UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID

FACULTAD DE CIENCIAS MATEMÁTICAS

Departamento de Teoría de Funciones

TESIS DOCTORAL

Operadores divergencia sobre una variedad diferenciable, aplicaciones a la teoría de conexiones lineales

MEMORIA PARA OPTAR AL GRADO DE DOCTOR
PRESENTADA POR

javier Lafuente López

Madrid, 2015

Javier Lafuente López

OPERADORES DIVERGENCIA SOBRE UNA VARIEDAD DIFERENCIABLE. APLICACIONES A LA TEORIA DE CONEXIONES LINEALES.

Departamento de Teoría de Funciones
Facultad de Ciencias Matemáticas
Universidad Complutense de Madrid
1980

© Javier Lafuente López
Edita e Imprime la Editorial de la Universidad
Complutense de Madrid. Servicio de Reprografía
Noviciado, 3 Madrid-8
Madrid, 1980
Xerox 9200 XB 480
Depósito Legal: M-5801-1980

OPERADORES DIVERGENCIA SOBRE UNA VARIEDAD DIFERENCIABLE.

APLICACIONES A LA TEORIA DE CONEXIONES LINEALES.

por

D. JAVIER LAFUENTE LOPEZ

MEMORIA PRESENTADA PARA OPTAR

AL GRADO DE DOCTOR EN

CIENCIAS MATEMATICAS

MADRID 1979

INDICE

INTRODUCCION

Una forma de volumen Ω sobre una variedad diferenciable M, da lugar a un operador divergencia definido por la igualdad:

$$L_X\Omega = (\mathrm{div}_\Omega X)\Omega \quad , \qquad \text{para cada } X \in \mathfrak{X}(M).$$

Si D es un operador que aplica $\mathfrak{X}(M)$ en $\mathcal{F}(M)$, ¿ en que condiciones se verifica la igualdad $D = \mathrm{div}_\Omega$ para alguna forma de volumen Ω definida sobre M?.

Del análisis de esta cuestión, ha surgido la teoria de operadores divergencia expuesta en el capítulo I, que rebasa ampliamente los límites del objetivo inicialmente planteado; Los resultados fundamentales y las técnicas de trabajo desarrolladas son utilizados posteriormente (en el capítulo II) para la resolución de algunos problemas relacionados con la teoria de conexiones lineales y la teoria de Sprays, que mas adelante detallaremos.

La sección 1 (Cap.I) debe considerarse introductoria; En ella se fija la terminologia, y se detallan algunas propiedades destacables del operador divergencia asociado a una forma de volumen, finalizando con una descripción geométrica de la actuación de este tipo de operadores sobre los campos vectoriales, y que de alguna manera nos ha sugerido la cuestión a la que antes haciamos referencia.

Se establece también el concepto de densidad, que "sustituye" en variedades no orientables al de forma de volumen.

La sección 2 está consagrada al estudio de ciertos operadores "tipo divergencia" que localmente proceden de una forma de volumen (definioión 2.1.1). En una primera parte se prueba (proposición 2.4.1) que este tipo de operadores vienen caracterizados por tres de las propiedades globales del operador divergencia usual expuestas en la sección precedente. Estas propiedades se habian utilizado previamente para definir el operador divergencia abstracto (definición 2.1.2), por lo que ambos conceptos resultan ser equivalentes, adoptándose finalmente el nombre de operador divergencia para designar este tipo de operadores y reservando el nombre de operador divergene cia trivial, para aquellos que se obtienen a través de una densidad (vease proposición 2.2.1).

El hecho de que un operador divergencia determine locálmente una forma de volumen salvo constantes multiplicativas no nulas (proposición 2.4.4), motiva la definición 2.5.1 de transporte paralelo de formas de volumen a lo largo de una curva continua respecto a un operador divergencia, tema al que hemos dedicado los parágrafos 5 y 6, estableciéndose en este último condiciones topológicas sobre la variedad M, necesarias y suficientes para que todo operador divergencia definido sobre ella sea un operador divergencia trivial (teoréma 2.6.10).

Por otra parte todos los operadores divergencia se pueden obtener de uno dado añadiéndole 1-formas cerradas (proposición 2.2.2),lo cual permite asociar a cada operador divergencia div una única forma w_S, para cada sección local S del fibrado de bases L(M) de manera que se verifique la condición $\mathrm{div} = \mathrm{div}_S + w_S$ en el dominio de S, siendo div_S la divergencia respecto a la forma de volumen canonicamente asociada a la sección (2.3.3) .

En el parágrafo 3 de la sección 3 (proposición 3.3.1) se asocia a cada operador divergencia div, cierta 1-forma w definida sobre L(M), R-invariante y cerrada, que verifica : $w_S = S^*w$ para toda sección local S, quedando w unívocamente determinada por la condición anterior.

Los parágrafos 1 y 2 de esta misma sección están dedicados al estudio de las 1-formas R-invariantes y verticalmente cerradas en L(M), y en particular al de 1-formas R-invariantes y cerradas, y de cierto tipo de formas que hemos denominado unitarias. La justificación de este estudio se encuentra en las proposiciones 3.3.1 y 3.3.3 en donde se caracterizan completamente las 1-formas en L(M) que proceden de un operador divergencia, resultando ser estas las 1-formas unitarias y cerradas. Por otra parte en el parágrafo 4 (proposiciones 3.4.1 y 3.4.4) se demuestra que la condición necesaria y suficiente para que una forma unitaria y cerrada dé lugar a un operador divergencia trivial, es que sea exacta.

Finalmente en la sección 4 se hace un estudio paralelo al realizado con el operador divergencia, de un operador más general, que hemos denominado operador pseudo-divergencia (definición 4.4.1) y que se corresponde con las formas unitarias de L(M), por medio de la misma regla que establece la correspondencia entre operadores divergencia y las formas unitarias y cerradas (proposiciones 4.3.1 y 4.3.2).

Dicho operador viene caracterizado por las dos primeras propiedades que definen el operador divergencia; En términos generales la pérdida de la tercera propiedad equivale a la pérdida del caracter cerrado de las formas relacionadas con el operador, y en consecuencia deja de ser localmente un operador divergencia usual. Sin embargo las dos propiedades que lo caractrizan son aùn lo suficientemente fuertes como para permitir generalizar gran parte de las cuestiones tratadas en las dos secciones precedentes, perdiendose , esocsi , una buena parte del contenido geomètrico-intuitivo .

El capitulo II se inicia con una secciòn preeliminar que tiene caracter introductòrio, en donde se fija la terminologìa y se enuncian los resultados que seràn usados en las secciones siguientes .

La secciòn 2 (cap. II) està dedicada al estudio de las conexiones lineales Γ que conservan local ò globalmente , una forma de volumen por transporte paralelo (definiciòn 2.1.1) : Si (w^i_j) son las proyecciones verticales de Γ , la forma unitaria, $w=w^1_1+\ldots+w^n_n$ (que hemos denominado traza de la conexiòn) , da lugar a un operador pseudo-divergencia que transporta formas de volumen de la misma manera que Γ (teorema 2.2.2) . Esto permite caracterizar este tipo de conexiones , a travès de la traza (en el teorema 2.2.4) utilizando los teoremas 4.3.3 y 3.4.5 (cap. I) .

Por otra parte , en el paràgrafo 2, y restringiendonos al caso de conexiones simetricas, se relaciona la prpiedad de simetria del tensor de Ricci , con las caracterizaciones anteriores.(teorema 2.3.4).

Hemos denominado sprays equivalentes a aquellos que poseen las mismas curvas integrales sobre la variedad M, salvo cambios de parametrizaciòn (definiciòn 3.1.1) . En el paràgrafo 1 (secciòn 3) se trata sobre este tema llegando a obtener el siguiente resultado:

"Dos sprays $\mathcal{X}$ y $\bar{\mathcal{X}}$ son equivalentes si y solo si existe una 1-forma α sobre la variedad M , tal que $\bar{\mathcal{X}} = \mathcal{X} + \alpha\mathcal{V}$, siendo $\mathcal{V}$ el campo de Liouville en T(M) (proposiciones 3.1.4 y 3.1.6) , y esto permite concluir en el paràgrafo 2 (teorema 3.2.2) que una conexiòn simetrica Γ y un operador psudo-divergencia div , determinan unìvocamente otra conexiòn simètrica , con spray de geodèsicas equivalente al de Γ y operador pseudo-divergencia asociado igual a div.

En la ùltima secciòn se aplican los resultados anteriores para la obtenciòn de ciertas conclusiones relativas al spray de geodèsicas de una conexiòn g-conforme (definiciòn 4.1.1), siendo g una mètrica riemanniana :

La proposiciòn 4.3.1 ,establece por un lado , que el spray de geodèsicas de una conexiòn conforme , es equivalente al de alguna conexion mètrica,y por otro , en la proposiciòn 4.3.2 se demuestra que cualquier spray equivalente al spray de geodèsicas de una conexiòn mètrica es el spray de geodèsicas de alguna conexiòn conforme .

Finalmente , el teorema 4.1.1 muestra que una conexiòn g-conforme queda unìvocamente determinada por su operador pseudo-divergencia asociado .

Deseo por ùltimo agradecer a D. Joaquìn Arregui Fernandez la ayuda y el estìmulo prestados para la realizaciòn de esta memoria .

CAPITULO I

OPERADORES DIVERGENCIA SOBRE UNA VARIEDAD DIFERENCIABLE

SECCION 1

EL OPERADOR DIVERGENCIA USUAL

1. Formas de volumen.

En todo este trabajo se supone que M representa una variedad diferenciable real de dimensión finita n, sin borde y conexa, cuya topologia subyacente satisface el segundo axioma de numerabilidad, y el axioma de separación T_2.

Si U es un abierto de M, $\mathcal{X}(U)$ denota al álgebra de Lie de los campos vectoriales diferenciables definidos sobre U, y $\mathcal{F}(U)$, el anillo de las funciones diferenciables definidas sobre U con valores reales. Por diferenciable debe entenderse C^{∞}.

DEFINICION 1.1.1

Sea E un espacio vectorial real de dimensión finita n. Una forma de volumen Ω sobre E es un elemento de $\Omega^n(E) - \{0\}$ siendo $\Omega^n(E)$ el espacio (unidimensional) de las n-formas en E.

Una forma de volumen Ω sobre E, induce como es sabido una orientación: si $u = (u_1,\dots,u_n)$ es una base ordenada de E, se dice positivamente orientada respecto a Ω si $\Omega(u_1,\dots,u_n) > 0$, en caso contrario (es decir si $\Omega(u_1,\dots,u_n) < 0$) se dice que $(u_1,\dots,u_n)$ está negativamente orientada.

Las formas de volumen Ω y Ω' sobre E, se diran equivalentes si definen la misma orientación sobre cada base ordenada de E.

La condición necesaria y suficiente para que Ω y Ω' sean equivalentes es que exista un número $a > 0$ tal que $\Omega' = a\Omega$.

DEFINICION 1.1.2

Una n-forma diferenciable Ω sobre M se dice que es una forma de volumen (sobre M) si $\Omega(m)$ es distinto de cero para cada punto m de M. La variedad M se dice orientable, si admite una forma de volumen.

Obsérvese que una forma de volumen Ω en M, induce para cada punto m de M, una forma de volumen $\Omega(m)$ sobre el espacio tangente a la variedad por el punto m, T_mM.

DEFINICION 1.1.3

Dos formas de volumen Ω y Ω' sobre M se dicen equivalentes, si $\Omega(m)$ es equivalente a $\Omega'(m)$ para cada $m \in M$. Una orientación en M, es la clase $[\Omega]$ definida por la forma de volumen Ω , respecto de la anterior relación de equivalencia. Si $[\Omega]$ es una orientación entonces $[-\Omega]$ (que es claramente otra orientación), se llama orientación inversa.

Si (U,ϕ) es una carta con $\phi=(x^1,\dots,x^n)$ y Ω una forma de volumen en M, se dice que (U,ϕ) esta positivamente orientada (respeto a Ω) si la función $\Omega\left(\frac{\partial}{\partial x^1},\dots,\frac{\partial}{\partial x^n}\right)$ es siempre positiva en U.

PROPOSICION 1.1.4

Sea Ω una forma de volumen sobre M, entonces

i) El $\mathcal{F}(M)$-módulo $\Omega^n(M)$ de las n-formas diferenciables sobre M esta generado por Ω .

ii) Si $\Omega' = f\Omega$ para $f \in \mathcal{F}(M)$ se tiene

a) Ω' es forma de volumen sobre M si y solo si $f(m) \neq 0$ $\forall m \in M$.

b) La forma de volumen Ω' define la misma orientación que Ω si y-solo si $f(m) > o \ \forall m \in M$.

iii) M es conexa si y solo si admite unicamente dos orientaciones distintas. (vease por ejemplo [1])

2. Densidades.

El concepto de densidad sobre una variedad diferenciable, que se va a establecer a continuación, sustituye en variedades no orientables al concepto de forma de volumen. (vease [2]).

DEFINICION 1.2.1

Sea E un espacio vectorial real de dimensión finita n. Se dirá que θ es una densidad sobre E si $\theta = |\Omega|$ para alguna forma de volumen Ω definida sobre E.

DEFINICION 1.2.2

Una densidad θ sobre una variedad diferenciable M es un operador que asocia a cada punto $m \in M$ una densidad $\theta(m)$ sobre el espacio $T_m M$, tangente a la variedad por el punto m, de manera que: para cada $m \in M$, existe U entorno abierto y conexo de m y Ω forma de volumen en U, tal que $\theta = |\Omega|$ en U. En estas condiciones, se dirá que la pareja (U,Ω) es compatible con θ.

PROPOSICION 1.2.3

Sobre toda variedad diferenciable M, sea o no orientable, existe una densidad. ([2])

3. Divergencia respecto a una forma de volumen.

Teniendo en cuenta que la derivada de Lie L_X respecto a un campo X de una n-forma es otra n-forma, se puede establecer la siguiente definición.

DEFINICION 1.3.1

Si Ω es una forma de volumen sobre M y $X \in \mathfrak{X}(M)$ se define la divergencia de X respecto a Ω, como la función $\mathrm{div}_{\Omega} X \in \mathfrak{F}(M)$ que verifica la condición $L_X\Omega = (\mathrm{div}_{\Omega} X)\Omega$.

En la siguiente proposición se resumen algunas propiedades elementales del operador divergencia cuyas demostraciones pueden verse en [1] y [3].

PROPOSICION 1.3.2

Si Ω es una forma de volumen sobre M entonces se tiene

i) $\mathrm{div}_{\Omega}(X+Y) = \mathrm{div}_{\Omega} X + \mathrm{div}_{\Omega} Y$ para $X,Y \in \mathfrak{X}(M)$

ii) $\mathrm{div}_{\Omega}(fX) = L_X f + f\,\mathrm{div}_{\Omega} X$ para $f \in \mathfrak{F}(M)$ y $X \in \mathfrak{X}(M)$.

iii) $L_X(\mathrm{div}_{\Omega} Y) - L_Y(\mathrm{div}_{\Omega} X) = \mathrm{div}_{\Omega}(L_X Y)$.

iv) Si U es un abierto de M entonces $\mathrm{div}_{\Omega}(X/U) = (\mathrm{div}_{\Omega} X)/U$ para $X \in \mathfrak{X}(M)$.

v) Si $F \in \mathfrak{F}(M)$ y $F(m) \neq 0$ para todo punto m de M entonces $\mathrm{div}_{F\Omega} X = \frac{L_X F}{F} + \mathrm{div}_{\Omega} X$ siendo $X \in \mathfrak{X}(M)$.

vi) Si (U,ϕ) es una carta de M, $\phi=(x^1,\dots,x^n)$ y $\Omega/U = F dx^1 \dots dx^n$ para cierta función $F \in \mathfrak{F}(M)$, entonces para cualquier campo $X = X^i\frac{\partial}{\partial x^i}$ sobre U se tiene $\mathrm{div}_{\Omega} X = \frac{1}{F}X^i\frac{\partial F}{\partial x^i} + \frac{\partial X^i}{\partial x^i}$

vii) Si $a \in \mathbb{R}$ y $a \neq 0$ entonces $\mathrm{div}_{a\Omega} = \mathrm{div}_{\Omega}$.

NOTACION 1.3.3

Con objeto de aligerar la notación se hace el siguiente convenio: Si U es un abierto de M, D es un operador que actua sobre $\mathfrak{X}(U)$ con valores en $\mathfrak{F}(U)$ y $X \in \mathfrak{X}(M)$ la expresión $D(X)$ significa $D(X/U)$.

4. <u>Una interpretación geométrica del operador divergencia usual</u>.

La interpretación geométrica del operador divergencia usual que aqui se va a estudiar, es conocida para el operador divergencia usual en $\mathbb{R}^3$ (vease Swartz: Cours d'analyse tomo 1º) y aunque en la bibliografia consultada, no hemos encontrado rastro de ella para el caso general, no podemos estar del todo seguros de su originalidad. De cualquier forma, esta interpretación ha contribuido muy positivamente a la génesis y desarrollo de este trabajo, por lo que nos parece acertado dedicarle el ultimo párágrafo de esta primera sección introductoria.

PREELIMINARES 1.4.1 (la referencia es [1] y [2])

Supongase la variedad M orientada por una forma de volumen Ω . Si w es una n-forma con soporte compacto contenido en una carta (U,ϕ) positivamente orientada, se define $\int w = \int_U (w/U)$, y el valor de esta integral es independiente de la carta positivamente orientada (U,ϕ) (vease [1]). Por medio de una partición diferenciable de la unidad, puede extenderse la definición de $\int w$, para n-formas w con soporte compacto; El teoréma de Representación de Riesz establece que existe una única medida μ sobre los conjuntos de Borel $\mathcal{B}$ de M (y por tanto una compleción $\bar{\mu}$), de manera que para cualquier función $f \in \mathcal{F}(M)$ con soporte compacto se tiene $\int f \, d\mu = \int f \Omega$. Se denotará (para una función f $\bar{\mu}$-integrable) a la integral $\int f \, d\mu$, por $\int f \Omega$.

Un subconjunto D de M es medible, si su función caracteristica χ_D es integrable; se denotará por vol. D a la integral $\int \chi_D \Omega$ y representa la $\bar{\mu}$-medida del conjunto D.

Se mantendran fijos a lo largo de este parágrafo:

a) El operador divergencia div subordinado por la forma de volumen .

b) Un campo de vectores diferenciable en M, X.

c) Un punto p de M.

d) Un flujo local $(F_t)_{t\in I}$ de X, ($o \in I$ intervalo abierto de $\mathbb{R}$), tal que el dominio U de definición de las F_t es un entorno abierto de p.

Para la demostración del siguiente teoréma se tendrá en cuenta que

$$(L_X\Omega)/U = \lim_{t\to o}\frac{1}{t}\left[\Omega - F_t^*\Omega\right] \qquad \text{(vease [3])}$$

TEOREMA 1.4.2

Sea D un subconjunto de M relativamente compacto y $\bar{D}\subset U$. Para t suficientemente pequeño, sea $D_t = F_t(D)$, si $V(t) = \text{vol } D_t$ entonces

$$-\int_D(\text{div } X) = \left.\frac{dV}{dt}\right|_{t=o}$$

Demostración:

Teniendo en cuenta que por el teoréma del cambio de variable es $V(t) = \text{vol } D_t = \int_{D_t}\Omega = \int_D(F_t)^*\Omega$ se tiene que

$$\frac{dV}{dt} = \lim_{t\to o}\frac{1}{t}\left[\int_{D_t}\Omega - \int_D\Omega\right] = \lim_{t\to o}\frac{1}{t}\int_D\left[(F_t)^*\Omega - \Omega\right] =$$

$$= \int_D \lim_{t\to o}\left(\frac{F_t^*\Omega - \Omega}{t}\right) = -\int_D L_X\Omega = -\int_D(\text{div } X)$$

(veáse la nota 1.4.7 del final de este parágrafo).

DEFINICION 1.4.3

Sea $\{D(\lambda)\}_{\lambda\in I_\varepsilon}$ $I_\varepsilon = (-\varepsilon, \varepsilon)$ una familia de subconjuntos de M. Se dirá que $\{D(\lambda)\}_{\lambda\in I_\varepsilon}$ se contrae diferenciablemente hacia el punto p si

1) $D(\lambda)$ es un entorno medible de p, para $\lambda\neq o$ y $D(o) = p$.

2) Para cada entorno V de p existe $\delta > o$ tal que $D(\lambda)$ está contenido en V para $|\lambda| < \delta$.

3) La aplicación $I_\varepsilon \ni \lambda \longmapsto \text{vol } D(\lambda) \in \mathbb{R}$ es diferenciable en el punto $\lambda = o$.

Observese que si F es función continua entonces $\lim_{\lambda \to o} \frac{\int_{D(\lambda)} F}{\text{vol } D(\lambda)} = F(p)$.

PROPOSICION 1.3.3

Sea $\{D(\lambda)\}_{\lambda \in I_\varepsilon}$ una familia de subconjuntos medibles de M que se contrae diferenciablemente hacia el punto p, (puede suponerse sin perdida de generalidad que cada $D(\lambda)$ satisface las hipótesis de 1.4.2) y sea $D_t(\lambda) = F_t(D(\lambda))$, $V(t,\lambda) = \text{vol}(D_t(\lambda))$ y $V_o(\lambda) = \text{vol } D(\lambda)$.

Entonces se tiene:

$$\left.\frac{\partial^2 V}{\partial \lambda \, \partial t}\right|_{(t,\lambda)=(o,o)} = - (\text{div } X)_p \cdot \left.\frac{dVo}{d\lambda}\right|_{\lambda=o} \quad \text{en particular si}$$

$$\left.\frac{dV_o}{d\lambda}\right|_{\lambda=o} = 1 \text{ entonces } \left.\frac{\partial^2 V}{\partial \lambda \, \partial t}\right|_{(t,\lambda)=(o,o)} = - (\text{div } X)_p$$

Demostración:

Aplicando el teorema 1.4.2 a cada $D(\lambda)$ se tiene

$\dot{V}_o(\lambda) = \left(\frac{\partial V}{\partial t}\right)_{(o,\lambda)} = - \int_{D(\lambda)} (\text{div } X)\Omega$, teniendo en cuenta que

$\lim_{\lambda \to o} \frac{\int_{D(\lambda)} (\text{div } X)}{V_o(\lambda)} = (\text{div } X)_p$ se llega a que $\lim_{\lambda \to o} \frac{\dot{V}_o(\lambda)}{V_o(\lambda)} = -(\text{div } X)_p$

por tanto:

$$\left(\frac{\partial^2 V}{\partial \lambda \partial t}\right)_{(o,o)} = \left.\frac{d\dot{V}_o}{d\lambda}\right|_{\lambda=o} = \lim_{\lambda \to o} \frac{1}{\lambda} (\dot{V}_o(\lambda) - \dot{V}_o(o)) = \lim_{\lambda \to o} \frac{\dot{V}_o(\lambda)}{\lambda} =$$

$$= \lim_{\lambda \to o} \frac{\dot{V}_o(\lambda)}{V_o(\lambda)} \cdot \lim_{\lambda \to o} \frac{V_o(\lambda)}{\lambda} = - (\text{div } X)_p \cdot \left.\frac{dV_o}{d\lambda}\right|_{\lambda=o}$$

Como corolario de esta proposición se obtiene el siguiente

TEOREMA 1.3.4

TEOREMA 1.4.4

En las mismas condiciones de la proposición anterior, y suponiendo que:

$$\left(\frac{\partial^2 V}{\partial\lambda\,\partial t}\right)_{(o,o)}=\left(\frac{\partial^2 V}{\partial t\,\partial\lambda}\right)_{(o,o)} \quad y \quad \left.\frac{dV_o}{d\lambda}\right|_{\lambda=o}\neq o,$$ se verifica la igualdad

$$-(\operatorname{div} X)_p=\lim_{t\to o}\frac{1}{t}\left[\lim_{\lambda\to o}\frac{\operatorname{vol} D_t(\lambda)-\operatorname{vol} D(\lambda)}{\operatorname{vol} D(\lambda)}\right]$$

En terminos mas imprecisos se podria escribir

$$-(\operatorname{div} X)_p=\lim_{t\to o}\frac{1}{t}\lim_{D\to\{p\}}\left(\frac{\operatorname{vol} D_t-\operatorname{vol} D}{\operatorname{vol} D}\right).$$

resaltando de esta manera, el aspecto geométrico de la formula anterior.

Demostración:

Por 1.3.3 se tiene: $-(\operatorname{div} X)_p\cdot\left.\frac{dV_o}{d\lambda}\right|_{\lambda=o}=\left(\frac{\partial^2 V}{\partial\lambda\,\partial t}\right)_{(o,o)}=\left(\frac{\partial^2 V}{\partial t\,\partial\lambda}\right)_{(o,o)}=$

$$=\lim_{t\to o}\frac{1}{t}\left[\lim_{\lambda\to o}\frac{V(\lambda,t)-V(o,t)}{\lambda}-\lim_{\lambda\to o}\frac{V(\lambda,o)-V(o,o)}{\lambda}\right]=$$

$$=\lim_{t\to o}\frac{1}{t}\left[\lim_{\lambda\to o}\frac{V(\lambda,t)-V(\lambda,o)}{\lambda}\right]$$ teniendo en cuenta que:

$$\frac{1}{\left.\frac{dV_o}{d\lambda}\right|_{\lambda=o}}=\lim_{\lambda\to o}\frac{\lambda}{V_o(\lambda)}$$

Queda $-(\operatorname{div} X)_p=\lim_{t\to o}\frac{1}{t}\left[\lim_{\lambda\to o}\frac{V(\lambda,t)-V_o(\lambda)}{\lambda}\cdot\frac{\lambda}{V_o(\lambda)}\right]$ es decir:

$$-(\operatorname{div} X)_p=\lim_{t\to o}\frac{1}{t}\left[\lim_{\lambda\to o}\frac{\operatorname{vol} D_t(\lambda)-\operatorname{vol} D(\lambda)}{\operatorname{vol} D(\lambda)}\right]$$

OBSERVACIÓN 1.4.5

Notese que para que la condición $\left(\frac{\partial^2 V}{\partial\lambda\,\partial t}\right)_{(o,o)}=\left(\frac{\partial^2 V}{\partial t\,\partial\lambda}\right)_{(o,o)}$ sea satisfecha es suficiente con que la función $V_o(\lambda)$ sea diferenciable en un entorno de $\lambda=0$.

