GEODESICAS INCOMPLETAS NO NULAS EN VARIEDADES SEMI-RIEMANNIANAS MISNER-COMPLETAS.

Javier Lafuente López
Departamento de Geometría y Topología
Facultad de Matemáticas de la Universidad
Complutense de Madrid.

Una variedad semi-Riemanniana M se dice Misner-completa, cuando la trayectoria de cada geodésica $\gamma:[a,b)\longrightarrow M$, $(b<\infty)$ está contenida en algún subconjunto compacto de M.

En el caso Riemanniano, los conceptos de variedad completa y Misner-completa son equivalentes. Existen sin embargo, ejemplos de variedades compactas de Lorentz (como el toro de Clifton-Phol) que admiten geodésicas incompletas, de caracter temporal, nulo, y espacial.

En este trabajo se analiza el comportamiento genérico de las geodésicas incompletas no nulas de una variedad Misner-completa, en las proximidades de sus puntos límite, y se prueba que la obstrucción esencial a la completitud es la existencia de direcciones límite isótropas. Por otra parte, las geodésicas nulas maximales definidas por éstas direcciones, están formadas por puntos límite.

MISNER C.W. K.S. Thorne and J.A Wheeler. GRAVITATION
FREEMAN S. FRANCISCO. (1973)

GEODESICAS INCOMPLETAS NO NULAS EN VARIEDADES SEMI-RIEMANNIANAS MISNER-COMPLETAS.

Javier Lafuente López
Departamento de Geometría y Topología
Facultad de Matemáticas de la Universidad
Complutense de Madrid

ABSTRACT: In this work , the generic behaviour of non-null incomplete geodesics of a Misner-complete semi-Riemennian manifold in the neighbourhood of its limit points, is analized. We prove that the substntial obstruction to their completness is the existence of isotropic limit directions. On the other hand, the null geodesics defined by these directions consist on limit points.

1. PRELIMINAR

1.1 Notaciones:

1. M denota una variedad diferenciable de dimensión finita $n+1$.
Se supone M dotada de una métrica semi-Riemanniana g_s , y de una métrica Riemanniana auxiliar g_r . Si $v\in T_p(M)$ es un vector tangente a M en el punto p, se escribe: $g_s(v,v)= q_s(v)$, $g_r(v,v)=q_r(v)$ $|v| = \left|\sqrt{|q_s(v)|}\right|$, $\|v\| = \left|\sqrt{q_r(v)}\right|$.

2. Si $\gamma:[a,b]\longrightarrow M$ es una curva diferenciable a trozos, $|\gamma|_a^b = \int_a^b|\gamma'(t)|dt$ (respectivamente, $\|\gamma\|_a^b = \int_a^b\|\gamma'(t)\|dt$) es la longitud semi-Riemanniana (respectivamente,Riemanniana) de la curva γ.
Si $x,y\in M$, $d(x,y)$ es la distancia Riemanniana entre ambos puntos, y $B_\varepsilon(x) = \{ y\in M \,/\, d(x,y)<\varepsilon \}$.

3. Para $v\in T_p(M) -\{0\}$ se denota por $[v]$ a la recta vectorial definida por v en $T_p(M)$. $P_p(M)=P(T_pM)$ es la proyectivización natural del espacio vectorial $T_p(M)$. $P(M)=\bigcup P_p(M)$ $(p\in M)$, es un fibrado diferenciable de base M, y fibra P_n; la aplicación $v\longrightarrow[v]$ de $TM-(TM)_o$ en $P(M)$, es diferenciable.

1.2 Definiciones

1. Una geodésica $\gamma:(a,b)\longrightarrow M$ en (M,g_s) se dice extendible por la derecha, si $b<+\infty$ y existe $\tilde\gamma:(a,b')\longrightarrow M$, geodésica en (M,g_s) con $b<b'$ y $\gamma(t) = \tilde\gamma(t)$ para todo $t\in(a,b)$.

2. La extendibilidad por la izquierda se define de forma análoga.
3. Una geodésica $\gamma:(a,b)\longrightarrow M$ en (M,g_s) se dice inextendible, si es inextendible (no extendible) por la derecha y por la izquierda.
4. Una geodésica $\gamma:(a,b)\longrightarrow M$ inextendible en (M,g_s) se dice completa, si $a=-\infty$ y $b=+\infty$.
5. La variedad semi-Riemanniana (M,g_s) se llama geodésicamente completa, si todas sus geodésicas inextendibles son completas.
6. Se dice que (M,g_s) es Misner-completa, si cada geodésica $\gamma:[a,b)\longrightarrow M$ con $b<+\infty$ está contenida en algun subconjunto compacto de M.

