SOBRE LA EXTENDIBILIDAD DE CAMPOS DE KILLING

J. Lafuente

El motivo de esta nota, es dar una demostración plausible al siguiente

TEOREMA P

Un campo de Killing definido en un abierto conexo de una variedad M semi-riemanniana localmente simétrica, conexa y simplemente conexa, se extiende de forma única a un campo de Killing global en todo M.

En lo que sigue supondremos que M =(M,g) es una variedad semi-Riemanniana de dimensión $n\geq 2$. Se denota ∇ la derivada covariante respecto a la conexión de Levi-Civita.

§1 Campos de Killing

Como es sabido un campo de Killing sobre M, es un campo K en M, que verifica $\nabla_K g=0$. Esta condición equivale a decir que su flujo está definido por isometrías (locales) ϕ_s.

Nos interesa aquí recalcar dos propiedades importantes de "rigidez" de los campos de Killing:

PROPOSICION 1.1

Un campo de Killing en M, induce por restricción campos de Jacobi sobre las geodésicas de M.

PROPOSICION 1.2

Sean K y K' campos de Killing en M, y $p\in M$. Si $K(p)=K'(p)$ y $(\nabla K)(p)=(\nabla K')(p)$ entonces $K=K'$.

En particular, si dos campos Killing coinciden en un entorno, coinciden en toda la variedad.

§2 Extendibilidad local.

Fijado $p\in M$ denotamos por $\mathcal{K}(p)$ el espacio de los campos de Killing que están definidos sobre un entorno conexo de p.

DEFINICION 2.1

Sea $K\in\mathcal{K}(p)$, y U un entorno conexo de p. Se dice que K es extendible a U, si existe $\bar{K}$ campo de Killing en U que coincide con K en un entorno de p.

Si $K\in\mathcal{K}(p)$, denotamos por $\mathcal{D}(p,K)$ la familia de todos los abiertos conexos U que contienen al punto p, sobre los que K es extendible. La unión D(p,K) de todos los abiertos de $\mathcal{D}(p,K)$ es un abierto conexo que contiene a p, y por la Proposición 1.2, $D(p,K)\in\mathcal{D}(p,k)$. Además por construcción, D(p,K) constituye el abierto conexo más grande en el que se puede definir una extensión Killing de K.

DEFINICION 2.2

Si $K\in\mathcal{K}(p)$, el conjunto $D(p,K)$ se denomina dominio de máxima extendibilidad de K.

DEFINICION 2.3

Sea $\alpha:I=[a,b]\longrightarrow M$ una curva continua y $K\in\mathcal{K}(\alpha(a))$. Se dice que K es localmente extendible a lo largo de α, si existe una partición $a=t_0<t_1<\ldots<t_r=b$ del intervalo I y una familia $\mathcal{F}=\{(\mathcal{U}_i,K_i):i=1,\ldots,r\}$ tal que:

i) $\mathcal{U}_i$ es abierto y convexo en M y $\alpha[t_{i-1},t_i]\subset\mathcal{U}_i$ $\forall i\in\{1,\ldots,r\}$.

ii) K_i es un campo Killing en $\mathcal{U}_i$, y K_1 coincide con K en un entorno de $\alpha(a)$.

iii) $\forall i\in\{1,\ldots,r\}$, se tiene que $K_i(p)=K_{i+1}(p)$ en la componente conexa de $\mathcal{U}_i\cap\mathcal{U}_{i+1}$ que contiene a $\alpha(t_i)$.

En estas condiciones, existe un único campo K_α *continuo* a lo largo de α de forma que $K_\alpha(t)=K_i(\alpha(t))$ si $t\in[t_{i-1},t_i]$, y este campo solo depende del campo de Killing inicial $K\in\mathcal{K}(\alpha(a))$.

Nótese que si α es diferenciable entonces K_α es diferenciable, y si α es geodésica, entonces K_α es un campo de Jacobi.

Hay un argumento estandar que permite probar el siguiente

TEOREMA 2.4

Sea $K\in\mathcal{K}(p)$. Supóngase que K es localmente extendible a lo largo de cualquier curva continua que parta de p. Si M es simplemente conexa, entonces K es extendible globalmente a un campo Killing.

Por otra parte las hipótesis del teorema anterior pueden modificarse en el siguiente sentido:

LEMA 2.5

Supóngase que M tiene la siguiente propiedad:

Para cada $p\in M$, existe un entorno convexo $\mathcal{U}$ de p, de forma que cualquier campo $K\in\mathcal{K}(p)$ K es extendible a todo $\mathcal{U}$.

En estas condiciones, si $K\in\mathcal{K}(p)$ entonces K es localmente extendible a lo largo de cualquier curva continua que parta de p.

Demostración:

Sea $\alpha:[0,b]\longrightarrow M$ una curva continua con $\alpha(0)=p$. Supongamos K definido sobre un entorno convexo $\mathcal{U}_1$ de p.