NOTA 1.4.6

La validez del intercambio entre la integral y el limite, efectuado en la demostración del teorema 1.4.2 viene garantizada por el siguiente lema (vease por ejemplo Cramer: "Metodos matematicos de la estadistica" Ed. Aguilar).

Lema.

Sea $g(m,t)$ una función definida en $I \times D$ con valores reales tal que, la función g_t definida por $g_t(m) = g(m,t)$ es integrable en D para todo $t \in I$. Supongase que para $|t|<\varepsilon$ y $m \in D$ existe $\frac{\partial g}{\partial t}$ y verifica $\left|\frac{\partial g}{\partial t}\right| < K$ para cierto $K>0$. Entonces :

$$\left.\frac{\partial}{\partial t}\right|_{t=0} \int_D g_t \Omega = \int_D \left.\frac{\partial g}{\partial t}\right|_{t=0} \Omega \, .$$

En efecto es suficiente comprobar que la función g definida por la ecuación:

$$g_t(m)\Omega(m) = g(m,t)\Omega(m) = F_t^*(\Omega(F_t(m)))$$

verifica las condiciones del lema anterior.

Si se denota $\dot{g}(m,s) = \left(\frac{\partial g}{\partial t}\right)(m,s) = \dot{g}_s(m)$, por [3] (proposición 1.3.6) se tiene $L_X(g_s\Omega) = \dot{g}_s\Omega$, con lo que

$(L_X g_s + g_s \cdot \operatorname{div} X)\Omega = \dot{g}_s\Omega$, por tanto $\operatorname{div}(g_s X) = \dot{g}_s$ y la función

$\dot{g}_t(m) = \left(\frac{\partial g}{\partial t}\right)(m,t) = \operatorname{div}(g_t X)$ es claramente una función continua de $I \times U$ en $\mathbb{R}$ y por tanto acotada en $[-\varepsilon,\varepsilon] \times D$, por ser D relativamente compacto.

SECCION 2

OPERADOR DIVERGENCIA (ABSTRACTO)

1. Definiciones.

En la sección precedente se ha visto como una forma Ω de volumen sobre la variedad M, da lugar a un operador divergencia, denotado por $\operatorname{div}_{\Omega}$ y se ha estudiado su comportamiento general, y su significado geometrico.

En esta sección se va a hacer un estudio de aquellos operadores "tipo divergencia" que actuan sobre $\mathfrak{X}(M)$, y que localmente se comportan como un operador divergencia, en el sentido que se precisa en la siguiente definición, y que se introduce por necesidades de tipo tecnico:

DEFINICION 2.1.1

Un operador div: $\mathfrak{X}(M) \longrightarrow \mathfrak{F}(M)$ se llamará operador tipo divergenci si para cada punto m de M existe un entorno abierto U, de m, y una forma de volumen Ω sobre U. de manera que para cualquier $X \in \mathfrak{X}(M)$, sea $(\operatorname{div} X)/U = \operatorname{div}_{\Omega} X$ (vease NOTACION 1.3.3)

La definición anterior se establece por condiciones de tipo local. Mas adelante se tratará de caracterizar a estos operadores por condiciones de tipo global, comprobando que esta definición es equivalente a la siguiente:

DEFINICION 2.1.2

Un operador div: $\mathfrak{X}(M) \longrightarrow \mathfrak{F}(M)$ se llamará operador divergencia abstracto, o simplemente operador divergencia si verifica las siguiente propiedades, para $X,Y \in \mathfrak{X}(M)$ y $f \in \mathfrak{F}(M)$ arbitrarios :

i) $\mathrm{div}(X+Y) = \mathrm{div}\, X + \mathrm{div}\, Y$

ii) $\mathrm{div}(fX) = L_X f + f\, \mathrm{div}\, X$

iii) $L_X(\mathrm{div}\, Y) - L_Y(\mathrm{div}\, X) = \mathrm{div}\,[X,Y]$, donde $[X,Y] = L_X Y$, denota el corchete de Lie, entre los campos X e Y.

2. <u>Existencia de operadores divergencia</u>.

Obsérvese que por la proposición 1.3.2, todo operador tipo divergencia es un operador divergencia abstracto (basta tener en cuenta que las propiedades i), ii) y iii) de la definición anterior son válidas en un entorno de cada punto y por tanto tambien globalmente) y que un operador divergencia respecto a una forma de volumen es ambas cosas a la vez.

PROPOSICION 2.2.1

Sobre toda variedad M, existe algun operador divergencia (abstracto).

Primera demostracion:

La proposición 1.2.3 asegura la existencia de una densidad θ sobre M. Se comprobará que la densidad θ da lugar, de forma natural, a un operador divergencia div_θ , de manera que si (U,Ω) es una pareja compatible con θ (vease prop. 1.2.3) es $\mathrm{div}_\Omega = \mathrm{div}_{\theta/U}$.

Si m es un punto arbitrario de M y X es un campo cualquiera de $\mathfrak{X}(M)$, se define $(\mathrm{div}_\theta X)(m) = (\mathrm{div}_\Omega X)(m)$, siendo (U,Ω) una pareja compatible con θ , tal que $m \in U$; Si (U',Ω') es otra tal pareja entonces $\mathrm{div}_\Omega (X/U)(m) = \mathrm{div}_{\Omega'}(X/U')(m)$ y la definición de $(\mathrm{div}_\theta X)(m)$ carece de ambiguedad; en efecto:

En la componente conexa V de $U \cap U'$ que contiene a m, se tendrá $\Omega'/V = F.(\Omega/V)$ siendo $F \in \mathcal{F}(V)$ y además $|(\Omega'/V)| = |F||(\Omega/V)| = |(\Omega/V)| = \theta/V$ por lo que $|F|$ es una constante igual a 1, y F es constante en V. Por la proposición 1.3.2 (propiedades iv) y vii)) es $(\operatorname{div}_{\Omega} X)/V = \operatorname{div}_{\Omega/V} X = \operatorname{div}_{F(\Omega/V)}(X) = \operatorname{div}_{\Omega'/V}(X) = (\operatorname{div}_{\Omega'} X)/V$.

El operador $\operatorname{div}_{\theta}$ es de esta forma un operador tipo divergencia y en consecuencia, un operador divergencia (abstracto).

Segunda demostración:

En esta demostración no se utilizará la existencia de densidades sobre la variedad:

Sea $(U_i)_{i \in I}$ un recubrimiento localmente finito de M, formado por abiertos simplemente conexos y Ω_i una forma de volumen sobre cada U_i; se denota por div_i al operador $\operatorname{div}_{\Omega_i}$. Si $(\phi^i)_{i \in I}$ es una partición diferenciable de la unidad subordinada al recubrimiento $(U_i)_{i \in I}$, se prueba que el operador $\alpha : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \longrightarrow \mathcal{F}(M)$ definido (para $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$) por $\alpha(X,Y) = (L_X \phi^i)(\operatorname{div}_i Y) - (L_Y \phi^i)(\operatorname{div}_i X)$ (se utilizará siempre el criterio de sumación de Einstein) es una 2-forma cerrada sobre M, y por ser cada U_i simplemente conexo, es exacta sobre cada U_i (vease [4]). Si α_i es una 1-forma en U_i tal que $d\alpha_i = \alpha/U_i$ y D_i es el operador definido por la fórmula $D_i(X) = \operatorname{div}_i X - \frac{1}{2}\alpha_i X$, para $X \in \mathfrak{X}(U_i)$, se puede comprobar que el operador definido por $\operatorname{div} X = \phi^i D_i(X/U_i)$ para cada $X \in \mathfrak{X}(M)$ verifica las propiedades i), ii) y iii) de la definición 2.1.2, y es por tanto un operador divergencia abstracto.

Se probará a continuación que todos los operadores divergencia sobre M pueden obtenerse de uno dado, sumandole 1-formas cerradas.

PROPOSICION 2.2.2

Si div es un operador divergencia y α es una 1-forma [redacted] en M, se define el operador $\mathrm{div}+\alpha : \mathfrak{X}(M) \longrightarrow \mathcal{F}(M)$ de forma que: $(\mathrm{div}+\alpha)(X) = \mathrm{div}\, X + \alpha(X)$ para cualquier $X \in \mathfrak{X}(M)$. En estas condiciones, se tiene:

i) $\mathrm{div}+\alpha$ es operador divergencia si y solo si α es cerrada.

ii) Si div′ es otro operador divergencia, existe α 1-forma cerrada tal que $\mathrm{div}' = \mathrm{div}+\alpha$.

Demostración:

i) Considerese el operador $\mathrm{div}+\alpha$ para α 1-forma en M, entonces para $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ y $f \in \mathcal{F}(M)$ se tiene:

1) $(\mathrm{div}+\alpha)(X+Y) = \mathrm{div}(X+Y) + \alpha(X+Y) = \mathrm{div}\, X + \alpha(X) + \mathrm{div}\, Y + \alpha(Y) =$
$= (\mathrm{div}+\alpha)X + (\mathrm{div}+\alpha)Y.$

2) $(\mathrm{div}+\alpha)(fX) = \mathrm{div}\, fX + \alpha(fX) = L_X f + f(\mathrm{div}+\alpha)X.$

3) $L_X(\mathrm{div}+\alpha)Y - L_Y(\mathrm{div}+\alpha)X - (\mathrm{div}+\alpha)[X,Y] = L_X(\mathrm{div}\, Y) - L_Y(\mathrm{div} X$
$- \mathrm{div}[X,Y] + L_X(\alpha Y) - L_Y(\alpha X) - \alpha[X,Y] = 0 + \frac{1}{2}\, d\alpha(X,Y).$

En consecuencia, $\mathrm{div}+\alpha$ es operador divergencia si y solo si $d\alpha = 0$

ii) Sean div y div′ dos operadores divergencia. Se probará que $= \mathrm{div}' - \mathrm{div}$ es una 1-forma cerrada de M. En efecto:

si $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ y $f \in \mathcal{F}(M)$ se tiene

1) $\alpha(X+Y) = (\mathrm{div}' - \mathrm{div})(X+Y) = (\mathrm{div}' - \mathrm{div})X + (\mathrm{div}' - \mathrm{div})Y = \alpha X + \alpha Y.$

2) $\alpha(fX) = (\mathrm{div}' - \mathrm{div})(fX) = \mathrm{div}'(fX) - \mathrm{div}(fX) = L_X f + f\, \mathrm{div}'(X) -$
$- L_X f - f\, \mathrm{div}\, X = f.\alpha(X)$ por tanto es 1-forma. Finalmente:

$\frac{1}{2}\, d\alpha(X,Y) = L_X(\alpha Y) - L_Y(\alpha X) - \alpha[X,Y] = L_X(\mathrm{div}' Y) - L_Y(\mathrm{div}' X) -$
$- \mathrm{div}'[X,Y] - \left[L_X(\mathrm{div}\, Y) - L_Y(\mathrm{div}\, X) - \mathrm{div}\, X,Y\right] = 0$ por tanto α es

cerrada y $div' = div + \alpha$.

3. Propiedad de localización de un operador divergencia.

Probaremos que un operador divergencia es localizable en el sentido que precisa la siguiente definición:

DEFINICION 2.3.1

Un operador $D: \mathfrak{X}(M) \longrightarrow \mathcal{F}(M)$ se dice localizable, si para cada abierto U de M, existe un operador $D/U: \mathfrak{X}(M) \longrightarrow \mathcal{F}(M)$ (lease D restringido a U) de forma que para cualquier $X \in \mathfrak{X}(M)$ es $(D/U)(X) = D(X)/U$. Claramente, si tal restricción existe, es única. Nos referimos a D/U como una localización de D.

PROPOSICION 2.3.2

Todo operador divergencia sobre M, es localizable.

Demostración:

Si θ es una densidad sobre M, se probará inicialmente que div_θ es localizable: Si U es un abierto de M entonces $div_{\theta/U}$ es precisámente la restricción $(div_\theta)/U$ buscada del operador div_θ , en efecto:

Si $X \in \mathfrak{X}(M)$ y p es un punto arbitrario de U, tomemos (V, Ω) compatible con θ y tal que $p \in V$; Entonces: $(div_{\theta/U}X)(p) = (div_\Omega X)(p) = (div_\theta X)(p)$ (vease proposición 2.2.1) con lo que $div_{\theta/U}X = (div_\theta X)/U$.

Si div es otro operador divergencia arbitrario, por la proposición 2.2.2, existe α 1-forma cerrada en M, de manera que $div = div_\theta + \alpha$, y teniendo en cuenta que cualquier 1-forma en M es localizable, se llega trivialmente a que div es localizable; Concretamente:

$div/U = div_{\theta/U} + \alpha/U$ y div/U resulta ser un operador divergencia sobre U en virtud de la proposición 2.2.2 .

Segunda demostración:

En esta demostración no se utilizará la exitencia de densidades sobre la variedad. Esquematicamente puede hacerse en dos pasos:

1) Si div es un operador divergencia, U es abierto de M y $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ verifican $X/U = Y/U$ entonces $(\operatorname{div} X)/U = (\operatorname{div} Y/U)$. En efecto:

Se utiliza un método standar, basado en la función "meseta" y la propiedad ii) de la definición 2.1.2; Si $p \in U$ se puede tomar un entorno V suficientemente pequeño de p y una función $f: M \longrightarrow [0,1]$ diferenciable verificando las condiciones:

a) la adherencia de V esta contenida en U.

b) $f = 1$ en V y $f = 0$ en el complementario de U.

En esta situación es $fX = fY$ y por tanto $\operatorname{div}(fX) = \operatorname{div}(fY)$ pero $\operatorname{div}(fX)(p) = (L_X f)(p) + f(p)(\operatorname{div} X)(p) = (\operatorname{div} X)(p)$, análogamente $\operatorname{div}(fY)(p) = (\operatorname{div} Y)(p)$ y en consecuencia $\operatorname{div} X = \operatorname{div} Y$ en U.

2) El operador div es localizable. En efecto:

Sea U abierto de M. Se define el operador div/U de la forma que sigue: si $X \in \mathfrak{X}(U)$ y $p \in U$, sea V un entorno suficientemente pequeño de p y $\bar{X}$ un campo de $\mathfrak{X}(M)$ tal que $\bar{X}/V = X/V$; se toma entonces $(\operatorname{div}/U)(X)(p) = (\operatorname{div} \bar{X})(p)$; por la parte 1) de esta demostración la definición de $(\operatorname{div}/U)(X)(p)$ carece de ambiguedad y como $((\operatorname{div}/U)X)/V = (\operatorname{div} \bar{X})/V$, $(\operatorname{div}/U)X$ es diferenciable en el entorno de cada punto p de U y por tanto diferenciable.

Se comprueba inmediatamente que div/U es una localización del operador div, y un operador divergencia sobre U.

CONVENIOS Y NOTACIONES 2.3.3

Si $S = (e_1,\dots,e_n)$ es una base local de campos definida sobre un abierto U de M, es util considerar la forma de volumen Ω_S definida en U por la condición $\Omega_S(e_1,\dots,e_n) = 1$. El operador divergencia div_{Ω_S}, se denotará por div_S; si div es un operador divergencia sobre M, entonces $\mathrm{div}/U - \mathrm{div}_S$ define una 1-forma cerrada sobre U que se denotará por w_S. Si $S = S_\phi = (\frac{\partial}{\partial x^1},\dots,\frac{\partial}{\partial x^n})$ para cada carta (U,ϕ) con $\phi = (x^1,\dots,x^n)$, se escribirá $\Omega_{S_\phi} = \Omega_\phi$, $\mathrm{div}_{S_\phi} = \mathrm{div}_\phi$ y $w_{S_\phi} = w_\phi$.

Finalmente, con objeto de aligerar la notación y siempre que no halla lugar a confusiones se establece el siguiente convenio que complementa el establecido en 1.3.3:

Si $D : \mathfrak{X}(M) \longrightarrow \mathcal{F}(M)$ es un operador localizable y X un campo definido en un abierto U de M se escribirá D(X) en lugar de (D/U)X.

PROPOSICION 2.3.4

Sea $S = (e_1,\dots,e_n)$ una base local de campos definida sobre un abierto U de M y $(\alpha^1,\dots,\alpha^n)$ su base dual entonces $\mathrm{div}_S e_i = -\alpha^k[e_i,e_k]$. En particular si $S = S_\phi = (\frac{\partial}{\partial x^1},\dots,\frac{\partial}{\partial x^n})$ es $\mathrm{div}_\phi \frac{\partial}{\partial x^i} = 0$.

Demostración:

Se tiene $(L_{e_i}\Omega_S)(e_1,\dots,e_n) = L_{e_i}(\Omega_S(e_1,\dots,e_n)) -$
$-\sum_{k=1}^{n}\Omega_S(e_1,\dots,[e_i,e_k],\dots,e_n) = -\sum \alpha^k[e_i,e_k]$, ya que
$[e_i,e_k] = \alpha^j[e_i,e_k]e_j$ y $\Omega_S(e_1,\dots,e_n) = 1$.

4. Equivalencia entre los operadores divergencia y tipo divergencia.

Este parágrafo esta destinado a la demostración de la equivalencia entre las definiciones 2.1.1 y 2.1.2.

PROPOSICION 2.4.1

Sea Ω_0 una forma de volumen sobre la variedad orientable M y $f \in \mathcal{F}(M)$. Si $\mathrm{div} = \mathrm{div}_{\Omega_0} + df$, entonces es $\mathrm{div} = \mathrm{div}_{\Omega}$ siendo $\Omega = (\exp f)\Omega_0$.

Por otra parte si $\bar{\Omega}$ es otra forma de volumen en M tal que $\mathrm{div} = \mathrm{div}_{\bar{\Omega}}$ existe una constante $a \neq 0$ tal que $\bar{\Omega} = a\Omega$.

Demostración:

Sea $F = \exp f$ y $\Omega = F\Omega_0$. Para cada $X \in \mathfrak{X}(M)$ se tiene

$L_X\Omega = L_X(F\Omega_0) = (L_X F)\Omega_0 + F.L_X\Omega_0 = (\frac{L_X F}{F} + \mathrm{div}_{\Omega_0}X)\Omega$ y como $f = \log F$

queda $\mathrm{div}_{\Omega} X = \mathrm{div}_{\Omega_0} X + df(X) = \mathrm{div}\, X$, pues $\frac{L_X F}{F} = L_X(\log F)$.

Por otra parte si $\mathrm{div}_{\Omega} = \mathrm{div}_{\bar{\Omega}}$ siendo $\bar{\Omega} = G\Omega$ para cierta función diferenciable $G : M \longrightarrow \mathbb{R}^*$, entonces para cada campo $X \in \mathfrak{X}(M)$ se tiene $\mathrm{div}_{\bar{\Omega}} X = \frac{L_X G}{G} + \mathrm{div}_{\Omega} X$ y por tanto es $\frac{L_X G}{G} = L_X(\log|G|) = 0 \ \forall X \in \mathfrak{X}(M)$

Por ser M conexa $\log|G|$ es una constante $b \in \mathbb{R}$ y $G = \pm e^b$

TEOREMA 2.4.2

Un operador divergencia div subordina en un entorno conexo U de cada punto p de M, una forma de volumen Ω, de manera que $\mathrm{div}/U = \mathrm{div}_{\Omega}$ y Ω queda univocamente determinada salvo constantes multiplicativas no nulas.

Demostración:

Sea $p \in M$ y V un entorno orientable de p; sea Ω_0 una forma de volumen

sobre V; por la proposición 2.2.2 existe α 1-forma cerrada en V tal que $div/V = div_{\Omega_0} + \alpha$, eligiendo un entorno conveniente U de p, conexo, contenido en V, en donde α/U sea exacta se tendrá:
$div/U = div_{\Omega_0/U} + df$, siendo $f \in \mathcal{F}(U)$ tal que $df = \alpha/U$. Por la Proposición anterior $div/U = div_{\Omega}$ siendo $\Omega = (\exp f)(\Omega_0/U)$.

La ultima afirmación del teoréma es consecuencia inmediata de la última afirmación de la proposición 2.4.1.

COROLARIO 2.4.3

Todo operador divergencia es un operador tipo divergencia (y recíprocamente).

En adelante la expresión " operador tipo divergencia" no volverá a ser utilizada.

DEFINICION 2.4.3

Sea div un operador divergencia sobre M. Se dira que la pareja (U,Ω) es compatible con el operador div si:

i) U es un abierto conexo de M y Ω es una forma de volumen definida sobre U.

ii) $div/U = div_{\Omega}$.

COROLARIO 2.4.4

Sea div un operador divergencia, $p \in M$ y Ω_p una forma de volumen en T_pM, entonces:

1) Existe una pareja (U,Ω) compatible con div tal que $p \in U$ y $\Omega_p = \Omega(p)$.

2) Si (U',Ω') es otra pareja compatible con div, $p \in V$ y $\Omega_p = \Omega'(p)$ entonces $\Omega = \Omega'$ sobre la componente conexa de $U \cap U'$ que contiene a p.

1) Por el teoréma 2.4.2, existe $(U,\bar{\Omega})$ compatible con div, tal que $p \in U$. Si es $\Omega_p = a\bar{\Omega}(p)$ para cierta constante $a \neq o$, y $\Omega = a\bar{\Omega}$ entonces la pareja (U,Ω) es compatible con div (pues $div/U = div_{\bar{\Omega}} = div_{a\bar{\Omega}} = div_{\Omega}$) y $\Omega(p) = \Omega_p$.

2) Por hipótesis es $\Omega(p) = \Omega'(p) = \Omega_p$, si V es la componente conexa de $U \cap U'$ que contiene a p entonces $(V,\Omega/V)$ y $(V,\Omega'/V)$ son compatibles con div y nuevamente por el teoréma 2.4.2 existe $a \neq o$ tal que $\Omega'/V = a(\Omega/V)$ pero $\Omega'(p) = a\Omega(p) = \Omega(p)$, luego $a = 1$ y $\Omega'/V = \Omega/V$.

5. Transporte paralelo de formas de volumen.

En todo este parágrafo, se supondrá que div es un operador divergencia fijo sobre la variedad.

La referencia general para las cuestiones relacionadas con la integración de 1-formas a lo largo de curvas es [4].

DEFINICION 2.5.1

Sea $\sigma : [a,b] \longrightarrow M$, una curva continua con $\sigma(a) = p$, y Ω_p una forma de volumen en T_pM. Se dirá que $\Omega(t), t \in [a,b]$ es un transporte de Ω_p a lo largo de σ si:

i) $\Omega(t)$ es, para cada $t \in [a,b]$ una forma de volumen en $T_{\sigma(t)}M$ y $\Omega(a) = \Omega_p$.

ii) Para cada $t_o \in [a,b]$ existe U entorno conexo de $\sigma(t_o)$, Ω forma de volumen en U y $\varepsilon > o$ de manera que si $|t - t_o| < \varepsilon$ y $t \in [a,b]$, es $\sigma(t) \in U$ y $\Omega(\sigma(t)) = \Omega(t)$.

Por otra parte, si siempre puede elegirse la pareja (U,Ω) de manera que sea compatible con el operador div, entonces $\Omega(t)$ se designará como el transporte paralelo de Ω_p a lo largo de σ respecto al operador div. Se probará a continuación que tal transporte existe, y es único. Por razones de tipo tecnico se estudiará primero la unicidad.

PROPOSICION 2.5.2

El transporte paralelo de Ω_p a lo largo de σ respecto al operador div, si existe, es único.

Demostración:

Si $\Omega(t)$ y $\bar{\Omega}(t)$, $t \in [a,b]$ son dos transportes de Ω_p a lo largo de σ, el conjunto $J = \{ t \in [a,b] / \Omega(t) = \bar{\Omega}(t) \}$ es no vacio pues $\Omega(a) = \bar{\Omega}(a) = \Omega_p$, y por razones de continuidad es cerrado. Para probar que $J = [a,b]$, es suficiente ver que J es abierto (en la topologia relativa a $[a,b]$): Supongase $t_o \in J$, es decir $\Omega(t_o) = \bar{\Omega}(t_o)$, y sean (U,Ω) y $(U,\bar{\Omega})$ parejas compatibles con el operador div, con $\sigma(t_o) \in U$, para las cuales exista $\varepsilon > o$ de forma que si $|t - t_o| < \varepsilon$ y $t \in [a,b]$ sea $\Omega(t) = \Omega(\sigma(t))$ y $\bar{\Omega}(t) = \bar{\Omega}(\sigma(t))$. Para $t = t_o$ se tiene entonces $\Omega(\sigma(t_o)) = \bar{\Omega}(\sigma(t_o))$ y por 2) del corolario 2.2.4 es $\Omega = \bar{\Omega}$ y por tanto $\Omega(t) = \bar{\Omega}(t)$ para $t \in (t_o - \varepsilon, t_o + \varepsilon) \cap [a,b]$.

COROLARIO 2.5.3

Sea $\sigma : [a,b] \longrightarrow M$ una curva continua ($\sigma(a) = p$) y $c \in \mathbb{R}$ tal que $a < c < b$. Si se denota por $\sigma_1 = \sigma/_{[a,c]}$, $\sigma_2 = \sigma/_{[c,b]}$ y $\Omega_1(t)$, $\Omega_2(t)$ $\Omega(t)$ los transportes de Ω_p a lo largo de σ_1, de $\Omega_1(c)$ a lo largo de σ_2 y de Ω_p a lo largo de σ, respectivamente, entonces:

$\Omega(t) = \Omega_1(t)$ para $t \in [a,c]$ y $\Omega(t) = \Omega_2(t)$ para $t \in [c,b]$.

Demostración:

Observese simplemente que el transporte $\bar{\Omega}(t)$ de Ω_p definido por

$$\bar{\Omega}(t) = \begin{cases} \Omega_1(t) & \text{si} \quad t \in [a,c] \\ \Omega_2(t) & \text{si} \quad t \in [c,b] \end{cases}$$

define un transporte de Ω_p a lo largo de σ respecto a div, y que este transporte, por la proposición 2.5.2 es único.

PROPOSICION 2.5.4

Dada $\sigma : [a,b] \longrightarrow M$ continua $(\sigma(a) = p)$, existe $\Omega(t)$, $t \in [a,b]$, transporte de Ω_p a lo largo de σ, respecto a div.

