verifica* $(e_i | e_j) = 0$.

Observación 2.5.

Claramente una base ortogonal $\varepsilon = (e_1, \ldots, e_n)$ de $\mathbb{E}$ induce una descomposición en suma directa ortogonal de $\mathbb{E}$ con subespacios de dimensión uno:

$$\mathbb{E} = \langle e_1 \rangle \overset{\perp}{\oplus} \cdots \overset{\perp}{\oplus} \langle e_n \rangle$$

pero también se pueden construir a partir de ε otras descomposiciones, por ejemplo si n es par:

$$\mathbb{E} = \langle e_1, e_2 \rangle \overset{\perp}{\oplus} \langle e_3, e_4 \rangle \overset{\perp}{\oplus} \cdots \overset{-}{\ominus} \langle e_{n-1}, e_n \rangle.$$

La importancia de las bases ortogonales viene dada porque siempre existen en espacios vectoriales métricos:

Proposición 2.6.

Sea $\mathbb{E}$ *un espacio vectorial métrico de dimensión finita. Existe una base ortogonal de* $\mathbb{E}$.

Demostración

Razonaremos por inducción sobre $\dim \mathbb{E}$. Si $\dim \mathbb{E} = 1$, cualquier base de $\mathbb{E}$ es ortogonal.

Supongamos cierto el resultado para espacios con dimensión menor que n siendo $n=\dim \mathbb{E}$. Para probar la existencia de una base ortogonal de $\mathbb{E}$ distinguiremos dos casos:

a) $\mathbb{E}$ es singular. Se tiene que $\mathrm{rad}\,\mathbb{E}\neq\{0\}$, entonces tomamos F complementario de $\mathrm{rad}\,\mathbb{E}$, es decir: $\mathbb{E}=\mathrm{rad}\,\mathbb{E}\oplus F$. Como $\dim F<n$, por la hipótesis de inducción existe una base ortogonal de F: $(u_1, \ldots, u_r)$. Si $(u_{r+1}, \ldots, u_n)$ es una base de $\mathrm{rad}\,\mathbb{E}$ se verifica que $(u_1, \ldots, u_r, u_{r+1}, \ldots, u_n)$ es una base ortogonal de $\mathbb{E}$.

b) $\mathbb{E}$ es no singular. Obsérvese que si existe $u\in\mathbb{E}$ tal que $(u|u)\neq 0$ se conlcuye fácilmente la demostración. En efecto, como $\mathbb{E}$ es no singular, se tiene que $\dim\langle u\rangle^{\perp}=n-1<n$ y por hipótesis de inducción existe $(u_2, \ldots, u_n)$ base ortogonal de $\langle u\rangle^{\perp}$. Por ser $(u|u)\neq 0$, $u\notin\langle u\rangle^{\perp}$ luego $(u, u_2, \ldots, u_n)$ es base ortogonal de $\mathbb{E}$.

Probaremos ahora que si $\mathbb{E}$ es no singular, existe $u\in\mathbb{E}$ tal que $(u|u)\neq 0$. Como $\mathbb{E}$ es no singular, $Q_l:\mathbb{E}\to\mathbb{E}^*$ es un isomorfismo y si $v\in\mathbb{E}$, $v\neq 0$, $im\, Q_l(v)=\mathbb{K}$, luego existe $w\in\mathbb{E}$ tal que $Q_l(v)(w)=(v|w)=$ $=1$. Si $(v|v)\neq 0$ o bien $(w|w)\neq 0$ bastaría tomar $u=v$ o $u=w$. Si $(v|v)=(w|w)=0$, tomamos $u=v+w$, entonces

$$(u|u)=(v+w|v+w)=(v|w)+(w|v)=1+1\neq 0$$

(pues la característica de $\mathbb{K}$ es distinta de dos, como suponemos en toda la lección). □

La prueba de la proposición 2.6 describe ademas un proceso explícito para la construcción de una base ortogonal:

Ejemplo 2.7.

Sea $(V_3(\mathbb{Q}), q)$ un espacio vectorial métrico, donde $q: V_3(\mathbb{Q})\to\mathbb{Q}$ tiene como matriz respecto a $\varepsilon=(l_1, l_2, l_3)$:

$$M_\varepsilon(q)=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Como $\mathrm{rad}\, V_3(\mathbb{Q})=\langle l_3\rangle$, tomamos $u_1=l_3$ y consideramos $q|_{\langle l_1, l_2\rangle}$. Se tiene que $q(l_1)=q(l_2)=0$, por lo tanto $q(l_1+l_2)=2\neq 0$

y tomamos $u_2=l_1+l_2$. Consideramos ahora la restricción de q al subespacio

$$\langle l_1+l_2\rangle^\perp \cap \langle l_1, l_2\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle = \langle l_1-l_2\rangle.$$

Tomamos, pues, $u_3=l_1-l_2$, ya que además es $q(l_1-l_2)=2\neq 0$.

Se verifica que

$$M_{\varepsilon'}(q)=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ siendo } \varepsilon'=(u_1,\ u_2,\ u_3).$$

Observación 2.8.

Claramente la matriz de q respecto a una base ortogonal es diagonal. El teorema 2.6 nos asegura por tanto que la matriz de una forma cuadrática puede reducirse a diagonal mediante un cambio de base. Tradicionalmente el hecho anterior se expresa diciendo que toda forma cuadrática puede reducirse a la forma de suma de cuadrados. En efecto, sea ε una base ortogonal del espacio vectorial métrico $(\mathbb{E}, q)$. Si $v \in \mathbb{E}$ y las coordenadas de v respecto a ε son

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \text{ se tiene que } q(v)=\lambda_1 x_1^2+\ldots+\lambda_n x_n^2$$

donde $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\} \subset \mathbb{K}$.

En el caso particular de ser $\mathbb{E}$ un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ o sobre $\mathbb{C}$ se puede conseguir además que el valor de los números $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ sea 1, -1 ó 0. Es decir, existe una base ε de $\mathbb{E}$ de modo que en coordenadas respecto a ε se tiene:

$$q(v)=x_1^2+\ldots+x_k^2-x_{k+1}^2-\ldots-x_{k+l}^2.$$

Si el cuerpo es $\mathbb{C}$ aun se pueden reducir los valores de los coeficientes a 1 ó 0.

Si $x: \mathbb{E} \to V_n(\mathbb{K})$ es el sistema de coordenadas respecto a ε y $\mathbb{E}^n_{k,l} = (V_n(\mathbb{K}), q')$, entonces:

$$Q(v_1, v_2) = Q'(x(v_1), x(v_2)) \text{ para cada } v_1, v_2 \in \mathbb{E}.$$

Esta propiedad permite el estudio de los espacios vectoriales métricos sobre $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$ mediante los modelos analíticos $\mathbb{E}^n_{k,l}$ (ver 1.8), de aquí el interés del siguiente corolario:

Corolario 2.9.

Sea $\mathbb{E}$ *un espacio vectorial métrico de dimensión finita sobre el cuerpo* $\mathbb{K}$.

i) Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ *existe una base ortogonal*

$$\varepsilon = (e_1, \ldots, e_r, e_{r+1}, \ldots, e_n)$$

tal que

$$(e_i|e_i) = 1, \ i = 1, \ldots, r \text{ y } (e_i|e_i) = 0, \ i = r+1, \ldots, n$$

siendo r *el rango de* $\mathbb{E}$.

ii) Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ *existe una base ortogonal*

$$\varepsilon = (e_1^+, \ldots, e_k^+, e_1^-, \ldots, e_l^-, e_1^0, \ldots, e_m^0)$$

tal que

$$(e_i^+|e_i^+) = 1, \ i = 1, \ldots, k, \ (e_i^-|e_i^-) = -1, \ i = 1, \ldots, l$$

y $(e_i^0|e_i^0) = 0$, $i = 1, \ldots, m$ *siendo* $k + l$ *el rango de* $\mathbb{E}$.

Demostración

i) Sea $\varepsilon = (e_1, \ldots, e_n)$ una base ortogonal de $\mathbb{E}$ dada por 2.6. Si $r = rg\mathbb{E}$, como $M_\varepsilon(q)$ es diagonal, debe tener exactamente r elementos no nulos. Reordenando si es necesario los elementos de $\mathbb{E}$ podemos suponer que $(e_i|e_i) \neq 0$ para $i = 1, \ldots, r$. Tomando $\lambda_i \in \mathbb{C}$ tal que $\lambda_i^2 = 1/(e_i|e_i)$, $i = 1, \ldots, r$ y llamando $e'_i = \lambda_i e_i$, $i = 1, \ldots, r$, $e'_i = e_i$,

$i=r+1, \ldots, n$ se obtiene una base $(e'_1, \ldots, e'_n)$ con las propiedades deseadas.

ii) Si $\mathbb{K}=\mathbb{R}$, análogamente tomamos una base ortogonal de $\mathbb{E}$,

$$(u_1^+, \ldots, u_k^+, u_1^-, \ldots, u_l^-, u_1^0, \ldots, u_m^0),$$

ordenada de modo que

$$(u_i^+ | u_i^+)>0, \; i=1, \ldots, k, \; (u_i^- | u_i^-)<0, \; i=1, \ldots, l$$

y $(u_i^0 | u_i^0)=0$, $i=1, \ldots, m$. Entonces la base pedida sera

$$(e_1^+, \ldots, e_k^+, e_1^-, \ldots, e_l^-, e_1^0, \ldots, e_m^0),$$

donde

$$\begin{aligned} e_i^+ &= u_i^+ / \sqrt{(u_i^+ | u_i^+)}, \; i=1, \ldots, k \\ e_i^- &= u_i^- / \sqrt{-(u_i^- | u_i^-)}, \; i=1, \ldots, l \\ e_i^0 &= u_i^0, \; i=1, \ldots, m. \end{aligned} \qquad \square$$

Observación 2.10.

En el caso $\mathbb{K}=\mathbb{C}$, $\langle e_{r+1}, \ldots, e_n\rangle = \text{rad}\,\mathbb{E}$ y si $\mathbb{K}=\mathbb{R}$, $\langle e_1^0, \ldots, e_m^0\rangle = \text{rad}\,\mathbb{E}$.

Si $\mathbb{E}$ es un espacio vectorial métrico de dimensión n sobre $\mathbb{C}$, el corolario 2.9 asegura la existencia de una base ε de $\mathbb{E}$ de modo que q admite una expresión como «suma de cuadrados» en coordenadas respecto a ε, $x_1^2+\ldots+x_r^2$. Esta forma de expresión no depende de ε ya que r es el rango de q.

En el caso en que $(\mathbb{E}, q)$ es un espacio vectorial métrico real, q se puede expresar en coordenadas respecto a una base ε dada por 2.9 ii) del siguiente modo:

$$x_1^2+\ldots+x_k^2-x_{k+1}^2-\ldots-x_{k+l}^2.$$

Entonces cabe plantearse la siguiente pregunta: esta forma de expresión, es decir: el número de términos positivos y negativos, ¿depende de la base ε? Probaremos que no; este hecho será de importancia esencial en el siguiente parágrafo para clasificar las formas cuadráticas en espacios vectoriales reales.

Proposición 2.11. Teorema de Sylvester o ley de inercia

Sea $\mathbb{E}$ *un espacio vectorial métrico sobre* $\mathbb{R}$ *de rango* r *y* $\varepsilon = (e_1, \ldots, e_n)$, $\varepsilon' = (e'_1, \ldots, e'_n)$ *dos bases ortogonales de* $\mathbb{E}$ *ordenadas de modo que:*

$$(e_i|e_i) > 0, \ i = 1, \ldots, k; \ (e'_i|e'_i) > 0, \ i = 1, \ldots, k'$$
$$(e_i|e_i) < 0, \ i = k+1, \ldots, n-r; \ (e'_i|e'_i) < 0, \ i = k'+1, \ldots, n-r.$$

Entonces $k = k'$.

Demostración

Supongamos que $k' > k$. Por ser ε y ε ortogonales es:

$$\mathbb{E} = \langle e_1, \ldots, e_k\rangle \overset{\perp}{\oplus} \langle e_{k+1}, \ldots, e_{n-r}\rangle \overset{\perp}{\oplus} \operatorname{rad} \mathbb{E} =$$
$$= \langle e'_1, \ldots, e'_{k'}\rangle \overset{\perp}{\oplus} \langle e'_{k'+1}, \ldots, e'_{n-r}\rangle \overset{\perp}{\oplus} \operatorname{rad} \mathbb{E}.$$

Como $k' > k$, $\dim \langle e'_1, \ldots, e'_{k'}\rangle + \dim (\langle e_{k+1}, \ldots, e_{n-r}\rangle \overset{\perp}{\oplus} \operatorname{rad} \mathbb{E}) > \dim \mathbb{E}$, por tanto existe $v \in \mathbb{E}$, $v \neq 0$ tal que

$$v \in \langle e'_1, \ldots, e'_{k'}\rangle \cap (\langle e_{k+1}, \ldots, e_{n-r}\rangle \overset{\perp}{\oplus} \operatorname{rad} \mathbb{E})$$

Por una parte $v = \lambda'_1 e'_1 + \ldots + \lambda'_{k'} e'_{k'}$ luego

$$(v|v) = \lambda'^2_1 + \ldots + \lambda'^2_{k'} > 0,$$

pues algún λ'_i es no nulo. Por otra parte

$$v = \lambda_{k+1} e_{k+1} + \ldots + \lambda_n e_n,$$

luego

$$(v|v) = -\lambda^2_{k+1} - \ldots - \lambda^2_{n-r} \leqslant 0,$$

con lo que tenemos una contradicción. □

El teorema anterior hace posible la siguiente definición:

Definición 2.12. Signatura

Sea ($\mathbb{E}$, q) *un espacio vectorial métrico sobre* $\mathbb{R}$ *y sea* $\varepsilon=(e_1, \ldots, e_k, e_{k+1}, \ldots, e_{k+l}, e_{k+l+1}, \ldots, e_n)$ *una base ortogonal de* $\mathbb{E}$ *tal que:*

$$(e_i|e_i)>0 \text{ si } 1\leqslant i\leqslant k$$
$$(e_i|e_i)<0 \text{ si } k+1\leqslant i\leqslant k+l$$
$$(e_i|e_i)=0 \text{ si } k+l+1\leqslant i\leqslant n.$$

El par (k, l) *se denomina signatura o índices de inercia del espacio métrico, o simplemente de la forma cuadrática* q.

El número k *se denomina índice de positividad y el número* l *índice de negatividad.*

Ejemplo 2.13.

La signatura de $\mathbb{E}^n_{k,l}(\mathbb{R})$ es (k, l).

Un caso particular importante es cuando la signatura es (dim $\mathbb{E}$, 0), en este caso $\mathbb{E}$ admite una base ortogonal $\varepsilon=(e_1, \ldots, e_n)$ tal que $(e_i|e_i)=1$, $1\leqslant i\leqslant n$. Las bases de este tipo tienen un interés especial como se verá en el capítulo VI.

Definición 2.14. Base ortonormal

Una base ortogonal $\varepsilon=(e_1, \ldots, e_n)$ *de un espacio vectorial métrico* $\mathbb{E}$ *se dice que es una base ortonormal si* $(e_i|e_i)=1$ *para* $1\leqslant i\leqslant n$.

Ejemplo 2.15.

En $\mathbb{E}^n_{n,0}=\mathbb{E}_n$, $(I_1, \ldots, I_n)$ es una base ortonormal.

Proposición 2.16.

Sea $\mathbb{E}$ un espacio vectorial métrico de dimensión finita sobre $\mathbb{K}$.

1. *Si $\mathbb{K}=\mathbb{C}$, $\mathbb{E}$ admite una base ortonormal si y sólo si el rango y la dimensión coinciden.*

2. *Si $\mathbb{K}=\mathbb{R}$, $\mathbb{E}$ admite una base ortonormal si y sólo si la signatura de $\mathbb{E}$ es* (dim $\mathbb{E}$, 0).

Demostración

Es consecuencia inmediata de 2.9 y 2.11. □

Si $(\mathbb{E}, q)$ es un espacio vectorial métrico sobre $\mathbb{R}$ que admite una base ortonormal, en coordenadas respecto a dicha base la forma cuadrática q se escribe: $x_1^2+...+x_n^2$. Obsérvese que en este caso si $v \in \mathbb{E}$, $v \neq 0$, entonces $(v|v)>0$, es decir: q toma siempre valores positivos. Las formas cuadráticas con propiedades similares a la anterior tienen una terminología clásica:

Definición 2.17. Formas cuadráticas definidas

Sea $(\mathbb{E}, \mathrm{q})$ *un espacio vectorial métrico sobre $\mathbb{R}$. Se dice que* q *es definida positiva (negativa) si para cada* $\mathrm{v} \in \mathbb{E}$, $\mathrm{v} \neq 0$, *es* $\mathrm{q(v)}>0$ (resp. $\mathrm{q(v)}<0$). *Se dice que* q *es semidefinida positiva (negativa) si para cada $v \in \mathbb{E}$ es* $\mathrm{q(v)} \geqslant 0$ (resp. $\mathrm{q(v)} \leqslant 0$).

Ejemplo 2.18.

Si $\mathbb{E}^n_{k,l}(\mathbb{R})=(V_n(\mathbb{R}), q)$ se tiene:

si $(k, l)=(n, 0)$, q es definida positiva
si $(k, l)=(0, n)$, q es definida negativa
si $(k, l)=(k, 0)$, q es semidefinida positiva
si $(k, l)=(0, l)$, q es semidefinida negativa.

Proposición 2.19.

Sea $(\mathbb{E}, q)$ *un espacio vectorial métrico de dimensión* n *sobre* $\mathbb{R}$ *con signatura* (k, l).

1. q *es definida positiva (negativa) si y sólo si* $k=n$ (resp. $l=n$).
2. q *es semidefinida positiva (negativa) si y sólo si* $l=0$ (resp. $k=0$).

Demostración

Basta expresar q en coordenadas respecto a una base dada por 2.9. □

3. CLASIFICACION LINEAL DE FORMAS CUADRATICAS

El problema de la clasificación de formas cuadráticas surge de la necesidad de establecer exactamente la relación entre polinomios homogéneos de segundo grado y formas cuadráticas. Existen formas cuadráticas distintas que admiten expresiones polinómicas idénticas, claramente las expresiones polinómicas tienen como variables las coordenadas respecto a bases diferentes. Este hecho da lugar al establecimiento de una relación de equivalencia entre formas cuadráticas y al problema de clasificación.

Existe otra motivación de carácter geométrico para el estudio de esta clasificación, de ella nos ocuparemos principalmente en el próximo epígrafe.

Dado un espacio vectorial V, comenzaremos por definir una actuación de $GL(V)$ sobre el conjunto de formas cuadráticas de V, de modo que la relación de equivalencia a que da lugar verifique que si dos formas son equivalentes admitan expresiones analíticas iguales y viceversa.

Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ y $\mathscr{Q}(V)$ el conjunto de todas las formas cuadráticas sobre V.

Proposición 3.1.

i) *Si* $f \in GL(V)$ *y* $q \in \mathcal{Q}(V)$ *entonces* $q \cdot f \in \mathcal{Q}(V)$.
ii) *La aplicación*

$$\mathcal{Q}(V) \times GL(V) \ni (q, f) \to f^{\#}q = q \cdot f \in \mathcal{Q}(V)$$

es una actuación.

Demostración

El apartado i) es una simple comprobación, en cuanto a ii), si $f,g \in GL(V)$ y $q \in \mathcal{Q}(V)$

$$(f \cdot g)^{\#} q = q \cdot (f \cdot g) = (q \cdot f) \cdot g = (f^{\#} q) \cdot g = g^{\#} (f^{\#} q)$$

Por último, para cada $q \in \mathcal{Q}(V)$

$$(id_V)^{\#}q = q \cdot id_V = q. \ \square$$

Definición 3.2. Equivalencia de formas cuadráticas

Dos formas cuadráticas $q, q' \in \mathcal{Q}(V)$ *son linealmente equivalentes si existe* $f \in GL(V)$ *tal que* $f^{\#} q' = q$.

Obsérvese que la relación de equivalencia anterior es precisamente la inducida por la actuación de $GL(V)$ sobre $\mathcal{Q}(V)$ de 3.1. A continuación veremos cómo la definición 3.2 también responde de modo satisfactorio al problema de la relación entre formas cuadráticas y sus expresiones analíticas.

Proposición 3.3.

Dos formas cuadráticas $q, q' \in \mathcal{Q}(V)$ *son linealmente equivalentes si y sólo si existen* ε *y* ε' *bases de* V *tales que* $M_{\varepsilon}(q) = M_{\varepsilon'}(q')$.

Demostración

Supongamos que q y q' son linealmente equivalentes. Entonces existe $f \in GL(V)$ tal que $f^{\#} q' = q$. Sea $\varepsilon = (e_1, ..., e_n)$ una base de V y $\varepsilon' = (f(e_1), ..., f(e_n))$. Entonces

$$M_{\varepsilon'}(q') = (Q'(f(e_i), f(e_j))) = M_\varepsilon(f^\# q') = M_\varepsilon(q).$$

Recíprocamente, supongamos que $\varepsilon = (e_1, ..., e_n)$ y $\varepsilon' = (e'_1, ..., e'_n)$ son dos bases de V tales que $M_\varepsilon(q) = M_{\varepsilon'}(q')$. Sea $f \in GL(V)$ que verifica $f(e_i) = e'_i$, $i = 1, ..., n$. Obsérvese que $M_{\varepsilon'\varepsilon}(f)$ es la matriz del cambio de base, $\varepsilon' = \varepsilon\, M_{\varepsilon'\varepsilon}(f)$, consultar 3.3 y 3.5 de la lección 3, capítulo II. Para cada $v \in V$, sea $x : V \to V_n(\mathbb{K})$ (resp. $x' : V \to V_n(\mathbb{K})$) el sistema de coordenadas respecto a $\varepsilon(\varepsilon')$. Entonces, para cada $v \in V$:

$$\begin{aligned} q(v) &= x(v)^t M_\varepsilon(q)\ x(v) = x(v)^t M_{\varepsilon'}(q')\ x(v) = \\ &= x(v)^t\ M_{\varepsilon',\varepsilon}(f)^t\ M_\varepsilon(q')\ M_{\varepsilon',\varepsilon}(f)\ x(v) = \\ &= x(f(v))^t M_\varepsilon(q')\, x(f(v)) = q'(f(v)) = f^\# q'(v). \ \square \end{aligned}$$

A la vista de la proposición anterior, un primer paso en la resolución del problema de clasificación de formas cuadráticas consiste en encontrar expresiones matriciales lo más sencillas posibles para cada clase de equivalencia. Recuérdese como este método dio buenos resultados para la clasificación de endomorfismos en el capítulo III. En el presente caso, gracias a los resultados sobre bases ortogonales del parágrafo anterior, toda forma cuadrática admite una expresión matricial diagonal:

Proposición 3.4. Diagonalización

Sea $q \in \mathcal{Q}(V)$. *Existe* ε *base de* V *tal que* $M_\varepsilon(q)$ *es diagonal.*

Demostración

Es una consecuencia inmediata del teorema 2.6. $\square$

El problema de dar un sistema completo de invariantes para la clasificación de formas cuadráticas con la relación 3.2 en el caso de un cuerpo cualquiera $\mathbb{K}$ es muy difícil y en algunos casos no está resuelto completamente en la actualidad. Aquí trataremos únicamente el caso en que $\mathbb{K}$ es $\mathbb{C}$ o $\mathbb{R}$. Veamos primero el caso $\mathbb{K}=\mathbb{C}$.

Proposición 3.5.

Sea V *un espacio vectorial sobre* $\mathbb{C}$ *y* $q_1, q_2 \in \mathcal{Q}(V)$. *Las formas cuadráticas* q_1 *y* q_2 *son linealmente equivalentes si y sólo si el rango de* q_1 *es igual al rango de* q_2.

Demostración

Supongamos que q_1 y q_2 son linealmente equivalentes. Por la proposición 3.4 existen ε_1 y ε_2 bases de V tales que $M_{\varepsilon_1}(q_1)= = M_{\varepsilon_2}(q_2)$ y por la definición de rango de una forma cuadrática (ver 2.16 de la lección 10) se tiene:

$$\text{rango de } q_1 = rgM_{\varepsilon_1}(q_1) = rgM_{\varepsilon_2}(q_2) = \text{rango de } q_2$$

Recíprocamente, supongamos que rango de q_1=rango de $q_2=r$. Aplicando el teorema 2.9 parte i), existen bases ε_1 y ε_2 de V tales que:

$$M_{\varepsilon_1}(q_1)=\begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots{}^{(r} & & & \\ & & 1 & & \\ & & & 0 & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & 0 \end{bmatrix}=M_{\varepsilon_2}(q_2). \quad \square$$

El teorema 3.5 nos dice, por tanto, que el rango es un invariante completo para la clasificación de formas cuadráticas en espacios vectoriales sobre $\mathbb{C}$. Obsérvese que es un invariante fácilmente calculable a partir de cualquier representación matricial de una forma cuadrática.

Ejemplo 3.6.

Tomemos en $\mathbb{C}^2$ las formas cuadráticas q_1 y q_2.

$$q_1 : \mathbb{C}^2 \ni (x_1, x_2) \to x_1^2 + x_2^2$$
$$q_2 : \mathbb{C}^2 \ni (x_1, x_2) \to x_1^2 - x_2^2$$

Como el rango de ambas es dos se concluye que son linealmente equivalentes.

Por último estudiaremos el caso $\mathbb{K} = \mathbb{R}$:

Ejemplo 3.7. Discriminante

Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ y $q \in \mathcal{Q}(V)$. Si ε_1 y ε_2 son dos bases de V entonces el signo de det $M_{\varepsilon_1}(q)$ coincide con el de det $M_{\varepsilon_2}(q)$. En efecto, si P es la matriz de cambio de base, se tiene:

$$\det M_{\varepsilon_2}(q) = \det (P^t M_{\varepsilon_1}(q) P) = (\det P)^2 \det M_{\varepsilon_1}(q).$$

Llamaremos *discriminante* de q al signo del determinante de la matriz de q respecto a cualquier base de V. Es inmediato comprobar que el discriminante es un invariante para la clasificación de formas cuadráticas en espacios vectoriales sobre $\mathbb{R}$.

Tomemos en $V_2(\mathbb{R})$ las formas cuadráticas q_1 y q_2.

$$q_1 : V_2(\mathbb{R}) \ni \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \to x_1^2 + x_2^2$$

$$q_2 : V_2(\mathbb{R}) \ni \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \to x_1^2 - x_2^2$$

Obsérvese que q_1 no es linealmente equivalente a q_2 pese a tener el mismo rango, pues el discriminante de q_1 es distinto del de q_2.

Proposición 3.8.

Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ y $q_1, q_2 \in \mathcal{Q}(V)$. Las formas cuadráticas q_1 y q_2 son linealmente equivalentes si y sólo si tienen la misma signatura.

Demostración

Supongamos que q_1 y q_2 son linealmente equivalentes y que $f \in GL(V)$ verifica $f^{\#} q_1 = q_2$. Sea (k, l) la signatura de q_1, aplicando el teorema 2.9 apartado ii), existe una base $\varepsilon = (e_1, \ldots, e_n)$ ortogonal respecto a q_1 que verifica:

$$
\begin{aligned}
&Q_1(e_i, e_i) = 1, \ i = 1, \ldots, k \\
&Q_1(e_i, e_i) = -1, \ i = k+1, \ldots, k+l \\
&Q_1(e_i, e_i) = 0, \ i = k+l+1, \ldots, n,
\end{aligned}
$$

siendo Q_1 la forma polar de q_1. Por tanto, (k, l) es también la signatura de q_2, en virtud del teorema de Silvester 2.11.

Recíprocamente, supongamos que (k, l) es la signatura de q_1 y q_2. Aplicando el teorema 2.9 apartado ii), existen dos bases ε_1 y ε_2 tales que

$$
M_{\varepsilon_1}(q_1) = \begin{bmatrix}
1 & & & & & & & \\
& \cdot (k & & & & & & \\
& & 1 & & & & & \\
& & & -1 & & & & \\
& & & & \cdot (l & & & \\
& & & & & -1 & & \\
& & & & & & 0 & \\
& & & & & & & \cdot \\
& & & & & & & & 0
\end{bmatrix} = M_{\varepsilon_2}(q_2)
$$

y por la proposición 3.3 se concluye que q_1 y q_2 son linealmente equivalentes. □

Ejemplo 3.9.

Tomemos en $V_3(\mathbb{R})$ las formas cuadráticas q_1 y q_2:

$$q_1 : V_3(\mathbb{R}) \ni \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \to x_1^2+x_2^2+x_3^2$$

$$q_2 : V_3(\mathbb{R}) \ni \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \to x_1^2-x_2^2-x_3^2$$

La signatura de q_1 es (3, 0) y la de q_2 es (1, 2) por tanto, no son linealmente equivalentes pese a tener el mismo discriminante.

El teorema 3.8 nos dice que la signatura es un invariante completo para la clasificación de formas cuadráticas en espacios vectoriales sobre $\mathbb{R}$.

A continuación ofrecemos un método para la diagonalización o reducción a suma y/o diferencia de cuadrados de una forma cuadrática lo cual permitirá el cálculo de la signatura de formas cuadráticas en espacios vectoriales reales.

Proposición 3.10. Método de Gauss o de Lagrange

Sea q *una forma cuadrática definida en un espacio vectorial* V *de dimensión* n *sobre el cuerpo* $\mathbb{K}$ *de característica distinta de dos, sea* $v \in V$ *y sea* $q(v)=f(x_1, ..., x_n)= \sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n} a_{ij}x_ix_j$ *una expresión polinómica de* q *respecto a una base de* V*. Mediante la repetición un número finito de veces de las dos operaciones que vamos a describir a continuación, se consigue una expresión polinómica de* q *como suma y/o diferencia de cuadrados:*

1. Caso en que existe $i \in \{1, ..., n\}$ *tal que* $a_{ii}\neq 0$*. (Supongamos que* $a_{11}\neq 0$*).*

$$f(x_1, \ldots, x_n) = a_{11}\left(x_1^2 + \sum_{i=2}^{n} \frac{a_{1i}}{a_{11}} x_1 x_i\right) + f_2(x_2, \ldots, x_n)$$

llamando

$$x_1' = x_1 + \sum_{i=2}^{n} \frac{a_{1i}}{2a_{11}} x_i$$

tenemos

$$f(x_1, \ldots, x_n) = a_{11} x_1'^2 + f_2'(x_2, \ldots, x_n)$$

y se continúa el proceso con $f_2'(x_2, \ldots, x_n)$

2. *Caso en que para todo* $i = 1, \ldots, n$ $a_{ii} = 0$.

Si todos los a_{ij} *son nulos el proceso finaliza. Supongamos que algún* $a_{ij} \neq 0$, *tomemos* $a_{12} \neq 0$ *para facilitar la escritura.*

$$f(x_1, \ldots, x_n) = a_{12} x_1 x_2 + \left(\sum_{i=3}^{n} a_{1i} x_i\right) x_1 +$$

$$+ \left(\sum_{i=3}^{n} a_{2i} x_i\right) x_2 + \sum_{3 \leq i \leq j < n} a_{ij} x_i x_j = x_1 (x_1 + x_2') +$$

$$+ a_{12}^{-1} \left(\sum_{i=3}^{n} a_{2i} x_i\right) \left(x_1 + x_2' - \sum_{i=3}^{n} a_{1i} x_i\right) + \sum_{3 \leq i \leq j \leq n} a_{ij} x_i x_j,$$

donde

$$x_2' = a_{12} x_2 + \sum_{i=3}^{n} a_{1i} x_i - x_1.$$

Ahora se puede aplicar la operación 1. pues el coeficiente de x_1^2 *es no nulo.*

Ejemplo 3.11.

Considérese la forma cuadrática q definida en un espacio vectorial real de dimensión dos, que admite una expresión polinómica en coordenadas de la forma:

$$q(v) = x_1 x_2$$

Aplicaremos el método de Gauss para calcular su signatura: Corresponde a la operación 2. de 3.10:

$$q(v) = x_1 x_2 = x_1 (x_1 + x'_2) = x_1^2 + x_1 x'_2$$

Ahora podemos aplicar la operación 1.:

$$q(v) = (x_1 + (1/2)\, x'_2)^2 - (1/4)\, x'^2_2 = x'^2_1 - (1/4)\, x'^2_2$$

Por tanto, la signatura de q es (1,1).

4. GRUPOS ORTOGONALES

Dados dos espacios vectoriales métricos $(\mathbb{E}, q)$ y $(\mathbb{E}', q')$ la existencia de un isomorfismo $f: \mathbb{E} \to \mathbb{E}'$ tal que $q = q' \circ f$ reduce el estudio de $(\mathbb{E}, q)$ al de $(\mathbb{E}', q')$ y recíprocamente. Así, por ejemplo, si $U_1, U_2 \in \mathscr{L}(\mathbb{E})$, $U_1 \perp U_2$ si y sólo si $f(U_1) \perp f(U_2)$. Un isomorfismo como f se denomina isometría. Importancia especial tienen las isometrías de un espacio vectorial métrico $(\mathbb{E}, q)$ en sí mismo, pues forman un subgrupo de $GL(\mathbb{E})$ que se denomina grupo ortogonal $O(\mathbb{E}, q)$ y que define una subgeometría de la geometría vectorial de $\mathbb{E}$.

Definición 4.1. Isometría

Sean $(\mathbb{E}, q)$ *y* $(\mathbb{E}', q')$ *dos espacios vectoriales métricos, un isomorfismo* $f: \mathbb{E} \to \mathbb{E}'$ *diremos que es una isometría si* $q = q' \circ f$.

Ejemplos 4.2.

i) Dado $(\mathbb{E}, q)$ espacio vectorial métrico las aplicaciones $id_{\mathbb{E}}$ y $-id_{\mathbb{E}}$ son isometrías de $\mathbb{E}$ en sí mismo.

ii) La aplicación

$$\mathbb{E}^n_{r,s}(\mathbb{K}) \ni \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} a_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{E}^n_{r,s}(\mathbb{K})$$

con $a_i \in \{1, -1\} \subset \mathbb{K}$, $i=1, ..., n$, es una isometría cualesquiera que sean los enteros n, r, s, $r+s \leqslant n$.

Otra forma equivalente de definir isometrías viene dada por el efecto sobre los productos escalares de los espacios vectoriales métricos en consideración:

Proposición 4.3.

Dados dos espacios vectoriales métricos $(\mathbb{E}, q)$ *y* $(\mathbb{E}', q')$, *un isomorfismo* $f : \mathbb{E} \to \mathbb{E}'$ *es una isometría si y sólo si para cada* $v_1, v_2 \in \mathbb{E}$, $Q(v_1, v_2) = Q'(f(v_1), f(v_2))$.

Demostración. Ver ejercicio 11.16. □

Otra caracterización más sorprendente de las isometrías mediante los productos escalares es la siguiente:

Proposición 4.4.

Sean $(\mathbb{E}, q)$ *y* $(\mathbb{E}', q')$ *dos espacios vectoriales métricos con la propiedad: Si* $v \in \mathbb{E}$ $(v' \in \mathbb{E}')$ *verifica* $q(v)=0$ (*resp.* $q'(v')=0$) *entonces* $v=0$ (*resp.* $v'=0$). *Una aplicación suprayectiva* $f : \mathbb{E} \to \mathbb{E}'$ *es una isometría si y sólo si para cada* $v_1, v_2 \in \mathbb{E}$, $Q(v_1, v_2) = Q'(f(v_1), f(v_2))$.

Demostración

Se deduce inmediatamente del ejercicio 11.17 y de la proposición 4.3. □

Otra caracterización, de utilidad posterior, para las isometrías es la siguiente:

Proposición 4.5.

Sean $(\mathbb{E}, q)$ *y* $(\mathbb{E}', q')$ *dos espacios vectoriales métricos. Un isomorfismo* $f : \mathbb{E} \to \mathbb{E}'$ *es una isometría si y sólo si existe una base* $\varepsilon=$

$=(e_1, ..., e_n)$ *de* $\mathbb{E}$ *tal que* $Q(e_i, e_j)=Q'(f(e_i), f(e_j))$ *para cada* i, j $\in \{1, ..., n\}$.

Demostración

Claramente si $f: \mathbb{E} \to \mathbb{E}'$ es una isometría se verifica la condición expresada en el enunciado para cualquier base de $\mathbb{E}$ en virtud de 4.3.

Recíprocamente, sea $\varepsilon=(e_1, ..., e_n)$ base de $\mathbb{E}$ tal que $Q(e_i, e_j)= =Q'(f(e_i), f(e_j))$. Para cada v_1 y v_2 pertenecientes a $\mathbb{E}$, $v_1=\sum_{i=1}^{n} a_i e_i$ y $v_2=\sum_{j=1}^{n} b_j e_j$, se verifica:

$$Q(v_1, v_2)=Q(\Sigma a_i e_i, \Sigma b_j e_j)=\sum_{i,j=1}^{n} a_i b_j Q(e_i, e_j)=$$
$$=\sum_{i,j=1}^{n} a_i b_j Q'(f(e_i), f(e_j))=Q'(\Sigma a_i f(e_i), \Sigma b_j f(e_j))=$$
$$=Q'(f(v_1), f(v_2)),$$

luego f es una isometría. □

Algunas de las propiedades más destacables de las isometrías son:

Proposición 4.6.

Sean $(\mathbb{E}, q)$, $(\mathbb{E}', q')$ *y* $(\mathbb{E}'', q'')$ *espacios vectoriales métricos.*

i) Si $f: \mathbb{E} \to \mathbb{E}'$ *y* $f': \mathbb{E}' \to \mathbb{E}''$ *son dos isometrías, entonces* $f' \circ f$ *es también una isometría.*

ii) Si $f: \mathbb{E} \to \mathbb{E}'$ *es una isometría, entonces* $f^{-1}: \mathbb{E}' \to \mathbb{E}$ *es también una isometría.*

Demostración

i) $q''(f' \circ f)=(q'' \circ f') \circ f=q' \circ f=q$.

ii) Si $q=q' \circ f$ se tiene $q'=q \circ f^{-1}$. □

La proposición 4.6 nos permite por una parte la definición de los grupos ortogonales al considerar las isometrías de un espacio vectorial métrico en sí mismo y por otra establecer una relación de equivalencia en el conjunto de los espacios vectoriales métricos.

Definición 4.7. Grupo ortogonal

Dado ($\mathbb{E}$, q) *espacio vectorial métrico, el grupo* O($\mathbb{E}$, q) *formado por las isometrías de* ($\mathbb{E}$, q) *en sí mismo con la operación composición se denomina grupo ortogonal del espacio vectorial métrico* ($\mathbb{E}$, q).

Observación 4.8.

El grupo ortogonal de un espacio vectorial métrico $O(\mathbb{E}, q)$ determina una geometría sobre $\mathbb{E}$, $(\mathbb{E}, O(\mathbb{E}, q))$. Una propiedad geométrica importante de $(\mathbb{E}, O(\mathbb{E}, q))$ es la ortogonalidad de subespacios.

Decíamos que la proposición 4.6 permite también la definición de una relación de equivalencia:

Definición 4.9.

Dos espacios vectoriales métricos ($\mathbb{E}$, q) *y* ($\mathbb{E}'$, q') *son isométricos si existe una isometría* $f : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E}'$.

La relación «ser isométrico a» es de equivalencia a causa de 4.6 y su importancia radica en que las propiedades geométricas de $(\mathbb{E}, O(\mathbb{E}, q))$ pueden traducirse a propiedades geométricas para otro espacio vectorial métrico isométrico. La relación de equivalencia anterior clasifica los espacios vectoriales métricos y en el caso de espacios vectoriales métricos sobre los cuerpos $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$, gracias a la clasificación lineal de formas cuadráticas en dichos espacios, podemos describir un sistema completo de invariantes para la clasificación por isometrías:

Proposición 4.10.

i) Dos espacios vectoriales métricos sobre $\mathbb{C}$ son isométricos si y sólo si tienen el mismo rango.

ii) Dos espacios vectoriales métricos sobre $\mathbb{R}$ son isométricos si y sólo si tienen la misma signatura.

Demostración

i) Supongamos que $(\mathbb{E}, q)$ y $(\mathbb{E}', q')$ son dos espacios vectoriales métricos isométricos sobre $\mathbb{C}$. Sea $\varepsilon=(e_1, ..., e_n)$ una base ortogonal de $\mathbb{E}$ tal que $Q(e_i, e_i)=1$ si $i=1, ..., r$ y $Q(e_j, e_j)=0$ si $j=r+1, ..., n$ (ver 2.9). Sea $f: \mathbb{E} \to \mathbb{E}'$ una isometría, entonces $f(\varepsilon)=$ $=(f(e_1), ..., f(e_n))$ es una base ortogonal que verifica

$$Q'(f(e_i), f(e_i))=1 \quad \text{si} \quad i=1, ..., r$$

y

$$Q'(f(e_j), f(e_j))=0 \text{ si } j=r+1, ..., n$$

por lo que el rango de $\mathbb{E}$ y el rango de $\mathbb{E}'$ coinciden con r.

Recíprocamente si $(\mathbb{E}, q)$ y $(\mathbb{E}', q')$ tienen el mismo rango r, tomamos $\varepsilon=(e_1, ..., e_n)$ base ortogonal de $\mathbb{E}$ y $\varepsilon'=(e'_1, ..., e'_n)$ base ortogonal de $\mathbb{E}'$ tales que

$$Q(e_i, e_i)=Q'(e'_i, e'_i)=1 \text{ para } i=1, ..., r \text{ y } Q(e_j, e_j)=$$

$$=Q'(e'_j, e'_j)=0 \text{ si } j=r+1, ..., n \text{ (ver 2.9).}$$

Por aplicación de 4.5, el isomorfismo $f: \mathbb{E} \to \mathbb{E}'$ tal que $f(\varepsilon)=\varepsilon'$ es una isometría.

El apartado ii) se prueba de modo totalmente análogo a i). □

A continuación describiremos un representante canónico para cada clase de isometría de espacios vectoriales métricos sobre $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$.

Ejemplos 4.11. Modelos analíticos

i) El espacio vectorial métrico $\mathbb{E}^n_{r,0}(\mathbb{C})$ tiene rango r y el grupo ortogonal correspondiente es:

$$O(r, 0, \mathbb{C}) = \{A \in GL(n, \mathbb{C})\ A I^n_{r,0}\ A^t = I^n_{r,0}\}$$

donde $I^n_{r,0}$ es la matriz cuadrada diagonal:

$$\begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots\,(r & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{bmatrix}$$

(*ver ejercicio* 11.19).

Si $(\mathbb{E}, q)$ es un espacio vectorial métrico complejo de rango r y $\varepsilon = (e_1, \ldots, e_n)$ es una base ortogonal de $\mathbb{E}$ tal que $Q(e_i, e_i) = 1$ para $i = 1, \ldots, r$ y $Q(e_j, e_j) = 0$ para $j = r+1, \ldots, n$, el sistema de coordenadas respecto a ε, $x : \mathbb{E} \to \mathbb{E}^n_{r,0}(\mathbb{C})$ es una isometría.

ii) El espacio vectorial métrico $\mathbb{E}^n_{k,l}(\mathbb{R})$ tiene signatura (k, l) y el grupo ortogonal correspondiente es:

$$O(k, l, \mathbb{R}) = O(k, l) = \{A \in GL(n, \mathbb{R}) \mid A S^n_{k,l}\ A^t = S^n_{k,l}\}$$

donde $S^n_{k,l}$ es la matriz cuadrada diagonal:

$$\begin{bmatrix} 1 & & & & & & & \\ & \ddots{}^{(k} & & & & & & \\ & & 1 & & & & & \\ & & & -1 & & & & \\ & & & & \ddots{}^{(l} & & & \\ & & & & & -1 & & \\ & & & & & & 0 & \\ & & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & & 0 \end{bmatrix}$$

(ver ejercicio 11.19)

En particular los grupos $O(n, 0) = O(n)$ y $O(n-1, 1)$ dan lugar a las geometrías euclídeas (ver capítulo VI) y a las geometrías lorentzianas respectivamente, estas últimas son de relevancia fundamental en la mecánica relativista.

Si $(\mathbb{E}, q)$ es un espacio vectorial métrico real con signatura

$$(k, l) \text{ y } \varepsilon = (e_1^+, \ldots, e_k^+, e_1^-, \ldots, e_l^-, e_1^0, \ldots, e_m^0)$$

es una base ortogonal de $\mathbb{E}$ tal que $Q(e_i^+, e_i^+) = 1$ para $i = 1, \ldots, k$, $Q(e_i^-, e_i^-) = -1$ para $i = 1, \ldots, l$ y $Q(e_i^0, e_i^0) = 0$ para $i = 1, \ldots, m$, el sistema de coordenadas respecto a ε, $x : \mathbb{E} \to \mathbb{E}_{k,l}^n$, es una isometría.

Por último, he aquí un tipo de isometrías con relevancia especial, las simetrías ortogonales:

Definición 4.12. Simetría ortogonal

Dado un espacio vectorial métrico $(\mathbb{E}, q)$, *diremos que una simetría vectorial* $\sigma : \mathbb{E} \to \mathbb{E}$ *con base* B *y dirección* D *es una simetría ortogonal si* B *es ortogonal a* D. *Si además si la base* B *es un hiperplano diremos que* σ *es una simetría hiperplano.*

El siguiente resultado justifica la definición anterior:

Proposición 4.13.

Sea $(\mathbb{E}, q)$ *un espacio vectorial métrico, una simetría vectorial* $\sigma : \mathbb{E} \to \mathbb{E}$ *es una isometría si y sólo si es una simetría ortogonal.*

Demostración

Supongamos que $\sigma : \mathbb{E} \to \mathbb{E}$ es una simetría vectorial y además isometría. Sea d un vector de la dirección de σ y b un vector de la base de σ, entonces

$$Q(d, b) = Q(\sigma(d), \sigma(b)) = Q(-d, b) = -Q(d, b)$$

luego $2Q(d, b) = 0$ y como suponemos siempre que el cuerpo no es de característica dos, $Q(d, b) = 0$ con lo cual la dirección de σ es ortogonal a su base.

Si ahora $\sigma : \mathbb{E} \to \mathbb{E}$ es una simetría ortogonal, por la misma definición se trata de una simetría vectorial. Sea B la base de σ y D su dirección. Si $\varepsilon_1 = (e_1, \ldots, e_s)$ es una base de B y

$$\varepsilon_2 = (e_{s+1}, \ldots, e_n)$$

es una base de D,

$$\varepsilon_1 \cup \varepsilon_2 = (e_1, \ldots, e_s, e_{s+1}, \ldots, e_n)$$

es una base de $\mathbb{E}$ y se verifica

$$Q(e_i, e_j) = Q(\sigma(e_i), \sigma(e_j)) \text{ si } i, j \in \{1, \ldots, s\}$$

$$Q(e_i, e_j) = (-1)^2 Q(-e_i, -e_j) = Q(\sigma(e_i), \sigma(e_j)) \text{ si } i, j \in \{s+1, \ldots, n\}$$

$$Q(e_i, e_j) = 0 = Q(e_i, -e_j) = Q(\sigma(e_i), \sigma(e_j)) \text{ si } i \in \{1, \ldots, s\} \text{ y}$$
$$j \in \{s+1, \ldots, n\}.$$

Aplicando 4.5 se tiene que σ es una isometría. □

Observación 4.14.

Si σ es una simetría vectorial de un espacio vectorial métrico $(\mathbb{E}, q)$ no singular con base B entonces σ tiene por dirección $D=B^{\perp}$ En efecto, por ser σ simetría ortogonal $D \subset B^{\perp}$ y por ser $(\mathbb{E}, q)$ no singular $\dim B^{\perp}=\dim \mathbb{E}-\dim B=\dim D$.

EJERCICIOS

11.1. Dado el espacio vectorial métrico $\mathbb{E}=(V_3(\mathbb{R}),\ q)$ donde

$$M_\varepsilon(q)=\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & -3 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

siendo ε la base canónica de $V_3(\mathbb{R})$. Calcular las ecuaciones de rad $\mathbb{E}$. Si U es el subespacio de ecuación $x_1=0$, calcular las ecuaciones de $U^\perp$.

11.2. En $\mathbb{E}^3_{2,1}$ se consideran los subespacios:

$$U_1: x_1+x_2+x_3=0 \quad \text{y} \quad U_2: \begin{cases} x_1=x_2 \\ x_2=x_3 \end{cases}$$

en coordenadas respecto la base canónica de $\mathbb{E}^3_{2,1}$. Hallar las ecuaciones de $U_1^\perp$, $U_2^\perp$, $(U_1+U_2)^\perp$ y $(U_1\cap U_2)^\perp$.

11.3.* Dado $\mathbb{E}$ un subespacio vectorial métrico tal que

$$\mathbb{E}=F_1 \overset{\perp}{\oplus} \dots \overset{\perp}{\oplus} F_r.$$

Probar que rad $\mathbb{E}=$ rad $F_1+\dots+$ rad F_r.

11.4. Sea $(V_4(\mathbb{Q}),\ q)$ un espacio vectorial métrico, donde $q: V_4(\mathbb{Q}) \to \mathbb{Q}$ tiene como matriz respecto a la base canónica:

$$\begin{pmatrix} 5 & -8 & -2 & -2 \\ -8 & 14 & 2 & 2 \\ -2 & 2 & 2 & 2 \\ -2 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Hallar una base ortogonal para $(V_4(\mathbb{Q}),\ q)$.

11.5. Calcular bases de $V_3(\mathbb{R})$ que verifiquen las condiciones de 2.9.ii) para las siguientes formas cuadráticas:

i) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

ii) $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

Deducir la signatura de cada una de ellas.

11.6. Calcular bases de $V_2(\mathbb{C})$ que verifiquen las condiciones de 2.9.i) para las formas cuadráticas cuyas matrices respecto la base canónica son:

i) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

ii) $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 10 \end{pmatrix}$

¿Cuál es el rango de cada una de las formas?

11.7.* Reducir a forma diagonal y hallar la signatura de las formas cuadráticas definidas en $V_4(\mathbb{R})$ cuyas matrices respecto la base canónica son:

i) $$Q_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -3 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

ii) $$Q_2 = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 3 & 1 \\ -3 & -1 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & -9 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -5 \end{pmatrix}$$

iii) $$Q_3 = \begin{pmatrix} 3 & -3 & -1 & 1 \\ -3 & 5 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Obtener en cada caso una matriz P_i tal que $Q_i = P_i^t D_i P_i$, siendo D_i una matriz diagonal e $i = 1, 2, 3$.

11.8. Calcular, en función de λ y μ, la signatura de las formas cuadráticas, definidas en $V_3(\mathbb{R})$, cuyas matrices respecto la base canónica son

i) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

ii) $\begin{pmatrix} \lambda & \lambda & \lambda \\ \lambda & 2\lambda+\mu & 2\lambda+\mu \\ \lambda & 2\lambda+\mu & 2\lambda+2\mu \end{pmatrix}$.

11.9.* Hallar una base ε de $V_{2n}(\mathbb{R})$ de modo que la siguiente forma cuadrática tenga una matriz diagonal respecto a ε:

$$q : V_{2n}(\mathbb{R}) \ni \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{2n} \end{pmatrix} \to x_1 x_{2n} + x_2 x_{2n-1} + \dots + x_n x_{n+1}.$$

11.10. Probar que la aplicación:

$$\mathbb{R}[X] \ni \varphi(X) \to \int_0^1 \varphi^2(t)\, dt \in \mathbb{R}$$

es una forma cuadrática definida positiva.

11.11.* Probar que una matriz cuadrada A, con coeficientes en un cuerpo de característica distinta de dos, es simétrica si y sólo si existe una matriz inversible P y una matriz diagonal D tales que $A = P^t DP$. Si $A \in GL(n, \mathbb{C})$, probar que A es simétrica si y sólo si existe una matriz P tal que $A = P^t P$.

11.12.* Definir una actuación de $GL(n)$ sobre $EL(n)$:

$$GL(n) \times EL(n) \ni (F, Q) \to FQ \in EL(n)$$

de modo que si V es un espacio vectorial, ε una base de V,

$$M_\varepsilon(f \# q) = M_\varepsilon(f) \# M_\varepsilon(q)$$

¿Cuál es la relación de equivalencia que induce la actuación sobre $EL(n)$?

11.13.* Dadas las formas cuadráticas q_1, q_2 de $V_2(\mathbb{K})$ cuyas matrices respecto la base canónica ε de $V_2(\mathbb{K})$ son:

$$M_\varepsilon(q_1)=\begin{pmatrix}2 & 4\\ 4 & 9\end{pmatrix}$$

$$M_\varepsilon(q_2)=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 5\end{pmatrix}$$

estudiar si son linealmente equivalentes en los siguientes casos:

i) $\mathbb{K}=\mathbb{Q}$; ii) $\mathbb{K}=\mathbb{R}$; iii) $\mathbb{K}=\mathbb{C}$.

11.14. Respóndanse a las mismas cuestiones que en 11.13 para las formas cuadráticas de $V_2(\mathbb{K})$ con matrices

$$M_\varepsilon(q_1)=\begin{pmatrix}0 & 2\\ 2 & 8\end{pmatrix}$$

$$M_\varepsilon(q_2)=\begin{pmatrix}2 & 4\\ 4 & 10\end{pmatrix}$$

11.15. Probar que una forma cuadrática de $V_2(\mathbb{R})$ es definida si y sólo si su discriminante es positivo.

11.16.* Probar que, dados dos espacios vectoriales métricos $(\mathbb{E}, q)$ y $(\mathbb{E}', q')$, un isomorfismo $f: \mathbb{E} \to \mathbb{E}'$ es una isometría si y sólo si para cada $v_1, v_2 \in \mathbb{E}$,

$$Q(v_1, v_2)=Q'(f(v_1), f(v_2)).$$

11.17.* Sean $(\mathbb{E}, q)$ y $(\mathbb{E}', q')$ dos espacios vectoriales métricos con la propiedad: Si $v\in\mathbb{E}$ $(v'\in\mathbb{E}')$ verifica $q(v)=0$ (resp. $q'(v')=0$) entonces $v=0$ (resp. $v'=0$). Probar que si una aplicación suprayectiva $f: \mathbb{E} \to \mathbb{E}'$ verifica, para cada $v_1, v_2 \in \mathbb{E}$, $Q(v_1, v_2)=Q'(f(v_1), f(v_2))$, entonces f es un isomorfismo.

11.18. Dados $(\mathbb{E}, q)$ y $(\mathbb{E}', q')$ dos espacios vectoriales métricos y $f_1: \mathbb{E} \to \mathbb{E}'$, $f_2: \mathbb{E} \to \mathbb{E}'$ dos isometrías. ¿Es f_1+f_2 una isometría?, ¿y λf_1 con $\lambda \in \mathbb{K}-\{0\}$?

11.19.* Sea M una matriz cuadrada. Una matriz A se dice ortogonal respecto a M, si $A^tMA=M$. Sea $(\mathbb{E}, q)$ un espacio vectorial métrico y ε una base de $\mathbb{E}$ tal que $M_\varepsilon(q)=M$. Probar que $f \in O(\mathbb{E}, q)$ si y sólo si $M_\varepsilon(f)$ es ortogonal respecto a M.

11.20.* Sean $(\mathbb{E}, q)$ y $(\mathbb{E}', q')$ dos espacios vectoriales métricos y $f: \mathbb{E}' \to \mathbb{E}$ una isometría. Probar que:

$$O(\mathbb{E}', q')=f^{-1}O(\mathbb{E}, q)f.$$

11.21. En $\mathbb{E}_{2,1}$ hallar la matriz de la simetría ortogonal con base el hiperplano de ecuación $x_1+x_2=0$ respecto a la base canónica de $\mathbb{E}_{2,1}$.

11.22.* Dado $(\mathbb{E}, q)$ un espacio vectorial métrico, se dice que una proyección vectorial $\pi: \mathbb{E} \to \mathbb{E}$ con base B y dirección D es una proyección ortogonal, si B es ortogonal a D. Probar que para cada descomposición en suma directa ortogonal de $\mathbb{E}$ existe un sistema de proyecciones ortogonales asociado a dicha descomposición.

CAPITULO VI

GEOMETRIA EUCLIDEA

Dados dos vectores no nulos de un espacio vectorial, es posible aplicar uno en otro mediante una transformación lineal. Análogamente, en un espacio afín es posible enviar una pareja de puntos distintos, a otra pareja arbitrariamente elegida, mediante una transformación afín. Esto significa que en geometría vectorial, no existe una propiedad intrínseca que distinga unos vectores de otros, ni la geometría afín distingue los segmentos. Son geometrías demasiado «groseras» para reflejar nuestra idea intuitiva de «longitud» de un vector, o «distancia» entre dos puntos.

La formalización de la idea intuitiva de longitud de un vector, viene establecida a través de una forma cuadrática definida positiva. La geometría vectorial euclídea (a la que dedicamos las lecciones 12 *y* 13*), es la geometría definida por las transformaciones lineales que preservan la longitud de los vectores.*

La idea intuitiva de distancia en un espacio afín real, se formaliza por medio de una forma cuadrática definida positiva, sobre su espacio vectorial asociado.

La distancia entre dos puntos a *y* b *es entonces la longitud del vector* $\overline{ab}$.

Las transformaciones que preservan la distancia son llamadas movimientos, y se corresponde con nuestra idea intuitiva de movimiento rígido.