Tomemos $t_1\in[0,b]$ con $\alpha[0,\ t_1]\subset\mathcal{U}_1$. Sea:

$\mathfrak{T}=\{t\in[t_0,b]$: K es localmente extendible a lo largo de $\alpha|[0,t]\}$

Evidentemente $\mathfrak{I}$ es un intervalo abierto en $[0,b]$, y $t_1\in\mathfrak{I}$. Sea:

$$\tau=\text{supremo}\{t\in[t_0,b]\ /\ t\in\mathfrak{I}\}$$

veamos que $\tau\in\mathfrak{I}$ y en consecuencia $\mathfrak{I}$ es también cerrado en $[t_0,b]$, por tanto, $\mathfrak{I}=[t_0,b]$.

Para ello tomemos el entorno convexo $\mathcal{U}$ de $\alpha(\tau)$, que aparece como hipótesis, y sea $\rho\in\mathfrak{I}$ $(\rho<\tau)$ con $\alpha(\rho)\in\mathcal{U}$.

Sabemos que K es extendible en $\alpha|[0,\rho]$, y existe por tanto una partición $0=t_0<\ldots<t_r=\rho$ y una familia $\mathcal{F}=\{(\mathcal{U}_i,K_i):i=1,\ldots,r\}$ verificando 2.3, y K_r está definido en un abierto de $\mathcal{U}$. Existe por tanto un campo de Killing K_{r+1} en $\mathcal{U}=\mathcal{U}_{r+1}$ extensión de K_r. Así $\mathcal{F}'=\{(\mathcal{U}_i,K_i):i=1,\ldots,r+1\}$ defiene una extensión local de K en $\alpha|[0,\tau]$, y $\tau\in\mathfrak{I}$.

§3 Resultados Auxiliares

Para poder demostrar la propiedad del lema 2.3 anterior para espacios localmente simétricos, es esencial el teorema de Cartan junto al siguiente lema.

Establezcamos antes alguna terminología:

Si $\gamma:[0,a]\longrightarrow M$ es un curva diferenciable, llamaremos base a lo largo de γ a un sistema $(E_1,\ldots,E_n)$ de campos diferenciables a lo largo de γ de forma que $(E_1(s),\ldots,E_n(s))$ determina una base vectorial de $T_{\gamma(s)}M$ para todo $s\in[0,a]$.

LEMA 3.1

Supóngase M dotada de una conexión lineal, y p un punto de M. Existe entonces un entorno convexo $\mathcal{U}$ de p con la siguiente propiedad:

Para todo $x\in\mathcal{U}$, para toda curva diferenciable $\gamma:[-a,a]\longrightarrow\mathcal{U}$ con $\gamma(0)=x$, y toda base $(E_1,\ldots,E_n)$ a lo largo de γ, existe $\varepsilon>0$, tal que, para todo s con $0\le s\le a$, la función exponencial $\exp_{\gamma(s)}$ define un difeomorfismo sobre el abierto $\tilde{\mathbb{B}}_s(\varepsilon)=\{\xi=\Sigma\xi^i(s)E_i(s)\in T_{\gamma(s)}M:\ \Sigma(\xi^i)^2<\varepsilon\}$ de $T_{\gamma(s)}M$.

Demostración:

Sea $p\in M$. Podemos elegir $\mathcal{W}$ y $\mathcal{U}$ entornos covexos de p de forma que $\mathcal{U}$ sea un dominio regular relativamente compacto cuya adherencia está contenida en $\mathcal{W}$. Así la frontera $\partial\mathcal{W}=S$ de $\mathcal{U}$ es una hipersuperficie compacta contenida en $\mathcal{W}$.

Fijemos un punto $x\in\mathcal{U}$ y $\gamma:[-a,a]\longrightarrow M$ una curva, que podemos suponer contenida en $\mathcal{U}$, y una base $(E_1,\ldots,E_n)$ a lo largo de γ.

Para cada $s\in[0,a]$, sea $\Theta_s:T_{\gamma(s)}M\longrightarrow\mathbb{R}^n$ el isomorfismo de coordenadas dado por la base $(E_1(s),\ldots,E_n(s))$ de $T_{\gamma(s)}M$, es decir:

$$\xi=\Sigma\Theta_s^i(\xi)E_i(s)$$

Por otra parte, la aplicación $\exp_{\gamma(s)}:\tilde{\mathcal{U}}_s\longrightarrow\mathcal{U}$ define un difeomorfismo sobre un abierto estrellado $\tilde{\mathcal{U}}_s$ de $T_{\gamma(s)}M$, y $\tilde{\mathcal{W}}_s=\exp_{\gamma(s)}^{-1}(\mathcal{W})$ es un dominio regular estrellado de$T_{\gamma(s)}M$, con frontera $\tilde{S}_s=\exp_{\gamma(s)}^{-1}(S)$.

