TITULO : "SOBRE LOS OPERADORES HESSIANO ASOCIADOS A SPRAYS QUE POSEEN LAS MISMAS TRAYECTORIAS"

AUTOR: D. Javier Lafuente lópez . Doctor en Matemáticas por la Universidad Complutense de Madrid.

RESUMEN DEL TRABAJO:

El presente trabajo consta de tres partes. En la primera de ellas se demuestra que una condición necesária y suficiente para que dos sprays $\mathcal{X}$ y $\bar{\mathcal{X}}$ definidos sobre una variedad diferenciable de dimensión finita M, tengan las mismas trayectorias - se dice entonces que ambos sprays son equivalentes- es que exista una 1-forma α en M tal que $\bar{\mathcal{X}} = \mathcal{X} + \alpha\mathcal{V}$, siendo $\mathcal{V}$ el campo de Liouville en TM.

En la segunda parte se prueba que los operadores hessiano asociados a dos sprays equivalentes , definen la misma actuación sobre los vectores tangentes a los niveles de cada función diferenciable, lo cual permite asociar a cada clase de sprays equivalentes un operador"hessiano por niveles" , estableciendose en la tercera parte una definición axiomática de este tipo de operadores.

1. SPRAYS QUE POSEEN LAS MISMAS TRAYECTORIAS.

1.1 PRELIMINARES.-

En este trabajo M representará una variedad diferenciable real paracompacta y de dimensión finita n.

Un spray $\mathcal{X}$ sobre M (vèase [1] ò [3]) es una ecuación diferencial de segundo orden en M, verificando la propiedad de que si $\sigma(t)$ es una curva integral de $\mathcal{X}$ (en M) tambien lo es $\sigma(at+b)$ $\forall a,b \in R$; al conjunto $im(\sigma)$ se denominará trayectoria del spray , y se denotará por $[\mathcal{X}]$ al conjunto de sus trayectorias. Una curva constante (cuya trayectoria se reduce a un punto) es estrictamente hablando una curva integral de cualquier spray, no obstante en este trabajo, para evitar situaciones triviales y reiteraciones innecesarias, no será considerada como tal.

Si $(U,\emptyset)$, $\emptyset=(x^1,\ldots,x^n)$ es una carta de M , un spray $\mathcal{X}$ en M adopta en coordenadas $T\emptyset=(x^1\ldots x^n,\dot{x}^1\ldots\dot{x}^n)$ una expresión de la forma:

$$(1) : \mathcal{X} = \dot{x}^i\frac{\partial}{\partial x^i} - \Gamma^k_{ij}\,\dot{x}^i\dot{x}^j\,\frac{\partial}{\partial \dot{x}^k}$$

en donde Γ^k_{ij} , so aplicaciones diferenciables de U en R . Los coeficientes funcionales Γ^k_{ij} quedan unívocamente determinados por la carta$(U, \emptyset)$ y la condición : $\Gamma^k_{ij} = \Gamma^k_{ji}$, que supondremos en adelante satisfecha , salvo mención explícita contraria. Las curvas integrales del spray $\mathcal{X}$ en U son las soluciones del sistema lineal de ecuaciones diferenciables :

$$\frac{d^2x^k}{dt^2} = -\Gamma^k_{ij}\,\frac{dx^i}{dt}\,\frac{dx^j}{dt}$$

Reciprocamente , si $\mathcal{X}$ es un campo en TM que adopta en coordenadas $T\emptyset$ una expresión del tipo (1) , se concluye que es un spray.

Se denotará por $\mathcal{V}$ al campo de Liouville (Vèase[2]). En coordenadas $T\emptyset$, $\mathcal{V}$ se escribe en la forma $\mathcal{V} = \dot{x}^i\frac{\partial}{\partial \dot{x}^i}$; si α es una 1-forma en M , el campo $\alpha\mathcal{V}$ en TM es el obtenido al considerar α como aplicación diferenciable de TM en R.

