SPRAYS DE TRAYECTORIAS

Por Javier Lafuente López

Utilizando el concepto de operador hessiano por niveles introducido por nosotros en otro artículo, se establecen condiciones necesarias y suficientes para que un sistema de unparametrized trayectorias constituya el conjunto de trayectorias de un Spray.

* y $T(M)$ el fibrado tangente de M

T_pM es el espacio de vectores tangentes a M por el punto p *

§1 Convenios y notaciones:

M denota una variedad diferenciable real conexa de dimensión finita n; si $p \in M$ * y se denota por $\mathcal{F}(p)$, y $\mathfrak{X}(p)$ el conjunto de funciones diferenciables reales, y campos vectoriales diferenciables respectivamente, definidas en un entorno de p. $\mathcal{F}_p$ y $\mathfrak{X}_p$ denotan los correspondientes espacios de gérmenes en el punto p. Una función $f \in \mathcal{F}(p)$ define un germen de $\mathcal{F}_p$ que normalmente denotaremos por la misma letra f. Análoga observación para $\mathfrak{X}(p)$ y $\mathfrak{X}_p$.

Si M es Riemanniana se denota por $SM = \{v \in TM \mid \|v\| = 1\}$ * fibrado unitario

§2 Definiciones preliminares

1) Una trayectoria regular es una subvariedad unidimensional τ de M regularmente inmersa, conexa y sin borde.

2) Una trayectoria es un subconjunto conexo σ de M verificando la siguiente condición: $\forall p \in \sigma$ $\exists U$ entorno abierto de p en M tal que $U \cap \sigma = \bigcup_{\alpha \in A} \sigma_\alpha$ siendo para cada $\alpha \in A$ σ_α una trayectoria regular (que denominamos subtrayectoria regular de σ), y si $\alpha, \beta \in A$ $\alpha \neq \beta$ es $\sigma_\alpha \cap \sigma_\beta = \{p\}$. Se denota por $T_p(\sigma) = \bigcup_{\alpha \in A} T_p \sigma_\alpha$.

3) Una familia Σ de trayectorias se denomina Spray de trayectorias si

S.1) $\forall v_p \in T_pM$ $v_p \neq 0$ existe una curva $\sigma \in \Sigma$ tal que $v_p \in T_p\sigma$

S.2) $\forall p \in M$, existe (U, ϕ) carta de M por el punto p $\phi = (x^1, \dots x^n)$ con $x^i(p) = 0$ $i = 1, \dots n$, tal que $\phi^{-1}(r \cap \phi(U))$ sea subtrayectoria regular de alguna trayectoria $\sigma \in \Sigma$ para cualquier recta r de $\mathbb{R}^n$ que contenga al origen.

4) Un operador hessiano por un punto $p \in M$ es un operador $\bar{H}^p$ que asocia a cada $f \in \mathcal{F}_p$ una forma bilineal simétrica $\bar{H}^p_f$ en T_pM, que depende $\mathbb{R}$-linealmente de f, y coincide con el hessiano natural si $df(p) = 0$.

Un operador $\bar{H}$ que asigne a cada punto $p \in M$ un operador $\bar{H}^p$ del tipo anterior, se denomina operador hessiano en M si se verifica la siguiente condición de diferenciabilidad: $\forall X \in \mathfrak{X}(M)$ $\forall f \in \mathcal{F}(M)$ la función $M \ni p \mapsto \bar{H}^p_f(X, X) \in \mathbb{R}$ es diferenciable (ver [1])

5) Un operador hessiano por niveles en un punto $p \in M$ es un operador H^p que asigna a cada $f \in \mathcal{F}_p$ una forma bilineal simétrica H^p_f en $\ker df(p)$ tal que existe $\overline{H}^p$ operador hessiano por el punto p que es extensión de H^p, es decir, $\forall f \in \mathcal{F}_p$ $\overline{H}^p_f$ y H^p_f coinciden sobre los vectores de $\ker df(p)$ (Ver [2])

Un operador hessiano por niveles en M es un operador H que asigna a cada punto $p \in M$ un operador H^p del tipo anterior verificando la siguiente condición de diferenciabilidad:
$\forall p \in M$ $\forall f \in \mathcal{F}(p)$ $\forall X \in \mathfrak{X}(p)$ con $X(p) \neq 0$ y $X(f) = 0 \in \mathcal{F}_p \Rightarrow H_f(X,X) \in \mathcal{F}(p)$.

§3 Resultados básicos.