Los movimientos definen la geometría afín euclídea, y a su estudio dedicamos la lección 14.

El lector puede consultar ahora directamente la introducción de la lección 15 *dedicada a la geometría afín equiforme, para hacerse una idea global del capítulo.*

LECCION 12

GEOMETRIA VECTORIAL EUCLIDEA

Un espacio vectorial euclídeo $\mathbb{E}$, es un espacio vectorial métrico real en el que el producto escalar está inducido por una forma cuadrática definida positiva.

El grupo de isometrías de $\mathbb{E}$, $O(\mathbb{E})$ se denomina grupo ortogonal euclídeo, y es el grupo de transformaciones de la geometría vectorial euclídea. La clasificación en este geometría de las transformaciones lineales euclídeas, y la obtención de un sistema generador sencillo para $O(\mathbb{E})$ constituyen los objetivos principales de la lección.

§1. PRELIMINARES

Daremos primero un criterio práctico para reconocer cuando una forma cuadrática real es definida positiva. Estableceremos después la terminología básica, y resultados elementales relativos a los espacios vectoriales euclídeos.

Proposición 1.1. Criterio de Silvester

Sea V *espacio vectorial real de dimensión finita* n, q *una forma cuadrática en* V, *y* $A = (a_{ij})$ *la matriz (simétrica) que representa a* q *respecto a la base* $\varepsilon=(e_1, \ldots, e_n)$. *Entonces se verifica la equivalencia:*

$$q \text{ es } \textit{definida positiva} \Leftrightarrow \det \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1k} \\ & \ldots & \\ & \ldots & \\ a_{k1} & \ldots & a_{kk} \end{pmatrix} > 0$$

Para todo $k=1, \ldots, n$.

Demostración

Establezcamos una notación previa:

Si $M=(m_{ij})$ es una matriz cuadrada de orden n, denotamos para $k=1, \ldots, n$:

$$\nabla_k(M) = \begin{vmatrix} m_{11} \ldots m_{1k} \\ \ldots \\ \ldots \\ m_{k1} \ldots m_{kk} \end{vmatrix}$$

y se denomina menor angular de orden k de M.

($\Rightarrow$

Una forma cuadrática definida positiva, tiene discriminante positivo. En particular, si q es definida positiva, es $\nabla_n(A)=\det A$, un número positivo, y en general, para $k=1, \ldots, n$ tomando $\varepsilon_k=(e_1, \ldots, e_k)$ y $W_k=\langle\varepsilon_k\rangle$, como la forma cuadrática $q_k=q/W_k$, es también definida positiva, se tiene:

$$\nabla_k(A)>0$$

ya que la matriz de q_k respecto a ε_k es:

$$A_k = \begin{pmatrix} a_{11} \ldots a_{1k} \\ \ldots \\ \ldots \\ a_{k1} \ldots a_{kk} \end{pmatrix} \tag{1.1.1}$$

$\Rightarrow$)

Recíprocamente, si se verifica la condición:

$$\nabla_k(A)>0 \text{ para } k=1, \ldots, n$$

Probemos por inducción sobre la dimensión n, que q es definida positiva.

El caso $n=1$ es trivial. Supuesto probado para dimensión menor que n ($n>1$), sea $W=\langle\varepsilon_{n-1}\rangle$. La matriz de q/W_k respecto a $\varepsilon=(e_1, \ldots, e_k)$ es la matriz A_k *de* (1.1.1). Como:

$$\nabla_k(A_{n-1})=\nabla_k(A)>0 \text{ para } k=1, \ldots, n-1$$

por la hipótesis de inducción se concluye que q/W es definida positiva, y en particular no degenerada. Se tiene así:

$$V=W \oplus W^{\perp}, \text{ y } \dim W^{\perp}=1$$

Sea $e \in V$ tal que $W^{\perp}=\langle e\rangle$. La matriz de q respecto a la base $\varepsilon'=$ $=(e_1, \ldots, e_{n-1}, e)$ es de la forma:

$$A'=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1r} & 0 \\ \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ & \cdots & & \\ a_{r1} & \cdots & a_{rr} & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & q(e) \end{vmatrix} \quad \text{con } r=n-1$$

Como por hipótesis $\det A=\nabla_n(A)$ es positivo, q tiene discriminante positivo, y en particular, por ser A' representación matricial de q, se tiene:

$$\det A'=q(e)\,\nabla_{n-1}(A)>0$$

lo que implica: $q(e)>0$, ya que por hipótesis es $\nabla_{n-1}(A)$ positivo.

La demostración de que q es definida positiva es ya inmediata. Teniendo en cuenta la descomposición ortogonal:

$$V=W \overset{\perp}{\oplus} \langle e\rangle$$

para cada $x \in \mathbb{E}$, es $x=w+\lambda e$ con $w \in W$ y $\lambda \in \mathbb{R}$, y se tiene:

$$q(x)=q(w+\lambda e)=q(w)+\lambda^2 q(e)>0,$$

pues q/W es definida positiva, y $q(e)>0$. Además si $q(x)=q(w)+$ $+\lambda^2 q(e)=0$, por las razones expuestas (cada sumando debe ser nulo) $w=0$, $\lambda=0$ y finalmente $x=0$. Esto concluye la demostración. □

Definición 1.2.

Un espacio vectorial euclídeo es un espacio vectorial métrico real $\mathbb{E}=(\mathbb{E}, \mathrm{q})$ *en el que la forma cuadrática* q *es definida positiva.*

— *Al producto escalar:*

$$\mathrm{q}: \mathbb{E}\times\mathbb{E} \ni (\mathrm{u}, \mathrm{v}) \to (\mathrm{u}/\mathrm{v}) \in \mathbb{R}$$

se le denomina producto escalar euclídeo de $\mathbb{E}$.

— *Si* $\mathrm{v}\in\mathbb{E}$ *se escribe:* $\|\mathrm{v}\|=\sqrt{(\mathrm{v}/\mathrm{v})}$, *y a la aplicación:*

$$\|\ \| : \mathbb{E} \ni \mathrm{v} \to \|\mathrm{v}\| \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$$

se le denomina norma (euclidea) de $\mathbb{E}$.

Observaciones 1.3.

1. En las condiciones de la definición anterior, se verifica que:

$$q=\|\ \|^2$$

La expresión de la forma polar Q de q dada en L.10, 2.8 se puede escribir ahora:

$$(u/v)=\frac{1}{2}(\|u+v\|^2-\|u\|^2-\|v\|^2)$$

2. Un espacio vectorial euclídeo puede definirse también, como un espacio vectorial real $\mathbb{E}$ en el que se ha definido una forma bilineal simétrica (producto escalar euclídeo, (/)) tal que:

$$(v/v)>0 \text{ para todo } v\in\mathbb{E}, \text{ y } (u/u)=0 \Rightarrow u=0$$

en particular, $\mathbb{E}$ es un espacio vectorial métrico no degenerado.

3. Un subespacio vectorial F del espacio vectorial euclídeo $\mathbb{E}$, tiene estructura natural de espacio euclídeo, si se considera en F el producto escalar restringido:

$$F \times F \ni (u, v) \to (u/v) \in \mathbb{R}$$

La norma en F es evidentemente la restricción a F de la norma de $\mathbb{E}$.

Una propiedad típica del producto escalar euclídeo viene dada por la siguiente desigualdad:

Proposición 1.4. Desigualdad de Cauchy-Schwartz

Para todo par de vectores u, v *del espacio vectorial euclídeo* $\mathbb{E}$, *se verifica la desigualdad:*

$$(\mathrm{u}|\mathrm{v})^2 \leqslant (\mathrm{u}|\mathrm{u})\ (\mathrm{v}|\mathrm{v}) \tag{1.4.1}$$

Además se verifica la igualdad:

$$(\mathrm{u}|\mathrm{v})^2 = (\mathrm{u}|\mathrm{u})\ (\mathrm{v}|\mathrm{v}) \tag{1.4.2}$$

Si y sólo si el sistema (u, v) *es linealmente dependiente.*

Demostración

Si alguno de los vectores u, v es nulo, entonces se verifica evidentemente la igualdad (1.4.2).

Supóngase entonces que u, v son vectores no nulos. Para todo $t \in \mathbb{R}$ se tiene:

$$\varphi(t) = (u + tv/u + tv) = (v/v) > t^2 + 2(u/v)\,t + (u/v) > 0$$

Por tanto el discriminante ∇ de la ecuación de segundo grado $\varphi(t)$ *verifica:*

$$\nabla = 4(u/v)^2 - 4(u/u)\,(v,\ v) \leqslant 0$$

Esto prueba la desigualdad (1.4.1).

Además se verifica la igualdad (1.4.2) si y sólo si $\nabla = 0$, lo que equivale a decir que existe $t \in \mathbb{R}$ tal que $\varphi(t) = (u+tv/u+tv) = 0$, es decir, $u+tv=0$, y (u, v) es linealmente dependiente. □

La desigualdad de Cauchy-Schwartz permite probar en particular la clásica propiedad triangular de la norma:

Corolario 1.5.

La norma $\| \ \|$ *de un espacio vectorial euclídeo* $\mathbb{E}$, *verifica las siguientes propiedades:*

i) $\|v\| \geqslant 0$ para todo $v \in \mathbb{E}$, y $\|v\| = 0 \Rightarrow v = 0$.

ii) $\|\lambda v\| = |\lambda| \, \|v\|$ para todo $v \in \mathbb{E}$, y todo $\lambda \in \mathbb{R}$.

iii) Para todo u, $v \in \mathbb{E}$ se verifica $\|u+v\| \leqslant \|u\| + \|v\|$.

Demostración

Las propiedades i) y ii) son inmediatas a partir de la definición 1.2. Probremos iii):

La desigualdad (1.4.1) puede escribirse en la forma:

$$|(u/v)| \leqslant \|u\| \, \|v\|$$

por tanto:

$$\|u+v\|^2 = (u+v/u+v) = \|u\|^2 + \|v\|^2 + 2(u/v) \leqslant \|u\|^2 + \\ + \|v\|^2 + 2(u/v) \leqslant \|u\|^2 + \|v\|^2 + 2\|u\| \, \|v\|$$

y la última expresión coincide con $(\|u\| + \|v\|)^2$, lo que concluye la demostración. □

Observación 1.6.

Escribamos aún de otra forma la desigualdad de Cauchy-Schwartz, para dos vectores u, v de $\mathbb{E}$:

$$-1 \leqslant \frac{(u/v)}{\|u\| \, \|v\|} \leqslant 1$$

Se define entonces el ángulo (no orientado) θ entre los vectores u y v como el único número θ verificando:

$$0 \leqslant \theta \leqslant \pi, \text{ y } \cos\theta = \frac{(u/v)}{\|u\|\,\|v\|}$$

De esta forma se recupera la clásica igualdad:

$$(u/v) = \|u\|\,\|v\|\cos\theta$$

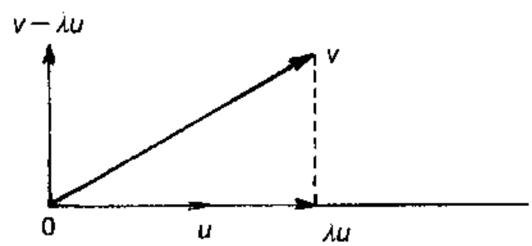
En particular, cuando $\theta = \frac{1}{2}\pi$ se tiene $(u/v) = 0$, y u es ortogonal a v (escribimos $u \perp v$).

Dados dos vectores u, v de E, $u \neq 0$, existe un único $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que:

$$(v - \lambda u/u) = 0$$

ya que

$$(v - \lambda u/u) = (v/u) - \lambda(u,\ u) = 0 \quad \text{implica} \quad \lambda = \frac{(v/u)}{(u/u)}$$



Definición 1.7. Proyección ortogonal

Si u, v $\in \mathbb{E}$, u $\neq 0$, *se denomina proyección de* v *sobre* u *al vector:*

$$proy_u v = \frac{(v/u)}{(u/u)}\, u$$

Nótese que $\text{proy}_u v$ es el único vector w proporcional a u y tal que $(v-w) \perp u$, y sólo depende de la recta vectorial $\langle u \rangle$.

La existencia de bases ortogonales para un espacio vectorial métrico cualquiera ya ha sido probada en la lección 11. En el caso euclídeo, puede refinarse este resultado, y pueden construirse bases ortogonales bajo ciertas exigencias adicionales:

Proposición 1.8. Método de ortogonalización de Schmidt

Sea $\mathbb{E}$ *un espacio vectorial euclídeo, y* $(\mathrm{v}_1, \ldots, \mathrm{v}_n)$ *una base cualquiera de* $\mathbb{E}$. *Existe entonces una base ortogonal* $(\mathrm{u}_1, \ldots, \mathrm{u}_n)$ *tal que:*

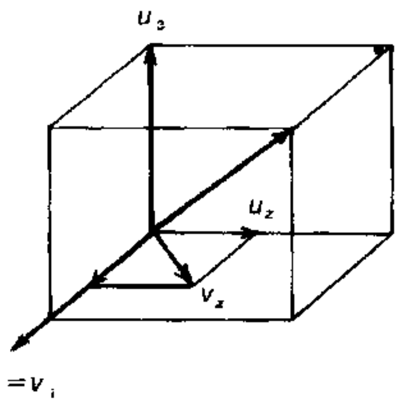
$$\langle \mathrm{u}_1, \ldots, \mathrm{u}_k \rangle = \langle \mathrm{v}_1, \ldots, \mathrm{v}_k \rangle \text{ para todo } \mathrm{k}=1, \ldots, \mathrm{n} \qquad (1.8.1)$$

Demostración

Se toma $u_1 = v_1$.

Supóngase construido $(u_1, \ldots, u_r)$ sistema ortogonal verificando la condición (1.8.1) para $k=1, \ldots, r$. Se toma entonces:

$$u_{r-1} = v_{r+1} - \sum_{i=1}^{r} \text{proy}_{u_i} v_{r+1} = v_{r+1} - \sum_{i=1}^{r} \frac{(v_{r+1}/u_i)}{(u_i/u_i)}\, u_i$$



se ve entonces que para $k=1, ..., r$ es:

$$(u_{r+1}/u_k)=(v_{r+1}-\sum_{i=1}^{r}\frac{(v_{r+1}/u_i)}{(u_i/u_i)}u_i/u_k)=(v_{r+1}/u_k)-\frac{(v_{r+1}/u_k)}{(u_k/u_k)}(u_k|u_k)=0$$

Así $(u_1, ..., u_r, u_{r+1})$ es un sistema ortogonal.

Como $\langle u_1, ..., u_r\rangle=\langle v_1, ..., v_r\rangle$ por la hipótesis de inducción, y $v_{r+1}\in\langle u_1, ..., u_r, u_{r+1}\rangle$, es $\langle v_1, ..., v_{r+1}\rangle\subset\langle u_1, ..., u_{r+1}\rangle$, y se verifica la igualdad por razón de dimensiones.

Fijada la base ortogonal $(u_1, ..., u_n)$, y tomando $e_i=\frac{u_i}{\|u_i\|}$ para $i=1, ..., n$, se obtiene una base ortonormal $(e_1, ..., e_n)$. Analizaremos cómo se interpretan desde el punto de vista euclídeo las coordenadas respecto a este tipo de bases:

Proposición 1.9.

Sea $(e_1, ..., e_n)$ *un base ortonormal, y*

$$x=\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}:\mathbb{E}\to V_n(\mathbb{R}),$$

el isomorfismo de coordenadas. Entonces, para cada u, v $\in\mathbb{E}$, *se verifica:*

$$proy_{e_i}u=x_i(u)=(u/e_i)\ \textit{para todo}\ i=1, ..., n \qquad (1.9.1)$$

$$(u/v)=\sum_{i=1}^{n}x_i(u)\,x_i(v) \qquad (1.9.2)$$

En particular, se tienen las identidades:

$$u=\sum_{i=1}^{n}(u/e_i)\,e_i,\quad (u/v)=\sum_{i=1}^{n}(u/e_i)(v/e_i)$$

(identidades de Parseval).

Demostración

Para probar (1.9.1) y la identidad de Parseval, basta observar que el vector $w = u - \sum_{i=1}^{n} (u/e_i)\, e_i$ es nulo. En efecto, w es ortogonal a cada vector e_j pues:

$$(w/e_j) = (u/e_j) - \sum_{i=1}^{n} (u/e_i)(e_i/e_j)$$

y ε es base ortogonal. Se deduce entonces que w es ortonormal a todo el espacio $\mathbb{E}$, que es no degenerado, y w es nulo.

La prueba de (1.9.2) es aún más sencilla:

$$(u/v) = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i(u)\, e_i / \sum_{j=1}^{n} x_j(v)\, e_j \right) =$$

$$= \sum_{i,j=1}^{n} x_i(u)\, x_j(v) (e_i/e_j) = \sum_{i=1}^{n} x_i(u)\, x_i(v). \quad \square$$

Observación 1.10.

La proposición 1.9 indica en particular, que el sistema de coordenadas (x_i) inducido por una base ortonormal de $\mathbb{E}$, define una isometría de $\mathbb{E}$ en el modelo analítico de espacio vectorial euclídeo $\mathbb{E}_n$ (ver ejemplos 1.8, L.11).

§2. TRANSFORMACIONES LINEALES EUCLIDEAS. TEOREMA DE CARTAN-DIEUDONNE

En este epígrafe se supone fijado un espacio vectorial euclídeo $\mathbb{E}$ de dimensión finita n. El grupo de isometrías de $\mathbb{E}$, que hemos denotado por $O(\mathbb{E})$ lo llamaremos grupo de transformaciones lineales euclídeas, y define la geometría vectorial euclídea del espacio.

En particular, el grupo de transformaciones lineales euclídeas del modelo analítico $\mathbb{E}_n$, se identifica con el grupo de matrices

$$O(n) = \{A \in EL(n) : A^t A = I\}$$

que denominamos matrices ortogonales euclídeas, o más simplemente, matrices euclídeas.

En una geometría cualquiera, tiene interés encontrar sistemas generadores sencillos para el grupo de transformaciones. Así, para verificar si una propiedad es geométrica, es suficiente comprobar que permanece invariante por la acción del sistema de generadores.

Probaremos que una transformación lineal euclídea cualquiera puede descomponerse en producto de simetrías ortogonales respecto a hiperplanos.

La siguiente proposición establece algunos resultados básicos relativos al grupo $O(\mathbb{E})$, ya estudiados para espacios vectoriales métricos arbitrarios (L.11, §4).

Proposición 2.1.

Sea $f : \mathbb{E} \to \mathbb{E}$ *una aplicación lineal, y* ε *una base ortonormal de* $\mathbb{E}$. *Son equivalentes las siguientes afirmaciones:*

i) f *preserva el producto escalar, es decir:*

$$(f(u)/f(v)) = (u/v) \text{ para todo } u, v \in \mathbb{E}$$

ii) f *preserva la norma*

$$\|f(v)\| = \|v\| \text{ para todo } v \in \mathbb{E}$$

iii) f *es transformación lineal euclídea.*

iv) $f(\varepsilon)$ *es base ortonormal.*

v) la matriz $A = M_\varepsilon(f)$ *es una matriz euclídea* ($A^tA = I$).

Por otra parte, la aplicación:

$$M_\varepsilon : O(\mathbb{E}) \ni f \to M_\varepsilon(f) \in O(n)$$

es un isomorfismo de grupos.

Demostración

Es consecuencia inmediata de los resultados del §4 (L.11). Indiquemos no obstante, que las equivalencias iii) $\Leftrightarrow$ iv) $\Leftrightarrow$ v) se obtienen directamente de la siguiente observación:

«Si ε es base ortonormal de $\mathbb{E}$, y $\varepsilon' = \varepsilon P$, entonces ε' es base ortonormal de $\mathbb{E}$, si y sólo si P es matriz euclídea.» □

Destacamos también otro resultado elemental, pero importante:

Proposición 2.2.

Sea f *transformación lineal euclídea de* $\mathbb{E}$, *y* U *subespacio vectorial de* $\mathbb{E}$ *invariante por* f. *Entonces:*

i) La restricción $f_U : U \ni u \to f(u) \in U$, *es una transformación lineal euclídea de* U.

ii) $U^\perp$ *es un subespacio invariante por* f.

Demostración

La afirmación *i)* es elemental.

Para probar *ii)*, nótese que si $v \in U^\perp$, entonces:

$$(f(v)/f(u)) = (v/u) = 0$$

Para todo $u \in U$. Como $f(U) = U$, es $v \in U^\perp$. □

Con idea de preparar la demostración del teorema de Cártan-Dieudonné, estudiaremos algunas propiedades elementales de las simetrías hiperplano de $\mathbb{E}$. (Véase 4.12, L.11):

Lema 2.3. Lema de extensión

Si σ *es una simetría hiperplano de un subespacio* F *no nulo de* $\mathbb{E}$, *existe entonces una única simetría hiperplano* $\bar\sigma$ *en* $\mathbb{E}$, *que extiende a* σ, *es decir:*

$$\bar\sigma(F) = F, \text{ y } \bar\sigma_F = \sigma : F \to F$$

Demostración

Sea $H < F$ el hiperplano de F base de la simetría σ. Su dirección $D = H^{\perp} \cap F$ es por tanto una recta de $\mathbb{E}$ contenida en F.

Si existe $\bar{\sigma}$ simetría hiperplano de $\mathbb{E}$ extensión de σ, tendrá por dirección la recta:

$$\overline{D} = \{v \in \mathbb{E} : \bar{\sigma}(v) = -v\}$$

y como $\bar{\sigma}_F = \sigma$, es $\overline{D} \subset D$, por razón de dimensiones es $\overline{D} = D$.

La base de $\bar{\sigma}$ es entonces $\overline{H} = \overline{D}^{\perp} = H \oplus F^{\perp}$. Esto prueba la unicidad. Por otra parte, la simetría hiperplano $\overline{\sigma}$ con base en $\overline{H} = H \oplus F^{\perp}$, y dirección D es extensión de σ, ya que las igualdades:

$$F = H \overset{\perp}{\oplus} D, \ \overline{H} \cap F = H$$

Prueban que para todo $h \in H$, y todo $d \in D$ se verifica:

$$\bar{\sigma}(h+d) = h - d = \sigma(h+d) \ \square$$

Lema 2.4.

Sean a, b *dos vectores distintos de* $\mathbb{E}$ *tales que* $\|a\| = \|b\| \neq 0$. *Existe entonces una simetría hiperplano* σ *de* $\mathbb{E}$ *que verifica:* $\sigma(a) = b$.

Demostración

La igualdad $\|a\| = \|b\|$ puede escribirse como

$$(a+b/a-b) = 0$$

y así $a+b$ pertenece al hiperplano $H = \langle a-b \rangle^{\perp}$.

La simetría hiperplano con base en H, tiene por tanto dirección $D = \langle a-b \rangle$, y verifica:

$$\sigma(a) = \sigma\left(\frac{1}{2}(a+b) + \frac{1}{2}(a-b)\right) = \frac{1}{2}(a+b) - \frac{1}{2}(a-b) = b. \quad \square$$

Proposición 2.5. Teorema de Cartan-Dieudonné

Cada transformación lineal euclídea de $\mathbb{E}$ puede descomponerse en producto de no más de n $(=\dim \mathbb{E})$ *simetrías hiperplano.*

Demostración

Se hará por inducción sobre la dimensión n del espacio vectorial euclídeo.

Si $n=1$, entonces $O(\mathbb{E})=\{id, -id\}$, y no hay nada que probar.

Supóngase cierto el teorema para dimensión menor que n $(n>1)$, y sea $f \in O(\mathbb{E})$ con $\dim \mathbb{E}=n$:

1) Si existe $a \in \mathbb{E}-\{0\}$ con $f(a)=a$, entonces la recta $\langle a\rangle$ es de puntos fijos, y por tanto invariante.

Utilizando la proposición 2.2 se concluye que $F=\langle a\rangle^{\perp}$, es hiperplano invariante por f, y la restricción f_F de f a F es transformación lineal euclídea de F. Aplicando la hipótesis de inducción se deduce la existencia de simetrías hiperplano de F, $\sigma_1 \ldots \sigma_r$ tales que:

$$f_F=\sigma_1 \; \ldots \; \sigma_r \quad \text{y} \quad r\leqslant n-1 \tag{2.5.1}$$

Denotando por $\bar{\sigma}_i : \mathbb{E} \to \mathbb{E}$ la extensión de σ_i indicada en el lema 2.3, se prueba ahora que:

$$f=\bar{\sigma}_1 \ldots \bar{\sigma}_r \tag{2.5.2}$$

En efecto, teniendo en cuenta que $\mathbb{E}=\langle a\rangle \overset{\perp}{\oplus} F$, y la construcción de $\bar{\sigma}_i$, se ve que $\bar{\sigma}_i(a)=a$ y por tanto:

$$(\bar{\sigma}_1 \ldots \bar{\sigma}_r)(a)=a=f(a)$$

Por otra parte, es $(\bar{\sigma}_1 \ldots \bar{\sigma}_r)_F=(\bar{\sigma}_1)_F \ldots (\bar{\sigma}_r)_F=\sigma_1 \ldots \sigma_r=f_F$. Y se verifica (2.5.2)

2) Si f no tiene vectores fijos, tomemos $a \in \mathbb{E}-\{0\}$, y $b=f(a)$. Por ser $f \in O(\mathbb{E})$ se verifica que $\|b\|=\|a\|$, y podemos aplicar el lema 2.4 para admitir la existencia de una simetría hiperplano $\sigma : \mathbb{E} \to \mathbb{E}$, tal que $\sigma(b)=a$.

La transformación lineal euclídea $f \cdot \sigma$ verifica:

$$f \cdot \sigma(b) = f(a) = b$$

y podemos aplicar a $f \cdot \sigma$ el caso 1) para concluir por (2.5.1) que:

$$f \cdot \sigma = \sigma_1 \dots \sigma_r \quad r \leqslant n-1$$

Para ciertas simetrías hiperplano σ_i de E.

Teniendo en cuenta que $\sigma^2 = id$, se deduce:

$$f = \sigma_1 \dots \sigma_r \cdot \sigma \quad (r \leqslant n-1)$$

y esto concluye la demostración. □

Nota 2.6. Rotaciones y reflexiones

Una matriz ortogonal euclídea $A \in O(n)$ verifica: $A^t A = I$. Tomando determinantes en ambos miembros, se ve que:

$$(\det A)^2 = 1 \text{ y por tanto } \det A = \pm 1.$$

Para una transformación lineal euclídea en $\mathbb{E}$, se tiene análogamente que:

$$\det f = \pm 1$$

ya que f se representa por una matriz euclídea respecto a una base ortonormal.

El conjunto $O^+(\mathbb{E})$ de transformaciones euclídeas con determinante $+1$, constituye un subgrupo de $O(\mathbb{E})$ denominado grupo de rotaciones.

Se denomina reflexión a una transformación lineal euclídea f con determinante -1.

El conjunto $O^-(\mathbb{E})$ de reflexiones no constituye un subgrupo de $O(\mathbb{E})$, pues debido a las propiedades de la función determinante, se verifica la clásica regla de los signos para determinar el carácter del producto de dos transformaciones (es decir, $+ \cdot + = +$, $+ \cdot - = = - \cdot + = -$, etc.)

El lector que desee ampliar conocimientos sobre este tema puede consultar el apéndice II.

Obsérvese que las simetrías hiperplano son siempre reflexiones, pues su representación matricial reducida es de la forma:

$$J=\begin{pmatrix} -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad y \quad det\ J=-1.$$

Por tanto los productos de un número par de simetrías hiperplano dan lugar a las rotaciones, y en número impar, a las reflexiones.

§3. CLASIFICACION METRICA DE LAS TRANSFORMACIONES LINEALES EUCLIDEAS

El grupo ortogonal $O(\mathbb{E})$ del espacio vectorial euclídeo $\mathbb{E}$ (que consideramos fijado de una vez por todas) actúa sobre sí mismo por conjugación:

$$O(\mathbb{E})\times O(\mathbb{E}) \ni (g,\ f) \to g\cdot f\cdot g^{-1} \in O(\mathbb{E})$$

dando lugar a la siguiente relación de equivalencia:

Definición 3.1. Equivalencia métrica

Dos transformaciones lineales euclídeas f *y* f' *de* $\mathbb{E}$ *se dicen métricamente equivalentes, cuando existe* $g \in O(\mathbb{E})$ *tal que:*

$$f'=g\cdot f\cdot g^{-1}$$

En particular, la equivalencia métrica implica la equivalencia lineal. Así los invariantes como polinomio mínimo, polinomio característico, etc. de $EL(\mathbb{E})$ son invariantes para la clasificación métrica. El objetivo final, es probar que el polinomio característico constituye un invariante completo para nuestro actual problema de clasificación.

A estas alturas no puede resultar ya sorprendente el siguiente resultado:

Proposición 3.2.

Sea ε *una base ortonormal de* $\mathbb{E}$.

Dos transformaciones lineales euclídeas f *y* f′ *de* $\mathbb{E}$, *son métricamente equivalentes, si y sólo si existe* ε' *base ortonormal de* $\mathbb{E}$ *tal que:*

$$M_{\varepsilon}(f) = M_{\varepsilon'}(f')$$

Demostración

Haciendo uso de la proposición 2.1, la demostración es formalmente la misma que las que prueban análogos resultados en geometría vectorial y afín (véase 1.5, L. 4 y 1.2, L. 9). $\square$

Resolvamos primero el problema en dimensión dos:

Proposición 3.3.

Sea f *una transformación lineal euclídea en el plano vectorial euclídeo* P.

Existe entonces una base ortonormal $\varepsilon = (u, v)$ *de* P *tal que la matriz* J *de* f *respecto a* ε *es de alguno de los siguientes tipos:*

1) $J = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$;

2) $G(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ *para algún* θ *con* $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$.

Demostración

Sea $\delta = (u_1, u_2)$ una base ortonormal cualquiera de P, y

$A=\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ la matriz de $O(2)$ que represente a f respecto a δ.

La condición $A^t \ A=I$ se descompone en las condiciones:

$$a^2+b^2=1 \tag{3.3.1}$$

$$ac+bd=0 \tag{3.3.2}$$

$$c^2+d^2=1 \tag{3.3.3}$$

Por (3.3.1), existe un número θ con $-\pi\leqslant\theta\leqslant\pi$ tal que:

$$a=\cos\theta$$
$$b=\operatorname{sen}\theta$$

Utilizando ahora (3.3.2) se deduce:

$$c\ \cos\theta+d\ \operatorname{sen}\theta=0 \tag{3.3.4}$$

y de (3.3.3) y la igualdad anterior:

$$c^2=\operatorname{sen}^2\theta$$

Hay dos posibilidades:

i) Si $c=\operatorname{sen}\theta$, por (3.3.4) es $d=-\cos\theta$, por tanto:

$$A=\begin{pmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$$

En este caso el polinomio característico es: $\chi(t)=t^2-1$, y $\lambda=1$, $\lambda=-1$ son autovalores de f. Sean u y v autovectores unitarios asociados a cada autovalor. El sistema $\varepsilon=(u, v)$ es base ortonormal de P, ya que:

$$(u/v)=(f(u)/f(v))=(u/-v)=-(u/v) \quad \text{y por tanto} \quad (u/v)=0.$$

La matriz de f respecto a (u, v) es la primera matriz indicada en el enunciado.

2) Si $c=-\text{sen }\theta$, por (3.3.4) es $d=\cos\theta$, y la matriz A queda:

$$A=G(\theta)=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\text{sen }\theta\\ \text{sen }\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$$

Si $O\leqslant\theta\leqslant\pi$ basta tomar $\varepsilon=\delta$.

Si $-\pi\leqslant\theta\leqslant 0$ se toma $\varepsilon=(u,v)=(u_2,u_1)$. Se ve inmediatamente que la matriz de f respecto a ε es ahora

$$\begin{pmatrix}\cos\theta & \text{sen }\theta\\ -\text{sen }\theta & \cos\theta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos(-\theta) & -\text{sen }(-\theta)\\ \text{sen }(-\theta) & \cos(-\theta)\end{pmatrix}\quad\text{con}\quad 0\leqslant-\theta\leqslant\pi.\ \square$$

Observación 3.4.

La matriz $G(\theta)=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\text{sen }\theta\\ \text{sen }\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$ tiene por polinomio característico:

$$\chi_\theta(t)=(t-\cos\theta)^2+\text{sen}^2\,\theta,$$

con raíces: $\lambda=\cos\theta+i\ \text{sen }\theta$, $\bar{\lambda}=\cos\theta-i\ \text{sen }\theta$.

Por tanto la representación matricial reducida indicada en 3.3, puede deducirse enteramente del polinomio característico de la transformación. Esto prueba que al menos en dimensión dos, el polinomio característico es un invariante completo.

Para dimensiones superiores, demostraremos primero la existencia de una descomposición ortogonal del espacio en planos y rectas invariantes respecto a una transformación euclídea dada:

Proposición 3.5.

Dada en $\mathbb{E}$ una transformación lineal euclídea, existe una descomposición de $\mathbb{E}$ en suma directa ortogonal de planos P_j y rectas R_i invariantes e irreducibles respecto a f, de la forma:

$$E=R_1\overset{\perp}{\oplus}\cdots\overset{\perp}{\oplus}R_p\overset{\perp}{\oplus}P_1\overset{\perp}{\oplus}\cdots\overset{\perp}{\oplus}P_k\quad(p\geqslant 0,\ k\geqslant 0)\qquad(3.5.1)$$

Demostración

Se hace por inducción sobre $n = \dim \mathbb{E}$.

Para $n=1$ el resultado es evidente, y se obtiene la descomposición (3.5.1) con $p=1$, $k=0$.

Para $n=2$, el resultado se sigue de la proposición 3.3 que prueba la existencia de una base ortonormal $\varepsilon=(u, v)$ respecto a la cual la matriz de f es del tipo:

$$J=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix} \quad \text{ó} \quad G(\theta)=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\operatorname{sen}\theta\\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta\end{pmatrix} \quad 0\leqslant\theta\leqslant\pi$$

En el primer caso, o en el segundo para $\theta=0$ o $\theta=\pi$, tenemos la descomposición ortogonal de E en rectas invariantes:

$$\mathbb{E}=\langle u\rangle \overset{\perp}{\oplus} \langle v\rangle \quad (p=2,\ k=0)$$

En el segundo caso, $M_\varepsilon(f)=G(\theta)$ $0<\theta<\pi$, el polinomio característico χ_θ no tiene raíces reales, y es irreducible. La descomposición es ahora trivial:

$$\mathbb{E}=P_1 \qquad (p=0,\ k=1)$$

Supuesto cierto el teorema para dimensión menor que n $(n>2)$ probémoslo cuando $\dim E=n$.

Si f admite una recta invariante R, por la proposición 1.2 se deduce que $R^\perp$ es también invariante por f, y se tiene:

$$\mathbb{E}=R \overset{\perp}{\oplus} R^\perp$$

Aplicando la hipótesis de inducción a la restricción f de f a $R^\perp$, se deduce inmediatamente la existencia de una descomposición como la (3.5.1).

Finalmente, si f no admite rectas invariantes, por ser $\mathbb{E}$ espacio vectorial real, admite un plano invariante, P (véase ejercicio 6.16). Nuevamente por la proposición 1.2, $P^\perp$ es invariante. La descomposición:

$$\mathbb{E}=P \oplus P^\perp$$

y la hipótesis de inducción permiten ahora concluir que existe una descomposición de $\mathbb{E}$ en suma directa ortogonal de planos invariantes irreducibles de la forma:

$$\mathbb{E} = P_1 \overset{\perp}{\oplus} \dots \overset{\perp}{\oplus} P_k \ (p=0) \qquad \square$$

Para establecer el teorema final de clasificación se requiere alguna notación adicional:

Si $\theta \in \mathbb{R}$ y m es un entero positivo, escribimos

$$G(\theta,\ m) = \begin{pmatrix} G(\theta) & & \\ & \ddots & \\ & & G(\theta) \end{pmatrix} \in O(2m) \text{ donde } G(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

I_m denota la matriz identidad de orden m.

Si $m=0$ se entiende que I_m y $G(\theta,\ m)$ carecen de coeficientes y «desaparecen».

Proposición 3.6. Teorema de clasificación

a) Sea f *una transformación lineal euclídea del espacio* $\mathbb{E}$. *Existe entonces una base ortonormal* ε *de* $\mathbb{E}$ *respecto a la cual la matriz de* f *es de la forma:*

$$J = \begin{bmatrix} I_r & & & & \\ & -I_s & & & \\ & & G(\theta_1,\ m_1) & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & G(\theta_k,\ m_k) \end{bmatrix} \tag{3.6.1}$$

Donde: $r \geqslant 0$, $s \geqslant 0$, $k \geqslant 0$, $0 < \theta_i < \pi$ *para* $i=1, \dots, k$, *y* $\theta_i \neq \theta_j$ *para* $i \neq j$.

b) El polinomio característico de f *es de la forma:*

$$\chi(t) = (t-1)^r (t+1)^s [(t-\cos\theta_1)^2 + \operatorname{sen}^2\theta_1]^{m_1} \dots [(t-\cos\theta_k)^2 + \operatorname{sen}^2\theta_k]^{m_k} \tag{3.6.2}$$

y tiene todas sus raíces de módulo la unidad.

c) Dos transformaciones lineales euclídeas en $\mathbb{E}$ son métricamente equivalentes si y sólo si tienen el mismo polinomio característico.

Demostración

Por 3.5, existe una descomposición ortogonal de $\mathbb{E}$ en suma de rectas y planos y invariantes irreducibles:

$$\mathbb{E}=R_1 \overset{\perp}{\oplus} \dots \overset{\perp}{\oplus} R_p \oplus P_1 \overset{\perp}{\oplus} \dots \overset{\perp}{\oplus} P_k$$

Sea $R_i=\langle e_i \rangle$ con $\|e_i\|=1$. Por ser R_i invariante, es $f(e_i)=\lambda_i e_i$ Pero al ser f euclídea se tiene:

$$1=\|e_i\|=\|f(e_i)\|=\|\lambda_i e_i\|=|\lambda_i|$$

por tanto, $|\lambda_i|=1$.

Reordenando si fuera necesario los vectores e_i, se puede conseguir que:

$$\lambda_1=\dots=\lambda_r=1, \ \lambda_{r+1}=\dots=\lambda_{r+s}=-1 \ (s=p-r\geqslant 0)$$

Por 3.4, y teniendo en cuenta que en cada plano P_i no existen rectas invariantes, se concluye que la restricción de f a P_i, admite una representación matricial de la forma $G(\theta'_i)$ respecto a cierta base ortonormal (u_i, v_i).

Reordenando si fuera necesario los P_i, puede conseguirse que en la sucesión: $\theta'_1, \dots, \theta'_{k'}$ aparezcan agrupados los θ'_i iguales. Esto da lugar a la sucesión $\theta_1, \dots, \theta_k$ del enunciado. La base:

$$\varepsilon=(e_1, \dots, e_r, \dots, e_{r+s}, u_1, v_1, \dots, u_{k'}, v_{k'})$$

es ortonormal, y proporciona una representación matricial J para f como en (3.6.1).

Por otra parte, el polinomio característico de f, $\chi_f(t)$ puede calcularse por medio de la representación matricial J, y teniendo en cuenta que:

$$\chi_{G(\theta)}(t)=(t-\operatorname{sen}\theta)^2+\cos^2\theta; \ \text{y} \ \chi_{G(\theta,m)}=\chi^m_{G(\theta)}$$

se deduce que χ_f es el polinomio indicado en (3.6.2).

Nótese que las raíces de $\chi_f(t)$ son exactamente:

$$\begin{array}{l} 1 \text{ con multiplicidad } r \ (r \geqslant 0) \\ -1 \text{ con multiplicidad } s \ (s \geqslant 0) \\ \left.\begin{array}{r} \lambda_j = \cos\theta_j + i \ \text{sen}\,\theta_j \\ \\ \bar{\lambda}_j = \cos\theta_j - i \ \text{sen}\,\theta_j (k)\ 0 \end{array}\right\} \text{ con multiplicidad } m_j, \ (1 \leqslant j \leqslant k). \end{array}$$

(si $k=0$ se interpreta que todas las raíces son reales).

Esto indica que el polinomio característico de una transformación lineal euclídea proporciona toda la información para la determinación de una representación matricial reducida del tipo (3.6.1). En particular, si f y $f' \in 0(\mathbb{E})$ tienen el mismo polinomio característico, admiten una representación matricial común respecto a ciertas bases ortonormales, y por 3.2 se concluye que son métricamente equivalentes. □

Observación 3.7.

De la demostración anterior se deduce que las clases de equivalencia métrica de aplicaciones lineales euclídeas en un espacio vectorial euclídeo de dimensión n, vienen fielmente descritas por la familia de polinomios mónicos $\chi(t) \in \mathbb{R}[t]$ de grado n, con la propiedad de que todas sus raíces tienen módulo la unidad (se denominan polinomios mónicos ciclotómicos).

Por ejemplo, el polinomio $\chi(t)=(t-1)^r (t+1)^s$ con $r+s=n$, representa la clase de equivalencia métrica formada por las simetrías ortogonales cuya base tiene dimensión r.

Todas ellas tienen por matriz reducida:

$$J=\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & -I_s \end{pmatrix}.$$

EJERCICIOS

NOTA: En lo sucesivo, se supondrá ya conocido el Apéndice II.

12.1. En el espacio vectorial $V_3(\mathbb{R})$ se considera la forma cuadrática:

$$q = x_1^2 + 5x_2^2 + 3x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2x_2x_3$$

a) Probar que q es definida positiva.

b) En el espacio vectorial euclídeo $\mathbb{E} = (V_3(\mathbb{R}), q)$, determinar una base ortonormal obtenida a partir de la base canónica, por el procedimiento de ortogonalización de Schmitd.

12.2. Sea $\mathbb{E}$ el espacio vectorial de los polinomios de $\mathbb{R}[t]$ con grado menor o igual que tres, dotado del siguiente «producto».

$$(\varphi/\psi) = \int_0^1 \varphi(t)\,\psi(t)\,dt$$

Demostrar que $\mathbb{E}$ es espacio vectorial euclídeo, y determinar la base ortonormal obtenida a partir de $(1, t, t^2, t^3)$, por el método de ortogonalización de Schmitd.

12.3.* Sobre el espacio vectorial $\mathbb{E}$ de los polinomios de grado menor o igual que n, se considera el producto:

$$(\varphi/\psi) = \sum_{k=0}^{n} \varphi(k/n)\,\psi(k/n)$$

Demostrar que se trata de un producto escalar euclídeo.

12.4. Sea U subespacio del espacio vectorial euclídeo $\mathbb{E}$. A la proyección $\pi : \mathbb{E} \to \mathbb{E}$ con base U, y dirección $U^\perp$, se le denomina proyección ortogonal sobre U.

Demostrar que para $x \in \mathbb{E}$, $\pi(x)$ es el único vector que verifica:

$$\|\pi(x) - x\| = \inf \{\|x - y\| : y \in U\}$$

12.5. Sea $(e_1, \ldots, e_n)$ una base ortogonal del espacio vectorial euclídeo $\mathbb{E}$, y $U = \langle e_1, \ldots, e_r \rangle$. Si $\pi : \mathbb{E} \to \mathbb{E}$ es la proyección ortogonal sobre U, probar que se verifica la identidad:

$$\pi(x) = (x/e_1)\, e_1 + \ldots + (x/e_r)\, e_r$$

para todo vector x de $\mathbb{E}$.

12.6. Determinar en el espacio vectorial euclídeo del ejercicio 12.1 las ecuaciones (en las coordenadas canónicas) de la proyección ortogonal sobre el plano $x_3 = 0$.

12.7.* Determinar en cada caso una representación matricial reducida respecto a cierta base ortonormal (que se determinará) de las transformaciones lineales euclídeas en $\mathbb{E}_n$, dadas respecto a la base canónica por las matrices:

$$\frac{1}{5}\begin{pmatrix} -3 & -4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}; \quad \frac{1}{9}\begin{pmatrix} -7 & 4 & 4 \\ 4 & -1 & 8 \\ 4 & 8 & -1 \end{pmatrix}; \quad \frac{1}{7}\begin{pmatrix} -5 & 2 & 2 & 4 \\ 2 & -5 & 2 & 4 \\ 2 & 2 & -5 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 1 \end{pmatrix};$$

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

12.8. En el espacio vectorial euclídeo $\mathbb{E}$, determinar en el sistema canónico de coordenadas (x_i), la matriz de la simetría ortogonal respecto al hiperplano:

$$H : (u_1 x_1 + \ldots + u_n x_n) = 0$$

Donde (u_i) son escalares tales que $u_1^2 + \ldots + u_n^2 = 1$.

12.9.* Sea F un subespacio de dimensión $r>0$ del espacio vectorial euclídeo $\mathbb{E}$. Si $(v_1, ..., v_r)$ es un sistema de r vectores de F se define el determinante de Gram

$$\text{Gram}\ (v_1, ..., v_r) = \begin{vmatrix} (v_1/v_1), & ..., & (v_1/v_r) \\ (v_2/v_1), & ..., & (v_2/v_r) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ (v_r/v_1), & ..., & (v_r/v_r) \end{vmatrix}$$

i) Probar que Gram $(v_1, ..., v_r) = \delta_F(v_1, ..., v_r)$ donde δ_F es el volumen canónico de F, es decir:

$$\delta_F(v_1, ..., v_r) = |\omega_F(v_1, ..., v_r)|$$

siendo ω_F cualquier forma de volumen en F compatible con su estructura euclídea.

12.10.* Sea $(\mathbb{E}, \Omega)$ un espacio vectorial euclídeo orientado con dimensión $n>2$, y ω su forma de volumen canónica. Fijado el sistema $(v_1, ..., v_{n-1})$ de vectores de $\mathbb{E}$, probar que existe un único vector $v \in$ F, verificando las condiciones:

1) $v \in \langle v_1, ..., v_{n-1} \rangle^{\perp}$.

2) $\|v\| =$ Gram $(v_1, ..., v_{n-1})$.

3) $\omega(v_1, ..., v_{n-1}, v) > 0$.

Se denomina a v producto vectorial de $v_1, ..., v_{n-1}$ (en este orden) y escribimos:

$$v = v_1 \times ... \times v_{n-1}$$

12.11.* Sea $(v_1, ..., v_{n-1})$ un sistema de vectores en el espacio vectorial euclídeo orientado $\mathbb{E}$ con dimensión n, y ω su forma de volumen canónica. Probar:

i) Para todo $e \in \mathbb{E}$ se verifica la igualdad:

$$(v_1 \times ... \times v_{n-1}/e) = \omega(e, v_1, ..., v_{n-1})$$

ii) Si $\varepsilon = (e_1, ..., e_n)$ es una base ortonormal positiva de $\mathbb{E}$, y $(v_1, ..., v_{n-1})$ es un sistema de vectores de $\mathbb{E}$, se verifica la siguiente igualdad (simbólica):

$$v_1 \times ... \times v_{n-1} = \det \begin{bmatrix} e_1 & e_2 & \cdots & e_n \\ (v_1/e_1), & (v_1/e_2) & \cdots & (v_1/e_n) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ (v_{n-1}/e_1), & (v_{n-1}/e_2) & \cdots & (v_{n-1}/e_n) \end{bmatrix}$$

iii) La aplicación: $\mathbb{E}^{n-1} \in (v_1, ..., v_{n-1}) \to v_1 \times ... \times v_{n-1} \in \mathbb{E}$ es multilineal alternada.

12.12. Sea $\mathbb{E}$ un espacio vectorial euclídeo tridimensional orientado, y sean u, v, w tres vectores de $\mathbb{E}$. Probar:

1) $\|u \times v\|^2 + (u/v)^2 = \|u\|^2 \|v\|^2$.

2) $u \times (v \times w) = (u/w)v - (u/v)w$.

12.13. Sea $\mathbb{E}$ un espacio vectorial euclídeo orientado de dimensión $n > 2.$, y $f: \mathbb{E} \to \mathbb{E}$ una aplicación. Probar que f es transformación lineal euclídea, si y sólo si conserva el producto vectorial, es decir:

$$f(v_1 \times ... \times v_{n-1}) = f(v_1) \times ... \times f(v_{n-1})$$

para todo

$$(v_1, ..., v_{n-1}) \in \mathbb{E}^{n-1}.$$

12.14.* Sea $\mathbb{E}$ un plano vectorial euclídeo orientado, y ω su forma de volumen canónica, si $u, v \in \mathbb{E} - \{0\}$, denotamos por $\measuredangle(u, v)$ el ángulo no orientado definido en 1.6, L.12. Se define entonces el ángulo $\sphericalangle(u, v)$ de la siguiente forma:

$\sphericalangle(u, v) = \measuredangle(u, v)$ si $\omega(u, v) > 0$

$\sphericalangle(u, v) = 0$ si $\omega(u, v) = 0$ y $(u/v) > 0$

$\sphericalangle(u, v) = \pi$ si $\omega(u, v) = 0$ y $(u/v) < 0$

$\sphericalangle(u, v) = -\measuredangle(u, v)$ si $\omega(u, v) < 0$

a) Demostrar que el ángulo $\measuredangle(u, v)$ está en el intervalo $(-\pi, \pi]$, y que fijados $\theta \in (-\pi, \pi]$ y $u \in \mathbb{E}-\{0\}$, existe un único vector $e \in \mathbb{E}$ tal que $\|e\|=1$, y $\measuredangle(u, e)=\theta$.

b) Probar que $2\pi\mathbb{Z}=\{2\pi n\colon n \in \mathbb{Z}\}$ es subgrupo aditivo de $\mathbb{R}$, y establecer una biyección canónica que permita identificar cada $\measuredangle(u, v)$ con un elemento del grupo $(\mathbb{R}, +)/2\pi\mathbb{Z}$. Se denomina a $\measuredangle(u, v) \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ ángulo orientado entre los vectores u y v de $\mathbb{E}$.

12.15.* Sea $\mathbb{E}$ un plano vectorial orientado y

$$\measuredangle : (\mathbb{E}-\{0\}) \times (\mathbb{E}-\{0\}) \ni (u, v) \to \measuredangle(u, v) \in (\mathbb{R}, +)/2\pi\mathbb{Z}$$

la aplicación «ángulo orientado» definida en el ejercicio anterior. Si $u, v, w \in \mathbb{E}-\{0\}$ y $\lambda \in \mathbb{R}-\{0\}$ probar:

$$\measuredangle(u, \lambda v)=\measuredangle(u, v) \text{ si } \lambda>0$$

$$\measuredangle(u, \lambda v)=\begin{cases} \measuredangle(u, v)-\pi & \text{si } \measuredangle(u, v)>0 \\ \pi-\measuredangle(u, v) & \text{si } \measuredangle(u, v)<0 \end{cases} \quad \text{si} \quad \lambda<0$$

ii) $\measuredangle(u, v)+\measuredangle(v, w)=\measuredangle(u, w)$.

12.16.* Sea $\mathbb{E}$ un plano vectorial euclídeo orientado, $f\colon \mathbb{E} \to \mathbb{E}$ una transformación lineal euclídea, y u, v vectores no nulos de $\mathbb{E}$. Probar:

a) $\measuredangle(f(u), f(v))=\measuredangle(u, v)$ si f es rotación.
b) $\measuredangle(f(u), f(v))=-\measuredangle(u, v)$ si f es reflexión.

12.17.* Sea $\mathbb{E}$ un plano vectorial euclídeo orientado, y $\theta \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$. Se define la aplicación $g_\theta\colon \mathbb{E} \to \mathbb{E}$ de la siguiente forma:

$$\|g_\theta(x)\|=\|x\| \text{ y } \measuredangle(x, g_\theta(x))=\theta \text{ para todo } x \in \mathbb{E}-\{0\}.$$

$$g_\theta(0)=0.$$

Demostrar que f es transformación lineal euclídea, que tiene por matriz:

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

respecto a cualquier base ortonormal positivamente orientada. Se denomina g_θ giro de ángulo θ.

12.18.* Probar que las rotaciones de un plano vectorial euclídeo orientado son giros, y la aplicación:

$$0^+(\mathbb{E}) \ni g_\theta \to \theta \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$$

es isomorfismo de grupos.

Proponer otra definición más geométrica de ángulo orientado, utilizando este isomorfismo.

12.19. Sea $f \neq \mathrm{id}$, una transformación lineal euclídea del plano vectorial euclídeo $\mathbb{E}$. Probar la equivalencia entre las afirmaciones:

i) f tiene una recta de puntos fijos.
ii) f es reflexión.
iii) f es simetría ortogonal con base en una recta.

12.20. Respecto a una base ortonormal positiva $\varepsilon = (e_1, e_2)$ del plano vectorial euclídeo orientado $\mathbb{E}$, se los endomorfismos lineales con matrices:

$$\frac{1}{25}\begin{pmatrix} -7 & 24 \\ 24 & 7 \end{pmatrix}; \ \frac{1}{25}\begin{pmatrix} 7 & -24 \\ 24 & 7 \end{pmatrix}$$

Demostrar que son transformaciones lineales euclídeas, determinando en cada caso los elementos geométricos que definen sus actuaciones.

12.21. Sean σ_1, σ_2 simetrías ortogonales en el plano vectorial euclídeo orientado $\mathbb{E}$, con bases respectivas, las rectas R_1, y R_2. Probar que $\sigma_2 \cdot \sigma_1$ es un giro de ángulo $\theta = 2 \sphericalangle (u_1, u_2)$, siendo $\langle u_1 \rangle = R_1$, $\langle u_2 \rangle = R_2$.

12.22.* Una recta R de un espacio vectorial euclídeo $\mathbb{E}$ queda orientada, en cuanto se ha elegido un vector unitario u tal que $\langle u \rangle = R$. Demostrar que una orientación en $\mathbb{E}$, induce una orientación en $R^\perp$ por la condición: $(e_1, \ldots, e_{n-1})$ es base positiva de $R^\perp$ si y sólo si $(e_1, \ldots, e_{n-1}, u)$ es base positiva de $\mathbb{E}$.

12.23.* Sea $\mathbb{E}$ un espacio vectorial euclídeo tridimensional, y R una recta orientada de $\mathbb{E}$. Sea $P=R^{\perp}$ el plano con su orientación canónica dada en el ejercicio anterior. Si $\theta \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ es un ángulo, se define la aplicación

$$g=g(R,\ \theta):\mathbb{E}\to\mathbb{E}$$

por la siguiente condición:

Si $v\in\mathbb{E}$, $v=r+p$ con $r\in R$, $p\in P$ es $g(v)=r+g_\theta(p)$, siendo:

$$g_\theta: P\to P$$

el giro en el plano P de ángulo orientado θ.

Demostrar que g es transformación lineal euclídea, y tiene por matriz respecto a cierta base ortonormal:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ 0 & \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

Se denomina a $g(R,\ \theta)$ giro de eje orientado R y ángulo θ.

12.24.* Probar que en un espacio vectorial euclídeo tridimensional (orientado), toda rotación es un giro.

12.25. Demostrar que en un espacio vectorial euclídeo tridimensional toda reflexión es, o bien una simetría hiperplano, o bien el producto permutable de una simetría hiperplano, por un giro de eje ortogonal al hiperplano base.

12.26.* Determinar los elementos geométricos (ángulo de giro plano de simetría, ..., etc.) que definen la actuación de las transformaciones lineales euclídeas en $\mathbb{E}$ (con la orientación canónica) que tienen por matrices:

$$\frac{1}{9}\begin{pmatrix} 4 & 4 & -7 \\ -8 & 1 & -4 \\ -1 & 8 & 4 \end{pmatrix}, \qquad \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ -1 & 2 & 2 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix};$$

$$\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \\ -2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Calcúlese en cada caso una representación matricial reducida respecto a alguna base ortonormal (positiva).

12.27. Sea f una transformación lineal euclídea en un espacio vectorial euclídeo tridimensional $\mathbb{E}$, y sea

$$F=\{v\in\mathbb{E}: f(v)=v\}$$

el subespacio de vectores fijos de f.

1) Probar que si F es un plano, entonces f es simetría hiperplano.
2) Demostrar que si F es una recta, entonces f es un giro.

12.28. Probar que en un espacio vectorial euclídeo tridimensional, todo giro se descompone en producto de dos simetrías hiperplano.

12.29. Demostrar el siguiente teorema «mejorado» de Cartan-Dieudonné en geometría vectorial euclídea:

«Una transformación lineal euclídea de un espacio vectorial euclídeo $\mathbb{E}$, puede descomponerse en producto de $\dim\mathbb{E}-\dim F$ simetrías hiperplanos, siendo F el subespacio de vectores fijos. Por otra parte, no es posible descomponerla en producto de menos simetrías hiperplano».

LECCION 13

FORMAS CUADRATICAS EN UN ESPACIO VECTORIAL EUCLIDEO

Se probará que para toda forma cuadrática en un espacio vectorial euclídeo existe una base ortonormal que la diagonaliza. Esto permitirá en particular resolver el problema de clasificación euclídea de las formas cuadráticas.

En toda esta lección, se supone fijado un espacio vectorial euclídeo $\mathbb{E}$. La forma cuadrática que define el producto escalar de $\mathbb{E}$, es $\| \ \|^2$, y no será denotada por ningún otro símbolo (la letra «q» se utilizará ahora para referirnos a una forma cuadrática general).

§1. FORMAS CUADRATICAS Y APLICACIONES SIMETRICAS

A cada forma cuadrática q de $\mathbb{E}$ se le puede asociar canónicamente un endomorfismo f de $\mathbb{E}$, que como veremos contiene toda la información geométrica de la forma cuadrática de partida.