DEFINICION 1.2

Dos sprays $\mathcal{X}$ y $\bar{\mathcal{X}}$ se dirán equivalentes sii poseen las mismas trayectorias.

TEOREMA 1.3

Si $\mathcal{X}$ es un spray y α es una 1-forma sobre M entonces $\bar{\mathcal{X}}=\mathcal{X}+\alpha\,\mathcal{V}$, es un spray equivalente a $\mathcal{X}$. Más concretamente: si $\sigma(t)$ es una curva integral de $\mathcal{X}$ cuyo intervalo I de parametrización contiene al origen, la expresión $s=s(t)=\int_0^t\left[\exp\int_0^r(-\alpha)\right]dt$, en donde la segunda integral ha sido tomada a lo largo de σ, define un cambio de parametro tal que $\bar{\sigma}(s)=\sigma(t(s))$, es curva integral de $\bar{\mathcal{X}}$, siendo $t=t(s)$ la aplicación inversa de $s=s(t)$. Además : $t(0)=0$, $\left.\frac{dt}{ds}\right|_{s=0}=1$, $\left.\frac{d^2t}{ds^2}\right|_{s=0}=\alpha\left(\left.\frac{d\bar{\sigma}}{ds}\right|_{s=0}\right)$

Demostración:

Supongase que $\mathcal{X}$ adopta en coordenadas T$\emptyset$ una expresión del tipo (1) de 1.1, y $\alpha=\alpha_i dx^i$, entonces $\bar{\mathcal{X}}=\mathcal{X}+\alpha\mathcal{V}=\dot{x}^i\frac{\partial}{\partial x^i}-\Gamma^k_{ij}\dot{x}^i\dot{x}^j\frac{\partial}{\partial \dot{x}^k}+$ $+\alpha_i\dot{x}^i\dot{x}^k\frac{\partial}{\partial\dot{x}^k}$. Si $x^i=x^i(t)$ es una curva integral de $\mathcal{X}$ cuyo intervalo de parametrización contiene al origen y $s=s(t)$, $t=t(s)$ definen las ecuaciones de un cambio de parametro, un simple calculo muestra que $x^i(s)=x^i(t(s))$, verifica las relaciones:

$$\frac{d^2x^k}{ds^2}=-\Gamma^k_{ij}\frac{dx^i}{ds}\frac{dx^j}{ds}-\left(\frac{d^2t}{ds^2}\cdot\frac{ds}{dt}\right)\frac{dx^k}{ds}$$

Teniendo en cuenta que las ecuaciones diferenciales que satisfacen las curvas integrales de $\bar{\mathcal{X}}$ son $\frac{d^2x^k}{ds^2}=-\Gamma^k_{ij}\frac{dx^i}{ds}\frac{dx^j}{ds}+\alpha_i\frac{dx^i}{ds}\frac{dx^k}{ds}$, interesa que para cada valor de s se tenga :

$\frac{d^2t}{ds^2}\frac{1}{dt/ds}\equiv\alpha_i\frac{dx^i}{ds}$, para lo cual es suficiente tomar

$s=s(t)=\int_0^t\left[\left(\exp\int_0^r-\alpha\right)dt\right.$. En efecto $\frac{ds}{dt}=\exp\int_0^t-\alpha>0$ por lo que $s=s(t)$

define la ecuación de un cambio de parámetro , y como $\frac{dt}{ds}=\exp\int_0^{t(s)}\alpha$, se tiene $\frac{d^2t}{ds^2}=\frac{d}{ds}\exp\int_0^{t(s)}\alpha_i\frac{dx^i}{dt}dt=\frac{dt}{ds}\left(\exp\int_0^{t(s)}\alpha_i\frac{dx^i}{dt}dt\right)\frac{d}{dt}\int_0^t\alpha_i\frac{dx^i}{dt}dt=$ $\left(\frac{dt}{ds}\right)^2\alpha_i\frac{dx^i}{dt}=\frac{dt}{ds}\alpha_i\frac{dx^i}{ds}$, con lo que $\frac{d^2t}{ds^2}\frac{1}{dt/ds}=\alpha_i\frac{dx^i}{ds}$.