TEOREMA 1 (Ver [1])

Un Spray S da lugar a un operador hessiano $\overline{H}$ en M definido por la condición
$\forall f \in \mathcal{F}(p)$ $\forall v_p \in T_pM$ $H_f(v_p, v_p) = \dfrac{d^2 f \circ \sigma}{ds^2}\Big|_{s=0}$ para $\sigma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ curva integral de S con condiciones iniciales $\dfrac{d\sigma}{ds}\Big|_{s=0} = v_p$.

Recíprocamente: un operador hessiano $\overline{H}$ en M da lugar a un único Spray S relacionado con $\overline{H}$ de la forma descrita anteriormente

TEOREMA 2. (Ver [2])

Dado un operador hessiano por niveles H en M, existe $\overline{H}$ operador hessiano en M tal que para todo $p \in M$ $\overline{H}^p$ es extensión de H^p en el sentido establecido en la definición 5. Además todos los sprays correspondientes a extensiones (diferenciables) $\overline{H}$ de H poseen las mismas trayectorias

§4 Resultados obtenidos

TEOREMA 3.

1) Un Spray de trayectorias Σ, de M, induce en cada punto $p \in M$ un operador hessiano por niveles H^p definido por la siguiente condición: si $v_p \in T_pM$ $v_p \neq 0$ sea $\sigma \in \Sigma$, tal que $v_p \in T_p\sigma$ y σ_α subtrayectoria regular de σ con $v_p \in T_p \sigma_\alpha$. Si $\varphi : (-\varepsilon, \varepsilon) \to \sigma_\alpha \subset M$ es una parametrización local de σ_α en p con $\varphi(0) = p$ $\varphi'(0) = v_p$ entonces para $f \in \mathcal{F}_p$ con $df(v_p) = 0$ es
$H^f_p(v_p, v_p) = \dfrac{d^2 f \circ \varphi}{ds^2}\Big|_{s=0}$.

2) En consecuencia, por el teorema 2, si la asignación $p \to H^p$ es diferenciable (en el sentido de la definición 5) entonces Σ constituye el conjunto de trayectorias de algún Spray S

3) El carácter diferenciable de la asignación $p \to H^p$ queda garantizado si se verifican alguna de las siguientes condiciones equivalentes

i) Existe g métrica riemanniana en M tal que la aplicación $k_g : \Sigma M \to T(M)$ que hace corresponder a cada $v_p \in \Sigma_p M$ el vector curvatura de la subtrayectoria regular σ_α de $\sigma \in \Sigma$ que verifica $v_p \in T_p \sigma_\alpha$, es aplicación diferenciable.

ii) Para toda g métrica riemanniana en M k_g es diferenciable

iii) para cada $p \in M$, existe U entorno de p y g métrica riemanniana en U tal que $R_g : S(U) \to T(U)$ es diferenciable

4) Recíprocamente, si S es un spray y Σ_1 denota al conjunto de trayectorias (maximales) de S, entonces Σ_1 es un spray de trayectorias que cumple las condiciones equivalentes i) ii) iii).

Idea de la demostración:

La demostración de 1) se basa en la siguiente observación: si σ es una trayectoria regular de M y $p \in \sigma$, y $\varphi : (-\varepsilon, \varepsilon) \to \sigma$ $\psi : (-\delta, \delta) \to \sigma$ son dos parametrizaciones regulares locales en el punto p de σ con $\varphi'(0) = \psi'(0) = v_p \in T_pM$, entonces $\forall f \in \mathcal{F}_p$ con $df(v_p) = 0$ es $\left.\frac{d^2 f\cdot\varphi}{dt^2}\right|_{t=0} = \left.\frac{d^2 f\cdot\psi}{ds^2}\right|_{s=0}$

esto permite definir sin ambigüedad el operador H^P de la forma indicada en 1)
utilizando ahora la condición S.2 de la definición 3, se prueba que H^P es restricción de un operador hessiano $\bar{H}^P$ en el punto p
las conclusiones 3) y 4) se deducen por simple computación.

§5 Conjeturas.

1) Si Σ_1 es un sistema de trayectorias en M cumpliendo la condición S.1. y la condición de diferenciabilidad i) de 3) es previsible suponer que la condición S.2 puede ser sustituida por: $S'.2$ $\forall p \in M$ $\exists U$ entorno convexo de p tal que

a) $\forall \sigma, \tau \in \Sigma_1$ con $p \in \sigma \cap \tau$ se tiene o bien $\sigma = \tau$ o bien $\sigma \cap \tau \cap U = \{p\}$.

b) $U = \bigcup \{\sigma \cap U \mid \sigma \in \Sigma_1, p \in \sigma\}$.

