ESTRUCTURA DEL CONJUNTO DE PUNTOS LIMITE DE LAS GEODESICAS DE UNA SUPERFICIE COMPACTA Y ORIENTABLE DE LORENTZ

Javier Lafuente López
Universidad Complutense de Madrid

Abstract

Given a Lorentzian compact surface M which is time and topologically orientable, we assert that the right or left limit point set of a non null right (respectively left) incomplete geodesic is either the whole of M or a closed null geodesic.

Clasificacion A.M.S (1980): 53C50

Se define el $\lim^{+}\gamma$ (conjunto de puntos límite por la derecha) de una curva $\gamma:(a,b)\longrightarrow M$ en una variedad diferenciable M, como el conjunto de puntos que se obtienen como límite de sucesiones $\gamma(t_i)$, donde $t_i\in(a,b)$ y $\lim_{i\to\infty} t_i=b$. De forma análoga se obtiene el conjunto de puntos límite por la izquierda $\lim^{-}\gamma$.

En un artículo reciente [2] del autor, aún en fase de publicación, se analiza entre otras cosas la estructura del conjunto de puntos límite de una geodésica γ en una variedad M compacta, probando que este conjunto se obtiene mediante unión de geodésicas maximales, que serán geodésicas luz en el caso de que M sea variedad de Lorentz, y la geodésica γ sea incompleta.

El objeto de la comunicación, es mostrar como pueden mejorarse estos resultados generales cuando nos restringimos a superficies orientables de Lorentz, indicando posibles vías para posteriores investigaciones.

El resultado principal es el siguiente:

TEOREMA 1.-

Sea M superficie de Lorentz compacta y temporalmente orientada, y γ una geodésica maximal:

a) Si γ es geodésica luz, entonces o bien $\lim^{+}\gamma$ =M, o bien $\lim^{+}\gamma$ es una geodésica maximal luz cerrada. b) Si M *no tiene geodésicas luz cerradas, y γ es incompleta por la derecha, entonces $\lim^{+}\gamma$=*M. *c) Si M es topológicamente orientable, con todas sus geodesicas maximales luz cerradas, y γ es incompleta por la derecha, entonces $\lim^{+}\gamma$ es una geodésica maximal luz cerrada, o bien*

$\lim^{+}\gamma = M$, y el conjunto de puntos de autointersección[1] *es denso en im γ!.*

El epígrafe §1 tratará los apartados a) y b) del teorema. El epigrafe §2 está dedicado al apartado c). Los detalles técnicos puntuales relativos a las demostraciones expuestas en esta comunicación, están desarrollados en [2].

§1 <u>Geodesicas luz en superficies compactas de Lorentz orientadas tiempo.</u>

Supondremos en adelante que M es una superficie compacta de Lorentz temporalmente orientada. M tiene por tanto caracteristica de Euler nula, y es difeomorfa al toro bidimensional o a la botella de Klein, dependiendo de si es o no topológicamente orientable [1].

Podemos tomar en M campos de vectores luz, X, Y linealmente independientes, definiendo en cada punto el cono temporal positivo respecto a la orientación temporal establecida [1]. Finalmente, podemos elegir una métrica Riemanniana auxiliar, de forma que (X,Y) determinen una paralelización ortonormal de M. Las pregeodésicas luz parametrizadas respecto a la longitud Riemanniana del arco seran entonces curvas integrales de $\pm X$ o $\pm Y$.

La teoria de Poincaré-Bendixon proporciona el siguiente resultado:

TEOREMA 2 ([3])

Sea V un campo diferenciable sin puntos críticos, sobre una superficie compacta S, y sea α una órbita de V. Entonces, o bien $\lim^{+}\gamma$ es una órbita periódica, o bien $\lim^{+}\gamma = S$. En este caso S es difeomorfa a un toro bidimensional, y el conjunto de puntos límite (por ambos lados) de cada órbita de V es todo S.■

Esto prueba el apartado a) del teorema 1, que puede refinarse asi:

---

(1) *Un punto de autointersección para una curva diferenciable* c *es un punto* $p \in \mathrm{im}\ c$*, tal que* $p=c(t_0)=c(t_1)$*, con* $t_0 \neq t_1$, y $c'(t_0)$ *no proporcional a* $c'(t_1)$*. Si ambos vectores son proporcionales, y c es geodésica, entonces c es diferenciablemente cerrada. Se prueba en* [2] *que una geodésica maximal con imagen cerrada, es diferenciáblemente cerrada.*

La variedad M puede representarse por el cociente $\mathbf{R}^2/\mathbf{Z}^2$, donde cada elemento $(p,q)\in\mathbf{Z}^2$ se identifica con la traslación $\tau_{pq}:\mathbf{R}^2\ni(x,y)\longrightarrow(x+p,y+q)\in\mathbf{R}^2$.
Nótese que $\mathbf{R}^2$ puede dotarse de una estructura Lorentziana y otra Riemanniana de forma que la proyección recubridora $\pi:\mathbf{R}^2\longrightarrow M$ sea isometría local.
Los campos A, B elevados de X, Y a través de π tienen entonces órbitas que son invariantes por $\mathbf{Z}^2$. Asi, si α es una órbita de A, entonces $\mathbf{R}^2$-im α tiene exactamente dos componentes conexas, D^+_α y D^-_α que son abiertas, no acotadas e invariantes por el flujo de A. D^+_α representa la componente apuntada por B.
Podemos suponer sin perdida de generalidad que $\pi(0,0)=\underline{\gamma}(0)$. Si $\psi:[0,+\infty)\longrightarrow\mathbf{R}^2$ es la elevación de $\underline{\gamma}$ por (0,0), ω la órbita de A tal que $\omega(0)=(0,0)$, y C_ψ es la unión de todas las órbitas α de A con im $\alpha\neq$im ω que cortan a ψ, se tiene:

PROPOSICION 5

El conjunto C_ψ *es abierto no vacío, y esta contenido en* D^+_ω. *Por otra parte, si* $C_\psi\neq D^+_\omega$, *entonces la frontera topológica* ∂C_ψ *de* C_ψ, *esta formada por la unión de im* ω *y de im* κ, *donde* κ *es una órbita de* A, *contenida en* D^+_ω . *Finalmente, si* d *denota la distancia Riemanniana en* $\mathbf{R}^2$, *se tiene:* $\lim_{s\to\infty} d(\psi(s),\text{im }\kappa)=0$.■

La demostración del apartado c) del teorema 1 se concluye entonces asi:

i) Si $C_\psi\neq D^+_\omega$, construyamos κ como en la proposición 5, y sea σ la geodésica luz de M en la que se proyecta κ por π. Para probar que $\lim^+\gamma=$im σ es suficiente ver por el Lema 4 que $\lim^+\gamma\subseteq$im σ. Supóngase $p\in\lim^+\gamma$ y sea (s_k) una sucesion con lim $s_k=+\infty$, y lim $\gamma(s_k)=p$. Como $\lim_{s\to\infty} d(\psi(s),\text{im }\kappa)=0$, y π es isometría local, se ve que para k suficientemente grande se tiene: $d(\psi(s_k),\text{im }\kappa)=$ $=d(\pi.\psi(s_k),\pi(\text{im }\kappa))=d(\underline{\gamma}(s_k),\text{im }\sigma)$, y $0=\lim d(\underline{\gamma}(s_k),\text{im }\sigma)=d(p,\text{im }\sigma)$.
Como im σ es compacto se concluye que $p\in$im σ.

ii) Si $C_\psi=D^+_\omega$, entonces ψ corta a cada órbita de A contenida en D^+_ω exactamente una vez. Como cada orbita σ de X admite una cantidad infinita de elevaciones en D^+_ω, se puede encontrar una sucesión creciente (s_k) de forma que $p_k=\psi(s_k)$ pertenece a una elevación α_k de σ, donde im $\alpha_k\neq$im α_j si $k\neq j$. Necesáriamente

$\lim s_k = +\infty$, pues si sucediera lo contrario, podría admitirse que existe $s = \lim s_k$, y los puntos $p_k \in \mathrm{im}\ \alpha_k$ tendrían a $\psi(s)$ como punto de acumulación.(3) Proyectando por π se ve que $\underline{\gamma}(s_k) \in \mathrm{im}\ \sigma$. Por ser im σ compacta, puede suponerse tomando quizás una subsucesión que $\lim \underline{\gamma}(s_k) = p \in \mathrm{im}\ \sigma$, y que $\lim \underline{\gamma}'(s_k) = u \in T_pM$. Por el Lema 4 es $u = X(p)$, que es tangente a σ, con lo que $\mathrm{im}\ \sigma \subseteq \lim^+ \gamma$. Como esto sucede para cada órbita $\underline{\sigma}$ de X, se concluye que $\lim^+ \gamma = M$.

Por otra parte, el conjunto de puntos de autointersección de γ es denso en im γ, ya que para $\xi > 0$, la órbita σ de X a través de $\underline{\gamma}(\xi)$ es transversal a γ. Usando el argumento anterior, puede encontrarse una sucesión $(s_k) \longrightarrow +\infty$ tal que $\lim \underline{\gamma}(s_k) = \underline{\gamma}(\xi)$ y $\lim \gamma'(s_k) = \underline{\sigma}'(0)$. Por tanto existe $\eta > 0$ tal que $\gamma((s_k - \eta, s_k + \eta))$ corta a γ transversalmente para k suficientemente largo,y tales puntos de interseccion convergen a $\underline{\gamma}(\xi)$.

Anunciamos que parece posible modificar sutilmente los argumentos anteriores para concluir que en un toro orientable de Lorentz, el conjunto de puntos límite $\lim^+ \gamma$ *de una geodésica incompleta no densa, es una geodésica luz cerrada.*

¿Es cierta la misma conclusión en superficies compactas de Lorentz, sin hipótesis adicionales sobre su orientabilidad?

REFERENCIAS:

[1] BEEM & EHRLICH: Global Lorentzian Geometry. *Pure and aplied Math.*(1981)

[2] LAFUENTE L.J.: Maximal geodesics in compact manifolds. (Preprint)

[3] LAFUENTE L.J.:Geodésicas incompletas no nulas en variedades semi-Riemannianas Misner-completas. *Actas X J.M.H.L.* (1985)

[4] SOTOMAYOR J.: Liçoes de equaçoes diferençiais ordinarias. *IMPA Projecto Euclides Serie II* (1979)

Javier Lafuente López
Dpto.Geometria y Topología
Facultad de Matemáticas
Universidad Complutense. 28040-Madrid (ESPAÑA)

---

(3) *Esto no es posible, ya que la distancia entre dos elevaciones (con imagen distinta) de una misma órbita σ de X, esta acotada inferiormente por una constante positiva que depende únicamente de σ.*