Demostración:

Para demostrar la existencia es suficiente hacerlo, en el caso de M orientable, pues en otro caso se podria dividir σ en trozos de manera que cada uno de ellos pudiera sumergirse en un abierto orientable de M. La unicidad del transporte en cada trozo y el corolario 2.5.3, nos garantiza entonces la existencia global del transporte en σ. Asi pues si $\bar{\Omega}$ es una forma de volumen en M y div = $\mathrm{div}_{\bar{\Omega}} + \alpha$, para cierta 1-forma α cerrada, y suponemos $\bar{\Omega}(p) = \Omega_p$, se define:

$\Omega(t) = (\exp\int_a^t \alpha)\bar{\Omega}(\sigma(t))$ en donde la integral $\int_a^t \alpha$, esta tomada a lo largo de σ. Observese que $\Omega(a) = \bar{\Omega}(p) = \Omega_p$. Por otra parte, si $f(t)$ es una primitiva de α a lo largo de σ con $f(a) = o$, se puede escribir $\Omega(t) = (\exp f(t))\bar{\Omega}(\sigma(t))$. Se probará ahora que $\Omega(t)$, es el transporte paralelo de Ω_p a lo largo de σ respecto a div:

Si $t_o \in [a,b]$, se toma U entorno conexo de $\sigma(t_o)$ y f primitiva uniforme de α en U con $f(\sigma(t)) = f(t)$ para t suficientemente próximo a t_o y $t \in [a,b]$. El par $(U,(\exp f)\bar{\Omega})$ es compatible con div (teoréma 2.4.2) y verifica la condición requerida.

NOTACIONES 2.5.5

El transporte paralelo de Ω_p a lo largo de σ respecto al operador div se denotará por $(\sigma\Omega_p)_{div}(t)$ o simplemente $(\sigma\Omega_p)(t)$ cuando no halla lugar a confusión.

Si $\sigma(b) = q$, a la forma de volumen $(\sigma\Omega_p)(b)$ en T_qM, se denominará transporte paralelo de p a q de Ω_p a lo largo de σ (respecto a div) y se denotará por $\sigma\Omega_p$. Es claro que si $a \in \mathbb{R}^*$ es $\sigma(a\Omega_p) = a(\sigma\Omega_p)$.

Veamos que $\sigma\Omega_p$ es independiente de la "parametrización" elegida para σ .

PROPOSICION 2.5.6

Sea $\sigma: [a,b] \longrightarrow M$ una curva continua con $\sigma(a) = p$, $\sigma(b) = q$ y Ω_p forma de volumen en T_pM. Supongase $t = t(s)$ aplicación biyectiva de $[c,d]$ en $[a,b]$ y diferenciable tal que $\frac{dt}{ds} > o$ para $s \in [c,d]$. Entonces si $\bar{\sigma}(s) = \sigma(t(s))$ para $s \in [c,d]$ es $\sigma\Omega_p = \bar{\sigma}\Omega_p$ (observese que $t(c) = a$ y $t(d) = b$).

Demostración:

Puede suponerse que σ esta contenida en un abierto orientable U, pues si no fuera asi, dividiendo a σ en trozos de manera que cada uno de ellos este contenido en un abierto orientable, podria aplicarse el mismo razonamiento a cada trozo, garantizandonos la proposición 2.5.2 y el corolario 2.5.3, la validez del resultado en todo σ .

Si $\sigma \subset U$ y Ω es una forma de volumen en U tal que $\Omega(p) = \Omega_p$ se tiene:

$$\sigma\Omega_p = (\sigma\Omega_p)(b) = (\exp\int_\sigma \alpha\ )\Omega(q) = (\exp\int_{\bar\sigma} \alpha\ )\Omega(q) = (\bar\sigma\Omega_p)(d) =$$
$$= \bar\sigma\Omega_p \text{ ya que } \int_\sigma \alpha = \int_{\bar\sigma} \alpha \ .$$

OBSERVACION 2.5.7

En virtud de la proposición anterior, se pueden manejar (por lo que se refiere al transporte paralelo de formas de volumen) sin pérdida de generalidad exclusivamente curvas continuas σ , parametrizadas en e intervalo $[o,1]$. En este caso se denominará a σ camino de origen $\sigma(o)$ y extremo $\sigma(1)$.

Por otra parte si σ y τ son dos caminos tales que $\sigma(1) = \tau(o) = q$ se define el camino compuesto $\sigma\tau$ por:

$$(\sigma\tau)(t) = \begin{cases} \sigma(2t) & \text{si } o \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \tau(2t-1) & \text{si } \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases} \qquad \text{(vease [5])}.$$

y resulta ser un camino de origen $\sigma(o) = p$ y extremo $\tau(1) = q$.

En estas condiciones puede enunciarse la siguiente proposición:

PROPOSICION 2.5.8

Si σ y τ son dos caminos en M con $\sigma(1) = \tau(o) = q$, y Ω_p una forma de volumen en T_pM ($\sigma(o) = p$) se tiene: $(\sigma\tau)\Omega_p = \tau(\sigma\Omega_p)$.

Demostración:

Si $\bar{\sigma}(t) = \sigma(2t)$ para $o \leq t \leq \frac{1}{2}$ y $\bar{\tau}(t) = \tau(2t - 1)$ para $t \in [\frac{1}{2},1]$ observese que $(\sigma\tau)/_{[o,\frac{1}{2}]} = \bar{\sigma}$ y $(\sigma\tau)/_{[\frac{1}{2},1]} = \bar{\tau}$. Supóngase $\bar{\sigma}\Omega_p = \Omega_q$ por el corolario 2.5.3 es

$$((\sigma\tau)\Omega_p)(t) = \begin{cases} (\bar{\sigma}\Omega_p)(t) & \text{para} \quad o \leq t \leq \frac{1}{2} \\ (\bar{\tau}\Omega_q)(t) & \text{para} \quad \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases} \qquad \text{por tanto}$$

$(\sigma\tau)\Omega_p = ((\sigma\tau)\Omega_p)(1) = \bar{\tau}\Omega_q$, finalmente por la proposición 2.5.6 es $\Omega_q = \bar{\sigma}\Omega_p = \sigma\Omega_p$ y $\bar{\tau}\Omega_q = \tau\Omega_q$ luego $(\sigma\tau)\Omega_p = \tau\Omega_q = \tau(\sigma\Omega_p)$ como queriamos demostrar.

La referencia para las cuestiones relacionadas con homotopia de caminos es [5].

TEOREMA 2.5.9

Sean σ_o y σ_1 dos caminos con el mismo origen p y el mismo extremo q y Ω_p una forma de volumen en T_pM. Si σ_o es homótopa a σ_1 (relativamente a los extremos) entonces $\sigma_o\Omega_p = \sigma_1\Omega_p$.

Demostración:

Si la variedad M es orientable, la demostración se basa en la invariancia de la integral de una 1-forma cerrada a lo largo de caminos homótopos de extremos fijos; En efcto: si $\bar{\Omega}$ es una forma de volumen en M con $\bar{\Omega}(p) = \Omega_p$ y $\mathrm{div} = \mathrm{div}_{\bar{\Omega}} + \alpha$ para cierta 1-forma α cerrada, entonces al ser $\int_{\sigma_o}\alpha = \int_{\sigma_1}\alpha$ (1) se tiene

$$\sigma_o\Omega_p = (\exp\int_{\sigma_o}\alpha)\bar{\Omega}(q) = (\exp\int_{\sigma_1}\alpha)\bar{\Omega}(q) = \sigma_1\Omega_p.$$

La tecnica para demostrar el teorema en el caso general, es análoga a la que se utiliza para probar la igualdad (1) por lo que solo se daran algunas indicaciones:

Sea $\sigma : I \times I \longrightarrow M$ $(I = [o,1])$ la homotopia que relaciona σ_o con σ_1. Para cada $s \in I$ es $\sigma_s(t) = \sigma(s,t)$ $(t \in I)$. Se probara que $s \in I \rightsquigarrow \sigma_s \Omega_p$, es localmente constante. Para $s_o \in I$, se establece po un procedimiento standar, la existencia de una partición $o = t_o < t_1 \ldots < t_r = 1$ del intervalo I, y de una colección de parejas $\{(U_i, \Omega_i) \ / \ i = 1 \ldots r\}$ compatibles con div, de manera que

$\sigma_{s_o}[t_{i-1}, t_i] \subset U_i$ $(i = 1 \ldots r)$ y si $t \in [t_{i-1}, t_i]$ se tenga $(\sigma_{s_o}\Omega_p)(t) = \Omega_i(\sigma(t))$. Por razones de continuidad, para s suficientemente proximo a s_o, tambien se tiene $\sigma_s[t_{i-1}, t_i] \subset U_i$ y $(\sigma_s \Omega_p)(t) = \Omega_i(\sigma(t))$ para $t \in [t_{i-1}, t_i]$ $i = 1 \ldots r$, de esta forma $\sigma_s \Omega_p = (\sigma_s \Omega_p)(1) = \Omega_r(q) = (\sigma_{s_o}\Omega_p)(1) = \sigma_{s_o}\Omega_p$.

NOTA 2.5.10

Sea σ un lazo por $p \in M$ (es decir σ es un camino con origen y extremo igual a p). Si Ω_p es forma de volumen en T_pM, entonces $\sigma\Omega_p$ tambien lo es, y existe una constante $a \neq o$ tal que $\sigma\Omega_p = a\Omega_p$ dicha constante a, no depende:

1) de la forma de volumen Ω_p elegida en T_pM, pues si $\bar{\Omega}_p$ es otra distinta, sera $\bar{\Omega}_p = b\Omega_p$ para $b \in \mathbb{R}^*$ y $\sigma\bar{\Omega}_p = \sigma(b\Omega_p) = b(\sigma\Omega_p) = b(a\Omega_p) = a\bar{\Omega}_p$.

2) del representante elegido de la clase de homotopia $[\sigma]$ definida por σ en $\Pi_1(M,p)$ (grupo fundamental de la variedad por el punto p), por el teorema 2.5.9.

Por tanto la constante a solo depende de $[\sigma]$ y en consecuencia el operador div, subordina una aplicación E de $\Pi_1(M,m)$ en R^*, de forma que $(\sigma\Omega_p) = E[\sigma]\Omega_p$ para Ω_p forma de volumen en T_pM.

PROPOSICION 2.5.11

La aplicación E definida en 2.5.10 es un homomorfismo entre el grupo $\Pi_1(M,m)$ y el grupo multiplicativo R^*.

Demostración:

Sean σ y τ dos lazos por p, y Ω_p una forma de volumen en T_pM, por la proposición 2.5.8 es $(\sigma\tau)\Omega_p = \tau(\sigma\Omega_p)$ por tanto

$E([\sigma]\,[\tau])\Omega_p = E[\sigma\tau]\Omega_p = (\sigma\tau)\Omega_p = \tau(\sigma\Omega_p) = \tau(E[\sigma]\,\Omega_p) =$

$= E[\sigma]\tau(\Omega_p) = E[\sigma]\,E[\tau]\,\Omega_p.$

6. Divergencias triviales.

Se va a estudiar un tipo especial de operadores divergencia que denominaremos divergencias triviales. El motivo de esta denominación, es el de que estos operadores como se vera, proceden de una forma de volumen o de una densidad, y son por tanto operadores divergencia en el sentido usual.

DEFINICION 2.6.1

Sea p un punto de M y div un operador divergencia. Se dira que div verifica la condición T(p), si cualquiera que sea el punto $q \in M$ y los caminos σ y τ uniendo p a q es $|\sigma\Omega_p| = |\tau\Omega_p|$ para alguna forma de volumen Ω_p en T_pM. Se dira que div es un operador divergencia trivial si div verifica la condición T(p) para algun punto $p \in M$.

Teniendo en cuenta que $\sigma(a\Omega_p) = a(\sigma\Omega_p)$ para $a \in \mathbb{R}^*$, es claro que si la condición T(p) se verifica para alguna forma Ω_p de volumen sobre T_pM, se verifica para cualquier otra.

PROPOSICION 2.6.2

La condición T(p) es equivalente a afirmar que $|\sigma\Omega_p| = |\Omega_p|$ para cualquier lazo por el punto p (y para toda forma de volumen Ω_p en T_pM).

Demostración:

Supongase que $|\sigma\Omega_p| = |\Omega_p|$ para cualquier lazo por el punto p y sean σ_1, σ_2 dos caminos uniendo p a un punto q de M. El camino $\sigma_1\sigma_2^{-1}$ es un lazo por el punto p y por la proposición 2.5.8 es $|(\sigma_1\sigma_2^{-1})\Omega_p| = |\sigma_2^{-1}(\sigma_1\Omega_p)|$ que coincide por hipotesis con $|\Omega_p|$ si $\sigma_1\Omega_p = \Omega_q$ entonces $\sigma_2^{-1}\Omega_q = \varepsilon\,\Omega_p$ (siendo $\varepsilon = \pm 1$) y

$\sigma_2(\sigma_2^{-1}\Omega_q) = \sigma_2(\varepsilon\,\Omega_p)$ es decir $(\sigma_2^{-1}\cdot\sigma_2)\Omega_q = \varepsilon(\sigma_2\Omega_p)$; pero $\sigma_2^{-1}\cdot\sigma_2$ es homotopo al lazo constante en q , por 2.5.9 es

$(\sigma_2^{-1}\cdot\sigma_2)\Omega_q = \Omega_q$ y $|\Omega_q| = |\varepsilon(\sigma_2\Omega_p)| = |\sigma_2\Omega_p|$.

El reciproco es trivial.

PROPOSICION 2.6.3

Si θ es una densidad sobre M, el operador div_θ verifica T(p) para todo $p \in M$.

Demostración:

Sea p un punto cualquiera de M y Ω_p forma de volumen en T_pM tal que $\theta(p) = |\Omega_p|$. Por la proposición 2.6.2 es suficiente probar que para cualquier lazo σ por p es $|\sigma\,\Omega_p| = |\Omega_p|$. Para ello se demostrará que los conjuntos $J = \{ t \in I \ / \ |(\sigma\,\Omega_p)(t)| = \theta(\sigma(t))\}$ e I son iguales; El conjunto J es cerrado (por razones de continuidad) y no vacio ($o \in J$), basta probar entonces que es abierto (en I): Sea $t_o \in J$, es decir $|(\sigma\,\Omega_p)(t_o)| = \theta(\sigma(t_o))$, y sea (U, Ω) una pareja compatible con div_θ de forma que para $|t - t_o| < \varepsilon$ y $t \in I$ sea $(\sigma\,\Omega_p)(t) = \Omega(\sigma(t))$ (definición 2.5.1). Como $|\Omega(\sigma(t_o))| =$ $= |(\sigma\,\Omega_p)(t_o)| = \theta(\sigma(t_o))$ se concluye que (U, Ω) es compatible con θ (corolario 2.4.4) y $|\Omega| = \theta/U$. Por tanto, para $|t - t_o| < \varepsilon$ $t \in I$ es $|(\sigma\,\Omega_p)(t)| = |\Omega(\sigma(t))| = \theta(\sigma(t))$ y $t \in J$.

Reciprocamente

PROPOSICION 2.6.4

Si div es un operador divergencia trivial, existe θ densidad en M, tal que $div_\theta = div$.

Demostración:

Supongase que div verifica T(p) para cierto punto $p \in M$, y sea Ω_p una forma de volumen en T_pM. Si $q \in M$, la densidad $\theta(q) = |\sigma\,\Omega_p|$ sobre T_qM, queda univocamente determinada, independientemente del camino σ que une p a q. Se probará que la asignación $q \rightsquigarrow \theta(q)$ define una densidad sobre M y que $\mathrm{div}_{\theta} = \mathrm{div}$. Si (U,Ω) es una pareja compatible con div tal que $q \in U$ y $\Omega(q) = \Omega_q$, entonces $|\Omega| = \theta/U$ ya que para cada punto $m \in U$, si σ_m es un camino contenido en U que une q a m, se tiene $(\sigma_m \Omega_q)(t) = \Omega(\sigma_m(t))$ y por tanto $|\Omega(m)| = |\sigma_m \Omega_q| =$ $= |\sigma_m(\sigma \Omega_p)| = |(\sigma \cdot \sigma_m)(\Omega_p)| = \theta(m)$ con lo cual queda concluida la demostración.

Teniendo en cuenta que toda densidad θ sobre una variedad orientable es de la forma $\theta = |\Omega|$ para alguna forma de volumen Ω sobre M, se obtiene el siguiente corolario.

COROLARIO 2.6.5

Si M es orientable y div es una divergencia trivial, existe Ω forma de volumen en M, tal que $\mathrm{div}_{\Omega} = \mathrm{div}$.

Por otra parte, y como consecuencia inmediata de las proposiciones 2.6.3 y 2.6.4 se tiene:

COROLARIO 2.6.6

Un operador divergencia trivial verifica la propiedad T(p), para todo $p \in M$.

Finalmente utilizando una tecnica completamente análoga a la de la demostración de 2.6.4 se puede probar:

PROPOSICION 2.6.7

Si div es un operador divergencia sobre M, tal que existe $p \in M$ de forma que para todo $q \in M$, y cualquiera que sean los caminos σ y τ uniendo p a q es $\sigma \Omega_p = \tau \Omega_p$ para Ω_p forma de volumen en T_pM, entonces: la asignación $q \rightsquigarrow \sigma \Omega_p$ ($\sigma(0) = p$ y $\sigma(1) = q$) define una forma Ω de volumen en M, tal que $\mathrm{div}_{\Omega} = \mathrm{div}$.

Se plantea ahora la siguiente cuestion: dado un operador divergencia trivial div sobre M, ¿ que condiciones debe cumplir la 1-forma cerrada α para que el operador div+ α , sea un operador divergencia trivial? La respuesta puede obtenerse a trav és del siguiente lema.

LEMA 2.6.8

Sean div y div' dos operadores divergencia sobre M. Supongase div'= div+α para cierta 1-forma α cerrada. Si Ω_p es una forma de volumen en T_pM y σ es un camino con origen en el punto p entonces

$(\sigma\,\Omega_p)_{div'} = (\exp\int_\sigma \alpha\ )(\sigma\,\Omega_p)_{div}.$

Demostración:

Por razones ya conocidas puede suponerse que el camino σ está contenido en un abierto orientable U, y orientado por una forma de volumen Ω tal que $\Omega_p = \Omega$ (p)(vease por ejemplo la demostración de 2.5.6). Supongase que div = $div_\Omega + \beta$ en U para cierta 1-forma cerrada β . Entonces div' = div_Ω + ($\alpha+\beta$) y se tiene:

$(\sigma\,\Omega_p)_{div'}(t) = \left[\exp\int_0^t(\alpha+\beta)\right]\Omega(\sigma(t)) = (\ \exp\int_0^t\alpha\ )\ (\exp\int_0^t\beta)\,\Omega(\sigma(t))$

$= (\ \exp\int_0^t\alpha)(\sigma\,\Omega_p)_{div}(t).$

El resultado se sigue haciendo t = 1.

PROPOSICION 2.6.9

Sea div un operador divergencia trivial en M y α una 1-forma cerrada. Entonces, div+α es operador divergencia trivial si y solo si α es exacta.

Demostración:

Sea Ω_p una forma de volumen en T_pM y σ un lazo por el punto p;

Por el lema anterior, se tiene la igualdad: $(\sigma\Omega_p)_{div+\alpha} =$

$= \exp(\int_\sigma \alpha)(\sigma\Omega_p)_{div}$ por hipótesis es $|(\sigma\Omega_p)_{div}| = |\Omega_p|$ y se tiene: $|(\sigma\Omega_p)_{div+\alpha}| = (\exp\int_\sigma \alpha)|\Omega_p|$. Por tanto

a) Si α es exacta, es $\int_\sigma \alpha = 0$ y $|(\sigma\Omega_p)_{div+\alpha}| = |\Omega_p|$ para cualquier lazo σ por p, luego div+α es trivial.

b) Reciprocamente, si div+α es trivial entonces $\exp\int_\sigma \alpha = 1$ para cualquier lazo σ por p, es decir, $\int_\sigma \alpha = 0$ y α es exacta.

Como consecuencia inmediata de esta proposición se sigue el siguiente teorema:

TEOREMA 2.6.10

La condición necesaria y suficiente, para que todo operador divergencia en M sea trivial, es que el primer grupo de cohomologia de De Rham $H^1(M)$ sea identicamente nulo.

Demostración:

Si div es un operador divergencia trivial (cuya existencia esta garantizada por la proposición 2.6.2), todos los demas operadores divergencia sobre M, son de la forma div+α, para α 1-forma cerrada en M (proposición 2.2.2); basta aplicar ahora la proposición 2.6.8.

7. <u>Algunas notas y observaciones.</u>

Este parágrafo tiene por objeto reunir algunas notas y observaciones de interés, referentes a las cuestiones que se han tratado a lo largo de esta sección, y que intercaladas en el texto pricipal, hubieran roto en parte la linea expositiva.

2.7.1

La proposición 2.6.7 permite obtener por medio de los operadores divergencia, el conocido resultado de que toda variedad simplemente conexa es orientable. Es mas, todo operador divergencia en M, procede de una forma de volumen. En efecto: Si M es simplemente conexa, div es un operador divergencia en M, y Ω_p es una forma de volumen en T_pM, para todo punto $q \in M$ y cualquiera que sean los caminos σ y τ que unen p a q, se tiene que σ y τ son homótopos y por la proposición 2.5.9 $\sigma\Omega_p = \tau\Omega_p$. El resultado se sigue de 2.6.7.

2.7.2

A un operador divergencia div sobre la variedad M, se le puede asociar de manera natural una clase de cohomologia en $H^1(M)$: Si div_o es una divergencia trivial y $\mathrm{div} = \mathrm{div}_o + \alpha_o$ para cierta 1-forma α_o cerrada, la clase de cohomologia $[\alpha_o] \in H^1(M)$, queda unívocamente determinada por el operador div, pues si div_1 es otra divergencia trivial y $\mathrm{div} = \mathrm{div}_1 + \alpha_1$, entonces $\mathrm{div}_1 = \mathrm{div}_o \ (\alpha_o - \alpha_1)$. Por 2.6.8 es $\alpha_o - \alpha_1$ exacta y $[\alpha_o] = [\alpha_1]$.

Observese que div es trivial si y solo si su clase de cohomologia asociada es la clase nula.

2.7.3

Una clase de cohomologia $c \in H^1(M)$ se puede identificar con un homomorfismo $c : \pi_1(M;p) \longrightarrow (\mathbb{R},+)$ de la siguiente manera: si $\sigma \in \pi_1(M;p)$ y $c = [\alpha]$ entonces $c[\sigma] = \int_\sigma \alpha$ (vease [5]).

Por otra parte esta identificacion define un isomorfismo entre los grupos $H^1(M)$ y Hom($\Pi_1(M;p)$, ($\mathbb{R}$,)) (teorema de Hurewitz). Desde este punto de vista, la clase c de cohomologia asociada a un operador divergencia div sobre M, admite una interesante interpretación geométrica: Si $p \in M$ y σ es un lazo por p entonces $|\sigma \Omega_p| = (\exp c[\sigma])|\Omega_p|$

En efecto: si div_0 es un operador divergencia trivial y $\mathrm{div} = \mathrm{div}_0 + \alpha$ ($[\alpha] = c$) entonces por 2.6.8 es $|(\sigma\Omega_p)_{\mathrm{div}}| = (\exp\int_\sigma \alpha)|(\sigma\Omega_p)_{\mathrm{div}_0}| =$

$= (\exp c[\sigma])|\Omega_p|$.

Observese finalmente que la relación entre el homomorfismo $E : \Pi_1(M,p) \longrightarrow \mathbb{R}^*$, asociado al operador div en 2.5.10 y la clase de cohomologia c es $|E[\sigma]| = \exp c[\sigma]$.

2.7.4

La existencia de divergencias triviales en M, podria haberse deducido sin utilizar la existencia de densidades sobre la variedad:

Si div es un operador divergencia y $p \in M$ entonces $\log|E|$ es un homomorfismo de $\Pi_1(M,p)$ en ($\mathbb{R}$, +) (vease 2.5.10), que por el teorema de Hurewitz, corresponde a una clase de cohomologia $c = [\alpha] \in H^1(M)$. El operador $\mathrm{div}_0 = \mathrm{div} - \alpha$ es un operador divergencia trivial ya que

$|(\sigma\Omega_p)_{\mathrm{div}_0}| = (\exp\int_\sigma -\alpha)|(\sigma\Omega_p)_{\mathrm{div}}| = \exp(-c[\sigma])\,.\,\exp c[\sigma]|\Omega_p| =$

$= \exp(-c[\sigma] + c[\sigma])|\Omega_p| = |\Omega_p|$, para cualquier lazo σ por p.

Esto prueba por otra parte (proposición 2.6.3) la existencia de densidades sobre M por medio de los operadores divergencia.

OPERADORES DIVERGENCIA Y 1-FORMAS EN EL FIBRADO DE BASES.

En esta sección se estudiará cierto tipo de 1-formas invariantes por la derecha (R-invariantes) definidas sobre el fibrado de bases L(M) de la variedad M, y su intima relación con los operadores divergencia.

NOTACION ADICIONAL

Se designará por L(M), o simplemente L, al fibrado de bases de la variedad M (vease [3] ó [6]), y $\pi : L(M) \longrightarrow M$ será la proyección canónica. Si $u \in L(M)$ y $\pi(u) = m$, se debe entender que u es de la forma $(u_1,\dots,u_n)$ siendo esta una base ordenada de T_mM. L_mM ó simplemente L_m será la fibra $\pi^{-1}(m)$ por el punto $m \in M$. Observese que L_m es una subvariedad de L(M) regularmente inmersa, de dimensión n^2, y se denotará por $im : L_m \longrightarrow L$ a la inmersión canónica.

Si $a = (a_j^{\ i}) \in GL_n(\mathbb{R}) = GL_n$ y $u \in L_m$ se denota por $ua = R_a(u)$ al elemento v de L_m tal que $v_i = a_i^{\ j} u_j$ y la aplicación $R: GL_n\ L(M) \longrightarrow L(M)$ tal que $R(a,u) = ua$ define una actuación por la derecha del grupo lineal GL_n sobre L(M).