2) Supongase M riemanniana y X una ecuación diferencial de 2º orden en M cumpliendo la condición: si $\varphi : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ es curva integral de X también lo es $\bar{\varphi}(t) = \varphi(-t)$ $|t| < \varepsilon$
si $u \in SM$ se denota por φ_u la curva integral maximal de X con $\varphi_u'(0) = u$ y $\sigma_u = \mathrm{im}\,\varphi_u$.
Entonces la colección $\Sigma_1 = \{\sigma_u \mid u \in SM\}$ constituye el conjunto de trayectorias de un spray, si y sólo si se cumple la condición $S'.2$.

iii) para cada $p \in M$, existe U entorno de p y g métrica riemanniana en U tal que $\mathcal{R}_g : \mathcal{S}(U) \to T(U)$ es diferenciable

4) Recíprocamente, si S es un spray y Σ_1 denota al conjunto de trayectorias (maximales) de S, entonces Σ_1 es un spray de trayectorias que cumple las condiciones equivalentes i) ii) iii)

Idea de la demostración:

La demostración de 1) se basa en la siguiente observación: si σ es una trayectoria regular de M y $p \in \sigma$, y $\varphi : (-\varepsilon, \varepsilon) \to \sigma$ $\psi : (-\delta, \delta) \to \sigma$ son dos parametrizaciones regulares locales en el punto p de σ con $\varphi'(0) = \psi'(0) = v_p \in T_pM$, entonces $\forall f \in \mathcal{F}_p$ con $df(v_p) = 0$ es $\left.\frac{d^2 f\cdot\varphi}{dt^2}\right|_{t=0} = \left.\frac{d^2 f\cdot\psi}{ds^2}\right|_{s=0}$

esto permite definir sin ambigüedad el operador H^P de la forma indicada en 1)

utilizando ahora la condición S.2 de la definición 3, se prueba que H^P es extensión de un operador hessiano $\bar{H}^P$ en el punto p

las conclusiones 3) y 4) se deducen por simple computación.

§5 Conjeturas.

1) Si Σ_1 es un sistema de trayectorias en M cumpliendo la condición S.1. y la condición de diferenciabilidad i) de 3) es previsible suponer que la condición S.2 puede ser sustituida por: S'.2 $\forall p \in M$ $\exists U$ entorno convexo de p tal que

a) $\forall \sigma, \tau \in \Sigma_1$ con $p \in \sigma \cap \tau$ se tiene o bien $\sigma = \tau$ o bien $\sigma \cap \tau \cap U = \{p\}$.

b) $U = \bigcup \{\sigma \cap U \mid \sigma \in \Sigma_1, p \in \sigma\}$.

2) Supóngase M riemanniana y X una ecuación diferencial de 2º orden en M cumpliendo la condición: si $\varphi : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ es curva integral de X también lo es $\bar{\varphi}(t) = \varphi(-t)$ $|t| < \varepsilon$. Si $u \in \mathcal{S}M$ se denota por φ_u la curva integral maximal de X con $\varphi_u'(0) = u$ y $\sigma_u = \operatorname{im} \varphi_u$. Entonces la colección $\Sigma_1 = \{\sigma_u \mid u \in \mathcal{S}M\}$ constituye el conjunto de trayectorias de un spray, si y solo si se cumple la condición S'-2.

"SPRAYS DE TRAYECTORIAS"

M es una variedad diferenciable real conexa de dimensión finita n. $\mathfrak{X}(M)$, $\mathcal{F}(M)$ denotan respectivamente el álgebra de Lie de los campos diferenciables en M, y de las funciones diferenciables.
Si $p\in M$ $\mathcal{F}(p)$ denota el anillo de las funciones diferenciables en un entorno de p.
y $\mathcal{F}_p$ el de los gérmenes en el punto p. Normalmente se identificará en lo que a notación se refiere $f\in\mathcal{F}(p)$ con la clase $[f]$ definida por f en $\mathcal{F}_p$.
Análogas observaciones para $\mathfrak{X}(p)$ y $\mathfrak{X}_p$.