1.3 <u>Proposición</u> (véase [1])

Una geodésica $\gamma:[a,b)\longrightarrow M$, $(b<+\infty)$ en (M,g_s) es extendible (por la derecha) si y solo si existe $\lim_{t\to b}\gamma(t)$.

1.4 <u>Proposición</u>

i) Si (M,g_s) es Riemanniana y Misner-completa entonces es geodésicamente completa.

ii) Existen variedades semi-Riemannianas Misner-completas que no son geodésicamente completas.

La primera afirmación es consecuencia inmediata del teorema de Hopf-Rinow . Por otra parte, el toro de Clifton-Phol (véase [2]) es un ejemplo de variedad de Lorentz, con geodésicas incompletas de caracter espacial, nulo, y temporal. Esto prueba la segunda afirmación.

En lo que sigue, la variedad semi-Riemanniana (M,g_s) se supondrá Misner-completa.

2. RESULTADOS AUXILIARES

2.1 <u>Lema</u>

Sea $\gamma:[a,b)\longrightarrow M$ una geodésica de (M,g_s) con $b<+\infty$. Entonces es extendible (por la derecha) si y solo si el conjunto

$\{\|\gamma'(t)\| : t\in [a,b)\}$ es acotado.

Demostración:

Si γ no es extendible, por 1.3 existen sucesiones $(s_i),(t_i)$ en $[a,b)$ con $\lim s_i = \lim t_i = b$ y $\lim\gamma(s_i)=p\neq q=\lim\gamma(t_i)$.

Sea $\delta > 0$ suficientemente pequeño tal que $d(B_\delta(p),B_\delta(q)) > \varepsilon > 0$

Es posible elegir subsucesiones (s_i') de (s_i) y (t_i') de (t_i) de forma que $\gamma(s_i')\in B_\delta(p)$, $\gamma(t_i')\in B_\delta(q)$ y $t_i' < s_i' < t_{i+1}'$ para todo i.

Se tiene así $\|\gamma\|_{t_i'}^{s_i'} \geq \varepsilon$ y $\|\gamma\|(t) \geq \|\gamma\|_{t_1'}^{b} \geq \sum \|\gamma\|_{t_i'}^{s_i'} = +\infty$

En consecuencia, $\|\gamma'(t)\|$ $t\in[a,b)$ no está acotada.

La otra implicación es trivial.

2.2 <u>Lema</u>

Sea $p\in M$, y $(v_i)\subset T_pM$ una sucesión de vectores tal que $q_s(v_i)=k$ siendo k una constante no nula. Si $(\|v_i\|)$ no está acotada, existe una subsucesión (v_i') de (v_i) tal que $\lim[v_i']= R$ es una recta isótropa de (T_pM,q_s).

Demostración:

Si no existe tal subsucesión entonces el conjunto $\{v_i/\|v_i\| : i\in N\}$ no admite puntos de acumulación isótropes, y su adherencia es un conjunto compacto sobre el cual q_s no toma el valor nulo. Existe pues $\varepsilon > 0$ tal que $|q_s(v_i/\|v_i\|)| \geq \varepsilon$, y así , $\|v_i\|^2 \leq |k|/\varepsilon$.

3. TEOREMAS PRINCIPALES

3.1 <u>Teorema</u>

Sea $\gamma : [a,b)\longrightarrow M$ geodésica no nula en (M,g_s) inextendible por la derecha, y $b < +\infty$. Existe entonces una sucesión (t_i) en $[a,b)$ con $\lim t_i= b$, verificando las condiciones:

(1) $\lim\gamma(t_i) = p\in M$

(2) $\lim\gamma'(t_i) = R$ donde R es una recta isótropa en (T_pM,g_s)

Demostración:

Como γ es inextendible, por 2.1 existe una sucesión (t_i) en

$[a,b)$ con $\lim t_i = b$, $\lim \gamma(t_i) = p \in M$ y $(\|\gamma'(t_i)\|)$ no acotada.
Sea U un entorno normal de p en (M,g_s), $(e_o,\ldots,e_n)$ base ortonormal de (T_pM,g_s), y $(E_o,\ldots,E_n)$ base local ortonormal de campos en U obtenida por transporte paralelo a lo largo de geodésicas radiales que parten de p, de la base $(e_o,\ldots,e_n)$.
Para i mayor ó igual que cierto N , se verifica $\gamma'(t_i) \in U$ y podemos escribir $\gamma'(t_i) = \sum a_i^j E_j(\gamma(t_i))$; Sea $v_i = \sum a_i^j e_j$
Como γ es una geodésica no nula, $q_s(\gamma'(t)) = k$ es una constante no nula, y así $q_s(\gamma'(t_i)) = q_s(v_i) = k \neq 0$.
La sucesión (v_i) no está acotada en (T_pM,g_r), pues si lo estuviera podríamos suponer que converge a un vector $v = \sum a^j e_j$, y se tiene: $\lim a_i^j = a^j$ $j=0,\ldots,n$, es decir , $\lim \gamma'(t_i) = v$ y por continuidad $\lim \|\gamma'(t_i)\| = \|v\| < +\infty$. Esto contradice la hipótesis de que $(\|\gamma'(t_i)\|)$ no está acotada.
Por el Lema 2.2 , existe R recta isótropa de (M,g_s) y una subsucesión de (v_i) que podemos suponer igual a (v_i), tal que $\lim [v_i] = R$. De aquí se concluye que $\lim [\gamma'(t_i)] = R$.

3.2 <u>Observación</u>:

A partir de la demostración anterior, es facil ver que fijado $u \in R$ pueden determinarse coeficientes reales no nulos λ_i tales que la sucesión $(\lambda_i \gamma'(t_i))$ converge al vector u .

3.3 <u>Teorema</u>

Sea $\gamma : [a,b) \longrightarrow M$ geodésica inextendible en (M,g_s) , $b < +\infty$. Si R es una dirección límite para γ , entonces la geodésica semi-Riemanniana maximal definida por R, está formada por puntos limite de γ .

Demostración:

Que R sea dirección limite para γ ,significa que R es recta vectorial de cierto T_pM , y existe una sucesión (t_i) en $[a,b)$ con $\lim t_i = b$,$\lim \gamma(t_i) = p$ (p es punto limite) y $\lim [\gamma'(t_i)] = R$

Sea U entorno convexo de p en (M,g_s). Tomemos un "pequeño" vector $u \in R$ no nulo tal que $\exp_p(u)$ y $\exp_p(-u)$ estén en U. Por 3.2 puede construirse una sucesión $v_i = \lambda_i \gamma'(t_i)$ con $\lim t_i = b$ y $\lim v_i = u$, y se puede suponer que $\exp_{\gamma(t_i)} sv_i \in U$ para $|s| \leq 1$ y i mayor ó igual que cierto N . Nótese que para $|s| \leq 1$ se verifica que $\exp_{\gamma(t_i)} sv_i \in \operatorname{im}\gamma$, y que $\lim \exp_{\gamma(t_i)} sv_i = \exp_p(su)$. Denotando por $\sigma_v : (-1,1) \ni s \longrightarrow \exp(sv) \in M$ para cada vector $v \in TM$ (suficientemente pequeño), lo anterior permite concluir que los puntos de la geodésica σ_u son puntos limite de γ. Por otra parte, fijado s con $|s| \leq 1$, es $\lim \sigma'_{v_i}(s) = \sigma'_u(s)$, y como los vectores $\sigma'_{v_i}(s)$ son tangentes a γ, se deduce que $[\sigma'_u(s)]$ es dirección límite.

Si $\sigma : (\alpha, \beta) \longrightarrow M$ es la geodésica maximal con vector inicial u, el argumento anterior prueba que el conjunto $J = \{ t \in (\alpha, \beta) : [\sigma'(t)]$ es dirección limite de $\gamma \}$, es abierto y no vacío. Un sencillo argumento topológico prueba ahora que J es también cerrado, y coincide por tanto con (α, β).

4. BIBLIOGRAFIA

[1] O'NEILL BARRET — Semi-Riemannian geometry with applications to Relativity. Academic Press Inc. (1983)

[2] MARCUS L. — Cosmological models in differential geometry. University of Minnesota, Minneapolis (1963)

[3] JHON K. BEEM & PAUL E.EHRLICH — Global Lorentzian Geometry. Pure and aplied mathematics (1981)