Estos endomorfismos f, pueden caracterizarse por una cierta condición de simetría respecto al producto escalar. Su estudio desde el punto de vista euclídeo, equivale al de las formas cuadráticas de las que provienen.

Establezcamos algunos preliminares.

La aplicación lineal $\mathbb{E} \ni v \to (v/.) \in \mathbb{E}^*$ es un isomorfismo, pues el producto escalar es no degenerado. La existencia de aplicación lineal inversa, puede expresarse así:

Lema 1.1.

Si α es una forma lineal de $\mathbb{E}$, existe un único vector $\alpha^{\#} \in \mathbb{E}$ tal que:

$$(\alpha/\mathrm{v}) = (\alpha^{\#}/\mathrm{v}) \quad \textit{para todo} \quad \mathrm{v} \in \mathbb{E} \tag{1.1.1}$$

donde $(\alpha/\mathrm{v}) \in \mathbb{R}$, *es el valor de la forma lineal α sobre el vector* v *(véase notación 1.5, L. 10).*

La aplicación: $\# : \mathbb{E}^* \ni \alpha \rightarrow \alpha^{\#} \in \mathbb{E}$ *es isomorfismo lineal.*

Notación 1.2.

Dada Q forma bilineal simétrica en el espacio vectorial euclídeo $\mathbb{E}$, denotamos por el mismo nombre a la aplicación lineal:

$$Q = Q_d = Q_i : \mathbb{E} \ni u \rightarrow Q(u, \cdot) \in \mathbb{E}^*$$

que viene también definida por las identidades:

$$Q(u, v) = (Q(u)/v) = (u|Q(v)) \tag{1.2.1}$$

Escribimos $Q^{\#}$ para denotar, el (único) endomorfismo lineal que hace conmutativo el diagrama:

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{E} \arrow[rr, dashed, "Q^{\#}"] & & \mathbb{E} \arrow[dl, "\#"] \\
& \mathbb{E}^* \arrow[ul, "Q"] &
\end{tikzcd}$$

es decir: $Q^{\#}(u) = Q(u)^{\#} \in \mathbb{E}$ para todo $u \in \mathbb{E}$.

Utilizando (1.1.1) y (1.2.1) se verifican las identidades:

$$Q(u, v) = (Q(u)/v) = (Q^{\#}(u)/v) \quad \text{para todo} \quad u, v \in \mathbb{E} \tag{1.2.2}$$

Lema 1.3.

El endomorfismo $Q^{\#}: \mathbb{E} \to \mathbb{E}$ *definido en 1.2 verifica:*

$$(Q^{\#}(u)|v) = (u/Q^{\#}(v)) \quad \textit{para todo} \quad u, v \in \mathbb{E}$$

Demostración

En efecto, utilizando la simetria de la forma bilineal Q, y las identidades (1.2.2) se tiene:

$$(Q^{\#}(u)/v) = Q(u, v) = Q(v, u) = (Q^{\#}(v)/u) = (u/Q^{\#}(v)). \quad \square$$

Definición 1.4. Endomorfismos simétricos

Un endomorfismo f *de* $\mathbb{E}$ *se llama simétrico, si verifica la condición:*

$$(f(u)/v) = (u/f(v)) \quad \textit{para todo} \quad u, v \in \mathbb{E} \tag{1.4.1}$$

Denotamos por $S(\mathbb{E})$ *al conjunto de todos estos endomorfismos.*

Recordamos que el espacio vectorial $\mathcal{Q}(\mathbb{E})$ de las formas bilineales simétricas se identifica canónicamente con el de formas cuadráticas por el isomorfismo lineal que hace corresponder a cada forma cuadrática q su forma polar Q (consúltese la lección 10). Veamos que este espacio puede identificarse también con $S(\mathbb{E})$.

Proposición 1.5.

La aplicación: $\# : \mathcal{Q}(\mathbb{E}) \ni Q \to Q^{\#} \in EL(\mathbb{E})$ *es lineal e inyectiva, y su imagen coincide con el conjunto* $S(\mathbb{E})$ *de endomorfismos simétricos.*

En particular, $S(\mathbb{E})$ *es un subespacio vectorial de* $EL(\mathbb{E})$, *y*

$$\# : \mathcal{Q}(\mathbb{E}) \to S(\mathbb{E})$$

es un isomorfismo lineal.

Demostración:

La comprobación de la linealidad de la aplicación $\# : \mathcal{Q}(\mathbb{E}) \to EL(\mathbb{E})$ es trivial.

Por otra parte, si $Q^{\#}=0$ para $Q \in \mathcal{Q}(\mathbb{E})$, por la igualdad (1.2.2) es:

$$Q(u, v) = (Q^{\#}(u)/v) = (0/v) = 0 \quad \text{para todo} \quad u, v \in \mathbb{E} \text{ y } Q = 0.$$

El lema 1.3 prueba que la imagen de $\#$ está contenida en $S(\mathbb{E})$. Recíprocamente, si f es un endomorfismo simétrico, la forma bilineal:

$$Q : \mathbb{E} \times \mathbb{E} \ni (u, v) \to (f(u)/v) \in \mathbb{R}$$

es simétrica y verifica $Q^{\#}=f$. □

Analíticamente el isomorfismo lineal $\# : \mathcal{Q}(\mathbb{E}) \to S(\mathbb{E})$ se ve de la siguiente forma:

Proposición 1.6.

Sea $\varepsilon = (e_1, \ldots, e_n)$ *una base ortonormal de* $\mathbb{E}$, *y* f *un endomorfismo de* $\mathbb{E}$ *con* $M_\varepsilon(f) = (a_{ij}) = A$. *Entonces:*

i) f *es endomorfismo simétrico si y sólo si* A *es matriz simétrica.*

ii) Si f *es endomorfismo simétrico, su forma bilineal simétrica inducida:*

$$Q : \mathbb{E} \times \mathbb{E} \ni (u, v) \to (f(u)/v) \in \mathbb{R}$$

tiene a la matriz A *por representación matricial respecto a* ε, *y se tiene la conmutatividad del diagrama:*

$$\begin{tikzcd} \mathcal{Q}(\mathbb{E}) \arrow[rr, dashed, "\#"] \arrow[dr, "M_\varepsilon"'] & & S(\mathbb{E}) \\ & S(n) \arrow[ur, "M_\varepsilon"'] & \end{tikzcd}$$

Donde S(n) *denota el espacio vectorial de las matrices simétricas reales de orden* n.

Demostración

i) Por las fórmulas de Parseval (1.9, L. 12) se deduce que:

$$f(e_i) = \sum_{j=1}^{n} (f(e_i)/e_j)\, e_j$$

y comparando con $f(e_i) = \sum_{j=1}^{n} a_{ji} e_j$ se obtiene:

$$a_{ij} = (f(e_j)/e_i) \quad \text{para} \quad i, j = 1, \dots, n \tag{1.6.2}$$

y si f es simétrico entonces:

$$a_{ij} = (f(e_j)/e_i) = (e_j/f(e_i)) = a_{ji},$$

y la matriz A es simétrica.

Recíprocamente, si A es matriz simétrica, por (1.6.2) es:

$$a_{ij} = (f(e_j)/e_i) = a_{ji} = (e_j/f(e_i)) \quad \text{para} \quad i, j = 1, \dots, n.$$

Por tanto, si $u = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i$, $v = \sum_{j=1}^{n} \mu_j e_j$, es:

$$(f(u)/v) = \sum_{i,j=1}^{n} \lambda_i \mu_j (f(e_i)|e_j) = \sum_{i,j=1}^{n} \lambda_i \mu_j (e_i/f(e_j)) = (u/f(v)).$$

ii) Si f es endomorfismo simétrico y Q la forma bilineal inducida, su matriz respecto a ε, $(Q(e_i, e_j))$ es:

$$Q(e_i, e_j) = (f(e_i)/e_j) = (f(e_j)/e_i) = a_{ij}$$

Ejemplo 1.7.

Una matriz simétrica $A \in S(n)$ se identifica con el endomorfismo $A : \mathbb{E}_n \to \mathbb{E}_n$ que tiene por matriz respecto a la base canónica $(I_1, \dots,$

I_n), justamente A. Como la base canónica es ortonormal en $\mathbb{E}_n$, por 1.6 se concluye que $S(n)$ puede identificarse por vía natural con el espacio vectorial de los endomorfismos simétricos de $\mathbb{E}_n$.

§2. DIAGONALIZACION

Probaremos que para todo endomorfismo simétrico existe una base ortonormal formada por autovectores. Esta base diagonalizada en particular, la forma cuadrática inducida por el endomorfismo.

Lema 2.1.

Todo endomorfismo simétrico f del espacio vectorial euclídeo $\mathbb{E}$ *admite al menos un autovalor.*

Demostración

Por la proposición 1.6, el endomorfismo simétrico f viene representado respecto a una base ortonormal ε por una matriz simétrica A, y así $\chi_f(t) = \chi_A(t)$.

Es suficiente, por tanto, con probar que el polinomio característico de una matriz simétrica real A tiene alguna raíz real. De hecho, todas sus raíces son reales como veremos.

La matriz simétrica A puede considerarse como un endomorfismo:

$$A : V_n(\mathbb{C}) \ni \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} \to A \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} \in V_n(\mathbb{C})$$

Sea $\alpha + i\beta \in \mathbb{C}$, una raíz cualquiera de $\chi_A(t)$. Probaremos que β es nulo. En efecto: $\alpha + i\beta$ es autovalor de A, y existe $w \in V_n(\mathbb{C})$ tal que:

$$Aw = (\alpha + i\beta)\, w \qquad (2.1.1)$$

si $w_j = u_i + iv_i \in \mathbb{C}$, podemos escribir

$$w = u + iv \text{ con } u = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} ; \; v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$

de (2.1.1) se deduce: $A(u+iv) = (\alpha + i\beta)(u+iv)$, que puede escribirse en la forma:

$$Au + iAv = (\alpha u - \beta v) + i(\beta u + \alpha v)$$

identificando las partes real e imaginaria de ambos miembros, queda:

$$\begin{aligned} Au &= \alpha u - \beta v \\ Av &= \beta u + \alpha v \end{aligned} \tag{2.1.2}$$

Como la matriz A define en $\mathbb{E}_n$ un endomorfismo simétrico (ver 1.7) se verifica:

$$(Au/v) = (u/Av) \tag{2.1.3}$$

Utilizando (2.1.2), se tiene:

$$(Au/v) = \alpha(u/v) - \beta(v/v)$$
$$(u/Av) = \beta(u/u) + \alpha(u/v)$$

Restando miembro a miembro, y teniendo en cuenta (2.1.3) queda:

$$\beta((u/u) + (v/v)) = 0$$

como $u+iv$ es autovector —necesariamente no nulo— se tiene $(u/u) + (v/v) \neq 0$, y $\beta = 0$. □

Lema 2.2.

Si f es un endomorfismo simétrico de $\mathbb{E}$, y U un subespacio invariante, entonces $U^\perp$ es también invariante.

Definición 3.1. Equivalencia métrica de formas cuadráticas

Dos formas cuadráticas q *y* q′ *de* $\mathbb{E}$ *se dicen métricamente equivalentes, cuando existe* $g \in O(\mathbb{E})$ *tal que* $q \cdot g = q'$, *es decir:*

$$q(g(v)) = q'(v) \text{ para y todo } v \in \mathbb{F}$$

Por otra parte, existe una forma natural de definir una relación de equivalencia métrica entre los endomorfismos simétricos:

Proposición 3.2. Equivalencia métrica de endomorfismos simétricos

Si f *es un endomorfismo simétrico de* $\mathbb{E}$, *y* $g \in O(\mathbb{E})$, *entonces* $f' = g^{-1} \cdot f \cdot g$ *es un endomorfismo simétrico. (Se dice entonces que* f′ *es métricamente equivalente a* f).

Demostración

Nótese que para todo u, $v \in \mathbb{E}$ se tiene, por ser f simétrica y g transformación lineal euclídea:

$$(f'(u)/v) = ((g^{-1} \cdot f \cdot g)(u)/v) = (f \cdot g(u)/g(v)) =$$
$$= (g(u)/f \cdot g(v)) = (u/g^{-1} \cdot f \cdot g(v)) = (u/f'(v)). \ \square$$

Observación 3.3.

La relación de equivalencia métrica entre endomorfismos simétricos, es la inducida por la actuación (por la derecha) del grupo $O(\mathbb{E})$ sobre $S(\mathbb{E})$ definida por:

$$S(\mathbb{E}) \times O(\mathbb{E}) \ni (f, g) \to g^{-1} \cdot f \cdot g \in S(\mathbb{E})$$

Si q es una forma cuadrática en $\mathbb{E}$, denotamos por $q^{\#}: \mathbb{E} \to \mathbb{E}$ el endomorfismo simétrico inducido por la forma polar Q, y viene determinado univocamente por la condición:

$$q(v) = (q^{\#}(v)/v) \text{ para todo } v \in \mathbb{E} \qquad (3.3.1)$$

Proposición 3.4.

Si q *es una forma cuadrática en* $\mathbb{E}$, *y* g *es una transformación lineal euclídea, entonces:*

$$(q \cdot g)^{\#} = g^{-1} \cdot q^{\#} \cdot g \tag{3.4.1}$$

En particular, dos formas cuadráticas q y q' de E son métricamente equivalentes si y sólo si lo son sus correspondientes endomorfismos simétricos asociados, $q^{\#}$ y $q'^{\#}$

Demostración

Para todo $v \in \mathbb{E}$ se verifica:

$$q(g(v)) = (q^{\#}(g(v))/g(v)) = (g^{-1} \cdot q^{\#} \cdot g(v)/v)$$

Por 3.2, $g^{-1} \cdot q^{\#} \cdot g$ es endomorfismo simétrico. Comparando la igualdad anterior con (3.3.1) se concluye (3.4.1). □

Nos centraremos pues, en el problema de clasificación métrica de endomorfismos simétricos:

Lema 3.5.

Dos endomorfismos simétricos f *y* f′ *de* $\mathbb{E}$, *son métricamente equivalentes, si y sólo si existen bases ortonormales* ε *y* ε' *de* $\mathbb{E}$, *tales que:*

$$M_{\varepsilon}(f) = M_{\varepsilon'}(f')$$

Demostración

Supóngase f métricamente equivalente a f', y sea $g \in O(\mathbb{E})$ tal que $f' = g^{-1} \cdot f \cdot g$, es decir:

$$g \cdot f' = f \cdot g \tag{3.5.1}$$

fijada ε' base ortonormal de $\mathbb{E}$, la base $\varepsilon = g(\varepsilon')$ es ortonormal, por ser $g \in O(\mathbb{E})$. Si $J = M_{\varepsilon'}(f')$, se tiene:

$$f'(\varepsilon') = \varepsilon' J \tag{3.5.2}$$

Usando (3.5.1) y (3.5.2) se deduce:

$$f(\varepsilon)=f\cdot g(\varepsilon')=g\cdot f'(\varepsilon')=g(\varepsilon' J)=g(\varepsilon')J=\varepsilon J, \text{ y } M_\varepsilon(f)=M_{\varepsilon'}(f')=J.$$

Recíprocamente, si $M_\varepsilon(f)=M_{\varepsilon'}(f')=J$ para ciertas bases ortonormales ε y ε', el isomorfo lineal $g:\mathbb{E}\to\mathbb{E}$, que transforma ε' en ε es (por 2.1, L.12) transformación lineal euclídea. Se prueba entonces que f' y $g^{-1}\cdot f\cdot g$ toman los mismos valores sobre la base ε', y por tanto, coinciden:

$$(g^{-1}\cdot f\cdot g)(\varepsilon')=g^{-1}\cdot f(\varepsilon)=g^{-1}(\varepsilon J)=g^{-1}(\varepsilon)J=\varepsilon' J=f'(\varepsilon'). \quad \square$$

Se tiene entonces el siguiente teorema de clasificación:

Proposición 3.6.

Dos endomorfismos simétricos de un espacio vectorial euclídeo son métricamente equivalentes, si y sólo si tienen el mismo polinomio característico.

Demostración

Si f es un endomorfismo simétrico de $\mathbb{E}$, (por 2.3) existe una base ortonormal $\varepsilon=(e_1, \ldots, e_n)$ formada por autovectores de f, que puede reordenarse de forma que la matriz que representa a f respecto a ε sea de la forma:

$$J=\begin{pmatrix} \lambda_1 I_{r_1} & & \\ & \cdot & \\ & & \lambda_s I_{r_s} \end{pmatrix}$$

con $\lambda_i\neq\lambda_j$ si $i\neq j$, y I_r matriz identidad de orden r.

El polinomio característico de f es entonces:

$$\chi(t)=(t-\lambda_1)^{r_1}\ldots(t-\lambda_s)^{r_s}$$

y determina completamente J.

Por tanto, si f' es endomorfismo simétrico con polinomio característico $\chi(t)$, admite respecto a una base ortonormal ε' convenientemente elegida la representación matricial J. Aplicando 3.5, se concluye que f y f' son métricamente equivalentes.

El recíproco es trivial, ya que el polinomio característico es invariante lineal, y la equivalencia métrica implica la lineal. □

La «traducción» del teorema de clasificación 3.6 al lenguaje de las formas cuadráticas viene expresada en los siguientes corolarios.

Corolario 3.7.

Si q *es una forma cuadrática en el espacio vectorial euclídeo* $\mathbb{E}$, *el polinomio* $\chi_q(t)=\chi_A(t)$ *no depende de la representación matricial* A *de* q *respecto a una base ortonormal, y tiene todas sus raíces reales. Por otra parte, la aplicación:*

$$\chi : \mathscr{L}(\mathbb{E}) \ni q \to \chi_q(t) \in \mathbb{K}[t]$$

es un invariante completo para la clasificación métrica de las formas cuadráticas, es decir, si q, $q' \in \mathscr{Q}(\mathbb{E})$.

$$\chi_q(t)=\chi_{q'}(t) \Leftrightarrow q \text{ métricamente equivalente a } q'$$

Demostración

El polinomio $\chi_q(t)$ coincide con el polinomio característico $\chi_{q^\#}(t)$ del endomorfismo simétrico asociado a q, ya que por 1.6 es $M_\varepsilon(q)=$ $=M_\varepsilon(q^\#)$ para cualquier base ortonormal ε de $\mathbb{E}$. Por el lema 2.1 todas las raíces de $\chi_q(t)$ son reales, y por 3.4 $\chi : \mathscr{Q}(\mathbb{E}) \to \mathbb{R}[t]$ es un invariante de la clasificación métrica de las formas cuadráticas.

La última equivalencia es consecuencia de 3.6 y 3.4. □

EJERCICIOS

13.1. Demostrar que $V_3(\mathbb{R})$ con la forma cuadrática:

$$q=3x_1^2+5x_2^2+3x_3^2-6x_1x_2-2x_1x_3$$

es un espacio vectorial euclídeo. Determinar el vector $\alpha^{\#}$ asociado a la forma lineal general:

$$\alpha=\lambda_1\mathrm{x}_1+\lambda_2\mathrm{x}_2+\lambda_3\mathrm{x}_3$$

13.2.* Sea f un endomorfismo simétrico de un espacio vectorial euclídeo $\mathbb{E}$.

a) Demostrar que si λ, μ son dos autovalores distintos de f, sus correspondientes autoespacios son ortogonales.

b) Probar que $\mathbb{E}=\ker(f-\mathrm{id})\oplus\operatorname{im}(f-\mathrm{id})$.

13.3. En el espacio vectorial euclídeo $\mathbb{E}_3$ ae considera el endomorfismo que tiene por matriz:

$$A=\begin{pmatrix} 5 & -2 & -2 \\ -2 & 2 & -4 \\ -2 & -4 & -2 \end{pmatrix}$$

Demostrar que f es un endomorfismo simétrico y determinar una base ortonormal de autovectores para f.

13.4. En $V_3(\mathbb{R})$ se considera la forma cuadrática:

$$q=2x_1^2+5x_2^2+2x_3^2-6x_1x_2-2x_1x_3+2x_2x_3$$

y el endomorfismo f que tiene por matriz respecto a las coordenadas canónicas (x_i):

$$A=\begin{pmatrix} 3 & -4 & -2 \\ 2 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

a) Probar que $\mathbb{E}=(V_3(\mathbb{R}),\ q)$ es un espacio vectorial euclídeo.

b) ¿Es f un endomorfismo simétrico de $\mathbb{E}$?

13.5.* Un endomorfismo f de un espacio vectorial euclídeo $\mathbb{E}$ se llama normal, si el subespacio ortogonal a cada subespacio invariante, es también invariante.

Demostrar que un endomorfismo normal es simétrico si y sólo si todo plano invariante contiene una recta invariante.

13.6. Determinar la expresión analítica reducida respecto a una base ortonormal de las siguientes formas cuadráticas en $\mathbb{E}_3$, dadas respecto a las *coordenadas canónicas*:

$$q_1=5x_1^2+2x_2^2+2x_3^2-4x_1x_2-4x_1x_3-8x_2x_3$$
$$q_2=2x_1^2+2x_2^2+5x_3^2+8x_1x_2+4x_1x_3-4x_2x_3$$
$$q_3=7x_1^2+x_2^2+x_3^2-8x_1x_2-8x_1x_3-16x_2x_3$$

Indicar cuales de ellas son métricamente equivalentes, y determinar en su caso el cambio de coordenadas ortonormales que permiten pasar de una a otra.

¿Cuáles son linealmente equivalentes?

13.7.* En el espacio vectorial euclídeo $\mathbb{E}_n$ se dan las siguientes formas cuadráticas (referidas a las coordenadas canónicas (x_i)):

$$q_1=2\sum_{i<j} x_i x_j;\quad q_2=\sum_{i=1}^{n} x_i^2+\sum_{i<j} x_i x_j,\quad q_3=\sum_{i=1}^{n} x_i x_{i+1}$$

Determinar para cada una de ellas una base ortonormal respecto a la cual la forma cuadrática se escriba en forma diagonal.

13.8. Determinar en $\mathbb{E}_4$ una base ortonormal respecto a la cual la siguiente forma cuadrática se represente por una matriz diagonal:

$$q=-x_1^2-x_2^2-x_3^2-x_4^2-10x_1x_2+2x_1x_3-2x_1x_4+2x_2x_3-$$
$$-2x_2x_4+10x_3x_4$$

13.9.* Considérese la forma cuadrática general dada en $V_n(\mathbb{R})$ en las coordenadas canonicas (x_i) por:

$$(x_1, \ldots, x_n)\ A \begin{pmatrix} x_1 \\ \\ x_n \end{pmatrix} = q$$

donde A es una matriz simétrica real de orden n.

Demostrar que el número de raíces positivas (respectivamente, negativas) del polinomio característico $\chi_A(t)$, es justamente el índice de positividad (respectivamente negatividad) de q.

13.10.* Sea $\varphi(t) = a_n t^n + \ldots + a_1 t + a_0$ un polinomio de $\mathbb{R}[t]$ $a_n \neq 0$, $n \geqslant 1$.

Llamamos $v(\varphi)$ al número de variaciones de signo que existe entre coeficientes consecutivos no nulos de la sucesión $(a_n, \ldots, a_1, a_0)$ de los coeficientes de φ. (Por ejemplo, si $\varphi(t) = -t^3 + t + 2$, $v(\varphi)$ es el número de variaciones de signo en la sucesión $-\ +\ +$; es decir, $v(\varphi) = 1$.)

Demostrar que si $r^+(\varphi)$ representa el número de raíces positivas de φ, se tiene la desigualdad:

$$r^+(\varphi) < v(\varphi)$$

13.11.* Si $\varphi(t)$ es un polinomio de $\mathbb{R}[t]$, denotamos por $\overline{\varphi}(t) = \varphi(-t)$, a su polinomio conjugado.

Utilizando la notación del ejercicio anterior, demostrar que:

$$v(\varphi) = r^+(\varphi), \quad v(\overline{\varphi}) = r^-(\varphi)$$

donde $r^-(\varphi)$ representa el número de raíces negativas de φ.

13.12.* Sea q una forma cuadrática en $V_n(\mathbb{R})$ con matriz (simétrica) respecto a la base canonica:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Utilizando las notaciones del ejercicio anterior, demostrar que el índice de positividad de q, coincide con $v(\chi_A)$, y el de negatividad con $v(\overline{\chi}_A)$, siendo χ_A el polinomio característico de la matriz A.

13.13.* Utilizando el ejercicio anterior, calcular los índices de inercia y el rango de las siguientes formas cuadráticas en $V_n(\mathbb{R})$:

a) $x_1^2-8x_3^2-4x_1x_2+4x_1x_3+6x_2x_3$ $(n=3)$.

b) $-3x_2^2+x_3^2+2x_1x_2-2x_1x_3+2x_2x_3$ $(n=3)$.

c) $x_1^2+5x_2^2-x_3^2+x_4^2-6x_1x_2+2x_1x_3+2x_1x_4-4x_2x_4$ $(n=4)$.

d) $2x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2-2x_1x_2+2x_1x_3-2x_1x_4-2x_2x_3$ $(n=4)$.

LECCION 14

GEOMETRIA AFIN EUCLIDEA

Un espacio afín E cuyo espacio vectorial asociado $\vec{E}$ sea euclídeo, se denomina espacio afín euclídeo.

La norma de $\vec{E}$, induce una distancia en el espacio afín, que denominamos distancia euclídea. La estructura métrica de E inducida por esta distancia determina completamente la estructura afín del espacio y el grupo de movimientos, que es el grupo natural de transformaciones, y subgrupo del grupo afín.

Determinaremos un sistema generador simple para el grupo de movimientos, y resolveremos el problema de su clasificación.

§1. DISTANCIA EUCLIDEA

Después de exponer las nociones básicas, pasamos a estudiar las propiedades generales y específicas de la distancia euclídea. Terminamos, estableciendo las bases de la geometría analítica afín euclídea.

Definición 1.1. Espacio afín euclídeo

Un espacio afín euclídeo, es un espacio afín E, *que tiene por espacio vectorial asociado un espacio vectorial euclídeo* $\vec{E}$.

Se llama distancia entre los puntos a *y* b *del espacio afín euclídeo* E *al número:*

$$d(a, b) = \|\overrightarrow{ab}\|$$

y a la aplicación $d : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$ *se le denomina distancia euclídea.*

La siguiente proposición elemental muestra que *(E, d)* es un espacio métrico, y prueba el clásico teorema de Pitágoras:

Proposición 1.2.

La distancia euclídea definida en 1.1, verifica para todo a, b, $c \in E$ *las siguientes propiedades*

i) $d(a, b) \geqslant 0$, y $d(a, b) = 0 \Leftrightarrow a = b$

ii) $d(a, b) = d(b, a)$

iii) $d(a, b) + d(b, c) \geqslant d(a, c)$ (Propiedad triangular)

iv) Si $\overrightarrow{ab} \perp \overrightarrow{bc}$ *entonces* $d(a, c)^2 = d(a, b)^2 + d(b, c)^2$ (*Teorema de Pitágoras*)

Demostración

Las propiedades i), ii) y iii) son inmediatas a partir de las propiedades de la norma establecidas en 1.5, L. 12. Probemos iv): Si $(\overrightarrow{ab} \mid \overrightarrow{bc}) = 0$, entonces:

$$\begin{aligned} d(a, c)^2 &= \|\overrightarrow{ac}\|^2 = (\overrightarrow{ab} + \overrightarrow{bc} / \overrightarrow{ab} + \overrightarrow{bc}) = \|ab\|^2 + \|bc\|^2 + 2 \quad (\overrightarrow{ab} / \overrightarrow{bc}) \\ &= d(a, b)^2 + d(b, c)^2 \quad \square \end{aligned}$$

Un espacio métrico es una pareja (E, d), donde E es un conjunto, y $d : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$ es una aplicación que verifica las propiedades i), ii) y iii) anteriores, y que denominamos distancia.

Fijados dos subconjuntos A y B no vacíos del espacio métrico (E, d), se define la distancia entre ambos por:

$$d(A, B) = \inf \{d(a, b) : a \in A, b \in B\}$$

En general, no puede asegurarse que existan puntos $a \in A$, $b \in B$ que proporcionen la mínima distancia, es decir, $d(a, b) = d(A, B)$ a no ser que se impongan a los conjuntos A y B ciertas restricciones topológicas (como la compacidad) o conjuntistas (por ejemplo, si existe $c \in A \cap B \neq \phi$, $d(A, B) = d(c, c) = 0$).

En el caso afín euclídeo se tiene el siguiente resultado:

Proposición 1.3. Distancia entre subespacios

Sea E *espacio afín euclídeo de dimensión finita* n, *y* A *y* B *dos subespacios no vacíos de* E, *tales que* $A \cap B = \phi$.

Existen entonces puntos $a \in A$, $b \in B$ *tales que el vector* $\vec{ab}$ *es ortogonal a* A *y a* B. *Por otra parte, estos puntos verifican:*

$$d(a, b) = d(A, B) \tag{1.3.1}$$

Demostración

Por la fórmula de dimensiones para el caso de intersección vacía (2.10, L. 7) se tiene:

$$\dim (A+B) = \dim (\vec{A}+\vec{B}) + 1 \leqslant n = \dim E$$

y por tanto $\vec{A}+\vec{B} \subsetneq \vec{E}$. Tomando ortogonales, se tiene:

$$(\vec{A}+\vec{B})^{\perp} = \vec{A}^{\perp} \cap \vec{B}^{\perp} = U \neq \{0\} \tag{1.6.1}$$

Se ve inmediatamente, que el conjunto:

$$A+U = \{a+u : a \in A, \ u \in U\}$$

es subespacio afín de E con dirección: $\overrightarrow{A+U} = \vec{A}+U$, y como $\vec{A} \cap U = \{0\}$, se deduce:

$$\dim (\overrightarrow{A+U}) = \dim A + \dim U \tag{1.6.2}$$

Para probar que existen puntos $a \in A$, $b \in B$ con $\vec{ab} \in \vec{A}^{\perp} \cap \vec{B}^{\perp} = U$, basta evidentemente probar:

$$(A+U) \cap B \neq \phi$$

Supongamos lo contrario, es decir, $(A+U) \cap B=\phi$. De (1.6.1) se deduce:

$$\vec{E}=\vec{A}+\vec{B}+U$$

Por la fórmula de dimensiones (caso de intersección vacía) y (1.6.2) se tiene la siguiente contradicción:

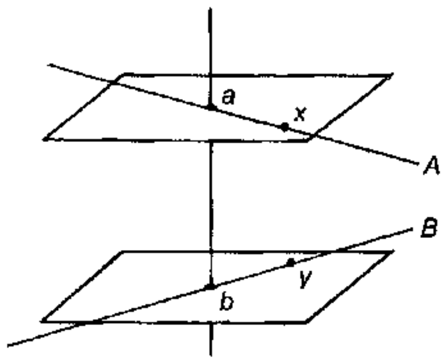
$$\begin{aligned}\dim\ [(A+U)+B] &= \dim\ [(\overrightarrow{A+U}+\vec{B}]+1=\dim\ (\vec{A}+\vec{B}+U)+1\\ &=\dim\ \vec{E}+1\end{aligned}$$

Fijados, ahora los puntos $a \in A$, $b \in B$ con $\overrightarrow{ab} \in \vec{A}^{\perp} \cap \vec{B}^{\perp}$, entonces para todo $x \in A$, $y \in B$ se verifica:

$$d(x,\ y)=\|\overrightarrow{xy}\|=\|\overrightarrow{ab}+(\overrightarrow{xa}+\overrightarrow{by})\|,$$

y como $\overrightarrow{xa}+\overrightarrow{by} \in \vec{A}+\vec{B}$, $\overrightarrow{ab}$ es ortogonal a este vector y, $d(x,\ y)^2= =d(a,\ b)^2+\|xa+by\|^2$. Se concluye que $d(x,\ y) \geqslant d(a,\ b)$ para todo $x \in A$, $y \in B$. Así $d(a,\ b)=d(A,\ B)$. □

Terminamos el estudio de la distancia euclídea estableciendo un resultado aparentemente ~~v~~anal, pero de gran relevancia geométrica:



Proposición 1.4.

Sean a, b *dos puntos distintos del espacio afín euclídeo* E, *y*

$$[a,\ b]=\{(1-\lambda)a+\lambda b : 0 \leqslant \lambda \leqslant 1\}$$

el segmento definido por ambos. Sea x *un punto de* E. *Se tiene la equivalencia:*

$$x \in [a, b] \Leftrightarrow d(a, b) = d(a, x) + d(x, b)$$

Demostración

$\Rightarrow$) Si $x \in [a, b]$, para cierto $\lambda \in [0, 1]$ se tiene:

$$x = (1-\lambda)a + \lambda b$$

y en particular es $\overrightarrow{ax} = \lambda\overrightarrow{ab}$, $\overrightarrow{xb} = (1-\lambda)\overrightarrow{ab}$, con $\lambda \geqslant 0$, y $(1-\lambda) \geqslant 0$, por tanto:

$$d(a, x) = \|\lambda\overrightarrow{ab}\| = \lambda\ d(a, b) \quad \text{y} \quad d(x, b) = \|(1-\lambda)\overrightarrow{ab}\| = (1-\lambda)\ d(a, b),$$

y se concluye: $d(a, b) = d(a, x) + d(x, b)$.

$\Leftarrow$) Recíprocamente, supuesto que

$$d(a, b) = d(a, x) + d(x, b), \tag{1.4.1}$$

se verifica:

$$\|\overrightarrow{ab}\|^2 = (\overrightarrow{ax} + \overrightarrow{xb}/\overrightarrow{ax} + \overrightarrow{xb}) = \|\overrightarrow{ax}\|^2 + \|\overrightarrow{xb}\|^2 + 2\ (\overrightarrow{ax}/\overrightarrow{xb}), \text{ y}$$

$$(\|\overrightarrow{ax}\| + \|\overrightarrow{xb}\|)^2 = \|\overrightarrow{ax}\|^2 + \|\overrightarrow{xb}\|^2 + 2\ \|\overrightarrow{ax}\|\ \|\overrightarrow{xb}\|$$

Por (1.4.1) ambas expresiones son iguales, y se deduce:

$$(\overrightarrow{ax}/\overrightarrow{xb}) = |(\overrightarrow{ax}/\overrightarrow{xb})| = \|\overrightarrow{ax}\|\ \|\overrightarrow{xb}\|$$

verificándose así la «igualdad», en la desigualdad de Cauchy-Swartz. Por 1.4, L. 12 el sistema $(\overrightarrow{ax}, \overrightarrow{xb})$ es linealmente dependiente, y existe por tanto un $k \in \mathbb{R}$ tal que:

$$\overrightarrow{ax} = k\overrightarrow{xb}$$

como $(\overrightarrow{ax}/\overrightarrow{xb})$ es no negativo, es $k \geqslant 0$, y

$$x = \frac{1}{1+k}a + \frac{k}{1+k}b \quad \text{con} \quad 0 \leqslant \frac{k}{1+k} \leqslant 1 \quad \text{y por tanto } x \in [a, b]$$

Observación 1.5.

El resultado anterior, da un criterio para determinar las rectas afines, en el que sólo interviene la distancia euclídea.

Recordando que en el caso real la estructura afín viene unívocamente determinada por la familia de rectas, se puede decir ahora, que la distancia euclídea determina la estructura afín del espacio.

Expondremos por último las ideas básicas que fundamentan la geometria analítica afín euclídea:

Para cada entero positivo n, se denota por E_n al espacio afín euclídeo $E = A_n(\mathbb{R})$, obtenido al dotar a $\overrightarrow{E}_n = \overrightarrow{A}_n(\mathbb{R})$ del producto escalar ordinario:

$$\left(\begin{pmatrix} 0 \\ \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} \Big/ \begin{pmatrix} 0 \\ \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_n \end{pmatrix} \right) = \lambda_1 \mu_1 + \ldots + \lambda_n \mu_n$$

Se denomina a E_n modelo analítico cartesiano de espacio afín euclídeo de dimensión n.

La distancia euclídea en E_n viene expresada por la clásica fórmula pitagórica:

$$d\left(\begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 1 \\ \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_n \end{pmatrix} \right) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (\mu_i - \lambda_i)^2}$$

Establezcamos ahora los sistemas de coordenadas que permiten pasar de un espacio afín euclídeo abstracto, al modelo analítico.

Definición 1.6. Sistema de referencia euclídeo

Un sistema de referencia cartesiano $\varepsilon = (e_0, \vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n)$ *en el espacio afín euclídeo* E, *se denomina sistema de referencia euclídeo, si la base* $(\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n)$ *es ortonormal.*

Proposición 1.7.

Sea $\varepsilon=(e_0, \vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n)$ *un sistema de referencia euclídeo en* E, *y*

$$x=\begin{pmatrix}1\\ x\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}: E \to E_n \quad \textit{el isomorfismo de coordenadas.}$$

x *induce entonces la isometría vectorial:* $\begin{pmatrix}0\\ x\end{pmatrix}: \vec{E} \to \vec{E}_n$, *y se tiene la fórmula pitagórica:*

$$d(a, b)=\sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i(b)-x_i(a))^2} \quad \textit{para todo} \quad a, b \in E.$$

La demostración es elemental.

§2. ISOMETRIAS Y MOVIMIENTOS. TEOREMA DE CARTAN-DIEUDONNE

Una isometría entre dos espacios métricos (E, d) y (E', d') es una aplicación sobreyectiva $f: E \to E'$ que preserva la distancia, es decir:

$$d'(f(a), f(b))=d(a, b)$$

Si los espacios métricos E y E' son euclídeos, probaremos que toda isometría entre ellos es isomorfismo afín.

Las isometrías de un espacio afín euclídeo E en sí mismo, se denominan movimientos, y determinan un subgrupo del grupo afín que constituye el grupo natural de transformaciones. Probaremos que las simetrías hiperplano constituyen un sistema generador para este grupo.

E, E', E'', ..., etc., designarán mientras no se advierta otra cosa espacios afines euclídeos. En todos ellos el producto escalar está denotado por $(\ /\ )$ y la norma por $\|\ \ \|$.

Definición 2.1.

Una biyección $f: E \to E'$ *entre espacios afines euclídeos se llama isometría, si verifica la propiedad:*

$$d'(f(a),\ f(b)) = d(a,\ b) \quad \textit{para todo} \quad a,\ b \in E$$

Observaciones 2.2.

1. Evidentemente la composición de isometrías es otra isometría, y si f es isometría, también lo es f^{-1}.
2. Supóngase que $f: E \to E'$ es aplicación afín, tal que $\vec{f}: \vec{E} \to \vec{E}'$ es isometría vectorial. Entonces f es isometría, ya que:

$$d'(f(a),\ f(b)) = \|\overrightarrow{f(a)\,f(b)}\| = \|\vec{f}(\overrightarrow{ab})\| = \|\overrightarrow{ab}\| = d(a,\ b)$$

3. Por otra parte, un isomorfismo afín $f: E \to E'$, si es isometría, su aplicación lineal asociada es isometría vectorial.

   Veremos inmediatamente que éstas son las únicas posibles isometrías entre espacios afines euclídeos:

4. Si $\varepsilon = (e_0,\ \vec{e}_1,\ \ldots,\ \vec{e}_n)$ es un sistema de referencia euclídeo en E, el isomorfismo de coordenadas:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ x \end{pmatrix} : E \to E_n, \text{ es una isometría.}$$

Proposición 2.3.

Toda isometría $f: E \to E'$ *entre espacios afines euclídeos, es isomorfismo afín, y su aplicación lineal asociada* $\vec{f}: \vec{E} \to \vec{E}'$ *es isometría vectorial.*

Demostración

Supóngase f isometría. Por la observación 2.2, es suficiente probar que f es isomorfismo afín.

La proposición 1.4 prueba que f transforma rectas en rectas, ya que si a, b, x son tres puntos distintos y alineados de E, y suponemos por ejemplo que $x \in [a, b]$, entonces por 1.4 se tiene:

$$d(a, b) = d(a, x) + d(x, b)$$

y por ser f isometría:

$$d'(f(a), f(b)) = d'(f(a), f(x)) + d'(f(x), f(b))$$

lo cual prueba (otra vez por 1.4) que $f(x) \in [f(a), f(b)]$. Aplicando el mismo razonamiento a la isometría inversa f^{-1}, se concluye que f es colineación. Si suponemos que $\dim E' \geqslant 2$, se aplica el Teorema fundamental 4.8, L.7, y la demostración está concluida. El caso $\dim E' = 1$, es un sencillo ejercicio (véase ejercicio 14.5).

Establezcamos el grupo de los movimientos:

Definición 2.4.

Se llaman movimientos de un espacio afín euclídeo E *a las isometrías de* E *en* E.

El conjunto OA(E) *de los movimientos con su estructura natural de grupo (respecto a la composición de aplicaciones) se denomina grupo de movimientos de* E, *y es el grupo de transformaciones de la geometría afín euclídea.*

De las observaciones 2.2 y la proposición 2.3 se deduce:

Corolario 2.5.

$f: E \to E$ *es un movimiento, si y sólo si* $\vec{f}: \vec{E} \to \vec{E}$ *es transformación lineal euclídea.*

Ejemplos 2.6.

1. Una traslación $\tau . E \to E$ es un movimiento, ya que $\vec{\tau} = \mathrm{id} : \vec{E} \to \vec{E}$.

2. En el modelo analítico E_n los movimientos vienen representados por matrices de la forma:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots 0 \\ a_1 & a_{11} & \dots a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots\dots \\ a_n & a_{n1} & \dots a_{nn} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & \overline{A} \end{pmatrix} \text{ donde } \overline{A}\in O(n)$$

Se denota por $OA(n)$ al conjunto de dichas matrices, que se identifica de la manera usual con el grupo de los movimientos de E_n.

3. Una simetría afín $\sigma : E \to E$ con base B y dirección $\vec{D}$, es movimiento si y sólo si la dirección $\vec{D}$ es ortogonal a $\vec{B}$ (es decir, $\vec{D}\perp\vec{B}$), pues sólo en este caso, $\vec{\sigma}:\vec{E}\to\vec{E}$ es transformación lineal euclídea (recuérdese que $\vec{\sigma}$ es simetría vectorial con base $\vec{B}$ y dirección $\vec{D}$).

Definición 2.7.

A una simetría $\sigma : E \to E$ que es movimiento, se le llama simetría afín euclídea.

Denominamos brevemente simetría hiperplano a una simetría afín euclídea con base un hiperplano.

Nuestra intención es ahora «trasladar» el teorema de Cartan Dieudonné dado en 2.5, L.12 a espacios afines euclídeos. Con esta idea se establece el siguiente lema preliminar:

Lema 2.8.

Dados dos puntos distintos a, b *de un espacio afín euclídeo* E, *existe una simetría hiperplano* σ : E → E *tal que* σ(a) = b.

Demostración

Sea $p=\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}b$ el punto medio del segmento $[a, b]$ y sea H el hiperplano que pasa por p, y tiene dirección $\vec{H}=\overrightarrow{ab}^{\perp}$. Si $\sigma : E \to E$ es la simetría hiperplano con base en H, entonces $\vec{\sigma} : \vec{E} \to \vec{E}$ es simetría vectorial hiperplano con base H (y dirección $\langle\overrightarrow{ab}\rangle = \langle\overrightarrow{pa}\rangle$), y se tiene:

$$\sigma(a) = \sigma(p + pa) = p + \vec{\sigma}(\overrightarrow{pa}) = \overrightarrow{pa} = b \quad \square$$

Proposicion 3.9. Teorema de Cartan-Dieudonné

Sea E *un espacio afín euclídeo de dimensión* n, *y* f : E → E *un movimiento.* f *puede descomponerse entonces en producto de no más de* n + 1 *simetrías hiperplano.*

Demostración

a) Supóngase que f tiene algún punto fijo $p \in E$. Como $\vec{f} \in O(\vec{E})$, aplicando 2.5 se deduce la existencia de $\vec{H}_1, ..., \vec{H}_r$ $(r \leqslant n)$ hiperplanos vectoriales de $\vec{E}$ de forma que:

$$\vec{f} = \sigma_{\vec{H}_1} ... \sigma_{\vec{H}_r}, \text{ siendo } \sigma_{\vec{H}_i}$$

la simetría hiperplano en $\vec{E}$ con base $\vec{H}_i$.

Tomando ahora los hiperplanos afines $H_i = p + \vec{H}_i$, y llamando $\sigma_i : E \to E$ a la simetría hiperplano con base en H_i, se verifica:

$$\sigma_{\vec{H}_i} = \vec{\sigma}_i \text{ para } i = 1, ..., r$$

y por tanto: $\vec{\sigma}_1 \ ... \ \vec{\sigma}_r = \vec{f}$. Además, como $p \in H_i$ es $\sigma_i(p) = p$, y $(\sigma_1 \ ... \ \sigma_r)(p) = p = f(p)$. Se concluye entonces que:

$$f = \sigma_1 \ ... \ \sigma_r \ (r \leqslant n)$$

b) Si f no tiene puntos fijos, tomemos $p \in E$ cualquiera. Por el lema 2.8, existe $\sigma : E \to E$ simetría hiperplano tal que:

$$\sigma(f(p)) = p$$

y $\sigma \cdot f$ tiene a p como punto fijo. Aplicando lo anterior para $\sigma \cdot f$, se deduce la existencia de simetrías hiperplano σ_i de E tales que:

$$\sigma \cdot f = \sigma_1 \ \dots \ \sigma_r \ (r \leqslant n)$$

y teniendo en cuenta que $\sigma^2 = \mathrm{id}$, se concluye:

$$f = \sigma \cdot \sigma_1 \ \dots \ \sigma_r \ (r \leqslant n)$$

Nota 2.10. Movimientos directos e inversos

Un movimiento f del espacio afín euclídeo E (con dimensión finita n) se llama directo, si su transformación lineal asociada es una rotación (ver nota 2.6, L.12), es decir, si:

$$\det \vec{f} = +1$$

El conjunto $OA^+(E)$ de movimientos directos forman grupo. Si $\vec{f}$ es una reflexión ($\det \vec{f} = -1$) diremos que f es movimiento inverso, y se denota por $OA^-(E)$ al conjunto de estos movimientos. Naturalmente es válida la regla de los signos para determinar el carácter de un producto de movimientos.

Las simetrías hiperplano son movimientos inversos. El lector que desee ampliar conocimientos, sobre el tema puede consultar el apéndice II.

§3. CLASIFICACION DE LOS MOVIMIENTOS

El grupo $OA(E)$ de los movimientos de un espacio afín euclídeo E, actúa sobre sí mismo por conjugación:

$$OA(E) \times OA(E) \ni (g, f) \to g \cdot f \cdot g^{-1} \in OA(E)$$

Induciendo en $OA(E)$ una relación de equivalencia métrica:

Definición 3.1.

Dos movimientos f *y* f′ *de* E *se dicen métricamente equivalentes, cuando existe* g ∈ OA(E) *tal que:*

$$f' = g \cdot f \cdot g^{-1}$$

En particular, se verifica: $\vec{f}' = \vec{g} \cdot \vec{f} \cdot \vec{g}^{-1}$, y la equivalencia métrica de los movimientos implica la de sus correspondientes transformaciones lineales euclídeas asociadas. Los invariantes de la clasificación métrica en $O(\vec{E})$, son pues invariantes para la clasificación métrica de los movimientos.

Se tiene la siguiente interpretación de la equivalencia métrica de movimientos:

Proposición 3.2.

Sea $\varepsilon = (e_0, \vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n)$ *un sistema de referencia euclídeo en* E, f *y* f′ *movimientos. Entonces:*

i) $M_\varepsilon(f)$ *es una matriz afín euclídea (de* OA(n)*).*

ii) f *y* f′ *son métricamente equivalentes si y sólo si existe* ε' *sistema de referencia euclídeo en* E *tal que:*

$$M_\varepsilon(f) = M_{\varepsilon'}(f')$$

Demostración

i) Como $\vec{f} \in O(\vec{E})$, es $\vec{f}(\vec{\varepsilon})$ base ortonormal (ver 2.1, L.12),

$$\vec{f}(\vec{\varepsilon}) = \vec{\varepsilon}\ \vec{A} \text{ con } \vec{A} \in O(n)$$

y $M_\varepsilon(f) = \begin{pmatrix} 1 & O \\ a & \vec{A} \end{pmatrix}$ es matriz de $OA(n)$.

ii) La demostración es análoga a la de la proposición 1.2, L.9. □

El teorema de clasificación métrica de transformaciones lineales euclídeas (ver 3.6, L.12), resuelve de forma inmediata el de clasificación métrica de movimientos con puntos fijos (que determinan evidentemente una clase invariante de $OA(E)$).

Proposición 3.3.

Sean f *y* f′ *movimientos con puntos fijos en el espacio afín euclídeo* E. *Entonces* f *es métricamente equivalente a* f′, *si y sólo si* $\vec{f}$ *lo es a* $\vec{f}$.

Demostración

Sean a, $a' \in E$ tales que $f(a)=a$, $f'(a')=a'$. Si f es métricamente equivalente a $\vec{f}$, existe $\varphi \in 0(\vec{E})$ tal que:

$$\vec{f}' = \varphi \cdot \vec{f} \cdot \varphi^{-1}$$

Sea g el único movimiento de E tal que $\vec{g}=\varphi$, y $g(a)=a'$.

Se verifica entonces que $f'=g \cdot f \cdot g^{-1}$ ya que:

$$f'(a')=g \cdot f \cdot g^{-1}(a')=g \cdot f(a)=g(a)=a',$$

y

$$\overrightarrow{g \cdot f \cdot g^{-1}}=\vec{g} \cdot \vec{f} \cdot \vec{g}^{-1}=\varphi \cdot \vec{f} \cdot \varphi^{-1}=\vec{f}'.$$

El recíproco es trivial. □

Observación 3.4.

Utilizando ahora el teorema de clasificación 3.6, L.12 se concluye que los movimientos f y f' con puntos fijos, son métricamente equivalentes, si y sólo si los polinomios característicos $\chi_{\vec{f}}$ y $\chi_{\vec{f}'}$ coinciden. En este caso ambos admiten una representación matricial respecto a sistemas de referencia euclídeos $\varepsilon=(e_0, \vec{e}_1, ..., \vec{e}_n)$, $\varepsilon'=(e'_0, \vec{e}'_1, ..., \vec{e}'_n)$ adecuadamente elegidos, del tipo:

$J=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & \vec{J}\end{pmatrix}$ donde $\vec{J}$ es una matriz diagonal por cajas I_r, $-I_s$, $G(\theta_i, m_i)$

como la (3.6.1) (L.12). Los orígenes e_0, y e'_0 de ε y ε' son desde luego puntos fijos para f y f' respectivamente.

La clasificación de movimientos sin puntos fijos, entraña alguna nueva dificultad.

Si $f: E \to E$ es un movimiento sin puntos fijos, es fácil encontrar una traslación $\tau: E \to E$ tal que $\tau \cdot f$ ya tenga puntos fijos.

Por otra parte, como veremos, interesa que dicha traslación conmute con el movimiento f. Esta nueva exigencia restringe de tal modo el campo de traslaciones válidas que lo reduce a una traslación única. El siguiente lema conduce a este resultado. Denotemos por $\tau_{\vec{v}}: E \to E$ a la traslación de vector $\vec{v}$:

Lema 3.5.

Sea $f: E \to E$ *un movimiento sin puntos fijos del espacio afín euclídeo* E, *y* $\vec{v}$ *un vector de* $\vec{E}$. *Se verifica:*

i) $\tau_{\vec{v}} \cdot f = f \cdot \tau_{\vec{v}}$ *si y sólo si* $\vec{f}(\vec{v}) = \vec{v}$.

ii) $\vec{E}$ *se descompone en la suma directa ortogonal:*

$$\vec{E} = \ker\,(\vec{f} - \mathrm{id}) \overset{\perp}{\oplus} \mathrm{im}\,(\vec{f} - \mathrm{id})$$

Demostración

i) Para $\vec{v} \in \vec{E}$ y $p \in E$ se tienen las igualdades:

$$\tau_{\vec{v}} \cdot f(p) = f(p) + \vec{v}$$
$$f \cdot \tau_{\vec{v}}(p) = f(p) + \vec{f}(\vec{v})$$

Así la igualdad $\tau_{\vec{v}} \cdot f(p) = f \cdot \tau_{\vec{v}}(p)$ (para algún p) implica que $\vec{f}(\vec{v}) = \vec{v}$, y esto último implica que $\tau_{\vec{v}} \cdot f(p) = f \cdot \tau_{\vec{v}}(p)$ (para todo p).

ii) Por una parte se tiene:

$$\dim\,[\mathrm{im}\,(\vec{f} - id)] + \dim\,[\ker\,(\vec{f} - id)] = \dim \vec{E} \tag{3.5.1}$$

Además, si $\vec{v} \in \ker\,(\vec{f} - \vec{id})$ entonces para todo $\vec{w} \in \vec{E}$, es:

$$(\vec{v}/\vec{f}(\vec{w}) - \vec{w}) = (\vec{v}/\vec{f}(\vec{w})) - (\vec{v}/\vec{w}) - (\vec{f}(\vec{v})/\vec{f}(\vec{w})) - (\vec{v}/\vec{w}) = 0$$

pues $\vec{f}(\vec{v})=\vec{v}$, y $\vec{f} \in O(\vec{E})$. Por tanto los subespacios $im\,(\vec{f}-\vec{id})$ y ker $(\vec{f}-\vec{id})$ son ortogonales, y teniendo en cuenta (3.5.1) se deduce ii). □

Proposición 3.6.

Si $f: E \to E$ *es un movimiento sin puntos fijos, existe una única traslación* $\tau_{\vec{v}}: E \to E$ *tal que* $f \cdot \tau_{\vec{v}} = \tau_{\vec{v}} \cdot f$ *es movimiento con puntos fijos.*

Demostración

Sea $G=\{a \in E \cdot \overrightarrow{f(a)\,a} \in \ker(\vec{f}-\vec{id})\} \subset E$, y $\vec{H}=\{\overrightarrow{f(a)\,a} \cdot a \in G\}$. Probemos primero la equivalencia:

$$\vec{v} \in \vec{H} \Leftrightarrow f \cdot \tau_{\vec{v}} = \tau_{\vec{v}} \cdot f \text{ tiene algún punto fijo} \qquad (3.6.1)$$

En efecto, si $\vec{v} \in \vec{H}$, existe $p \in E$ con $\vec{v}=\overrightarrow{f(p)\,p} \in$ Ker $(\vec{f}-\vec{id})$, y la traslación $\tau_{\vec{v}}$ conmuta (por 3.5) con f, y verifica:

$$\tau_{\vec{v}} \cdot f(p)=p$$

Reciprocamente, si $\tau_{\vec{v}} \cdot f = f \cdot \tau_{\vec{v}}$ es (por 3.5) $\vec{v} \in$ ker $(\vec{f}-\vec{id})$. Si además existe $p \in E$ con $\tau_{\vec{v}}\ f(p)-p$, es $\overrightarrow{pf(p)}=\vec{v} \in \ker(\vec{f}-\vec{id})$, y $\vec{v} \in \vec{H}$.

Por (3.6.1) la demostración del teorema queda reducida a probar que el conjunto $\vec{H}$ consta de un único vector. Esto se consigue probando las siguientes afirmaciones:

i) G es no vacío.

ii) Para todo a, $b \in G$ es $\overrightarrow{f(a)\,a}=\overrightarrow{f(b)\,b}$.

Probemos i): Tomemos $a \in E$ un punto arbitrario. El vector $\overrightarrow{f(a)\,a}$ se descompone por 3.5 de la forma:

$$\overrightarrow{f(a)\,a}=\vec{v}+\vec{f}(\vec{w})-\vec{w}, \text{ con } \vec{v} \in \ker\,(\vec{f}-\vec{id}),\ \vec{w} \in \vec{E} \qquad (3.6.2)$$

Probemos que el punto $p=a+\vec{w}$ pertenece a G. En efecto:

$$f(p)=f(a)+\vec{f}(\vec{w}), \text{ es decir } \overrightarrow{f(a)\,f(p)}=\vec{f}(\vec{w}),$$

y utilizando (3.6.2) es:

$$\overrightarrow{f(p)\,p} = \overrightarrow{f(p)\,f(a)} + \overrightarrow{f(a)\,a} + \overrightarrow{ap} = -\vec{f}(\vec{w}) + (\vec{v} + \vec{f}(\vec{w}) - \vec{w}) + \vec{w} - \vec{v} \in$$
$$\in \ker\ (\vec{f} - \vec{id}).$$

Luego $p \in G$.

Probemos finalmente ii): Si a, $b \in G$, entonces $\overrightarrow{f(a)\,a}$ y $\overrightarrow{f(b)\,b}$ están en ker $(\vec{f} - \vec{id})$ por tanto:

$$\overrightarrow{f(a)\,a} - \overrightarrow{f(b)\,b} \in \ker\ (\vec{f} - \vec{id})$$

Por otra parte:

$$\overrightarrow{f(a)\,a} - \overrightarrow{f(b)\,b} = \overrightarrow{ba} - \overrightarrow{f(b)\,f(a)} = \overrightarrow{ba} - \vec{f}(\overrightarrow{ba}) \in im\ (\vec{f} - \vec{id})$$

Como por 3.5 es $im\ (\vec{f} - \vec{id}) \cap \ker\ (\vec{f} - \vec{id}) = \{0\}$, se concluye que:

$$\overrightarrow{f(a)\,a} - \overrightarrow{f(b)\,b} = 0$$

que es lo que queríamos probar. □

Definición 3.7.