DEFINICIONES.

a) Una trayectoria regular de M es una subvariedad τ unidimensional de M regularmente inmersa, conexa y sin borde.

b) Una S-trayectoria en M es un subconjunto conexo σ de M verificando la siguiente condición: $\forall p\in\sigma$ $\exists U$ entorno abierto de p en M tal que $U\cap\sigma=\bigcup_{\alpha\in A}\sigma_\alpha$ siendo para cada $\alpha\in A$ σ_α una trayectoria regular, y si $\alpha,\beta\in A$ $\alpha\neq\beta$ es $\sigma_\alpha\cap\sigma_\beta=\{p\}$ y $T_p\sigma_\alpha\cap T_p\sigma_\beta=\{0_p\}$.
Se denota por $T_p(\sigma)=\bigcup_{\alpha\in A}T_p\sigma_\alpha$ (y no depende del entorno U elegido para p) (*)

c) Una familia Σ_1 de S-trayectorias de M se denomina Spray de trayectorias, si verifica las siguientes condiciones:

1) $\forall v_p\in T_pM$ $v_p\neq 0$ existe una única $\sigma\in\Sigma_1$ tal que $v_p\in T_p\sigma$

2) $\forall p\in M$ existe una carta (U,ϕ) por el punto p $\phi=(x^1\ldots x^n)$ con $x^i(p)=0$ $i=1\ldots n$ y $\phi(U)$ estrellado respecto a 0 tal que $\forall u\in U$ la imagen de la curva $x^i(t)=t\,x^i(u)$ $[0\leq t\leq 1]$ sea subtrayectoria regular de alguna trayectoria $\sigma\in\Sigma_1$. (*)

d) Un operador hessiano por un punto $p\in M$ es un operador $\bar{H}^p$ que asocia a cada $f\in\mathcal{F}_p$ una forma bilineal simétrica $\bar{H}^p_f$ en T_pM verificando las condiciones

i) $\bar{H}^p_f=\mathrm{Hess}_f(p)$ si $df(p)=0$

ii) $\bar{H}^p_{f+g}=\bar{H}^p_f+\bar{H}^p_g$

iii) $\bar{H}^p_{rf}=r\bar{H}^p_f$

Un operador Hessiano en M es un operador $\bar{H}$ que asigna a cada $p\in M$ un operador Hessiano $\bar{H}^p$ por el punto p verificando la siguiente condición de diferenciabilidad: $\forall X\in\mathfrak{X}(M)$ $\forall f\in\mathcal{F}(M)$ la función $M\ni p\mapsto\bar{H}^p_f(X,X)\in\mathbb{R}$ es diferenciable.

e) Un operador hessiano por niveles (O.H.N) en un punto p es un operador H^p que asigna a cada $f\in\mathcal{F}_p$ una forma bilineal simétrica H^p_f en $\ker df(p)$ tal que existe $\bar{H}^p$ operador hessiano por el punto p que es extensión de H^p en el siguiente sentido
$\forall f\in\mathcal{F}_p$ $\bar{H}^p_f(\ldots)$

Un O.H.N en M, es un operador H que asocia a cada punto p, un H^p O.H.N por p verificando la siguiente condición de diferenciabilidad:

$\forall p\in M$ $\forall f\in \mathcal{F}(p)$ $\forall X\in \mathfrak{X}(p)$ con $X(p)\neq 0$ y $df(X)=0\in \mathcal{F}_p$ es $H_f(X,X)\in \mathcal{F}(p)$

TEOREMA 1 (ver [1])

Un Spray S da lugar a un operador Hessiano $\bar{H}$ definido por la condición $\forall f\in \mathcal{F}(p)$ $\forall v_p\in T_pM$ $H_f(v_p,v_p)=\frac{d^2 f\circ\sigma}{ds^2}\Big|_{s=0}$ para $\sigma: I_\varepsilon\to M$ curva integral de S con $\frac{d\sigma}{ds}\Big|_{s=0}=v_p$.

Recíprocamente: un O.H $\bar{H}$ da lugar a un único Spray S relacionado con $\bar{H}$ de la forma descrita anteriormente

TEOREMA 2 (ver [2])

Dado un O.H.N H en M existe $\bar{H}$ O.H en M tal que $\forall p\in M$ $\bar{H}^p$ es extensión de H^p. Además todos los Sprays correspondientes a extensiones $\bar{H}$ de H poseen las mismas trayectorias.