Las últimas igualdades del teorema se comprueban ahora inmediatamente.

Se probará a acontinuación que el recíproco sigue siendo cierto:

TEOREMA 1.4

Si $\mathcal{X}$ y $\bar{\mathcal{X}}$ son dos sprays equivalentes sobre M , entonces existe una 1-forma α en M tal que $\bar{\mathcal{X}}=\mathcal{X}+\alpha\mathcal{V}$.

La demostración del teorema requiere del siguiente lema previo:

LEMA 1.5

Si F es una forma cuadrática sobre un espacio vectorial real de dimensión finita , y $L:V\longrightarrow\mathbb{R}$ es una forma lineal tal que F(x)=0 cuando L(x)=0,entonces existe una forma lineal T en V tal que $F=L.T$

Su demostración es elemental.

Demostración del teorema 1.4

Sea (U,ϕ) una carta de M $\phi=(x^1\dots x^n)$, y supóngase que la expresión local de $\mathcal{X}$ y $\bar{\mathcal{X}}$, venga dada por:

$$\mathcal{X}=\dot{x}^i\frac{\partial}{\partial x^i}-\Gamma^k(x,\dot{x})\frac{\partial}{\partial\dot{x}^k}\quad,\ \text{siendo}\ \Gamma^k(x,\dot{x})=\Gamma^k_{ij}\,\dot{x}^i\dot{x}^j$$

$$\bar{\mathcal{X}}=\dot{x}^i\frac{\partial}{\partial x^i}-\bar{\Gamma}^k(x,\dot{x})\frac{\partial}{\partial\dot{x}^k}\quad,\ \text{siendo}\ \bar{\Gamma}^k(x,\dot{x})=\bar{\Gamma}^k_{ij}\,\dot{x}^i\dot{x}^j$$

Se fijará un vector v_m de $T_m(M)$ $(m\in U)$, cuyas coordenadas respecto a $T\phi$ son $(x_0^1\dots x_0^n,\dot{x}_0^1,\dots,\dot{x}_0^n)=(x,\dot{x}_0)$, y sea $\bar{\sigma}(s)$ una curva integral de $\bar{\mathcal{X}}$ de ecuaciones $x^i=x^i(s)$ tal que $\left.\frac{d\bar{\sigma}}{ds}\right|_{s=0}=v_m$. Por hipotesis se podrán fijar las ecuaciones de un cambio de parametros , s=s(t) , t=t(s) y s(0)=0 , de forma que la curva $\sigma(t)=\bar{\sigma}(s(t))$ de ecuaciones $x^i=x^i(t)$ sea curva integral de $\mathcal{X}$. Se tiene entonces :

[redacted]

$\frac{d^2x}{ds^2} = -\Gamma^k_{ij}\frac{dx^i}{ds}\frac{dx^j}{ds} + (\frac{d^2t}{ds^2}\frac{1}{dt/ds})\frac{dx^k}{ds} = -\bar{\Gamma}^k_{ij}\frac{dx^i}{ds}\frac{dx^j}{ds}$, y por tanto la igualdad : $\frac{d^2t}{ds^2}\frac{1}{dt/ds}\frac{dx^k}{ds} = (\Gamma^k_{ij} - \bar{\Gamma}^k_{ij})\frac{dx^i}{ds}\frac{dx^j}{ds}$ (1)

es válida para todo valor de s y para todo k=1...n. En particular para s = 0 se tiene : $\frac{d^2t}{ds^2}\frac{1}{dt/ds}\Big|_{s=0}\dot{x}^k_o = \Gamma^k(x_o,\dot{x}_o) - \bar{\Gamma}^k(x_o,\dot{x}_o) = H^k(x_o,\dot{x}_o)$: (2)