Al vector $\vec{v}$ de la proposición anterior, se le denomina vector de deslizamiento de f, *y a* $\|\vec{v}\| = \mu(\mathrm{f})$, *módulo de deslizamiento.*

Si f *es movimiento con puntos fijos, se sobrentiende que el módulo de deslizamiento* $\mu(\mathrm{f})$ *es nulo.*

El siguiente Lema, se utilizará para probar que el módulo de deslizamiento es un invariante:

Lema 3.8.

Sean f, g *movimientos del espacio afín euclídeo* E, *y* $\vec{v} \in \vec{E}$. *Se verifica entonces:*

$$\mathrm{g} \cdot (\tau_{\vec{v}} \cdot \mathrm{f}) \cdot \mathrm{g}^{-1} = \tau_{\vec{g}(\vec{v})} \cdot \mathrm{g} \cdot \mathrm{f} \cdot \mathrm{g}^{-1} \qquad (3.8.1)$$

$$\mathrm{g} \cdot (\mathrm{f} \cdot \tau_{\vec{v}}) \cdot \mathrm{g}^{-1} = \mathrm{g} \cdot \mathrm{f} \cdot \mathrm{g}^{-1}\, \tau_{\vec{g}(\vec{v})} \qquad (3.8.2)$$

Demostración

Probaremos (3.8.1). La demostración de (3.8.2) es análoga.

Para cualquier punto $g(p)$ de E, tenemos:

$$\tau_{\vec{g}(\vec{v})} g \cdot f \cdot g^{-1}(g(p)) = \tau_{\vec{g}(\vec{v})} g(f(p)) = g(f(p)) + \vec{g}(\vec{v}) =$$
$$= g(f(p) + \vec{v}) = g \cdot \tau_{\vec{v}} f \cdot g^{-1}(g(p)). \quad \square$$

Proposición 3.9. Teorema de clasificación

Un sistema completo de invariantes para la clasificación métrica de los movimientos de un espacio afín euclídeo E, *son:*

$\mu : \mathrm{OA}(\mathrm{E}) \ni \mathrm{f} \to \mu(\mathrm{f}) \in \mathbb{R}$ *(módulo de deslizamiento)*
$\chi : \mathrm{OA}(\mathrm{E}) \ni \mathrm{f} \to \chi_{\mathrm{f}} \in \mathbb{R}[\mathrm{t}]$ *(polinomio característico)*

Demostración

Probemos primero que el módulo de deslizamiento es un invariante:

Supóngase f, $g \in \mathrm{OA}(E)$, $f' = g \cdot f \cdot g^{-1}$. Si $\vec{v} \in \vec{E}$ es el vector de deslizamiento (eventualmente nulo) de f, entonces $\vec{g}(\vec{v})$ es el vector de deslizamiento de f', ya que las igualdades (3.8.1) prueban la implicación:

$$f \cdot \tau_{\vec{v}} = \tau_{\vec{v}} \cdot f \Rightarrow f' \, \tau_{\vec{g}(\vec{v})} = \tau_{\vec{g}(\vec{v})} \cdot f'$$

y además:

$$f' \cdot \tau_{\vec{g}(\vec{v})} = g \cdot (f \cdot \tau_{\vec{v}}) \cdot g^{-1}$$

Con lo que si $f \cdot \tau_{\vec{v}}$ tiene puntos fijos, también los tiene $f' \cdot \tau_{\vec{v}}$. Así $\mu(f) = \|\vec{v}\| = \|\vec{g}(\vec{v})\| = \mu(f')$, y μ es un invariante.

Probemos ahora, que conocidos para un movimiento f su módulo de deslizamiento:

$$\mu(f) = \mu \in \mathbb{R}$$

y su polinomio caracteristico:

$$\chi_{\vec{f}}(t) = (t-1)^r (t+1)^s [(t-\cos\theta_1)^2 + \\ + \operatorname{sen}^2\theta_1]^{m_1} \dots [(t-\cos\theta_k)^2 + \operatorname{sen}^2\theta_k]^{m_k} \tag{3.9.1}$$

podemos reconstruir una representación matricial reducida de f respecto a cierto sistema de referencia euclídeo:

Si $\mu=0$, el movimiento tiene puntos fijos, y como se vio en 3.4, f admite una representación reducida de la forma:

$$J=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & \vec{J}\end{pmatrix} \text{ con } \vec{J}=\begin{bmatrix} I_r & & & & \\ & -I_s & & & \\ & & G(\theta_1, m_1) & & \\ & & & \cdot & \\ & & & & G(\theta_k, m_k)\end{bmatrix} \tag{3.9.2}$$

donde $r\geqslant 0$, $s\geqslant 0$, $m_i\geqslant 0$, $0<\theta_i<\pi$, $\theta_i\neq\theta_j$ si $i\neq j$. (Ver 3.6, L.12.)

Si $\mu\neq 0$, entonces el vector $\vec{v}$ de deslizamiento de f es no nulo, pues $\|\vec{v}\|=\mu$.

Sea $\vec{e}_1=\frac{1}{\mu}\vec{v}$ vector unitario en la dirección de $\vec{v}$ y sea e_0

punto fijo para el movimiento $h=f\cdot\tau_{\vec{v}}=\tau_{\vec{v}}\cdot f$. Se tiene entonces:

$$f(e_0)=e_0+\vec{v}=e_0+\mu\vec{e}_1 \tag{3.9.3}$$

Ademas, por el lema 3.5 es $\vec{f}(\vec{v})=\vec{v}$, y en particular:

$$\vec{f}(\vec{e}_1)=\vec{e}_1$$

Se puede construir entonces partiendo del vector $\vec{e}_1$, una base ortonormal $\vec{\varepsilon}=(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ respecto a la cual $\vec{f}$ tenga por representación la matriz $\vec{J}$ de (3.9.2).

Teniendo en cuenta ahora (3.9.3), se concluye que la matriz de f respecto al sistema de referencia euclídeo $\varepsilon=(e_0, \vec{\varepsilon})$ es:

$$J=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \\ \mu & 1 & \\ & & \vec{J}_1 \end{pmatrix} \text{ con } \vec{J}_1=\begin{bmatrix} I_{r-1} & & & & \\ & -I_s & & & \\ & & G(\theta_1,\ m_1) & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & G(\theta_k,\ m_k) \end{bmatrix} \quad (3.9.4)$$

Finalmente obsérvese que si f' es otro movimiento con los mismos invariantes μ y χ, admite respecto a cierto sistema de referencia euclídeo una representación matricial J igual a la de f. Por 3.2 f y f' son métricamente equivalentes. □

El siguiente corolario resume los resultados obtenidos:

Corolario 3.10.

Dado un movimiento f en el espacio afín euclídeo E, con polinomio característico $\chi_f(t)$ como en (3.9.1) y módulo de deslizamiento μ, existe un sistema de referencia euclídeo $\varepsilon=(e_0, \vec{e}_1, ..., \vec{e}_n)$ respecto al cual, la matriz que representa a f es de la forma:

$$\left.\begin{array}{l} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \vec{J} \end{pmatrix} \text{ si } \mu=0 \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & \\ \mu & 1 & \\ & & \vec{J}_1 \end{pmatrix} \text{ si } \mu\neq 0, \end{array}\right\}$$

donde $\vec{J}$ y $\vec{J}_1$ son las matrices definidas en (3.9.2) y (3.9.4).

EJERCICIOS

14.1.* Sea B un subespacio del espacio afín euclídeo E. Se denomina proyección ortogonal $\pi : E \to E$ con base B, a la proyección afín con base B y dirección $\vec{D} = \vec{B}^{\perp}$.

Demostrar que cada punto $p \in E$ verifica:

$$d(p,\ \pi(p)) = d(p,\ B)$$

14.2. Demostrar que en un espacio afín euclídeo tridimensional E, la distancia de un punto $p \in E$ a la recta afín R es:

$$d(p,\ R) = \frac{\|\vec{u} \times \overrightarrow{ap}\|}{\|\vec{u}\|}$$

Donde $a \in R$, $\langle \vec{u} \rangle = \vec{R}$, y « $\times$ » denota el producto vectorial en $\vec{E}$ respecto a cualquiera de sus orientaciones.

14.3. En el modelo analítico de espacio afín euclídeo E_3 se dan los siguientes subespacios, referidos al sistema euclídeo canónico:

$$A.\ \begin{cases} 2x_1 + x_2 + 2x_3 = -1 \\ \qquad x_2 \qquad = 0 \\ -2x_1 + 2x_2 + x_3 = 4 \end{cases} \quad p = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix};\ B: \begin{cases} x_1 \quad 2x_2 - 2x_3 = 1 \\ -2x_1 + x_2 + x_3 = 7 \end{cases}$$

1) Determinar los puntos $a \in A$, $b \in B$ tales que: $d(a,\ p) = d(A,\ p)$ y $d(b,\ p) = d(B,\ p)$.

2) Determinar los puntos $a' \in A$, $b' \in B$ tales que $d(a',\ b') = d(A,\ B)$.

14.4.* Sean E y E' espacios afines euclídeos de dimensión la unidad, y $f : E \to E'$ una isometría. Probar que f es isomorfismo afín.

14.5. Probar que todo movimiento en una recta afín euclídea E, es una traslación, o una simetría puntual.

14.6. Establecer todos los posibles tipos de matrices reducidas afines auclídeas, que representan todas las clases de equivalencia métrica de movimientos con puntos fijos, para espacios afines de dimensión $n=2$, 3, 4.

Enunciar en cada dimensión un teorema de clasificación métrica de estos movimientos.

14.7. Demostrar que cada una de las matrices que se dan a continuación, determina un movimiento en el espacio afín euclídeo $E_n=(n=2, 3, 4)$. Encontrar en cada caso un sistema de referencia euclídeo respecto al cual la matriz de la transformación sea reducida:

$$\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 3 \\ -5 & -3 & 4 \end{pmatrix}; \quad \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & -1 \end{pmatrix};$$

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

14.8.* Sea E espacio afín euclídeo. Se llama simetría (euclídea) con deslizamiento, a un movimiento $f: E \to E$ que se descompone en producto de una simetría euclídea σ con base B, por una traslación τ con vector $\vec{v} \in \vec{B}$.

1) Probar que $\sigma \cdot \tau = \tau \cdot \sigma$.

2) Demostrar que el producto de una simetría euclídea por una traslación, es una simetría euclídea con deslizamiento.

3) Probar que las simetrías euclídeas con deslizamiento, vienen caracterizadas por la propiedad de ser movimientos cuyo cuadrado es una traslación.

4) Establecer matrices reducidas, y un sistema completo de invariantes para la clasificación de las simetrías euclídeas con deslizamiento.

14.9.* Demostrar que la matriz:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

define en el espacio afín euclídeo E_4 una simetría con deslizamiento. Determinar la base y dirección de la simetría, y el vector de deslizamiento.

14.10. Probar que en un espacio afín euclídeo, el producto de dos simetrías hiperplano con deslizamiento, de bases paralelas, es una traslación.

14.11. Demostrar que un movimiento con un hiperplano de puntos fijos, es una simetría hiperplano, o la identidad.

14.12. Establecer todos los posibles tipos de matrices reducidas afines euclídeas que representen todas las clases de equivalencia métrica de movimientos sin puntos fijos, para espacios afines euclídeos de dimensión $n=2, 3, 4$.

Enunciar un teorema de clasificación para estos movimientos, en cada una de las dimensiones especificadas.

14.13. Demostrar que cada una de las matrices que se dan a continuación representa un movimiento sin puntos fijos del espacio afín euclídeo E_n, $n=2, 3, 4$.

Determinar en cada caso un sistema de referencia euclídeo respecto al cual la matriz del movimiento sea reducida.

$$\frac{1}{25}\begin{pmatrix} 25 & 0 & 0 \\ -2 & -7 & 24 \\ 64 & 24 & 7 \end{pmatrix}; \quad \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 & 0 \\ -6 & 1 & -8 & 4 \\ 3 & -8 & 1 & 4 \\ -6 & 4 & 4 & 7 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

14.14. En un plano afín euclídeo orientado E, se llama giro de centro $c \in E$, y ángulo $\theta \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$, a la aplicación $g = g(c, \theta)$: $E \to E$ tal que para cada $x \in E - \{c\}$ verifica:

$$d(c, g(x)) = d(c, x) \quad \text{y} \quad \sphericalangle\,(\overrightarrow{cx}, \overrightarrow{cg(x)}) = \theta.$$

Supuesto que $g(c) = c$, demostrar que g es un movimiento directo que tiene por matriz:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ 0 & \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

respecto a cualquier sistema de referencia euclídeo positivo centrado en c.

Se denomina a g giro de (centro c y ángulo θ).

14.15.* Sea f un movimiento del plano afín euclídeo E, y F el subespacio de puntos fijos para f. Demostrar que:

i) Si F es un punto, f es un giro de centro F.

ii) Si F es una recta, entonces f es simetría afín euclídea con base en F.

iii) Si $F = \phi$, y f es movimiento directo, entonces es una traslación.

iv) Si $F = \phi$, y f es movimiento inverso, entonces es una simetría hiperplano con deslizamiento.

14.16. Demostrar que en un plano afín orientado, el producto de un giro por una traslación es un giro del mismo ángulo.

14.17. Sean a, b, c, a', b', c' seis puntos de un plano afín euclídeo E, tales que a, b, c no están alineados, y se verifican las igualdades:

$$d(a, b) = d(a', b'), \; d(a, c) = d(a', c'), \; d(b, c) = d(b', c')$$

Demostrar que existe un único movimiento que transforma el sistema (a, b, c) en el (a', b', c').

14.18.* Estudiar en un plano afín euclídeo el producto de dos simetrías respecto a rectas.

14.19. Sea R una recta afín orientada de un espacio afín euclídeo orientado tridimensional E, y sea $\theta \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ un ángulo.

Se llama giro de eje orientado R, y ángulo θ, a la aplicación $g: E \to E$ que deja fijos todos los puntos de R, e invariantes todos los planos P ortogonales a R, induciendo sobre cada uno de ellos un giro de centro $P \cap R$ y ángulo θ. (Nótese que la orientación de R induce una orientación en cada plano P).

Demostrar que g es un movimiento que admite una representación matricial de la forma:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ 0 & 0 & \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

14.20. Demostrar que en un espacio afín euclídeo tridimensional E, el producto de dos simetrías euclídeas respecto a planos secantes es un giro de eje, la intersección de dichos planos.

14.21. Probar que en un espacio afín euclídeo tridimensional, el producto de un giro por una traslación de vector ortogonal al eje de giro, es un giro.

14.22.* En un espacio afín euclídeo tridimensional orientado, se denomina movimiento helicoidal, al producto (conmutable) de un giro por una traslación paralela al eje de giro.

Demostrar que el producto de una traslación por un giro, es un movimiento helicoidal o un giro

14.23. Demostrar que el movimiento de E dado por la matriz A, es un movimiento helicoidal. Determinar el eje de giro, y el vector de deslizamiento.

$$A = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 4 & 7 \\ 3 & -8 & 1 & 4 \\ -15 & 1 & -8 & 4 \end{pmatrix}$$

14.24.* Sea f un movimiento del espacio afín euclídeo orientado tridimensional E, y sea F el subespacio de puntos fijos para f.

Demostrar:

i) Si F es una recta, entonces f es un giro de eje F.

ii) Si F es un plano; entonces f es simetría euclídea.

iii) Si F es un punto, entonces f se descompone en producto conmutable de giro, por simetría euclídea con plano base orotogonal al eje de giro.

iv) Si $F=\phi$, y f es movimiento directo, entonces es un movimiento helicoidal.

v) Si $F=\phi$, y f es movimiento inverso, entonces es una simetría con deslizamiento.

14.25.* Probar que en un espacio afín euclídeo tridimensional, todo movimiento directo es un movimiento helicoidal.

LECCION 15

GEOMETRIA AFIN EQUIFORME

El espacio afín euclídeo constituye un modelo adecuado para representar nuestra idea intuitiva del espacio ordinario con su distancia usual.

Sin embargo, para determinar el concepto de distancia es necesario fijar previamente la unidad de medida, es decir, fijar un segmento y declarar «por convenio» que tiene longitud igual a la unidad. La longitud de otro segmento se obtiene entonces por «comparación» con el segmento unidad a través de movimientos rígidos. Este es el proceso habitual de medir. Lo analizaremos brevemente:

Recordemos que sólo con la geometría afín, somos capaces de comparar (por medio de la razón simple) longitudes de segmentos paralelos. El grupo de movimientos permite, dados dos segmentos, pasar del primero a otro paralelo al segundo, y entonces compararlos por medio de la razón simple.

La elección de unidad de medida es más bien un convenio que no afecta a la esencia de la geometría euclídea. El efecto que produce un cambio de unidad, es el de multiplicar el producto escalar original por una constante positiva, y el grupo de movimientos del nuevo espacio es el mismo.

Si evitamos elegir *a priori* una unidad de medida, el grupo de movimientos aún permite comparar longitudes de segmentos, aunque desconozcamos cuál es la longitud de cada uno de ellos. En particular, tiene sentido hablar de segmentos de la misma longitud. El grupo de transformaciones que preservan la igualdad de longitudes de segmentos, es el denominado grupo de semejanzas, y define la geometría afín equiforme, denominada así por ser la geometría que conserva la **forma** de las figuras, y hace abstracción de su

tamaño. El grupo de movimientos del espacio afín euclídeo original puede definirse ahora como el grupo de las semejanzas que transforman cada segmento en otro de la misma longitud.

La lección consta sólo de dos epígrafes. En el primero, se introducen las semejanzas en un espacio afín euclídeo, y se analizan sus propiedades. En el segundo se resuelve el problema de su clasificación.

Se supone fijado un espacio afín euclídeo E de dimensión mayor o igual que dos, con las notaciones habituales de distancia producto escalar, ... etc.

§1. GRUPO DE SEMEJANZAS

Recordemos que dos puntos a, $b \in E$ definen el segmento:

$$S=[a,\ b]=\{(1-\lambda)a+\lambda b : 0\leqslant\lambda\leqslant 1\}$$

Se llama longitud del segmento S al escalar $d(a,\ b)$.

Si dos segmentos S y S' de E tienen la misma longitud escribimos $S\ L\ S'$.

Esta relación L es evidentemente de equivalencia sobre el conjunto de segmentos de E. Estudiemos qué transformaciones respetan esta relación:

Definición 1.1. Semejanzas

Una biyección $f : E \to E$ *se denomina semejanza si verifica:*

1) $f(S)$ *es un segmento, para cada segmento* S *de* E.

2) *Si* S *y* S' *son segmentos de la misma longitud, entonces* $f(S)$ *y* $f(S')$ *tienen la misma longitud. En símbolos:*

$$S\,L\,S' \Rightarrow f(S)\ L\ f(S')$$

Proposición 1.2

Toda semejanza de E, *es transformación afín, su transformación lineal asociada* $\vec{f}:\vec{E}\to\vec{E}$ *preserva la ortogonalidad, es decir:*

$$si\ \vec{u},\ \vec{v}\in\vec{E},\ (\vec{u}/\vec{v})=0\Rightarrow(\vec{f}(\vec{u})/\vec{f}(\vec{v}))=0$$

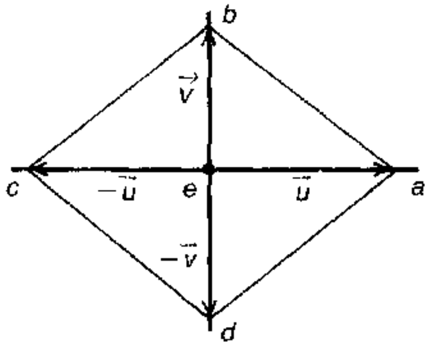
Demostración.

Por la condición 1) de 1.1, se ve que $f:E\to E$ es colineación. Como $\dim E$ es mayor o igual que dos, y $\mathbb{R}$ *es un cuerpo simple* (con un único automorfismo) concluimos por el teorema fundamental 4.8 (L.7) que f es isomorfismo afín.

Para probar que $\vec{f}:\vec{E}\to\vec{E}$ preserva la ortogonalidad, se precisa de algún trabajo adicional.

Nótese en primer lugar si $\vec{x}$, $\vec{y}$ son vectores de $\vec{E}$, se verifica la equivalencia:

$$\|\vec{x}\|=\|\vec{y}\|\Leftrightarrow(\vec{x}+\vec{y}/\vec{x}-\vec{y})=0. \qquad (1.2.1)$$



ya que $(\vec{x}/\vec{x})-(\vec{y}/\vec{y})=(\vec{x}+\vec{y}/\vec{x}-\vec{y})$.

Supóngase ahora $\vec{u},\ \vec{v}\in\vec{E}-\{0\}$ tales que

$$(\vec{u}/\vec{v})=0,\ \text{y probemos que}\ (\vec{f}(\vec{u})/\vec{f}(\vec{v}))=0.$$

En efecto, fijado el punto $e\in E$, sean

$$a=e+\vec{u},\ b=e+\vec{v},\ c=e-\vec{u},\ d=e-\vec{v}.$$

Se tiene:

$$d(a,\ b)=\|\vec{v}-\vec{u}\|=d(a,\ d)=\|\vec{v}+\vec{u}\| \text{ por } (1.2.1)$$

y por la condición 2) de 1.1 se verifica:

$$d(f(a),\ f(b))=d(f(a),\ f(d)),$$

es decir:

$$\|\vec{f}\,(\overrightarrow{ab})\|=\|\vec{f}\,(\overrightarrow{ad})\|$$

como $\overrightarrow{ab}+\overrightarrow{ad}=\overrightarrow{ac}=-2\vec{u}$, y $\overrightarrow{ab}-\overrightarrow{ad}=\overrightarrow{db}=-2\vec{v}$, teniendo en cuenta que $\vec{f}$ es lineal, se concluye nuevamente por (1.2.1) que

$$\vec{f}\,(\overrightarrow{ab})+\vec{f}\,(\overrightarrow{ad})=-2\vec{f}\,(\vec{u})$$

es ortogonal a $f(\overrightarrow{ab})-\vec{f}\,(\overrightarrow{ad})=-2\vec{f}\,(\vec{v})$, y por tanto, $(\vec{f}\,(\vec{u})/\vec{f}\,(\vec{v}))=0$ como queríamos probar. □

Corolario 1.3.

La transformación lineal asociada $\vec{f}:\vec{E}\to\vec{E}$ *a una semejanza* f *en* E, *verifica la siguiente propiedad:*

Si $\vec{\varepsilon}=(\vec{e}_1,\ \ldots,\ \vec{e}_n)$ *es base ortonormal de* $\vec{E}$, *entonces* $\vec{f}\,(\vec{\varepsilon})$ *es base ortogonal de* $\vec{E}$ *tal que:*

$$\|\vec{f}\,(\vec{e}_i)\|=\|\vec{f}\,(\vec{e}_j)\|=\rho\neq 0, \text{ para todo i, j} \in \{1,\ \ldots,\ n\} \qquad (1.3.1)$$

Demostración

Por la proposición anterior, $\vec{f}\,(\vec{\varepsilon})$ es un sistema ortogonal de vectores no nulos, y por tanto base ortogonal.

Por otra parte, fijado i, $j \in \{i,\ \ldots,\ n\}$ índices distintos, se verifica que:

$$(\vec{e}_i+\vec{e}_j/\vec{e}_i-\vec{e}_j)=\|e_i\|^2-\|e_j\|^2=0$$

aplicando nuevamente 1.2, y teniendo en cuenta la linealidad de f se concluye que:

$$(\vec{f}(\vec{e}_i)+\vec{f}(\vec{e}_j)/\vec{f}(\vec{e}_i)-\vec{f}(\vec{e}_j))=0$$

es decir, $\|\vec{f}(\vec{e}_i)\|=\|\vec{f}(\vec{e}_j)\|$ que es lo que queríamos demostrar.

Llegamos finalmente al siguiente teorema de caracterización:

Proposición 1.4.

Sea $f: E \to E$ *una biyección en el espacio afín euclídeo* E. *Son equivalentes las siguientes afirmaciones:*

i) f *es semejanza.*

ii) f *es transformación afín, y su transformación lineal asociada es semejanza vectorial, es decir:*

$$\text{Existe } \rho \in \mathbb{R}^+ \text{ tal que } \|\vec{f}(\vec{v})\|=\rho\|\vec{v}\| \text{ para todo } \vec{v} \in \vec{E}$$

(Se denomina a ρ *razón de la semejanza vectorial* $\vec{f}$*).*

iii) Existe $\rho \in \mathbb{R}^+$ *tal que:*

$$d(f(a), f(b))=\rho\, d(a, b) \text{ para todo } a, b \in E$$

(Se denomina a $\rho=\rho(f)$ *razón de semejanza).*

Demostración

i) $\Rightarrow$ ii)

Por 1.2 $f: E \to E$ es transformación afín.

Sea $\vec{\varepsilon}=(\vec{e}_1, ..., \vec{e}_n)$ base ortonormal de $\vec{E}$, por el corolario 1.3 la base $\vec{f}(\varepsilon)$ es ortogonal, y todos los vectores tienen la misma norma $\|\vec{f}(\vec{e}_i)\|=\rho \in \mathbb{R}^+ (i=1, ..., n)$.

Si $\vec{v}=\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \vec{e}_i$, es $\|\vec{v}\|^2=\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2$, y se tiene:

$$\|\vec{f}(\vec{v})\|^2=\|\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \vec{f}(\vec{e}_i)\|^2=\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2 \ \|\vec{f}(\vec{e}_i)\|=\sum \lambda_i^2 \rho^2=\rho^2 \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2 = \\ =\rho^2\|\vec{v}\|^2$$

que es lo que queríamos probar.

ii) $\Rightarrow$ iii)

Nótese que:

$$d(f(a),\ f(b))=\|\overrightarrow{f(a)\,f(b)}\|=\|\vec{f}\,(\overrightarrow{ab}\|=\rho\,\|\overrightarrow{ab}\|=\rho d(a,\ b).$$

iii) $\Rightarrow$ i)

Probemos primero que f transforma el segmento $[a,\ b]$ de E en el segmento $[f(a),\ f(b)]$.

El lema 1.4 (L.14) prueba la equivalencia:

$$x \in [a,\ b] \Leftrightarrow d(a,\ b)=d(a,\ x)+d(x,\ b)$$

Así, si $x \in [a,\ b]$ se tiene:

$$d(f(a),\ f(b))=\rho d(a,\ b)=\rho d(a,\ x)+\rho d(x,\ b)= \\ =d(f(a),\ f(x))+d(f(x),\ f(b)).$$

Luego $x \in [a,\ b]$. Esto prueba que $f([a,\ b]) \subset [f(a),\ f(b)]$. La otra inclusión se prueba de forma análoga.

Por otra parte, si $d(a,\ b)=d(c,\ d)$ entonces:

$$d(f(a),\ f(b))=\rho d(a,\ b)=\rho d(c,\ d)=d(f(c),\ f(d))$$

Esto concluye la demostración. □

Nota 1.5.

Se obtiene una definición equivalente de semejanza, eliminando de la definición dada en 1.1 la condición 1), y modificando ligeramente la condición 2) que queda sustituida por:

2′) Para todo $a,\ b,\ c,\ d \in E$ se tiene la implicación:

$$[a,\ b]\ L\ [c,\ d] \Rightarrow [f(a),\ f(b)]\ L\ [f(c),\ f(d)]$$

Esta afirmación dista mucho de ser trivial, y constituye un difícil e interesante ejercicio para alumnos aventajados.

Ejemplos 1.6.

1. Un movimiento en E, es en realidad una semejanza de razón $\rho=1$.

2. Considérese en E la homotecia h de centro c y razón $\lambda\neq 0.$, su transformación lineal asociada $\vec{h}$, es la homotecia vectorial de razón λ, es decir:

$$\vec{h}:\vec{E}\ni\vec{v}\to\lambda\vec{v}\in\vec{E}$$

y por tanto, para todo a, $b\in E$ se tiene:

$$d(h(a),\ h(b))=\|\overrightarrow{h(a)h(b)}\|=\|\vec{h}(\overrightarrow{ab})\|=$$
$$=\|\lambda\overrightarrow{ab}\|=|\lambda|\,\|\overrightarrow{ab}\|=|\lambda|\ d(a,\ b).$$

Así pues h es semejanza de razón $\rho=|\lambda|$.

Estudiemos el producto de semejanzas:

Proposición 1.7.

La composición de semejanzas de E, *es una semejanza con razón igual al producto de las razones correspondientes.*

En particular, el conjunto GOA(E) de las semejanzas en E, tiene estructura de grupo respecto a la composición de aplicaciones.

Demostración

Si f, f' son semejanzas de E, con razones respectivas ρ y ρ', entonces para todo par de puntos a, $b\in E$ se tiene:

$$d(f'(f(a)),\ f'(f(b))))=\rho' d(f(a),\ f(b))=\rho'\rho'\ d(a,\ b)\ \square$$

Definición 1.8.

Se denomina geometría afín equiforme de E, *la definida por el grupo* GOA(E) *de las semejanzas en* E.

Observación 1.9.

Existen infinitas maneras de descomponer una semejanza f de razón $\rho \neq 1$ en producto de una homotecia de razón positiva y un movimiento. De hecho, fijado un punto $a \in E$, y la homotecia h de centro a y razón ρ, entonces $f \cdot h^{-1} = g$ es un movimiento (nótese que h^{-1} es semejanza de razón $1/\rho$), y se tiene evidentemente:

$$f = g \cdot h$$

Sin embargo, si imponemos además que la homotecia conmute con el movimiento, veremos que tal descomposición es única.

Proposición 1.10. Centro de semejanza

Una semejanza f *de* E *con razón* $\rho \neq 1$, *admite un único punto fijo, que denominamos centro de semejanza de* f.

Demostración

La unicidad (supuesta la existencia) del punto fijo es clara, ya que si c_1, c_2 son puntos fijos para f, es:

$$d(c_1, c_2) = d(f(c_1), f(c_2)) = \rho\, d(c_1, c_2)$$

Por ser $\rho \neq 1$, $d(c_1, c_2) = 0$ y $c_1 = c_2$.

Probemos la existencia. A partir de un punto $a \in E$ auxiliar, y de su imagen $f(a) = a'$. Podemos escribir para cada $x \in E$:

$$x = a + \overrightarrow{ax}, \ f(x) = f(a + \overrightarrow{ax}) = a' + \vec{f}\,(\overrightarrow{ax}) = a + \overrightarrow{aa'} + \vec{f}\,(\overrightarrow{ax})$$

la condición $f(x) = x$ se escribe entonces $\overrightarrow{aa'} + \vec{f}\,(\overrightarrow{ax}) = \overrightarrow{ax}$, o también

también

$$(\vec{f}-\overrightarrow{id})\ (\overrightarrow{ax})=\overrightarrow{a'a} \qquad (2.1.1)$$

Probemos que es posible «despejar» x en (2.1.1). En efecto, como $\vec{f}:\vec{E}\rightarrow\vec{E}$ es semejanza vectorial de razón $\rho\neq 1$, se tiene:

$$\vec{f}(\vec{v})=\rho\|\vec{v}\| \text{ para todo } \vec{v}\in\vec{E}$$

y en consecuencia $\vec{f}$, no admite vectores fijos no nulos, es decir $(\vec{f}-\overrightarrow{id}):\vec{E}\rightarrow\vec{E}$ es isomorfismo lineal, y la ecuación (2.1.1) se escribe:

$$\overrightarrow{ax}=(\vec{f}-\overrightarrow{id})^{-1}\ (\overrightarrow{a'a}) \text{ o también } x=a+(\vec{f}-\overrightarrow{id})^{-1}\ (\overrightarrow{a'a}).$$

Esto prueba la existencia del punto fijo. □

Estudiemos qué posibilidades hay para descomponer una semejanza en producto conmutable de homotecia por movimiento:

Proposición 1.11.

Fijada una semejanza f *de* E *con razón* $\rho\neq 1$, *existe un único movimiento* $f_1:E\rightarrow E$ *que verifica la igualdad:*

$$f=f_1\cdot h=h\cdot f_1$$

para alguna homotecia h *de razón positiva.*

Por otra parte, el centro c *de semejanza de* f, *es punto fijo para* f_1 *y para la homotecia* h.

Se denomina a f_1 *movimiento asociado a la semejanza* f.

Demostración

Si f_1 es movimiento, y h homotecia de razón positiva tal que:

$$f=f_1\cdot h=h\cdot f_1 \qquad (1.11.1)$$

se tiene entonces por 1.7:

$$\rho=\rho(f)=\rho(f_1)\,\rho(h)=1\cdot\rho(h)=\rho(h)$$

y h es homotecia de razón ρ. El centro $a \in E$ de la homotecia h es su único punto fijo. Como $h(f_1(a)) = f_1(h(a)) = f_1(a)$, se concluye que $f_1(a) = a$, y el punto $a \in E$ es también fijo para f_1, y para f. Luego (por la unicidad del centro c de semejanza) es $a = c$.

La homotecia h, y el movimiento $f_1 = f \cdot h^{-1}$ quedan así sucesivamente determinados por la condición (1.11.1).

Queda por probar que en efecto, f_1 y h conmutan. Para todo $x \in E$ se verifica:

$$f_1 \cdot h(x) = f_1(c + \rho\overrightarrow{cx}) = c + \rho\vec{f}_1(\overrightarrow{cx}) = h(c + \vec{f}_1(\overrightarrow{cx})) =$$
$$= h(f_1(c) + \vec{f}_1(\overrightarrow{cx})) = h \cdot f_1(x).$$

Esto concluye la demostración. □

§2. CLASIFICACION METRICA Y EQUIFORME DE LAS SEMEJANZAS

El grupo $G = GOA(E)$ de las semejanzas de un espacio afín euclídeo E, actúa por conjugación sobre sí mismo de la forma:

$$G \times GOA(E) \ni (g, f) \to g \cdot f \cdot g^{-1} \in GOA(E) \qquad (2.0.1)$$

dando lugar a una relación de equivalencia (equiforme) en la familia $GOA(E)$ de semejanzas.

Por otra parte, el grupo $G = OA(E)$ de los movimientos de E, actúa de la forma (2.0.1) sobre $GOA(E)$ dando lugar a otra relación de equivalencia (métrica) en $GOA(E)$.

Las dos relaciones de equivalencia (equiforme y métrica) inducen sendos problemas de clasificación cuya solución es el objeto de este epígrafe final.

Veremos que la equivalencia métrica y la equiforme, son la misma sobre la clase (invariante) de las semejanzas con puntos fijos, y el invariante completo viene dado en este caso por el polinomio característico de la transformación lineal asociada.

Las semejanzas sin puntos fijos, son necesariamente movimientos

GOA(E) × GOA(E) ⇒ ∃ f, g ∈ GOA(E)
tal que g · f · g⁻¹ ∈ GOA(E)

(ver 1.10), y para esta clase, los dos problemas tienen distinta solución.

Definición 2.1. Equivalencia métrica y equiforme

a) Se dice que f *y* f′ *son* M-*equivalentes (o métricamente equivalentes), cuando existe* g ∈ *OA* (E) *tal que:*

$$f' = g \cdot f \cdot g^{-1} \tag{2.1.1}$$

b) Si la relación anterior, se verifica para alguna semejanza g ∈ GOA(E), *se dice entonces que* f *y* f′ *son* S-*equivalentes (o equiformemente equivalentes).*

Observaciones 2.2.

1. La *M*-equivalencia implica evidentemente la *S*-equivalencia, pero no recíprocamente. En efecto, si *h* es una homotecia de razón $\lambda \in \mathbb{R} - \{0, 1\}$, y $\vec{v} \in \vec{E} - \{0\}$, entonces $\tau' = h \cdot \tau_{\vec{v}} \cdot h^{-1}$, es una traslación de vector $\vec{v}' = \lambda\vec{v}$. Así $\tau_{\vec{v}}$ y $\tau'_{\lambda\vec{v}}$ son *S*-equivalentes, pero no son *M*-equivalentes, pues tienen distinto módulo de deslizamiento (ver 3.9, L.14).

2. Dos semejanzas *S* o *M*-equivalentes, son en particular afínmente equivalentes, por lo que los invariantes afines son también invariantes respecto a la equivalencia métrica y equiforme.

3. La razón de semejanza:

$$\rho : GOA\,(E) \ni f \to \rho\,(f) \in \mathbb{R}$$

Es un invariante equiforme (y por tanto métrico), ya que según 1.7 es:

$$\rho(g \cdot f \cdot g^{-1}) = \rho(g)\,\rho(f)\,\rho(g^{-1}) = \rho(g)\,\rho(f)\,\rho(g)^{-1} = \rho(f)$$

El problema de la clasificación métrica de movimientos (semejanza de razón la unidad) ya ha sido resuelto en la lección anterior. Concentrémonos pues en las semejanzas de razón $\rho \neq 1$:

Proposición 2.3.

Dos semejanzas f y f' con la misma razón $\rho \neq 1$ son M-equivalentes, si y sólo si sus correspondientes movimientos asociados f_1 y f'_1 lo son.

Demostración

Si f y f' son M-equivalentes, existe $g \in OA(E)$ tal que:

$$f' = g \cdot f \cdot g^{-1} \qquad (2.3.1)$$

Si c, c' son los correspondientes centros de semejanza de f y f', como g envía el conjunto de puntos fijos de f, $\mathrm{Fix}(f) = \{c\}$ a el correspondiente $\mathrm{Fix}(f') = \{c'\}$, se deduce que $g(c) = c'$. Por tanto, tomando h y h' las homotecias de razón ρ y centros respectivos c y c', se verifica:

$$h' = g \cdot h \cdot g^{-1}$$

por 1.11 se tiene:

$$f = f_1 \cdot h = h \cdot f_1, \quad f' = f'_1 \cdot h' = h' \cdot f'_1$$

y por (2.3.1):

$$f'_1 \cdot h' = g \cdot (f_1 \cdot h)\, g^{-1} = (g \cdot f_1 \cdot g^{-1}) \cdot (g \cdot h \cdot g^{-1}) = (g \cdot f_1 \cdot g^{-1}) \cdot h'$$

Luego, $f'_1 = g \cdot f_1 \cdot g^{-1}$. Los movimientos f_1, y f'_1 son pues M-equivalentes.

Recíprocamente, si suponemos ahora que los movimientos asociados f_1 y f'_1 son M-equivalentes, se tiene en particular que las transformaciones lineales euclídeas $\vec{f}_1$ y $\vec{f}'_1$ son métricamente equivalentes, y existe $\varphi \in O(\vec{E})$ tal que:

$$\vec{f}'_1 = \varphi \cdot \vec{f}_1 \cdot \varphi^{-1} \qquad (2.3.2)$$

Si c, c', h y h' son como antes, tomando $g \in OA(E)$ tal que:

$$g(c) = c', \ \vec{g} = \varphi$$

Se deduce que:

$$f'_1 = g \cdot f_1 \cdot g^{-1}$$

pues por (2.3.2) y (2.3.3) se verifica:

$$\overrightarrow{g \cdot f_1 \cdot g^{-1}} = \varphi \cdot \vec{f}_1 \cdot \varphi^{-1} = \vec{f'}_1, \text{ y } g \cdot f_1 \cdot g^{-1}(c') = g \cdot f_1(c) = g(c) = c' = f'_1(c').$$

Como además es $h' = g \cdot h \cdot g^{-1}$, se tiene:

$$f' = f'_1 \cdot h' = (g \cdot f_1 \cdot g^{-1}) \cdot (g \cdot h \cdot g^{-1}) = g \cdot (f_1 \cdot h) \cdot g^{-1} = g \cdot f \cdot g^{-1}.$$

y las semejantes f y f' son M-equivalentes. □

Se introduce ahora el invariante fundamental:

Definición 2.4. Polinomio característico

Se llama polinomio característico χ_f de una semejanza f al polinomio característico $\chi_{\vec{f}}$ de su transformación lineal asociada.

La aplicación $\chi: \mathrm{GOA(E)} \ni f \to \chi_{\vec{f}} \in \mathbb{R}[t]$, es obviamente un invariante para la equivalencia métrica y equiforme de semejanzas.

El siguiente lema, prueba que el polinomio característico de una semejanza, determina su razón:

Lema 2.5.

Sea f *semejanza de razón $\rho \neq 1$, y sea* f_1 su movimiento asociado. Entonces:

$$\chi_f(t) = \rho^n \, \chi_{f_1}(t/\rho)$$

En particular, todas las raíces reales o complejas de $\chi_f(t)$ tienen módulo igual a ρ.

Demostración

Supuesto f descompuesto en la forma:

$$f=f_1 \cdot h=h \cdot f_1$$

donde h es la homotecia de centro c (centro de semejanza de f) y razón ρ, se verifica:

$$\vec{f}=\vec{h} \cdot \vec{f}_1=\rho \vec{f}_1$$

y así:

$$\chi_f(t)=\det(t\,\overrightarrow{id}-\rho\vec{f}_1)=\det\left[\rho\left(\frac{t}{\rho}\,\overrightarrow{id}-\vec{f}_1\right)\right]=$$

$$=\rho^n \det\left(\frac{t}{\rho}\,\overrightarrow{id}-\vec{f}_1\right)=\rho^n \chi_{f_1}(t/\rho).$$

Por otra parte, si φ, ψ son polinomios de grado n, tales que:

$$\psi(t)=\rho^n \varphi(t/\rho) \tag{2.5.1}$$

se tiene evidentemente la equivalencia:

$$\lambda \text{ es raíz de } \psi(t) \Leftrightarrow \lambda/\rho \text{ es raíz de } \varphi(t)$$

En particular, como las raíces de $\chi_{f_1}(t)$ tienen todas módulo la unidad (ver 3.6, L.12) se concluye que las de $\chi_f(t)$ tienen módulo ρ igual a la razón de semejanza de f. □

Obtenemos así el siguiente teorema de clasificación:

Proposición 2.6.

Sean f y f′ dos semejanzas con puntos fijos. Son equivalentes las siguientes afirmaciones:

i) f *es S-equivalente a* f′.

ii) f *y* f′ *tienen el mismo polinomio característico.*

iii) f *es M-equivalente a* f′.

Demostración

i) $\Rightarrow$ ii)

Es consecuencia de que el polinomio característico es un invariante afín.

ii) $\Rightarrow$ iii)

Sea $\chi(t)$ el polinomio característico común a f y a f'. Por 2.5, todas las raíces de $\chi(t)$ tienen el mismo módulo ρ, que es la razón de semejanza de f y f'.

Si $\rho=1$, el resultado se sigue del teorema de clasificación métrica de movimientos con puntos fijos (ver 3.3 y 3.4, L. 14).

Si $\rho\neq 1$, nuevamente por 2.5, se concluye que $\chi_{f_1}(t)=\chi_{f'_1}(t)$ (siendo f_1 y f'_1 los correspondientes movimientos asociados). Como f_1 y f'_1 tienen puntos fijos (los correspondientes centro de semejanza). Por 3.3 y 3.4, L. 14, se concluye que f_1 y f'_1 son M-equivalentes, y por 2.3, f y f' también lo son.

iii) $\Rightarrow$ i)

Es evidente. (Véanse observaciones 2.2). $\square$

Este resultado junto con el teorema 3.9, L. 14, resuelve completamente el problema de clasificación métrica de semejanzas.

Nota 2.7. Matriz reducida de una semejanza con centro

Supóngase que f es una semejanza de razón $\rho\neq 0$, y centro $c\in E$. Si su movimiento asociado f_1, tiene polinomio característico $\chi(t)$ como el de (3.9.1) (L. 14), entonces existe una base ortonormal $\vec{\varepsilon}$ de $\vec{E}$ respecto a la cual la matriz de $\vec{f}_1$ es la matriz $\vec{J}$ de (3.9.2) (L. 14). Tomando $\varepsilon=(c, \vec{\varepsilon})$ se verifica:

$$M_\varepsilon(f)=M_\varepsilon(h\cdot f_1)=M_\varepsilon(h)\ M_\varepsilon(f_1)=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & \rho I\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & \vec{J}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & \rho\vec{J}\end{pmatrix}$$

Siendo h la homotecia de centro c y razón ρ.

Para cumplir nuestro objetivo, sólo queda por estudiar la clasificación equiforme de las semejanzas sin puntos fijos.

Proposición 2.8.

Dos semejanzas sin puntos fijos f y f' son S-equivalentes, si y sólo si tienen el mismo polinomio característico.

Demostración

De 1.10 se deduce que f y f' son movimientos sin puntos fijos. Sean $\vec{v}$ y $\vec{v}'$ los vectores de deslizamiento de f y f', y $\mu=\|\vec{v}\|$, $\mu'=\|\vec{v}'\|$ los correspondientes módulos de deslizamiento.

Sea h una homotecia cualquiera de razon $\lambda>0$. El movimiento:

$$f''=h\cdot f\cdot h^{-1}$$

tiene por vector de deslizamiento $\vec{h}(\vec{v})=\lambda\vec{v}$ (y por tanto, su módulo de deslizamiento es $\mu''=\lambda\cdot\mu$).

En efecto, por el lema 3.8, L.14 se tiene:

$$\tau_{\lambda\vec{v}}\cdot f''=\tau_{\lambda\vec{v}}(h\cdot f\cdot h^{-1})=h\cdot\tau_{\vec{v}}\cdot f\cdot h^{-1}=h\cdot f\cdot\tau_{\vec{v}}\cdot h^{-1}=h\cdot f\cdot h^{-1}\cdot\tau_{\lambda\vec{v}}=f''\cdot\tau_{\lambda\vec{v}}$$

y $f''\cdot\tau_{\lambda\vec{v}}=\tau_{\lambda\vec{v}}\cdot f''$, tiene puntos fijos por ser afínmente equivalente a $f\cdot\tau_{\vec{v}}$ que por hipótesis los tiene. Así $\mu''=\|\lambda\vec{v}\|=|\lambda|\cdot\|\vec{v}\|=\lambda\mu$. Tomemos entonces $\lambda=\mu'/\mu$, para que sea $\mu''=\mu'$.

Por otra parte, $\vec{f}''=\vec{h}\cdot\vec{f}\cdot\vec{h}^{-1}=\vec{h}\cdot\vec{h}^{-1}\cdot\vec{f}$, (ya que las homotecias vectoriales conmutan con cualquier endomorfismo).

Supuesto que f y f' tienen el mismo polinomio característico χ, éste coincide también con el de f'' (pues $\vec{f}''=\vec{f}$), y como $\mu''=\mu'$, se deduce de 3.9, L. 14 que f' y f'' son M-equivalentes, es decir, existe $g'\in OA(E)$ tal que:

$$f'=g'\cdot f''\cdot g'^{-1}$$

Si g es la semejanza $g=g'\cdot h$, se tiene:

$$f'=g'\cdot f''\cdot g'^{-1}=g'\cdot h\cdot f\cdot h^{-1}\cdot g'^{-1}=g\cdot f\cdot g^{-1}$$

y f es S-equivalente a f', que es lo que queríamos probar. □

EJERCICIOS

15.1. Sea E un espacio afín euclídeo, y $f: E \to E$ una aplicación verificando la siguiente propiedad: f aplica biyectivamente cada par de rectas ortogonales en un par de rectas ortogonales.

Demostrar que f es una semejanza.

15.2. Sea E espacio afín euclídeo, y $f: E \to E$ una aplicación tal que para todo $a, b, c, d \in E$ tales que $d(a, b) = d(c, d)$ se verifica que

$$d(f(a), f(b)) = d(f(c), f(d)).$$

Demostrar que f es una semejanza.

15.3. Sea X espacio afín con dos estructuras euclídeas dadas por las forma cuadráticas q y q' sobre $\vec{X}$. Denotando por E y E' los correspondientes espacios afines euclídeos, probar la equivalencia entre las siguientes afirmaciones:

i) $OA(E) = OA(E')$

ii) $GOA(E) = GOA(E')$

iii) Existe $\lambda > 0$ tal que $q' = \lambda q$

15.4.* Una semejanza f en un espacio afín euclídeo E, se dice directa o inversa según sea transformación afín positiva o negativa.

a) Demostrar que una homotecia de razón positiva, es semejanza directa.

b) Demostrar que una homotecia de razón negativa, tiene signo $(-1)^n$ siendo n la dimensión del espacio.

15.5.* Sea E un plano afín euclídeo orientado, y f una semejanza de E con razón $\rho \neq 1$. Demostrar:

a) Si f es semejanza inversa, entonces su movimiento asociado es una simetría ortogonal respecto a una recta (que contiene al centro de semejanza).

b) Si f es semejanza directa su movimiento asociado es un giro.

15.6.* Determinar los elementos geométricos que definen la actuación de las siguientes semejanzas en el plano afín euclídeo E:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 6 & 4 & 3 \\ -2 & 3 & -4 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 6 & 12 & -5 \\ 18 & 5 & 12 \end{pmatrix} \quad \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 4 \\ -7 & 4 & -3 \end{pmatrix}$$

15.7 Sean a, b, a', b' cuatro puntos distintos de E. Demostrar que existen exactamente dos semejanzas, una directa y otra inversa que envia (a, b) a (a', b').

15.8. Sea R una recta de un plano afín euclídeo orientado E, $a \in E$ un punto no perteneciente a R, y b la proyección ortogonal de a sobre R.

a) Demostrar que para todo punto $p \in R$ existe una única semejanza directa que tiene por centro a, y transforma b en p.

b) Expresar la razón de la semejanza anterior en función del ángulo $\theta = \measuredangle(\overrightarrow{ab}, \overrightarrow{ap})$.

15.9. *a)* Demostrar que el cuerpo $\mathbb{C}$ de los números complejos, admite una estructura natural de plano afín euclídeo, en el que la distancia viene definida por la fórmula:

$$d(z, z') = |z' - z|$$

Siendo $|z|$ el módulo del número complejo z.

b) Probar que toda semejanza directa de $\mathbb{C}$, puede escribirse de la forma:

$$\mathbb{C} \ni z \to az + b \in \mathbb{C}$$

donde $a, b \in \mathbb{C}$, $a \neq 0$ y $|a| = \rho$ representa la razón de semejanza.

c) Probar que toda semejanza inversa de $\mathbb{C}$, puede escribirse de la forma:

$$\mathbb{C} \ni z \to a\bar{z} + b \in \mathbb{C}$$

donde a, $b \in \mathbb{C}$, $a \neq 0$, y $|a| = \rho$ representa la razón de semejanza.

15.10. Estudiar en el plano complejo $\mathbb{C}$, las semejanzas $\mathbb{C} \ni z \to \to z' \in \mathbb{C}$:

$$z' = 2iz + 1; \quad z' = 2iz + 3; \quad z' = (1+i)\bar{z} - i$$

Determinando en cada caso, los elementos geométricos que definen su actuación (centro, razón, ángulo, ... etc.).

15.11. Determinar centro razón y ángulo de la única semejanza directa f del plano euclídeo complejo $\mathbb{C}$, tal que: $f(3) = i$, $f(1) = 2i$.

15.12. Sea E un espacio afín euclídeo orientado tridimensional, y f una semejanza de razon $\rho \neq 1$. Demostrar:

a) Si f es semejanza directa, entonces su movimiento asociado es un giro.

b) Si f es semejanza inversa, entonces f se descompone en la forma:

$$f = g \cdot h = h \cdot g$$

donde g es un giro de eje la recta R, y h es una homotecia de centro $c \in R$, y razón igual a $-\rho$.

15.13.* Estudiar geométricamente, cada una de las semejanzas de E_4 (con su orientación canónica) dadas por las matrices:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & -2 \\ 1 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & -8 & 4 \\ 0 & -8 & 1 & 4 \\ -2 & 4 & 4 & 7 \end{pmatrix}$$

determinando los elementos geométricos que definen sus correspondientes actuaciones.

15.14. Si f es un movimiento del espacio afín euclídeo E, y h es una homotecia de centro $a \in E$ y razón $\lambda \neq 0$, demostrar que:

$$h \cdot f \cdot h^{-1} = f \cdot \tau$$

siendo τ una traslación. Determinar el vector de dicha traslación.

15.15. En un espacio afín euclídeo arbitrario, establecer un teorema para la clasificación equiforme de las simetrías con deslizamiento.

15.16. Determinar cuáles de las semejanzas de E dadas por las matrices que siguen, son M-equivalentes, y cuáles son S-equivalentes:

$$A=\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & -1 & 2 \\ -3\,1 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad B=\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ -5 & 1 & -2 & -2 \\ 1 & -2 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$C=\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & -2 & -1 \\ -2 & -2 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

APENDICE I

ANILLO DE POLINOMIOS

El motivo de este apéndice es dar un breve repaso a los conceptos y resultados fundamentales de la teoría elemental de polinomios en una variable, para pasar luego a analizar otras técnicas algebraicas menos elementales, que nos serán de utilidad en el capítulo III para establecer el teorema de clasificación de endomorfismos de un espacio vectorial.

1. TEORIA ELEMENTAL DE POLINOMIOS

De una manera informal, un polinomio en la variable t sobre el cuerpo $\mathbb{K}$ es una expresión del tipo $\varphi(t)=a_0+a_1t+...+a_nt^n$; y también se escribe $\varphi(t)=\sum_{i=0}^{n} a_it^i$ $(t^0=1)$. $\mathbb{K}[t]$ denota el conjunto de todos estos polinomios. Dos polinomios $\varphi(t)=\sum_{i=0}^{n} a_it^i$, $\psi(t)=\sum_{i=0}^{n} b_it^i$ ($n\leqslant m$ por ejemplo) se consideran iguales, si $a_i=b_i$ para $i=1, ..., n$ y $b_i=0$ para $i=n+1, ..., m$.

Es conocido que $\mathbb{K}[t]$ tiene estructura de anillo conmutativo con elemento unidad respecto a las operaciones suma y producto usuales, y contiene al cuerpo $\mathbb{K}$ como subanillo. Por tanto los elemento 0 y 1 de $\mathbb{K}$ representan los elementos neutros respecto a la suma y multiplicación de polinomios.

Si $\varphi(t)=\sum_{i=0}^{n} a_it^i \in \mathbb{K}[t]$ y $a_n\neq 0$ se dice que n es el grado de φ y se escribe gr $\varphi=n$. Al polinomio nulo 0, no se le asocia grado alguno. Así pues escribir gr $\varphi = n$ supone implícitamente que φ es un polinomio no nulo.

La aplicación gr: $\mathbb{K}[t] \to \mathbb{N}$ verifica la propiedad:

$$\text{gr}(\varphi\ \psi) = \text{gr}\ \varphi + \text{gr}\ \psi \quad (\text{cuando } \varphi,\ \psi \in \mathbb{K}[t] - \{0\}).$$

En particular, esto quiere decir que si $\varphi \neq 0$, $\psi \neq 0$ entonces $\varphi\psi \neq 0$ por esto se dice que $\mathbb{K}[t]$ es un dominio de integridad.

Obsérvese que $\mathbb{K} - \{0\}$ se identifica con el conjunto $\{\varphi \in \mathbb{K}[t] - -\{0\} / \text{gr}\ \varphi = 0\}$. Por otra parte el grupo $(\mathbb{K}[t], +)$ admite una estructura obvia de espacio vectorial (no de dimensión finita) sobre $\mathbb{K}$, definiendo para $\lambda \in \mathbb{K}$, $\varphi \in \mathbb{K}[t]$, $\lambda\ \varphi$ como el producto usual de polinomios. Se dice por esto que $\mathbb{K}[t]$ es una $\mathbb{K}$-álgebra.

Un polinomio $\varphi(t) = \sum_{i=0}^{n} a_i t^i$ de grado n se dice polinomio monico si $a_n = 1$. Obsérvese que si $\varphi(t)$ no es polinomio mónico, el polinomio $\lambda\varphi(t)$ con $\lambda = 1/a_n$ si lo es.

Un polinomio $\varphi(t) = \sum_{i=0}^{n} a_i t^i \in \mathbb{K}[t]$, se identifica usualmente con la función polinómica $\varphi : \mathbb{K} \ni \lambda \to \varphi(\lambda) = \sum_{i=0}^{n} a_i \lambda^i \in \mathbb{K}$. Los valores $\lambda \in \mathbb{K}$ tales que $\varphi(\lambda) = 0$ se denominan raíces del polinomio φ.

Proposición 1.1. Algoritmo de división

Dados los polinomios ϕ, $\varphi \in \mathbb{K}[t]$, $\varphi \neq 0$, existen otros dos polinomios únicos ζ, $\rho \in \mathbb{K}[t]$ tales que $\phi = \varphi \cdot \zeta + \rho$ y verificando alguna de las siguientes condiciones (excluyentes):

1) $\rho = 0$ *en cuyo caso se dice que φ divide a ϕ (o es divisor de ϕ) y se escribe φ / ϕ.*

2) Si $\rho \neq 0$ debe ser gr $\rho <$ gr φ.

Se denomina a ζ y ρ cociente y resto respectivamente de la división de ϕ entre φ.

Proposición 1.2. Teorema del resto

En particular si ζ *y* ρ *son el cociente y resto de la división de* ϕ *por* $\varphi(t)=t-\lambda$, *es* $\phi(t)=\zeta(t)\ (t-\lambda)+\rho$, *y* ρ *es un escalar de* $\mathbb{K}$, *que coincide con el valor numérico del polinomio* ϕ *para* $t=\lambda$, $\phi(\lambda)$, *es decir* $\rho=\phi(\lambda)$. *En particular, se tiene* $\phi(\lambda)=0 \Leftrightarrow \phi(t)=(t-\lambda)\ \zeta\ (t) \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow (t-\lambda)$ *es divisor de* ϕ.