Finalmente, si $(U,\emptyset)$ es una carta de M con $\emptyset = (x^1,\dots,x^n)$, la elevación natural al fibrado de esta carta se denotará por $(L(U),\overline{\emptyset})$ donde $\overline{\emptyset} = (\overline{x}^1,\dots,\overline{x}^n,(x_j^{\ i}))$ es tal que si $u \in L_m$, $\overline{x}^i(u) = x^i(m)$ y

$$u_i = x_i^{\ j}(u)\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right)_m .$$

Se denota por $(x^{-1})_j^{\ i}$ al elemento que ocupa la posición $\binom{i}{j}$ de la matriz inversa de $(x_j^{\ i})$; a veces se identificarán (de una manera obvia) las coordenadas x^i con las $\bar{x}^i$.

Una sección local S: $U \longrightarrow L(U)$ en el fibrado, puede interpretarse como una base local de campos $S = (e_1,\dots,e_n)$ definida sobre U. Nos remitimos en este punto a la notación establecida en 2.3.3.

1. <u>1-formas R-invariantes y verticalmente cerradas</u>.

DEFINICION 3.1.1

Sea w una 1-forma en L(M).

a) Se dira que w es invariante por traslaciones a la izquierda (ó R-invariante) si $(R_a)^* w = w$ para todo a GL_n.

b) Se dirá que w es verticalmente cerrada si $i_m^* w$ es cerrada en L_m para todo punto $m \in M$.

La siguiente proposición establece condiciones locales (necesarias y suficientes) para que la 1-forma w sea R-invariante.

PROPOSICION 3.1.2

La condición necesaria y suficiente para que la 1-forma w sea R-invariante en L(M) es que respecto a cualquier carta $(U,\emptyset)$, w adopte en coordenadas $\bar{\emptyset}$ una expresión del tipo

$$w = \bar{f}_i(\bar{x})d\bar{x}^i + f_i^{\ k}(\bar{x})(x^{-1})_k^{\ j}dx_j^{\ i}$$

en donde $\bar{x} = (\bar{x}^1,\dots,\bar{x}^n)$ $\quad \bar{\emptyset} = (\bar{x}^1,\dots,\bar{x}^n, x_j^{\ i})$

Demostración:

w tendra en coordenadas $\bar{\emptyset}$ una expresión general del tipo

$$w = \bar{f}_i(\bar{x},x)d\bar{x}^i + \bar{f}_i^{\ j}(\bar{x},x)dx_j^{\ i}$$

donde x simboliza la matriz $(x_j^{\ i})$.

Si $a \in GL_n(\mathbb{R})$, $a = (a_j^{\;i})$, la aplicación R_a: $L(U) \longrightarrow L(U)$ viene descrita por las ecuaciones:

$$\begin{aligned} \bar{y}^i &= \bar{x}^i \\ y_j^{\;i} &= x_k^{\;i} a_j^{\;k} \end{aligned} \qquad y \qquad \frac{\partial y_j^{\;i}}{\partial x_k^{\;p}} = \delta_p^{\;i} a_j^{\;k} \qquad \text{por tanto}$$

$$\begin{aligned} d\bar{y}^i &= d\bar{x}^i \\ dy_j^{\;i} &= a_j^{\;k} dx_k^{\;i} \end{aligned} \qquad \text{con lo que}$$

$$R_a^* w = \bar{f}_i(\bar{x}, xa) d\bar{y}^i + \bar{f}_i^{\;j}(\bar{x}, xa) dy_j^{\;i} = \bar{f}^i(x, xa) d\bar{x}^i + \bar{f}_i^{\;j}(\bar{x}, xa) a_j^{\;k} dx_k^{\;i}$$

Si se impone $R_a^* w = w$ $\quad a \in GL_n$ se tendrá:

$$\bar{f}_i(\bar{x}, x) = \bar{f}_i(\bar{x}, xa)$$

$$\bar{f}_i^{\;k}(\bar{x}, x) = \bar{f}_i^{\;j}(\bar{x}, xa) a_j^{\;k}$$

llamando $\delta = (\delta_j^{\;i})$ a la matriz identidad, y tomando $f_i(\bar{x}) = \bar{f}_i(\bar{x}, \delta)$

$f_i^{\;k}(\bar{x}) = \bar{f}_i^{\;k}(\bar{x}, \delta)$ se tiene

$$\bar{f}_i(\bar{x}, x) = \bar{f}_i(\bar{x}, \delta) = f_i(\bar{x})$$

$$\bar{f}_i^{\;k}(\bar{x}, x) = \bar{f}_i^{\;j}(\bar{x}, \delta)(x^{-1})_j^{\;k} = f_i^{\;j}(\bar{x})(x^{-1})_j^{\;k}$$

por tanto $w = f_i(\bar{x}) d\bar{x}^i + f_i^{\;k}(\bar{x})(x^{-1})_k^{\;j} dx_j^{\;i}$

El recíproco ha quedado ya implícitamente probado.

Para demostrar el siguiente teorema, en donde se caracterizan localmente las 1-formas w R-invariantes y verticalmente cerradas, se precisa del siguiente lema.

LEMA 3.1.3

Sean $Y = (y_j^{\,i})$ $B = (b_j^{\,i})$ matrices $n \times n$. Supongase que Y no es identicamente nula y que se verifican las relaciones

$b_i^{\,k} y_p^{\,j} = b_p^{\,j} y_i^{\,k}$ para $i, j, k, p = 1, \ldots, n$. (1)

Entonces, existe una constante $\alpha \in \mathbb{R}$ con $B = \alpha Y$.

Demostración:

Si B es la matriz identicamente nula se toma $\alpha = 0$.

Si B no es la matriz nula entonces

a) Existen j y p enteros entre 1 y n tales que $y_p^{\,j} \neq 0$, $b_p^{\,j} \neq 0$, puesto que si no fuera asi se tendria $y_p^{\,j} \neq 0 \implies b_p^{\,j} = 0$, y aplicando las relaciones (1) para j y p fijos tales que $y_p^{\,j} \neq 0$, y haciendo variar i,k entre 1 y n, es $b_i^{\,k} y_p^{\,j} = 0$ con lo que B seria identicamente nula.

b) Se tiene la equivalencia $b_i^{\,k} = 0 \iff y_i^{\,k} = 0$. En efecto: basta fijar j y p con la condición $y_p^{\,j} \neq 0$, $b_p^{\,j} \neq 0$ y aplicar la relación (1) para k, i arbitrarios.

Por b) es posible encontrar una matriz $C = (c_j^{\,i})$, con $b_i^{\,k} = c_i^{\,k} y_i^{\,k}$.

Cuando $b_i^{\,k} \neq 0$ y $b_p^{\,j} \neq 0$ se tiene por (1) $c_i^{\,k} y_i^{\,k} y_p^{\,j} = c_p^{\,j} y_p^{\,j} y_p^{\,k}$ con lo que $c_i^{\,k} = c_p^{\,j} = \alpha$ esta misma constante α, puede ser el valor de $c_i^{\,k}$ cuando $b_i^{\,k} = 0$.

TEOREMA 3.1.4

La condición necesaria y suficiente para que la 1-forma w en $L(M)$ sea R-invariante y verticalmente cerrada, es que exista una función diferenciable $f \in \mathcal{F}(M)$, de manera que la expresión de w respecto a cualquier carta $(U,\emptyset)$ con $\emptyset = (x^1,\dots,x^n)$ sea de la forma:

$$w = f_i(\bar{x})d\bar{x}^i + f(\bar{x})(x^{-1})_i{}^j dx_j{}^i$$

Nos referiremos de ahora en adelante a f, como función asociada a w.

Demostración:

Sea $(U,\emptyset)$ una carta de M, con $\emptyset = (x^1,\dots,x^n)$. Si w R-invariante en virtud de la proposición 3.1.2, w adopta en coordenadas $\bar{\emptyset}$ una expresión del tipo: $w = f_i(\bar{x})d\bar{x}^i + f_i{}^k(\bar{x})(x^{-1})_k{}^j dx_j{}^i$.

Observese que para $m \in U$ el espacio L_m, tiene en coordenadas $\bar{\emptyset}$ ecuaciones de la forma $\bar{x}^i = x^i(m) = \text{cte}$, y por tanto

$$i_m^* w = f_i{}^k(x(m))(x^{-1})_k{}^j dx_j{}^i \qquad x(m) = (x^1(m),\dots,x^n(m)) \quad .$$

El punto $m \in U$ permanecerá fijo a lo largo de la demostración por lo que para simplificar la notación se escribirá $\alpha_i{}^k = f_i{}^k(x(m))$.

Si w es verticalmente cerrada, sera $i_m^* w$ cerrada en L_m, y las derivadas cruzadas coinciden, es decir:

$$\alpha_i{}^k \frac{\partial (x^{-1})_k{}^j}{\partial x_q{}^p} = \alpha_p{}^k \frac{\partial (x^{-1})_k{}^q}{\partial x_j{}^i} \qquad (1)$$

De la identidad $(x^{-1})_k{}^j x_i{}^k = \delta_i{}^j$ se obtiene derivando ambos miembros respecto a $x_q{}^p$:

$\dfrac{\partial (x^{-1})_k{}^j}{\partial x_q{}^p} x_i{}^k = -(x^{-1})_k{}^j \dfrac{\partial x_i{}^k}{\partial x_q{}^p}$. Despejando ahora $\dfrac{\partial (x^{-1})_k{}^j}{\partial x_q{}^p}$ se obtiene

$$\frac{\partial (x^{-1})_k{}^j}{\partial x_q{}^p} = -(x^{-1})_r{}^j \frac{x_i{}^r}{x_q{}^p} = -(x^{-1})_r{}^j \delta_p{}^r \delta_i{}^q (x^{-1})_k{}^i = -(x^{-1})_p{}^j (x^{-1})_k{}^q.$$

Analogamente $\dfrac{\partial (x^{-1})^q_k}{\partial x^i_j} = - (x^{-1})^q_i \, (x^{-1})^j_k$ y las ecuaciones (1) se transforman en:

$\alpha^k_i (x^{-1})^q_k \, (x^{-1})^j_p = \alpha^k_p (x^{-1})^j_k \, (x^{-1})^q_i$ tomando ahora $b^q_i = \alpha^k_i \, (x^{-1})^q_k$, $y^j_p = (x^{-1})^j_p$ se tiene $b^q_i \, y^j_p = b^j_p \, y^q_i$ y aplicando ahora el lema 3.1.3 se concluye que existe una constante $\alpha \in \mathbb{R}$ de manera que $b^j_i = \alpha \, y^j_i$, es decir, $\alpha^k_i \, (x^{-1})^j_k = \alpha \, (x^{-1})^j_i$, y la expresión de $i^*_m w$ es ahora:

$$i^*_m w = \alpha (x^{-1})^j_i \, dx^i_j$$

siendo α un número que depende de m.

Aplicando este razonamiento a cada punto m de U, se construye una función $f \in \mathcal{F}(U)$ de manera que:

$$w = f_i(\bar{x}) \, d\bar{x}^i + f(\bar{x})(x^{-1})^j_i \, dx^i_j$$

En principio la función f podria depender del sistema de coordenadas $\emptyset$ tomado sobre U . Veamos que no es así:

Sea (U, ψ) otra carta con $\psi = (y^1, \ldots, y^n)$, $\bar{\psi} = (\bar{y}^1, \ldots, \bar{y}^n, y^i_j)$ (en esta comprobación se identifican de manera obvia $\bar{y}^i$ con y^i y $\bar{x}^i$ con x^i). Las ecuaciones del cambio de coordenadas pueden escribirse:

$$x^i = x^i(y^1, \ldots, y^n) \qquad x^i_j = y^k_j \frac{\partial x^i}{\partial y^k} \quad \text{por tanto} \quad (x^{-1})^j_i = (y^{-1})^j_k \frac{\partial y^k}{\partial x^i}$$

Se estudiará la expresión de la "parte vertical" de w en la nueva carta (los puntos suspensivos indican terminos que corresponden a $d\bar{y}^k$ y que no interesan para este propósito).

Se tiene:

$$\frac{\partial x_j^{\,i}}{\partial y_q^{\,p}} = \delta_j^{\,q}\,\frac{\partial x^i}{\partial x^p} \qquad \text{con lo que } dx_j^{\,i} = \delta_j^{\,q}\,\frac{\partial x^i}{\partial y^p}\,dy_q^{\,p} + \ldots =$$

$$= \frac{\partial x^i}{\partial y^p}\,dy_j^{\,p} + \ldots . \qquad \text{y por tanto}$$

$$\bar{w} = \ldots + f(\bar{x}(\bar{y}^1,\ldots,\bar{y}^n))(y^{-1})_k^{\,j}\,\frac{\partial y^k}{\partial x^i}\,\frac{\partial x^i}{\partial y^p}\,dy_j^{\,p} \qquad \text{es decir}$$

$$\bar{w} = \ldots + f(\bar{y})(y^{-1})_k^{\,j}dy_j^{\,k}.$$

Observese finalmente que puede definirse globalmente una aplicación $f \in \mathcal{F}(M)$ verificando las condiciones de teorema.

El reciproco ha quedado implicitamente probado, en el contexto de esta demostración.

Si la 1-forma w es cerrada, necesariamente es verticalmente cerrada. El siguiente corolario al teorema anterior permite conocer la expresión local de una 1-forma R-invariante y cerrada.

COROLARIO 3.1.5

Si w es una 1-forma R-invariante y cerrada, su función asociada es constante.

Demostración:

Sea $f \in \mathcal{F}(M)$ la función asociada a w en 3.1.4, y sea $(U,\emptyset)$ una carta con dominio U conexo, $\emptyset = (x^1,\ldots,x^n)$. w adoptará en coordenadas $\bar{\emptyset}$ una expresión del tipo $w = f_i(\bar{x})d\bar{x}^i + f(\bar{x})(x^{-1})_i^{\,j}dx_j^{\,i}$. Se probará que f es constante en U. Por ser w cerrada se tiene, en particular

$$\frac{\partial f(\bar{x})(x^{-1})_i^{\,j}}{\partial \bar{x}^k} = \frac{\partial f_k(\bar{x})}{\partial x_j^i} = 0 \text{ y por tanto } \frac{\partial f}{\partial \bar{x}^k}\,(x^{-1})_i^j = 0 \quad i,j=1,\ldots,n.$$

Por ser la matriz $((x^{-1})_i^j)$ no singular, fijado $m \in U$ existe i,j entre 1 y n tal que $(x^{-1})_i^j(m) \neq 0$, y esto tambien sucederá en un pequeño entorno conexo V de m; la igualdad $\frac{\partial f}{\partial x^k}(x^{-1})_i^j = 0$ indica que $\frac{\partial f}{\partial x^k} = 0$ en V $(k=1,\ldots,n)$ y por tanto f es constante en V. De esta manera la función f es localmente constante en M, y por ser M conexa es f constante.

DEFINICION 3.1.6

Una 1-forma w en L(M) se denominará unitaria, si w es $\mathcal{R}$-invariante, verticalmente cerrada, y su función asociada es la función constante igual a la unidad.

2. <u>1-formas triviales en L(M)</u>.

DEFINICION 3.2.1

Una 1-forma w en L(M) se dice trivial, si existe una 1-forma α en M de manera que para cualquier sección local $S: U \longrightarrow L(U)$ se tenga $S^* w = \alpha$. Convendremos en designar a w elevación de α y a α proyección de w.

TEOREMA 3.2.2

Para una 1-forma w en L(M) son equivalentes las afirmaciones:

1) $\forall (U,\emptyset)$ carta de M, $\emptyset = (x^1,\ldots,x^n)$ w puede escribirse en coordenadas $\overline{\emptyset}$ en la forma $w = f_i(\overline{x})d\overline{x}^i$.

2) w es trivial.

3) Existe α 1-forma en M tal que $S_{\emptyset}^* w = \alpha$ para toda carta $(U,\emptyset)$.

Ademas si α es la proyección de w y $\alpha = f_i(x)dx^i$ en coordenadas $\emptyset = (x^1,\ldots,x^n)$, la expresión de w en coordenadas $\overline{\emptyset}$ es $w = f_i(\overline{x})d\overline{x}^i$

1) $\Longrightarrow$ 2): Si $(U,\emptyset)$ es una carta de M, y w se escribe en coordenadas $\overline{\emptyset}$ en la forma $w = f_i(\overline{x})d\overline{x}^i$, se define $\alpha_U = f_i(x)dx^i$. Se prueba sin dificultad que α_U es independiente de las coordenadas $\emptyset$ tomadas sobre U, por lo que puede definirse globalmente la 1-forma α en M tal que $\alpha/U = \alpha_U$ para todo abierto U dominio de una carta. Finalmente, la comprobación de que α es la proyección de w, es tambien trivial.

2) $\Longrightarrow$ 3): evidente.

3) $\Longrightarrow$ 1): Sea $(U,\emptyset)$ una carta de M, $\emptyset = (x^1,\dots,x^n)$ y $\alpha = f_i(x^1,\dots,x^n)dx^i$. Supongase que w se escribe en coordenadas $\overline{\emptyset}$: $w = \overline{f}_i(\overline{x},x)d\overline{x}^i + f_i^j(\overline{x},x)dx_j^i$. Se tratará de probar que $\overline{f}_i(\overline{x},x) = f_i(\overline{x})$ y que $f_i^j(\overline{x},x) = 0$

La aplicación $S_\emptyset^*: U \longrightarrow L(U)$ se escribe en coordenadas $\overline{\emptyset}$ de la forma $\overline{x}^i = x^i$; $x_j^i = \delta_j^i$ con lo que $S_\emptyset^* w = \overline{f}_i(x^1,\dots,x^n,\delta)dx^i = \alpha = f_i(x^1,\dots,x^n)dx^i$ y por tanto $\overline{f}_i(x^1,\dots,x^n,\delta) = f_i(x^1,\dots,x^n)$.

Veamos que $\overline{f}_i(x^1,\dots,x^n,a) = \overline{f}_i(x^1,\dots,x^n,\delta)$ para todo $a \in GL_n$.

En efecto: si $\psi = (y^1,\dots,y^n)$ es una nueva carta sobre U definida por las ecuaciones $x^i = a_j^i y^j$, se tendra $\dfrac{\partial x^i}{\partial y^j} = a_j^i$ y las ecuaciones de S_ψ en coordenadas $\overline{\emptyset}$ son $\overline{x}^i = x^i$; $x_j^i = a_j^i$. Imponiendo la condición $S_\psi^* w = \alpha$ queda $S_\psi^* w = \overline{f}_i(x^1,\dots,x^n,a)dx^i = f_i(x^1,\dots,x^n)dx^i$ por lo que $\overline{f}_i(x^1,\dots,x^n,a) = f_i(x^1,\dots,x^n)$ $\forall a \in GL_n$.

Queda por comprobar que $\overline{f}_i^j$ es identicamente nula:

Sea (U,ψ) $\psi = (y^1,\dots,y^n)$ una nueva carta definida sobre U por ecuaciones del tipo $x^i = a^i_j y^j$ donde a^i_j es aplicación diferenciable de U en $\mathbb{R}$ y $a(m) = (a^i_j(m)) \in GL_n$ $\forall m \in U$

$S^*_\psi w$, se escribe ahora en coordenadas $\emptyset$:

$$S\ w = \left[f_k(x^1,\dots,x^n) + f^j_i(x^1,\dots,x^n,a(x^1,\dots,x^n))\ \frac{\partial a^i_j}{\partial x^k}\right] dx^k$$

imponiendo $S^*_\psi w = \alpha$ queda :

$$f^j_i(x^1,\dots,x^n,a(x^1,\dots,x^n))\ \frac{\partial a^i_j}{\partial x^k} = 0 \ (k = 1,\dots,n) \qquad (1)$$

Si p es un punto de U con coordenadas respecto a $\emptyset$, $x^i_o = x^i(p)$ y $b \in GL_n(\mathbb{R})$, se pueden construir en un entorno V suficientemente pequeño de p, funciones $a^i_j(x)$ diferenciables de forma que $a^i_j(x_o) = b^i_j$, las derivadas parciales $\dfrac{\partial a^i_j}{\partial x^1}$ en x_o tomen valores prefijados λ^i_j (por ejemplo $a^i_j(x) = b^i_j(x) + \lambda^i_j(x^1 - x^1_o)$) y det $a^i_j \neq 0$ en V.

De esta manera la igualdad (1) (para k = 1) particularizada en $x = x_o$ queda: $f^j_i(x_o,b)\ \lambda^i_j = 0$ para valores arbitrarios de λ^i_j y por tanto $f^i_j(x_o,b) = 0$.

El motivo por el que se ha establecido este teorema, es el de la obtención del siguiente corolario que será utilizado mas adelante.

COROLARIO 3.2.3

Si w y w′ son dos 1-formas en L(M) tales que $S^*_\emptyset w = S^*_\emptyset w'$ para toda carta $(U,\emptyset)$ de M, entonces $w = w'$.

Demostración:

La 1-forma $w - w'$ verifica la condición $S_{\emptyset}^{*}(w - w') = 0$, por tanto $w - w'$ es trivial con proyección nula. Fijada una carta $(U,\emptyset)$, por el teorema anterior w se escribirá $w = f^i(\bar{x})d\bar{x}^i$ en coordenadas $\bar{\emptyset}$ y su proyección $0 = f^i(x)dx^i$, luego $f^i(\bar{x})$ es identicamente nula, $w - w'$ es localmente nula y $w = w'$ (por ser M conexa).

3. Forma asociada a un operador divergencia.

Este parágrafo esta dedicado a estudiar la intima relación existente entre las formas cerradas unitarias y los operadores divergencia.

PROPOSICION 3.3.1

Asociada a un operador divergencia div definido sobre la variedad M existe una única 1-forma w en $L(M)$ verificando la condición (1): "para toda sección local $S: U \longrightarrow L(U)$, es $\mathrm{div}/U = \mathrm{div}_S + S^*w$."

Ademas w es cerrada y unitaria.

Demostración:

Fijado el operador divergencia div sobre M se procede a definir la forma w subordinada por el:

Si (U,Ω) es una pareja compatible con div, Ω puede considerarse como una aplicación diferenciable de $L(U)$ en $\mathbb{R}^*$. Se define $w_U = \dfrac{d\Omega}{\Omega}$.

w_U es independiente de la forma de volumen Ω definida sobre U, tal que (U,Ω) es compatible con div, pues por 2.4.4, todas ellas son de la forma $a\Omega$ para $a \in \mathbb{R}^*$ y $\dfrac{d(a\Omega)}{a\,\Omega} = \dfrac{a.d\Omega}{a\,\Omega} = \dfrac{d\Omega}{\Omega}$; Por tanto es posible construir w 1-forma en $L(M)$ tal que $w/L(U) = w_U$, cuando (U,Ω) es compatible con div.

Estudiemos ahora cual es la expresión de w en las coordenadas $\bar{\emptyset}$ correspondientes a una carta $(U,\emptyset)$ de M, con $\emptyset = (x^1,\dots,x^n)$. Si Ω es una forma de volumen definida sobre U tal que (U,Ω) es compatible con div, la expresión de Ω en coordenadas $\bar{\emptyset}$ será

$\Omega(\bar{x},x) = \exp f(\bar{x}).\det x$ donde $f \in \mathcal{F}(U)$ (se ha tomado Ω, definiendo la misma orientación que $\Omega_{\emptyset}$) y se tiene:

$\dfrac{\partial \Omega}{\partial \bar{x}^s} = \dfrac{\partial f}{\partial \bar{x}^s}\Omega$ y $\dfrac{\partial \Omega}{\partial x_i^p} = (\exp f)\mathrm{adj}(x_i^p)$, en donde $\mathrm{adj}(x_i^p)$ representa al adjunto de x_i^p en la matriz (x_j^i), con lo cual

$d\Omega = \dfrac{\partial f}{\partial \bar{x}^s}\Omega d\bar{x}^s + (\exp f)\mathrm{adj}(x_i^p)\ dx_i^p$; teniendo en cuenta que

$(x^{-1})_p^i = \dfrac{\mathrm{adj}(x_i^p)}{\det x}$ se tiene $\dfrac{d\Omega}{\Omega} = \dfrac{\partial f}{\partial \bar{x}^s} d\bar{x}^s + (x^{-1})_p^i dx_i^p = w/L(U)$.

y en virtud de 3.1.4 w es 1-forma R-invariante verticalmente cerrada y unitaria (vease def. 3.1.6). Por otra parte w es cerrada ya que $\log|\Omega|$ es una primitiva local de w cuando (U,Ω) es compatible con div. Se probará a continuación que w verifica la condición (1) del teorema:

Sea $S: U \longrightarrow L(U)$ una sección local con $S = (e_1,\ldots,e_n)$, y sea $(\alpha^1,\ldots,\alpha^n)$ base local de 1-formas dual de $(e_1,\ldots,e_n)$. Puede suponerse que U es dominio de una carta $\emptyset = (x^1,\ldots,x^n)$, y se tratará de expresar la 1-forma $w_S = \mathrm{div} - \mathrm{div}_S$ en coordenadas $\bar{\emptyset}$ (vease notación 2.3.3). Las ecuaciones de S en coordenadas $\bar{\emptyset}$ serán de la forma $\bar{x}^i = x^i$; $x_j^i = X_j^i(x^1,\ldots,x^n)$ verificando las funciones X_j^i la condición $e_i = X_j^i \dfrac{\partial}{\partial x^j}$, y se tendrá:

$w_S = ((\mathrm{div} - \mathrm{div}_S)e_i)\alpha^i = (\mathrm{div}\ e_i)\alpha^i - (\mathrm{div}_S e_i)\alpha^i$ y teniendo en cuenta que $\mathrm{div}_S e_i = -\alpha^k[e_i,e_k]$ (vease 2.3.4) queda

$w_S = (\mathrm{div}\ e_i)\alpha^i + \alpha^k[e_i,e_k]\alpha^i$. (I).