La función homogenea de grado dos $H^k(x,\dot{x})$ (respecto a $\dot{x}$) se anula cuando $\dot{x}^k=0$, por el lema 1.5 se puede escribir $H^k(x,\dot{x})=\dot{x}^k\, h^k(x,\dot{x})$ para ciertas funciones h^k en T(U) lineales respecto a $\dot{x}$, y la igualdad (1) puede escribirse ahora : $\frac{d^2t}{ds^2}\frac{1}{dt/ds}\dot{x}^k(s)=\dot{x}^k(s)h^k(x(s),\dot{x}(s))$:(3)

siendo $\dot{x}^k(s)=\frac{dx^k}{ds}$. Cuando $\dot{x}^k_o \neq 0, \dot{x}^r_o \neq 0$ $(k\neq r)$, particularizando la igualdad (3) en s=0 , se tiene : $h^k(x_o,\dot{x}_o)=h^r(x_o,\dot{x}_o)= \frac{d^2t}{ds^2}\frac{1}{dt/ds}\Big|_{s=0} = \alpha(x_o,\dot{x}_o)$, donde α puede interpretarse como una 1-forma en U , que es independiente de las coordenadas $\emptyset$, y puede definirse en consecuencia globalmente en toda la variedad, por mèdio de la igualdad anterior. La igualdad (3) se transforma en (4) : $\frac{d^2t}{ds^2}\frac{1}{dt/ds}\dot{x}^k(s)=\dot{x}^k(s)\alpha(x(s),\dot{x}(s))$

que es válida para todo valor de s cuando $\dot{x}_o\neq 0$(ya que entonces $\dot{x}(s)\neq 0$ para todo s) , y es trivialmente también válida cuando $\dot{x}_o=0$.

Teniendo en cuenta (1) y (4) se concluye que las curvas integrales del spray $\bar{\mathcal{L}}$ han de satisfacer en U el sistema de ecuaciones :

$$\frac{d^2x^k}{ds^2}=-\Gamma^k_{ij}\frac{dx^i}{ds}\frac{dx^j}{ds}+\alpha_i\frac{dx^i}{ds}\frac{dx^k}{ds}$$, siendo $\alpha = \alpha_i dx^i$, y puede escribirse globalmente : $\bar{\mathcal{L}} = \mathcal{L} + \alpha\mathcal{V}$ como queriamos demostrar.

2. OPERADOR HESSIANO ASOCIADO A UN SPRAY. HESSIANOS EQUIVALENTES.

Si f es una función diferenciable sobre M con valores reales y p es un punto critico para f , el Hessiano natural de f en el punto p es una forma bilineal simetrica en $T_p(M)$ que se denota por $Hess_f(p)$, cuya forma cuadrática asociada, puede definirse intrínscamente de la siguiente manera (véase [4]) : $Hess_f(v_p,v_p)=\left.\frac{d^2 f\circ\sigma}{dt^2}\right|_{t=o}$, donde $\sigma:(-\varepsilon,+\varepsilon)\rightarrow M$ $(\varepsilon>0)$, es una curva diferenciable tal que $\left.\frac{d\sigma}{dt}\right|_{t=o}=v_p\in T_p(M)$.

Por otra parte si $(U,\emptyset)$ es una carta de M $Hess_f(p)$ puede expresarse en coordenadas $\emptyset$: $Hees_f(p)=\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^i\partial x^j}\right)_p dx^i\otimes dx^j$.

En [3] se introduce la siguiente definición :

DEFINICION 2.1

Un operador hessiano sobre M , es un operador H. que actua sobre el algebra $\mathcal{F}(M)$ de las funciones diferenciables sobre M con valores reales , de manera que , para $f,g\in\mathcal{F}(M)$ se tiene :

1) para todo $p\in M$, $H_f(p)$ es una forma bilineal simétrica en $T_p(M)$

2) Si $df(p)=0$, entonces $H_f(p)=Hess_f(p)$

3) Si $r\in\mathbb{R}$ entonces $H_{rf}=rH_f$

4) $H_{f+g}=H_f+H_g$

5) Si X es un campo de vectores diferenciable en M , la función : $H_f(X,X):M\rightarrow\mathbb{R}$, es diferenciable.

