UN PROYECTO DE TRABAJO SOBRE LA GEOMETRÍA LOCAL DE VARIEDADES SUMERGIDAS EN ESPACIOS HOMOGENEOS.

Javier Lafuente

Marzo de 2011 (once.tex)

Índice

1. Introducción.

1.1. Geometrías de Klein

1.1.1. Acciones de grupos.

Un grupo G actúa (por la izquierda) sobre un conjunto $\mathcal{E}$, si hay definida una aplicación

$$\lambda : G \times \mathcal{E} \ni (g, x) \to \lambda(g, x) = g.x \in \mathcal{E} \tag{1}$$

verificando las propiedades

a) $(gh).x = g.(h.x)$, para todo $g, h \in G$ y todo $x \in \mathcal{E}$

b) $e.x = x$, para todo $x \in \mathcal{E}$, siendo $e \in G$ el elemento neutro del grupo.

La acción se dice continua (diferenciable) si G es un grupo topológico (grupode Lie) $\mathcal{E}$ es espacio topológico (variedad diferenciable) y λ es aplicación continua (diferenciable).

Se supondrá siempre que la acción es (al menos) continua. En todo caso cualquier acción conjuntista puede considerarse continua si se toman las topologías triviales

Hay un homomorfismo natural también denominado λ, del grupo G sobre el grupo $Iso(\mathcal{E})$los homeomorfismos (difeomorfismos) de $\mathcal{E}$ que hace corresponder a cada $g \in G$, $\lambda_g \in \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ con $\lambda_g(x) = g.x$ para todo $x \in \mathcal{E}$.

Órbitas . Fijado $x \in \mathcal{E}$ llamamos a

$$G.x = \{g.x : g \in G\}$$

órbita de x. Denotamos por $\mathcal{E}/G$ al espacio de las órbitas.

Diremos que la acción es *transitiva* si para todo $x, y \in \mathcal{E}$, existe $g \in G$ con $g.x = y$, es decir si el espacio de órbitas $\mathcal{E}/G$ tiene un único elemento.

Grupos de isotropía. El grupo de isotropía de un subconjunto $\mathcal{S}$ de $\mathcal{E}$, es el subgrupo $G_{\mathcal{S}}$ de las transformaciones de G que dejan fijo el conjunto $\mathcal{S}$, es decir:

$$G_{\mathcal{S}} = \{g \in G : g.\mathcal{S} = \mathcal{S}\}$$

En particular si $\mathcal{S} = \{x\}$ es un punto escribimos

$$G_{\{x\}} = G_x = \{g \in G : g.x = x\}$$

Nótese que si $g \in G$, es tal que $g.x = y$ entonces $G_y = gG_xg^{-1}$, y todos los grupos de isotropía de una misma órbita son conjugados. El grupo de isotropía global de $\mathcal{S}$ es

$$G^*_{\mathcal{S}} = \bigcap_{x \in \mathcal{S}} G_x = \{g \in G : g.x = x \ \forall x \in \mathcal{S}\}$$

formado por todos los elementos del grupo que dejan fijo cada punto de $\mathcal{S}$

Acción efectiva. La acción se dice *efectiva* si el elemento neutro $e \in G$, es el único elemento del grupo que deja fijos todos los elementos de $\mathcal{E}$. Es decir $G^*_{\mathcal{E}} = \{e\}$. En este caso y solo en este caso, $\lambda : G \to Iso\,(\mathcal{E})$ es un monomorfismo que permite identificar G con un subgrupo de los homeomorfismos (difeomorfismos) de $\mathcal{E}$. La acción se dice *localmente efectiva* si $G^*_{\mathcal{E}}$ es discreto, y si $G^*_U = \{e\}$ para cada abierto U de $\mathcal{E}$ se dice que G es efectiva sobre subconjuntos. Si el grupo no actua efectivamente entonces podemos reemplazar su acción por otra del grupo cociente $G/G^*_{\mathcal{E}}$ naturalmente definida sobre $\mathcal{E}$, que ahora es efectiva, y esencialmente es la misma que la acción original.