Se tiene por una parte: $\operatorname{div} e_i = \operatorname{div}(X_i^j \frac{\partial}{\partial x^j}) = X_i^j \operatorname{div}(\frac{\partial}{\partial x^i}) + \frac{\partial X_i^j}{\partial x^j}$ (II)

y por otra $[e_i, e_k] = \left[X_i^h \frac{\partial X_k^j}{\partial x^h} - X_k^h \frac{\partial X_i^j}{\partial x^h}\right] \frac{\partial}{\partial x^j}$ conloque

$\alpha^k [e_i, e_k] = ((X^{-1})_p^k \, dx^p)([e_i, e_k]) = (X^{-1})_j^k X_i^h \frac{\partial X_k^j}{\partial x^h} - (X^{-1})_j^k X_k^h \frac{\partial X_i^j}{\partial x^h}$,

es decir $\alpha^k [e_i, e_k] = (X^{-1})_j^k X_i^h \frac{\partial X_k^j}{\partial x^h} - \frac{\partial X_j^i}{\partial x^j}$ (III) por tanto

de (II) se deduce $(\operatorname{div} e_i) \alpha^i = (\operatorname{div} e_i)(X^{-1})_k^i \, dx^k =$

$= \operatorname{div}(\frac{\partial}{\partial x^j}) \, dx^j + (X^{-1})_j^k X_k^h \frac{\partial X_i^j}{\partial x^h}$ (IV)

y de (III) se deduce $\alpha^k [e_i, e_k] \alpha^i = (X^{-1})_j^k \frac{\partial X_k^j}{\partial x^h} - (X^{-1})_h^i \frac{\partial X_i^j}{\partial x^j} \, dx^h$ (V)

sumando (IV) y (V) y teniendo en cuenta (I) se llega a

$$w_S = \operatorname{div} (\frac{\partial}{\partial x^j}) \, dx^j + (X^{-1})_j^k \frac{\partial X_k^j}{\partial x^h} \, dx^h.$$

Por otra parte si (U, Ω) es compatible con div y $\Omega = (\exp f) \Omega_\emptyset$ es

$w = \frac{\partial f}{\partial \bar{x}^j} d\bar{x}^j + (x^{-1})_j^k \, dx_k^j$ con lo que $S^* w = \frac{\partial f}{\partial x^j} dx^j + (X^{-1})_j^k \frac{\partial X_k^j}{\partial x^h} dx^h$.

Para comprobar que $w_S = S^* w$ solo queda por verificar que

$\operatorname{div} (\frac{\partial}{\partial x^j}) = \frac{\partial f}{\partial x^j}$, lo cual se deduce de que $L_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \Omega =$

$L_{\frac{\partial}{\partial x^i}} ((\exp f) \Omega_\emptyset) = \frac{\partial}{\partial x^i} (\exp f) \Omega_\emptyset = \frac{\partial f}{\partial x^i} \Omega$ ya que $L_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \Omega_\emptyset = 0$

por ser $\operatorname{div}_\emptyset \frac{\partial}{\partial x^i} = 0$ (vease 2.3.4).

Probemos finalmente la unicidad de w:

Si w' es otra 1-forma en L(M), verificando tambien la condición (1) del teorema, para cualquier carta $(U,\emptyset)$ se tendrá $S_\emptyset^* w = S_\emptyset^* w'$ y por el corolario 3.2.3 es $w = w'$.

En la primera parte de la demostración de la proposición 3.3.1 anterior se han obtenido tres resultados parciales que (por razones de tipo técnico) van a destacarse como tales en la siguiente proposición.

PROPOSICION 3.3.2

Si w es la forma asociada a un operador divergencia div entonces

a) (U,Ω) es compatible con div si y solamente si $\frac{d\Omega}{\Omega} = w$ en L(U).

b) Si $(U,\emptyset)$ es una carta (U conexo) y $\Omega = (\exp f)\,\Omega_\emptyset$ entonces (U,Ω) es compatible con div si y solo si $df = S_\emptyset^* w$.

c) w puede escribirse en coordenadas $\overline{\emptyset}$ en la forma

$$w/L(U) = S_\emptyset^* w + (x^{-1})_i^j \; dx_j^i \; .$$

Se establece a continuación la proposición reciproca de 3.3.1

PROPOSICION 3.3.3

Si w es una forma en L(M) cerrada y unitaria, existe sobre M un único operador divergencia div, de manera que para toda sección local $S: U \longrightarrow L(U)$, se tiene $\mathrm{div}/U = \mathrm{div}_S + S^* w$.

Demostración:

Sea $(U,\emptyset)$ una carta de M, y supongase U simplemente conexo. Por 3.1.4 la expresión de w en coordenadas $\overline{\emptyset}$ es:

$w/L(U) = f_i(\overline{x})\; d\overline{x}^i + (x^{-1})_i^j\; dx_j^i = S_\emptyset^* w + (x^{-1})_i^j\; dx_j^i$. Por ser w cerrada es $S_\emptyset^* w$ cerrada y por tanto exacta sobre U. Si f es una primitiva de

$S_\phi^* w$ en U, es $\dfrac{\partial f}{\partial x^i} = f_i$; la forma de volumen $\Omega = (\exp f)\Omega_\phi$ verifica la condición $\dfrac{d\Omega}{\Omega} = w$ en L(U) y esta condición determina a Ω salvo constantes multiplicativas. (En efecto: si Ω' es forma de volumen en U y $\dfrac{d\Omega'}{\Omega'} = w$ en U entonces $d \log |\Omega'| = \dfrac{d\Omega'}{\Omega'} = w = \dfrac{d\Omega}{\Omega} = d \log|\Omega|$ por lo que en la componente conexa

$L_\phi^+(U) = \{ u \in L(U) \ / \ \Omega_\phi(u) > 0 \}$ es $\log |\Omega'| = \log|\Omega| + \log a$ para cierto $a \in \mathbb{R}^+$, es decir, $|\Omega'| = a|\Omega|$, y por ser Ω y Ω' formas de volumen, se verifica la igualdad $\Omega' = \pm a \Omega$ en U). De esta manera queda determinado en U el operador divergencia $\mathrm{div}_U = \mathrm{div}_\Omega$ y se puede construir un operador divergencia div sobre M tal que $\mathrm{div}/U = \mathrm{div}_U$ en el dominio U de cualquier carta. Si w' es la forma asociada al operador divergencia así construido se tendrá $S_\phi^* w = S_\phi^* w'$ para toda carta (U,ϕ), y en virtud de 3.2.3 es $w = w'$.

4. Forma asociada a un operador divergencia trivial.

El motivo de este parágrafo es mostrar que la condición necesaria y suficiente para que un operador divergencia div definido sobre M, sea trivial es que su 1-forma asociada w sea exacta en L(M).

PROPOSICION 3.4.1

Si div es un operador divergencia trivial, entonces su forma asociada w, es exacta en L(M).

Demostración:

Por la proposición 2.6.4 existe θ densidad sobre M tal que $\mathrm{div} = \mathrm{div}_\theta$. Sea $F = \log \theta : L(M) \longrightarrow \mathbb{R}^*$; Se probará que F es una primitiva de w en L(M). En efecto, si (U,Ω) es una pareja compatible con ϑ (y por lo tanto compatible con div), se tiene por una parte $\vartheta/L(U) = |\Omega|$ y $\frac{d\Omega}{\Omega} = d \log|\Omega| = w/L(U)$ (vease demostración de 3.3.2) es decir dF = w en L(U). Por suceder esto en un entorno U de cada punto de M, se concluye que F es primitiva global de w, y por tanto w es exacta.

Para la demostración del recíproco se requiere del siguiente lema:

LEMA 3.4.2

Sea w 1-forma unitaria y exacta en L(M). Si $F: L(M) \longrightarrow \mathbb{R}$ es una primitiva global para w entonces la aplicación $\sim F: L(M) \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $(\sim F)(u) = F(\sim u)$ para todo $u = (u_1,\ldots,u_n)$ L(M) (siendo $\sim u = (u_2,u_1,\ldots,u_n)$) es tambien primitiva de w en L(M).

Demostración:

Sea div el operador divergencia asociado a w en 3.3.2, y sea $(U,\emptyset)$ una carta de M, siendo U conexo. Si $f = F\circ S_\emptyset = S_\emptyset^* F$ y $\Omega = (\exp f)\Omega_\emptyset$ entonces $\frac{d\Omega}{\Omega} = \frac{\partial f}{\partial x^s} dx^s + (x^{-1})^i_p \, dx^p_i$ y como $df = d(S_\emptyset^* F) = S_\emptyset^*(dF) =$ $= S_\emptyset^* w$ se concluye que $\frac{d\Omega}{\Omega} = d(\log|\Omega|) = w$ en L(U) y por tanto $\log|\Omega|$ es primitiva de w en L(U), por la proposición 3.3.2.

Sea $L_\emptyset^+(U) = \{ u \in L(U) \ / \ \Omega_\emptyset(u) > 0$ y $L_\emptyset^- = \{ u \in L(U) \ / \ \Omega_\emptyset(u) < 0 \}$
Ambos conjuntos son conexos, y como F coincide con $\log|\Omega|$ en los puntos $S_\emptyset(p)$ $(p \in U)$ de $L_\emptyset^+(U)$ se concluye que $F = \log|\Omega|$ en $L_\emptyset^+(U)$, y que existe una constante $C \in \mathbb{R}$ tal que

$C + \log|\Omega| = F$ en $L_\emptyset^-(U)$ por tanto:

$$F(U) = \begin{cases} \log|\Omega(u)| & \text{si } u \in L_\phi^+(U) \\ C + \log|\Omega(u)| & \text{si } u \in L_\phi^-(U) \end{cases} \qquad y$$

$$(\sim F)(u) = F(\sim u) = \begin{cases} \log|\Omega(u)| + C & \text{si } u \in L_\phi^+(U) \\ \log|\Omega(u)| & \text{si } u \in L_\phi^-(U) \end{cases}$$

ya que $|\Omega(\sim u)| = |-\Omega(u)| = |\Omega(u)|$.

En consecuencia $(\sim F)/L(U)$ es primitiva de w en $L(U)$. Como esto es cierto en un entorno U de cada punto de M se concluye que $\sim F$ es primitiva de w en $L(M)$.

COROLARIO 3.4.3.

Si w es una forma unitaria y exacta en $L(M)$, existe una función $F: L(M) \longrightarrow \mathbb{R}$, primitiva de w en $L(M)$, tal que $F(u) = F(\sim u)$ para todo $u \in L(M)$.

Demostración:

(recuerdese que M es conexa)

Si M no es orientable entonces $L(M)$ es conexa y si F es primitiva de w en $L(M)$, $\sim F$ tambien lo es por 3.4.2, por tanto, existe una constante $C \in \mathbb{R}$, tal que $\sim F = F + C$. Para $u \in L(M)$ se tiene $F(\sim u) = F(u) + C$ y tambien $F(u) = F(\sim u) + C$ (pues $u = \sim(\sim u)$); sumando ambas igualdades se llega a $2C = 0$ y por tanto $C = 0$.

Si M es orientable, sea Ω forma de volumen sobre M, y $L^+(M) = \{u \in L(M) \,/\, \Omega(u) > 0\}$, $L^-(M) = \{u \in L(M) \,/\, \Omega(u) < 0\}$ sus dos componentes conexas. Sea $G: L(M) \longrightarrow \mathbb{R}$ una primitiva de w en $L(M)$ entonces $\sim G$ es tambien primitiva de w en $L(M)$ por 3.4.2, y la función $F: L(M) \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por:

$$F(u) = \begin{cases} G(u) & \text{si } u \in L^+(M) \\ (\sim G)(u) & \text{si } u \in L^-(M) \end{cases}$$

es diferenciable (pues $L^+(M)$ y $L^-(M)$ son componentes conexas de $L(M)$) y $dF = w$. Ademas:

si $u \in L^+(M)$ es $F(\sim u) = (\sim G)(\sim u) = G(u) = F(u)$ y

si $u \in L^-(M)$ es $F(\sim u) = G(\sim u) = (\sim G)(u) = F(u)$

Como consecuencia de 3.4.1 y 3.4.3 se obtiene el siguiente resultado:

PROPOSICION 3.4.4

Si la forma w asociada a un operador divergencia div es exacta, entonces div es un operador divergencia trivial.

Demostración:

Sea $F: L(M) \longrightarrow \mathbb{R}$ una primitiva de w en $L(M)$ tal que $F(\sim u) = F(u)$ para todo $u \in L(M)$, cuya existencia está garantizada por 3.4.3. Se probará que $\Theta = \exp F$ es una densidad sobre M y que $\mathrm{div}_\Theta = \mathrm{div}$.

En efecto, si (U,ϕ) es una carta de M y $f = F \circ S_\phi$, en la demostración de 3.4.2, se vió que si $\Omega = (\exp f)\Omega_\phi$, entonces $\log|\Omega|$ es una primitiva de w en $L(U)$ que coincide con F en $L^+_\phi(U)$. Pero además si $u \in L^-_\phi(U)$ entonces $\log|\Omega(u)| = \log|\Omega(\sim u)| = F(\sim u) = F(u)$, por lo que $F = \log|\Omega|$ en $L(U)$ y $|\Omega| = \exp(F/L(U)) = \Theta_U$.

Por otra parte y en virtud de 3.3.2, es (U,Ω) compatible con div, con lo que se concluye la demostración.

Los resultados de las proposiciones 3.4.1 y 3.4.4 pueden reunirse en el siguiente teorema:

TEOREMA 3.4.5

La condición necesaria y suficiente para que el operador divergencia div sea trivial, es que su forma asociada w_τ sea exacta en $L(M)$.

SECCION 4

OPERADOR PSEUDO-DIVERGENCIA. FORMA ASOCIADA.

Las proposiciones 3.3.1 y 3.3.3, permiten establecer una correspondencia biyectiva entre las formas unitarias y cerradas y los operadores divergencia sobre M, definida a traves de la condición (1) de 3.3.1. En esta sección se hará un estudio paralelo al realizado con el operador divergencia, de un operador que denominamos operador pseudo-divergencia, y que se corresponde por medio de la misma regla con las formas unitarias en L(M).

1. Operador pseudo-divergencia.

DEFINICION 4.1.1

Un operador pseudo-divergencia es una aplicación div: $\mathfrak{X}(M) \longrightarrow \mathfrak{F}(M)$ verificando las siguientes condiciones, para $X,Y \in \mathfrak{X}(M)$ y $f \in \mathfrak{F}(M)$ arbitrarios

i) $\operatorname{div}(X+Y) = \operatorname{div} X + \operatorname{div} Y$

ii) $\operatorname{div}(fX) = f.\operatorname{div} X + L_X f$

Observese que un operador divergencia es operador pseudo-divergencia.

PROPOSICION 4.1.2

Sea div un operador pseudo-divergencia y α 1-forma en M, entonces $\operatorname{div} + \alpha$ es un operador pseudo-divergencia.

Reciprocamente, si div y div$'$ son dos operadores pseudo-divergencia div$'$- div define una 1-forma sobre M.

Demostración:

Nos remitimos a la demostración de 2.2.2 (parte 1) y 2) de i) y ii)).

PROPOSICION 4.1.3

Un operador pseudo-divergencia div, es localizable.

Demostración:

Si div_o es un operador divergencia, se puede escribir por 4.1.2 $div = div_o + \alpha$ para cierta 1-forma α en M, por ser div_o localizable (prop. 2.3.2) y α localizable es $div = div_o + \alpha$ localizable.

DEFINICION 4.1.3

Si div es un operador pseudo-divergencia y (U,ϕ) una carta de M nos referiremos a $w_\phi = div/U - div_\phi$, como la 1-forma subordinada por div, sobre la carta (U,ϕ). Observese que $w_\phi = div(\frac{\partial}{\partial x^i})\, dx^i$.

2. <u>Transporte de formas de volumen respecto a un operador pseudo-divergencia</u>.

La forma natural de definir dicho transporte viene sugerida por la proposición 2.6.9.

DEFINICION 4.2.1

Sea div un operador pseudo-divergencia y $\sigma : [a,b] \longrightarrow M$ una curva diferenciable a trozos con $\sigma(a) = p$. Fijemos sobre M un operador divergencia div_o, y supongase $div = div_o + \alpha$ para α 1-forma en M. Si Ω_p es una forma de volumen en T_pM, se define el transporte paralelo de Ω_p a lo largo de σ por la fórmula

$$(\sigma\Omega_p)_{div}(t) = (\exp\int_a^t \alpha\ )(\sigma\Omega_p)_{div_o}(t).$$

Observese que por la proposición 2.6.9, dicho transporte coincide con el definido en 2.5.1, cuando div es un operador divergencia.

Para eliminar la ambigüedad introducida en la definición por el operador div_o se precisa del siguiente lema.

LEMA 4.2.2

La definición anterior es independiente del operador div_o elegido.

Demostración:

Sea div_1 otro operador divergencia. Denotemos para simplificar $(\sigma\Omega_p)_{div_i} = (\sigma\Omega_p)_i$ $(i = 0,1)$. Supongase $div = div_o + \alpha$ $div = div_1 + \beta$ entonces $div_1 = div_o + \gamma$ siendo $\beta + \gamma = \alpha$ y por 2.6.9 se tiene

$$(\sigma\Omega_p)_1(t) = (\exp\int_a^t \gamma)(\sigma\Omega_p)_o(t) \qquad \text{por lo que}$$

$$(\exp\int_a^t \beta)(\sigma\Omega_p)_1(t) = (\exp\int_a^t \beta)(\exp\int_a^t \gamma)(\sigma\Omega_p)_o(t) =$$

$$= (\exp\int_a^t \beta+\gamma)(\sigma\Omega_p)_o(t) = (\exp\int_a^t \alpha)(\sigma\Omega_p)_o(t).$$

Las proposiciones 2.5.6 , 2.5.8 y 2.6.9 siguen siendo válidas (con las modificaciones obvias) para el operador pseudo-divergencia, y las demostraciones son practicamente las mismas.

3. Forma asociada a un operador pseudo-divergencia.

Al tratar de asociar a un operador pseudo-divergencia, una 1-forma sobre el fibrado de bases, de manera análoga a como lo haciamos con un operador divergencia se llega al siguiente resultado:

TEOREMA 4.3.1

Asociada a un operador pseudo-divergencia div sobre M, existe una única 1-forma w en L(M) verificando la siguiente condición:

(1): para toda sección local $S: U \longrightarrow L(U)$ es $div/U = div_S + S^*w$

Por otra parte, esta 1-forma resulta ser unitaria.

Demostración:

a) Construcción de w.

Sea (U,ϕ) una carta en M con $\phi = (x^1,\dots,x^n)$. Teniendo en cuenta que $S_\phi^* w$ ha de ser igual a $w_\phi = \mathrm{div}(\frac{\partial}{\partial x^i})\, dx^i$ y que w ha de ser unitaria, parece natural definir w en L(U) por la fórmula

$$w_U = \mathrm{div}(\frac{\partial}{\partial x^i})\, d\bar{x}^i + (x^{-1})^j_i\, dx^i_j$$

Tenemos que comprobar que w/L(U) es independiente del sistema de coordenadas $\bar{\phi}$ utilizado. Tomemos entonces (U,ψ), otra carta con $\psi = (y^1,\dots,y^n)$ y comprobaremos que la forma $w' = \mathrm{div}(\frac{\partial}{\partial y^i})\, d\bar{y}^i + (y^{-1})^j_i\, dy^i_j$ coincide con w_U, para lo cual es necesario escribir w_U en coordenadas $\bar{\psi}$. Las ecuaciones del cambio de coordenadas son $x^i_j = y^k_j \frac{\partial x^i}{\partial y^k}$, y por tanto $(x^{-1})^j_i = (y^{-1})^j_k \frac{\partial y^k}{\partial x^i}$ por lo que

$$d\bar{x}^i = \frac{\partial x^i}{\partial y^p}\, d\bar{y}^p \quad \text{y} \quad dx^i_j = \frac{\partial x^i_j}{\partial y^p}\, d\bar{y}^p + \dots = y^k_j \frac{\partial x^i}{\partial y^p\, y^k}\, dy^p + \dots$$

en donde los puntos suspensivos representan terminos que contienen dy^i_j

Asi pues $w_U = \mathrm{div}(\frac{\partial}{\partial x^i}) \frac{\partial x^i}{\partial y^p}\, d\bar{y}^p + (y^{-1})^j_q \frac{\partial y^q}{\partial x^i}\, y^k_j \frac{\partial^2 x^i}{\partial y^p \partial y^k}\, d\bar{y}^p + \dots =$

$$= \left[\mathrm{div}(\frac{\partial}{\partial x^i}) \frac{\partial x^i}{\partial y^p} + \frac{\partial y^k}{\partial x^i}\cdot\frac{\partial^2 x^i}{\partial y^p \partial y^k}\right] dy^p + \dots \qquad \text{(I)}$$

por otra parte $\mathrm{div}(\frac{\partial}{\partial y^p}) = \mathrm{div}(\frac{\partial x^i}{\partial y^p}\cdot\frac{\partial}{\partial x^i}) = \frac{\partial x^i}{\partial y^p}\mathrm{div}(\frac{\partial}{\partial x^i}) + \frac{\partial}{\partial x^i}\frac{\partial x^i}{\partial y^p} =$

$$= \mathrm{div}(\frac{\partial}{\partial x^i}) \frac{\partial x^i}{\partial y^p} + \frac{\partial y^k}{\partial x^i} \frac{\partial^2 x^i}{\partial y^k \partial y^p} \qquad \text{(II)}$$

Comparando (I) y (II), se tiene $w_U = \mathrm{div}(\frac{\partial}{\partial y^p})\, d\bar{y}^p + \dots$

Finalmente se ha comprobado ya, en el final de la demostración del teorema 3.1.4 que la parte vertical de w_U sigue siendo de la forma $(y^{-1})^q_p\ dy^q_p$, y puede construirse una 1-forma unitaria w en L(M) de forma que $w/L(U) = w_U$ para U dominio de una carta de M.

b) Comprobación de que w verifica la condición (1).

Es claro, por la construcción de w que para cualquier carta $(U,\emptyset)$ se tiene que $div = div_\emptyset + S^*_\emptyset w$, la demostración de que esta propiedad tambien se verifica para una sección local $S\colon U \longrightarrow L(U)$ y de que w es única es la misma que se realizó en la demostración de la proposición 3.3.1 (última parte).

Reciprocamente:

PROPOSICION 4.3.2

Si w es una 1-forma unitaria en L(M), existe un único operador pseudo-divergencia div de forma que, para toda sección local $S\colon U \longrightarrow L(U)$ es $div/U = div_S + S^* w$.

Demostración:

Fijemos $(U,\emptyset)$ carta de M con $\emptyset = (x^1,\dots,x^n)$, w se escribirá en coordenadas $\emptyset$ de la forma $w/U = f_i(x)\ d\bar{x}^i + (x^{-1})^j_i\ dx^i_j$. Se define $div_U = div_\emptyset + S^*_\emptyset w$. Se comprueba de la misma manera que en a) de 4.3.1 que div_U es independiente del sistema de coordenadas $\emptyset$ utilizado, para definirlo, y por tanto es posible obtener un operador pseudo-divergencia div sobre M de manera que $div/U = div_U$, cuando U sea dominio de una carta. Dicho operador div da lugar por la proposición anterior a una forma w' unitaria y se tiene $S^*_\emptyset w' = S^*_\emptyset w$ para toda carta

(U,ϕ), por el corolario 3.2.3 es $w = w'$.

Finaliza el capítulo con el siguiente teorema cuya demostración es inmediata:

TEOREMA 4.3.3

Sea div un operador pseudo-divergencia, cuya forma asociada es w. Entonces, la condición necesaria y suficiente para que div sea un operador divergencia es que la forma w sea cerrada.

Demostración:

Sea (U,ϕ) una carta de M, entonces $div/U = div_{\phi} + S_{\phi}^{*}w$. Si w es cerrada entonces $S_{\phi}^{*}w$ es cerrada, y por la proposición 2.2.2, div/U es un operador divergencia en U. Por suceder esto en un entorno U de cada punto de M, se concluye que div es un operador divergencia en M. El recíproco ha sido ya probado en 3.3.2 .

CAPITULO II

APLICACIONES A LA TEORIA DE CONEXIONES LINEALES

SECCION 1

PRELIMINARES

La teoria de operadores divergencia desarrollada en el capítulo anterior , se aplica en este capítulo a ciertos aspectos de la teoria de conexiones lineales y la teoria de sprays . Esta sección está dedicada a establecer los elementos esenciales de cada una de ellas , con motivo de fijar la terminología , y resaltar los resultados básicos que más adelante serán utilizados.

Se mantiene la notación establecida al principio de la sección 3 (Cap.I) ; $L=L(M)$, es el fibrado de bases de la variedad M y $\pi : L(M) \longrightarrow M$, es la proyección canónica . Se denota por π_i ,la aplicación de $L(M)$ en $T(M)$ que hace corresponder a cada elemento $u = (u_1,\ldots,u_n)$ de $L(M)$ el vector u_i . Si $(\alpha^1,\ldots,\alpha^n)$ es la base dual de $(u_1,\ldots,u_n)$, $\pi^i(u)$ denota a α^i , y resulta ser aplicación de $L(M)$ en $T(M)$. Finalmente , si $u \in L(M)$ se denotará por π_u a la aplicación tangente $T_u\pi : T_u(L) \longrightarrow T_{\pi(u)}(M)$, y por f_u a la aplicación de $GL_n(\mathbb{R})$ en $L(M)$ tal que $f_u(a)=ua$ para a GL_n .

La referencia general en esta sección es [3] y [6] en lo que se refiere a la teoría de conexiones lineales, y [6] , [7] , [8] , y [10], para la teoria de sprays .

1. Campos canónicos verticales en $L(M)$

Para cada $u \in L(M)$ se define V_u , subespácio de vectores verticales en $T_u(L)$, como el núcleo de la aplicación $\pi_u : T_u(L) \longrightarrow T_{\pi(u)}(M)$, que es subespácio de dimensión n^2. Los subespácios $V_u, u \in L$ definen una distribución involutiva en L, cuyas subvariedades integrales son las subvariedades $L_m = \pi^{-1}(m)$ $(m \in M)$. Es posible obtener una base global en L de esta distribución canónica vertical definiendo para $i,j=1...n$

los campos $E^i_j(u)=T_e(f_u)(X^i_j(e))=(f_u)_*(X^i_j(e))$, donde e es la matriz identidad de GL_n , y los campos X^i_j definen la base canónica del álgebra de Lie del grupo de Lie GL_n.

Si (U,ϕ) es una carta de M con $\phi=(x^1,...,x^n)$, la expresión de E^i_j en coordenadas $\bar{\phi}$ es $E^i_j = x^k_j \dfrac{\partial}{\partial x^k_i}$.