Si se fija el punto p de M , las condiciones 1) 2) 3) y 4) establecen la definición de "Operador hessiano por el punto p"

La existencia de operadores hessiano sobre M viene confirmada por el siguiente resultado cuya demostración puede verse en [3] :

TEOREMA 2.2

a) Dado un spray $\mathcal{X}$ sobre M , existe un unico operador hessiano H. que viene caracterizado por la siguiente condición:

(1) $H_f(v_m,v_m)=\frac{d^2}{dt^2}(f\circ\sigma)\Big|_{t=o}$, en donde $\sigma:(-\varepsilon,+\varepsilon)\longrightarrow M$ es una curva integral de $\mathcal{X}$ por $v_m\in T_m(M)$.

Recíprocamente : si H. es un operador hessiano en M , existe un único spray $\mathcal{X}$ sobre M verificando la condición (1)

b) Si en coordenadas $\emptyset=(x^1,\dots x^n)$ las ecuaciones diferenciales que satisfacen las curvas integrales del spray $\mathcal{X}$ son : $\frac{d^2x^k}{dt^2}+\Gamma^k_{ij}\frac{dx^i}{dt}\frac{dx^j}{dt}=0$, la expresión local del hessiano H subordinado por $\mathcal{X}$ es

$$H_f=\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^i\partial x^j}-\Gamma^k_{ij}\frac{\partial f}{\partial x^k}\right)dx^i\otimes dx^j$$

El siguiente teorema muestra qué tienen en común los operadores hessiano asociados a dos sprays equivalentes:

TEOREMA 2.3

Sean $\mathcal{X}$ y $\bar{\mathcal{X}}$ sprays sobre M equivalentes , y H. , $\bar{H}$. , sus respectivos hessianos asociados . Si α es una 1-forma en M tal que $\bar{\mathcal{X}}=\mathcal{X}+\alpha\vartheta$ (véase teorema 1.4) , entonces $\bar{H}_f=H_f+df\otimes\frac{1}{2}\alpha+\frac{1}{2}\alpha\otimes df$, para todo $f\in\mathcal{F}(M)$. En consecuencia , si $df(v_p)=0$ entonces $\bar{H}_f(v_p,v_p)=$
$=H_f(v_p,v_p)$.

Demostración:

Sea $p\in M$ y $v_p\in T_p(M)$. Si $\sigma(t)$ es una curva integral de $\mathcal{X}$ tal que $\frac{d\sigma}{dt}\Big|_{t=o}=v_p$, por el teorema 1.3 existe un cambio de parámetro $t=t(s)$ con $t(0)=0$, $\frac{dt}{ds}\Big|_{s=o}=1$, $\frac{d^2t}{ds^2}\Big|_{s=o}=\alpha(v_p)$, y tal que $\bar{\sigma}(s)=\sigma(t(s))$ es es curva integral de $\bar{\mathcal{X}}$. Como $\frac{d\bar{\sigma}}{ds}\Big|_{s=o}=\frac{d\sigma}{dt}\Big|_{t=o}\frac{dt}{ds}\,{}_{s=o}=v_p$, se tiene que $\bar{H}_f(v_p,v_p)=\frac{d^2 f.\bar{\sigma}}{ds^2}\Big|_{s=o}$ para todo $f\in\mathcal{F}(M)$; además $\frac{df.\bar{\sigma}}{ds}=\frac{df.\sigma}{dt}\frac{dt}{ds}$, y por tanto : $\dfrac{d^2 f.\bar{\sigma}}{ds^2} = \dfrac{d}{ds}\left(\dfrac{df.\sigma}{dt}\,\dfrac{dt}{ds}\right) = \left(\dfrac{dt}{ds}\right)^2 \dfrac{d^2 f.\sigma}{dt^2}\;\dfrac{df.\sigma}{dt}\;\dfrac{d^2 t}{ds^2}$, con lo que

$$\bar{H}_f(v_p,v_p) = \left(\frac{dt}{ds}\Big/_{s=o}\right)^2 \frac{d^2 f.\sigma}{dt^2}\Big/_{t=o}\;\frac{df.\sigma}{dt}\Big/_{t=o}\;\frac{d^2 t}{ds^2}\,{}_{s=o} = H_f(v_p,v_p) + df(v_p)\,\alpha(v_p),$$

de donde se concluye inmediatamente lo que se queria demostrar.