En el presente trabajo se demuestra el siguiente:

TEOREMA 3

- Un Spray de trayectorias Σ de M, induce para cada punto $p\in M$, un operador hessiano por niveles H^p en p definido por la siguiente condición

$\forall p\in M$ y $v_p\in T_pM$ $v_p\neq 0$ se toma $\sigma\in\Sigma$ tal que $v_p\in T_p\sigma$. Sea σ_{v_p} la trayectoria regular de σ en p con dirección v_p y $\varphi: I_\varepsilon\to M$ una parametrización regular de σ_α con $\varphi(0)=p$ y $\varphi'(0)=v_p$. Entonces $H_f(v_p,v_p)=\frac{d^2 f\circ\varphi}{ds^2}\Big|_{s=0}$ si $df(v_p)=0$

En consecuencia si la aplicación $p\to H^p$ es diferenciable en el sentido establecido en a) entonces Σ constituye el conjunto de trayectorias de un Spray S.

El carácter diferenciable de la aplicación anterior $p\to H^p$ puede garantizarse si se verifica alguna de las siguientes condiciones equivalentes

i) Existe g métrica riemanniana en M tal que la aplicación $\mathcal{H}: SM\to T(M)$ que hace corresponder a cada $v_p\in S_p(M)$, el vector curvatura de σ_{v_p} en el punto p es aplicación diferenciable.

ii) la condición anterior se verifica para cualquier métrica riemanniana.

iii) para cada $p\in M$ $\exists U$ entorno abierto de p en M y g métrica riemanniana en U tal que la condición anterior se verifica.

Demostración del Teorema 3.

Lema 1. Sea σ trayectoria regular de M, $p \in \sigma$ y $v \in T_p\sigma$, $v \neq 0$ si $\varphi : J_t \to M$, $\psi : I_s \to M$ son dos parametrizaciones locales de σ en un entorno de p con $\varphi'(0) = \psi'(0) = v$, y $f \in \mathcal{F}(p)$ con $df(p)(v) = 0$, entonces $\frac{d^2 f\cdot\varphi}{dt^2}\Big|_{t=0} = \frac{d^2 f\cdot\psi}{ds^2}\Big|_{s=0}$.

Demostración: Sea (U, ϕ) $\phi = (x^1 \dots x^n)$ carta de M en $p \in U$, $x^i\varphi = \varphi^i$, $x^i\psi = \psi^i$ y sea $t = t(s)$ las ecuaciones del cambio de parámetros tales que $t(0) = 0$ y $\varphi(t(s)) = \psi(s)$ para s suficientemente pequeño. Entonces $\frac{d\psi}{ds}\Big|_{s=0} = \frac{d\varphi}{dt}\Big|_{t=0} \cdot \frac{dt}{ds}\Big|_{s=0}$ es decir $v_p = \frac{dt}{ds}\Big|_{s=0} v_p$ y como $v \neq 0$ es $\frac{dt}{ds}\Big|_{s=0} = 1$. Por otra parte

$$\frac{df\cdot\psi}{ds} = \frac{\partial f}{\partial x^i}\cdot\frac{d\psi^i}{ds} \quad \text{y} \quad \frac{d^2 f\cdot\psi}{ds^2}\Big|_{s=0} = \left(\frac{\partial f}{\partial x^i \partial x^j}\right)_p v^i v^j + \left(\frac{\partial f}{\partial x^i}\right)_p \frac{d^2\psi^i}{ds^2}\Big|_{s=0} \quad (1)$$

análogamente se tiene

$$\frac{d^2 f\cdot\varphi}{ds^2}\Big|_{s=0} = \left(\frac{\partial f}{\partial x^i \partial x^j}\right)_p v^i v^j + \left(\frac{\partial f}{\partial x^i}\right)_p \frac{d^2\varphi^i}{dt^2}\Big|_{t=0} \quad (2)$$

pero.

$$\frac{d\psi^i}{ds} = \frac{d\varphi^i}{dt}\cdot\frac{dt}{ds} \quad \text{y} \quad \frac{d^2\psi^i}{ds^2}\Big|_{s=0} = \frac{d^2\varphi^i}{dt^2}\Big|_{t=0}\left(\frac{dt}{ds}\right)^2_{s=0} + \frac{d\varphi^i}{dt}\Big|_{t=0}\left(\frac{dt}{ds}\right)_{s=0}$$

es decir

$$\frac{d^2\psi^i}{ds^2}\Big|_{s=0} = \frac{d^2\varphi^i}{dt^2}\Big|_{t=0} + v^i$$

y sustituyendo esta igualdad en (1), teniendo en cuenta que $df(p)(v) = \left(\frac{\partial f}{\partial x^i}\right)_p \cdot v^i = 0$ se obtiene (2) con lo cual se concluye la demostración.

Demostración del teorema (1ª parte).

