

1. Proyecto ToyWorld.

1.1. Una nota personal.

Las métricas con cambio transversal de signatura han sido mi objeto de estudio en la última década del siglo pasado, cuando ya este asunto se había pasado un poco de moda. Fruto de este estudio he escrito (en colaboración) algunos artículos (por ejemplo [8],[9]) y he intentado sin éxito dirigir una tesis dualizando este asunto con cométricas. Nunca reconocí del todo, que mi atracción por este tema estaba alimentada por la idea de que en las hipersuperficies de cambio de signatura se podrían modelar el principio y fin del universo. Pero mis pocos conocimientos en cosmología seria, no daban para justificar todo esto.

Todo quedó en estado de hibernación, hasta que recientemente, ya jubilado, dirigí con Marco Castrillón un TFM dedicado a revisar el artículo [1]. Fue a raíz de esto, cuando empecé a acariciar la idea de construir con estas métricas un universo de juguete (ToyWorld), en donde la palabra *juguete* nos libra de las responsabilidades físicas, y permite trabajar en la fundamentación geométrica del modelo. Pero no por ello renuncio a defenderlo como posibilidad cosmológica hasta que alguien demuestre lo contrario.

El proyecto consta de tres partes:

- Métricas con cambio transversal de signatura
- Cométricas con cambio transversal de signatura.
- Un Mundo de Juguete.

Sería bonito poder desarrollar este proyecto con compañía.

1.2. Preambulo.

En 1983 Hartley y Hawking ([4]) dan a conocer en el contexto de la teoría de la gravedad cuántica su propuesta de *ausencia de borde*. El interés por el estudio de la geometría de las métricas con cambio de signatura tiene su origen en el (infructuoso?) intento de modelizar esta propuesta, usando espaciotiempos que tienen una parte Lorentziana y (en el pasado lejano) una parte Riemanniana, donde el tiempo se ha vuelto imaginario. Los trabajos de Kossowski [1] y [2], y especialmente [3], referentes métricas con cambio transversal de signatura, constituyen el punto de partida de este proyecto.

Es posible que la propuesta de Hawking, no pueda modelizarse mediante las métricas con cambio de signatura. Pero... ¿Qué nos impide jugar con este tipo de métricas para construir una cosmología de juguete? El *Mundo de Juguete* que se propone en este proyecto constituye simplemente un ensayo geométrico, y no pretende ser un modelo válido para la cosmología relativista al uso.

En este *Mundo de Juguete* $(\mathcal{M}, g, c)$, aparecerán dos hipersuperficies extremales Σ^∞ (inicial) y Σ^0 (final) en la variedad cuadridimensional $\mathcal{M}$ que es donde se producen los cambios de signatura Lorentz a Riemann de la métrica g , y en torno a las cuales se pretende modelizar simulacros de Big-bang (universo inicial) y de Big-Rip (universo final), dentro de la componente lorentziana conexa M que tiene por borde tales hipersuperficies extremales.

Una importante cuestión que diferencia este modelo de los de la cosmología relativista habitual, es que ahora la velocidad de la luz representada por la función diferenciable $c : M \rightarrow \mathbb{R}^+$ no permanece constante. De hecho los conjuntos $c = cte$ serán hipersuperficies de Cauchy, que denominamos *hipersuperficies de simultaneidad*. En torno a las hipersuperficie polar Σ^∞ y singular Σ^0 , existen flujos geodésicos canónicos que las mueven a través de hipersuperficies de simultaneidad Σ_t^∞ , Σ_t^0 y que vienen a ser hipersuperficies de Cauchy en las cuales la velocidad instantánea c de la luz es constante. Pongamos que $c^\infty(t) = c(\Sigma_t^\infty)$, y $c^0(t) = c(\Sigma_t^0)$, y se verifica entonces que:

$$\lim_{t \rightarrow 0} c^\infty(t) = \infty, \quad \lim_{t \rightarrow 0} c^0(t) = 0$$

Aunque en este modelo de juguete no se cumple el principio de constancia de la velocidad de la luz, si se verifica un principio ligeramente más débil que dice que:

Cada observador inercial se considera instantáneamente en el centro del frente de ondas de la luz que emite.

Este principio, cuando se aplica en relatividad especial, resulta ser equivalente al de la constancia de la velocidad de la luz, tal y como se muestra en [6]. Así que nuestro modelo de juguete no contradice el experimento de Michelson-Morley.

Por otra parte, usando este modelo de juguete ajustado a la edad actual del universo de aprox. 13.700 millones de años, donde la velocidad de la luz vale aprox. $300,000 \text{ Km/seg}$, se calcula que en la época de los primeros homínidos, hace unos 200000 años, la luz era menos de $4,376 \text{ Km/s}$ más rápida. Esto significa que en un gran entorno espacio temporal de nuestra situación en el universo, la velocidad de la luz es prácticamente constante, y su posible variación resultaría indetectable por los instrumentos al uso.

Si las cosas fueran como aquí se apunta, sería necesario corregir algunas predicciones a nivel cosmológico. Por ejemplo, habría que corregir a la baja el cálculo de las distancias a galaxias lejanas, ya que la luz que parte de nosotros llega a la galaxia **realmente** antes de lo que llegaría a velocidad constante c_0 .

En este modelo sucede, que en las proximidades del universo inicial, la **parte espacial** se comprime en el sentido de que el metro luz m_l que es la longitud recorrida por la luz en 1 segundo se hace cada vez más grande. Si nuestra unidad de medida de longitud se agranda, el volumen espacial medirá cada vez menos.

Todo lo contrario sucede en las proximidades del universo final, en donde la velocidad de la luz se hace pequeña.

Referencias

- [1] M. Kossowski and M. Kriele. *Transverse, type changing, pseudo riemannian metrics and the extendability of geodesics.* , 444:297–306, 1994.
- [2] M. Kossowski and M. Kriele. *The volume blow-up and characteristic classes for transverse, type-changing, pseudo-riemannian metrics.* , 64:1–16, 1997.
- [3] Kossowski, M.: *Characteristic classes for pseudo-Riemannian manifolds with resolvable metric singularities* (Comunicación personal).
- [4] Haertle J.B. and Hawking SW *Wave function of the Universe.* Calss Quantum Grav 9 1851-1862. (1983)
- [5] Jürgen Ehlers. *Republication of: On the Newtonian limit of Einstein's theory of gravitation.* General Relativity and Gravitation (2019) 51:163.
- [6] J. Lafuente López. Conos de Luz. Revista Matemática de la UCM. Vol. 5 N° 1 (1992).
- [7] Beatriz Salvador *Paralelismo y Geodésicas en Variedades conformes.* Tesis Dirigida por J.Lafuente. (Pág 40)

- [8] E. Aguirre , V. Fernández, J. Lafuente *On the conformal geometry of transverse Riemann–Lorentz manifolds*. Journal of Geometry and Physics 57 (2007) 1541–1547
- [9] E. Aguirre, J. Lafuente, *Transverse Riemann–Lorentz type-changing metrics with tangent radical*. Differential Geometry and its Applications 24 (2006) 91–100