También es válido el resultado recíproco:

TEOREMA 2.4

Sean $H.$ y $\bar{H}.$ dos operadores hessiano (con sprays asociados $\mathcal{E}$ y $\bar{\mathcal{E}}$ respectivamente) , y supongase que $\forall f \in \mathcal{F}(M)$ y $\forall v_p \in TM$ tal que $df(v_p)=0$ se verifica : $\bar{H}_f(v_p,v_p)=H_f(v_p,v_p)$. Se concluye entonces que los sprays $\mathcal{E}$ y $\bar{\mathcal{E}}$ son equivalentes.

Demostración:

Sea $f\in\mathcal{F}(M)$ y $S_f=\bar{H}_f-H_f$; para cada $p\in M$, $S_f(p)$ define una forma cuadrática en $T_p(M)$ que se anula , cuando se anula $df(p)$. Por el lema 1.5 existe una 1-forma , digamos α_p , en $T_p(M)$ tal que $S_f(v_p,v_p)=\alpha_p(v_p)df(v_p)$
Se probará que la 1-forma α en M , tal que $\alpha(p)=\alpha_p$ $\forall p\in M$, es diferenciable y no depende de f :

Si $(U,\emptyset)$ es una carta de M , $\emptyset=(x^1\ldots x^n)$ en donde

$$H_f=\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} - \Gamma^k_{ij}\frac{\partial f}{\partial x^k}\right) dx^i\otimes dx^j \quad , \quad \bar{H}_f=\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} - \bar{\Gamma}^k_{ij}\frac{\partial f}{\partial x^k}\right) dx^i\otimes dx^j$$

$\alpha=\alpha_i dx^i$, se tiene : $S_f=\frac{1}{2}(\alpha\otimes df + df\otimes\alpha)=\frac{1}{2}\left(\alpha_i\dfrac{\partial f}{x^j}+\alpha_j\dfrac{\partial f}{\partial x^i}\right)dx^i\otimes dx^j =$

$=(\Gamma^k_{ij}-\bar{\Gamma}^k_{ij})\dfrac{\partial f}{\partial x^k}dx^i\otimes dx^j$, y de aquí se deduce que $\Gamma^k_{ij}-\bar{\Gamma}^k_{ij}=0$ para $k\neq i$ $k\neq j$, mas cocretamente:: $2(\Gamma^k_{ij}-\bar{\Gamma}^k_{ij})=\delta^k_i\alpha_j+\delta^k_j\alpha_i$ com lo que

$\alpha_j=2\,(\Gamma^i_{ij}-\bar{\Gamma}^i_{ij})$ $\quad i\neq j$ $\quad$ y α es por tanto diferenciable. Por el teorema 2.3 los sprays $\bar{\mathcal{E}}$ y $\mathcal{E}+\alpha\vartheta$ subordinan el mismo hessiano y por tanto (teorema 2.2) $\bar{\mathcal{E}}$ y $\mathcal{E}+\alpha\vartheta$ coinciden . Por el teorema 1.3 , los sprays $\mathcal{E}$ y $\bar{\mathcal{E}}$ son equivalentes .

Parece natural establecer la siguiente definición:

DEFINICION:

Dos operadores hessiano H y $\bar{H}$ definidos sobre M se dirán equivalentes si definen la misma forma bilineal sobre los subespácios,de los vectores tangentes a los niveles de cada función diferenciable .

En virtud de los teoremas 2.3 y 2.4 se concluye , que dos hessianos son equivalentes si y solo si sus correpondientes sprays lo son.