Definición 1.3. Polinomios primos o irreducibles

Un polinomio $p \in \mathbb{K}[t]$, $p \notin \mathbb{K}$, *se dice primo o irreducible si no admite divisores de grado mayor que cero.*

Obsérvese que si p es primo, λp es primo para cada $\lambda \in \mathbb{K}-\{0\}$. Así los polinomios de la forma $t-\lambda$ son irreducibles para cualquier cuerpo $\mathbb{K}$. Si los polinomios irreducibles de $\mathbb{K}[t]$ son únicamente los de grado igual a la unidad, se dice que $\mathbb{K}$ es algebraicamente cerrado.

Proposición 1.4.

1) *Los polinomios primos de* $\mathbb{R}[t]$ *son de grado uno o dos.* $\mathbb{R}$ *no es algebraicamente cerrado.*
2) $\mathbb{C}$ *es un cuerpo algebraicamente cerrado.*

Definición 1.5. Orden de multiplicidad

Se llama orden de multiplicidad de un divisor primo $p \in \mathbb{K}[t]$ *de un polinomio* $\phi \in \mathbb{K}[t]$ *al máximo número natural* m *tal que* p^m *divide a* ϕ, *es decir* $\phi=p^m\phi_1$, *y* p *no divide a* ϕ_1. *(Si* $m=0$ *se interpreta que* p *no divide a* ϕ*).*

Si $p(t)=t-\lambda$, *se dice que* m *es el orden de multiplicidad de* λ *como raíz de* ϕ.

Proposición 1.6. Teorema de descomposición en factores primos

Sea $\phi \in \mathbb{K}[t]$ *polinomio mónico. Existe entonces un número finito de divisores primos mónicos de* ϕ, *digamos* $p_1, \ldots, p_r$. *Si* m_i *es* *el orden de multiplicidad de* p_i *como divisor de* ϕ, *entonces* $\phi = p_1^{m_1} \ldots p_r^{m_r}$ *y la descomposición es única salvo el orden de factores. Se denomina descomposición irreducible de* ϕ. *(Para polinomios no mónicos la descomposición es de la forma* $p = a_n p_1^{m_1} \ldots p_r^{m_r}$ *donde* a_n *es el coeficiente del término de mayor grado.)*

En particular si $\mathbb{K}$ es algebraicamente cerrado (por ejemplo $\mathbb{K}=\mathbb{C}$) la descomposición irreducible de ϕ es de la forma

$$\phi(t) = (t-\lambda_1)^{m_1} \ldots (t-\lambda_r)^{m_r} \text{ donde } \lambda_1, \ldots, \lambda_r$$

son las distintas raíces de ϕ con multiplicidades $m_1, \ldots, m_r$ respectivamente.

La descomposición irreducible de un polinomio $\phi(t) \in \mathbb{R}[t]$ es de la forma:

$$\phi(t) = (t-\lambda_1)^{m_1} \ldots (t-\lambda_r)^{m_r} ((t-\alpha_1)^2 + \beta_1^2)^{n_1} \ldots ((t-\alpha_s)^2 + \beta_s^2)^{n_s}$$

donde $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ son la raíces de ϕ.

Se supone al lector familiarizado con los conceptos de máximo común divisor y mínimo común múltiplo de un sistema finito de polinomios, así como de su cálculo por medio de las descomposiciones irreducibles de los polinomios del sistema. No obstante, en el siguiente epígrafe se analizarán estos conceptos desde un punto de vista menos elemental pero más adecuado para su uso en el problema de clasificación lineal de endomorfismos.

2. COMPLEMENTOS A LA TEORIA ELEMENTAL DE POLINOMIOS

Definición 2.1. Ideal

Un ideal de $\mathbb{K}[t]$ *es un subconjunto no vacío* I *de* $\mathbb{K}[t]$ *verificando las propiedades:*

1. *Para cada* $\xi_1, \xi_2 \in I$, $\xi_1 - \xi_2 \in I$.

2. *Para cada $\xi \in I$ y $\varphi \in \mathbb{K}[t]$, $\xi\varphi \in I$.*

En particular un ideal I es subanillo de $\mathbb{K}[t]$. Si $\phi \in \mathbb{K}[t]$, el conjunto $\mathbb{K}[t]\phi = \{\varphi\phi / \varphi \in \mathbb{K}[t]\}$ es un ideal de $\mathbb{K}[t]$. Se denomina *ideal principal generado por ϕ*.

Proposición 2.2.

Si $I_1, \ldots, I_r$ son de $\mathbb{K}[t]$ entonces:

(1) $I_1 \cap \ldots \cap I_r = \bigcap_{i=1}^{r} I_i$ *es un ideal de* $\mathbb{K}[t]$.

(2) $I_1 + \ldots + I_r = \sum_{i=1}^{r} I_i = \{\varphi_1 + \ldots + \varphi_r / \varphi_i \in I_i\ i = 1, \ldots, r\}$ *es un ideal de* $\mathbb{K}[t]$, *y contiene a la unión* $I_1 \cup \ldots \cup I_r$.

La demostración es inmediata.

Proposición 2.3.

Todo ideal I de $\mathbb{K}[t]$ es un ideal principal. De forma más precisa: Dado I ideal de $\mathbb{K}[t]$, existe un único polinomio mónico $\phi \in \mathbb{K}[t]$ tal que $I = \mathbb{K}[t]\phi$.

Se dice por esto que $\mathbb{K}[t]$ es un *anillo principal*.

Demostración

Si $I = \{0\}$ no hay nada que probar. Supóngase pues $I \neq \{0\}$. Sea $\phi \in I$ un polinomio tal que $gr\phi = \min\{gr\xi / \xi \in I - \{0\}\}$, evidentemente ϕ puede elegirse mónico. Es obvio que $\mathbb{K}[t]\phi \subset I$. Si $\xi \in I$, aplicando el algoritmo de la división de ξ por ϕ se concluye que existen $\zeta, \rho \in \mathbb{K}[t]$ con $\xi = \phi\zeta + \rho$.

Si $\rho \neq 0$ entonces $gr\rho < gr\phi$ y $\rho = \xi + (-\zeta)\phi \in I$, pues $\xi, \phi \in I$. Esto contradice la hipótesis sobre el grado de ϕ, por tanto $\rho = 0$ y $\varphi = \zeta\phi \in \mathbb{K}[t]\phi$.

La unicidad de ϕ es ahora clara:

Si ϕ_1 es polinomio mónico con $I = \mathbb{K}[t]\phi_1 = \mathbb{K}[t]\phi$, se deduce

$\phi_1=\zeta_1\,\phi$ y $\phi=\zeta\,\phi_1$ para ciertos polinomios ζ, $\zeta_1 \subset \mathbb{K}[t]$ y se tiene $(1-\zeta\zeta_1)\,\phi=0$. Como $\phi\neq 0$ es $\zeta\zeta_1=1$ y por tanto ζ, $\zeta_1 \in \mathbb{K}$. Pero ϕ y ϕ_1 son mónicos luego $\zeta=\zeta_1-1$. □

Proposición 2.4. Máximo común divisor

Sean $(\phi_1, \ldots, \phi_r)$ *un sistema de polinomios de* $\mathbb{K}$ [t]. *Existe entonces un único polinomio mónico* $\delta \in \mathbb{K}$ [t] *verificando las condiciones:*

(1) $\delta|\phi_1, \ldots, \delta|\phi_r$.

(2) *Para cada* $\varphi \in \mathbb{K}$ [t] *tal que* $\varphi|\phi_1, \ldots, \varphi|\phi_r \Rightarrow \phi|\delta$.

Se denomina a δ *máximo común divisor de* $(\phi_1, \ldots, \phi_r)$, *y se escribe* $\delta=$ m. c. d. $(\phi_1, \ldots, \phi_r)$.

Demostración

Por 2.2 y 2.3 $\mathbb{K}[t]\,\phi_1+\ldots+\mathbb{K}[t]\phi_r$, es un ideal de $\mathbb{K}[t]$ generado por un único polinomio mónico δ, es decir:

$$\mathbb{K}[t]\delta=\mathbb{K}[t]\phi_1+\ldots+\mathbb{K}[t]\phi_r.$$

Así cada $\phi_j \in \mathbb{K}[t]\delta$, y $\delta|\phi_j$ para $j=1, \ldots, r$. Además, como

$$\delta \in \sum_{j=1}^{r} \mathbb{K}[t]\phi_j,$$

existen polinomios

$$\zeta_1, \ldots, \zeta_r \in \mathbb{K}[t] \text{ con } \delta=\zeta_1\phi_1+\ldots+\zeta_r\phi_r,$$

por tanto, si $\varphi \in \mathbb{K}[t]$ y $\varphi|\phi_j$ para $j=1, \ldots, r$ es $\phi_j=\xi_j\varphi$ para ciertos $\xi_j \in \mathbb{K}[t]$, de esta forma se tiene

$$\delta=\zeta_1\phi_1+\ldots+\zeta_r\phi_r=\varphi(\zeta_1\xi_1+\ldots+\zeta_r\xi_r)$$

es decir $\varphi|\delta$. La unicidad de δ se demuestra de forma análoga que la unicidad en la proposición 2.3. □

De la demostración anterior se deduce el siguiente corolario:

Corolario 2.5. Identidad de Bezout

Sea $(\phi_1, \ldots, \phi_r)$ *un sistema de polinomios de* $\mathbb{K}[t]$, *entonces el polinomio* $\delta = \text{m.c.d.}(\phi_1, \ldots, \phi_r)$ *es el único polinomio mónico que verifica*

$$\mathbb{K}[t]\delta = \mathbb{K}[t]\phi_1 + \ldots + \mathbb{K}[t]\phi_r$$

En particular, si $\text{m.c.d.}(\phi_1, \ldots, \phi_r) = 1$, *existen polinomios* $\zeta_1, \ldots, \zeta_r \in \mathbb{K}[t]$ *tales que* $\zeta_1\phi_1 + \ldots + \zeta_r\phi_r = 1$.

Esta última igualdad, se conoce con el nombre de *identidad de Bezout.*

Proposición 2.6. Mínimo común múltiplo

Sea $(\phi_1, \ldots, \phi_r)$ *un sistema de polinomios de* $\mathbb{K}[t]$. *Existe entonces un único polinomio mónico* $\mu \in \mathbb{K}[t]$ *verificando las condiciones:*

(1) $\mu \in \mathbb{K}[t]\phi_i$ *para* $i = 1, \ldots, r$ *(es decir* μ *es múltiplo de* ϕ_i*).*

(2) *Si* $\varphi \in \mathbb{K}[t]\phi_i$ *para* $i = 1, \ldots, r$ *entonces* $\varphi \in \mathbb{K}[t]\mu$.

Se denomina a μ *mínimo común múltiplo de* $(\phi_1, \ldots, \phi_r)$ *y se escribe*

$$\mu = \text{m.c.m.}(\mu_1, \ldots, \mu_r).$$

Demostración

Basta tomar $\mu \in \mathbb{K}[t]$ el polinomio mónico tal que

$$\mathbb{K}[t]\mu = \mathbb{K}[t]\phi_1 \cap \ldots \cap \mathbb{K}[t]\phi_r. \quad \square$$

Proposición 2.7. Cociente por ideales

Si $\phi \in \mathbb{K}[t]$, *y* $\text{gr}\,\phi = m$ *entonces el espacio vectorial sobre* $\mathbb{K}$ *cociente* $\mathbb{K}[t]_\phi = \mathbb{K}[t]/\mathbb{K}[t]\phi$ *es isomorfo al espacio vectorial* $\mathbb{K}_m[t]$ *de los polinomios de grado estrictamente menor que* m. *En particular se tiene* $\dim(\mathbb{K}[t]/\mathbb{K}[t]\phi) = m$.

APENDICE II

ORIENTACION Y VOLUMEN

Mediante una simetria (vectorial, afín u ortogonal) un guante de la mano derecha se identifica geométricamente con un guante de la mano izquierda, es decir, no existe ninguna propiedad geométrica que distinga un guante del otro en ninguna de las geometrias estudiadas en capítulos anteriores. Sin embargo, sabemos por experiencia que dichos guantes son distintos. El objetivo de este apéndice es definir subgeometrias de las geometrias expuestas hasta aquí que son más ricas en propiedades de interés y que permiten, entre otras cosas, distinguir geométricamente guantes de manos diferentes y de tamaños distintos.

1. ORIENTACION Y VOLUMEN EN GEOMETRIA VECTORIAL

Sea V un espacio vectorial de dimensión $n>0$ sobre el cuerpo de los números reales $\mathbb{R}$.

Definición 1.1. Volumen

Sea ε una base de V y $\mathbf{v} \in V^n$ un sistema de n vectores de V. Si P es la matriz cuadrada que verifica $\mathbf{v}=\varepsilon P$, llamaremos volumen orientado de $\mathbf{v}$ respecto a ε a $\omega_\varepsilon(\mathbf{v})=\det P$. La aplicación $\omega_\varepsilon\colon V^n \to \mathbb{R}$ se denomina forma de volumen respecto de ε.

Se llama volumen de $\mathbf{v}$ respecto a ε al valor absoluto de $\omega_\varepsilon(\mathbf{v})$.

Proposición 1.2.

Fijada una base ε de V se tiene:

1. La aplicación $\omega_\varepsilon\colon V^n \to \mathbb{R}$ es multilineal alternada, es decir, es lineal respecto a cada factor de V y cambia de signo al permutar dos elementos del sistema al que se aplica.

2. $\omega_\varepsilon(\mathbf{v}\,Q) = \omega_\varepsilon(\mathbf{v}) \det Q$ para toda matriz cuadrada, Q, de orden n.

3. $\mathbf{v}$ es base si y sólo si $\omega_\varepsilon(\mathbf{v}) \neq 0$.

Demostración

Es una consecuencia inmediata de la definición de ω_ε y de las propiedades de los determinantes. □

Proposición 1.3.

Sean ε, ε', δ, δ' bases de V.

Si $\omega_\varepsilon(\delta) = \omega_\varepsilon(\delta')$ entonces $\omega_{\varepsilon'}(\delta) = \omega_{\varepsilon'}(\delta')$.

Si signo de $\omega_\varepsilon(\delta) =$ signo de $\omega_\varepsilon(\delta')$ entonces

$$\text{signo de } \omega_{\varepsilon'}(\delta) = \text{signo de } \omega_{\varepsilon'}(\delta').$$

Demostración

Sea $\varepsilon = \delta P$, $\varepsilon = \delta' P'$, $\varepsilon' = \delta Q$, $\varepsilon' = \delta' Q'$ y $\varepsilon' = \varepsilon R$.

Si $\omega_\varepsilon(\delta) = \omega_\varepsilon(\delta')$ entonces $\det P = \det P'$. Como $\varepsilon = \delta P$, $\varepsilon' = \varepsilon R = \delta P R$ y $\varepsilon' = \delta' P' R$, luego $PR = Q$ y $P'R = Q'$ así:

$$\omega_{\varepsilon'}(\delta) = \det Q = \det P \det R = \det P' \det R = \det Q' = \omega_{\varepsilon'}(\delta').$$

Análogamente se demuestra la afirmación referente al signo. □

Definición 1.4.

Se dice que dos bases δ y δ' de V tienen la misma orientación si existe ε base de V tal que

$$\text{signo de } \omega_\varepsilon(\delta) = \text{signo de } \omega_\varepsilon(\delta')$$

Se dice que dos bases δ y δ' de V tienen el mismo volumen orientado si existe ε base de V tal que

$$\omega_\varepsilon(\delta) = \omega_\varepsilon(\delta')$$

Proposición 1.5.

1. Las relaciones «tener el mismo volumen orientado» y «tener la misma orientación» son relaciones de equivalencia sobre el conjunto B formado por todas las bases de V.

2. Hay exactamente dos clases de equivalencia en el conjunto cociente de B por la relación de equivalencia «tener la misma orientación».

Demostración

El apartado 1 es consecuencia de la propia definición 1.4 y de 1.3.

En cuanto al apartado 2, como sólo hay dos posibles signos para un número real, es claro que el número de clases de equivalencia es a lo sumo dos. Por otra parte es fácil comprobar que $(e_1, ..., e_n)$ y $(-e_1, e_2, ..., e_n)$ tienen signo distinto, por tanto hay exactamente dos clases de equivalencia. □

Definición 1.6. Orientación

Las clases de equivalencia del cociente de B por la relación «tener la misma orientación» se denominan orientaciones de V. Un espacio vectorial orientado es una pareja (V, Ω) donde Ω es una de las orientaciones de V. En (V, Ω) una base ε tiene la orientación *positiva si $\varepsilon \in \Omega$ y en caso contrario se dice que tiene la orientación negativa.*

Definición 1.7.

Un automorfismo $f \in GL(V)$ decimos que preserva la orientación (respectivamente el volumen orientado) si para cada base ε de V, ε y $f(\varepsilon)$ tienen la misma orientación (resp. volumen orientado).

Proposición 1.8.

Dado $f \in GL(V)$, son equivalentes las siguientes afirmaciones:

i) f preserva la orientación (respectivamente el volumen orientado).

ii) Existe una base ε de V tal que ε y $f(\varepsilon)$ tienen la misma orientación (resp. volumen orientado).

iii) Existe una base ε de V tal que de $\det M_\varepsilon(f) > 0$ (resp. $\det M_\varepsilon(f) = 1$).

iv) Para cada base ε de V se tiene $\det M_\varepsilon(f) > 0$ (resp. $\det M_\varepsilon(f) = 1$).

Demostración

i) → ii) es trivial.

ii) → iii) Sea ε base de V tal que ε y $f(\varepsilon)$ tienen la misma orientación. Como $f(\varepsilon) = \varepsilon M_\varepsilon(f)$ entonces $\det M_\varepsilon(f) > 0$.

iii) → iv) Supongamos que $\det M_\varepsilon(f) > 0$ y que ε' es otra base de V tal que $\varepsilon' = \varepsilon P$. Entonces $\det M_{\varepsilon'}(f) = \det P^{-1} M_\varepsilon(f) P = \det M_\varepsilon(f) > 0$.

iv) → i) Para cada base ε de V, $f(\varepsilon) = \varepsilon M_\varepsilon(f)$ con $\det M_\varepsilon(f) > 0$, por lo tanto ε y $f(\varepsilon)$ tienen la misma orientación.

Análogamente para el caso en que f preserva el volumen. □

Corolario 1.9.

El conjunto de los automorfismos que preservan la orientación (respectivamente el volumen orientado), $GL^+(V)$ (resp. $SL(V)$), forman un subgrupo de $GL(V)$.

Demostración

Si f, $g \in GL^+(V)$ y ε es base de V,

$$\det M_\varepsilon(f \circ g) = \det M_\varepsilon(f) \det M_\varepsilon(g) > 0,$$

por tanto $f \circ g \in GL^+(V)$. Del mismo modo

$$\det M_\varepsilon(f^{-1}) = (\det M_\varepsilon(f))^{-1} > 0,$$

luego $f^{-1} \in GL^+(V)$. □

Observaciones 1.10.

i) El par $(V, GL^+(V))$ define una subgeometria de $(V, GL(V))$ donde la orientación de una base es una propiedad geométrica. Un observador conocedor de esta nueva geometria podrá distinguir geométricamente su mano derecha de la izquierda.

ii) El par $(V, SL(V))$ define a su vez una subgeometria de $(V, GL^+(V))$ donde la forma de volumen es un invariante geométrico. Un observador conocedor de dicha geometría puede distinguir zapatos de distinto número y de distinto pie. También puede comparar volúmenes, por ejemplo, el hecho de que una base tenga volumen doble que otra es una propiedad geométrica.

2. ORIENTACION Y VOLUMEN EN GEOMETRIA AFIN

Sea X un espacio afín de dimensión $n > 0$ sobre el cuerpo de los números reales $\mathbb{R}$.

Definición 2.1. Orientación y volumen

Dos sistemas de referencia (cartesianos o afines) de X, ε *y* ε', *se dice que tienen la misma orientación (respectivamente el mismo volumen orientado) si como bases de* $\hat{X}$ *tienen la misma orientación (resp. el mismo volumen orientado). Si* B *es el conjunto de todos los sistemas de referencia (cartesianos o afines) de* X, *el conjunto cociente de* B *por la relación «tener la misma orientación» consta de dos clases de equivalencia que llamaremos orientaciones de* X. *Un espacio afín orientado es un par* (X, Ω) *donde* Ω *es una de las orientaciones de* X. *En* (X, Ω) *un sistema de referencia* ε *tiene la orientación positiva si* $\varepsilon \in \Omega$ *y en caso contrario tiene la orientación negativa.*

Nota 2.2.

De modo totalmente análogo al caso vectorial se pueden definir transformaciones afines que conservan la orientación o el volumen orientado, lo que da lugar a los grupos $GA^+(X)$ y $SA(X)$ y a las geometrías $(X, GA^+(X))$ y $(X, SA(X))$.

Observación 2.3.

Es inmediato que orientar o medir volúmenes en X es equivalente a orientar o medir volúmenes en $\hat{X}$. También es fácil observar que orientar el espacio afín X equivale a orientar $\overline{X}$, pues dos sistemas de referencia cartesianos $(e_0, \vec{\varepsilon})$ y $(e'_0, \vec{\varepsilon}')$ tienen la misma orientación si y sólo si las bases $\vec{\varepsilon}$ y $\vec{\varepsilon}'$ tienen la misma orientación en $\overline{X}$.

3. ORIENTACION Y VOLUMEN EN GEOMETRIA EUCLIDEA

En el caso de los espacios vectoriales euclídeos se produce un fenómeno especial: toda transformación lineal euclídea que preserve la orientación también conserva la forma de volumen.

Sea $\mathbb{E}$ un espacio vectorial euclídeo de dimensión $n>0$, con producto escalar $\langle , \rangle$.

Definición 3.1. Orientación

Un espacio vectorial euclídeo orientado es un par $(\mathbb{E}, \Omega)$, *donde* Ω *es una orientación del espacio vectorial* $\mathbb{E}$.

Definición 3.2.

Llamaremos $O^+(\mathbb{E})$ *al subgrupo,* $GL^+(\mathbb{E}) \cap O(\mathbb{E})$, *formado por las transformaciones lineales euclídeas que conservan la orientación.*

Proposición 3.3. Forma de volumen canónica

Sea $(\mathbb{E}, \Omega)$ *un espacio vectorial euclídeo orientado. Si* ε *y* ε' *son dos bases ortonormales de* $\mathbb{E}$ *con la orientación positiva entonces* $\omega_\varepsilon = \omega_{\varepsilon'}$. *Llamaremos a* $\omega = \omega_\varepsilon = \omega_{\varepsilon'}$ *la forma de volumen canónica de* $\mathbb{E}$.

Demostración

Supongamos que $\varepsilon = \varepsilon' P$, entonces $PP^t = I$, luego $(\det P)^2 = 1$, por tanto $\det P = \pm 1$ y como ε y ε' tienen la misma orientación, $\det P = 1$.

Si $\mathbf{v} \in \mathbb{E}^n$ y $\mathbf{v} = \varepsilon Q$, $\mathbf{v} = \varepsilon' Q'$ entonces $\mathbf{v} = \varepsilon' PQ$, luego

$$\omega_\varepsilon(\mathbf{v}) = \det Q = \det Q' = \omega_{\varepsilon'}(\mathbf{v}). \qquad \square$$

Proposición 3.4.

La aplicación ω *es un invariante para sistemas de vectores en la geometría* $(\mathbb{E}, O^+(\mathbb{E}))$.

Demostración

Hemos de probar que para cada $\mathbf{v} \in \mathbb{E}^n$,

$$\omega(\mathbf{v}) = \omega(f(\mathbf{v})), \text{ para cada } f \in O^+(\mathbb{E}).$$

Sea ε una base ortonormal de $\mathbb{E}$.

Supongamos que $\mathbf{v} = \varepsilon P$, entonces $f(\mathbf{v}) = f(\varepsilon) P$. Por ser $f \in O^+(\mathbb{E})$, $f(\varepsilon)$ es ortonormal con la orientación positiva y aplicando 3.3.

$$\omega(f(\mathbf{v})) = \omega_{f(\varepsilon)}(f(\mathbf{v})) = \det P = \omega_{\varepsilon}(\mathbf{v}) = \omega(\mathbf{v}). \quad \square$$

Nota 3.5.

Obsérvese que sin necesidad de estar $\mathbb{E}$ orientado es posible definir el volumen de un sistema $\mathbf{v} \in \mathbb{E}^n$, como $|\omega_{\varepsilon}(\mathbf{v})|$, siendo ε cualquier base ortonormal de $\mathbb{E}$. Así pues, toda transformación lineal euclídea conserva el volumen y por tanto el volumen es un invariante en la geometría $(\mathbb{E}, O(\mathbb{E}))$.

Nótese también que una orientación en $\mathbb{E}$ no induce de modo canónico una orientación en los subespacios de $\mathbb{E}$, mientras que cualquier subespacio de $\mathbb{E}$ tiene una estructura vectorial euclídea, «heredada» de $\mathbb{E}$, que permite medir volúmenes como acabamos de explicar.

Por último, si E es un espacio afín euclídeo, se puede definir $OA^+(E)$ de modo análogo a como hemos definido $O^+(\mathbb{E})$. En la geometría $(E, OA^+(E))$ «tener la misma orientación» y «tener el mismo volumen orientado» son propiedades geométricas para sistemas de referencia o paralelepípedos de E.

SOLUCIONES A LOS EJERCICIOS *

LECCION 1

Ejercicio 1.1. Definimos:

$$G \times X \ni (g,\ x_i) \to g x_i = g(x_i) \in X$$

y se trata claramente de una actuación.

Es fácil comprobar que la actuación es fiel y transitiva.

El subgrupo de isotropia de $x_i \in X$ está compuesto por la identidad y la simetría respecto una recta que pasa por x_i y por el centro de P

Ejercicio 1.5. Definimos:

$$G \times C \ni \left(A, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \right) \to A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in C.$$

Se trata de una actuación fiel, pues, por ejemplo,

$$M \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} =$$

No es transitiva pues el conjunto de órbitas es:

$$C/G = \left\{ \{0\},\ \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -x_1 \\ -x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \right\} \middle| \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in V_3(\mathbb{R}) \right.$$

$$\left. x_1^2 + x_2^2 = x_3^2 \right\}$$

Habida cuenta de la descripción de C/G un invariante completo es:

$$\phi\colon C \ni \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \text{signo } x_1 x_2 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in V_2(\mathbb{R}).$$

Ejercicio 1.7. Como aplicación directa de la definición 1.24, el subgrupo de isotropía de

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \\ x_n \end{pmatrix} \in V_n(\mathbb{K})$$

en la actuación de $GL(n, \mathbb{K})$ (resp. $GA(n, \mathbb{K})$) sobre $V_n(\mathbb{K})$ es:

$$GL(n, \mathbb{K})_x = \left\{ A \in GL(n, \mathbb{K}) \mid (A - I) \begin{pmatrix} x_1 \\ \\ x_n \end{pmatrix} = 0 \right\},$$

respectivamente:

$$GA(n, \mathbb{K})_x = \left\{ A \in GA(n, \mathbb{K}) / (A - I) \begin{pmatrix} 1 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = 0 \right\}$$

Ejercicio 1.8. El grupo de transformaciones de $(V_n(\mathbb{R}), O(n))$ es el subgrupo de $GL(V_n(\mathbb{R}))$ formado por los elementos f de $GL(V_n(\mathbb{R}))$, que verifican:

para cada $x \in V_n(\mathbb{R})$, $x^t x = f(x)^t f(x)$.

Llamaremos a este grupo $O(V_n(\mathbb{R}))$.

En efecto, si $f \in O(V_n(\mathbb{R}))$, como $f \in GL(V_n(\mathbb{R}))$, existe $A \in GL(n, \mathbb{R})$ tal que:

$$f(x) = Ax \text{ para cada } x \in V_n(\mathbb{R}).$$

Por tanto $x^t x = f(x)^t f(x) = x^t A^t Ax$ para todo $x \in V_n(\mathbb{R})$, de donde es fácil deducir que $A^t A = I$ y así $A \in O(n)$. Con lo cual $\phi(A) = f$, siendo ϕ el homomorfismo definido en 3.3.

De modo análogo se prueba que el grupo de transformaciones de $(V_n(\mathbb{R}), O(p, q))$ es el subgrupo de $GL(V_n(\mathbb{R}))$ formado por los elementos f de $GL(V_n(\mathbb{R}))$, que verifican:

$$\text{para cada } x \in V_n(\mathbb{R}), \; x^t S_{pq} x = f(x)^t S_{pq} f(x).$$

Ejercicio 1.9. Sea $\Phi' : G' \to S(X)$ el homomorfismo natural definido por (X, G') y $\Phi : G \to S(X)$ el homomorfismo definido por (X, G) (consultar 3.3). Por definición de grupo de transformaciones es $G'_x = \Phi'(G')$ y $G_x = \Phi(G)$.

Supongamos que $G_x \subset G'_x$. Si $g \in G$, $\Phi(g) \in G_x \subset G'_x$ y como $im\, \Phi' = G'_x$ y G' actúa fielmente sobre X, existe un único g' tal que $\Phi'(g') = \Phi(g)$. Definimos:

$$\xi : G \ni g \to \xi(g) = g' \in G'$$

Es fácil probar que ξ se trata de un monomorfismo y para todo $x \in X$, $\xi(g)(x) = \Phi(g)(x) = gx$ como queríamos probar.

Recíprocamente, si existe $\xi : G \to G'$ monomorfismo, tal que $\xi(g)x = gx$ para todo $x \in X$, dado $\Phi(g) \in G_x$, se tiene

$$\Phi(g)x = gx = \xi(g)x = \Phi'(\xi(g))x$$

para todo $x \in X$. Luego $\Phi(g) = \Phi'(\xi(g)) \in G'_x$ y entonces G_x es subgrupo de G'_x.

Ejercicio 1.11. Definimos $\phi : V_n(\mathbb{K}) \to \{0, 1\}$ del siguiente modo:

$$\phi(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

ϕ es claramente un invariante para $(V_n(\mathbb{K}), GL(n, \mathbb{K}))$, pero no lo es para $(V_n(\mathbb{K}), GA(n, \mathbb{K}))$, en efecto:

$$\text{si } A=\left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 1 & \\ 0 & I \\ \vdots & \\ 0 & \end{array}\right) \in GA(n,\ \mathbb{K}),\ A\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

y

$$\phi\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}=0\neq 1=\phi\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

LECCION 2

Ejercicio 2.3. En general $\mathbb{A}^2$ no tiene estructura de módulo sobre $\mathbb{A}$ con las operaciones en el enunciado. En efecto, si existe $\mu\in\mathbb{A}$, $\mu\neq 1$:

$$1\,(\mu,\ \mu)=(1\cdot\mu,\ 1)=(\mu,\ 1)\neq(\mu,\ \mu)$$

Ejercicio 2.4. i) Si $(v_1, \ldots, v_r)$ *d.l.* $(w_1, \ldots, w_s)$ entonces

$$v_i=\sum_{j=1}^{s} a_{ji}\, w_j,\ i=1,\ \ldots,\ r.$$

Llamando $A=(a_{ij})\in FL(r,\ s)$, se tiene $(v_1, \ldots, v_r)=(w_1, \ldots, w_s)\,A$. Recíprocamente, si existe

$$A=(a_{ij})\in FL(r,\ s)\ \text{y}\ (v_1,\ \ldots,\ v_r)=(w_1,\ \ldots,\ w_s)\,A$$

entonces

$$v_i=\sum_{j=1}^{s} a_{ji}\, w_j,\ \text{luego}\ (v_1,\ \ldots,\ v_r)\ d.l.\ (w_1,\ \ldots,\ w_s).$$

ii) Supongamos que $A=(a_{ij})$ y $B=(b_{jk})$:

$$((v_1, \ldots, v_r)\,A)\,B=\left(\sum_{i=1}^{r} a_{i1}\, v_i, \ldots, \sum_{i=1}^{r} a_{im}\, v_i\right)B=$$

$$=\left(\sum_{j=1}^{m}\left[b_{j1} \sum_{i=1}^{r} a_{ij}\, v_i\right], \ldots, \sum_{j=1}^{m}\left[b_{js}\left(\sum_{i=1}^{r} a_{ij}\, v_i\right)\right]\right)=$$

$$=\left(\sum_{i=1}^{r}\left(\sum_{j=1}^{m} a_{ij}\, b_{j1}\right) v_i, \ldots, \sum_{i=1}^{r}\left(\sum_{j=1}^{m} a_{ij}\, b_{js}\right) v_i\right)$$

iii) Supongamos que $A=(a_{ij})$ y $B=(b_{ij})$:

$$(v_1, \ldots, v_r)(\lambda A+\mu B)=\left(\sum_{i=1}^{r} (\lambda a_{i1}+\mu b_{i1}) v_i, \ldots, \sum_{i=1}^{r} (\lambda a_{im}+\mu b_{im}) v_i\right)=$$

$$=\lambda\left(\sum_{i=1}^{r} a_{i1}\, v_i, \ldots, \sum_{i=1}^{r} a_{im}\, v_i\right)+\mu\left(\sum_{i=1}^{r} b_{i1}\, v_i, \ldots, \sum_{i=1}^{r} b_{im} v_i\right)=$$

$$=\lambda(v_1, \ldots, v_r)\,A+\mu(v_1, \ldots, v_r)\,B.$$

Ejercicio 2.5. i) Si $v \in S$ es claro que v *d.l.* S luego $v \in \langle S\rangle$, por tanto $S \subset \langle S\rangle$.

ii) Si $v \in \langle S_1\rangle$, v *d.l.* S_1, luego existe un sistema $(v_1, \ldots, v_r) \in S_1^r$ tal que v *d.l.* $(v_1, \ldots, v_r)$. Como $S_1 \subset S_2$, $(v_1, \ldots, v_r) \in S_2^r$ luego v *d.l.* S_2, con lo cual $v \in \langle S_2\rangle$. Por lo tanto $\langle S_1\rangle \subset \langle S_2\rangle$.

iii) Por i), $S \subset \langle S\rangle$ y por ii), $\langle S\rangle \subset \langle\langle S\rangle\rangle$. Si $v \in \langle\langle S\rangle\rangle$, existe $(v_1, \ldots, v_r) \in \langle S\rangle^r$ y $A \in FL(r, m)$ de modo que $v=(v_1, \ldots, v_r)\,A$. Como $(v_1, \ldots, v_r) \in \langle S\rangle^r$, existe $(w_1, \ldots, w_s) \in S^s$ y $B \in FL(s, r)$ tales que:

$$(v_1, \ldots\ v_r)=(w_1, \ldots, w_s)\,B.$$

Por tanto,

$$v=(v_1, \ldots, v_r)\,A=((w_1, \ldots, w_s)\,B)\,A=(w_1, \ldots, w_s)\,BA,$$

luego v *d.l.* S con lo que $v \in \langle S\rangle$.

Ejercicio 2.6. Sea $(t^{n_1}, \ldots, t^{n_r}) \in \{1, t, \ldots, t^n, \ldots\}^r$ con $n_i \neq n_j$ para $i \neq j$. Si $(k_1, \ldots, k_r) \in \mathbb{K}^r$ es tal que $k_1 t^{n_1} + \ldots + k_r t^{n_r} = 0$, por la definición de igualdad de polinomios, $k_1 = \ldots = k_r = 0$.

Ejercicio 2.8. Supongamos que $(\lambda_1, \ldots, \lambda_r, \lambda) \in \mathbb{K}^{r+1}$ y

$$\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_r v_r + \lambda v = 0, \text{ si } \lambda \neq 0$$

entonces

$$v = -\frac{\lambda_1}{\lambda} v_1 \ldots - \frac{\lambda_r}{\lambda} v_r$$

en contradicción con la hipótesis: v no *d.l.* de $(v_1, \ldots, v_r)$. Si $\lambda = 0$, entonces $\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_r v_r = 0$, y como $(v_1, \ldots, v_r)$ es *l.i.*, $\lambda_1 = \ldots = \lambda_r = 0$, luego $(v_1, \ldots, v_r, v)$ es *l.i.*

Ejercicio 2.10. Podemos probar aún más: no existe ningún sistema *l.i.* en V con la estructura de módulo del ejemplo 5 de 1.2. En efecto, si $S \subset V$ es *l.i.*, para cada $v \in S$ debería ser (v) *l.i.* Ahora bien $(t-1)v = v - v = 0$ y $t - 1 \neq 0$ luego (v) es *l.d.*

Ejercicio 2.11. Razonemos por inducción sobre m.

Si $m = 1$ entonces (v_1) es la base deseada.

Sea $(v_1, \ldots, v_m)$ el sistema generador del enunciado. Si es *l.i.* $\varepsilon = (v_1, \ldots, v_m)$ es la base buscada. Si $(v_1, \ldots, v_m)$ es *l.d.* existe un v_i que depende linealmente de $(v_1, \ldots, v_{i-1}, v_{i+1}, \ldots, v_m)$, por tanto $\{v_1, \ldots, v_m\} \subset \langle v_1, \ldots, v_{i-1}, v_{i+1}, \ldots, v_m \rangle$, y $(v_1, \ldots, v_{i-1}, v_{i+1}, \ldots, v_m)$ es sistema generador con $m - 1$ vectores, y podemos aplicar la hipótesis de inducción.

Ejercicios 2.12. Razonemos por inducción sobre n.

Si $n = 1$ entonces para $i = 1, \ldots, s$ existe $\lambda_i \in \mathbb{K}$ con $u_i = \lambda_i v_1$ y como es $s > 1$ el sistema $(u_1, \ldots, u_s)$ es linealmente dependiente.

Supondremos cierto el resultado para conjuntos *l.i.* con menos de n vectores. Como $(u_1, \ldots, u_s) \subset \langle v_1, \ldots, v_n \rangle$, existe $A = (a_{ij}) \in FL(n, s)$ tal que $(u_1, \ldots, u_s) = (v_1, \ldots, v_n)\, A$.

Podemos suponer sin pérdida de generalidad que a_{11} es no nulo, cambiando si fuera necesario el orden de los vectores de $(v_1, \ldots, v_n)$, pues debe ser u_1 no nulo. (Si u_1 es nulo el sistema $(u_1, \ldots, u_s)$ sería ya *l.d.*). Llamando

$$A' = (a_{ij} - (a_{1j}/a_{11})a_{i1}) \in FL(n-1, s-1) \quad (i=2, ..., n, j=2, ..., s),$$

es fácil comprobar que

$$(u_2 - (a_{12}/a_{11})\, u_1, \ ..., \ u_s - (a_{1s}/a_{11})u_1) = (v_2, \ ..., \ v_n)\, A'$$

Por la hipótesis de inducción este último sistema es *l.d.*, es decir, existe $(\lambda_1, ..., \lambda_r) \subset \mathbb{K}$ tal que

$$\lambda_2(u_2 - (a_{12}/a_{11})u_1) + ... + \lambda_s(u_s - (a_{1s}/a_{11})u_1) = 0,$$

con lo que

$$(-\lambda_2(a_{12}/a_{11}) - ... - \lambda_s(a_{1s}/a_{11}))u_1 + \lambda_2 u_2 + ... + \lambda_s u_s = 0.$$

Por tanto $(u_1, ..., u_s)$ es *l.d.*

La deducción de la propiedad: «todas las bases tienen el mismo número de elementos» es, a partir del resultado anterior, trivial.

Ejercicio 2.14. Por el ejercicio 2.12 debe ser $r \leqslant n$. Si $r=n$, por el ejercicio 2.13, es $(v_1, ..., v_r)$ base. Si $r<n$, $(v_1, ..., v_r)$ no es base, y por tanto no es sistema generador. Existe pues $v_{r+1} \in V$ tal que v_{r+1} no está en $\langle v_1, ..., v_r \rangle$.

Por el ejercicio 2.8 se concluye que $(v_1, ..., v_r, v_{r+1})$ es *l.i.* Repitiendo este argumento se construyen $v_{r+2}, ..., v_n$ de modo que $(v_1, ..., v_n)$ es *l.i.* Utilizando ahora el ejercicio 2.13 y que dim $V=n$ se concluye la demostración.

Ejercicio 2.15. Para cada $u, v \in U$, tomando $\lambda = \mu = 1 \in \mathbb{A}$ tenemos $1\mu + 1v = u + v \in U$.

Si $u \in U$ y $\lambda \in \mathbb{A}$, tomando $v=0$, $\mu=1$ tenemos $\lambda u + 1 \cdot 0 = \lambda u \in U$.

Luego U es submodulo de M.

Recíprocamente, si U es submódulo de M y $\lambda, \mu \in \mathbb{A}$, $u, v \in U$, se verifica $\lambda u \in U$ y $\lambda v \in U$, por tanto $\lambda u + \mu v \in U$.

Ejercicio 2.16. Sean $u, v \in \bigcap_{i \in I} U_i$ y $\lambda, \mu \in \mathbb{A}$. Para cada $i \in I$, $u, v \in U_i$ y $\lambda, \mu \in \mathbb{A}$, luego $\lambda u + \mu v \in U_i$, por tanto

$$\lambda u + \mu v \in \bigcap_{i \in I} U_i.$$

Ejercicio 2.17. Consideremos el anillo $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}=\{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}\}$ de clases de congruencia de enteros módulo seis. $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ se puede considerar como módulo sobre $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$, además es módulo libre pues $(\bar{1})$ es una base. Sin embargo, $\{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}\}$ es un submódulo no libre de $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$; obsérvese que los sistemas $(\bar{2})$, $(\bar{4})$ y $(\bar{2}, \bar{4})$ son *l.d.* pues $\bar{3}\ \bar{2}=\bar{0}$, $\bar{3}\ \bar{4}=\bar{0}$ y $\bar{2}+\bar{4}=\bar{0}$.

Ejercicio 2.20. Demostraremos que $\dim U_1 \cap U_2=r$ puede tomar todos los valores enteros que verifican la condición:

$$\text{máx } (0, (n_1+n_2)-\dim V)\leqslant r\leqslant \text{mín } (n_1, n_2).$$

Para cada valor r posible para $\dim U_1 \cap U_2$ se verifica que $\dim U_1+U_2=n_1+n_2-r$, entonces todos los posibles valores para $\dim U_1+U_2$ son los enteros m que verifican:

$$\max (n_1, n_2)\leqslant m\leqslant \min (n_1+n_2, \dim V).$$

En primer lugar probaremos que si $\dim U_1 \cap U_2=r$, entonces $\text{máx } (0, (n_1+n_2)-\dim V)\leqslant r\leqslant \text{mín } (n_1, n_2)$. En efecto, como $U_1 \cap U_2 \subset U_1$ y $U_1 \cap U_2 \subset U_2$, $r\leqslant n_1$ y $r\leqslant n_2$ luego $r\leqslant \text{mín } (n_1, n_2)$. Por otra parte,

$$\dim V\geqslant \dim U_1+U_2=n_1+n_2-r \quad \text{luego} \quad r\leqslant (n_1+n_2)-\dim V$$

$$\text{y como } r\geqslant 0\text{, tenemos máx } (0, (n_1+n_2)-\dim V)\leqslant r.$$

Por último veremos que para cada r tal que

$$\text{máx } (0, (n_1+n_2)-\dim V)\leqslant r\leqslant \text{mín } (n_1, n_2)$$

existen $U_1, U_2 \in \mathscr{L}(V)$ tales que $\dim U_1=n_1$, $\dim U_2=n_2$ y $\dim U_1 \cap U_2=r$.

Sea $\varepsilon=(e_1, \dots, e_n)$ una base de V. Tomamos

$$U_1=\langle e_1, \dots, e_{n_1}\rangle \quad \text{y} \quad U_2=\langle e_1, \dots, e_r, e_{n_1+1}, \dots, e_{n_1+n_2-r}\rangle$$

obsérvese que $n_1+n_2-r\leqslant n$ pues $n_1+n_2-\dim V\leqslant r$. Claramente $\dim U_1=n_1$, $\dim U_2=n_2$ y $U_1 \cap U_2=\langle e_1, \dots, e_r\rangle$ tiene dimensión r.

LECCION 3

Ejercicio 3.4. 1. Sean $\lambda, \mu \in \mathbb{A}$ y $u, v \in \operatorname{Ker} f$,

$$f(\lambda u + \mu v) = \lambda f(u) + \mu f(v) = 0$$

luego

$$\lambda u + \mu v \in \operatorname{Ker} f.$$

2. Si f es monomorfismo, como $f(0) = 0$ y f es inyectiva, $\operatorname{Ker} f = f^{-1}(0) = \{0\}$.

Si $\operatorname{Ker} f = \{0\}$ y $u, v \in M$ verifican $f(u) = f(v)$, entonces, $f(u-v) = 0$ y así $u - v \in \operatorname{Ker} f = \{0\}$, luego $u = v$. Por tanto f es inyectiva.

Ejercicio 3.5. Si $u, v \in M$,

$$f' \circ f(u+v) = f'(f(u) + f(v)) = f' \circ f(u) + f' \circ f(v), \text{ si } \lambda \in \mathbb{A},$$
$$f' \circ f(\lambda u) = f'(\lambda f(u)) = \lambda f' \circ f(u).$$

$\operatorname{Ker} f' \circ f = f^{-1}(\operatorname{Ker} f')$, se comprueba inmediatamente.

Ejercicio 3.6. La prueba de que $FL(M, M')$ es un modulo sobre $\mathbb{A}$ es totalmente inmediata.

En cuanto a la afirmación $\dim FL(V, V') = n \cdot m$, construiremos a continuación una base: sea $(e_1, \ldots, e_n)$ una base de V y $(e'_1, \ldots, e'_m)$ una base de V', llamaremos $f_{ij} \in FL(V, V')$ al homomorfismo que verifica:

$$f_{ij}(e_h) = \begin{cases} 0 & \text{si } h \neq i \\ e'_j & \text{si } h = i \end{cases}$$

En primer lugar (f_{ij}) es un sistema l.i. En efecto, si $(\lambda_{ij}) \in \mathbb{K}^{n \cdot m}$ verifica:

$$\Sigma \lambda_{ij} f_{ij} = 0, \text{ para cada } h \in \{1, \ldots, n\},$$

$$\Sigma \lambda_{ij} f_{ij}(e_h) = 0, \text{ luego } \sum_{j=1}^{m} \lambda_{hj} e'_j = 0,$$

entonces

$$\lambda_{hj} = 0, \ j = 1, \ldots, m \text{ para cada } h \in \{1, \ldots, n\}.$$

Por tanto,

$$\lambda_{ij}=0, \text{ para todo } i, j \in \{1, ..., n\} \times \{1, ..., m\}.$$

Por último (f_{ij}) es sistema generador. En efecto, sea $f \in FL(V, V')$, si $f(e_i)=\sum_{j=1}^{m} a_{ij}\, e'_j$ para cada $i \in \{1, ..., n\}$, entonces es fácil comprobar que

$$f=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_{ij} f_{ij}.$$

Ejercicio 3.7. La actuación es fiel.

Sea $f \in GL(V)$, tal que para cada $v \in V$, $f(v)=v$, en particular, si $(e_1, ..., e_n)$ es una base de V, $f(e_i)=\mathrm{id}_V(e_i)=e_i$, entonces por el teorema fundamental de homomorfismos $f=\mathrm{id}_V$.

No es transitiva: si $v \in V$, $v\neq 0$, no existe $f \in GL(V)$ tal que $f(v)=0$, por tanto v y 0 están en órbitas distintas.

Las órbitas de la actuación son $V-\{0\}$ y $\{0\}$. En efecto, dados v_1, $v_2 \in V-\{0\}$, basta ampliar a bases $(v_1, e_2, ..., e_n)$ y $(v_2, e'_2, ..., e'_n)$ y construir $f \in GL(V)$ tal que

$$f(v_1)=v_2 \text{ y } f(e_i)=e'_i \text{ con } i=2, ..., n,$$

por tanto v_1 y v_2 están en la misma órbita.

Ejercicio 3.9. La actuación de $GL(V)$ sobre $\mathscr{L}(V)$ es la siguiente:

$$GL(V)\times\mathscr{L}(V) \ni (f, U) \to f(U) \in \mathscr{L}(V).$$

La dimensión:

$$\dim\colon \mathscr{L}(V) \ni U \to \dim U \in \{0, 1, ..., \dim V\}$$

es un invariante para la actuación anterior que además es completo: si $\dim U_1=\dim U_2=r$, sean $(e_1, ..., e_r)$ base de U_1 y $(e'_1, ..., e'_r)$ base de U_2. Por el teorema de ampliación de bases, existen $(e_1, ..., e_r, ..., e_n)$ y $(e'_1, ..., e'_r, ..., e'_n)$ bases de V y por tanto existe $f \in GL(V)$ tal que $f(e_i)=e'_i$, $i=1, ..., n$, luego f verifica $f(U_1)=U_2$.

Ejercicio 3.10. La actuación de $GL(V)$ sobre $\mathscr{L}(V)^2$ es la siguiente:

$$GL(V) \times \mathscr{L}(V)^2 \ni (f, U_1, U_2) \to (f(U_1), f(U_2)) \in \mathscr{L}(V)^2.$$

Los invariantes:

$$\dim : \mathscr{L}(V)^2 \ni (U_1, U_2) \to (\dim U_1, \dim U_2) \in \{0, 1, ..., \dim V\}^2$$

$$\phi : \mathscr{L}(V)^2 \ni (U_1, U_2) \to \dim U_1 \cap U_2 \in \{0, 1, ..., \dim V\}$$

forman un sistema completo de invariantes para la clasificación inducida por la actuación anterior.

Es claro que se trata de un sistema de invariantes, veamos que es completo;

$$\text{sean } (U_1, U_2) \text{ y } (U'_1, U'_2) \in \mathscr{L}(V)^2$$

tales que

$$\dim U_1 = \dim U'_1 = n_1, \; \dim U_2 = \dim U'_2 = n_2 \text{ y}$$

$$\dim U_1 \cap U_2 = \dim U'_1 \cap U'_2 = r.$$

Sean $(e_1, ..., e_{n_1+n_2-r})$ una base de U_1+U_2 adaptada a U_1 y U_2 y $(e'_1, ..., e'_{n_1+n_2-r})$ una base de U_1+U_2 adaptada a U_1 y U_2 (véase 4.18 de la lección 2).

Ampliamos $(e_1, ..., e_{n_1+n_2-r})$ a $(e_1, ..., e_n)$ base de V y $(e'_1, ..., e'_{n_1+n_2-r})$ a $(e'_1, ..., e'_n)$ base de V. Entonces el isomorfismo $f \in GL(V)$ tal que $f(e_i)=e'_i$, $i=1, ..., n$, verifica $f(U_1)=U'_1$ y $f(U_2)=U'_2$.

Ejercicio 3.11. 1. Hemos de ver que $v_1+v_2-(v'_1+v'_2) \in U$, en efecto:

$$v_1+v_2-(v'_1+v'_2)=v_1-v'_1+v_2-v'_2 \in U$$

pues $v_1-v'_1 \in U$ y $v_2-v'_2 \in U$.

2. Hemos de probar que $\lambda v-\lambda v' \in U$, en efecto:

$$\lambda v-\lambda v'=\lambda(v-v') \in U \text{ pues } v-v' \in U.$$

Ejercicio 3.13. Dado $v \in V$, como $V = U_1 \oplus \ldots \oplus U_r$, v se escribe de forma única del modo $v = u_1 + \ldots + u_r$, $u_i \in U_i$. Por tanto, tenemos bien definidas las aplicaciones de 2.15,

$$\pi_i(v) = u_i \in U_i, \; i = 1, \; \ldots, \; r.$$

Para cada λ, $\mu \in \mathbb{K}$ y v, $v' \in V$, siendo $v = u_1 + \ldots + u_r$,

$$v' = u'_1 + \ldots + u'_r, \quad u_i, \; u'_i \in U_i, \quad i = 1, \; \ldots, \; r,$$

se tiene:

$$\lambda v + \mu v' = \lambda u_1 + \mu u'_1 + \ldots + \lambda u_r + \mu u'_r,$$

luego

$$\pi_i(\lambda v + \mu v') = \lambda \, \pi_i(v) + \mu \pi_i(v'), \quad i = 1, \; \ldots, \; r$$

con lo que se concluye que $\pi_i : V \to U_i$ son aplicaciones lineales.

Por la definición de π_i, $v = \pi_1(v) + \ldots + \pi_r(v)$ para cada $v \in V$, luego $\pi_1 + \ldots + \pi_r = id_V$. Para todo $u_i \in U_i$, $i \in \{1, \ldots, r\}$, $u_i = 0 + \ldots + u_i + \ldots + 0$, luego $\pi_i(u_i) = u_i$ y $\pi_j(u_i) = 0$ si $j \neq i$. Como para cada $v \in V$, $\pi_i(v) \in U_i$, $i = 1, \ldots, r$, $\pi_i^2(v) = \pi_i(v)$ y $\pi_i \circ \pi_j(v) = 0$ si $i \neq j$. Por último, como $\pi_i(v) \in U_i$ para todo $v \in V$ y $\pi_i(u) = u$ para todo $u \in U$ es claro que $im \; \pi_i = U_i$, $i = 1, \ldots, r$.

Ejercicio 3.20. Sean x, x', x'' los sistemas de coordenadas respecto a ε, ε' y ε'' respectivamente ($\varepsilon = (e_1, \ldots, e_n)$).

$$\begin{aligned} M_{\varepsilon\varepsilon''}(g \circ f) &= (x''_i \; (g \circ f \, (e_j))) = \\ &= (x''_i \, (g \, (\varepsilon' \; M_{\varepsilon\varepsilon'}(f) \; x(e_j)))) = \\ &= (x''_i \, (g \, (\varepsilon') \; M_{\varepsilon\varepsilon'}(f) \; x(e_j))) = \\ &= (x''_i \, (\varepsilon'' \; M_{\varepsilon'\varepsilon''}(g) \; M_{\varepsilon\varepsilon'}(f) \; x(e_j))) = \\ &= (x''_i \, (\varepsilon'') \; M_{\varepsilon'\varepsilon''}(g) \; M_{\varepsilon\varepsilon'}(f) \; x(e_j)) = \\ &= M_{\varepsilon'\varepsilon''}(g) \; M_{\varepsilon\varepsilon'}(f). \end{aligned}$$

Ejercicio 3.21. Dados f, $g \in FL(V, V')$,

$$\begin{aligned} M_{\varepsilon\varepsilon'}(f+g) &= (x'_i \, (f+g \, (e_j))) = (x'_i \, (f(e_j))) + \\ &+ (x'_i \, (g \, (e_j))) = M_{\varepsilon\varepsilon'}(f) + M_{\varepsilon\varepsilon'}(g). \end{aligned}$$

Si $\lambda \in \mathbb{K}$ y $f \in FL(V, V')$,

$$M_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}(\lambda f) = (x'_i(\lambda f(e_j))) = \lambda(x'_i(f(e_j))) = \lambda M_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}(f).$$

claramente si $M_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}(f) = 0$ entonces $f = 0$, por lo que $M_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}$ es monomorfismo, y como además:

$$\dim FL(V, V') = m \cdot n = \dim FL(m, n)$$

podemos afirmar que $M_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}$ es un isomorfismo.

LECCION 4

Ejercicio 4.6. Las matrices A y A' tienen el mismo polinomio característico:

$$\chi(t) = (t-1)(t+1)(t-2)$$

por tanto, 1, -1 y 2 son autovalores para f y f'. Elijamos vectores no nulos u_i, u'_i $i = 1, 2, 3$ tales que:

$$f(u_1) = u_1, \ f(u_2) = -u_2, \ f(u_3) = 2u_3$$
$$f'(u'_1) = u'_1 \ f'(u'_2) = -u'_2, \ f'(u'_3) = 2u'_3$$

Demostraremos qu $\delta = (u_1, u_2, u_3)$ y $\delta' = (u'_1, u'_2, u'_3)$ son bases de V. Esto concluye la demostración, ya que entonces se tiene:

$$M_{\delta}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = J = M_{\delta'}(f') \tag{4.6.1}$$

y f es linealmente equivalente a f'.

Probemos por ejemplo que δ es linealmente independiente. Sean λ_1, λ_2, λ_3 *escalares tales que:*

$$\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3 = 0 \tag{4.6.2}$$

Aplicando f a ambos miembros queda:

$$\lambda_1 u_1 - \lambda_2 u_2 + 2\lambda_3 u_3 = 0 \tag{4.6.3}$$

Sumando (4.6.2) y (4.6.3) miembro a miembro:

$$2\lambda_1 u_1 + 3\lambda_3 u_3 = 0 \tag{4.6.4}$$

Si $\lambda_1 = 0$ entonces λ_3 es nulo por (4.6.4), y sustituyendo en (4.6.3) se obtiene $\lambda_2 = 0$, con lo que se concluye la demostración.

La posibilidad $\lambda_1 \neq 0$ debe ser descartada, ya que entonces de (4.6.4) se deduce que los vectores u_1 y u_3 son proporcionales, y como $u_1 \in \ker(f - id)$, también $u_3 \in \ker(f - id)$, lo cual contradice la igualdad $f(u_3) = 2u_3$ pues u_3 es no nulo.