Por tanto, $\mathcal{W}_s=\Theta_s(\tilde{\mathcal{W}}_s)$, es un dominio regular de $\mathbb{R}^n$ con frontera $S_s=\Theta_s(\tilde{S}_s)$, y $0\in\mathcal{W}_s$.

Se considera la aplicación diferenciable:

$$\Phi:[0,a]\times S\ni(s,q)\longrightarrow\Theta_s(\exp_{\gamma(s)}^{-1}(q))\in\mathbb{R}^n$$

Por lo anterior, se concluye que $0\notin$ im Φ, que es un compacto, y por tanto existe $\varepsilon>0$ de forma que si $\mathbb{B}(\varepsilon)=\{\xi\in\mathbb{R}^n:\Sigma(\xi^i)^2<\varepsilon\}$ es $\mathbb{B}(\varepsilon)\cap\mathrm{im}\ \Phi=\emptyset$.

Por construcción, $\mathbb{B}(\varepsilon)$ está contenido en $\mathcal{W}_s$ para todo $s\in[0,a]$. Esto significa que $\tilde{\mathbb{B}}_s(\varepsilon)=\Theta_s^{-1}(\mathbb{B}(\varepsilon))\subset\tilde{\mathcal{W}}_s$ está contenido en $\tilde{\mathcal{U}}_s$ en donde la exponencial define un difeomorfismo.

TEOREMA 3.2 (De Cartan)

Sean M y $\bar{M}$ variedades localmente simétricas, $p\in M$, $\bar{p}\in\bar{M}$, y $L:T_pM\longrightarrow T_{\bar{p}}\bar{M}$ una isometría lineal que preserva el tensor de curvatura. Sean $\mathbb{B}$ y $\bar{\mathbb{B}}$ abiertos estrellados respecto al origen de T_pM y $T_{\bar{p}}\bar{M}$ tales que:
$\exp_p:\mathbb{B}\longrightarrow\exp_p(\mathbb{B})=B$, y $\exp_{\bar{p}}:\bar{\mathbb{B}}\longrightarrow\exp_{\bar{p}}(\bar{\mathbb{B}})=\bar{B}$ definen difeomorfismos.

Existe entonces la única aplicación $\phi:B\longrightarrow\bar{B}$ que hace conmutativo el diagrama:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{B} & \xrightarrow{L} & \bar{\mathbb{B}} \\ {\scriptstyle \exp_p}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \exp_{\bar{p}}} \\ B & \xrightarrow{\phi} & \bar{B} \end{array}$$

es una isometría, precisamente la única tal que $d\phi(p)=L$.

NOTACION 3.3

Si Z es un campo en M, un flujo local de Z en torno a $q\in M$ es un objeto de la forma (U_0,ϕ,δ,U) donde U_0, y U son entornos de q, $\delta>0$, y $\phi:I_\delta\times U_0\longrightarrow U$ es aplicación suprayectiva que define el flujo de Z, es decir:

Para cada $x\in U_0$, $I_\delta\ni s\longrightarrow\phi(s,x)\in U$ es la curva integral de Z por x, y las aplicaciones $\phi_s:U_0\ni x\longrightarrow\phi(s,x)\in\phi_s(U_0)=U_s$ son los difeomorfismos que definen el grupo uniparamétrico local de Z.

§4 Conclusión.

Para la demostración del Teorema P es suficiente, en virtud del Teorema 2.2 y el Lema 2.3, con demostrar el siguiente

TEOREMA 4.1

Supóngase M espacio localmente simétrico y $p\in M$. Existe entonces un entorno convexo $\mathcal{U}$ de p, de forma que para todo campo de Killing $K\in\mathcal{K}(p)$, K es exten-

dible a todo $\mathcal{U}$.

Demostración:

Sea $\mathcal{U}$ el entorno convexo de p elegido en el Lema 3.1, y sea D(p,K) el dominio de máxima extendibilidad de K. Denotamos por D la componente conexa de $\mathcal{U}\cap D(p,k)$ que contiene al punto p. Claramente, D es un abierto no vacío. Para probar que D es también cerrado en $\mathcal{U}$ (y por tanto coincide con $\mathcal{U}$) es suficiente comprobar que $\mathcal{U}$ no tiene puntos de la frontera topológica de D, es decir $\mathcal{U}\cap\partial D=\emptyset$.

Para ello construyamos un campo Z en $\mathcal{U}$ de la siguiente forma:

Si $x\in\mathcal{U}$, tomamos la única geodésica $\gamma_x:[0,1]\longrightarrow\mathcal{U}$ con $\gamma_x(0)=p$ y $\gamma_x(1)=x$. Sea V^x el único campo de Jacobi de γ_x tal que $V^x(t)=K(\gamma_x(t))$ cuando $\gamma_x(t)\in D$. Definimos entonces Z(x) como $V^x(1)\in T_xM$.