3. HESSIANO POR NIVELES

El conjunto $[\mathcal{L}]$ de las trayectorias de un spray $\mathcal{L}$ permite definir de manera natural, en virtud del parágrafo anterior , un operador "tipo hessiano" que actua solo sobre los vectores tangentes a los niveles de cada función diferenciable en M , y que constituye una extensión más restrictiva del operador "hessiano natural" que la que se establece en la definiciòn 2.1 . Se construirá a continuación una definición axiomática de este tipo de operadores:

DEFINICION 3.1

Un hessiano por niveles en M es un operador $\mathbb{H}.$ que actua sobre las funciones diferenciables $f \in \mathcal{F}(M)$, de manera que :

1) $\forall f \in \mathcal{F}(M)$ $\forall p \in M$, $\mathbb{H}_f(p)$ es una forma bilineal simétrica en $\ker(df(p))$ que es restricción a dicho subespacio de algún operador hessiano $H^p_.$ por el punto p .

2) Si X es un campo de vectores diferenciable en un abierto U de M , y $f: M \to \mathbb{R}$ es una función diferenciable tal que $df(X)=0$, la función $\mathbb{H}_f(X,X)$ es diferenciable en U .

[redacted]

[redacted]

Obsérvese que $\mathbb{H}_f(p)$ solo depende de los valores de la función f en un entorno del punto p

DEFINICION 3.2

Sea $\mathbb{H}.$ un operador hessiano por niveles en M , y U un abierto de M. Un operador hessiano $H.$ en U se dice extensión de $\mathbb{H}.$, si $\forall f \in \mathcal{F}(U)$, $\forall p \in U$, $\mathbb{H}_f(p)$ es restricción de $H_f(p)$ a $\ker(df(p))$.

La justificación de la definición 3.1 viene ~~xxxxxx~~ determinada por el siguiente teorema

TEOREMA 3.3

Dado $\mathbb{H}.$ operador hessiano por niveles en M , existe $H.$ operador hessiano en M , extensión de $\mathbb{H}.$ en M .

Demostración:

Es suficiente probar que existe una extensión de $\mathbb{H}.$ en cada abierto U de M dominio de una carta , pues entonces se puede tomar un recubrimiento de M por abiertos coordenados . localmente finito: $(U_i)_{i\in I}$, y para cada $i \in I$ un operador hessiano H^i extensión de $\mathbb{H}$ en U_i . Si $(\varphi_i)_{i\in I}$ es una partición diferenciable de la unidad subordinada al recubrimiento , se comprueba trivialmente que el operador $H=\sum_{i\in I}\varphi_i H^i$ es un operador hessiano extensión de $\mathbb{H}$ en M .

Sea pues $(U,\emptyset)$ carta de M, $\emptyset=(x^1\ldots x^n)$. Para cada $p\in U$ se elige un hessiano por el punto p , H^p, verificando la condición 1) de la definición 3.1, cuya expresión local será de la forma :

$$H_f^p = \left[\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}\right)_p - \Gamma_{ij}^k(p)\left(\frac{\partial f}{\partial x^k}\right)_p \right] dx^i \otimes dx^j \ , \ \forall f \in \mathcal{F}(U)$$

siendo las funciones $\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$ no necesariamente diferenciables en U. No obstante se tiene:

a) Para $k\neq i$, $k\neq j$ la función Γ_{ij}^k es diferenciable en U e independiente de la elección de los H^p. En efecto

En efecto : Los campos $\frac{\partial}{\partial x^i}$, $\frac{\partial}{\partial x^j}$ son tangentes a los niveles de la función $f=x^k$, cuando $k\neq i$, $k\neq j$ por lo que $\mathbb{H}_{x^k}(\frac{\partial}{\partial x^i},\frac{\partial}{\partial x^j}) = -\Gamma^r_{ij}\frac{\partial x^k}{\partial x^r} = -\Gamma^k_{ij}$ es función diferenciable.

b) Para $r\neq s$ $\Gamma^s_{sr} - \frac{1}{2}\Gamma^r_{rr}$ es diferenciable.