Fijado $p \in M$, se toma (U, ϕ) carta de linealización local de Σ_1 podemos tomar $\phi(U) = \mathbb{B}_1$

fijado $v \in T_pM$ $v = v^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ sea $x^i\varphi_v(t) = t v^i = \varphi_v^i(t)$ para $|t|$ suficientemente pequeño

Obsérvese que $\varphi_v(t)$ define una trayectoria regular de Σ_1 con vector inicial $\frac{d\varphi_v}{dt}\Big|_{t=0} = v$

si $f \in \mathcal{F}(p)$, , entonces se define

$$\bar{H}^P(v,v) = \frac{d^2 f\cdot\varphi_v}{dt}\Big|_{t=0} \quad \text{pero} \quad \frac{df\cdot\varphi_v}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x^i}\frac{d\varphi_v^i}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x^i} v^i \quad \text{y}$$

$\bar{H}^P(v,v) = \left(\frac{\partial f}{\partial x^i \partial x^j}\right)_p v^i v^j$ que es claramente una forma cuadrática en T_pM y $\bar{H}^P$ es extensión (evidente) de H^P.

Demostración del Teorema 3 (2ª parte)

veamos por ejemplo que si existe una carta (U,ϕ), y una métrica riemanniana g en U, tal que la aplicación $H: \Sigma U \to TU$ es diferenciable entonces la aplicación $p \to H^p$ es diferenciable.

Una observación preliminar: si $\gamma: x^k = x^k(s)$ $k=1\ldots n$ es una curva parametrizada por la longitud de arco con $x^k(0)= x^k(p)$ $p\in U$ entonces si $u = \frac{d\gamma}{ds}\big|_{s=0} \in \Sigma_p M$ se tiene

$$H^k(u) = \frac{d^2x^k}{ds^2}\Big|_{s=0} + \Gamma^k_{ij}(p)\, u^i u^j \quad y \quad H(u) = H^k(u)\cdot\left(\frac{\partial}{\partial x^k}\right)_p$$

así pues la función $\Sigma U \ni u \mapsto H(u) - \Gamma^k_{ij}\, u^i u^j \in TU$ es función diferenciable, y para cada $u\in\Sigma U$ representa el valor de $\frac{d^2\gamma_u^k}{ds^2}\big|_{s=0}$ siendo γ_u la trayectoria regular de Σ correspondiente al vector u parametrizada respecto a la longitud de arco con $\gamma_u'(0)=u$

Sea $X\in\mathfrak{X}(U)$ campo diferenciable. Supongamos $\|X\|=1$ y $f\in\mathcal{F}(U)$. Entonces para cada $p\in U$ se tiene $\gamma_{X(p)}$ trayectoria local de Σ por $X(p)$, y

$$H_f^p(X(p),X(p)) = \frac{d^2 f\cdot\gamma_{X(p)}}{ds^2}\Big|_{s=0} = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^i\partial x^j}\right)_p X^i(p)\, X^j(p) + \left(\frac{\partial f}{\partial x^i}\right)_p \frac{d^2\gamma^i_{X(p)}}{ds^2}\Big|_{s=0}$$

Como X es diferenciable la aplicación $p \mapsto \frac{d^2 f\cdot\gamma_{X(p)}}{ds^2}\big|_{s=0}$ es diferenciable. En particular si $df(X)=0$ entonces $H_f(X,X)$ es diferenciable.

Supongamos ahora que $Y\in\mathfrak{X}(U)$ $Y\neq 0$ en U, y $df(Y)\equiv 0$ en U, entonces podemos escribir $Y=\varphi\cdot X$ siendo φ diferenciable, y $\|X\|=1$ y se tiene
$H_f(Y,Y)= H_f(\varphi X,\varphi X)=\varphi^2 H_f(X,X)$ que es diferenciable en U.

CONJETURAS.

1) Sea M riemanniana y $\mathcal{X}$ ecuación diferencial de segundo orden en M que verifica la siguiente condición, si $\gamma : I_\varepsilon \to M$ es curva integral de $\mathcal{X}$ entonces $(-\gamma)(t) = \gamma(-t)$ es también curva integral de $\mathcal{X}$.

En estas condiciones si se denota por γ_v la curva integral maximal de $\mathcal{X}$ con $\gamma_v'(0) = v$ para cada $v \in TM$ la familia $\Sigma_1 = \{ \operatorname{im} \gamma_v \mid \|v\| = 1 \}$ constituye el conjunto de trayectorias de un Spray.