La transformación lineal $g : V \to V$ tal que $g(\delta) = \delta'$, verifica la igualdad:

$$f' = g \cdot f \cdot g^{-1}$$

ya que por (4.6.1) se tiene:

$$(g \cdot f \cdot g^{-1})(\delta') = (g \cdot f)(\delta) = g(\delta J) = g(\delta)\, J = \delta' J = f'(\delta').$$

Así, f' y $g \cdot f \cdot g^{-1}$ coinciden sobre la base δ, y son por tanto iguales. Determinemos u_1. La matriz respecto a ε de $f - id$ es

$$A - I = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 1 \\ -8 & -8 & -4 \\ 6 & 6 & 4 \end{pmatrix} \text{ y } rg(A - I) = 2, \text{ por tanto, } \ker(f - id)$$

es una recta vectorial de ecuaciones respecto a ε:

$$\left.\begin{aligned} 3x_1 + 3x_2 + x_3 &= 0 \\ 6x_1 + 6x_2 + 4x_3 &= 0 \end{aligned}\right\}$$

$$\text{Tomamos } u_1 = \varepsilon \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

de forma análoga se construyen los demás vectores de δ y de δ' quedando:

$$\delta=\varepsilon P,\ \delta'=\varepsilon Q\quad P=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}\quad Q=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Como $g(\delta)=\delta'$, se tiene $g(\varepsilon P)=\varepsilon Q$ o también $g(\varepsilon)P=\varepsilon Q$, con lo que:

$$g(\varepsilon)=\varepsilon(QP^{-1})$$

y $M_\varepsilon(g)=QP^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Ejercicio 4.8. Evidentemente cada homotecia $h=\lambda\ id$ está en el centro del grupo lineal $GL(V)$, ya que si $g\in GL(V)$, para todo $v\in V$ se verifica:

$$(h\cdot g)(v)=h(g(v))=\lambda g(v)=g(\lambda v)=g(h(v))=(g\cdot h)(v)$$

Supóngase ahora que $h\in Z$, es decir:

$$g\cdot h=h\cdot g \text{ para todo } g\in GL(V)$$

Probemos que esta condición implica que para todo $u\in V-\{0\}$ el sistema $(u, h(u))$ es linealmente dependiente. De esta forma, h deja invariantes todas las rectas vectoriales, y por el ejercicio 4.7, es homotecia vectorial.

Si existiera $u\in V-\{0\}$ tal que $(u, h(u))$ es linealmente independiente, podría encontrarse una transformación lineal $g_1\in GL(V)$ tal que:

$$g_1(u)=h(u)$$
$$g_1(h(u))=u$$

y entonces: $h^2(u)=(h\cdot g_1)(u)=(g_1\cdot h)(u)=u$.

Tomando ahora $g_2\in GL(V)$ tal que:

$$g_2(u)=h(u)$$
$$g_2(h(u))=-u$$

se tiene: $h^2(u)=(h\cdot g_2)(u)=(g_2\cdot h)(u)=-u$, y se concluye que $h^2(u)=0$. Como $h\in GL(V)$, debe ser $u=0$, contrariamente a la hipótesis.

Ejercicio 4.9. Se hace por inducción sobre el número r de autovalores distintos. Para $r=1$ no hay nada que probar.

Supuesto cierto el resultado para menos de r autovalores distintos ($r\geqslant 2$) probémoslo para r:

Si $u_i\in V(\lambda_i)-\{0\}$ $i=1, ..., r$, y $\mu_1, ..., \mu_r$ son escalares tales que:

$$\mu_1 u_1+...+\mu_r u_r=0 \tag{4.9.1}$$

Probemos que $\mu_1=...=\mu_r=0$. En efecto, aplicando f a los dos miembros de (4.9.1) queda:

$$\mu_1\lambda_1 u_1+...+\mu_r\lambda_r u_r=0 \tag{4.9.2}$$

Multiplicando ambos miembros de (4.9.2) por $-\lambda_1$, y sumando miembro a miembro con (4.9.2) queda:

$$\mu_2(\lambda_2-\lambda_1)u_2+...+\mu_r(\lambda_r-\lambda_1)u_r=0$$

Por la hipótesis de inducción es $\mu_i(\lambda_i-\lambda_1)=0$. Como $\lambda_i\neq\lambda_1$ para $i=2, ..., r$, se concluye que:

$$\mu_2=...=\mu_r=0$$

Volviendo a la igualdad (4.9.1) se obtiene $\mu_1 u_1=0$. Como u_1 es no nulo, queda μ_1 también nulo.

Ejercicio 4.10. Sean $\lambda_1, ..., \lambda_r$ todos los autovalores distintos del endomorfismo f. Si se verifica la igualdad:

$$V=V(\lambda_1)\oplus ... \oplus V(\lambda_r)$$

tomando ε_i base de $V(\lambda_i)$, se deduce que $\varepsilon=\varepsilon_1\cup ... \cup\varepsilon_r$ es una base para V respecto a la cual la matriz de f es de la forma:

$$M(f)=\begin{pmatrix} \lambda_1 I_{n_1} & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \lambda_r I_{n_r} \end{pmatrix}-J$$

donde I_{n_i} es la matriz identidad de orden $n_i = \dim V(\lambda_i)$.

Recíprocamente, si f es diagonalizable admite respecto a cierta base ε una representación diagonal. Reordenando si fuera preciso los elementos de la base, podemos suponer que esta representación es como la matriz J anterior, $\varepsilon = \varepsilon_1 \cup ... \cup \varepsilon_r$ y n_i el número de elementos de ε_i. Como ε_i está contenida en $V(\lambda_i)$ se deduce que $\dim V(\lambda_i) > n_i$ para $i = 1, ..., r$. Por otra parte, al ser la suma.

$$U = V(\lambda_1) + ... + V(\lambda_r)$$

suma directa (*ver ejercicio* 4.9), *se tiene que:*

$$n = \dim V \geqslant \dim U = \dim V(\lambda_1) + ... + \dim V(\lambda_r) \geqslant n_1 + ... + n_r = n$$

Con lo que $U = V(\lambda_1) \oplus ... \oplus V(\lambda_r) = V$.

Ejercicio 4.12. Por el ejercicio 4.10, f es diagonalizable si y sólo si V se descompone en suma directa de los autoespacios de f:

$$V = V(\lambda_1) \oplus ... \oplus V(\lambda_r)$$

siendo $\lambda_1, ..., \lambda_r$ los autovalores distintos de f.

Supuesto f diagonalizable, y denotando por f_i a la restricción de f a $V(\lambda_i)$, se verifica que:

$$\chi_{f_i}(t) = (t - \lambda_i)^{n_i} \quad \text{con} \quad n_i = \dim V(\lambda_i)$$

por tanto $\chi_f(t) = \chi_{f_1}(t) \; ... \; \chi_{f_r}(t) = (t - \lambda_1)^{n_1} \; ... \; (t - \lambda_r)^{n_r}$

Esto prueba la implicación i) $\Rightarrow$ ii).

Recíprocamente, si se verifica ii), llamando $U = V(\lambda_1) + ... + V(\lambda_r)$, por el ejercicio 4.9 se tiene:

$$U = V(\lambda_1) \oplus ... \oplus V(\lambda_r)$$

y por tanto $\dim U = n_1 + ... + n_r = n = \dim V$, luego $U = V$, y f es diagonalizable.

Ejercicio 4.13. La matriz A tiene por polinomio característico $\chi_A(t) = (t - 1)^3$.

Como
$$rg\,(A-I)=rg\begin{pmatrix}-4 & -3 & -2\\ 8 & 6 & 4\\ -4 & -3 & -2\end{pmatrix}=1$$

se deduce que el endomorfismo $A: V_3 \to V_3$ verifica:

$$\dim \ker\,(A-I)=2$$

Por el ejercicio 4.12, se deduce que A no es diagonalizable. La matriz B tiene polinomio característico:

$$\chi_B(t)=(t-2)^2\ (t+1)$$

Se tiene:

$$B-2I=\begin{pmatrix}3 & 0 & 3\\ 0 & 0 & 0\\ -6 & 0 & -6\end{pmatrix}\qquad B+I=\begin{pmatrix}6 & 0 & 3\\ 0 & 4 & 0\\ -6 & 0 & -3\end{pmatrix}$$

Por tanto, $rg(B-2I)=1$, $rg(B+I)=1$, y el endomorfismo $B\ \ V_3 \to V_3$ verifica:

$$\dim \ker\,(B-2I)=2,\quad \dim \ker(B+I)=1$$

con lo que B es diagonalizable.

Una base (u_1, u_2) de $\ker\,(B-2I)$ unida a una base (u_3) de $\ker\,(B+I)$ proporciona la base $\delta=(u_1, u_2, u_3)$ de V respecto a la cual la matriz del endomorfismo B es:

$$J=\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}$$

Calculemos los vectores u_i

$u_1=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ $u_2\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$ son base de $\ker(B-2I)$ con ecuación $x_1+x_3=0$

y el vector $u=\begin{pmatrix}-1\\0\\2\end{pmatrix}$ satisface las ecuaciones

$$x_2=0, \quad 2x_1+x_3=0$$

de ker $(B+I)$. Tomando

$$P=\begin{pmatrix}0 & 1 & -1\\1 & 0 & 0\\0 & 1 & 2\end{pmatrix}$$

se verifica $\delta=I\ P$ siendo $I=(I_1, I_2, I_3)$ la base canónica de V_3. Como $M_\delta(B)=J$, se tiene:

$$B=M_I(B)=PJP^{-1}$$

La matriz C no es diagonalizable, ya que $\chi_c(t)=(t-1)^2\ (t+1)^2$ y $rg\,(C-I)=3$, $rg\,(C+I)=2$. Aplíquese el ejercicio 4.12.

Dejamos al lector el estudio de la matriz D.

Ejercicio 4.15. Sea V un plano vectorial real, y $f: V \to V$ un endomorfismo.

Si $f=\lambda id$, entonces su representación matricial respecto a cualquier base es:

$$J=\begin{pmatrix}\lambda & 0\\0 & \lambda\end{pmatrix}$$

Supongamos que f no es homotecia vectorial:

a) Si $\chi_f(t)=(t-\lambda)\ (t-\mu)$ con $\lambda\neq\mu$, tomando u, v autovectores asociados a λ y μ respectivamente, se tiene por el ejercicio 4.9 que $\varepsilon=(u, v)$ es base de V, y:

$$M_\varepsilon(f)=\begin{pmatrix}\lambda & 0\\0 & \mu\end{pmatrix}$$

b) Si $\chi_f(t)=(t-\lambda)^2$, entonces $rg\,(f-\lambda id)=1$ (pues λ es autovalor, y $f\neq\lambda id$). Sea u_2 autovector asociado a λ, y $u_1\in V$ tal que $\varepsilon=(u_1, u_2)$ es base de V. La matriz de f respecto a ε es de la forma

$$M_u(f)=\begin{pmatrix}\alpha & 0\\ \beta & \lambda\end{pmatrix}=J.$$

Pero $\chi_f(t)=\chi_J(t)=(t-\alpha)\ (t-\lambda)=(t-\lambda)^2$, luego $\alpha=\lambda$, y β es no nulo. Se tiene pues:

$$J=\begin{pmatrix}\lambda & 0\\ \beta & \lambda\end{pmatrix} \quad \text{y} \quad (J-\lambda I)^2=\begin{pmatrix}0 & 0\\ \beta & 0\end{pmatrix}^2=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

Así $(f-\lambda id)^2=0$. Como dim ker $(f-\lambda id)=1$. Podemos tomar $u\in V-$ $-\ker\ (f-\lambda id)$, y $v=(f-\lambda id)(u)$. Entonces $(u,\ v)$ es una base de V respecto a la cual la matriz de f es:

$$J=\begin{pmatrix}\lambda & 0\\ 1 & \lambda\end{pmatrix} \qquad \text{pues: } \begin{cases} f(u)=\lambda u+u\\ f(v)=\lambda v\end{cases}$$

c) Finalmente supóngase que $\chi_f(t)=(t-\alpha)^2+\beta^2$ con $\beta>0$.

Por el ejercicio 4.5 se sabe que $(f-\alpha id)^2+\beta^2 id=0$.

Sea $u\in V-\{0\}$ y $v=(1/\beta)\ (f-\alpha id)(u)$. Se tiene entonces:

$$(f-\alpha id)(u)=\beta v \quad (f-\alpha id)(v)=(1/\beta)(f-\alpha id)^2(u)=(1/\beta)(-\beta^2)u=-\beta u.$$

Demostrando que $\delta=(u,\ v)$ es base de V (pruébelo el lector) queda:

$$M_\delta(f)=\begin{pmatrix}\alpha & -\beta\\ \beta & \alpha\end{pmatrix}$$

Ejercicio 4.16. Sea V un plano vectorial real, y f un endomorfismo de V. Si $f=\lambda id$, entonces para todo $g\in GL(V)$ se verifica:

$$g\cdot f\cdot g^{-1}=g\cdot\lambda id\cdot g^{-1}=\lambda id\cdot g\cdot g^{-1}=\lambda id^2=\lambda id=f$$

Por tanto la órbita de cada homotecia vectorial, es un conjunto formado por un único elemento.

Si f, f' son endomorfismos de V que no son homotecias vectoriales y $\chi_f(t)=\chi_{f'}(t)$, por el ejercicio 4.14 se deduce que tienen representación matricial común y por tanto son linealmente equivalentes. Así, el polinomio característico es un invariante completo para la clase de endomorfismos de V que no son homotecias vectoriales.

Las órbitas quedan fielmente descritas por la colección $\mathbb{R} \cup \mathscr{P}$, donde $\mathscr{P}$ denota el conjunto de polinomios mónicos de grado igual a dos. Cada $\lambda \in \mathbb{R}$ representa la clase definida por la homotecia vectorial de razón igual a λ.

LECCION 5

Ejercicio 5.2. Un procedimiento estándar para calcular el polinomio mínimo anulador de un vector $v \in V$ respecto a un endomorfismo f consiste en calcular el mínimo entero positivo m tal que el sistema:

$$(v,\ f(v),\ \ldots,\ f^m(v))$$

es linealmente dependiente. Así si λ_0, ..., λ_m son escalares tales que:

$$\lambda_0 v+\lambda_1 f(v)-\ldots+\lambda_m f^m(v)=0$$

el polinomio mínimo ϕ_v es:

$$\phi_v(t)=t^m+\frac{\lambda_{m-1}}{\lambda_m}t^{m-1}+\ldots+\frac{\lambda_1}{\lambda_m}t+\frac{\lambda_0}{\lambda_m}$$

Pues por construcción debe ser $\lambda_m \neq 0$.

a) Calculemos así los polinomios mínimos anuladores de los vectores u, v, w del problema respecto al endomorfismo f. Se tiene:

$$f(u)=\varepsilon\begin{pmatrix} -2 & -3 & -2 \\ 3 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}=\varepsilon\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$f^2(u)=\varepsilon\begin{pmatrix} -2 & -3 & -2 \\ 3 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}=\varepsilon\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

como

$$rg\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 2,$$

existe una relación de dependencia lineal entre u, $f(u)$, $f^2(u)$ que es exactamente:

$$u - 2f(u) + f^2(u) = 0$$

y $\phi_u = 1 - 2t + t^2 = (t-1)^2$.

De forma análoga se calcula:

$$\phi_v(t) = t - 1, \ \ \phi_w(t) = (t-1)^2$$

b) $\phi_f(t) = \text{m. c. m.}(\phi_u, \ \phi_v, \ \phi_w) = (t-1)^2$.

c) El mínimo subespacio invariante que contiene al vector u es:

$$\mathbb{R}[t]u = \{\varphi u : \varphi \in \mathbb{R}[t]\}$$

Si $\varphi \in \mathbb{R}[t]$, aplicando el algoritmo de división por $(t-1)^2$, se deduce la existencia de q, $\rho \in \mathbb{R}[t]$ con $\rho = 0$ o grado $(\rho) < 1$ tales que $\varphi = q\ (t-1)^2 + \rho$. Por tanto:

$$\varphi u = [q(t-1)^2 + \rho]u = q[(t-1)^2 u] + \rho u$$

y se deduce que:

$$\mathbb{R}[t]u = \{(at+b)u : a, \ b \in R\} = \langle e\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}; \ d\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\rangle$$

que tiene por ecuaciones implícitas: $x_1 + x_2 - x_3 = 0$.

Ejercicio 5.4. Una base de U está formada por los vectores:

$$u_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \ u_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \ \text{y} \ f(u_1) = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = u_2$$

$$f(u_2)=\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}=u_1$$

Por tanto U es invariante. La matriz de f_u respecto a (u_1, u_2) es:

$$J=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

y $\chi_{f_u}(t)=\chi_J(t)=t^2-1=(t+1)(t-1)$, por tanto f_u es diagonalizable. Su polinomio mínimo coincide con el característico.

Ejercicio 5.5. El polinomio característico de f es: $\chi_f(t)=(t-1)^2(t+1)^2$.

Admitiendo que $\chi_f(f)=0$, se tiene por el teorema de descomposición:

$$V=\ker\ [(f-\mathrm{id})^2]\oplus\ker\ [(f+\mathrm{id})^2]$$

Teniendo en cuenta que:

$$(A-I)^2=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 8 & 8 & 8 & 8 \\ -4 & -4 & -4 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(A+I)^2=\begin{pmatrix} -8 & -8 & -8 & -4 \\ 32 & 28 & 16 & 32 \\ -24 & -20 & -12 & -24 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

se tiene $rg\,[(A-I)^2]=2$ y las ecuaciones de $\ker\ [(f-\mathrm{id})^2]$ en las coordenadas de ε son:

$$\left.\begin{aligned} x_1+x_2+x_3 &=0 \\ x_4&=0 \end{aligned}\right\}$$

Análogamente, $rg\,[(A+I)^2]=2$, y las ecuaciones de $\ker\,[(f+\mathrm{id})^2]$ son:

$$
\begin{aligned}
2x_1+2x_2+2x_3+x_4&=0\\
8x_1+7x_2+4x_3+8x_4&=0
\end{aligned}
$$

Ejercicio 5.6. Se hace por inducción sobre m.

Para $m=1$, el resultado es evidente.

Supongamos $m\geqslant 1$, $f^{m-1}(v)\neq 0$, $f^m(v)=0$, y tomemos $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_m \in \mathbb{K}$ tales que:

$$\lambda_0 v+\lambda_1 f(v)+\ldots+\lambda_{m-1} f^{m-1}(v)=0 \tag{5.9.1}$$

Aplicando f a los dos miembros, queda:

$$\lambda_0 f(v)+\lambda_1 f^2(v)+\ldots+\lambda_{m-2} f^{m-1}(v)=0$$

El vector $u=f(v)$ verifica $f^{m-2}(u)\neq 0$, $f^{m-1}(u)=0$, y se tiene:

$$\lambda_0 u+\lambda_1 f(u)+\ldots\lambda_{m-2} f^{m-1}(u)=0$$

Por la hipótesis de inducción es $\lambda_0=\ldots=\lambda_{m-2}=0$. Volviendo ahora a (5.9.1) queda:

$$\lambda_{m-1} f^{m-1}(v)=0$$

Como $f^{m-1}(v)\neq 0$ se concluye que $\lambda_{m-1}=0$.

Ejercicio 5.7. Para cada $\lambda\in\mathbb{K}$ sea $V(\lambda)=\ker\,(f-\lambda\mathrm{id})$ y

$$V_\lambda=\{v\in V : \text{existe } k\in N \text{ con } (f-\lambda\mathrm{id})^k(v)=0\}.$$

Se tiene la equivalencia:

$$V(\lambda)\neq\{0\}\Leftrightarrow V_\lambda\neq\{0\} \tag{5.10.1}$$

En efecto, como $V(\lambda)\subset V_\lambda$, si $V(\lambda)\neq\{0\}$ es $V_\lambda\neq\{0\}$.

Recíprocamente, si $V_\lambda\neq\{0\}$, existe $k\in N$ y $v\in V-\{0\}$ tal que $(f-\lambda\mathrm{id})^k(v)=0$, y por tanto:

$$0=\det\,[(f-\lambda\mathrm{id})^k]=(\det(f-\lambda\mathrm{id}))^k.$$

luego

$$\det(f-\lambda \mathrm{id})=0, \text{ y } V(\lambda)\neq\{0\}$$

Por otra parte también se tiene la equivalencia:

$$V_\lambda\neq\{0\}\Leftrightarrow\lambda \text{ raiz de } \phi_f \tag{5.10.2}$$

ya que si $V_\lambda\neq\{0\}$ entonces $\phi_{V_\lambda}(t)=(t-\lambda)^m$ $(m\geqslant 1)$ divide a ϕ_f. Recíprocamente, si $(t-\lambda)^m$ divide a ϕ_f se verifica:

$$\phi_f(t)=(t-\lambda)^m\,\varphi(t),\ m\geqslant 1,\ \text{m. c. d.}\,((t-\lambda),\ \varphi(t))=1$$

Aplicando el teorema de descomposición, y teniendo en cuenta que $\varphi(f)\neq 0$ (pues grado $(\varphi)<$grado(ϕ)) se concluye que:

$$\{0\}\neq\ker[(f-\mathrm{id})^m]\subset V_\lambda$$

La primera parte del enunciado se deduce de las equivalencias (5.10.1) (5.10.2) y de $V(\lambda)\neq\{0\}\Leftrightarrow\lambda$ raiz de χ_f.

Por otra parte, si λ es raiz de ϕ_f con multiplicidad $m\geqslant 1$, entonces

$$\phi_{V_\lambda}(t)=(t-\lambda)^m, \text{ y existe } v\in V_\lambda \text{ tal que } \phi_v(t)=(t-\lambda)^m.$$

Por el ejercicio 5.9, el sistema:

$$\delta=(v,\ (f-\lambda\mathrm{id})(v),\ \ldots,\ (f-\lambda\mathrm{id})^{m-1}(v))$$

es linealmente independientes.

Ampliando δ a una base $\varepsilon=\delta\cup\varepsilon_1$ de V, la matriz de f respecto a ε es de la forma:

$$J=\begin{pmatrix}\Lambda & A\\ O & B\end{pmatrix} \text{ con } \Lambda=\begin{pmatrix}\lambda & 0\ldots 0 & 0\\ 1 & \lambda\ldots 0 & 0\\ 0 & 0\ldots 0 & 0\\ 0 & 0\ldots 1 & \lambda\end{pmatrix} * EL(m)$$

Por tanto, $\chi_f(t)=x_J(t)=\chi_\Lambda(t)\,\chi_B(t)=(t-\lambda)^m\ \chi_B(t)$.

Esto prueba que el orden de multiplicidad de λ como raiz de χ es mayor o igual que m.

Ejercicio 5.8. Sea V un espacio vectorial real tridimensional, y f un endomorfismo de V. Admitiendo que $\chi_f(f)=0$, el polinomio mínimo ϕ_f debe dividir al característico χ_f, y se tienen las siguientes posibilidades:

1) $\phi_f(t)=(t-\lambda)$.

Entonces $f=\lambda\mathrm{id}$, y la representación matricial de f respecto a cualquier base es:

$$J=\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

2) $\phi_f(t)=(t-\lambda)^2$.

Se tiene entonces la cadena:

$$\{0\}\neq \ker(f-\lambda\mathrm{id}) \subsetneq \ker[(f-\lambda\mathrm{id})^2]=V$$

sean $u_1\in V-\ker(f-\lambda\mathrm{id})$, $u_2=(f-\lambda\mathrm{id})(u_1)$.

Necesariamente es $u_2\in\ker(f-\lambda\mathrm{id})-\{0\}$, pues:

$$(f-\lambda\mathrm{id})^2=0, \text{ y } (f-\lambda\mathrm{id})(u_2)=(f-\lambda\mathrm{id})^2(u_1)=0.$$

Como (u_1, u_2) es linealmente independiente, podemos tomar un vector $u'_3\in V$ tal que $\delta'=(u_1, u_2, u'_3)$ sea base de V. La matriz de f respecto a δ' es de la forma:

$$M_{\delta'}(f)=\begin{pmatrix} \lambda & 0 & \alpha \\ 1 & \lambda & \beta \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}=J'$$

De la igualdad $\chi_f=\chi_J$ se deduce $\gamma=\lambda$, y:

$$J'=\begin{pmatrix} \lambda & 0 & \alpha \\ 1 & \lambda & \beta \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

como

$$(J' - \lambda I)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \alpha \\ 1 & 0 & \beta \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ y } (f - \lambda \text{id})^2 = 0$$

se tiene que

$$\alpha = 0, \text{ y } rg(J' - \lambda I) = rg(f - \lambda \text{id}) = 1,$$

por tanto, $\ker(f - \lambda \text{id})$ es un plano vectorial.

Construyamos entonces la base $\delta = (u_1, u_2, u_3)$ donde u_1 y u_2 son los de antes, y u_3 forma con u_2 base de $\ker(f - \lambda \text{id})$. Se tiene pues:

$$M(f) = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 1 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

3) $\phi_f(t) = (t - \lambda)^3$

Se tiene la cadena:

$$\{0\} \neq \ker(f - \lambda \text{id}) \subsetneq \ker [(f - \lambda \text{id})^2] \subsetneq \ker [(f - \lambda \text{id})^3] = V.$$

Tomando $u_1 \in V - \ker [(f - \lambda \text{id})^2]$, $u_2 = (f - \lambda \text{id})(u_1)$, $u_3 = (f - \lambda \text{id})(u_2)$, el sistema $\delta = (u_1, u_2, u_3)$ es linealmente independientes (pruébelo el lector, o consúltese el ejercicio 5.6). La matriz de f respecto a δ es

$$M_\delta(f) = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 1 & \lambda & 0 \\ 0 & 1 & \lambda \end{pmatrix}$$

4) $\phi(t) = (t - \lambda)^2 (t - \mu)$.

Por el teorema de descomposición es:

$$V = \ker [(f - \lambda \text{id})^2] \oplus \ker (f - \mu \text{id})$$

y además $\{0\}\neq \ker(f-\lambda \mathrm{id}) \subsetneq \ker[(f-\lambda \mathrm{id})]$. De aquí se deduce que $\ker[(f-\lambda \mathrm{id})^2]$ es un plano vectorial.

Tómese $u_1 \in \ker[(f-\lambda id)^2]-\ker(f-\lambda id)$, $u_2=(f-\lambda id)(u_1)$ y u_3 autovector correspondiente al autovalor μ. La matriz de f respecto a $\delta=$ $=(u_1,\ u_2,\ u_3)$ es:

$$J=\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 1 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{pmatrix}$$

5) $\phi_f(t)=(t-\lambda)\ (t-\mu),\ \lambda\neq\mu.$

Se tiene $V=V(\lambda)\oplus V(\mu)$, y por tanto f es diagonalizable. Si por ejemplo, $\chi_f(t)=(t-\lambda)^2(t-\mu)$, existe una base δ respecto a la cual la matriz de f es de la forma:

$$J=\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{pmatrix}$$

6) $\phi(t)=(t-\lambda)\ (t-\mu)\ (t-\nu)$ con $\lambda,\ \mu,\ \nu$ distintos.

Una representación matricial reducida para f es:

$$J=\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & \nu \end{pmatrix}$$

7) $\phi_f(t)=(t-\lambda)\ [(t-\alpha)^2+\beta^2],\ \beta>0.$

Se tiene: $V=\ker(f-\lambda id)\oplus \ker[(f-\alpha id)^2+\beta^2 id]$.

Aplicando a la restricción f' de f al segundo sumando el ejercicio 4.15, y tomando el primer vector de la base δ, un autovector asociado a λ, queda como representación matricial reducida de f:

$$J=\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & -\beta \\ 0 & \beta & \alpha \end{pmatrix}$$

Nótese que el caso $\phi_f(t)=(t-\alpha)^2-\beta^2\ \beta>0$, no es posible, ya que en este caso, necesariamente $\chi_f(t)$ es de la forma:

$$\chi_f(t)=(t-\lambda)\ [(t-\alpha)^2+\beta^2]$$

y λ autovalor de f no es raiz del polinomio mínimo, lo cual es contradictorio. (Véase ejercicio 5.7.)

Ejercicio 5.9. Cada una de las matrices J del ejercicio 5.8 queda unívocamente determinada por el polinomio característico $\chi_f(t)$, y el valor de $rg(J-\lambda I)$ para cada raiz λ de $\chi_f(t)$. Por tanto se tiene:

Dos endomorfismos f y f' de un espacio vectorial real tridimensional son linealmente equivalentes, si y sólo si tienen el mismo polinomio característico $\chi(t)$, y para cada raíz λ de $\chi(t)$ se verifica la igualdad:

$$rg(f-\lambda id)=rg(f'-\lambda id)$$

El teorema de clasificación se completa ahora con el enunciado 5.8.

La solución del problema en el caso complejo es la misma salvo que ahora los factores irreducibles del polinomio mínimo son lineales, y debe descartarse por tanto la representación matricial reducida del tipo:

$$J=\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & -\beta \\ 0 & \beta & \alpha \end{pmatrix}$$

Ejercicio 5.10. Sólo resolveremos el problema para el endomorfismo g con matriz:

$$B=M_\varepsilon(g)=\begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 \\ -4 & -4 & -3 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Su polinomio característico es $\chi_g(t)=(t-1)(t^2+1)$, y por el ejercicio 5.8, existe una base $\delta=(u_1, u_2, u_3)$ respecto a la cual la representación matricial es:

$$M_\delta(g)=J=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

La base δ se obtiene de la siguiente forma:

u_1 es un autovector asociado al autovalor $\lambda=1$, y sus coordenadas (x_i) respecto a ε satisfacen:

$$(A-I)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{es decir} \quad \begin{matrix} x_1+2x_2+\ x_3=0 \\ 2x_1+\ x_2+\ x_3=0 \end{matrix}$$

Tomamos $u_1=\varepsilon\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$

Los vectores (u_2, u_3) forman base de $\ker(g^2+id)$, y $u_3=g(u_2)$. Este núcleo tiene por ecuación: $x_1+x_2+x_3=0$, ya que:

$$A^2+I=\begin{pmatrix} -2 & 2 & -2 \\ -2 & -2 & -2 \\ 6 & 6 & 6 \end{pmatrix}$$

Podemos tomar, $u_2=\varepsilon\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, y por tanto $u_3=g(u_2)=\varepsilon\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

En resumen: $\delta=\varepsilon\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

LECCION 6

Ejercicio 6.1. De la representación matricial J de f respecto a la base $\varepsilon=(e_1, ..., e_n)$ se deduce que para $i=2, ..., n$ $e_i=(f-\lambda id)\,e_{i-1}$ y por tanto, $e_i=(f-\lambda id)^{i-1}e_1$. Por otra parte, $\phi_f(t)=\phi_J(t)=(t-\lambda)^n$, y se tiene la cadena de núcleos:

$$\{0\} \subsetneq \operatorname{Ker}(f-\lambda id) \subsetneq ... \subsetneq \operatorname{Ker}[(f-\lambda id)^n]=V$$

por tanto $\dim(\operatorname{Ker}[(f-\lambda id)^k])=k$. Como el sistema de k vectores $(e_{n-k+1}, \ldots, e_n)$ está contenido en ker $[(f-\lambda id)^k]$, se verifica:

$$\operatorname{Ker}[(f-\lambda id)^k]=\langle e_{n-k+1}, \ldots, e_n\rangle.$$

Sea U un subespacio invariante no nulo e irreducible de V. Necesariamente es de la forma:

$$U=\mathbb{K}[t]u$$

para cierto $u \in U$, y $\phi_u=\phi_u-(t-\lambda)^k$ con $1 \leqslant k \leqslant n$ como

$$\dim U=k \text{ y } u \subset \operatorname{Ker}[(f-\lambda\, id)^k],$$

se deduce que

$$U=K[t]u \subseteq \operatorname{Ker}[(f-\lambda\, id)^k]$$

Se verifica la igualdad por razón de dimensiones. Por tanto, los subespacios invariantes irreducibles son justamente los del enunciado.

Cualquier otro subespacio invariante no nulo, se obtiene como suma directa de subespacios irreducibles, pero como no existen subespacios irreducibles con intersección nula, se concluye que todos los posibles subespacios invariantes son los del enunciado.

Ejercicio 6.5. Sea H hiperplano de ecuación $u_1x_1+\ldots+u_nx_n=0$ ó mas brevemente

$$u^tx=0 \text{ donde } u=\begin{pmatrix} u_1 \\ \\ u_n \end{pmatrix} \quad x=\begin{pmatrix} x_1 \\ . \\ x_n \end{pmatrix}$$

Como las ecuaciones de f son $x'=Ax$, la ecuación de $f^{-1}(H)$ es:

$$u^tAx=0$$

ya que $\dim f^{-1}(H) \geqslant \dim H=n-1$, se deduce que: o bien $f^{-1}(H)=V$ en cuyo caso $u^tA=0$, y H es claramente invariante, o bien $f^{-1}(H)$ es también un hiperplano, y la aplicación

$$f^{-1}(H) \ni v \rightarrow f(v) \in H$$

es un isomorfismo lineal. En este caso, H es invariante si y sólo si $f^{-1}(H)=H$. Analíticamente esta condición se expresa imponiendo que las ecuaciones de $f^{-1}(H)$ y de H sean proporcionales, es decir, existe $\lambda \in \mathbb{K}-\{0\}$ tal que $u^tA=\lambda u^t$ o de forma equivalente $A^tu=\lambda u$.

Esto unido al caso $\lambda=0$ ya comentado, prueba el enunciado.

Nótese que con la técnica de determinación de rectas invariantes ya conocida, y el resultado de este ejercicio, es posible determinar de forma automática los subespacios invariantes de cualquier endomorfismo de un espacio vectorial tridimensional.

Ejercicio 6.6. Resolveremos el problema sólo para la matriz A. Un cálculo prueba que $\chi_A(t)=(t-1)^3$. Como

$$A-I=\begin{pmatrix} -4 & -3 & -2 \\ 8 & 6 & 4 \\ -4 & -3 & -2 \end{pmatrix}$$

se deduce que $rg(A-I)=1$, y por tanto $\operatorname{Ker}(A-I)$ es un plano de ecuación $4x_1+3x_2+2x_3=0$.

Todas las rectas contenidas en este plano (y ninguna más) son invariantes.

El cálculo de los planos invariantes los haremos utilizando la técnica del ejercicio 6.5. Para ello debemos determinar las rectas invariantes del endomorfismo:

$$A^t: V_3(\mathbb{R}) \to V_3(\mathbb{R}).$$

$\chi_{A^t}(t)=\chi_A(t)=(t-1)^3$, y

$$A^t-I=\begin{pmatrix} -4 & 8 & -4 \\ -3 & 6 & -3 \\ -2 & 4 & -2 \end{pmatrix}$$

Todos los «vectores»

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \text{ tales que } -u_1-2u_2-u_3=0,$$

son autovectores de A^t y «despejando» u_1 queda: $u_1 = 2u_2 - u_3$. Por el ejercicio 6.5 todos los planos de V_3 de la forma:

$$(2u_2 - u_3)\,x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 = 0$$

son invariantes por f (y ninguno más).

Esta colección de planos, puede escribirse:

$$u_2(2x_1 + x_2) + u_3(-x_1 + x_3) = 0$$

y se trata del haz de planos que pasa por la recta vectorial de ecuaciones:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 0 \\ -\,x_1 + x_3 = 0 \end{cases}$$

que está generada por el vector $v = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Ejercicio 6.7. Sea f endomorfismo de V tal que $V_f = K[t]u$ con

$$\phi_u = p^k; \quad p = (t-\alpha)^2 + \beta^2$$

siendo $\beta > 0$ y $k \geqslant 1$. Probaremos que existe una base de V de modo que la matriz de f sea de la forma:

$$J = \begin{pmatrix} B(p) & & \\ N_2 & \ddots & \\ & N_2 & B(p) \end{pmatrix} \quad \text{con } B(p) = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}, \ \beta > 0$$

En efecto, si $v = \dfrac{t-\alpha}{\beta}u$, la base buscada es

$$\varepsilon = \left(u,\ v,\ \left(\frac{p}{\beta}\right)u,\ \left(\frac{p}{\beta}\right)v,\ \ldots,\ \left(\frac{p}{\beta}\right)^{k-1}u,\ \left(\frac{p}{\beta}\right)^{k-1}v\right)$$

El número de vectores de ε coincide con $2k = \dim V$. Admitiendo que ε es linealmente independiente, se ve que para $i=0, \ldots, k-1$ es:

$$(f-\alpha id)\left[\left(\frac{p}{\beta}\right)^i u\right] = \beta\left[\left(\frac{p}{\beta}\right)^i \frac{t-\alpha}{\beta} u\right] = \beta\left(\frac{p}{\beta}\right)^i v, \text{ y}$$

$$(f-\alpha id)\left[\left(\frac{p}{\beta}\right)^i v\right] = \left(\frac{p}{\beta}\right)^i \frac{(t-\alpha)^2}{\beta} u = \left(\frac{p}{\beta}\right)^i \frac{p-\beta^2}{\beta} u = \left(\frac{p}{\beta}\right)^{i+1} u$$
$$-\beta\left(\frac{p}{\beta}\right)^i u.$$

Esto prueba que la representación matricial de f respecto a ε es la indicada.

NOTA: La prueba de que ε es linealmente independiente se realiza comprobando que el sistema de polinomios:

$$\left(1, \frac{t-\alpha}{\beta}, \frac{p}{\beta}, \frac{t-\alpha}{\beta}\frac{p}{\beta}, \ldots, \left(\frac{p}{\beta}\right)^{k-1}, \frac{t-\alpha}{\beta}\left(\frac{p}{\beta}\right)^{k-1}\right)$$

es linealmente independiente, lo que equivale a probar la independencia lineal de:

$$(1, t-\alpha, p, (t-\alpha)p, \ldots, p^{k-1}, (t-\alpha)p^{k-1});$$

esto se comprueba de forma análoga que en la proposición 2.1.

Ejercicio 6.8. a) El polinomio mínimo de f es $\phi_f(t) = t^2+1$. Por el primer teorema de descomposición existen vectores $u_1, \ldots, u_s$ no nulos de V tales que

$$V_f = K[t]u_1 \oplus \ldots \oplus K[t]u_s$$

y necesariamente $\phi_{u_i}(t) = t^2+1$ (ya que $\phi_{u_i} \neq 1$) divide a t^2+1 que es primo en $\mathbb{R}[t]$).

Una base para $\mathbb{K}[t]u_i$ es (u_i, v_i) con $v_i = tu_i = f(u_i)$ y la matriz de la restricción de f respecto a esta base es

$$C = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

ya que $f(u_i) = v_i$ y $f(v_i) = f^2(u_i) = -id(u_i) = -u_i$.

La matriz de f respecto a

$$\varepsilon=(u_1,\ v_1,\ \ldots,\ u_s,\ v_s)$$

es la propuesta en el enunciado.

b) La demostración directa es automática. Una demostración indirecta se obtiene al considerar la estructura de espacio vectorial sobre

$$\mathbb{L}=\mathbb{R}[t]/\mathbb{R}[t]\ (t^2+1)$$

de V inducida por f, y observar que $\mathbb{L}$ es un cuerpo canónicamente isomorfo al cuerpo $\mathbb{C}$ de los números complejos.

Ejercicio 6.10. Sólo estudiaremos las dos primeras matrices. Sea

$$A=\begin{pmatrix} -2 & -2 & -1 & -1 \\ 8 & 7 & 4 & 8 \\ -8 & -7 & -5 & -8 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Un cálculo prueba que $\chi_A(t)=(t-1)^2\ (t+1)^2$; así una matriz de Jordan semejante a A debe tener el siguiente aspecto:

$$J=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \varepsilon_1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_2 & -1 \end{pmatrix}$$

donde los números ε_i pueden ser 1 ó 0. Para salir de dudas, calculemos

$$rg\,(A-I)=rg\begin{pmatrix} -3 & -2 & -1 & -1 \\ 8 & 6 & 4 & 8 \\ -8 & -7 & -6 & -8 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}=3,$$

y por tanto

$$3=rg\ (J-I)=rg\begin{pmatrix}0&0&0&0\\ \varepsilon_1&0&0&0\\ 0&0&-2&0\\ 0&0&\varepsilon_2&-2\end{pmatrix}$$

y se deduce $\varepsilon_1=1$.

Análogamente, de

$$rg\ (A+I)=rg\begin{pmatrix}-1&-2&-1&-1\\ 8&8&4&8\\ -8&-7&-4&-8\\ 1&1&1&1\end{pmatrix}=3$$

se deduce $\varepsilon_2=1$ y por tanto

$$J=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\ 1&1&0&0\\ 0&0&-1&0\\ 0&0&1&-1\end{pmatrix}$$

El cálculo de la base de Jordan que da lugar a esta representación matricial se hace de la siguiente forma. Se toma:

$$u_1\in\ker\ [(A-I)^2]-\ker\ (A-I)$$
$$u_2=(A-I)\,u_1$$
$$u_3\in\ker\ [(A+I)^2]-\ker\ (A+I)$$
$$u_4=(A+I)\,u_3$$

Las ecuaciones de ker $(A-I)$ son:

$$(A-I)\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}\quad \text{es decir}\quad \left.\begin{aligned}-3x_1-2x_2-x_3-x_4&=0\\ 4x_1+3x_2+2x_3+4x_4&=0\\ x_1+x_2+x_3+x_4&=0\end{aligned}\right\}$$

Las ecuaciones de ker $[(A-I)^2]$ son:

$$(A-I)^2 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

es decir

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 8 & 8 & 8 & 8 \\ -4 & -4 & -4 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

que se reduce a

$$\left.\begin{array}{l} x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0 \end{array}\right\}$$

El vector $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ satisface estas últimas ecuaciones y no pertenece a ker $(A-I)$;

$$u_2 = (A-I) \quad u_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Los vectores u_3 y u_4 se obtienen de forma análoga. Una solución puede ser:

$$u_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}, \qquad u_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

La matriz $P=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}$ verifica $A=P^{-1}JP$.

Tomemos ahora $A=\begin{pmatrix} -10 & -9 & -3 & -5 \\ 5 & 4 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 0 & 1 \\ 6 & 6 & 3 & 2 \end{pmatrix}$.

$$\chi_A(t)=(t+1)^4.$$

Como $\quad rg\,(A+I)=rg\begin{pmatrix} -9 & -9 & -3 & -5 \\ 5 & 5 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 6 & 6 & 3 & 3 \end{pmatrix}=2,$

se deduce que la matriz de Jordan debe ser del tipo:

$$J=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ ? & -1 & 0 & 0 \\ 0 & ? & -1 & 0 \\ 0 & 0 & ? & -1 \end{pmatrix}$$

donde en los símbolos ? deben aparecer exactamente dos unos, ya que $rg(J+I)=2$. Para salir de dudas, calculamos $(A+I)^2$, y el resultado es la matriz nula; por tanto:

$$J=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Lo adecuado para determinar la base de Jordan es elegir ahora una base (u_2, u_4) de $\mathrm{im}\,(A+I)$, y tomar u_1, u_3 tales que $(A+I)u_1=u_2$, $(A+I)u_3=u_4$. De esta forma, aseguramos la independencia lineal de (u_1, u_2, u_3, u_4). Tomando u_3, u_4 las dos últimas columnas de $A+I$ queda:

$$u_1=\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix},\quad u_2=\begin{pmatrix}-3\\1\\1\\3\end{pmatrix};\quad u_3=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix},\quad u_4=\begin{pmatrix}-5\\3\\1\\3\end{pmatrix}.$$

que es la base de Jordan buscada. La matriz A es pues semejante a J y se tiene $A=P^{-1}JP$, donde

$$P=\begin{pmatrix}0 & -3 & 0 & -5\\0 & 1 & 0 & 3\\1 & 1 & 0 & 1\\0 & 3 & 1 & 3\end{pmatrix}$$

Ejercicio 6.14. Se puede comprobar que $\chi_A(t)=(t^2+2)\ (t^2-2)$.

Si $\mathbb{K}=\mathbb{C}$, podemos escribir:

$$\chi_A(t)=(t+i\sqrt{2})\,(t-i\sqrt{2})\,(t+\sqrt{2})\,(t-\sqrt{2})$$

y A es diagonalizable con matriz reducida

$$J=\begin{pmatrix}-i\sqrt{2} & 0 & 0 & 0\\0 & i\sqrt{2} & 0 & 0\\0 & 0 & -\sqrt{2} & 0\\0 & 0 & 0 & \sqrt{2}\end{pmatrix}$$

Si $\mathbb{K}=\mathbb{R}$, la descomposición en factores primos de χ_A es

$$\chi_A(t)=(t^2+2)\,(t+\sqrt{2})\,(t-\sqrt{2})$$

y la matriz de Jordan semejante es:

$$J=\begin{pmatrix}0 & -2 & 0 & 0\\1 & 0 & 0 & 0\\0 & 0 & -\sqrt{2} & 0\\0 & 0 & 0 & \sqrt{2}\end{pmatrix}\ \text{o bien}\ J=\begin{pmatrix}0 & -\sqrt{2} & 0 & 0\\\sqrt{2} & 0 & 0 & 0\\0 & 0 & -\sqrt{2} & 0\\0 & 0 & 0 & \sqrt{2}\end{pmatrix}$$

Si $\mathbb{K}=\mathbb{C}$, entonces $\chi_A(t)=(t^2+2)\,(t^2-2)$ es la descomposición en factores de χ_A y la matriz buscada es:

$$J=\begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

En $\mathbb{Z}_7$ se verifica que $3^2=2$ y t^2+2 es irreducible; por tanto $\chi_A(t)=$ $=(t+3)\,(t-3)\,(t^2+2)$ y la matriz J es:

$$J=\begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

En $\mathbb{Z}_{11}$ se verifica $3^2=-2$ y t^2-2 es irreducible; por tanto

$$J=\begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 6.16. Supóngase que ϕ_f admite un divisor primo de la forma

$$p=(t-\alpha)^2+\beta^2,\ \ \beta>0.$$

Existe entonces algún vector $v\in V$ tal que $\phi_v=p^m$ para cierto entero positivo m (basta tomar $v\in V_p$).

El subespacio $\mathbb{K}[t]v$ es irreducible de dimensión $2m$, y existe una base en $\mathbb{K}[t]v$ de la forma:

$$\delta=(u_1,\ v_1,\ \ldots,\ u_m,\ v_m)$$

respecto a la cual el endomorfismo restringido tiene por matriz

$$J=\begin{pmatrix} \begin{array}{c|} A(p) \\ \hline N_2 \end{array} & & \\ & \ddots & \\ & & \begin{array}{c|c} \hline N_2 & A(p) \end{array} \end{pmatrix}$$

$$\text{con } A(p)=\begin{pmatrix} 0 & -\alpha^2-\beta^2 \\ 1 & 2\alpha \end{pmatrix}$$

y $N_2=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

El plano $\langle u_m, v_m\rangle$ es entonces invariante.

Si ϕ_f no admite divisores de este tipo, entonces ϕ_f se descompone en factores lineales.

Si ϕ_f tiene dos raíces distintas, f tiene dos autovalores distintos, y por el ejercicio 4.9, dos autovectores linealmente independientes que generan un plano invariante.

Queda por estudiar el caso en que el polinomio mínimo de f es de la forma $\phi_f(t)=(t-\lambda)^m$. Si f no admite dos autovectores linealmente independientes, necesariamente admite una representación matricial de la forma:

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0\ldots 0 & 0 \\ 1 & \lambda\ldots 0 & 0 \\ \cdot & & \\ 0 & 0\ldots \lambda & 0 \\ 0 & 0\ldots 1 & \lambda \end{pmatrix}$$

respecto a cierta base $\varepsilon=(e_1, \ldots, e_n)$ $(n\geqslant 2)$. En este caso, $\langle e_{n-1}, e_n\rangle$ es un plano invariante.

Ejercicio 6.17. Sea A una matriz cuadrada de orden n con coeficientes en el cuerpo $\mathbb{K}$. Para probar que A es semejante a su transpuesta A^t, es suficiente comprobar que tienen el mismo polinomio mínimo y los mismos invariables de rango. Pero esto se deduce de forma inmediata a partir de las siguientes afirmaciones:

1) Si B es una matriz, $rg\, B=rg\, B^t$.

2) Si $\varphi\in\phi[t]$ entonces $\varphi(A^t)=\varphi(A)^t$

La primera afirmación es elemental. La segunda se deduce de las propiedades:

a) $(AB)^t = B^t A^t$ para A, $B \in EL(n)$.

b) $(\lambda A)^t = \lambda A^t$.

En efecto, de a) se deduce que $(A^k)^t = (A^t)^k$ para todo entero positivo k, y si $\varphi(t) = a_m t^m + a_{m-1} t^{m-1} + \ldots + a_1 t + a_0$, es:

$$
\begin{aligned}
\varphi(A^t) &= a_m (A^t)^m + a_{m-1} (A^t)^{m-1} + \ldots + a_1 A^t + a_0 I = \\
&= a_m (A^m)^t + a_{m-1} (A^{m-1})^t + \ldots + a_1 A^t + a_0 I = \\
&= (a_m A^m + a_{m-1} A^{m-1} + \ldots + a_1 A + a_0 I)^t = \\
&= \varphi(A)^t
\end{aligned}
$$

De 2) se obtiene la equivalencia: $\varphi(A) = 0 \Leftrightarrow \varphi(A^t) = 0$, por tanto $\mathbb{K}[t]\phi_A = \mathbb{K}[t]\phi_{A^t}$ y $\phi_A = \phi_{A^t} = \phi$.

Si $\phi = p_1^{m_1} \ldots p_r^{m_r}$ es la descomposición en factores primos del polinomio mínimo común entonces:

$$rg(p_i^j(A)) = rg(p_i^j(A)^t) = rg(p_i^j(A^t)),$$

con lo que $\rho^j_{p_i}(A) = \rho^j_{p_i}(A^t)$ para todos $i = 1, \ldots, r$; $j = 1, \ldots, m_i$.

Aplíquese ahora el teorema de Jordan.

LECCION 7

Ejercicio 7.3. $O^+(\mathbb{R})$ es abeliano a causa de la siguiente propiedad

$$M(\alpha_1) \quad M(\alpha_2) = M(\alpha_1 + \alpha_2) \text{ con } \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}.$$

Si

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \operatorname{sen}\theta \end{pmatrix} \in S^1 \text{ y } \alpha \in \mathbb{R},$$

$$M(\alpha)\begin{pmatrix} \cos\theta \\ \operatorname{sen}\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta+\alpha) \\ \operatorname{sen}(\theta+\alpha) \end{pmatrix} \in S^1;$$

lo cual implica fácilmente que $O^+(\mathbb{R})$ actúa fiel y transitivamente sobre S^1 (obsérvese que si $\alpha=2\pi k$, con $k\in\mathbb{Z}$, $M(\alpha)$ es el elemento neutro de $O^+(\mathbb{R})$).

Por último no se puede dotar a $(O^+(\mathbb{R}), +)$ de estructura de espacio vectorial, pues si k es un entero distinto de la característica de un cuerpo $\cap$,

$$kM\left(\frac{2\pi}{k}\right)=M(2\pi)=0 \text{ y } k\neq 0,\ M\left(\frac{2\pi}{k}\right)\neq 0,$$

lo que es imposible en un espacio vectorial.

Ejercicio 7.6. a) Sean p, q y r enteros con las condiciones exigidas. En el ejercicio 2.20 se probó que existen subespacios vectoriales de $\vec{X}$, $\vec{M}$ y $\vec{N}$, tales que $\dim\vec{M}=p$, $\dim\vec{N}=q$ y $\dim\vec{M}\cap\vec{N}=r$. Tomando $a\in X$, como consecuencia de 2.10, $a+\vec{M}=M$ y $a+\vec{N}=N$ verifican las condiciones deseadas.

b) Sean p, q y r enteros en las condiciones exigidas. O bien p, o bien q son distintos de n y tomando $q<n$, p y $q+1$ cumplen la condición de a). Por el ejercicio 2.20, existen subespacios vectoriales de $\vec{X}$, $\vec{M}$ con $\dim\vec{M}=p$ y $\vec{N}$ con $\dim\vec{N}=q-1$. Sea $\vec{N}=\vec{N}'\oplus\langle v\rangle$, con $\dim\vec{N}'=q$ y $v\neq 0$ tal que $v\notin\vec{M}\cap\vec{N}$ (lo que es posible gracias a que $\dim\vec{M}\cap\vec{N}<q+1$). Entonces, dado $a\in X$, es fácil comprobar que $a+\vec{M}$ y $a+v+\vec{N}$ están en las condiciones pedidas.

Ejercicio 7.7. a) Sean R y R' dos rectas en un espacio afín tridimensional, las posibles posiciones relativas son:

1. $R\cap R'\neq\phi$. Por el ejercicio 7.6 a):

$$0\leqslant\dim\vec{R}\cap\vec{R}'\leqslant 1$$

— $\dim\vec{R}\cap\vec{R}'=1$, coincidentes.

— $\dim\vec{R}\cap\vec{R}'=0$, se cortan en un punto.

2. $R\cap R'=\phi$. Por el ejercicio 7.6 b):

$$0\leqslant\dim\vec{R}\cap\vec{R}'\leqslant 1$$

— $\dim\vec{R}\cap\vec{R}'=1$, paralelas.

— $\dim\vec{R}\cap\vec{R}'=0$, se cruzan.

b) Sean P y P' dos planos en un espacio afín de dimensión cuatro. Las posibles posiciones relativas son:

1. $P \cap P' \neq \phi$. Por el ejercicio 7.6 a):

$$0 \leqslant \dim \vec{P} \cap \vec{P}' \leqslant 2$$

— $\dim \vec{P} \cap \vec{P}' = 2$, coincidentes

— $\dim \vec{P} \cap \vec{P}' = 1$, se cortan en una recta.

— $\dim \vec{P} \cap \vec{P}' = 0$, se cortan en un punto.

2. $P \cap P' = \phi$. Por el ejercicio 7.6 b):

$$1 \leqslant \dim \vec{P} \cap \vec{P}' \leqslant 2$$

— $\dim \vec{P} \cap \vec{P}' = 2$, paralelos

— $\dim \vec{P} \cap \vec{P}' = 1$.

c) Sean E y E' dos subespacios de dimensión 3 en un espacio afín de dimensión siete:

1. $E \cap E' \neq \phi$. Por 7.6 a):

$$0 \leqslant \dim \vec{E} \cap \vec{E}' \leqslant 3$$

— $\dim \vec{E} \cap \vec{E}' = 3$, coincidentes.

— $\dim \vec{E} \cap \vec{E}' = 2$, se cortan en un plano.

— $\dim \vec{E} \cap \vec{E}' = 1$, se cortan en una recta.

— $\dim \vec{E} \cap \vec{E}' = 0$, se cortan en un punto.

2. $E \cap E' = \phi$. Por 7.6 b):

$$0 \leqslant \dim \vec{E} \cap \vec{E}' \leqslant 3$$

— $\dim \vec{E} \cap \vec{E}' = 3$, paralelos.

— $\dim \vec{E} \cap \vec{E}' = 2$.

— $\dim \vec{E} \cap \vec{E}' = 1$.

— $\dim \vec{E} \cap \vec{E}' = 0$.

Ejercicio 7.8. a) $M \cap N = \phi$ y $\vec{M} \cap \vec{N} = \{0\}$.

b) dim $M+N =$ dim $M +$ dim $N -$ dim $\vec{M} \cap \vec{N} + 1 = 4$, por tanto basta una ecuación.

$$\vec{M} = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle; \quad \vec{N} = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Tomando

$$a = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in M \quad \text{y} \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} \in N,$$

tenemos

$$\langle \overrightarrow{ab} \rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix}$$

Por lo que las ecuaciones paramétricas son:

$$\begin{aligned} x_1 &= 1 & & & &+ \eta \\ x_2 &= & & & &- \eta \\ x_3 &= 1 & &+ \mu & &+ \eta \\ x_4 &= & & & \nu & \\ x_5 &= & \lambda & & &- 5\eta \end{aligned}$$

eliminando parámetros:

$$\begin{vmatrix} x_1 - 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ x_2 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ x_3 - 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ x_4 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ x_5 & 1 & 0 & 0 & -5 \end{vmatrix} = 0$$

que equivale a

$$x_1+x_2=1$$

Ejercicio 7.9. Las rectas que pasan por p y cortan a M forman el subespacio afín $p+M$, cuyas ecuaciones son:

$$\left.\begin{array}{rl} x_1+x_2 \qquad & =1 \\ -x_2+x_3 \quad & =1 \\ x_4 & =0 \end{array}\right\}$$

Las rectas que pasan por p y cortan a N forman el subespacio afín $p+N$, cuyas ecuaciones son:

$$\left.\begin{array}{rl} x_1+x_2 \qquad & =1 \\ 5x_1 \qquad +2x_5 & =0 \end{array}\right\}$$

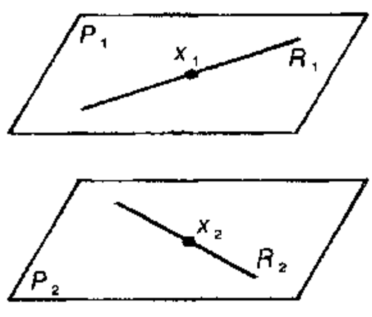
La recta pedida es $(p+M)\cap(p+N)$ cuyas ecuaciones son:

$$\left.\begin{array}{lllll} x_1 & +x_2 & & & =1 \\ & -x_2 & +x_3 & & =1 \\ & & & x_4 & =0 \\ 5x_1 & & & +2x_5 & =0 \end{array}\right\}$$

Ejercicio 7.12. a) Sean $x_1\in R_1$ y $x_2\in R_2$, entonces

$$P_1=x_1+(\vec{R}_1+\vec{R}_2) \quad \text{y} \quad P_2=x_2+(\vec{R}_1+\vec{R}_2),$$

la unicidad es obvia.



b) Sea $x \in X - P_1 \cup P_2$, las rectas que pasan por x y cortan a R_1 forman el plano $x + R_1$ menos la recta paralela a R_1 que pasa por x y las rectas que pasan por x y cortan a R_2 forman el plano $x + R_2$ menos la recta paralela a R_2 que pasa por x. Basta probar que $(x + R_1) \cap (x + R_2) = R_x$ es una recta, en efecto:

$$-\dim R_x = \dim (x+R_1)+(x+R_2) - \dim (x+R_1) - \dim (x+R_2) = -1$$

Finalmente si $x \in P_1 - R_1$, toda recta R tal que $x \in R$ y $R \cap R_1 \neq \phi$ está contenida en P_1 y por tanto $R \cap R_2 = \phi$. Y si $x \in R_1$ existen infinitas rectas en las condiciones buscadas. Análogamente se argumenta para $x \in P_2$.