2. Proyecciones horizontales

Se llaman proyecciones horizontales a las 1-formas $w^1,...,w^n$ definidas en L por : $w^i(X_u)= \pi^i(u)(\pi_u(X_u))$, para $X_u \in T_u(L)$. La expresión local de w^i en coordenadas $\bar{\phi}=(\bar{x}^1,...,\bar{x}^n,x^i_j)$ es $w^i=(x^{-1})^i_j dx^j$

Si $S: U \longrightarrow L(U)$, es una sección local, las 1-formas en U $(S^*w^1,...,S^*w^n)$ definen una base local que es dual de la base local de campos $(\pi_1 S,...,\pi_n S)$.

3. Distribución horizontal subordinada por una conexión .

Una conexión Γ definida sobre M permite de una manera natural, elevar curvas diferenciables a trozos en M, al fibrado de bases L(M) por transporte paralelo : si $\sigma : I \longrightarrow M$ (I, intervalo cerrado de $\mathbb{R}$) es una curva diferenciable a trozos, y $u \in L$ con $\pi(u) = \sigma(t_0)$ para $t_0 \in I$, una elevación horizontal de σ por u, es una curva diferenciable a trozos en L, $\bar{\sigma}_u : I \longrightarrow L$ de forma que $\pi \cdot \bar{\sigma}_u = \sigma$ y los vectores $\eta_i \bar{\sigma}_u$ se desplazan paralelamente a lo largo de σ respecto a la conexión Γ. Se prueba que esta elevación existe y es única; Este proceso lleva a definir la distribución horizontal subordinada por Γ en L de la forma que sigue : para $u \in L$ con $\pi(u) = m$, sea $h_u : T_m(M) \longrightarrow T_u(L)$, la aplicación definida de la siguiente forma, para $X_m \in T_m(M)$ sea $\sigma : I_\varepsilon \longrightarrow M$ ($I_\varepsilon = (-\varepsilon, \varepsilon)$, $\varepsilon > 0$) una curva diferenciable por X_m, es decir, $\sigma(0) = m$ y $\sigma'(0) = X_m$. Por definición $h_u(X_m) = \bar{\sigma}_u'(0)$; La aplicación h_u así definida (que por supuesto es independiente de la curva σ tomada por X_m) , es un monomorfismo cuya imagen H_u se llamará subespácio horizontal (subordinado por Γ en u) Observese que $\pi_u / H_u = h_u^{-1}$, y que los subespácios H_u , verifican:

1) $H_u \oplus V_u = T_u(L)$

2) $(R_a)_* H_u = H_{ua}$, $\forall a \in GL_n$, y $\forall u \in L$.

Recíprocamente, se prueba que una tal distribución H_u verificando las propiedades 1) y 2), subordinan una única conexión Γ sobre la variedad M , cuyos subespacios horizontales son precisamente los H_u .

Un campo X de vectores en L , se puede descomponer de forma única, en suma $X_H + X_V$, siendo $X_H(u) \in H_u$ y $X_V(u) \in V_u$ $\forall u \in L$. Si $X_V = 0$, se dirá que X es horizontal , y si $X_H = 0$, se dirá que X es vertical.

Las curvas horizontales en L , son aquellas cuyo vector tangente es horizontal en cada punto , y las curvas elevadas de curvas de M , son en este sentido horizontales.

La técnica de elevación de curvas , permite también una elevación de campos X de M , obteniendose así un campo $\bar{X}$ horizontal y R-invariante.

4. Base global de campos horizontales

Puede construirse una base global de campos para la distribución horizontal subordinada en L por una conexión Γ, $(E_1,\ldots,E_n)$ tomando , $E_i(u) = h_u(\eta_i(u))$ para $u \in L$, y el sistema $(E_1,\ldots,E_n,E_1^1,\ldots,E_n^n)$ constituye una base global de campos en L .

La expresión de cada E_r en coordenadas $\emptyset$, es de la forma

$$E_r = x_r^i\left(\frac{\partial}{\partial x^i} - (\Gamma_{ij}^k \cdot \pi) x_s^j \frac{\partial}{\partial x_s^k} \right) \qquad (1.4.1)$$

donde Γ_{ij}^k representan los símbolos de Christoffer de la conexión respecto a la carta $(U,\emptyset)$, y se tiene para cada $a \in GL_n$, $E_i(ua) = a_i^j E_j(u)$, para cualquier $u \in L$

5. Proyecciones verticales . Base global de 1-formas en L

La base dual de $(E_1,\dots,E_n,E_1^1,E_2^1,\dots,E_n^n)$ se denota por $(w^1,\dots,w^n,w_1^1,w_1^2,\dots,w_n^n)$, donde $w^1,\dots,w^n$, son precisamente las proyecciones horizontales definidas en el § 2. A las formas w_j^i se les denomina proyecciones verticales, y su significado geométrico es el siguiente: si $X_u \in T_uL$, entonces $vX_u = (f_u)_*(w_j^i(u)X_i^j(e))$, siendo vX_u la componente vertical de X_u. La matriz $W=(w_j^i)$ define entonces una 1-forma en L evaluada sobre el álgebra de Lie GL_n. Si X es un campo en L , se verifica la equivalencia : X es horizontal $\Leftrightarrow$ $W(X)=0$.

En coordenadas $\emptyset$ se puede escribir:

$$w_j^i = (x^{-1})_p^i \left[x_j^k \, (\Gamma_{sk}^{r} \, \eta) dx^s + dx_j^p \right] \qquad (1.5.1)$$

Si $S : U \longrightarrow L(U)$ es una sección local con $S = (e_1,\dots,e_n)$, se tiene para todo campo X definido en U : $\nabla_X(e_j) = (S^* w_j^i)(X)e_i$. En particular si $S = S_\emptyset$ para cierta carta $(U,\emptyset)$ se tiene : $S_\emptyset^* w_j^k = \Gamma_{ij}^k \, dx^i$ (1.5.2)

por tanto $\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^j} = (S_\emptyset^* w_j^k)(\frac{\partial}{\partial x^i})\frac{\partial}{\partial x^k} = \Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial x^k}$ (1.5.3)

6. Transporte paralelo

1.6.1 Si $\sigma : [a,b] \longrightarrow M$ es una curva diferenciable a trozos , y $X_m \in T_m(M)$ $(m = \sigma(a))$, se denotará por $(\sigma X_m)_\Gamma(t)$ el transporte paralelo de X_m a lo largo de σ . Cuando la imagen de σ está contenida en el dominio U de una carta $\emptyset = (x^1,\dots,x^n)$, si Γ_{ij}^k son los símbolos de Christoffer de la conexión Γ en $(U,\emptyset)$, las ecuaciones diferenciales del transporte paralelo pueden escribirse en cada trozo diferenciable de σ : $\frac{dX^k}{dt} = - \frac{dx^i}{dt} X^j \Gamma^k_{ij}$, siendo $x^i = x^i(t)$ las ecuaciones de σ en coordenadas ϕ , y $(\sigma X_m)_\Gamma(t) = X^i(t)(\frac{\partial}{\partial x^i})_{\sigma(t)}$ la única solución tal que $(\sigma X_m)_\Gamma(a) = X_m$.

En ocasiones cuando no haya necesidad de hacer referencia explícita a Γ , se denotará $(\sigma X_m)_\Gamma$ por (σX_m) . Por otra parte si t_o, t_1 pertenecen a $[a,b]$, se denotar'a por $\tau^{t_o}_{t_1}$ el isomorfismo canónico subordinado entre los espacios $T_{\sigma(t_o)}(M)$ y $T_{\sigma(t_1)}(M)$, por el transporte paralelo a lo largo del trozo de curva determinado por los puntos $\sigma(t_o)$ y $\sigma(t_1)$

Necesitaremos más adelante utilizar el siguiente lema

LEMA 1.6.2

Si $X_m \in T_m(M)$ y si $Y \in \mathfrak{X}(M)$, la derivada covariante $\nabla_{X_m}(Y)$ respecto a la conexión Γ , puede definirse de la forma que sigue:

Para $\varepsilon > 0$, sea $\sigma : I_\varepsilon \longmapsto M$, una curva diferenciable por X_m , entonces ; $\nabla_{X_m}(Y) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \left[\tau^t_o (Y(\sigma(t)))\right]$

1.6.3

El transporte paralelo de vectores a lo largo de una curva , respecto a una conexión Γ, subordina en general un transporte de tensores y de formas. Estamos particularmente interesados en el transporte paralelo de formas de volumen , por lo que nos detendremos un instante en este punto:

Si $\sigma:[a,b] \longrightarrow M$, es una curva diferenciable a trozos, y $\Omega(t)$ es una forma de volumen definida a lo largo de σ , $\Omega(t)$ se desplazará paralelamente a lo largo de σ respecto a la conexión Γ , si para todo $u \in L_m$ $(m = \sigma(a))$ es $\Omega(\bar{\sigma}_u(t))$ constante . (Observese que es suficiente que la condición se cumpla para algún $u \in L_m$, ya que $\Omega(\bar{\sigma}_{ua}(t)) = \Omega(\bar{\sigma}_u(t)a) = (\det a)\,\Omega(\bar{\sigma}_u(t))$.

Se denotará por $(\sigma\,\Omega_m)_\Gamma(t)$ ó símplemente por $(\sigma\,\Omega_m)(t)$ al transporte paralelo de Ω_m a lo largo de σ respecto a la conexión Γ .

1.6.4 Geodésicas

Las geodésicas de una conexión Γ son por definición curvas diferenciables , tales que su vector tangente se desplaza paralelamente respecto a Γ . Las geodésicas satisfacen en coordenadas $\phi = (x^1,\dots x^n)$ una ecuación diferencial de segundo orden de la forma:

$$\frac{d^2x^k}{dt^2} = -\Gamma^k_{ij}\,\frac{dx^i}{dt}\,\frac{dx^j}{dt} .$$

Fijado un vector $X_m \in T_m(M)$ existe una única geodésica σ_{X_m} , verificando las condiciones iniciales : $\sigma_{X_m}(0) = m$ y $\left.\frac{d\sigma_{X_m}}{dt}\right|_{t=0} = X_m$.

(La unicidad está entendida en el sentido usual)

7. Sprays

1.7.1 Notaciones

Se denota por TM el fibrado tangente a la variedad M . Si (U,ϕ) es una carta de M con $\phi=(x^1,\dots,x^n)$, se construye la carta de trivialización local $(TU,T\phi)$ tomando $T\phi=(x^1,\dots,x^n,\dot{x}^1,\dots,\dot{x}^n)$ siendo para $X_m\in TU$, $X_m=\dot{x}^i(X_m)(\frac{\partial}{\partial x^i})_m$. Se denota por $\tau:TM\longrightarrow M$ a la proyección canónica.

DEFINICIÓN 1.7.2

Sea $\mathcal{X}$ un campo de vectores en TM; se dirá que $\mathcal{X}$ define una ecuacion diferencial de segundo orden sobre M , si las curvas integrales de $\mathcal{X}$ se obtienen elevando al fibrado TM curvas de M, es decir : fijado $X_m\in T_m(M)$ existe $\sigma:I\longrightarrow M$ con $\sigma(0)=m$ y $\left.\frac{d\sigma}{dt}\right|_{t=0}=\dot{\sigma}(0)=X_m$, y $\frac{d\sigma}{dt}=\dot{\sigma}:I\longrightarrow TM$, es curva integral de $\mathcal{X}$. Además σ es única , en el mismo sentido de la unicidad de soluciones para una ecuación diferencial.

PROPOSICION.1.7.3

La condición necesária y suficiente para que un campo $\mathcal{X}$ en TM defina una ecuación diferencial de segundo orden en M , es que respecto a cualquier carta(U,ϕ) , $\mathcal{X}$ adopte en coordenadas $T\phi$, una expresión del tipo : $\dot{x}^i\frac{\partial}{\partial x^i}+f^j(x,\dot{x})\frac{\partial}{\partial\dot{x}^j}$, y de ésta manera las curvas integrales de $\mathcal{X}$ en U habrán de verificar el sitema de ecuaciones :

$$\left[\frac{d\dot{x}^j}{dt}=f^j(x,\dot{x})\ ;\ \frac{dx^j}{dt}=\dot{x}^j\right]\quad j=1\dots n$$

DEFINICION 1.7.4

Una ecuación diferencial $\mathcal{L}$ de segundo orden en M, se dirá que es un spray si verifica la siguiente condición: si $\sigma : I \longrightarrow M$ es una curva integral de $\mathcal{L}$ (en el sentido de que $\dot{\sigma}$ lo es) parametrizada respecto a t la curva $\sigma(at+b)$ $(a,b \in \mathbb{R})$, tambien es curva integral de $\mathcal{L}$.

PROPOSICION 1.7.5

$\mathcal{L}$ es un spray, si y solo si, para cualquier carta $(U,\emptyset)$, $\mathcal{L}$ adopta en coordenadas $T\emptyset$ una expresión del tipo:

$$\mathcal{L} = \dot{x}^i \frac{\partial}{\partial x^i} - \Gamma^k_{ij}\, \dot{x}^i \dot{x}^j \frac{\partial}{\partial x^k} \qquad (1)$$

y las ecuaciones diferenciales que habrán de satisfacer las curvas integrales de $\mathcal{L}$ serán:

$$\frac{d^2x^k}{dt^2} = - \Gamma^k_{ij}\, \dot{x}^i \dot{x}^j \quad k = 1 \ldots n \qquad \left(\dot{x}^i = \frac{dx^i}{dt} \right)$$

Los coeficientes Γ^k_{ij}, quedan unívocamente determinados por la carta $(U,\emptyset)$ y la condición $\Gamma^k_{ij} = \Gamma^k_{ji}$.

Una conexión Γ subordina sobre la variedad un spray $\mathcal{L}$ cuyas curvas integrales son precisamente sus geodésicas. Intrinsecamente dicho spray viene definido por la condición:

$$\mathcal{L}(X_m) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} (\dot{\sigma}_{X_m}) = \ddot{\sigma}_{X_m}(0).$$

Si Γ es una conexión simétrica (con torsión nula), la expresión del spray de geodésicas coincide con (1) de la proposición anterior, siendo Γ_{ij}^{k} , los símbolos de Christoffer de Γ respecto a $(U,\emptyset)$. Recíprocamente, los coeficientes funcionales Γ_{ij}^{k} subordinados en $(U,\emptyset)$ por un spray $\mathcal{S}$, pueden considerarse símbolos de Christoffer de una única conexión simetrica Γ cuyo spray de geodésicas coincide con $\mathcal{S}$.

DEFINICION 1.7.6

Un tensor T covariante de orden 2 y contravariante de orden 1, puede interpretarse como una aplicación $\mathcal{F}(M)$-bilineal , de $\mathfrak{X}(M)\times\mathfrak{X}(M)$ en $\mathfrak{X}(M)$. Se dirá que T es un tensor de **torsión,** si $T(X,Y)=-T(Y,X)$ para $X,Y\in\mathfrak{X}(M)$.

PROPOSICION 1.7.7

Dado un spray $\mathcal{S}$ sobre M y un tensor T de **torsión** , existe una única conexión Γ , con spray de geodésicas $\mathcal{S}$ y tensor de torsión T .

Además , si $\bar{\Gamma}$ es una conexión con spray $\mathcal{S}$ de geodésicas , entonces una conexión Γ sin torsión , y con el mismo spray de geodésicas puede obtenerse por medio de la formula

$$\nabla_X(Y)=\bar{\nabla}_X(Y)-\tfrac{1}{2}\bar{T}(X,Y)$$

para $X,Y\in\mathfrak{X}(M)$, siendo $\bar{\nabla}$ y ∇ las derivadas covariantes respectivas de $\bar{\Gamma}$ y Γ , y $\bar{T}$ la torsión de $\bar{\Gamma}$.

SECCION 2

CONEXIONES LOCALMENTE VOLUMETRICAS

En esta sección se van a estudiar , las conexiones que conservan localmente una forma de volumen por transporte paralelo , por medio de la traza de la conexión (§ 2) y a través del tensor de Ricci (§ 3)

1. Definiciones

En toda esta sección Γ representa una conexión lineal definida sobre M con proyecciones verticales (w^i_j).

DEFINICION 2.1.1

a) Se dirá que Γ es una conexión localmente volumétrica , si para todo punto m de M existe una pareja (U,Ω) , donde U es un abierto conexo que contiene a m y Ω es una forma de volumen definida sobre U , tal que cualquiera que sea la curva diferenciable a trozos $\sigma : [a,b] \longrightarrow U$, es $(\sigma\Omega(m))_\Gamma(t) = \Omega(\sigma(t))$ $(\sigma(a) = m)$. En este caso se dirá que el par (U,Ω) es compatible con Γ .

b) Se dirá que Γ es conexión volumétrica , si el par (M,Ω) es compatible con Γ , para alguna forma Ω de volumen definida sobre M.

DEFINICION 2.1.2

Sea div un operador psudodivergencia sobre M . Se dirá que la conexión Γ es compatible con div, si para cualquier curva diferenciable a trozos $\sigma : [a,b] \longrightarrow M$, y para toda forma de volumen Ω_m en $T_m(M)$ $(m = \sigma(a))$ se tiene $(\sigma\Omega_m)_{div}(t) = (\sigma\Omega_m)_\Gamma(t)$.

Nótese que es suficiente con que la condición anterior se verifique para alguna forma de volumen en $T_m(M)$

DEFINICION 2.1.3

Se llamará traza w de la conexión Γ a la 1-forma en L(M) definida por

$w = w_1^1 + \ldots + w_n^n$.

PROPOSICION 2.1.4

La traza w de la conexión Γ es una 1-forma unitária .

Demostración:

En 1.5.1 (Cap. II) se había establecido que en coordenadas ϕ se puede escribir $w_j^i = (x^{-1})_p^i \left[x_j^k (\Gamma_{sk}^p \cdot \pi) dx^s + dx_j^p \right]$. Diagonalizando queda :

$w = (\Gamma_{sk}^k . \pi) dx^s + (x^{-1})_p^i \, dx_i^p$.

En virtud de 3.1.4 y 3.1.6 (Cap.I) , w es unitária.

2 Operador pseudodivergencia asociado a una conexión .

La traza w de la conexión Γ por ser unitária da lugar (4.3.2.(Cap I)) a un operador pseudodivergencia div , verificando la condición :

$div/_U = div_S + S^* w$, para $S:U \longrightarrow L(U)$ sección local .

Se comprobará que tal operador div es compatible(en el sentido establecido en 2.1.2 (Cap II)) y que este es el único operador pseudodivergencia , que verifica tal condición. Se obtendrán , finalmente consecuencias de este resultado como corolários de 2,6.10,3.4.5,4.3.3 (Cap I)

PROPOSICION 2.2.1.

El operador pseudo-divergencia div asociado a la 1-forma unitaria w , traza de la conexión Γ , es compatible con Γ .

Demostración:

Sea $(U,\emptyset)$ una carta de M y sea $\sigma:[a,b]\longrightarrow U$ una curva diferenciable, y $\Omega(t)$ una forma de volumen que se desplaza paralelamente a lo largo de σ respecto a Γ . Se puede escribir:

$\Omega(t) = F(t)\Omega_{\emptyset}(\sigma(t))$ para cierta función $F:[a,b]\longrightarrow R^{+}$ diferenciable. Sea $u\in L_m$, siendo $m=\sigma(a)$, y $\bar{\sigma}_u$ la elevación horizontal de σ por u . Se tendrá : $\Omega(\bar{\sigma}_u(t)) = $ cte. $\forall t\in[a,b]$, es decir

$\frac{d}{dt}\Omega(\bar{\sigma}_u(t))=0$. Impongamos esta condición en coordenadas $\emptyset$:

si $\bar{\sigma}_u(t) = (u_1(t),\ldots,u_n(t))$ $(u_i(0)=u_i)$ podemos escribir ,

$u_i(t) = x_i^j(t)\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right)_{\sigma(t)}$, y $\Omega(\bar{\sigma}_u(t)) = \det(x_i^j)F(t)$. Llamando a

$\det(x_i^j(t)) = \det x$, se tiene:

$$\frac{d}{dt}(F\det(x)) = \frac{dF}{dt}.\det(x) + F\frac{\partial\det(x)}{\partial x_h^k}\frac{dx_h^k}{dt}$$, pero $x_h^k(t)$ verifican

las ecuaciones del transporte 1.6.1 (Cap II) luego :

$$\frac{dx_h^k}{dt} = -\frac{dx^i}{dt}x_h^j\Gamma_{ij}^k$$, donde $x^i = x^i(t)$ son las ecuaciones de σ

en coordenadas $\emptyset$; así pues ,

$$\frac{d}{dt}(F.\det(x)) = \frac{dF}{dt}.\det(x) - F\,\mathrm{adj}(x_h^k)\,x_h^j\frac{dx^i}{dt}\Gamma_{ij}^k = \left(\frac{dF}{dt} - F\frac{dx^i}{dt}\Gamma_{ij}^j\right)\det(x)=0 ,$$

con lo que $\frac{dF}{dt} - F\frac{dx^i}{dt}\Gamma_{ij}^j = 0$, es decir $\frac{d}{dt}(\log F) = \Gamma_{ij}^j\frac{dx^i}{dt}$, y

$\log(F(t)) = \int_a^t \Gamma_{ij}^j \frac{dx^i}{dt}\, dt + \log(F(a))$, y $F(t) = F(a).\exp\int_a^t \Gamma_{ij}^j \frac{dx^i}{dt} dt$

Observese que por 1.5.2 (Cap II) es $S_\emptyset^* w = \Gamma_{ij}^j\, dx^i$ con lo que

$F(t) = F(a).\exp\int_a^t S_\emptyset^* w$; llamando $\Omega_m = F(a)\Omega_\emptyset(m)$, se tendrá ,

$(\sigma\Omega_m)_\Gamma(t) = \exp(\int_a^t S_\emptyset^* w)\,\Omega_\emptyset(\sigma(t)) = (\sigma\Omega_m)_{div}(t)$, ya que en

U es $div = div_\emptyset + S_\emptyset^* w$.

Se comprende que la conclusión es también válida cuando se toma σ diferenciable a trozos , aplicando en trozos suficientemente pequeños de σ la conclusión anterior . Como consecuencia de esta proposición puede enunciarse el siguiente teorema:

TEOREMA 2.2.2

Sea div un operador pseudo-divergencia con 1-forma asociada w', y sea w la traza de la conexión Γ.La condición necesária y suficiente para que div sea compatible con es que se verifique la igualdad

$$w = w'$$

Demostración:

La condición $w = w'$ es por la proposición 2.2.1 suficiente para que div sea compatible con Γ , que la condición es necesaria se deduce inmediatamente del siguiente lema :

LEMA 2.2.3

Si div y div' son dos operadores pseudo-divergencia tales que cualquiera que sea la curva $\sigma : [a,b] \to M$ diferenciable a trozos se tiene :

$(\sigma\Omega_m)_{div}(t) = (\sigma\Omega_m)_{div'}(t)$, para Ω_m forma de volumen en $T_m(M)$ $(\sigma(a) = m)$, entonces div = div'.

Demostración:

Por 2.6.9. (Cap I) aplicado a operadores pseudo-divergencia , se tiene que si div'=div+α para cierta 1forma α en M es $(\sigma\Omega_m)_{div'}(t) = (\exp\int_a^t \alpha)(\sigma\Omega_m)_{div}(t)$. Como por hipótesis es $(\sigma\Omega_m)_{div'}(t) = (\sigma\Omega_m)_{div}(t)$, necesáriamente es $\int_a^t \alpha = 0$, y esto para cualquier curva diferenciable a trozos σ , de donde se deduce que α es idénticamente nula , y por tanto div = div'.

De acuérdo con las definiciones del anterior § 1 y el teorema 2.2.2 se pueden demostrar los siguientes resultados :

TEOREMA 2.2.4

Si w es la traza de la conexión , entonces:

a) Γ es localmente volumétrica si y solo si w es cerrada.

b) Si M es orientable , Γ es volumétrica si y solo si w es exacta

c) Γ conserva una densidad θ por transporte paralelo , si y solo si w es exacta.

Demostración:

El apartado a) es consecuencia de 4.3.3 (Cap I) y b) y c) consecuencia de 3.4.5 (Cap I) .

Por otra parte se tiene :

TEOREMA 2.2.5

La condición necesaria y suficinte para que toda conexión Γ localmente volumétrica definida sobre M , sea volumétrica , es que M sea orientable , y el primer grupo de cohomolgía de de Rham $H^1(M)$, sea identicamente nulo .

Demostración:

Es consecuencia inmediata de 2.6.10 (Cap I)

DEFINICION 2.2.6

Al único operador pseudo-divergencia que existe compatible con la conexión Γ, se denotará por div_Γ , y se le denominará operador pseudo-divergencia asociado a la conexión Γ .

Nótese que en virtud de la definición 2.5.1 (Cap I) , es posible para conexiones localmente volumétricas transportar formas de volumen a lo largo de curvas continuas .

3 . <u>Conexiones simetricas con tensor de Ricci simétrico</u>

En este parágrafo se supondrá que la conexión Γ es simétrica . Demmostraremos que la condición necesaria y suficiente para que la conexión Γ sea localmente volumétrica es que su tensor de Ricci sea simetrico . (Las referencias son [6] y [11])

2.3.1 Preeliminares

El tensor R de curvatura de la conexión Γ, viene definido por $R(X,Y)Z = \nabla_X\nabla_Y Z - \nabla_Y\nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]}(Z)$, para $X,Y,Z \in \mathfrak{X}(M)$.

Se demuestra que R es un tensor , y por tanto su valor en un punto m de M , solo depende de los valores de X , Y , Z en el punto m . Además $R(X,Y)Z=-R(Y,X)Z$. Si $S : U \longrightarrow L(U)$ es una sección local con $S = (e_1,\ldots,e_n)$, llamando $S^* w^i = \alpha^i$, $S^* w^i_j = \alpha^i_j$, se tiene para campos X , Y definidos en U : $R(X,Y)e_j = R^k_j(X,Y)e_k$, siendo $R^k_j(X,Y) = \alpha^k[R(X,Y)e_j]$, y R^k_j son formas de grado 2 definidas en U ,llamadas formas de curvatura subordinadas por la sección S respecto a la conexión Γ .

La segunda formula estructural de Cartan, establece que :

$R^i_j = d\alpha^i_j + \alpha^i_k \wedge \alpha^k_j$, y las formas R^i_j , pueden elevarse al fibrado definiendo $\bar{R}^i_j = dw^i_j + w^i_k \wedge w^k_j$, de manera que $S^* \bar{R}^i_j = R^i_j$.