El campo Z así definido es evidentemente diferenciable, y coincide con K en D.

Supóngase que existe $q\in\mathcal{U}\cap\partial D$. Construyamos flujo local de Z en torno a q (U_0,ϕ,δ,U) (ver notación 3.3), de forma que U esté contenido en $\mathcal{U}$.

Hay dos posibilidades:

(1) $\phi_s(U_0\cap D)\subset D$ para todo $s\in I_\delta$.

(2) Existe un punto $r\in U_0\cap D$ tal que la curva integral $\alpha:I_\delta\ni s\longrightarrow\phi_s(r)\in U$, no está contenida en D.

En el primer caso, es posible tomar una sucesión $(q_k)\subset U_0\cap D$ con lim $q_k=q$. Como Z coinde con K en D, se concluye que ϕ_s define una isometría en $U_0\cap D$, y en particular $d\phi_s(q_k):T_{q_k}M\longrightarrow T_{\phi_s(q_k)}M$ es una isometría lineal que preserva el tensor de curvatura, y se tiene, por ser ϕ el flujo en torno al punto q de un campo vectorial:

$$\lim_{k\to\infty} d\phi_s(q_k)= d\phi_s(q)$$

Así $d\phi_s(q)$ resulta ser una isometría lineal que preserva el tensor de curvatura, para todo $s\in I_\delta$.

Llamando $a=\delta/2$, sea $\gamma:[-a,a]\ni s\longrightarrow\phi_s(q)\in U$, y $(e_1,\dots, e_n)$ una base ortonormal bien ordenada de T_qM. Denotando $E_i(s)=d\phi_s(q)(e_i)$, se verifica que $(E_1(s),\dots,E_n(s))$ es base ortonormal de $\gamma(s)$ para $|s|\le a$.

Usando ahora el lema 3.1, y su notación, existe $\varepsilon>0$ de forma que la aplicación $\exp_{\gamma(s)}$: $\tilde{\mathbb{B}}_s(\varepsilon)\longrightarrow B_s=\exp_{\gamma(s)}(\tilde{\mathbb{B}}_s(\varepsilon))$ es difeomorfismo para todo $s\in I_a$.

Pero claramente es $d\phi_s(q)(\tilde{\mathbb{B}}_0(\varepsilon))=\tilde{\mathbb{B}}_s(\varepsilon)$. Usando ahora el Teorema de Cartan 3.2, se concluye que existe una única isometría $\bar{\phi}_s:B_0\longrightarrow B_s$ con $d\bar{\phi}_s(q)=d\phi_s(q)$. Naturalmente, las isometrías $\bar{\phi}_s$ y ϕ_s coinciden en $B_0\cap D$.

Como $\phi_s(B_0\cap D)=\bar{\phi}_s(B_0\cap D)=B_s\cap D$, se concluye por la rigidez de las isometrías que $(\bar{\phi}_s)$ es un grupo uniparamétric que permite extender el campo de Killing K sobre el entorno B de q. Así $B\subset D$, lo cual contradice que q sea un punto de la frontera de D. Así pues no se puede dar la posibilidad (1).

Veamos que tampoco es posible que:

(2) Existe un punto $r\in U_0\cap D$ tal que la curva integral $\alpha:I_\delta\ni s\longrightarrow\phi_s(r)\in U$, no está contenida en D.

En efecto, si fuera así, existiría un primer s_0 (por ejemplo $0<s_0<\delta$), tal que $q_0=\alpha(s_0)$ está en $\mathcal{U}\cap\partial D$. Tomemos ahora una sucesión creciente (s_k) con $0<s_k<s_0$ y $\lim s_k=s_0$. Como $\alpha(s)=\phi_s(r)\in D$ para $0<s<s_0$, se concluye que ϕ_{s_k} define una isometría en un entorno de r, y así $d\phi_{s_k}(r)$ es una isometría lineal que preserva el tensor de curvatura. Pero por ser ϕ el flujo local de un campo se concluye que $\lim_{k\to\infty} d\phi_{s_k}(r)=d\phi_{s_0}(r)$, es una isometría lineal que preserva el tensor de curvatura.

Nuevamente por el teorema de Cartan, existen entornos V de r y W de $q_0=\phi_{s_0}(r)$, y una isometría $\varphi:V\longrightarrow W$ con $d\varphi(r)=d\phi_{s_0}(r)$.

Se ve entonces facilmente que el campo de Killing K se puede extender sobre $D\cup W$ tomando $K|W=\varphi_*(K|V)$. Esto contradice que q_0 esté en el borde topológico ∂D de D.

Así se concluye que $\mathcal{U}\cap\partial D=\emptyset$, que es lo que queríamos probar.