Acción libre. Se dice que la acción es *libre* si el elemento neutro $e \in G$ es el único elemento del grupo que deja fijo algún elemento de $\mathcal{E}$, es decir, $\exists x$, $g.x = h.x \Longrightarrow g = h$. Esto significa que G_x es trivial $\forall x \in \mathcal{E}$. La acción es localmente libre si G_x es discreto $\forall x \in \mathcal{E}$.

Subconjuntos G-invariantes. Un subconjunto $\mathcal{S}$ de $\mathcal{E}$ se llama G-invariante, si $g.x \in \mathcal{S}$, para todo $g \in G$ y todo $s \in \mathcal{S}$. Es decir $G.\mathcal{S} \subset \mathcal{S}$. Nótese que entonces tenemos una acción restringida $G \times \mathcal{S} \ni (g, x) \to g.x \in \mathcal{S}$.

1.1.2. Espacio de Klein (o espacio homogeneo).

Una *Geometría* de *Klein* en E, viene establecida por la acción diferenciable y transitiva de un grupo de Lie G sobre una variedad diferenciable E:

$$G \times E \to E, (g, x) \to \lambda_g\,(x) = g.x$$

Se denomina a $E = (E, G, \lambda)$ *espacio de Klein* (con grupo G de transformaciones).

Fijado un punto $o \in E$, todos los grupos de isotropía G_z de los puntos de E son conjugados con G_o. Claramente G_o es un subgrupo cerrado de G, y por tanto G/G_o tiene una única estructura de variedad diferenciable de dimensión $\dim G - \dim G_o$, que hace a la proyección canónica $\pi : G \to G/G_o$ submersión. Hay además un difeomorfismo canónico (una vez fijado fijado o):

$$\overline{\pi} : G/G_o \ni gG_o \to \lambda_g(o) \in E$$

que permite identificar ambos espacios ($E = G/G_o$). Denotando también por π a:

$$\pi : G \to E \ , \ g \longmapsto \lambda_g(o) = g.o$$

Se tiene el diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "\pi"] \arrow[dr, "\pi"'] & G/G_o \arrow[d, "\overline{\pi}"] \\ & E \end{tikzcd}$$

Así E resulta ser un espacio homogéneo en el sentido clásico. Nótese que dar el espacio homogéneo G/G_o es equivalente a dar un espacio de Klein E con un punto destacado o.

Denotamos por $\mathfrak{g}$ y $\mathfrak{g}_0$ respectivamente, a las álgebras de Lie de G y G_o. Por razones técnicas serán las algebras de Lie generadas por las traslaciones a la derecha. Es decir si $X \in \mathfrak{g}$ es

$$X(g) = (R_g)_* X(e)$$

La diferencial $\pi_* = d\pi(e) : \mathfrak{g} \to T_oE$ induce por paso al cociente un isomorfismo canónico

$$\overline{\pi_*} : \mathfrak{g}/\mathfrak{g}_0 \to T_oE$$

que permite identificar ambos espacios. Todo esto se concluye cuando se aplica la diferencial en el origen al diagrama anterior

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{g} \arrow[r, "\pi_*"] \arrow[dr, "\pi_*"'] & \mathfrak{g}/\mathfrak{g}_o \arrow[d, "\overline{\pi}_*"] \\ & T_0E \end{tikzcd}$$

1.1.3. El punto de vista de Klein

La acción de G sobre E, puede inducir *de forma natural* actuaciones $G \times \mathcal{E} \ni (g, M) \to g.M \in \mathcal{E}$ sobre determinadas familias $\mathcal{E}$ de objetos deducidas del espacio E o de eventuales *estructuras* (diferenciable, métrica, conforme,...) sobre E. La propiedad que define a los objetos de $\mathcal{E}$ es conservada por el grupo G y se denomina propiedad ($G-$)geométrica. La idea de Klein es que el estudio de la ($G-$)geometría, consiste en el análisis de las propiedades y conceptos relativos a E que permanecen invariantes por la acción del grupo G. Por otra parte, cada vez que tenemos una tal familia $\mathcal{E}$, queda planteado un problema de clasificación:

Dos objetos M, $\overline{M} \in \mathcal{E}$ se dicen equivalentes ($M \simeq_G \overline{M}$), si están en la misma órbita, es decir, si existe $g \in G$, tal que $g.M = \overline{M}$.