Ejercicio 7.14. Generalización de 7.12:

Sean R_1 y R_2 subespacios afines de X tales que $\dim R_1 = \dim R_2 = m$ y $\dim X = 2m+1$. Supóngase que $R_1 + R_2 = X$ y $R_1 \cap R_2 = \phi$. Entonces:

i) Existe un único hiperplano H_1, tal que $H_1 \supset R_1$, H_1 paralelo a R_2 y un único hiperplano H_2, tal que $H_2 \supset R_2$ y H_2 es paralelo a R_1.

ii) $X - (H_1 \cup H_2)$ es exactamente el conjunto de puntos $x \in X$ para los cuales existe una única recta R_x que corta a R_1 y a R_2 y $x \in R$.

La demostración es una adaptación simple de la solución de 7.12.

Generalización de 7.13:

Sean P_1 y P_2 dos subespacios afines de X de dimensión m y $\dim X = 2m$. Supóngase que $P_1 + P_2 = X$ y $P_1 \cap P_2 = \phi$.

i) Existe un único hiperplano H_1, tal que $H_1 \supset P_1$ y H_1 es paralelo a P_2 y un único hiperplano H_2 que verifica $H_2 \supset P_2$ y $H_2 \| P_2$.

ii) $X - (H_1 \cup H_2)$ es el conjunto de puntos $x \in X$ para los cuales existe un único plano P_x que corta a P_1 y a P_2 y que contiene a x.

Esquema de la prueba:

i) Si $p_1 \in P_1$ y $p_2 \in P_2$, tomar $H_1 = p_1 + (\vec{P}_1 + \vec{P}_2)$ y $H_2 = p_2 + (\vec{P}_1 + \vec{P}_2)$.

ii) Si $x \in X - (H_1 \cup H_2)$ nótese $P_x = (x + P_1) \cap (x + P_2)$ y razónese de modo análogo a como se hizo en 7.12.

Ejercicio 7.16. Si (M, N) y (M', N') son equivalentes respecto la actuación, existe $g \in GA(X)$ tal que $g(M)=M'$ y $g(N)=N'$. Por ser g biyección, $M \cap N=\phi$ equivale a $M' \cap N'=\phi$. Como $\vec{g} \in GL(\vec{X})$ y $\vec{g}(\vec{M})=\vec{M}'$, $\vec{g}(\vec{N})=\vec{N}'$, y por el problema 3.10 la dimensión de $\vec{M} \cap \vec{N}$ es una propiedad geométrica vectorial, entonces dim $\vec{M} \cap \vec{N}=$dim $\vec{M}' \cap \vec{N}'$, con lo que concluimos que (M, N) tiene la misma posición relativa que (M', N').

Recíprocamente, supongamos que (M, N) y (M', N') determinan la misma posición relativa. Entonces dim $\vec{M} \cap \vec{N}=$dim $\vec{M}' \cap \vec{N}'$, por el problema 3.11, existe $\vec{g} \in GL(\vec{X})$ tal que $\vec{g}(\vec{M})=\vec{M}'$ y $\vec{g}(\vec{N})=\vec{N}'$. Si $M \cap N \neq \phi$ y por tanto también $M' \cap N' \neq \phi$, tomamos $x \in M \cap N$ y $x' \in M' \cap N'$ y definimos:

$$g : X \ni x+v \to x'+\vec{g}(v) \in X.$$

Es fácil comprobar que $g(M)=M'$ y $g(N)=N'$. Si $M \cap N=\phi$ y por tanto, también $M' \cap N'=\phi$, tomamos $a \in M$, $a' \in M$, $b \in N$ y $b' \in N'$, como

$$\dim(\vec{M} \oplus \langle\overrightarrow{ab}\rangle) \cap \vec{N}=\dim(\vec{M}'+\langle\overrightarrow{a'b'}\rangle) \cap \vec{N}$$

se puede construir (de modo análogo a como se hizo en 3.11) $\vec{g} \in GL(\vec{X})$ tal que $\vec{g}(\overrightarrow{ab})=\overrightarrow{a'b'}$, $\vec{g}(\vec{M})=\vec{M}'$ y $\vec{g}(\vec{N})=\vec{N}'$. Entonces:

$$g : X \ni a+v \to a'+\vec{g}(v)$$

verifica $g(M)=M'$ y $g(N)=N'$.

Ejercicio 7.21. a) i) Si $\lambda\lambda' \neq 1$, es

$$h(c'; \lambda') \circ h(c; \lambda)=h(c''; \lambda'')$$

$$\text{con } \lambda''=\lambda\lambda' \text{ y } c''=c+\frac{\lambda'(1+\lambda)}{1-\lambda\lambda'}\,\overrightarrow{cc'}.$$

En efecto, si $x \in X$,

$$h(c', \lambda') \circ h(c; \lambda)(x)=h(c'; \lambda')\, h(c; \lambda)(c+\overrightarrow{cx})=$$
$$=h(c', \lambda')\,(c'+\overrightarrow{c'c}+\lambda\overrightarrow{cx})=c'+\lambda'\overrightarrow{c'c}+\lambda\lambda'\overrightarrow{cx}$$

y por otro lado:

Como a, b y c no están alineados, existe un único endomorfismo afín, f tal que $f(a)=a'$ y $\vec{f}(\overrightarrow{ab})=\overrightarrow{a'b'}$, $\vec{f}(\overrightarrow{ac})=\overrightarrow{a'c'}$. Por tanto $f(a)=a'$, $f(b)=b'$ y $f(c)=c'$. Probaremos que f es una dilatación. Como $\langle a, b\rangle \| \langle a', b'\rangle$, existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tal que $\overrightarrow{a'b'}=\lambda\overrightarrow{ab}$, análogamente

$$\overrightarrow{a'c'}=\mu\overrightarrow{ac} \quad \text{y} \quad \overrightarrow{b'c'}=\nu\overrightarrow{bc}.$$

Ahora bien

$$\mu\overrightarrow{ab}+\mu\overrightarrow{bc}=\mu\overrightarrow{ac}=\overrightarrow{a'c'}=\overrightarrow{a'b'}+\overrightarrow{b'c'}=\lambda\overrightarrow{ab}+\nu\overrightarrow{bc}.$$

y como $(\overrightarrow{ab}, \overrightarrow{bc})$ es l.i., $\mu=\lambda=\nu$.

Por tanto $\vec{f}(\overrightarrow{ab})=\lambda\overrightarrow{ab}$, $\vec{f}(\overrightarrow{ac})=\lambda\overrightarrow{ac}$ y como $(\overrightarrow{ab}, \overrightarrow{ac})$ es base, $f(\vec{v})=$ $=\lambda\vec{v}$ para todo $\vec{v}\in\vec{X}$, es decir f es dilatación.

Entonces, si f es homotecia afín, $\langle a, a'\rangle$, $\langle b, b'\rangle$ y $\langle c, c'\rangle$ se cortan en el centro de la homotecia y si f es traslación son paralelas.

Ejercicio 7.27. Si el conjunto de puntos fijos es vacío, por convenio es subespacio afín.

Si $f\in EA(X)$ y $\operatorname{Fix} f\neq\phi$ es el conjunto de puntos fijos de f, dado $a\in\operatorname{Fix} f$, probaremos que

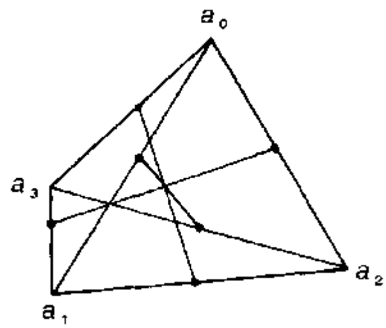
$$\operatorname{Fix} f=a+\ker(\vec{f}-id_{\vec{X}}),$$

es decir $\operatorname{Fix} f$ es un subespacio afín con dirección los vectores fijos de $\vec{f}$.

En efecto, si $x\in\operatorname{Fix} f$, $x=a+\overrightarrow{ax}$ y $\vec{f}(\overrightarrow{ax})=\overrightarrow{f(a)\,f(x)}=\overrightarrow{ax}$ luego $\overrightarrow{ax}\in$ $\ker(\vec{f}-id_{\vec{X}})$. Si $\vec{v}\in\ker(\vec{f}-id_{\vec{X}})$, $f(a+\vec{v})=a+\vec{v}$, luego $a+v\in\operatorname{Fix} f$.

LECCION 8

Ejercicio 8.2. Hemos de comprobar que el baricentro de (a_0, a_1, a_2, a_3), b, pertenece a todas las rectas que unen los puntos medios de los lados opuestos.

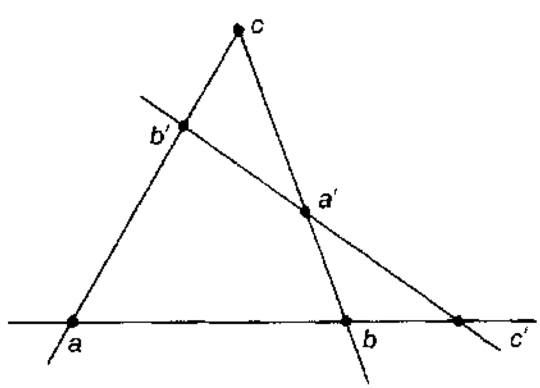


Si $m_{01}=\frac{1}{2}a_0+\frac{1}{2}a_1$ y $m_{23}=\frac{1}{2}a_2+\frac{1}{2}a_3$, veremos que $b\subset\langle m_{01}, m_{23}\rangle$. En efecto:

$$b=\sum_{i=0}^{4}\frac{1}{4}a_i=\frac{1}{2}m_{01}+\frac{1}{2}m_{23}.$$

La comprobación es análoga para el resto de las rectas determinadas por puntos medios de lados opuestos.

Ejercicio 8.3. i) Teorema de Menelao



Sean $\rho_1=(c':a:b)$, es decir:

$$\overrightarrow{c'a}=\rho_1\overrightarrow{c'b}$$

$\rho_2 = (a' : b : c)$ es decir:

$$\overrightarrow{a'b} = \rho_2 \overrightarrow{a'c}$$

y $\rho_3 = (b' : c : a)$, es decir:

$$\overrightarrow{b'c} = \rho_3 \overrightarrow{b'a}$$

Se tiene:

$$\overrightarrow{c'a'} = \overrightarrow{c'b} + \overrightarrow{ba'} = \overrightarrow{c'b} - \rho_2 \overrightarrow{a'c}$$

multiplicando por $\rho_1\rho_3$ se obtiene:

$$\rho_1\rho_3\overrightarrow{c'a'} = \rho_1\rho_3\overrightarrow{c'b} - \rho\overrightarrow{a'c}$$

por otra parte:

$$\overrightarrow{a'b'} = \overrightarrow{a'c} - \overrightarrow{b'c}$$

sumando las dos igualdades:

$$\overrightarrow{a'b'} + \rho_1\rho_3\overrightarrow{c'a'} = (1-\rho)\overrightarrow{a'c} - \overrightarrow{b'c} + \rho_1\rho_3\overrightarrow{c'b}$$

entonces:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{a'b'} + \rho_1\rho_3\overrightarrow{c'a'} &= (1-\rho)\overrightarrow{a'c} + \rho_3\overrightarrow{b'a} + \rho_3\overrightarrow{c'a} = (1-\rho)\overrightarrow{a'c} + \rho_3\overrightarrow{c'b'} = \\ &= (1-\rho)\overrightarrow{a'c} + \rho_3(\overrightarrow{c'a'} + \overrightarrow{a'b'})\end{aligned}$$

luego

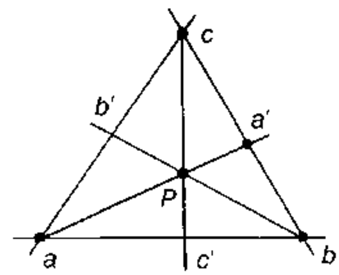
$$(1-\rho_3)\ \overrightarrow{a'b'} + \rho_3(\rho_1 - 1)\ \overrightarrow{c'a'} = (1-\rho)\,\overrightarrow{a'c} \tag{8.3.1}$$

De (8.3.1) se deduce que si $\rho = 1$, entonces a', b' y c' están alineados.

Recíprocamente, si a', b' y c' están alineados (8.3.1) nos dice que $c \in \langle a', b', c' \rangle$ (lo que es imposible como se deduce fácilmente de las hipótesis) o bien $(1-\rho)\overrightarrow{a'c} = 0$, con lo cual $\rho = 1$.

ii) Teorema de Ceva:

Supongamos que las rectas $\langle a, a' \rangle$, $\langle b, b' \rangle$ y $\langle c, c' \rangle$ son concurrentes:



Aplicamos i) al triángulo $ac'c$ y como b', p y b están alineados:

$$(b : a : c') \quad (p : c' : c) \quad (b' : c : a) = 1$$

Se aplica del mismo modo ii) a $cc'b$ y se obtiene:

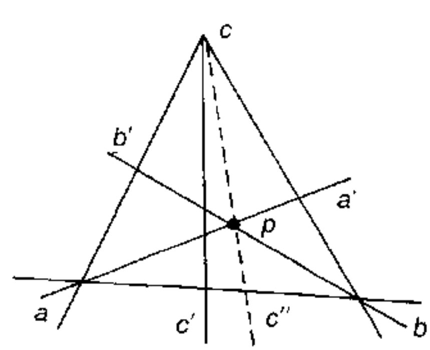
$$(a : c' : b) \quad (a' : b : c) \quad (p : c : c') = 1$$

Multiplicando:

$$(b : a : c') \quad (b' : c : a) \quad (a : c' : b) \quad (a' : b : c) = 1$$

Es fácil comprobar que $(b : a : c')\ (a : c' : b) = -(c' : a : b)$, con lo cual $\rho = -1$.

Por otra parte, supongamos que $\langle a, a' \rangle$, $\langle b, b' \rangle$ y $\langle c, c' \rangle$ no son concurrentes:



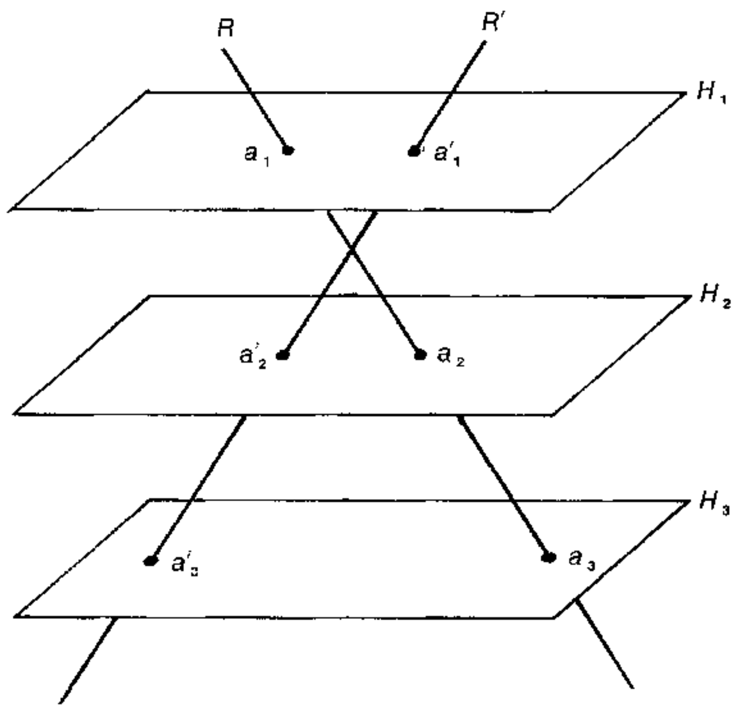
Sea $p=\langle a,\ a'\rangle \cap \langle b,\ b'\rangle$ y $c\neq c''=\langle a,\ b\rangle \cap \langle c,\ p\rangle$. Como $\langle a,\ a'\rangle$, $\langle b,\ b'\rangle$ y $\langle c,\ c''\rangle$ son concurrentes, se tiene

$$(a' : b : c) \quad (b' : c : a) \quad (c'' : a : b) = -1$$

pero al ser $c\neq c''$, $(c' : a : b)\neq(c'' : a : b)$ con lo que

$$(a' : b : c) \quad (b' : c : a) \quad (c' : a : b)\neq -1$$

Ejercicio 8.6. Teorema de Thales:



Sean R y R' dos rectas no paralelas a los hiperplanos,

$$a_i=H_i \cap R \quad \text{y} \quad a'_i=H_i \cap R', \quad i=1,\ 2,\ 3.$$

Hemos de probar $(a_1 : a_2 : a_3)=(a'_1 : a'_2 : a'_3)$.

Llamemos $\sigma=(a_1 : a_2 : a_3)$ y $\sigma'=(a'_1 : a'_2 : a'_3)$.

$$\overrightarrow{a'_1a'_2}=\overrightarrow{a'_1a_1}+\overrightarrow{a_1a_2}+\overrightarrow{a_2a'_2}=\overrightarrow{a'_1a_1}+\sigma\,\overrightarrow{a_1a_3}+\overrightarrow{a_2a'_2}$$

$$\overrightarrow{a'_1a'_2}=\sigma'(\overrightarrow{a'_1a'_3})=\sigma'\,(\overrightarrow{a'_1a_2}+\overrightarrow{a_1a_3}+\overrightarrow{a_3a'_3})$$

Por tanto:

$$\overrightarrow{a'_1a_1}(1-\sigma')+(\sigma-\sigma')\overrightarrow{a'_1a_3}+\overrightarrow{a_2a'_2}-\sigma'\,\overrightarrow{a_3a'_3}=0.$$

Como $\overrightarrow{a'_1a_1}$, $\overrightarrow{a'_2a_2}$ y $\overrightarrow{a'_3a_3}\in\vec{H}_1=\vec{H}_2=\vec{H}_3$, entonces $(\sigma-\sigma')\overrightarrow{a'_1a_3}\in\vec{H}_1=\vec{H}_2=\vec{H}_3$ pero R no es paralela a dichos hiperplanos, luego $\sigma=\sigma'$

Ejercicio 8.8. a) Sean $a, b\in X$ y $\alpha\in\mathbb{K}$ entonces:

$$\begin{aligned}h((1-\alpha)a+\alpha b)&=(\lambda f+\mu g)\,((1-\alpha)a+\alpha b)=\\&=\lambda f((1-\alpha)a+\alpha b)+\mu g((1-\alpha)a+\alpha b)=\\&=\lambda((1-\alpha)\ f(a)+\alpha f(b))+\mu((1-\alpha)\ g(a)+\alpha g(b))=\\&=(1-\alpha)\,(\lambda f(a)+\mu g(a))+\alpha(\lambda f(b)+\mu g(b))=\\&=(1-\alpha)\ h(a)+\alpha h(b).\end{aligned}$$

Por tanto h es afín.

Si $\overline{ab}\in\vec{X}$

$$\begin{aligned}\vec{h}(\overline{ab})&=(\lambda f+\mu g)(b)-(\lambda f+\mu g)(a)=\\&=\lambda\vec{f}(b-a)+\mu\vec{g}(b-a)=(\lambda\vec{f}+\mu\vec{g})\,(\overrightarrow{ab}).\end{aligned}$$

b) Sea $\overline{FA(X, X')}$ el subespacio vectorial de $FL(\hat{X}, \hat{X}')$ formado por aquellas aplicaciones lineales que verifican $\hat{f}(\vec{X})\subset\vec{X}'$.

La estructura afín pedida viene dada por la actuación:

$$FA(X, X')\times\overrightarrow{FA(X, X')}\ni(f, \hat{g})\to(\hat{f}+\hat{g})|_X\in FA(X, X').$$

Es fácil comprobar que la actuación es fiel y transitiva. Obsérvese que si $f_1, f_2\in FA(X, X')$, entonces $\overrightarrow{f_1f_2}=\hat{f}_2-\hat{f}_1\in\overrightarrow{FA(X, X')}$, de donde es fácil concluir que las combinaciones afines son las descritas en i).

Ejercicio 8.9. Siguiendo la notación de 2.9, basta probar que las operaciones de (2.9.1) coinciden con las que hacen a $\hat{i}$ isomorfismo lineal.

Sean x, $y \in X$, λ, $\mu \in \mathbb{K}$ y v, $w \in \overline{X}$. Ya se probó en la demostración de 2.9 para $\lambda x + \mu x$ y $\lambda + \mu \neq 0$.

Si $\lambda + \mu = 0$,

$$\lambda x + \mu y = \hat{i}^{-1}(\hat{i}(\lambda x) + \hat{i}(\mu y)) = \hat{i}^{-1}(\lambda i(x) + \mu i(y)) =$$

$$= \vec{i}^{-1}(\lambda i(x) + \mu i(y)) = \lambda i^{-1} i(x) + \mu i^{-1} i(y) = \lambda x + \mu y \text{ (suma vectorial).}$$

$$\lambda x + v = \hat{i}^{-1}(\hat{i}(\lambda x) + \hat{i}(v)) = \hat{i}^{-1}(\lambda i(x) + \vec{i}(v)) =$$

$$= \lambda i^{-1}(i(x) + \frac{1}{\lambda}\vec{i}(v)) = \lambda\left(x + \frac{1}{\lambda} v\right)$$

$$v + w = \hat{i}^{-1}(\hat{i}(v) + \hat{i}(w)) = \vec{i}^{-1}(\vec{i}(v) + \vec{i}(w)) = v + w$$

$$\lambda v = \hat{i}^{-1}(\lambda \hat{i}(v)) = \vec{i}^{-1}(\lambda \vec{i}(v)) = \lambda v$$

$$\mu(\lambda \cdot x) = \hat{i}^{-1}(\mu \hat{i}(\lambda x)) = \hat{i}^{-1}((\mu\lambda) i(x)) =$$

$$= (\mu\lambda)x.$$

Ejercicio 8.10. a) Es consecuencia inmediata de la estructura vectorial de $\mathbb{K}$.

b) El hecho de ser $\overline{ms}$ una forma lineal es trivial. Sea $\lambda \in \overline{X}$, si $\overline{ms}(\lambda) = 0$ entonces $\sum_{x \in X} \lambda(x) = 0$ y además es una suma finita, luego $\sum_{x \in X} \lambda(x) x \in \overline{X}$. Si $\overline{ms}(\lambda) = 1$ entonces $\sum_{x \in X} \lambda(x) = 1$, luego $\sum_{x \in X} \lambda(x) x \in X$.

c) Si λ_1, $\lambda_2 \in \overline{X}_0$ y α, $\beta \in \mathbb{K}$, como $\overline{ms}$ es lineal, $\overline{ms}(\alpha\lambda_1 + \beta\lambda_2) = 0$ y

$$\sum_{x \in X} (\alpha\lambda_1 + \beta\lambda_2)(x) = \alpha \sum_{x \in X} \lambda_1(x) + \beta \sum_{x \in X} \lambda_2(x) = 0$$

d) Dados $\lambda + \overline{X}_0 = \lambda' + \overline{X}_0$ hemos de probar que $\overline{ms}(\lambda) = \overline{ms}(\lambda')$. Tenemos $\lambda = \lambda' + \lambda_0$, con $\lambda_0 \in X_0$, $\overline{ms}(\lambda) = \overline{ms}(\lambda' + \lambda_0) = \overline{ms}(\lambda') + \overline{ms}(\lambda_0) = \overline{ms}(\lambda')$. Por tanto tiene sentido definir $ms(\lambda + \overline{X}_0) = ms(\lambda)$ para todo $\lambda + X_0 \subset \hat{X}$ y es claro que $ms \circ p = \overline{ms}$.

e) La única propiedad que resta por verificar, es que $i : X \ni x \to 1 \cdot x \in \tilde{X}(ms)$ es isomorfismo afín:

Sean $x, y \in X$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ con $\alpha+\beta=1$:

$$i(\alpha x+\beta y)=1\cdot(\alpha x+\beta y) \text{ y}$$
$$\alpha i(x)+\beta i(y)=\alpha(1\cdot x)+\beta(1\cdot y)=\alpha\cdot x+\beta\cdot y.$$

Hemos de probar que $1\cdot(\alpha x+\beta y)=\alpha\cdot x+\beta\cdot y$.

Sea $1\cdot(\alpha x+\beta y)=\lambda+\overline{X}_0$, siendo $\lambda\in\overline{X}$ tal que $\lambda(a)=0$ para $a\neq\alpha x+\beta y$, $a\in X$ y $\lambda(\alpha x+\beta y)=1$. Sea $\alpha\cdot x+\beta\cdot y=\mu+\overline{X}_0$, siendo $\mu\in\overline{X}$ tal que $\mu(a)=a$ para $a\neq x$ y $a\neq y$, $a\in X$, y $\mu(x)=\alpha$, $\mu(y)=\beta$. Entonces:

$$\overline{ms}(\lambda-\mu)=1-\alpha-\beta=0 \text{ y}$$

$$\sum_{z\in X}(\lambda-\mu)(z)z=\alpha x+\beta y-\alpha x-\beta y=0,$$

con lo cual

$$\lambda-\mu\in X_0 \text{ y } 1\cdot(\alpha x+\beta y)=\lambda+\overline{X}_0=\mu+\overline{X}_0=\alpha\cdot x+\beta\cdot y.$$

Ejercicio 8.13. Sean $\lambda a+v$ y $\mu a+w$ dos vectores de $\hat{X}$ y $\alpha, \beta\in\mathbb{K}$:

$$\hat{f}(\alpha(\lambda a+v)+\beta(\mu a+w))=\hat{f}((\alpha\lambda)a+(\beta\mu)a+v+w))=$$
$$=\hat{f}(((\alpha\lambda)+(\beta\mu))a+v+w)=[(\alpha\lambda)+(\beta\mu)]f(a)+\vec{f}(v)+\vec{f}(w)=$$
$$=\alpha(\lambda f(a)+\vec{f}(v))+\beta(\mu f(a)+\vec{f}(w))=$$
$$=\alpha\hat{f}(\lambda a+v)+\beta\hat{f}(\mu a+w).$$

Ejercicio 8.15. Obsérvese que $\alpha A=\varepsilon$, donde

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & \dots & -1 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \cdot & 0 & \dots & \\ & \cdot & \dots & \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}=\left(\begin{array}{c|c} 1 & -1 \ \dots \ -1 \\ \hline 0 & I \end{array}\right)$$

Es claro que det $A=1\neq 0$ por lo tanto α es base de $\hat{X}$ y por tanto sistema de referencia afín de X si y sólo si ε es base de $\hat{X}$ y por ello sistema de referencia cartesiano de X.

Sean

$$x=\begin{pmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

las coordenadas baricéntricas respecto α (que coinciden con las coordenadas en $\hat{X}$ respecto la base α) y sean

$$y=\begin{pmatrix} 1 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

las coordenadas cartesianas respecto ε (que coinciden con las coordenadas en $\hat{X}$ respecto la base ε). Entonces:

$$Ay=x \quad \text{es decir} \quad \begin{aligned} x_0 &= 1-y_1-\dots-y_n \\ x_1 &= \quad y_1 \\ &\ \vdots \qquad \ddots \\ x_n &= \qquad\qquad\quad y_n \end{aligned}$$

Ejercicio 8.16. Sea $M_\varepsilon(f)=M_\varepsilon(\hat{f})$ y $M_\alpha(f)=M_\alpha(\hat{f})$, entonces $M_\varepsilon(\hat{f})=$ $=A^{-1}M_\alpha(\hat{f})\,A$ siendo A la matriz

$$\left(\begin{array}{c|ccc} 1 & -1 & \dots & -1 \\ \hline 0 & & I & \end{array}\right)$$

por lo tanto

$$M_\varepsilon(f)=A^{-1}M_\alpha(f)\,A.$$

Ejercicio 8.17. a) Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, entonces

$$(a_0, a_1, a_2, a_3) = \varepsilon A$$

y como det $A \neq 0$ se tiene que (a_0, a_1, a_2, a_3) es sistema de referencia afín.

b) Llamando $\alpha = (a_0, a_1, a_2, a_3)$

$$M_\alpha(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

y por tanto:

$$M_\varepsilon(f) = A \; M_\alpha(f) \, A^{-1}$$

LECCION 9

Ejercicio 9.2. *Teorema de clasificación afín para simetrías afines.*

Dos simetrías afines σ y σ' cuyas bases son B y B', son afínmente equivalentes si y sólo si dim B = dim B'.

Para probar el resultado anterior basta observar que si σ es una simetría afín en un espacio afín X de dimensión n con base de dimensión r, existe un sistema cartesiano ε de X tal que

$$M_\varepsilon(\sigma) = \begin{pmatrix} 1 \; (r+1) & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & & -1 \; (n-r) & \\ & & & & \ddots \; -1 \end{pmatrix}$$

En efecto si B es la base de σ y $\vec{D}$ la dirección, basta tomar $\varepsilon = (e_0, \vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_r, \vec{e}_{r+1}, \ldots, \vec{e}_n)$, donde $e_0 \in B$, $(\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_r)$ es una base de $\vec{B}$ y $(\vec{e}_{r+1}, \ldots, \vec{e}_n)$ es una base de $\vec{D}$.

Así pues, si σ y σ' son simetrías con bases B y B' tales que dim $B = \dim B' = r$ entonces existen sistemas de referencia cartesianos ε y ε' tales que:

$$M_{\varepsilon}(\sigma) = \begin{pmatrix} 1 & (r+1) & & \\ & 1 & & \\ & & -1 & (n-r) \\ & & & -1 \end{pmatrix} = M_{\varepsilon'}(\sigma')$$

Por tanto σ y σ' son afínmente equivalentes.

Recíprocamente, si σ y σ' son simetrías afines afínmente equivalentes, entonces $\vec{\sigma}$ y $\vec{\sigma}'$ son linealmente equivalentes y por tanto, si B es la base de σ y B' la de σ'.

$$\dim B = \dim \ker (\vec{\sigma} - id_{\vec{X}}) = \dim \ker (\vec{\sigma}' - id_{\vec{X}}) = \dim B'.$$

Teorema de clasificación afín para proyecciones afines.

Dos proyecciones afines π y π' cuyas bases son B y B', son afínmente equivalentes si y sólo si dim $B = \dim B'$.

La prueba es totalmente análoga a la del resultado anterior.

Ejercicio 9.4. *Teorema de clasificación afín de dilataciones*

Dos dilataciones f_1 y f_2 son afínmente equivalentes si y sólo si f_1 y f_2 son traslaciones o bien f_1 y f_2 son homotecias con la misma razón.

Demostración

Si f_1 y f_2 son traslaciones es fácil encontrar sistemas de referencia cartesianos ε_1 y ε_2 de modo que

$$M_{\varepsilon_1}(f_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \ldots 0 \\ 1 & 1 & 0 \ldots 0 \\ & & \ldots \\ 0 & 0 & 0 \ldots 1 \end{pmatrix} = M_{\varepsilon_2}(f_2)$$

luego f_1 y f_2 son linealmente equivalentes.

Si f_1 y f_2 son homotecias de razón λ se puede probar que existen sistemas de referencia cartesianos ε_1 y ε_2 de modo que:

$$M_{\varepsilon_1}(f_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \dots 0 \\ 0 & \lambda & 0 \dots 0 \\ & & \dots \\ 0 & 0 & 0 \dots \lambda \end{pmatrix} = M_{\varepsilon_2}(f_2)$$

con lo que f_1 y f_2 son linealmente equivalentes.

El recíproco es consecuencia de que si f_1 y f_2 son afínmente equivalentes entonces $\vec{f}_1$ y $\vec{f}_2$ son linealmente equivalentes.

Ejercicio 9.6. a) Si $x \in X - B$, como $(\pi(x) : f(x) : x) = \rho$ por la definición de razón simple: $f(x) = (1-\rho)\,\pi(x) + \rho x = ((1-\rho)\,\pi + \rho id)\,(x)$. Si $x \in B$, $f(x) = x = (1-\rho)x + \rho x = (1-\rho)\,\pi(x) + \rho x = ((1-\rho)\,\pi + \rho id)\,(x)$. Por tanto $f = (1-\rho)\,\pi + \rho id$ y f es aplicación afín.

b) Si $\dim B = r$, la matriz cartesiana de Jordan para f es

$$\begin{pmatrix} 1 & (r+1) & & \\ & 1 & & \\ & & \rho & (n-r) \\ & & & \rho \end{pmatrix}$$

Para obtenerla basta tomar un sistema de referencia cartesiano $\varepsilon = (e_0, \vec{e}_1, \dots, \vec{e}_r, \vec{e}_{r+1}, \dots, \vec{e}_n)$ de modo que $e_0 \in B$,

$(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_r)$ es base de $\vec{B}$ y $(\vec{e}_{r+1}, \dots, \vec{e}_n)$ es base de $\vec{D}$.

Teorema de clasificación afín para deformaciones.

Sean f_1 y f_2 dos deformaciones afines con bases B_1 y B_2 y razones ρ_1 y ρ_2 respectivamente. Entonces f_1 y f_2 son afínmente equivalentes si y sólo si $\dim B_1 = \dim B_2$ y $\rho_1 = \rho_2$.

La prueba es totalmente análoga a la del teorema enunciado en la solución del problema 9.2.

Ejercicio 9.8. i) Si $e_0 \in H$ y $(\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_{n-1})$ es una base de $\vec{H}$, $\varepsilon = (e_0, \vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n, \overrightarrow{e_0 a})$ es un sistema de referencia cartesiano de X y entonces $M_\varepsilon(f) = I$, por tanto $f = id$.

ii) Sea $e_0 \in \langle a, b \rangle \cap H$ y $\lambda = (e_0 : b : a)$. Tomamos el sistema de referencia $\varepsilon = (e_0, \vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n, \overrightarrow{e_0 a})$, donde $(\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n)$ es una base de $\vec{H}$. Entonces:

$$M_\varepsilon(f) = \begin{pmatrix} 1 & & \overset{(n)}{} & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ & & & \lambda \end{pmatrix},$$

luego f es una deformación afín con base H y razón λ, $\lambda \neq 0$.

iii) Como todos los puntos de H son fijos por f, si H_1 es un hiperplano paralelo a H entonces $\vec{f}|_{\vec{H}_1}$ es la identidad. Para probar que $f(H_1) = H_1$ y que $f|_{H_1}$ es una traslación, basta encontrar $x \in H_1$ tal que $f(x) \in H_1$. Si $a \notin H_1$, tomamos $p \in H$ y $x = \langle p, a \rangle \cap H_1$ entonces:

$$f(x) = f(p + (p \,.\, x : a)\overrightarrow{pa}) = p + (p \,.\, x : a)\overrightarrow{pb} =$$

$$= p + (p \,.\, x : a)[\overrightarrow{pa} + \overrightarrow{ab}] = x + (p \,.\, x : a)\overrightarrow{ab}$$

que pertenece a H_1 pues $\overrightarrow{ab} \in \vec{H}_1 = \vec{H}$.

Si $a \in H_1$, como $\overrightarrow{ab} \in \vec{H}_1$, $f(a) = b \in H_1$.

Ejercicio 9.9. Sea $f : X \to X$ una transvección de base H y dirección $\langle \overrightarrow{ab} \rangle$. Construimos el sistema de referencia cartesiano siguiente:

$$\varepsilon = (e_0, \overrightarrow{e_0 a}, \overrightarrow{ab}, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_{n-1})$$

donde $e_0 \in H$ y $(\overrightarrow{ab}, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_{n-1})$ es una base de $\vec{H}$. Es fácil comprobar que:

$$M_\varepsilon(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \ldots 0 \\ 0 & 1 & 0 \ldots 0 \\ 0 & 1 & 1 \ldots 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 \ldots 1 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 9.15. Supongamos que la dimensión de X es n, la razon de f es $\rho \neq 1$ y la dimensión de B es r. Tomemos $(\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_r)$ base de $\vec{B}$ y $(\vec{e}_{r+1}, \ldots, \vec{e}_n)$ base de $\vec{D}$.

1) $\vec{v} \in \vec{D}$.

Veremos que $f \circ \tau$ tiene un punto fijo. Sea $b \in B$ y $x \in b+\vec{D}$, para que x sea fijo:

$$f \circ \tau(x) = f(x+\vec{v}) = f(b+\overrightarrow{bx}+\vec{v}) = b+\rho(\overrightarrow{bx}+\vec{v}) = x.$$

Por tanto:

$$b+\rho\overrightarrow{bx}+\rho\vec{v} = b+\overrightarrow{bx} \quad \text{luego} \quad \overrightarrow{bx} = \frac{\rho}{1-\rho}\vec{v}$$

y así $x = b+\dfrac{\rho}{1-\rho}\vec{v}$ es un punto fijo para f.

Considerando el sistema de referencia

$$\varepsilon = \left(b+\frac{\rho}{1-\rho}\vec{v};\ \ \vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n\right)$$

se verifica que:

$$M_\varepsilon(f \circ \tau) = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & 1 & r+1 & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & 1 & & \\ & & & & \rho & n-r \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & \rho \end{pmatrix}$$

Con lo que concluimos que $f \circ \tau$ es una deformación con base

$$\left(b+\frac{\rho}{1-\rho}\vec{v}\right)+\vec{B} \text{ y dirección } \vec{D}.$$

Análogamente se demuestra el caso $\tau \circ f$.

2) $\vec{v} \in \vec{B}$

Sea $b \in B$ y $(\vec{v}, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_r)$ base de $\vec{B}$. Construimos el sistema de referencia

$$\varepsilon = (b; \vec{v}, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_r, \vec{e}_{r+1}, \ldots, \vec{e}_n)$$

entonces:

$$M_{\varepsilon}(\tau \circ f) = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ 1 & 1 & & & & \\ & & \ddots^{(r)} & & & \\ & & & 1 & & \\ & & & & \rho & \\ & & & & & \ddots^{(n-r)} \\ & & & & & & \rho \end{pmatrix} = M_{\varepsilon}(f \circ \tau)$$

luego $\tau \circ f = f \circ \tau$.

3) $\vec{v} \notin \vec{D}$. Como $\vec{X} = \vec{B} \oplus \vec{D}$, $\vec{v} = \vec{b} + \vec{d}$, $\vec{b} \neq 0$.

$$\tau_{\vec{v}} \circ f = (\tau_{\vec{b}} \circ \tau_{\vec{d}}) \circ f = \tau_{\vec{b}} \circ (\tau_{\vec{d}} \circ f)$$

Si $f' = \tau_{\vec{d}} \circ f$, por 1) f' es una deformación afín y por 2), $(\vec{b} \neq 0)$, $\tau_{\vec{b}} \circ f'$ es deformación con deslizamiento.

Ejercicio 9.16. *Teorema de clasificación afín para las deformaciones con deslizamiento*

Sean f y f' dos deformaciones afines con deslizamiento, con bases B y B' y razones ρ y ρ' respectivamente. Entonces f y f' son afínmente equivalentes si y sólo si $\dim B = \dim B'$ y $\rho = \rho'$.

Prueba

Si $\dim B = \dim B'$ y $\rho = \rho'$ se pueden construir sistemas de referencia ε y ε' como el dado en la solución de 9.15.2) y por tanto:

$$M_{\varepsilon}(f)=\begin{pmatrix}1&&&&&\\1&1&&&&\\&&\overset{(r)}{\ddots}&&&\\&&&1&&\\&&&\rho&\overset{(n-r)}{\ddots}&\\&&&&&\rho\end{pmatrix}=M_{\varepsilon'}(f).$$

Luego f y f' son afínmente equivalentes.

El recíproco es consecuencia inmediata del hecho de ser $\vec{f}$ y $\vec{f'}$ linealmente equivalentes.

Ejercicio 9.23. Sea f un endomorfismo afín de un espacio afín de dimensión tres.

1. $\delta=1$ (f tiene puntos fijos)

Entonces f puede admitir las siguientes representaciones matriciales de Jordan:

$$\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&\alpha&0&0\\0&0&\mu&0\\0&0&0&\gamma\end{pmatrix};\quad\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&\lambda&0&0\\0&1&\lambda&0\\0&0&0&\mu\end{pmatrix};\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&\lambda&0&0\\0&1&\lambda&0\\0&0&1&\lambda\end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&\lambda&0&0\\0&0&\alpha&-\beta\\0&0&\beta&\alpha\end{pmatrix},$$

2. $\delta=2$:

$$\begin{pmatrix}1&0&0&0\\1&1&0&0\\0&0&\lambda&0\\0&0&0&\mu\end{pmatrix};\quad\begin{pmatrix}1&0&0&0\\1&1&0&0\\0&0&\lambda&0\\0&0&1&\lambda\end{pmatrix};\quad\begin{pmatrix}1&0&0&0\\1&1&0&0\\0&0&\alpha&-\beta\\0&0&\beta&\alpha\end{pmatrix}$$

3. $\delta=3$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

4. $\delta=4$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 9.24. Sea X un espacio afín real de dimensión tres.

1.

$$M_{\mathcal{E}}(f_1)=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & -3 & -1 & -2 \\ 6 & 8 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$\delta(f_1)=1$, en efecto:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & -4 & -1 & -2 \\ 6 & 8 & 2 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=0 \text{ equivale a } -3=4x_1-x_2+2x_3$$

que es un plano de puntos fijos. Tomamos

$$e_0=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

un punto de dicho plano.

Por otra parte $\chi_{f_1}=(t-1)^3$ y $rg(\vec{f}_1-id_X)=1$, con lo cual la matriz de Jordan de f_1 es:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La ecuación del $\ker(\vec{f}_1-id)$ es:

$$4x_1+x_1+2x_3=0$$

Como $\ker(\vec{f}_1-id)^2=0$, tomamos

$$\vec{e}_1=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix};$$

$$\vec{e}_2=\vec{f}_1(\vec{e}_1)=\begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 8 \\ 4 \end{pmatrix} \text{ y } \vec{e}_3 \in \ker(\vec{f}_1-id)$$

y tal que

$$(\vec{e}_2, \vec{e}_3) \text{ sea } l.i.: \vec{e}_3=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Un sistema de referencia que verifica las condiciones pedidas es:

$$\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 8 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

2.

$$M_{\mathcal{B}}(f_2)=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \\ -5 & -4 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

$\delta(f_2)=2$, en efecto,

$$(\hat{f}_2-\widehat{id}(x))=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 & 2 \\ -5 & -4 & 0 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=0$$

es incompatible y

$$(\hat{f}_2-id)^2(x)=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & -4 & 0 & -4 \\ -4 & -4 & 0 & -4 \\ 8 & 8 & 0 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=0$$

equivale a $-1=x_1+x_3$.

Tomemos

$$e_0=\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

es decir en el plano $-1=x_1+x_3$, y

$$\vec{e}_1=\overrightarrow{e_0f_2(e_0)}=f_2(e_0)-e_0=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Por otra parte $\chi_{\vec{f}_2}=(t-1)^2(t+1)$, por lo que la matriz canónica de Jordan correspondiente a f_2 es:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

La ecuación de $\ker(\vec{f}_2 - id)$ es:

$$x_1 + x_3 = 0,$$

tomamos $\vec{e}_2 \in \ker(\vec{f}_2 - id)$ tal que $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ sea l.i., por ejemplo

$$\vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Por último las ecuaciones de $\ker(\vec{f}_2 + id)$ son:

$$\left.\begin{aligned} 2x_1 + x_3 \qquad &= 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 &= 0 \end{aligned}\right\}$$

Tomamos $\vec{e}_3 \in \ker(\vec{f}_2 + id)$, por ejemplo

$$e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Así pues un sistema de referencia cartesiano respecto del cual f_2 adopta una expresión matricial de Jordan es:

$$\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right),$$

El resto de las matrices se tratan de forma análoga, nos limitaremos a ofrecer la forma canónica de Jordan de cada una de ellas, para que el lector compruebe así sus resultados:

3. Para

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -5 & 0 & -5 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

la forma de Jordan es:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

4. Para

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 5 & 5 & 2 & 4 \\ -2 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

la forma de Jordan es:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

5. Para

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ -2 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

la forma de Jordan es

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 9.28. Sea X un espacio afín de dimensión n, f un endomorfismo de X y

$$d(f)=\min\{\dim A \mid f(A)\subset A \text{ y } A\neq\phi\},$$

hemos de probar que $d(f)=\delta(f)-1$.

Para $d(f)=0$ el resultado es cierto, pues existe $e_0\in X$ punto fijo para f y $e_0\in\ker(\hat{f}-id)\cap X$, luego $\delta(f)=1=1+d(f)$.

Supongamos que $r=\delta(f)>1$ y que $\varepsilon=(e_0;\vec{e}_1,\ldots,\vec{e}_n)$ es un sistema de referencia cartesiano de modo que $M_\varepsilon(f)$ es una matriz de Jordan para f, es decir,

$$M_\varepsilon(f)=\begin{pmatrix} C(r) & O\\ 0 & J'\end{pmatrix} \text{ con } C(r)=\begin{pmatrix} 1 & 0\ldots 0 & 0\\ 1 & 1\ldots 0 & 0\\ & \ldots & \\ 0 & 0\ldots 1 & 0\\ 0 & 0\ldots 1 & 1\end{pmatrix}\in EL(r)$$

y J' una matriz de Jordan.

Por la estructura de $M_\varepsilon(f)$ se tiene que $e_0+\langle\vec{e}_1,\ldots,\vec{e}_{r-1}\rangle$ es invariante por f, luego $r-1\geqslant d(f)$.

Si $r-1>d(f)$ existiría A subespacio afín de X tal que $f(A)\subset A$ y $\dim A<r-1$. Ahora bien como $\delta(f/_A)\leqslant\dim A+1<r$, existe $k<r$ tal que

$$\ker(\hat{f}_{\mid\hat{A}}-id_{\hat{A}})^k\cap A\neq\phi, \text{ luego}$$
$$\ker(\hat{f}-id)^k\cap X\neq\phi.$$

lo que contradice la definición de $\delta(f)$. Por tanto, $r-1\leqslant d(f)$. Con lo cual $d(f)=r-1=\delta(f)-1$.

LECCION 10

Ejercicio 10.2. Sean $\varepsilon^*=(e_1^*,\ldots,e_n^*)$ y $\varepsilon'^*=(e_1'^*,\ldots,e_n'^*)$ las bases duales de ε y ε' respectivamente. Llamaremos $x^*: V^*\to V_n(\mathbb{K})$ al sistema de coordenadas de V respecto a ε^*. La relación pedida en el enunciado es:

$$M_{\varepsilon,(1)}(e_i'^*)=x^*(e_i'^*)^t$$

En efecto, si $M_{\varepsilon(1)}(e_i'^*) = (a_1, \ldots, a_n)$ y

$$e_j = \sum_{l=1}^{n} \lambda_{jl} e_l', \quad j = 1, \ldots, n,$$

entonces

$$a_j = e_i'^*(e_j) = e_i'^*\left(\sum_{h=1}^{n} \lambda_{jh} e_h'\right) = \lambda_{ji}.$$

Luego

$$M_{\varepsilon(1)}(e_i'^*) = (\lambda_{1i}, \ldots, \lambda_{ni}).$$

Por otra parte

$$e_i'^* = \sum_{j=1}^{n} x_j^* \; (e_i'^*) \; e_j^*,$$

por tanto,

$$x_j^*(e_i'^*) = e_i'^*(e_j) = \lambda_{ji},$$

y así:

$$x^*(e_i'^*) = \begin{pmatrix} \lambda_{1i} \\ \vdots \\ \lambda_{ni} \end{pmatrix}.$$

Ejercicio 10.5. Sea P la matriz de paso de ε a ε' y P^* la matriz de paso de ε^* a ε'^*. Probaremos que

$$P^t = (P^*)^{-1}.$$

Teniendo en cuenta la definición de matriz de paso y el corolario 1.9, $P = ((e_i^*/e_j'))$.

$(P^*)^{-1}$ es la matriz de paso de ε'^* a ε^*, luego $(P^*)^{-1} = ((e_i'/e_j^*))$, por tanto $P^t = (P^*)^{-1}$

Ejercicio 10.6. Sean λ, $\mu \in \mathbb{K}$ y a'_1, $a'_2 \in V'^*$ Para cada $v \in V$:

$$f^t(\lambda a'_1 + \mu a'_2)(v) = (\lambda a'_1 + \mu a'_2) \circ f(v) =$$
$$= \lambda a'_1(f(v)) + \mu a'_2(f(v)) = \lambda f^t(a'_1)(v) + \mu f^t(a'_2)(v),$$

luego, $f^t(\lambda a'_1 + \mu a'_2) = \lambda f^t(a'_1) + \mu f^t(a'_2)$. Por tanto, f^t es una aplicación lineal.

Ejercicio 10.7. Sean $\varepsilon = (e_1, \ldots, e_n)$, $\varepsilon' = (e'_1, \ldots, e'_n)$, $\varepsilon^* = (e^*_1, \ldots, e^*_n)$ y $\varepsilon'^* = (e'^*_1, \ldots, e'^*_n)$. Entonces:

$$[M_{\varepsilon\varepsilon'}(f)]^t = ((e'^*_i / f(e_j))) = (e'^*_i(f(e_j))) = ((e'^*_i \circ f)(e_j)) =$$
$$= (f^t(e'^*_i) / e_j) = (e_j / f^t(e'^*_i))^t = M_{\varepsilon'^*\varepsilon^*}(f^t).$$

Ejercicio 10.8. Es fácil comprobar que la aplicación trasposición de matrices es un isomorfismo:

$$tr : FL\ (m,\ n) \ni M \to M^t \in FL\ (n,\ m).$$

Si dim $V = n$ y dim $V' = m$, por el ejercicio 3.21, las aplicaciones:

$$M_{\varepsilon\varepsilon'} : FL\ (V,\ V') \to FL\ (m,\ n) \quad y$$
$$M_{\varepsilon'^*\varepsilon^*} : FL\,(V'^*,\ V^*) \to FL\,(n,\ m)$$

son también isomorfismos. Como $t = (M_{\varepsilon'^*\varepsilon^*})^{-1} \circ tr \circ M_{\varepsilon\varepsilon'}$, t es isomorfismo.

Ejercicio 10.9. En primer lugar probaremos que

$$(f^t(a)/b) = (a/f(b)).$$

Por ejemplo, si a es una forma y b un vector:

$$(f^t(a)/b) = f^t(a)(b) = a \circ f(b) = a(f(b)) = (a/f(b)).$$

Si a es vector y b una forma se razona análogamente.

Supongamos que f' es una aplicación lineal que verifica:

$$(f'(a)/b) = (a/f(b)) \quad \text{para todo } a \text{ y } b.$$

Como $(f^t(a)/b)=(a/f(b))=(f'(a)/b)$, se tiene que $(f^t(a)-f'(a)/b)=0$, para todo b, luego por 1.6.3), $f^t(a)=f'(a)$ para todo a, es decir, $f'=f^t$.

Por la caracterización anterior es inmediato que $f=(f^t)^t$.

Ejercicio 10.12. Si q es forma cuadrática es evidente que q verifica las condiciones 1 y 2 del enunciado de 10.12.

Recíprocamente, supongamos que $q: V \to \mathbb{K}$ verifica las condiciones 1 y 2.

Por aplicación de 2, es inmediato comprobar que para $(u, v, w) \in V^3$:

$$q(u+v+w)-q(u+v)-q(v+w)-q(w+u)+q(u)+q(v)+q(w)=0.$$

Para $(u, v, w)=(0, 0, 0)$, se deduce que $q(0)=0$. De la expresión anterior aplicada a $(u, u, -u)$ se tiene que $q(2u)=4u$, para todo $u \in V$.

Sea $v \in V$, por ser Q aplicación bilineal,

$$Q(\lambda v, \lambda v)=\lambda^2 Q(v, v).$$

Ahora bien,

$$Q(\lambda v, \lambda v)=q(2\lambda v)-2q(\lambda v)=2q(\lambda v) \quad y$$
$$Q(v, v)=2q(v).$$

Así pues $2q(\lambda v)=2\lambda^2 q(v)$, como $\mathbb{K}$ tiene característica distinta de dos, $q(\lambda v)=\lambda^2 q(v)$.

Ejercicio 10.18. Como la matriz de Φ respecto la base canónica es:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

la matriz pedida es:

$$M_L(\Phi)=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}$$

El rango de Φ es dos.

Por último $M_\lambda(\Phi)=\begin{pmatrix} 3 & 9/2 \\ 9/2 & 7 \end{pmatrix}$

Ejercicio 10.21. Las operaciones que dotan a $\mathcal{Q}(V)$ de estructura de espacio vectorial sobre K son:

$$\mathcal{Q}(V)^2 \ni (q_1, q_2) \to q_1+q_2 \in \mathcal{Q}(V),$$

donde: $q_1+q_2 : V \ni v \to q_1(v)+q_2(v)$.

$$\mathbb{K}\times\mathcal{Q}(V) \ni (\lambda, q) \to \lambda q \in \mathcal{Q}(V),$$

donde: $\lambda q : V \ni v \to \lambda q(v)$.

Es inmediato comprobar que q_1+q_2 y λq son formas cuadráticas.

También son hechos de comprobación inmediata que estas dos operaciones dotan a $\mathcal{Q}(V)$ de estructura de espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ y que la aplicación dada por el cálculo de la matriz de una forma cuadrática es un isomorfismo.

Ejercicio 10.22. Supongamos que $v_1-v'_1 \in \ker \Phi_i$ y que v_2- $-v'_2 \in \ker \Phi_d$.

$$\Phi(v_1, v_2)=\Phi(v_1, v_2)+\Phi(v_1-v'_1, v_2)=\Phi(v'_1, v_2)=$$
$$=\Phi(v'_1, v_2)+\Phi(v'_1, v_2-v'_2)=\Phi(v'_1, v'_2).$$

La propiedad anterior implica que:

$$\Phi' : (V/\ker \Phi_i)^2 \ni (v_1+\ker \Phi_i, v_2+\ker \Phi_d) \to \Phi(v_1, v_2) \in \mathbb{K}$$

es una aplicación bien definida.

El hecho de ser una forma cuadrática es de fácil comprobación.

En cuanto a que Φ' es no degenerada, es consecuencia de ser $\operatorname{im} \Phi'_i=\operatorname{im} \Phi_i$ y por tanto:

$$rg\ \Phi'_i=rg\ \Phi_i=\dim V/\ker \Phi_i.$$

LECCION 11

Ejercicio 11.3. Si $v \in rad\ \mathbb{E} \subset \mathbb{E}$ entonces $v = v_1 + \ldots + v_r$ donde $v_i \in F_i$, $i = 1, \ldots, r$. Sea $j \in \{1, \ldots, r\}$, para cada $w_j \in F_j$ se verifica

$$(v/w_j) = \left(\sum_{i=1}^{r} v_i/w_j \right) = \sum_{i=1}^{r} (v_i/w_j) =$$

$$= (v_j/w_j) = 0, \text{ luego } v_j \in \text{rad } F_j.$$

Recíprocamente, si $v_i \in \text{rad } F_i$, $i = 1, \ldots, r$, se verifica

$$\left(\sum_{i=1}^{r} v_i | w \right) = \left(\sum_{i=1}^{r} v_i \Big| \sum_{i=1}^{r} w_i \right) = \sum_{i=1}^{r} (v_i | w_i) = 0,$$

luego $\sum_{i=1}^{r} v_i \in \text{rad } \mathbb{E}$.

Ejercicio 11.7. i) La forma cuadrática Q_1 escrita en forma polinomial es:

$$Q_1 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = 2x_1x_2 - 2x_1x_3 - 3x_2^2 + 2x_2x_3 - 2x_2x_4 + x_3^2 + 2x_3x_4$$

Aplicando el método de Gauss:

$$Q_1 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = (x_3 - x_1 + x_2 + x_4)^2 + 4x_1x_2 - 4x_2^2 - 4x_2x_4 +$$

$$+ 2x_1x_4 - x_1^2 - x_4^2 = (x_3 - x_1 + x_2 + x_4)^2 - (2x_2 - x_1 + x_4)^2.$$

Por tanto la forma diagonal de Q_1 es:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

es decir, Q_1 tiene signatura (1, 1).