Si $(U,\emptyset)$ es una carta de M y R^i_j son las formas de curvatura subordinadas en U por $S_\emptyset$, se tiene: $R\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right)\frac{\partial}{\partial x^k} = R^k_h\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right)\frac{\partial}{\partial x^h}$, y tomando $R^h_k\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right) = R^h_{ijk}$, queda : $R = R^h_{ijk}\, dx^i \otimes dx^j \otimes dx^k \otimes \frac{\partial}{\partial x^h}$, y $R^h_k = R^h_{ijk}\, dx^i \wedge dx^j$.

El tensor de curvatura , así "interpretado " suele denominarse tensor de Riemann .

2.3.2 Contracciones del tensor de Riemann.

Si $(U,\emptyset)$ es una carta de M en donde el tensor de Riemann viene representado por $R = R^h_{ijk}\, dx^i \otimes dx^j \otimes dx^k \otimes \frac{\partial}{\partial x^h}$, se estudiarán todas sus posibles contracciones :

a) $tr_1^1 R = R^i_{ijk}\, dx^j \otimes dx^k = -tr_2^1 R = -R^j_{ijk}\, dx^i \otimes dx^k$ (ya que $R^h_{ijk} = -R^h_{jik}$) , dicha contracción representa para cada $m \in U$, la aplicación bilineal de $T_m(M) \times T_m(M)$ en $\mathbb{R}$, que hace corresponder a cada $(X_m, Y_m) \in T_m(M) \times T_m(M)$, la traza de la aplicación lineal : $R(X_m\, ,\, .\,)Y_m : T_m(M) \longrightarrow T_m(M)$, que se denota por $K(X_m, Y_m)$, y el tensor $K = R^i_{ijk}\, dx^j\ dx^k$. se denomina tensor de Ricci.

b) $tr_3^1 R = R^k_{ijk}\, dx^i\ dx^j$ representa la 2-forma que para cada $m \in M$ aplica la pareja (X_m, Y_m) en la traza de la aplicación lineal : $R(X_m, Y_m)\ .\ : T_m(M) \longrightarrow T_m(M)$. A dicho tensor se le denomina traza del tensor de curvatura y se denota por tr R . Observese que $trR = R_1^1 + \dots + R_n^n$.

PROPOSICION 2.3.3

La condición necesária y suficiente para que el tensor K de curvatura de Ricci sea simétrico, es que el tensor trR sea identicamente nulo .

Demostración:

Para una conexión simétrica es válida la primera identidad de Bianchi $R(X,Y)Z + R(Z,X)Y + R(Y,Z)X = 0$, y ésta identidad puede escribirse en coordenadas $\emptyset$ como $R^h_{ijk} + R^h_{kji} + R^h_{jki} = 0$. Sean $X = X^i \dfrac{\partial}{\partial x^i}$ $Y = Y^j \dfrac{\partial}{\partial x^j}$ campos diferenciables definidos sobre U , entonces :

$$K(X,Y) - K(Y,X) + trR(X,Y) = R^i_{ijk} X^j Y^k - R^i_{ijk} Y^j X^k + R^k_{ijk} X^i Y^j =$$

$$= R^i_{ijk} X^j Y^k - R^i_{ikj} X^j Y^k + R^i_{jki} X^j Y^k = \left[R^i_{ijk} + R^i_{kij} + R^i_{jki}\right] X^j Y^k = 0$$

con lo que queda probada la proposición .

TEOREMA 2.3.4

La condición necesária y suficiente para que la conexión Γ sea localmente volumétrica, es que su tensor K de curvatura de Ricci sea simetrico.

Demostración :

En primer lugar una observación : tomando $\overline{trR} = \bar{R}^1_1 + \ldots + \bar{R}^n_n$, se tiene , para toda sección local $S : U \longrightarrow L(U)$, $S^*(\overline{trR}) = trR$. Por otra parte como $\bar{R}^i_j = dw^i_j + w^i_k \wedge w^k_j$, se tendrá $\overline{trR} = dw^i_i + w^i_k \wedge w^k_i = dw$ (1) siendo w la traza de la conexión . Utilizando la igualdad (1) y 2.3.3 (Cap I) se prueba inmediatamente la equivalencia entre las siguientes afirmaciones :

i) El tensor de Ricci K, es simétrico

ii) $trR = 0$, para toda sección local S

iii) $\overline{trR} = 0$

iv) w es cerrada

v) Γ es localmente volumétrica.

En efecto : i)$\Leftrightarrow$ii) por la proposición 2.2.3 (Cap I) . ii)$\Rightarrow$iii) por 3.2.3 (Cap I) , ya que la 1-forma 0 en L(M) y $\overline{trR}$ verifican ,

$S^*_\phi\, 0 = S^*_\phi(\overline{trR}) = trR = 0$ para toda carta (U,ϕ) . iii)$\Rightarrow$ii) es trivial . iii)$\Leftrightarrow$iv) por la igualdad (1) de la demostración; y iv)$\Leftrightarrow$v) por 2.2.4 (capII)

SECCION 3

SPRAYS Y DIVERGENCIA

1. Sprays equivalentes .

DEFINICIÓN 3.1.1

Dados $\mathcal{L}$ y $\bar{\mathcal{L}}$ dos sprays sobre M , se dice que son **equivalentes** , si para cada curva integral $\sigma(t)$ de $\mathcal{L}$, existe un cambio de parámetro $t = t(s)$ de forma que $\bar{\sigma}(s) = \sigma(t(s))$ es curva integral de $\bar{\mathcal{L}}$.

Geométricamente esto significa que las "imagenes " de las curvas integrales de $\mathcal{L}$ y $\bar{\mathcal{L}}$ coinciden .

NOTA : Una curva constante (que se reduce a un punto) es , estrictamente hablando, una curva integral de cualquier spray . No obstante, en este parágrafo, para evitar situaciones triviales , y reiteraciones innecesárias , no será considerada como tal.

La relación anterior define claramente una relación de equivalencia . Este parágrafo está dedicado a establecer criterios prácticos que permitan decidir , si dos sprays están ó no en la misma clase.

LEMA 3.1.2

Si (U,ϕ) es una carta de M , se define en coordenadas $T\phi = (x^1,\dots x^n,\dot{x}^1,\dots,\dot{x}^n)$ el campo ϑ_ϕ en $T(U)$ por la identidad :

$\vartheta_\phi = \dot{x}^i \frac{\partial}{\partial \dot{x}^i}$. Si (U,ψ) es otra carta con $T\psi = (y^1,\dots y^n,\dot{y}^1,\dots \dot{y}^n)$ entonces $\vartheta_\phi = \vartheta_\psi$.

Demostración:

Si $x^i = x^i(y^1,\dots,y^n)$ entonces $\dot{x}^j = \dot{y}^i \frac{\partial x^j}{\partial y^i}$, y por tanto $\dot{y}^k = \dot{x}^j \frac{\partial y^k}{\partial x^j}$,

se tiene entonces : $\dot{x}^j \frac{\partial}{\partial \dot{x}^j} = \dot{y}^i \frac{\partial x^j}{\partial y^i} \frac{\partial \dot{y}^k}{\partial \dot{x}^j} \frac{\partial}{\partial \dot{y}^k} = \dot{y}^i \frac{\partial x^j}{\partial y^i} \frac{\partial y^k}{\partial x^j} \frac{\partial}{\partial \dot{y}^k} =$

$= \dot{y}^i \delta_i^k \frac{\partial}{\partial \dot{y}^k} = \dot{y}^i \frac{\partial}{\partial \dot{y}^i}$, como queriamos demostrar.

DEFINICION 3.1.3

El campo ϑ en T(M) definido por $\vartheta/U = \dot{x}^i \frac{\partial}{\partial \dot{x}^i}$, para cada carta $(U,\emptyset)$, se denomina campo de Liouville .

Si α es una 1-forma en M se denotará por $\alpha\vartheta$ el campo definido en T(M) por $(\alpha\vartheta)(X_m) = \alpha(X_m)\vartheta(X_m)$, para $X_m \in T(M)$. En coordenadas $T\emptyset$ se puede escribir : $\alpha\vartheta = \alpha_i \dot{x}^i \dot{x}^k \frac{\partial}{\partial \dot{x}^k}$, si $\alpha = \alpha_i dx^i$.

PROPOSICION 3.1.4

Sea $\mathcal{E}$ un spray sobre M y α una 1-forma en M , entonces el campo: $\bar{\mathcal{E}} = \mathcal{E} + \alpha\vartheta$ define un spray sobre M que es equivalente a $\mathcal{E}$.

Para la demostración de la prposición se requiere del siguiente lema :

LEMA 3.1.5

Sea $\mathcal{E}$ un spray que respecto a una carta $(U,\emptyset)$ adopta una expresión de la forma : $\mathcal{E} = \dot{x}^i \frac{\partial}{\partial x^i} - \Gamma_{ij}^k (x)\dot{x}^i\dot{x}^j \frac{\partial}{\partial \dot{x}^k}$ (véase 1.7.3 (cap II))

Si $x^i = x^i(t)$ es una curva integral de $\mathcal{E}$ parametrizada respecto a t , en un intervalo que contiene al origen , y $s = s(t)$ es un cámbio de parámetro ($t=t(s)$, es su aplicación inversa) , entonces : $x^k = x^k(t(s)) = x^k(s)$, verifica las relaciones ,

$$\frac{d^2x^k}{ds^2} = - \Gamma^k_{ij}\frac{dx^i}{ds}\frac{dx^j}{ds} + \left(\frac{d^2t}{ds^2}\frac{ds}{dt}\right)\frac{dx^k}{ds} \quad .$$

Demostración :

Se tiene $\frac{dx^k}{ds} = \frac{dx^k}{dt}\frac{dt}{ds}$ y $\frac{d}{ds}\frac{dx^k}{ds} = \frac{d}{ds}\left(\frac{dx^k}{dt}\right)\frac{dt}{ds} + \frac{dx^k}{dt}\frac{d^2t}{ds^2}$, con lo

que $\frac{d^2x^k}{ds^2} = \frac{d^2x^k}{dt^2}\frac{dt}{ds}\frac{dt}{ds} + \frac{dx^k}{ds}\frac{ds}{dt}\frac{d^2t}{ds^2}$, y teniendo en cuenta que

$\frac{d^2x^k}{dt^2} = - \Gamma^k_{ij}\frac{dx^i}{dt}\frac{dx^j}{dt}$ queda , $\frac{d^2x^k}{ds^2} = - \Gamma^k_{ij}\left(\frac{dx^i}{dt}\frac{dt}{ds}\right)\left(\frac{dx^j}{dt}\right)\frac{dt}{ds} +$

$+ \frac{d^2t}{ds^2}\frac{ds}{dt}\frac{dx^k}{ds} = - \Gamma^k_{ij}\frac{dx^i}{ds}\frac{dx^j}{ds} + \frac{d^2t}{ds^2}\frac{ds}{dt}\frac{dx^k}{ds}$, como queríamos demostrar.

Demostración de 3.1.4 :

Sea (U,ϕ) una carta de M , $\phi=(x^1,\dots,x^n)$ y supóngase $\alpha = \alpha_i dx^i$ y $\mathcal{E} = \dot{x}^i\frac{\partial}{\partial x^i} - \Gamma^k_{ij}\dot{x}^i\dot{x}^j\frac{\partial}{\partial \dot{x}^k}$. El campo $\mathcal{E}+\alpha\vartheta = \bar{\mathcal{E}}$ tendrá por sus ecuaciones en coordenadas $T\phi$, $\mathcal{E}+\alpha\vartheta = \dot{x}^i\frac{\partial}{\partial x^i} - \Gamma^k_{ij}\dot{x}^i\dot{x}^j\frac{\partial}{\partial \dot{x}^k} + \alpha_i\dot{x}^i\dot{x}^k\frac{\partial}{\partial \dot{x}^k}$, y por 1.7.3 , es también un spray .

Las curvas integrales de $\bar{\mathcal{E}}$ deben satisfacer por tanto en U ecuaciones del tipo : $\frac{d^2x^k}{ds^2} = - \Gamma^k_{ij}\frac{dx^i}{ds}\frac{dx^j}{ds} + \alpha_i\frac{dx^i}{ds}\frac{dx^k}{ds}$.

Si $x^k = x^k(t)$ son las ecuaciones de una curva integral $,\sigma(t)$, de $\mathcal{E}$ (cuyo intervalo de parametrización contiene al origen) , se va a comprobar que las ecuaciones $x^k = x^k(s)$, definidas por el cámbio de parámetro $s = s(t) = \int_0^t (\exp\int_0^r -\alpha)dt$ (en donde la integral , $\int_0^r -\alpha$ está tomada a lo largo de σ) determinan una curva $\bar{\sigma}(s) = = \sigma(t(s))$, que es curva integral de $\bar{\mathcal{E}}$. Obsérvese en primer lugar que $\frac{ds}{dt} = \exp\int_0^t (-\alpha) > 0 \quad \forall t$, por lo que $s = s(t)$ define realmente la ecuación de un cambio de parámetro (se denota como es usual $t=t(s)$, la aplicación inversa) . Se tendrá entonces : $\frac{dt}{ds} = \exp\int_0^{t(s)} \alpha$, y por tanto

$$\frac{d^2t}{ds^2} = \frac{d}{ds} \exp\int_0^{t(s)} \alpha_i \frac{dx^i}{dt}\, dt =$$

$$= \frac{dt}{ds}\left(\exp\int_0^{t(s)} \alpha_i \frac{dx^i}{dt}\, dt\right) \frac{d}{dt}\int_0^t \alpha_i \frac{dx^i}{dt}\, dt = \left(\frac{dt}{ds}\right)^2 \alpha_i \frac{dx^i}{dt} =$$

$$= \frac{dt}{ds}\,\alpha_i \frac{dx^i}{ds}$$, es decir $\frac{d^2t}{ds^2} = \frac{dt}{ds}\,\alpha_i \frac{dx^i}{ds}$.

Teniendo ahora en cuenta el Lema 3.1.5 antrior , se tiene :

$$\frac{d^2x^k}{ds^2} = -\Gamma_{ij}^k \frac{dx^i}{ds}\frac{dx^j}{ds} + \left(\frac{d^2t}{ds^2}\frac{ds}{dt}\right)\frac{dx^k}{ds} = -\Gamma_{ij}^k \frac{dx^i}{ds}\frac{dx^j}{ds} + \alpha_i \frac{dx^i}{ds}\frac{dx^k}{ds} ,$$

por lo que $\bar{\sigma}(s)$ es curva integral de $\bar{\mathcal{E}}$.

Se probará a continuación el recíproco de 3.1.4 .

PROPOSICION 3.1.6

Si $\mathcal{E}$ y $\bar{\mathcal{E}}$ son sprays equivalente s , existe una 1-forma α en M tal que $\bar{\mathcal{E}} = \mathcal{E} + \alpha\mathcal{V}$.

La demostración de 3.1.6 requiere del siguiente lema :

LEMA 3.1.7

Si F es una forma cuadrática (valorada en $\mathbb{R}$) definida sobre un espácio vectorial $\mathbb{E}$ de dimensión finita, y L es forma lineal en $\mathbb{E}$, tales que $F(x) = 0$ cuando $L(x) = 0$, entonces existe una forma lineal T , sobre E tal que $F(x) = L(x).T(x)$ para todo $x \in \mathbb{E}$.

Demostración :

Se eligirá primero una base $(u_1,\dots,u_n)$ en E , de manera que la expresión en coordenadas de L respecto a dicha base sea :

$L(x^1,\dots, x^n) = x^1$. La forma cuadrática F , se escribirá respecto a dichas coordenadas , $F(x^1,\dots,x^n) = \sum_{i,j} a_{ij}x^ix^j$ donde $a_{ij} = a_{ji} \in R$.

Por hipótesis $F(0,x^2,\dots,x^n) = \sum_{\substack{i>1\\ j>1}} a_{ij}x^ix^j = 0$ para cualquier $x^2,\dots,x^n$, lo cual implica que $a_{ij} = 0$ para $i > 1$, $j > 1$, por lo que queda:

$F(x^1,\dots,x^n)=a_{11}(x^1)^2 + 2a_{12}x^1x^2 \dots + 2a_{1n}x^1x^n =$

$= x^1(a_{11}x^1 + 2a_{12}x^2 + \dots + 2a_{1n}x^n)$ y la aplicación lineal T definida por $T(x^1,\dots,x^n) = a_{11}x^1 \; 2a_{12}x^2 + \dots + 2a_{1n}x^n$, verifica las condiciones requeridas .

Demostración de 3.1.6

Sea (U,ϕ) una carta de M , $\phi = (x^1,\dots,x^n)$ en donde $\mathcal{L}$ y $\bar{\mathcal{L}}$, se escriban de la forma :

$$\mathcal{L} = \dot{x}^i \frac{\partial}{\partial x^i} - \Gamma^k(x,\dot{x}) \frac{\partial}{\partial \dot{x}^k} \quad , \text{ siendo } \Gamma^k(x,x) = \Gamma^k_{ij} \dot{x}^i\dot{x}^j$$

$$\bar{\mathcal{L}} = \dot{x}^i \frac{\partial}{\partial x^i} - \bar{\Gamma}^k(x,x) \frac{\partial}{\partial \dot{x}^k} \quad , \text{ siendo } \bar{\Gamma}^k(x,x) = \bar{\Gamma}^k_{ij} x^ix^j$$

Si σ es una curva integral de $\mathcal{L}$ en U , de ecuaciones $x^i = x^i(t)$, se podrá determinar por hipótesis un cámbio de parámetro $s = s(t)$, $t=t(s)$ de manera que la curva $\bar{\sigma}(s) = \sigma(t(s))$, de ecuaciones $x^i=x^i(s)$ sea curva integral de $\bar{\mathcal{L}}$, es decir :

$\frac{d^2x^k}{ds^2} = -\bar{\Gamma}^k_{ij}\frac{dx^i}{ds}\frac{dx^j}{ds}$. Por otra parte en virtud de 3.1.5 (cap II) se

tiene : $\frac{d^2x^k}{ds^2} = -\Gamma^k_{ij}\frac{dx^i}{ds}\frac{dx^j}{ds} \quad (\frac{d^2t}{ds^2}\frac{1}{dt/ds})\frac{dx^k}{ds}$, y se puede escribir :

$$\left(\frac{d^2t}{ds^2}\frac{1}{dt/ds}\right)\frac{dx^k}{ds} = \left(\Gamma^k_{ij} - \bar{\Gamma}^k_{ij}\right)\frac{dx^i}{ds}\frac{dx^j}{ds} \qquad (1)$$

Esta expresión nos sugiere que la función homogénea de grado 2 respecto a $\dot{x}$, definida por $H^k(x,\dot{x}) = \Gamma^k(x,\dot{x}) - \bar{\Gamma}^k(x,\dot{x})$, se anula cuando $\dot{x}^k = 0$. Para probar esto (y otras cuestiones) se fija la siguiente notación : $(x_0,\dot{x}_0) = (x_0^1,\ldots,x_0^n,\dot{x}_0^1,\ldots,\dot{x}_0^n)\in T(U)$, siendo $\dot{x}_0 \neq 0$, y $\bar{\sigma}(s)$ es una curva integral de $\bar{\mathcal{L}}$ de ecuaciones $x^i = x^i(s)$ tal que $x^i(0) = x_0^i$, $\left.\frac{dx^i}{ds}\right|_{s=0} = \dot{x}_0^i$, y $t = t(s)$, $s = s(t)$, son las ecuaciones del cambio de parámetro que permiten pasar , de la curva integral $\bar{\sigma}(s)$ de $\bar{\mathcal{L}}$ a la curva integral $\sigma(t) = \bar{\sigma}(s(t))$ de $\mathcal{L}$; Entonces :

a) Si $\dot{x}_0^k = 0$, particularizando la igualdad (1) para $s = 0$, se obtiene $H^k(x_0,\dot{x}_0) = 0$; por el Lema 3.1.7 anterior se tendrá : $H^k(x,\dot{x}) = \dot{x}^k.h^k(x,\dot{x})$, siendo h^k una función lineal respecto a $\dot{x}$, y la ecuación (1) se puede escribir ahora :

$$\left(\frac{d^2t}{ds^2}\frac{1}{dt/ds}\right)\dot{x}^k(s) = \dot{x}^k(s).h^k(x(s),\dot{x}(s)) \qquad (2)$$

b) Cuando $\dot{x}_0^k \neq 0$, $\dot{x}_0^r \neq 0$ $(r \neq k)$, particularizando en (2) para $s = 0$, se tiene : $h^k(x_0,\dot{x}_0) = h^r(x_0,\dot{x}_0)$, y por tanto , se puede llamar $h(x,\dot{x})$ a la función (lineal respecto a $\dot{x}$) tal que $h(x_0,\dot{x}_0) = h^k(x_0,\dot{x}_0)$ cuando $\dot{x}_0^k \neq 0$, y la igualdad :

$$\frac{d^2t}{ds^2}\frac{1}{dt/ds} = h(x(s),\dot{x}(s)) \qquad (3)$$

es válida en un entorno de $s = 0$, cuando $\dot{x}_o \neq 0$. La función $h(x,x)$, puede escribirse de la forma : $h(x,\dot{x}) = \alpha_i x^i$, para ciertas funciones $\alpha_i : U \longrightarrow \mathbb{R}$. Recapitulando, se tiene que las curvas integrales de $\bar{\mathcal{L}}$ han de satisfacer ecuaciones del tipo:

$$\frac{d^2x^k}{ds^2} = - \Gamma^k_{ij} \frac{dx^i}{ds}\frac{dx^j}{ds} + \alpha_i \frac{dx^i}{ds}\frac{dx^k}{ds}$$

ó lo que es lo mismo, la igualdad $\bar{\mathcal{L}} = \mathcal{L} + \alpha\, \vartheta$ es válida en $T(U)$, siendo $\alpha = \alpha_i dx^i$.

Finalmente la misma igualdad (3) nos muestra que la función $h: T(U) \longrightarrow \mathbb{R}$, es independiente de las coordenadas $\emptyset$ tomadas sobre U, ya que la ecuación $t = t(s)$ del cámbio de parámetro que hay que tomar para pasar de una curva integral $\sigma(t)$ de $\mathcal{L}$ a una curva integral $\bar{\sigma}(s) = \sigma(t(s))$ de $\bar{\mathcal{L}}$, es claramente independiente de las coordenadas $\emptyset$ tomadas sobre U. Puede definirse globalmente h en T(M), tomando:

$$h(X_m) = \frac{dt}{ds^2}\frac{1}{dt/ds}\Big|_{s=o}$$

siendo $t = t(s)$ la ecuación del cambio de parámetro, que hace pasar de $\bar{\sigma}(s)$, curva integral de $\bar{\mathcal{L}}$ con $\frac{d\bar{\sigma}}{ds}\Big|_{s=o} = X_m$, a

$\sigma(t) = \bar{\sigma}(s(t))$ curva integral de $\mathcal{L}$.

La aplicación $h: T(M) \longrightarrow \mathbb{R}$ (lineal en las fibras $T_m(M)$), interpretada como una 1-forma α sobre M, permite escribir la igualdad: $\bar{\mathcal{L}} = \mathcal{L} + \alpha\, \vartheta$ con validez sobre toda la variedad M.

2. Operador pseudo-divergencia asociado a un spray

DEFINICIÓN 3.2.1

Dado $\mathcal{L}$ spray sobre M , se llamará operador pseudo-divergencia $\mathrm{div}_{\mathcal{L}}$, asociado a $\mathcal{L}$, al operador div_{Γ} asociado a la única conexión simétrica Γ que tiene a $\mathcal{L}$ por spray de geodésicas

Este parágrafo está consagrado a la demostración del siguiente teorema:

TEOREMA 3.2.2

Dado un spray $\mathcal{L}$ sobre M , y un operador pseudo-divergencia div , existe un único spray $\bar{\mathcal{L}}$ equivalente al spray $\mathcal{L}$, y tal que su operador pseudo-divergencia $\mathrm{div}_{\bar{\mathcal{L}}}$ asociado , coincide con div .

Por razones de tipo técnico , se probará primero la unicidad , por medio de la siguiente proposición :

PROPOSICION 3.2.3

Dado $\mathcal{L}$ spray sobre M y div operador pseudo-divergencia , supongase que $\bar{\mathcal{L}}$ y $\mathcal{L}'$ son sprays sobre M equivalentes a $\mathcal{L}$ cuyo operador pseudo-divergencia asociado es div . Entonces $\bar{\mathcal{L}} = \mathcal{L}'$.

Demostración:

Localmente en terminos de una carta (U,ϕ) $\phi = (x^1,\dots,x^n)$ las curvas integrales de $\bar{\mathcal{L}}$ satisfacen ecuaciones de la forma :

$$\frac{d^2x^k}{dt^2} = -\bar{\Gamma}^k_{ij}\frac{dx^i}{dt}\frac{dx^j}{dt}$$

por ser $\bar{\mathcal{L}}$ equivalente a $\mathcal{L}$, en virtud de 3.1.6 (capII) , existe β

1-forma en M , de manera que las curvas integrales de $\mathcal{E}$ contenidas en U satisfacen en coordenadas ϕ , ecuaciones de la forma :

$$\frac{d^2x^k}{ds^2} = -\bar{\Gamma}_{ij}^k \frac{dx^i}{ds}\frac{dx^j}{ds} + \beta_i \frac{dx^i}{ds}\frac{dx^k}{ds} \quad , \text{ siendo } \beta = \beta_i dx^i \qquad (1)$$

Sea $\bar{\Gamma}$ la conexión simétrica asociada al spray $\mathcal{E}$, cuya derivada covariante denotamos por $\bar{\nabla}$, y sea $\tilde{\Gamma}$ la conexión cuya derivada covariante $\tilde{\nabla}$ viene definida por la ecuación:(X e Y , siempre son campos en M)

$$\tilde{\nabla}_X Y = \bar{\nabla}_X Y - \beta(X)Y \qquad (2)$$

obsérvese que : $\tilde{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^j} = \tilde{\Gamma}_{ij}^k \frac{\partial}{\partial x^k} = \bar{\Gamma}_{ij}^k \frac{\partial}{\partial x^k} - \beta_i \frac{\partial}{\partial x^j}$, y por tanto $\tilde{\Gamma}_{ij}^k = \bar{\Gamma}_{ij}^k - \delta_j^k \beta_i$, y las geodésicas de $\tilde{\Gamma}$ satisfacen ecuaciones :

$$\frac{d^2x^k}{ds^2} = -\tilde{\Gamma}_{ij}^k \frac{dx^i}{ds}\frac{dx^j}{ds} = -\bar{\Gamma}_{ij}^k \frac{dx^i}{ds}\frac{dx^j}{ds} + \beta_i \frac{dx^i}{ds}\frac{dx^k}{ds} \quad ,$$

y por (1) su spray de geodésicas coincide con $\mathcal{E}$.