En efecto: si $s\neq r$ el campo $X= \frac{\partial}{\partial x^r} - \frac{\partial}{\partial x^s}$ es tangente a los niveles de la función $f=x^r+x^s$, y $\mathbb{H}_f(X,X)=$

$$= -(\Gamma^r_{ij}+\Gamma^s_{ij})\, X^iX^j = -(\Gamma^r_{rr}+\Gamma^s_{rr})+2(\Gamma^r_{rs}+\Gamma^s_{sr})-(\Gamma^r_{ss}+\Gamma^s_{ss}) \qquad (1)$$

debe ser diferenciable en U por la condición 2 de la definición 3.1 .

Analogamente tomando $X= \frac{\partial}{\partial x^r}+\frac{\partial}{\partial x^s}$ campo tangente a los niveles de la función $f=x^r-x^s$ se tiene que la función:

$$-(\Gamma^r_{rr} - \Gamma^s_{rr})+2(-\Gamma^r_{rs} +\Gamma^s_{sr}) - (\Gamma^r_{ss} - \Gamma^s_{ss}) \qquad (2)$$

es también diferenciable .

Sumando (1) y (2) queda : $-2\Gamma^r_{rr}+4\Gamma^s_{sr} -2\Gamma^r_{ss}$ que será por tanto función diferenciable . Como Γ^r_{ss} es diferenciable por a) , queda probado lo que se pretendía.

Tomando ahora : $\bar{\Gamma}^k_{ij} = \Gamma^k_{ij} - \frac{1}{2}(\delta^k_i\, \Gamma^j_{jj} +\delta^k_j\, \Gamma^i_{ii})$ y definiendo

$$H_f=\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^i\partial x^j} -\bar{\Gamma}^k_{ij}\frac{\partial f}{\partial x^k}\right] dx^i\otimes dx^j$$, para $f\in \mathcal{F}(U)$, se concluye que:

1) H es un operador hessiano en U, es decir , las funciones $\bar{\Gamma}^k_{ij}$ son diferenciables. En efecto:

Si $k\neq i$ $k\neq j$ entonces $\bar{\Gamma}^k_{ij} =\Gamma^k_{ij}$ que es diferenciable por a).

Si $k=i$, $i\neq j$ $\bar{\Gamma}^i_{ij} = \Gamma^i_{ij} - \frac{1}{2}\Gamma^j_{jj}$ que es diferenciable por b)

Finalmente si $k=i=j$, $\bar{\Gamma}^i_{ii} =\Gamma^i_{ii} - \frac{1}{2}(2\Gamma^i_{ii})=0$ que obviamente es también diferenciable.

2) $\forall f \in \mathcal{F}(U)$ $\forall p \in U$ es $H_f(p) = H_f^p + \alpha_p \otimes df(p) + df(p) \otimes \alpha_p$, siendo $\alpha_p = \frac{1}{2} \Gamma_{ii}^{i}(p) dx^i$ 1-forma en $T_p(M)$ por lo que las restricciones de H_f^p y $H_f(p)$ a $\ker(df(p))$ coinciden con $\mathbb{H}_f(p)$.

BIBLIOGRAFIA

[1] F.BRICKELL , R.S.CLARK : DIFFERENTIABLE MANIFOLDS. AN INTRODUCTION
VAN NOSTRAND REINHOLD COMPANY 1970

[2] CLAUDE GODBILLON : GEOMETRIE DIFFERENTIELLE ET MECANIC ANALITIQUE.
HERMAN 1969

[3] W.AMBROSE, R.S.PALAIS and I.M.SINGER : "SPRAYS"
ANAIS DA ACADEMIA BRASILEIRA DE CIENCIAS
VOLUMEN 32 Nº 2 , 1960

[4] J. MILNOR : MORSE THEORY.
ANNALS OF MATHEMATICS STUDIES.
PRINCETON UNIVERSITY PRESS , 1963