Para reducir Q_1 a forma diagonal basta efectuar el cambio de coordenadas:

$$\begin{cases} x'_1 = -x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \\ x'_2 = -x_1 + 2x_2 \qquad + x_4 \\ x'_3 = x_1 \\ x'_4 = \qquad\qquad\qquad x_4 \end{cases}$$

Es decir una posible P_1 es:

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ii) La forma cuadrática Q_2 escrita en forma polinomial es:

$$Q_2\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = -6x_1x_2 - 6x_1x_3 + 2x_1x_4 - x_2^2 +$$

$$+8x_2x_3 + 2x_2x_4 - 9x_3^2 + 2x_3x_4 - 5x_4^2.$$

Aplicando el método de Gauss se obtiene:

$$Q_2\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = -(x_2 + 3x_1 - 4x_3 - x_4)^2 + 9x_1^2 -$$

$$-18x_1x_3 - 4x_1x_4 + 7x_3^2 + 10x_3x_4 - 4x_4^2 =$$

$$= -(x_2 + 3x_1 - 4x_3 - x_4)^2 + \left(3x_1 - 3x_3 - \frac{2}{3}\,x_4\right)^2 - 2x_3^2 + 6x_3x_4 - \frac{40}{9}x_4^2 =$$

$$= -(x_2 + 3x_1 - 4x_3 - x_4)^2 +$$

$$+\left(3x_1 - 3x_3 - \frac{2}{3}\,x_4\right)^2 + 2\left[-\left(x_3 - \frac{3}{2}x_4\right)^2 + \frac{1}{36}\,x_4^2\right]$$

Por tanto la forma diagonal de Q_2 es:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

es decir, Q_2 tiene signatura (2.2).

Para reducir Q_2 a forma diagonal basta efectuar el cambio de coordenadas:

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{\sqrt{2}}{6}x_4 \\ x_2 &= 3x_1 \quad -3x_3-\frac{2}{3}x_4 \\ x_3 &= \sqrt{2}\,x_3-\frac{3\sqrt{2}}{2}x_4 \\ x_4 &= 3x_1 \quad +x_2-4x_3-x_4 \end{aligned}$$

Luego una posible P_2 es:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{6} \\ 3 & 0 & -3 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & \sqrt{2} & -\frac{3\sqrt{2}}{2} \\ 3 & 1 & -4 & -1 \end{pmatrix}$$

iii) Se puede resolver de modo análogo a los casos i) e ii). En este caso la signatura es (3, 0).

Ejercicio 11.9. Se trata de una aplicación directa del método de Gauss expuesto en 3.10. Una base $\varepsilon=(e_1, \ldots, e_{2n})$ con las condiciones del enunciado es:

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1/2 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1/2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \ldots, \quad e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 1/2 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$e_{n+1} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -1 \\ 1/2 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \ldots, \quad e_{2n} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1/2 \end{pmatrix}.$$

Ejercicio 11.11. Si $A = P^t D P$, entonces $A^t = (P^t D P)^t = P^t D^t P = = P^t D P = A$.

Por otra parte si $A \in EL(n)$ es simétrica, A se puede considerar como la matriz de la forma cuadrática de $V_n(\mathbb{K})$:

$$q : V_n(\mathbb{K}) \ni x \to x^t A x \in \mathbb{K}$$

respecto la base canónica de $V_n(\mathbb{K})$. Llamando D a la matriz de q respecto una base ortogonal, se tiene $A = P^t D P$, siendo P la matriz del cambio de base.

Para probar la afirmación para $A \in GL(n, \mathbb{C})$, basta con realizar el argumento anterior, utilizando la existencia de bases ortonormales.

Ejercicio 11.12. La actuación de $GL(n)$ pedida es:

$$GL(n) \times EL(n) \ni (F, Q) \to F^t Q F = F^{\#} Q \in EL(n).$$

En las condiciones del enunciado, si $\varepsilon = (e_1, \ldots, e_n)$:

$$M_\varepsilon(f^{\#} q) = M_\varepsilon(q \circ f) = (Q(f(e_i), f(e_j))) = M_{f(\varepsilon)}(q) =$$
$$= M_\varepsilon(f)^t M_\varepsilon(q) M_\varepsilon(f) = M_\varepsilon(f)^{\#} M_\varepsilon(q).$$

La relación inducida sobre $EL(n)$ por la actuación es la relación de congruencia de matrices (ver 2.14 de la lección anterior).

Ejercicio 11.13. i) q_1 y q_2 no son linealmente equivalentes en $V_2(\mathbb{Q})$:

En efecto, si fueran equivalentes existiría $P \in GL(2, \mathbb{Q})$ tal que

$$M_{\mathcal{E}}(q_1) = P^t M_{\mathcal{E}}(q_2) P$$

y por tanto:

$$2 = \det M_{\mathcal{E}}(q_1) = \det P \det M_{\mathcal{E}}(q_2) \det P = (\det P)^2$$

lo que no es posible pues $\det P \in \mathbb{Q}$.

ii) q_1 y q_2 son linealmente equivalentes en $V_2(\mathbb{R})$ pues tienen la misma signatura: (2, 0). En efecto:

$$2x_1^2 + 8x_1x_2 + 9x_2^2 = 2(x_1 + 2x_2)^2 + x_2^2 = 2x_1'^2 + x_2'^2.$$

iii) q_1 y q_2 son linealmente equivalentes en $V_2(\mathbb{C})$ pues tienen ambas rango 2.

Ejercicio 11.16. Si $f: \mathbb{E} \to \mathbb{E}'$ es una isometría y $v_1, v_2 \in \mathbb{E}$,

$$Q'(f(v_1), f(v_2)) = \frac{1}{2}[q'(f(v_1) + f(v_2)) - q'(f(v_1)) - q'(f(v_2))] =$$

$$= \frac{1}{2}[q'(f(v_1 + v_2)) - q'(f(v_1)) - q'(f(v_2))] =$$

$$= \frac{1}{2}[q(v_1 + v_2) - q(v_1) - q(v_2)] = Q(v_1, v_2).$$

Recíprocamente, supongamos que para cada $v_1, v_2 \in \mathbb{E}$,

$$Q(v_1, v_2) = Q'(f(v_1), f(v_2)).$$

Entonces, si $v \in \mathbb{E}$,

$$q'(f(v)) = Q'(f(v), f(v)) = Q(v, v) = q(v).$$

Ejercicio 11.17. En primer lugar hay que probar que $f: \mathbb{F} \to \mathbb{E}'$ es un homomorfismo.

Para cada $v_1, v_2 \in \mathbb{E}$, es fácil comprobar que:

$$q'(f(v_1+v_2)-f(v_1)-f(v_2))=0$$

por lo tanto $f(v_1+v_2)=f(v_1)+f(v_2)$.

Análogamente, para $\lambda \in \mathbb{K}$ y $v \in \mathbb{E}$, $q'(f(\lambda v)-\lambda f(v))=0$, luego $f(\lambda v)=\lambda f(v)$.

En segundo lugar f es isomorfismo, pues si $v \in \mathbb{F}$ y $f(v)=0$, entonces $q(v)=q(f(v))=0$, luego $v=0$.

Ejercicio 11.19. $f \in O(\mathbb{E}, q)$ es equivalente a que $q \circ f=q$ lo que equivale a su vez a

$$M_\varepsilon(f)^t\, M_\varepsilon(q)\; M_\varepsilon(f)=M_\varepsilon(q \circ f)=M_\varepsilon(q),$$

es decir, $M_\varepsilon(f)$ es ortogonal respecto a M.

Ejercicio 11.20. Sea $g' \in O(\mathbb{E}', q')$, hemos de probar que $f \circ g' \circ f^{-1} \in O(\mathbb{E}, q)$. En efecto,

$$q(f \circ g' \circ f^{-1})=q \circ f(g' \circ f^{-1})=q'(g' \circ f^{-1})=(q' \circ g') \circ f^{-1}=q' \circ f^{-1}=q$$

Del mismo modo, se prueba que si $g \in O(\mathbb{E}, q)$, entonces $f^{-1} \circ g \circ f \in O(\mathbb{E}', q')$.

Ejercicio 11.22. Sea $\mathbb{E}=F_1 \overset{\perp}{\oplus} \dots \overset{\perp}{\oplus} F_r$ y $(\pi_1, \dots, \pi_r)$ sistema de proyecciones asociado a dicha descomposición. Para probar que π_i, $i=1, \dots, r$, es proyección ortogonal, basta observar que la base de π_i es F_i y la dirección es

$$F_1 \overset{\perp}{\oplus} \dots \overset{\perp}{\oplus} F_{i-1} \overset{\perp}{\oplus} F_{i+1} \overset{\perp}{\oplus} \dots \overset{\perp}{\oplus} F_r,$$

que son ortogonales.

LECCION 12

Ejercicio 12.3. Es inmediato comprobar que $(\cdot/\cdot)$ es una forma bilineal y simétrica.

Hemos de probar que:

$$\mathbb{E} \ni \varphi \to (\varphi/\varphi) = \sum_{k=0}^{n} \varphi(k/n)\, \varphi(k/n) \in \mathbb{R}$$

es una forma cuadrática definida positiva.

Si $\varphi(t) = a_0 + a_1 t + \ldots + a_n t^n \in \mathbb{E}$, entonces

$$(\varphi/\varphi) = \sum_{k=0}^{n} \left(a_0 + a_1 \frac{k}{n} + \ldots + a_n \left(\frac{k}{n}\right)^n \right)^2 \geqslant 0$$

y es exactamente nulo si $\frac{k}{n}$, $k=0, \ldots, n$, son $n+1$ raíces de φ (que tiene grado n), lo cual implica que φ es el polinomio nulo. Por tanto, se trata de una forma cuadrática definida positiva y $(\ /\ )$ es un producto escalar euclídeo.

Ejercicio 12.7. Resolveremos el ejercicio para la matriz:

$$A = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} -7 & 4 & 4 \\ 4 & -1 & 8 \\ 4 & 8 & -1 \end{pmatrix}$$

El modo de resolución para el resto de las matrices es análogo.

El polinomio característico de A es $(t-1)\ (t+1)^2$, por tanto la representación matricial reducida es:

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

A continuación determinaremos una base ortonormal respecto de la cual la matriz A se transforma en J:

$$\ker\ (f - id) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$\ker\ (f + id)$ tiene por ecuación $x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 0$. Una base en las condiciones requeridas es:

$$\left(\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}, \frac{1}{3\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-4\\1\\1\end{pmatrix}\right)$$

Ejercicio 12.9. Sea ε una base ortonormal de F y $(v_1, ..., v_r)$ un sistema de vectores de F. Si $(v_1, ..., v_r)=\varepsilon P$, por definición

$$|\omega_F(v_1, ..., v_r)|=|\omega_\varepsilon(v_1, ..., v_r)|=|\det P|.$$

Si denotamos $(v_1, ..., v_r)^t (v_1, ..., v_r)=(\langle v_i, v_j\rangle)$,

$$\text{Gram } (v_1, ..., v_r)=\det (v_1, ..., v_r)^t (v_1, ..., v_r)=\det (P^t \varepsilon^t \varepsilon P),$$

y como ε es ortonormal, $\varepsilon^t\varepsilon=I$, luego

$$\text{Gram } (v_1, ..., v_r)=\det (P^t P)=(\det P)^2.$$

Entonces

$$|\omega_F(v_1, ..., v_r)|=+\sqrt{\text{Gram } (v_1, ..., v_r)}.$$

Ejercicio 12.10. Si $(v_1, ..., v_{n-1})$ es *l.d.* entonces $v=0$ pues por 2):

$$\|v\|^2=\text{Gram } (v_1, ..., v_{n-1})=[\delta_{(v_1,...,v_{n-1})}(v_1, ..., v_{n-1})]^2=0.$$

Supongamos que $(v_1, ..., v_{n-1})$ es *l.i.* Sea

$$\langle u\rangle=\langle v_1, ..., v_{n-1}\rangle^\perp \quad \text{con} \quad u\neq 0.$$

Tomamos

$$w=+\frac{\sqrt{\text{Gram}\,(v_1, ..., v_{n-1})}}{\|u\|}u,$$

si $\omega(v_1, ..., v_{n-1}, u)$ es mayor que cero definimos $v=w$ y si $\omega(v_1, ..., v_{n-1}, u)$ es menor que cero $v=-w$.

Es claro que v verifica las condiciones 1, 2 y 3.

Demostremos que v es unico: Si v' verifica 1, 2, 3, por ser

$$v' \in \langle v_1, \ldots, v_{n-1} \rangle^{\perp}, \quad v' = \lambda u.$$

Por 2 debe ser $\lambda = \pm \dfrac{\sqrt{\text{Graam}\,(v_1, \ldots, v_{n-1})}}{\|u\|}$ y el signo vendrá determinado por la tercera condición.

Ejercicio 12.11. i) Si $(v_1, \ldots, v_{n-1})$ es *l.d.* la igualdad es trivial.

Supongamos que $(v_1, \ldots, v_{n-1})$ es *l.i.*, entonces

$$(v_1, \ldots, v_{n-1}, v_1 \times \ldots \times v_{n-1})$$

es base con la orientación positiva.

Si $e = \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_{n-1} v_{n-1} + \lambda_n v_1 \times \ldots \times v_{n-1}$, se verifica:

$$(v_1 \times \ldots \times v_{n-1}/e) = \lambda_n \|v_1 \times \ldots \times v_{n-1}\|^2 = \lambda_n \text{ Graam } (v_1, \ldots, v_{n-1}) =$$
$$= \lambda_n |\omega_E(v_1, \ldots, v_{n-1})|^2$$

Sea $(v'_1, \ldots, v'_{n-1})$ una base ortonormal de $\langle v_1, \ldots, v_{n-1} \rangle$ tal que

$$\omega_{(v'_1, \ldots, v'_{n-1})}\,(v_1, \ldots, v_{n-1}) > 0.$$

Entonces $\varepsilon = \left(v'_1, \ldots, v'_{n-1}, \dfrac{v_1 \times \ldots \times v_{n-1}}{\|v_1 \times \ldots \times v_{n-1}\|} \right)$ es una base ortonormal de E con la orientación positiva.

Si $(v_1, \ldots, v_{n-1}) = (v'_1, \ldots, v'_{n-1})\,P$.

$$\omega_\varepsilon(e, v_1, \ldots, v_{n-1}) =$$

$$= \left(v'_1, \ldots, v'_{n-1}, \frac{v_1 \times \ldots \times v_{n-1}}{\|v_1 \times \ldots \times v_{n-1}\|} \right) \left(\begin{array}{c|c} \mu_1 & \\ \vdots & P \\ \mu_{n-1} & \\ \hline \mu_n & 0 \ \ldots \ 0 \end{array} \right)$$

entonces se verifica:

$$\omega\,(e, v_1, \ldots, v_{n-1}) = \mu_n \det P = \mu_n\, \omega_{(v'_1, \ldots, v'_{n-1})}\,(v_1, \ldots, v_{n-1}).$$

Es fácil comprobar que $\lambda_n \|v_1 \times \ldots \times v_{n-1}\| = \mu_n$, con lo cual

$$\omega(e, v_1, \ldots, v_{n-1}) = \lambda_n (\omega_E(v_1, \ldots, v_{n-1}))^2 = (v_1 \times \ldots \times v_{n-1}/e).$$

ii) Por ser $\varepsilon = (e_1, \ldots, e_n)$ base ortonormal:

$$v_1 \times \ldots \times v_{n-1} = (v_1 \times \ldots \times v_{n-1}/e_1)e_1 + \ldots + (v_1 \times \ldots \times v_{n-1}/e_n)e_n$$

y aplicando i):

$$(v_1 \times \ldots \times v_{n-1}/e_j) = \omega_E(e_j, v_1, \ldots, v_{n-1}) =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & (v_1/e_1) & \ldots & (v_{n-1}/e_1) \\ \vdots & \vdots & \ldots & \\ 1(j) & & \ldots & \\ \vdots & \vdots & \ldots & \\ 0 & (v_1/e_n) & \ldots & (v_{n-1}/e_n) \end{pmatrix}$$

lo cual nos da la fórmula del enunciado.

iii) Es consecuencia inmediata de ii).

Ejercicio 12.14. a) Como $\measuredangle(u, v) \in [0, \pi]$ y $\measuredangle(u, v)$ es igual a $\measuredangle(u, v)$ o bien igual a $-\measuredangle(u, v)$, es claro que $\measuredangle(u, v) \in [-\pi, \pi]$. Ahora bien, si $\measuredangle(u, v) = \pi$, por la definición de ángulo se debe verificar

$$(u/v) = -\|u\|\,\|v\|, \text{ luego } u = \lambda v \text{ con } \lambda < 0$$

y la definición de ángulo orientado, $\measuredangle(u, v) = \pi$ y no $-\pi$, con lo que $\measuredangle(u, v) \in (-\pi, \pi]$.

Fijados $\theta \in (-\pi, \pi]$ y $u \in \mathbb{E}$, sea $v \in \langle u \rangle^\perp$ tal que $\|v\| = 1$ y $\omega(u, v) > 0$. Entonces consideramos $e = \dfrac{\cos\theta}{\|u\|} u + \operatorname{sen}\theta\, v$, así:

$$\measuredangle(u, e) = |\theta| \text{ y } \omega(u, e) = \det\begin{pmatrix} \|u\| & \cos\theta \\ 0 & \operatorname{sen}\theta \end{pmatrix} = \|u\| \operatorname{sen}\theta,$$

luego $\measuredangle(u, e) = \theta$.

b) $2\pi\mathbb{Z}$ es claramente un subgrupo aditivo de $\mathbb{R}$, pues si $2\pi k_1$, $2\pi k_2 \in 2\pi\mathbb{Z}$, entonces

$$2\pi k_1 - 2\pi k_2 = 2\pi(k_1 - k_2) \in 2\pi\mathbb{Z}$$

La biyección canónica es:

$$(-\pi,\ \pi] \ni \theta = \measuredangle(u,\ v) \to \theta + 2\pi\mathbb{Z} \subset \frac{\mathbb{R}}{2\pi\mathbb{Z}}$$

Ejercicio 12.15. i) Se verifica $\dfrac{(u/\lambda v)}{\|u\|\,|\lambda|\,\|v\|} = \dfrac{\lambda}{|\lambda|}\cos \sphericalangle\ (u,\ v)$

si $\lambda > 0$, $\sphericalangle\ (u,\ v) - \sphericalangle\ (u,\ \lambda v)$ y $\omega(u,\ \lambda v) - \lambda\omega(u,\ v)$,

entonces $\measuredangle(u,\ v) = \measuredangle(u,\ v)$;

$$\text{si } \lambda < 0,\ \frac{(u,\ \lambda v)}{\|u\|\,|\lambda|\,\|v\|} = -\cos \sphericalangle\ (u,\ v) = \cos(\pi - < (u,\ v)).$$

En este caso, si $\measuredangle(u,\ v) > 0$ entonces $\omega(u,\ \lambda v) < 0$, luego

$$\measuredangle(u,\ \lambda v) = \measuredangle(u,\ v) \quad \pi.$$

Por otra parte, si

$$\measuredangle(u,\ v) < 0 \text{ entonces } \omega(u,\ \lambda v) > 0,$$

luego

$$\measuredangle\ (u,\ \lambda v) = \pi - \measuredangle(u,\ v).$$

ii) Por i) se puede suponer $\|v\| - \|u\| = \|w\| - 1$. Tomamos $e \in \mathbb{E}$, tal que $\measuredangle(u,\ e) = \dfrac{\pi}{2}$ y $\|e\| - 1$, es decir, $(u,\ e)$ es una base ortonormal con la orientación positiva. Entonces:

$$v = \cos \measuredangle(u,\ v)u + \operatorname{sen} \measuredangle(u,\ v)e$$
$$w = \cos \measuredangle(u,\ w)u + \operatorname{sen} \measuredangle(u,\ w)\ e.$$

Por tanto $\cos \sphericalangle(v, w) = (v, w) =$

$$= \cos \sphericalangle(u, v) \cos \sphericalangle(u, w) + \operatorname{sen} \sphericalangle(u, v) \operatorname{sen} \sphericalangle(u, w) =$$
$$= \cos(\sphericalangle(u, w) - \sphericalangle(u, v)).$$

Entonces

$$\sphericalangle(v, w) = \sphericalangle(u, w) - \sphericalangle(u, v) \text{ o bien}$$
$$\sphericalangle(v, w) = \sphericalangle(u, v) - \sphericalangle(u, w).$$

La segunda posibilidad se desecha por un simple estudio de las posibilidades para los signos de $\omega(v, w)$ y de $\sphericalangle(u, v) - \sphericalangle(u, w)$.

Ejercicio 12.16. Por ser f transformación lineal euclídea, entonces

$$(u/v) = (f(u))/f(v)), \ \|u\| = \|f(u)\| \ y \ \|v\| = \|f(v)\|.$$

Por tanto, $\sphericalangle(f(u), f(v)) = \sphericalangle(u, v)$.

Sea ε una base ortonormal de $\mathbb{E}$, si $\det f = 1$,

$$\omega(f(u), f(v)) = \omega_\varepsilon(f(u), f(v)) =$$
$$= \omega_\varepsilon((u, v) M_\varepsilon(f)) = \omega_\varepsilon(u, v) \det M_\varepsilon(f) =$$
$$= \omega_\varepsilon(u, v) = \omega(u, v)$$

y así $\sphericalangle(f(u), f(v)) = \sphericalangle(u, v)$.

Análogamente se razona en el caso en que $\det f = -1$.

Ejercicio 12.17. Sea ε una base ortonormal con la orientación positiva. Hemos de probar únicamente que para cada $x \in \mathbb{E}$, si $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ son las coordenadas de x respecto a ε, llamando $x' \in \mathbb{E}$ al vector con coordenadas respecto a ε:

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

entonces $\|x'\|=\|x\|$ y $\sphericalangle(x, x')=\theta$. De este modo, por la definición de g_θ, $x'=g_\theta(x)$, luego g_θ es transformación lineal euclídea y su matriz es la que presenta el enunciado.

a) $\|x'\|=\|x\|$:

$$\|x'\|=\sqrt{x_1'^2+x_2'^2}=\sqrt{x_1^2+x_2^2}=\|x\|.$$

b) $\sphericalangle(x, x')=\theta$

$$(x/x')=\cos\theta\, x_1^2+\cos\theta\, x_2^2=\|x\|^2\cos\theta=\|x\|\,\|x'\|\cos\theta,$$

por tanto $\sphericalangle(x, x')=|\theta|$.

Por otra parte

$$\omega(x, x')=\omega_\varepsilon(x, x')=\det\begin{pmatrix} x_1 & x_1' \\ x_2 & x_2' \end{pmatrix}=x_1^2\operatorname{sen}\theta+x_2^2\operatorname{sen}\theta=$$
$$=\|x\|^2\operatorname{sen}\theta,$$

de donde por un fácil estudio de signos se deduce:

$$\sphericalangle(x, x')=\theta.$$

Ejercicio 12.18. Por la proposición 3.3, si $f\in O^+(\mathbb{E})$, existe una base ortonormal ε de modo que:

$$M_\varepsilon(f)=\begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

Ahora bien, $M_\varepsilon(f)$ coincide con la matriz de g_θ (ejercicio 12.17), luego $f=g_\theta$.

En cuanto a que la aplicación

$$O^+(\mathbb{E})\ni g_\theta\to\theta\in\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$$

es isomorfismo de grupos, basta probar que

$$g_{\theta_1}\circ g_{\theta_2}=g_{\theta_1+\theta_2},$$

Ahora bien, para cada $x \in \mathbb{E}-\{0\}$,

$$\|g_{\theta_1+\theta_2}(x)\| = \|x\| = \|g_{\theta_2}(x)\| = \|g_{\theta_1} \circ g_{\theta_2}(x)\|$$

y

$$\sphericalangle(x,\ g_{\theta_1} \circ g_{\theta_2}(x)) = \sphericalangle(x_1,\ g_{\theta_2}(x)) +$$
$$+ \sphericalangle(g_{\theta_2}(x),\ g_{\theta_1} \circ g_{\theta_2}(x)) = \theta_1 + \theta_2 = \sphericalangle(x,\ g_{\theta_1+\theta_2}(x)),$$

luego $g_{\theta_1} \circ g_{\theta_2}(x) = g_{\theta_1+\theta_2}(x)$.

Es claro que $g_{\theta_1} \circ g_{\theta_2}(0) = g_{\theta_1+\theta_2}(0)$.

Con lo cual $g_{\theta_1} \circ g_{\theta_2}(x) = g_{\theta_1+\theta_2}(x)$ para cada $x \in \mathbb{E}$.

Otra posible definición para el angulo orientado seria la siguiente:

$$\text{si } u,\ v \in \mathbb{E} - \left\{0\right\}, \quad \sphericalangle(u,\ v) = \theta \text{ si } \frac{v}{\|v\|} = g_\theta\left(\frac{u}{\|u\|}\right).$$

Obsérvese que el ángulo orientado es un invariante en la geometria $(\mathbb{E},\ O^+(\mathbb{E}))$.

Ejercicio 12.22. Para probar que con la condición del enunciado se define una orientación en $R^\perp$, hemos de establecer la siguiente afirmación:

si ε_1 y ε_2 son dos bases de $R^\perp$ tales que $\varepsilon_1 = P\varepsilon_2$,

entonces $\det P > 0$ si y sólo si $(\varepsilon_1,\ u)$ y $(\varepsilon_2,\ u)$ son bases ambas con la orientación positiva o ambas con la orientación negativa.

Ahora bien, la afirmación anterior es consecuencia inmediata de la siguiente observación: si

$$(\varepsilon_1,\ u) = (\varepsilon_2,\ u) \left(\begin{array}{c|c} P & 0 \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right)$$

entonces

$$\det P > 0 \text{ equivale a } \det\left(\begin{array}{c|c} P & 0 \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right) > 0.$$

Ejercicio 12.23. Sea (e_1, e_2, e_3) una base ortonormal de $\mathbb{E}$ con la orientación positiva, de modo que $\langle e_1 \rangle = R$ y (e_1) tiene la orientación positiva en R. Así pues, (e_2, e_3) es una base ortonormal con la orientación positiva de $R^\perp = P$.

Por la definición de g, si $r \in R$, $g(r) = r$, en particular $g(e_1) = e_1$. Si $p \in P$, $g(p) = g_\theta(p)$, luego:

$$M_{(e_2, e_3)}(g \mid_P) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

Entonces la matriz de g respecto a (e_1, e_2, e_3) es:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ 0 & \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

Además g es transformación lineal euclídea, pues:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ 0 & \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}^t \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ 0 & \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = I$$

Ejercicio 12.24. Por la proposición 3.5, los posibles polinomios característicos de una transformación euclídea en dimensión tres son:

$$(t-1)^3,\ (t-1)^2(t+1),\ (t-1)(t+1)^2,\ (t+1)^3,$$
$$(t-1)((t-\cos\theta)^2+\operatorname{sen}^2\theta) \quad \text{y} \quad (t+1)((t-\cos\theta)^2+\operatorname{sen}^2\theta).$$

Los únicos que pueden corresponder a rotaciones son:

$$(t-1)^3,\ (t-1)(t+1)^2 \quad \text{y} \quad (t-1)((t-\cos\theta)^2+\operatorname{sen}^2\theta).$$

Sea f una rotación:

1. Si $\chi_f = (t-1)((t-\cos\theta)^2 + \operatorname{sen}^2\theta)$, entonces existe una base $\varepsilon = (e_1, e_2, e_3)$ de $\mathbb{E}$ tal que:

$$M_\varepsilon(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ 0 & \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

y por tanto f es el giro de eje $\langle e_1 \rangle$ y ángulo θ.

2. Si $\chi_f = (t-1)\ (t+1)^2$ entonces f es un giro de ángulo π.

3. Si $\chi_f = (t-1)^3$, f es la identidad (giro de ángulo 0).

Ejercicio 12.26. Resolveremos el ejercicio para la matriz:

$$\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \\ -2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

para el resto de las matrices el método es totalmente análogo.

El polinomio característico en este caso es:

$$\frac{1}{3}\ (t+1)\ (3t^2-5t+3)$$

Por tanto, estamos ante la composición de una simetría ortogonal σ con un giro g cuyo eje es ortogonal a la base de σ.

La dirección de σ es:

$$D: \begin{cases} 3x_1+2x_2-x_3=0 \\ -x_1+3x_2+2x_3=0 \end{cases}$$

luego la base de σ es $D^\perp$

El eje de g coincide con la dirección de σ y el ángulo (no orientado) de giro de g es:

$$\theta \in [0, \pi] \quad \text{tal que} \quad \cos\theta = \frac{5}{6}$$

La representación matricial reducida pedida para este caso es:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ 0 & \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

LECCION 13

Ejercicio 13.2. a) Sea v autovector correspondiente al autovalor $\lambda : f(v) = \lambda v$ y w autovector correspondiente a $\mu : f(w) = \mu w$. Como $(f(v)/w) = (v/f(w))$, es decir, $\lambda(v/w) = \mu(v/w)$, entonces $(\lambda - \mu)\,(v/w) = 0$ y dado que $\lambda - \mu \neq 0$ se verifica que $(v/w) = 0$.

b) Por a), si $\lambda_1 = 1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$ son los autovalores de f, se tiene

$$\mathbb{E} = \ker(f - id) \overset{\perp}{\oplus} (\ker(f - \lambda_2 id) \overset{\perp}{\oplus} \ldots \overset{\perp}{\oplus} \ker(f - \lambda_r id)).$$

Ahora bien,

$$\ker(f - id)^{\perp} = (\ker(f - \lambda_2 id) \overset{\perp}{\oplus} \ldots \overset{\perp}{\oplus} \ker(f - \lambda_r id)),$$

es subespacio invariante por f y

$$f\Big|_{\ker(f - id)^{\perp}} - id\Big|_{\ker(f - id)^{\perp}}$$

es un isomorfismo, luego:

$$\operatorname{im}(f - id)\Big|_{\ker(f - id)^{\perp}} = \ker(f - id)^{\perp} \subset \operatorname{im}(f - id).$$

Aplicando ahora la fórmula:

$$\dim \mathbb{E} = \dim \ker(f - id) + \dim \operatorname{im}(f - id),$$

se deduce que $\operatorname{im}(f - id) = \ker(f - id)^{\perp}$.

Ejercicio 13.5. Si f es un endomorfismo simétrico y P es un plano invariante, $f\big|_P$ admite una base ortonormal formada por autovectores, luego P contiene rectas invariantes.

Supongamos que f es un endomorfismo normal y que todo plano invariante por f contiene también rectas invariantes. Por esta última condición, todas las raíces de χ_f son reales. Para probar que f es simétrica, razonemos por inducción sobre $\dim \mathbb{E}$.

Si dim $\mathbb{E}=1$, entonces f es simétrica trivialmente.

Supongamos que dim $\mathbb{E}=n$ y que el resultado es cierto para endomorfismos de espacios euclídeos de dimensión menor que n. Como las raíces de χ_f son reales, existe e autovector de f y $\langle e\rangle^{\perp}$ es invariante por f. Entonces $f\Big|_{\langle e\rangle^{\perp}}$ verifica la hipótesis de inducción y existe una base ortonormal ε_1 de $\langle e\rangle^{\perp}$ formada por autovectores de f. Por tanto $\left(\dfrac{e}{\|e\|};\ \varepsilon_1\right)$ es una base ortonormal de $\mathbb{E}$ formada por autovectores de f, luego f es endomorfismo simétrico.

Ejercicio 13.7. Responderemos al ejercicio únicamente para q_1, para q_2 y q_3 se resuelve de modo totalmente análogo.

Por ser la base canónica, ε, de E_n, una base ortonormal, se tiene:

$$M_\varepsilon(q_1)=\begin{pmatrix}0&1&1&\dots&1\\1&0&1&\dots&1\\1&1&0&\dots&1\\ & &\vdots& & \\1&1&1&\dots&1\\1&1&1&\dots&0\end{pmatrix}=M_\varepsilon(q_1^{\#})$$

El ejercicio se reduce a encontrar una base ortonormal de E_n formada por autovalores de $q_1^{\#}$.

$$\chi_{q_1^{\#}}(t)=(t+1)^{n-1}(t-(n-1))$$

$\ker(q_1^{\#}+id)$ tiene por ecuación: $x_1+\dots+x_n=0$. Una base ortonormal de $\ker(q_1^{\#}+id)$ es:

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix},\ \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\1\\-2\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix},\ \frac{1}{2\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\-3\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix},\ \dots,\ \frac{1}{\sqrt{n^2-n}}\begin{pmatrix}1\\1\\\vdots\\1\\-(n-1)\end{pmatrix}\right)$$

Un generador de $\ker(q_1'' - (n-1)\, id)$ es:

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\begin{pmatrix}1\\1\\ \vdots\\1\end{pmatrix}$$

Por tanto, una base que reduce a q_1 a forma diagonal es:

$$\varepsilon' = \left(\frac{1}{\sqrt{n}}\begin{pmatrix}1\\1\\ \vdots\\1\end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\\0\\ \vdots\\0\end{pmatrix}, \ldots, \frac{1}{\sqrt{n^2-n}}\begin{pmatrix}1\\1\\ \vdots\\1\\-(n-1)\end{pmatrix}\right)$$

Respecto a la base ε' la matriz de q es:

$$\begin{pmatrix} n-1 & & & & \\ & -1 & & & \\ & & -1 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & -1\end{pmatrix}$$

Ejercicio 13.9. Supongamos que el polinomio característico $\chi_A(t)$ tiene r_1 raíces positivas, $\lambda_1, \ldots, \lambda_{r_1}$ y r_2 raíces negativas, $\mu_1, \ldots, \mu_{r_2}$. Por el resultado 2.4, existe una base de $V_n(\mathbb{R})$, de modo que la expresión de q en coordenadas respecto a ε es:

$$\lambda_1 x_1^2 + \ldots + \lambda_{r_1} x_{r_1}^2 + \mu_1 x_{r_1+1}^2 + \ldots + \mu_{r_2} x_{r_1+r_2}^2$$

Como $\lambda_1, \ldots, \lambda_{r_1}$ son positivos y $\mu_1, \ldots, \mu_{r_2}$ son negativos, el índice de positividad de q es r_1 y el índice de negatividad es r_2.

Ejercicio 13.10. Supongamos que $a_0>0$ (si $a_0=0$ bastaría dividir por una potencia suficiente de t si fuera $a_0<0$ basta multiplicar por -1 el polinomio $\varphi(t)$, con ambas operaciones no varía ni $r^+(\varphi)$, ni $v(\varphi)$). Razonaremos por inducción sobre el grado de φ. Si el grado de φ es cero entonces la desigualdad del enunciado se verifica trivialmente.

Se supone ahora que el grado de φ es $n>0$ y que la desigualdad se verifica para polinomios con grado menor que n. Sea φ' el polinomio derivado de φ, entonces por hipótesis de inducción $r^+(\varphi')\leqslant v(\varphi')$.

Teniendo en cuenta que si λ es raíz de φ de multiplicidad m entonces λ es raíz de φ' de multiplicidad $m-1$, y aplicando el teorema de Rolle, es fácil probar que $r^-(\varphi')\geqslant r^+(\varphi)-1$. Si entre a_0 y el siguiente coeficiente no nulo hay variación de signo se tiene $v(\varphi')=v(\varphi)-1$, con lo que se verifica la desigualdad pedida.

Si entre a_0 y el siguiente coeficiente no nulo no hay variación de signo, entonces $v(\varphi')=v(\varphi)$. Además se puede probar, en este caso, que entre 0 y la raíz positiva, λ, más pequeña de φ, φ' tiene una raíz. En efecto, $\varphi(t)>a_0$ para $t>0$ y suficientemente pequeño, como $\varphi(\lambda)=0$, aplicando el teorema de Rolle, existe $\mu\in(0,\ \lambda)$ tal que $\varphi'(\mu)=0$. Teniendo en cuenta este último hecho es fácil comprobar que $r^-(\varphi')\geqslant r^+(\varphi)$ y como $r^+(\varphi')\leqslant v(\varphi')=v(\varphi)$ se concluye la desigualdad del enunciado.

Ejercicio 13.11. Aplicando el ejercicio anterior se tiene:

$$r^-(\varphi)\leqslant v(\varphi) \text{ y } r^-(\varphi)\leqslant v(\overline{\varphi}).$$

Es claro que $r^+(\varphi)+r^-(\varphi)=$grado de $\varphi-$multiplicidad de cero como raíz de φ.

Por otra parte es fácil comprobar que $v(\varphi)+v(\overline{\varphi})\leqslant$grado de $\varphi-$ $-$multiplicidad de cero como raíz de φ.

De donde se deducen fácilmente las igualdades pedidas.

Ejercicio 13.12. Es consecuencia inmediata de los ejercicios 13.9 y 13.11.

Ejercicio 13.13. Resolveremos el caso a), los b), c) y d) son análogos. Supongamos que q es la forma cuadrática de a),

$$\chi_{q^\#}(t)=t^3+7t^2-22t+25.$$

La sucesión de signos dada por los coeficientes de χ_{q^η} es:

$$+, +, -, +$$

Como el número de variaciones es 2, el índice de positividad es 2. Al ser una forma cuadrática no degenerada el índice de negatividad es 1.

LECCION 14

Ejercicio 14.1. Si $p \in E$, $\overrightarrow{p\pi(p)} \in \vec{D}$, por tanto $\overrightarrow{p\pi(p)} \perp \vec{B}$. Además p y $\pi(p)$ por definición de proyección son los únicos tales que $p \in \{p\}$ y $\pi(p) \in B$ verificando $\overrightarrow{p\pi(p)} \perp \vec{B}$. Aplicando 1.3:

$$d(p, B) = d(p, \pi(p)).$$

Ejercicio 14.4. Sean a, $b \in E$, $a \neq b$, todo $x \in E$ se expresa como $x = a + \lambda \overrightarrow{ab}$. Probaremos que

$$f(x) = f(a) + \lambda \overrightarrow{f(a)\, f(b)}$$

para cada $x \in E$, o bien

$$f(x) = f(a) - \lambda \overrightarrow{f(a)\, f(b)}$$

para cada $x \in E$

Se concluirá así que f es isomorfismo afín y $\vec{f} = id$ o bien $\vec{f} = -id$.

Dado $x \in E$, como $\dim E = 1$, a, b y x están alineados. Supongamos, por ejemplo, que $x \in [a, b]$, entonces existe $\lambda \in [0, 1]$ tal que $\overrightarrow{ax} = \lambda \overrightarrow{ab}$ y se verifica:

$$d(a, b) = d(a, x) + d(x, b) = \lambda + d(x, b).$$

Por ser f isometría:

$$d(f(a), f(b)) = d(f(a), f(x)) + d(f(x), f(b)),$$

luego

$$\lambda = d(f(a),\ f(x)) \text{ y } f(x) \in [f(a),\ f(b)]$$

o bien $f(x) \in [f(b),\ f(a)]$. Por tanto

$$f(x) = f(a) \pm \lambda \overrightarrow{f(a)\ f(b)}.$$

Análogamente se puede probar la expresión anterior si $x \notin [a,\ b]$.

Falta demostrar que el signo de la expresión $f(a) \pm \lambda \overrightarrow{f(a)\, f(b)}$ es constante para todo $x \in E$.

Sean $x = a + \lambda \overrightarrow{ab}$ e $y = a + \mu \overrightarrow{ab}$, tales que $x \neq y$, $x \neq a$, veremos que si $f(x) = f(a) + \lambda \overrightarrow{f(a)\ f(b)}$, entonces

$$f(y) = f(a) + \mu \overrightarrow{f(a)\ f(b)}.$$

Razonaremos por reducción al absurdo: supongamos

$$f(x) = f(a) + \lambda \overrightarrow{f(a)\ f(b)} \text{ y } f(y) = f(a) - \mu \overrightarrow{f(a)\ f(b)}.$$

Entonces:

$$d(x,\ y) = \|(\lambda - \mu)\ \overrightarrow{ab}\ \| = |\lambda - \mu|\, d(a,\ b)$$

y por otra parte:

$$d(f(x),\ f(y)) = \|(\lambda + \mu)\ \overrightarrow{f(a)\ f(b)}\ \| = (\lambda + \mu)\ d(a,\ b),$$

lo cual es absurdo pues f es isometría.

Ejercicio 14.8. **1.** Sea σ simetría ortogonal con base B y $\tau_{\vec{v}}$ una traslación de vector $\vec{v} \in \vec{B}$. Hemos de probar que $\sigma \circ \tau_{\vec{v}} = \tau_{\vec{v}} \circ \sigma$.

Sea $a \in B$, dado $x \in E$, x se expresa del siguiente modo:

$$x = a + \vec{b} + \vec{d} \text{ con } \vec{b} \in \vec{B} \text{ y } \vec{d} \in \vec{B}^{\perp}$$

Entonces:

$$\sigma \circ \tau_{\vec v}(a+\vec b+\vec d)=\sigma(a+\vec b+\vec d+\vec v)=a+\vec b+\vec v-\vec d, \text{ y}$$
$$\tau_{\vec v}\circ \sigma(a+\vec b+\vec d)=\tau_{\vec v}(a+\vec b-\vec d)=a+\vec b+\vec v-\vec d.$$

Por tanto $\sigma\circ\tau_{\vec v}=\tau_{\vec v}\circ\sigma$.

2. Sea σ una simetría ortogonal con base B y $\tau_{\vec w}$ una traslación de vector $\vec w\in\vec E$. Si $\vec w\in\vec E$, $\vec w=\vec v_1+\vec v_2$ con $\vec v_1\in\vec B$ y $\vec v_2\in\vec B^{\perp}$, probaremos que $\tau_{\vec w}\circ\sigma$ es una simetría con deslizamiento cuya base es $a+\frac{1}{2}\vec v_2+\vec B$ y cuyo vector de deslizamiento es $\vec v_1$. Dado $x\in E$, $x=a+\frac{1}{2}\vec v_2+\vec b+\vec d$, con $\vec b\in\vec B$, y $\vec d\in\vec B$, hemos de probar que $\tau_{\vec w}\circ\sigma(x)=a+\frac{1}{2}\vec v_2+\vec b-\vec d+\vec v_1$, en efecto:

$$\tau_{\vec w}\circ\sigma(x)=\tau_{\vec w}\left(a-\frac{1}{2}\vec v_2+\vec b-\vec d\right)=a+\frac{1}{2}\vec v_2+\vec b-\vec d+\vec v_1.$$

Análogamente se prueba también que $\sigma\circ\tau_{\vec w}$ es simetría con deslizamiento.

3. Supongamos que σ es simetría ortogonal con base B y que $\tau_{\vec v}$ es la traslación de vector $\vec v\in\vec B$. Entonces:

$$(\sigma\circ\tau_{\vec v})\circ(\sigma\circ\tau_{\vec v})=\tau_{\vec v}\circ\sigma^2\circ\tau_{\vec v}=\tau_{2\vec v}.$$

Recíprocamente, supongamos que f es un movimiento de E tal que $f^2=\tau_{\vec w}$, con $\vec w\in\vec E$. Entonces, $\vec f^{\,2}=id_{\vec E}$ y si $f=\tau_{\vec v}\circ f_1=f_1\circ\tau_{\vec v}$, donde f_1 tiene puntos fijos, como $\vec f=\vec f_1$ se verifica que f es simetría ortogonal y, por tanto $f_1\circ\tau_{\vec v}=f$ es simetría con deslizamiento.

4. Claramente la matriz reducida de una simetría con deslizamiento es:

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & & & & \\ \mu & 1 & & & & & & \\ & & 1 & & & & & \\ & & & \ddots & & & & \\ & & & & 1 & & & \\ & & & & & -1 & & \\ & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & -1 \end{pmatrix}$$

Un sistema completo de invariantes para la clasificación de las simetrías euclídeas con deslizamientos está formado por el módulo de deslizamiento y la dimensión de $\ker(\vec{f}-\vec{id})$. Obsérvese que dicha dimensión determina el polinomio característico de $\vec{f}$, pues

$$\chi_{\vec{f}}(t)=(t-1)^r(t+1)^{n-r}$$

siendo $\dim E=n$ y $\dim\ker(\vec{f}-\vec{id})=r$.

Ejercicio 14.9. Sea $f: E_4 \to E_4$ el endomorfismo cuya matriz es A. Como:

$$A^2=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

es la matriz de una traslación, f es simetría ortogonal con deslizamiento.

Las ecuaciones de la base y la dirección de la simetría ortogonal vectorial $\vec{f}$ son:

$$\vec{B}: \left.\begin{matrix} x_1-x_2=0 \\ x_3+x_4=0 \end{matrix}\right\}, \quad \vec{B}^{\perp}: \left.\begin{matrix} x_1+x_2=0 \\ x_3-x_4=0 \end{matrix}\right\}$$

Dado $x \in E$, $\overrightarrow{xf(x)} = \vec{v} + \vec{d}$ con $\vec{d} \in \vec{B}^{\perp}$ y $\vec{v} \in \vec{B}$, el vector de deslizamiento.

Así:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Luego

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

La base de f coincide con la base de la simetría $f \circ \tau_{-\vec{v}}$, luego las ecuaciones de la base son:

$$\left.\begin{aligned} x_1 - x_2 &= 1 \\ x_3 + x_4 &= -1 \end{aligned}\right\}$$

Ejercicio 14.15. *a)* $F = \{p\}$. Existe un sistema de referencia $\varepsilon = (p, \vec{\varepsilon})$ de modo que la matriz de f respecto ε es:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \vec{J} \end{pmatrix}$$

Ahora bien, $\vec{J}$ no puede tener autovalores iguales a uno, por tanto:

$$\vec{J} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ o bien } \vec{J} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \; \theta \in (-\pi, \pi].$$

Obsérvese que el primer caso es un caso particular del segundo (para $\theta = \pi$).

Así pues

$$M_{\varepsilon}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ 0 & \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

luego f es un giro de centro p.

b) $F=R$, recta de E. Existe un sistema de referencia euclídeo $\varepsilon=(e_0, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ tal que $e_0 \in R$ y $\langle \vec{e}_1 \rangle = \vec{R}$, entonces

$$M_\varepsilon(f)=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$$

donde a debe ser 1 ó -1.

Como el conjunto de puntos fijos debe ser únicamente R, a debe ser -1, luego

$$M_\varepsilon(f)=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

que nos dice que f es una simetría ortogonal con base R.

c) Si $F=\phi$, existe un sistema de referencia euclídeo ε tal que $M_\varepsilon(f)$ es:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \mu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad o\ bien \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \mu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Si además f es movimiento directo, entonces

$$M_\varepsilon(f)=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \mu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

luego f es una traslación de vector

$$\begin{pmatrix} 1 \\ \mu \\ 0 \end{pmatrix}$$

d) Si $F=\phi$ y f es movimiento inverso, existe un sistema de referencia euclídeo $\varepsilon=(e_0, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ tal que

$$M_\varepsilon(f)=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ \mu & 1 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix},$$

luego f es una simetría ortogonal con deslizamiento: el vector de deslizamiento es

$$\begin{pmatrix}0\\ \mu\\ 0\end{pmatrix} \quad \text{(resp. a } \varepsilon)$$

la base es $e_0+\langle\vec{e}_1\rangle$ y la dirección $\langle\vec{e}_2\rangle$.

Ejercicio 14.18. Sean f_1 y f_2 dos simetrías cuyas bases son R_1 y R_2 respectivamente, estudiaremos la naturaleza de $f_1 \circ f_2$.

1.^{er} *caso:* $R_1=R_2$, entonces $f_1=f_2$ y por tanto $f_1 \circ f_2=id$.

2.^{o} *caso:* R_1 y R_2 son paralelas.

Tomemos un sistema de referencia euclídeo $\varepsilon=(e_0, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ tal que la matriz de f_2 respecto a ε sea:

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}$$

Como R_1 es paralela a R_2, $f_1\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\ \mu\end{pmatrix}$, donde μ es precisamente el doble de la distancia de R_1 a R_2. En efecto, como $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix}1\\0\\ \mu\end{pmatrix}$ son simétricos respecto R_1, entonces

$$\begin{pmatrix}1\\0\\ \frac{\mu}{2}\end{pmatrix}\in R_1$$

y como es simetría ortogonal

$$\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{\mu}{2} \end{pmatrix} \right\rangle \perp R_1,$$

luego

$$d(R_1, R_2) = d\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{\mu}{2} \end{pmatrix} \right) = \frac{\mu}{2}.$$

Por ser R_1 y R_2 paralelas $\vec{f}_1 = \vec{f}_2$, luego la matriz de f_1 respecto a ε es:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \mu & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Por tanto

$$M_\varepsilon(f_1 \circ f_2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \mu & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

así pues $f_1 \circ f_2$ es una traslación de vector ortogonal a $\vec{R}_1 = \vec{R}_2$ y cuyo módulo es el doble de la distancia de R_1 a R_2.

3.^{er} *caso*. R_1 y R_2 se cortan en un punto P.

Elegimos $\vec{u}_1, \vec{u}_2 \in \vec{E}$, $\langle \vec{u}_1 \rangle = \vec{R}_1$, $\langle \vec{u}_2 \rangle = \vec{R}_2$ de modo que $\measuredangle (u_2, u_1) = \theta$, $\theta \in [0, \pi)$.

Sea $\varepsilon = (P; \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ un sistema de referencia euclídeo de modo que

$$M_\varepsilon(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

entonces $\vec{e}_1=\lambda\vec{u}$, como $\sphericalangle(u_2, u_1)=\theta$, $\vec{e}=\cos\theta\,\vec{e}_1+\operatorname{sen}\theta\,\vec{e}_2$, tiene la dirección de R_2, por tanto:

$$M_\varepsilon(f_1)=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & & \\ 0 & \vec{A} & \end{pmatrix} \quad \text{y}$$

$$\vec{A}\begin{pmatrix}\cos\theta\\ \operatorname{sen}\theta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\theta\\ \operatorname{sen}\theta\end{pmatrix} \quad (\text{pues } \vec{f}_1(\vec{e})=\vec{e})$$

$$\vec{A}\begin{pmatrix}\operatorname{sen}\theta\\ -\cos\theta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\operatorname{sen}\theta\\ \cos\theta\end{pmatrix} \quad (\text{pues si } \vec{v}\perp\vec{R}_1, \vec{f}_1(\vec{v})=-\vec{v}).$$

De donde se deduce:

$$M_\varepsilon(f_1)=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos 2\theta & \operatorname{sen} 2\theta \\ 0 & \operatorname{sen} 2\theta & -\cos 2\theta \end{pmatrix},$$

por tanto

$$M_\varepsilon(f_1\circ f_2)=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos 2\theta & -\operatorname{sen} 2\theta \\ 0 & \operatorname{sen} 2\theta & \cos 2\theta \end{pmatrix},$$

es decir, $f_1 \circ f_2$ es un giro de angulo 2θ ($\theta\in[0,\pi)$ ángulo de $\vec{R}_2$ con $\vec{R}_1$) y con centro $P=R_1\cap R_2$.

Ejercicio 14.23. Por la definición de movimiento helicoidal, f es movimiento helicoidal si y sólo si existe un sistema de referencia euclídeo $\varepsilon=(e_0, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ tal que

$$M_\varepsilon(f)=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \mu & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ 0 & 0 & \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

En efecto, si g es un giro existe $\varepsilon=(e_0, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$, tal que

$$M_{\varepsilon}(g)=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&\cos\theta&-\operatorname{sen}\theta\\0&0&\operatorname{sen}\theta&\cos\theta\end{pmatrix}$$

y si τ_v es una traslación cuyo vector es paralelo al eje de g:

$$M_{\varepsilon}(\tau_v)=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\\mu&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix},$$

de donde se deduce por simple producto que la matriz $M_{\varepsilon}(f)$ es la que hemos escrito más arriba.

Si g es un giro y τ_v es una traslación cualquiera, podemos tomar un sistema de referencia euclídeo ε tal que:

$$M_{\varepsilon}(g)=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&\cos\theta&-\operatorname{sen}\theta\\0&0&\operatorname{sen}\theta&\cos\theta\end{pmatrix}$$

y

$$M_{\varepsilon}(\tau_v)=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\a&1&0&0\\b&0&1&0\\c&0&0&1\end{pmatrix}$$

Luego

$$M_{\varepsilon}(\tau_v\circ g)=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\a&1&0&0\\b&0&\cos\theta&-\operatorname{sen}\theta\\c&0&\operatorname{sen}\theta&\cos\theta\end{pmatrix}$$

de donde se deduce que

$$\chi_{\tau_v\circ g}=(t-1)^2\ [(t-\cos\theta)^2+\operatorname{sen}^2\theta],$$

luego existe un sistema de referencia euclídeo ε' de modo que:

$$M_{\varepsilon'}(\tau_v \circ g) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \mu & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ 0 & 0 & \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

de donde si $\mu \neq 0$, $\tau_v \circ g$ es movimiento helicoidal y si $\mu = 0$ se trata de un giro.

Razonando análogamente se puede probar que $g \circ \tau_v$ es también un giro o un movimiento helicoidal.

Ejercicio 14.24. *a)* F es una recta R. Existe $\varepsilon = (e_0, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ sistema de referencia euclídeo tal que, $e_0 + \langle \vec{e}_1 \rangle = R$ y entonces

$$M_{\varepsilon}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \multicolumn{2}{c}{\multirow{2}{*}{$\vec{J}$}} \\ 0 & 0 & & \end{pmatrix}$$

y además $\vec{J}$ no puede tener autovalores iguales a 1, por tanto:

$$M_{\varepsilon}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ o bien } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ 0 & 0 & \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

(el primer caso está incluido en el segundo para $\theta = \pi$). Luego f es un giro con eje R.

b) Si F es un plano, existe un sistema referencia euclídeo ε tal que

$$M_{\varepsilon}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Luego f es una simetría ortogonal con base F

c) Si $F=\{p\}$, entonces $\vec{f}$ no puede tener autovalores iguales a 1, por tanto existe un sistema de referencia euclídeo $\varepsilon=(p, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$, tal que

$$M_\varepsilon(f)=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ 0 & 0 & \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ 0 & 0 & \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ 0 & 0 & \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

Por tanto f es el producto de una simetría ortogonal con base $p+\langle \vec{e}_2, \vec{e}_3\rangle$ con un giro de eje $p+\langle \vec{e}_1\rangle$.

d) Si $F=\phi$ y f es movimiento directo, existe un sistema de referencia euclídeo tal que la matriz de f respecto a ε es:

1. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \mu & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ 0 & 0 & \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$, $\mu\neq 0$, por tanto f es movimiento helicoidal.

2. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \mu & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; $\mu\neq 0$, traslación (movimiento helicoidal con $\theta=0$).

3. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \mu & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, $\mu \neq 0$, movimiento helicoidal con $\theta = \pi$.

e) Si $F = \phi$ y f es movimiento negativo, existe un sistema de referencia euclídeo ε tal que:

$$M_\varepsilon(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \mu & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

luego f es simetría ortogonal con deslizamiento.

Ejercicio 14.25. Es consecuencia inmediata del ejercicio anterior, pues los casos a, *b*, e, que es donde no se tienen movimientos helicoidales corresponden a movimientos negativos.

LECCION 15

Ejercicio 15.4. Supongamos que $\dim E = n$.

a) Sea $\lambda > 0$ la razón de la homotecia h. Existe un sistema de referencia euclídeo ε de modo que:

$$M_\varepsilon(h) = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ 0 & \lambda I \end{array}\right).$$

Por tanto $\det M_\varepsilon(h) = \lambda^n$, luego $\det M_\varepsilon(h) > 0$, con lo cual h es semejanza positiva.

b) Sea $\lambda < 0$ la razón de la homotecia h. Existe un sistema de referencia euclídeo ε de modo que:

$$M_\varepsilon(h) = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & \lambda I \end{array}\right).$$

por tanto $\det M_\varepsilon(h) = \lambda^n = (-1)^n |\lambda|$, luego h tiene signo $(-1)^n$

Ejercicio 15.5. *a)* Supongamos que $f=f_1 \cdot h$, con f_1 el movimiento asociado a f y h la homotecia de centro el punto fijo de f y razon ρ. Por el ejercicio anterior h conserva la orientación, por tanto el movimiento f_1 invierte la orientación. Aplicando el ejercicio 14.15, habida cuenta de que f_1 tiene puntos fijos e invierte la orientación, f_1 debe ser una simetria ortogonal respecto a una recta R. R contiene claramente al centro de semejanza, pues se trata de un punto fijo de f_1.

b) Continuando con la notación de a), en este caso f_1 conserva la orientación y tiene puntos fijos, luego por 14.15, se trata de un giro.

Ejercicio 15.6.

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 6 & 4 & 3 \\ -2 & 3 & -4 \end{pmatrix}$$

La semejanza tiene por punto fijo

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Por otra parte el polinomio caracteristico de la aplicación lineal asociada es t^2-25, por tanto la razón de semejanza es 5 y la forma canonica de Jordan es

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}.$$

El movimiento asociado es una simetría ortogonal cuya base es la recta

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + ker\,(\vec{A}-5I), \text{ cuya ecuación es } x_1-3x_2-2=0.$$

Las otras dos matrices tienen un tratamiento análogo.

Ejercicio 15.13. Sea

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & -2 \\ 1 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

A tiene un punto fijo:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1/2 \\ 1/2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

El polinomio característico de la aplicación lineal asociada es: $(t-3)\,(t^2-2t+9)$, por tanto la razón de semejanza es 3 y la forma de Jordan de A es:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2\sqrt{2} \\ 0 & 0 & 2\sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}$$

El movimiento asociado a la semejanza es un giro ortogonal de ángulo *arc cos* $\frac{1}{3}$ y cuyo eje es:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1/2 \\ -1/2 \\ 0 \end{pmatrix} + ker\ (\vec{A}-3I).$$

que tiene por ecuaciones:

$$\left.\begin{aligned} x_3 &= 0 \\ x_1 + x_2 &= 0 \end{aligned}\right\}$$

La otra matriz propuesta tiene un tratamiento similar.