Si Γ es la única conexión sin torsión con spray $\mathcal{E}$ entonces (véase 1.7.7 (Cap II)) se tiene : $\tilde{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + \frac{1}{2}\tilde{T}(X,Y)$ (3)

siendo $\tilde{T}$ la torsión de la conexión $\tilde{\Gamma}$, y por (2) y(3) se llega a:

$$\bar{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + \frac{1}{2}\tilde{T}(X,Y) + \beta(X)(Y) \qquad (4)$$

y la torsión $\bar{T}$ de la conexión $\bar{\Gamma}$ podrá expresarse de la forma :

$\bar{T}(X,Y) = \bar{\nabla}_X Y - \bar{\nabla}_Y X - [X,Y] = \tilde{T}(X,Y) + \beta(X)Y - \beta(Y)X$, ya que $T(X,Y) = 0$. Como por hipótesis es $\bar{T} = 0$ se tiene :

$\tilde{T}(X,Y) = \beta(Y)X - \beta(X)Y$, y de esta manera (4) puede escribirse :

$\bar{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + \frac{1}{2}(\beta(Y)X - \beta(X)Y) + \beta(X)Y$ es decir :

$$\bar{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + (\tfrac{1}{2}\beta)(X)Y + (\tfrac{1}{2}\beta)(Y)X \qquad (5)$$

El siguiente lema probará por ota parte que la 1-forma β queda totalmente determinada por el operador pseudo-divergencia div , con lo que queda garantizada la unicidad del spray .

LEMA 3.2.4

Sea Γ una conexión de spray $\mathcal{P}$ y div un operador pseudo-divergencia sobre M . Existe entonces una única 1-forma γ sobre M de manera que la conexión (simetrica) $\bar{\Gamma}$ cuya derivada covariante $\bar{\nabla}$ viene definida por la fórmula: $\bar{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + \gamma(Y)X + \gamma(X)Y$, tenga como operador pseudo-divergencia asociado el operador div.

Demostración:

Sea α la 1-forma en M tal que div = $\mathrm{div}_\Gamma + \alpha$ y sea (U,ϕ) una carta de M con $\phi = (x^1,\dots,x^n)$, y Γ_{ij}^k , $\bar{\Gamma}_{ij}^k$ los símbolos respectivos de Christoffer de las conexiones Γ y $\bar{\Gamma}$, tomando $\gamma = \gamma_i dx^i$, se tiene : $\bar{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^j} = \bar{\Gamma}_{ij}^k \frac{\partial}{\partial x^k} = \Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial x^k} + \gamma_j \frac{\partial}{\partial x^i} + \gamma_i \frac{\partial}{\partial x^j}$, con lo que :

$\bar{\Gamma}_{ij}^k = \Gamma_{ij}^k + \delta_i^k \gamma_j + \delta_j^k \gamma_i$ y por tanto $\bar{\Gamma}_{ij}^j = \Gamma_{ij}^j + \delta_i^j \gamma_j + \delta_j^j \gamma_i =$

$= \Gamma_{ij}^j + \gamma_i + n\gamma_i = \Gamma_{ij}^j + (n+1)\gamma_i$.

Si w y $\bar{w}$ son las trazas respectivas de Γ y $\bar{\Gamma}$, se tendrá (véase 1.5.2 (cap II)) $S_\phi^* \bar{w} = \bar{\Gamma}_{ij}^j dx^i = \Gamma_{ij}^j dx^i + (n+1)\gamma = S_\phi^* w + (n+1)\gamma$

y $\operatorname{div}_{\bar{\Gamma}} = \operatorname{div}_{\emptyset} + S^{*}_{\emptyset}\,\bar{w} = (\operatorname{div}_{\emptyset} + S^{*}_{\emptyset}\, w\ ) + (n+1)\gamma = \operatorname{div}_{\Gamma} + (n+1)\gamma,$

si se impone $\operatorname{div}_{\bar{\Gamma}} = \operatorname{div}$ queda, $\operatorname{div}_{\bar{\Gamma}} = \operatorname{div}_{\Gamma} + (n+1)\gamma = \operatorname{div} = \operatorname{div}_{\Gamma} + \alpha$

luego $\alpha = (n+1)\gamma$ y $\gamma = (\frac{1}{n\;1})\alpha$ (1)

La fórmula (1) de 3.2.4 y la (5) de 3.2.3 , permiten completar la demostración del teorema 3.2.2

Demostración de 3.2.2 :

Sean Γ y $\bar{\Gamma}$ las conexiones simétricas asociadas a $\mathcal{L}$ y $\bar{\mathcal{L}}$ respectivamente y supóngase $\operatorname{div} = \operatorname{div}_{\Gamma} + \alpha$, para cierta 1-forma α en M.

La definición de la conexión $\bar{\Gamma}$ viene ya condicionada. En efecto: por la fórmula (5) de la demostración de 3,2.3 es

$\bar{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + (\frac{1}{2}\beta)(X)Y + (\frac{1}{2}\beta)(Y)X$, siendo β la 1forma en M tal que $\mathcal{L} = \bar{\mathcal{L}} + \beta\,\vartheta$, y por la fórmula (1) del lema anterior es

$\frac{1}{2}\beta = \frac{1}{n+1}\alpha$, es decir $\beta = \frac{2}{n+1}\alpha$, con lo que el teorema será cierto , si y solo si la conexión definida por :

$$\bar{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + \frac{1}{n+1}\left[\alpha(X)Y + \alpha(Y)X\right]$$

tiene un spray de geodésicas $\bar{\mathcal{L}}$, que satisface las condiciones del enunciado. Por el lema 3.2.4 es claro que $\operatorname{div}_{\bar{\Gamma}} = \operatorname{div}$ y por la demostración de la proposición 3.2.3 se vé que $\bar{\mathcal{L}} = \mathcal{L} - \frac{2}{n\;1}\alpha\,\vartheta$, y por tanto $\bar{\mathcal{L}}$ y $\mathcal{L}$ son equivalentes .

Se concluye esta sección con el siguiente resultado que es consecuencia inmediata del teorema 3.2.2

COROLARIO 3.2.5

La condicióm necesária y suficiente para que dos conexiones simétricas con sprays de geodésicas equivalentes coincidan , es que cóincidan sus operadores pseudo-divergencia asociados.

SECCION 4

CONEXIONES g -CONFORMES.

1. Preeliminares.

DEFINICION 4.1.1

Sea g una métrica riemanniana sobre M y Γ una conexión. Se dira que Γ es una conexión g-conforme (ó simplemente conforme, si se sobreentiende g) si se satisface la siguiente condición:
Para toda curva $\sigma:[a,b]\longrightarrow M$ diferenciable a trozos y todo par X_m, $Y_m \in T_mM$ $(m = \sigma(a))$, si $X_m(t)$, $Y_m(t)$ representan los transportes paralelos respecto a Γ de X_m e Y_m respectivamente, a lo largo de σ, se tiene que la función:

$\dfrac{\langle X_m(t), Y_m(t)\rangle}{\|X_m(t)\|\ \|Y_m(t)\|}$ es una función constante, donde hemos denotado a

$g(X,Y)$ por $\langle X,Y\rangle$ y $\|X\| = \sqrt{\langle X,X\rangle}$.

En otros términos, la conexión Γ conserva el angulo entre los vectores que se desplazan Γ-paralelamente.

DEFINICION 4.1.2

Una conexión Γ se dira métrica si conserva una métrica riemanniana por transporte paralelo. Si g es una métrica riemanniana se llamará conexión riemanniana asociada a g, a la unica conexión métrica y simetrica Γ, respecto a g .

Mas adelante se tendrá en cuenta el siguiente resultado.

PROPOSICION 4.1.3

Dado un tensor T de torsión y una métrica Riemanniana g sobre M, existe una única conexión g-métrica con torsión T, (cuya demostración puede verse en [9])

4.1.3 NOTACION

En el resto de la sección se considerará definida una métrica Riemanniana g sobre M cuya actuación se denotará en la forma $g(X,Y) = \langle X,Y \rangle$ para $X,Y \in \mathfrak{X}(M)$ y se escribirá frecuentemente $\langle X,Y \rangle_m$ en lugar de $\langle X(m),Y(m) \rangle$.

2. Construción de conexiones conformes.

En este parágrafo se obtendrá un procedimiento para construir todas las conexiones conformes respecto a una métrica riemanniana dada sobre la variedad. Se necesita previamente la siguiente proposición.

PROPOSICION 4.2.1

Sea Γ una conexión sobre M y α una 1-forma, existe entonces una única conexión $\bar{\Gamma}$ verificando la condición (para todo t)

$$(\sigma X_m)_{\bar{\Gamma}}(t) = (\exp\int_a^t -\alpha)(\sigma X_m)_{\Gamma}(t) \qquad (1)$$

en donde la integral $\int_a^t -\alpha$ esta tomada a lo largo de una curva $\sigma : [a,b] \longrightarrow M$ diferenciable a trozos con $\sigma(a) = m$ y $X_m \in T_m M$.

Por otra parte, la derivada covariante de la conexión $\bar{\Gamma}$ viene definida por la fórmula:

$$\bar{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + \alpha(X)Y \text{ para } X,Y \in \mathfrak{X}(M) \qquad (2)$$

en donde ∇ representa la derivada covariante de la conexión Γ .

Demostración:

Comenzaremos demostrando la unicidad:

Sea $\bar{\Gamma}$ una conexión en M que verifica la condición (1) de la proposición, y sea $X_m \in T_m M$. Si σ: $I_\varepsilon = (-\varepsilon, \varepsilon) \longrightarrow$ M es una curva tal que

$\sigma(0) = m$ y $\left.\frac{d\sigma}{dt}\right|_{t=o} = X_m$ y τ_o^t, $\bar{\tau}_o^t$ (aplicaciones de $T_{\sigma(t)}M \longrightarrow T_mM$) denotan los transportes subordinados respectivamente por Γ y $\bar{\Gamma}$ (vease notación introducida en 1.6.1), para cualquier $Y \in \mathfrak{X}(M)$ se tiene por (1):

$$\bar{\tau}_o^t(Y(\sigma(t))) = (\exp\int_t^o -\alpha)\tau_o^t(Y(\sigma(t))) \quad \text{es decir}$$

$$\bar{\tau}_o^t(Y(\sigma(t))) = (\exp\int_o^t \alpha)\tau_o^t(Y(\sigma(t))) \quad \text{y por tanto}$$

$$\frac{d}{dt}(\bar{\tau}_o^t(Y(\sigma(t))) = \frac{d}{dt}\left[\exp\int_o^t \alpha\right]\tau_o^t(Y(\sigma(t)))+(\exp\int_o^t \alpha)\frac{d}{dt}\tau_o^t(Y(\sigma(t))$$

Aplicando ahora el lema 1.6.2, la igualdad anterior se convierte para $t = 0$ en: $\bar{\nabla}_{X_m}Y = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=o}(\exp\int_o^t \alpha)Y(m) + \nabla_{X_m}Y$ (3)

y teniendo en cuenta que $\frac{d}{dt}(\exp\int_o^t \alpha) = \alpha(\frac{d\sigma}{dt})\exp\int_o^t \alpha$ y por tanto que $\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=o}(\exp\int_o^t \alpha) = \alpha(X_m)$, la expresión (3) se transforma en

$$\bar{\nabla}_{X_m}Y = \nabla_{X_m}Y + \alpha(X_m)Y(m).$$

Por tanto si la conexión $\bar{\Gamma}$ existe, su derivada covariante $\bar{\nabla}$ ha de estar definida por la fórmula:

$\bar{\nabla}_XY = \nabla_XY + \alpha(X)Y$ para $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$

Se comprueba inmediatamente que $\bar{\nabla}$ asi definida es una derivada covariante que subordina cierta conexión $\bar{\Gamma}$. Queda por ver que verifica la condición (1):

Sea $\sigma : [a,b] \longrightarrow M$, una curva diferenciable a trozos, y sea $X(t)$ un campo que se desplaza paralelamente a lo largo de σ respecto a la conexión Γ. Se probará que el campo (a lo largo de σ) definido por la ecuación:

$\bar{X}(t) = (\exp\int_a^t -\alpha)X(t)$ se desplaza paralelamente respecto a $\bar{\Gamma}$,

con lo que quedará concluida la demostración:

Si $F(t) = \exp\int_a^t -\alpha$ $(a \leq t \leq b)$ se tendrá $(\dot{\sigma} = \frac{d\sigma}{dt})$

$\bar{\nabla}_{\dot{\sigma}}\bar{X} = \bar{\nabla}_{\dot{\sigma}}(FX) = (L_{\dot{\sigma}}F)X + F(\bar{\nabla}_{\dot{\sigma}}X) = \frac{dF}{dt}X + F\alpha(\dot{\sigma})X$ ya que por

hipótesis es $\nabla_{\dot{\sigma}}X = 0$. Teniendo en cuenta que $\frac{dF}{dt} = -\alpha(\dot{\sigma})F$

queda $\bar{\nabla}_{\dot{\sigma}}\bar{X} = 0$ que es lo queriamos demostrar.

NOTACION 4.2.2

A la conexión $\bar{\Gamma}$ construida en la proposición anterior se la denotará por Γ_α.

PROPOSICION 4.2.3

Si Γ es una conexión conforme y α es una 1-forma en M, la conexión Γ_α es tambien conforme.

Demostración:

Sea $\sigma : [a,b] \longrightarrow M$, una curva diferenciable a trozos ($\sigma(a) = m$).

Para $X_m, Y_m \in T_mM$ se tiene:

$$\frac{\langle(\sigma X_m)_{\Gamma_\alpha}(t),(\sigma Y_m)_{\Gamma_\alpha}(t)\rangle}{\|(\sigma X_m)_{\Gamma_\alpha}(t)\| \ \|(\sigma Y_m)_{\Gamma_\alpha}(t)\|} = \frac{(\exp\int_a^t -\alpha)^2\langle(\sigma X_m)_\Gamma(t),(\sigma Y_m)_\Gamma(t)\rangle}{(\exp\int_a^t -\alpha)^2\|(\sigma X_m)_\Gamma(t)\| \ \|(\sigma Y_m)_\Gamma(t)\|} =$$

$$= \frac{\langle X_m, Y_m\rangle}{\|X_m\| \ \|Y_m\|}$$, ya que por hipótesis Γ es conforme.

La proposición 4.2.3, permite, a partir de una conexión métrica Γ, construir conexiones conformes Γ_α por medio de 1-formas α en M; Se va a establecer más adelante, que por este procedimiento pueden construirse, todas las conexiones conformes y para ello son necesarias algunas consideraciones previas:

La métrica g subordina de forma natural sobre M una densidad θ definida por las condiciones:

i) $\theta(u) = 1$, si $u = (u_1, \ldots, u_n)$ es base ortonormal.

ii) $\theta(ua) = \theta(u)|\det a|$ para $u \in L(M)$ $a \in GL_n$.

Obviamente, si Γ es una conexión métrica entonces $\mathrm{div}_\Gamma = \mathrm{div}_\theta$.

Conservando esta notación se demostrará el siguiente lema:

LEMA 4.2.4

Si Γ es una conexión conforme y $\mathrm{div}_\Gamma = \mathrm{div}_\theta$, entonces Γ es conexión métrica.

Demostración:

Sea $m \in M$ y $\sigma : [0,1] \longrightarrow M$ un lazo (diferenciable a trozos) por m. La aplicación $\tau_1^0 : T_m M \longrightarrow T_m M$ subordinada por el transporte paralelo respecto a Γ es un isomorfismo lineal, que por hipótesis conserva los angulos entre los vectores, por tanto si $u = (u_1, \ldots, u_n)$ es una base ortonormal en $T_m M$ y $u(t) = (u_1(t), \ldots, u_n(t))$ denota el transporte de u a lo largo de σ (respecto a Γ), existe $v = (v_1, \ldots, v_n)$ base ortonormal de $T_m M$ y $\lambda \neq 0$ tal que $\lambda v = u(1)$, siendo $\lambda v = (\lambda v_1, \ldots, \lambda v_n)$. Por otra parte, si Ω_m es la forma de volumen en $T_m M$ tal que $\Omega_m(u) = 1$ y $\Omega_m(t)$ denota el transporte (respecto a Γ) de Ω_m a lo largo de σ se tendrá $\Omega_m(t)(u(t)) = 1$ para todo $t \in [0,1]$, en particular para $t = 1$ se tiene $1 = \Omega_m(1)(u(1)) = $
$= \Omega_m(1)(\lambda v) = \lambda^n \Omega_m(1)(v)$ y por ser $\mathrm{div}_\theta = \mathrm{div}_\Gamma$ se tendrá $|\Omega_m(1)(v)| = \theta(v) = 1$ con lo que $1 = \pm \lambda^n$ es decir $1 = |\lambda|$ y

claramente Γ es entonces conexión métrica.

PROPOSICION 4.2.5

Si $\bar{\Gamma}$ es una conexión conforme, existe Γ conexión métrica y α, 1-forma en M, tales que $\bar{\Gamma} = \Gamma_\alpha$.

Demostración:

Sea θ la densidad canónicamente subordinada por g , y sea div el operador divergencia subordinado por la conexión $\bar{\Gamma}$. Supongase div = $\mathrm{div}_\theta + \beta$ para cierta 1-forma β definida en M, y sea finalmente Γ, la conexión cuya derivada covariante viene definida por $\nabla_X Y = \bar{\nabla}_X Y - \alpha(X)Y$ donde α es una 1-forma que habremos de determinar imponiendo la condición $\mathrm{div}_\Gamma = \mathrm{div}_\theta$. Por la proposición 4.2.3 y el lema 4.2.4, la determinación de α concluye esta demostración. Si $\sigma : I \longrightarrow M$, es una curva diferenciable a trozos con $o \in I$ intervalo de $\mathbb{R}$ y $\sigma(o) = m$, entonces se tiene por 4.2.1

$\tau^o_t(X_m) = (\exp\int_o^t \alpha\ )\bar{\tau}^o_t(X_m)$ donde $X_m \in T_m M$ y τ^o_t, $\bar{\tau}^o_t$ denotan los transportes a lo largo de σ respecto a las conexiones Γ y $\bar{\Gamma}$ respectivamente, y para Ω_m forma de volumen en $T_m M$ se tiene

$$\tau^o_t(\Omega_m) = \left(\exp\int_o^t -\alpha\right)^n \bar{\tau}^o_t(\Omega_m) \quad \text{y}$$

$$\bar{\tau}^o_t(\Omega_m) = (\exp\int_o^t \beta\ )(\sigma\Omega_m)_\theta(t) \quad \text{por 2.6.9(cap.I)} \quad \text{con lo que}$$

$$\tau^o_t(\Omega_m) = (\exp\int_o^t -\alpha\ )^n(\exp\int_o^t \beta\ )(\sigma\Omega_m)_\theta(t)$$

Como es necesario que $\tau^o_t(\Omega_m)$ sea igual a $(\sigma\Omega_m)_\theta(t)$ se tendrá

$(\exp\int_o^t -\alpha\ )^n . \exp\int_o^t \beta = \exp\int_o^t (-n\alpha + \beta\ ) = 1$ ó lo que es lo mismo

$\int_0^t (-n\alpha+\beta) = 0$. Como esto se verifica para toda curva σ diferenciable a trozos con origen en el punto m, se concluye que $\beta - n\alpha = 0$ ó bien $\alpha = \frac{1}{n}\beta$.

3. El Spray de una conexión conforme.

Como consecuencia de los resultados obtenidos en §2 anterior, se van a estudiar ciertas conclusiones relativas al Spray de geodesicas de una conexión conforme.

PROPOSICION 4.3.1

El Spray de geodesicas de una conexión conforme $\bar{\Gamma}$ es equivalente al de alguna conexión métrica Γ.

Demostración:

Por la proposición 4.2.5 existe Γ conexión métrica y α 1-forma en M de manera que $\bar{\Gamma} = \Gamma_\alpha$. Si $\bar{\nabla}$ y ∇ representan las derivadas covariantes de $\bar{\Gamma}$ y Γ respectivamente, entonces $\bar{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + \alpha(X)Y$, y respecto a una carta (U,ϕ) las geodesicas de $\bar{\Gamma}$ han de satisfacer las ecuaciones $\frac{d^2x^k}{dt^2} = -\Gamma^k_{ij}\frac{dx^i}{dt}\frac{dx^j}{dt} - \alpha_i\frac{dx^i}{dt}\frac{dx^k}{dt}$ siendo $\alpha = \alpha_i dx^i$ y Γ^k_{ij} los simbolos de Christoffer de la conexión Γ respecto a la carta (U,ϕ). Si $\mathcal{E}$ y $\bar{\mathcal{E}}$ son los Sprays de geodésicas de Γ y $\bar{\Gamma}$ respectivamente se tendrá, $\bar{\mathcal{E}} = \mathcal{E} - \alpha\vartheta$ y por la proposición 3.1.4 ambos Sprays son equivalentes.

Por otra parte se tiene:

PROPOSICION 4.3.2

Si Γ es una conexión métrica y $\bar{\mathcal{E}}$ es un Spray sobre M equivalente al Spray de geodesicas de $\mathcal{E}$, existe una conexión conforme $\bar{\Gamma}$ cuyo Spray de geodesicas es $\bar{\mathcal{E}}$.

Demostración:

Por ser los Sprays $\mathcal{E}$ y $\bar{\mathcal{E}}$ equivalentes, existe α 1-forma sobre M, de manera que $\bar{\mathcal{E}} = \mathcal{E} - \alpha\vartheta$ (por 3.1.6). El Spray de geodésicas de la conexión $\bar{\Gamma} = \Gamma_\alpha$ coincide (por la demostración anterior) con el Spray $\bar{\mathcal{E}}$, y $\bar{\Gamma}$ es conforme por 4.2.3.

4. Operadores pseudo-divergencia y conexiones conformes.

Comprobaremos finalmente que un operador pseudo-divergencia determina de forma unívoca una conexión conforme y simétrica segun se precisa en el siguiente teorema:

TEOREMA 4.4.1

Dado un operador pseudo-divergencia div sobre M, existe una única conexion conforme y simétrica compatible con div.

Demostración:

Supongase $\mathrm{div} = \mathrm{div}_\theta + \beta$, donde θ es la densidad canónica asociada a g y β es una 1-forma en M. Sea $\alpha = \frac{1}{n}\beta$. Por la proposición 4.1.3, existe una única conexión métrica Γ, cuya torsión vale

$T(X,Y) = \alpha(Y)X - \alpha(X)Y$, (1)

y sea finalmente $\bar{\Gamma} = \Gamma_\alpha$, por la demostración de 4.2.5 es $\mathrm{div}_{\bar{\Gamma}} = \mathrm{div}$ y por otra parte, la torsión $\bar{T}$ de $\bar{\Gamma}$ vale: (recuerdese que $\bar{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + \alpha(X)Y$.)

$\bar{T}(X,Y) = \bar{\nabla}_X Y - \bar{\nabla}_Y X - [X,Y] = T(X,Y) + \alpha(X)Y - \alpha(Y)X = 0$, por (1).

Finalmente, si $\tilde{\Gamma}$ es otra conexión simétrica compatible con div y conforme, la conexión $\tilde{\Gamma}_{-\alpha} = \Gamma'$ es una conexion compatible con div y conforme, por 4.2.4 es métrica, y su torsión T' vale:

$T'(X,Y) = \nabla'_X Y - \nabla'_Y X - [X,Y] = T(X,Y) - \alpha(X)Y + \alpha(Y)X = \alpha(Y)X -$ $- \alpha(X)Y = T(X,Y)$ (pues $\tilde{T}=0$) nuevamente por 4.1.3 es $\Gamma' = \Gamma = \tilde{\Gamma}_{-\alpha}$ y por tanto $\tilde{\Gamma} = \Gamma_\alpha = \bar{\Gamma}$.

BIBLIOGRAFIA

[1] R. ABRAHAM J. MARSEN: FOUNDATIONS OF MECHANICS
W. A. BENJAMIN. INC. 1967

[2] M. BERGER B. GOSTIAUX: GEOMETRIE DIFFERENTIELLE
LIBRAIRE ARMAND COLIN PARIS 1972

[3] KOBAYASHI NOMIZU: FOUNDATIONS OF DIFFERENTIAL GEOMETRY
(vol. 1)
INTERSCIENCE PUBLISHER 1963

[4] HENRI CARTAN: FORMES DIFFERENTIELLES
HERMAN 1967

[5] CLAUDE GODBILLON: ELEMENTS DE TOPOLOGIE ALGEBRAIQUE
HERMAN 1967

[6] NOEL J. HICKS: NOTES ON DIFFERENTIAL GEOMETRY
VAN NOSTRAND REINHOLD MATHEMATICAL
STUDIES 1971

[7] F. BRICKELL R. S. CLARK: DIFFERENTIABLE MANIFOLDS. AN
INTRODUCTION
VAN NOSTRAND REINHOLD COMPANY 1970

[8] CLAUDE GODBILLON: GEOMETRIE DIFFERENTIELLE ET MECANIQUE
ANALYTIQUE
HERMAN 1969

[9] GOLDBERG: CURVATURE AND HOMOLOGY
ACADEMIC PRESS 1962

[10] W. AMBROSE, R. S. PALAIS AND I. M. SINGER: SPRAYS
ANAIS DA ACADEMIA BRASILEIRA DE
CIENCIAS, VOL. 32, Nº 2, 1960

[11] G. VRANCEANU: LECONS DE GEOMETRIE DIFFERENTIELLE
(VOL. III)
GAUTHIERS-VILLARS 1964

[12] F.W. WARNER : FOUNDATIONS OF DIFFERENTIABLE
MANIFOLDS AND LIE GROUPS .
SCOTT FORESMAN AND COMPANY 1971