Por ejemplo el grupo G actúa diferenciablemente de manera natural sobre el fibrado de escamas de orden n :

$$G \times \mathcal{G}_p^n(E) \to \mathcal{G}_p^n(E), \ (g, \mathbf{g}_x^n M) \to g.\mathbf{g}_s^n f = \mathbf{g}_s^n(\lambda_g M) \tag{2}$$

(vease epígrafe **??**) Cada clase se denomina escama geométrica de orden n.

1.1.4. Congruencia de variedades.

Todas las variedades las supondremos de dimensión fija p contenidas en el espacio de Klein fijo E con dimensión $m > p$ y grupo G de transformaciones. También debemos suponer (implícitamente) que todas ellas pertenecen a una cierta familia $\mathcal{F}$ invariante por la acción del grupo G. En principio no impondremos a la familia $\mathcal{M}$ restricción alguna. Sin embargo más adelante será necesario imponerle alguna regularidad.

Dos p-variedades M y $\overline{M}$ sumergidas en un espacio de Klein E se dirán *G-congruentes* si existe una transformación $g \in G$, tal que $\overline{M} = \lambda_g(M)$. A la aplicación restricción $\phi = \lambda_g|_M : M \to \overline{M}$ se le denomina *G-congruencia.* Nótese que dos variedades G-congruentes son en particular difeomorfas y tienen por tanto la misma dimensión p.

Obsérvese que $M = (f : S)$, $\overline{M} = \left(\overline{f} : \overline{S}\right)$ son congruentes, si y solo si existe $\varphi : S \to \overline{S}$ difeomorfismo, y $g \in G$ tal que $\lambda_g \circ f = \overline{f} \circ \phi$.

Hacer G-geometría de $p-$variedades, consiste a *groso modo* en estudiar aquellas propiedades de las variedades que permanecen inalteradas por la acción del grupo.

En adelante y mientras no exista ambiguedad podríamos prescindir del prefijo "G-".

1.1.5. Orden de contacto geométrico

Las variedades $M, \overline{M}$ de E se dice que tienen contacto de orden n $(n \geq 0)$ en el punto $x \in M \cap \overline{M}$ si definen la misma escama $\mathbf{g}_x^n M = \mathbf{g}_x^n \overline{M} \in \mathcal{G}_p^n(E)$ entonces escribimos .

$$(M, x) \overset{n}{\simeq} \left(\overline{M}, x\right)$$

Las variedades M, $\overline{M}$ de E se dice que tienen contacto geométrico de orden n $(n \geq 0)$ en los puntos $x \in M$, $\overline{x} \in \overline{M}$ si definen en dichos puntos la misma n-escama geométrica, es decir, si existe $g \in G$, con $\lambda_g(x) = \overline{x}$, y $\lambda_g(M)$ tiene contacto de orden al menos n en $\overline{x} \in \lambda_g(M) \cap \overline{M}$, es decir $(\lambda_g(M), \overline{x}) \overset{n}{\simeq} \left(\overline{M}, \overline{x}\right)$ o de forma equivalente: $g.\mathbf{g}_x^n M = \mathbf{g}_{\overline{x}}^n g$ y escribimos entonces

$$(M, x) \overset{n}{\simeq}_G \left(\overline{M}, \overline{x}\right)$$

Esta relación es de equivalencia sobre la familia de variedades punteadas y $G.\mathbf{g}_x^n M$ es la clase definida por (M, x), que es exactamente la escama geométrica (o G-escama) de orden n definida por M en el punto x

Supuesto $M = (f : S)$, $\overline{M} = \left(\overline{f} : \overline{S}\right)$, $x = f(s)$, $\overline{x} = \overline{f}(\overline{s})$ la condición $(M, x) \overset{n}{\simeq}_G \left(\overline{M}, \overline{x}\right)$,equivale a decir que existe un $g \in G$ tal que $\mathbf{g}_s^n(\lambda_g \circ f) = \mathbf{g}_{\overline{s}}^n \overline{f}$ (según definición **??**). y escribimos

$$(f, s) \overset{n}{\simeq}_G \left(\overline{f}, \overline{s}\right)$$

y entonces por la proposición de **??** existe un $g \in G$ y un difeomorfismo $\varphi : S \to \overline{S}$ en torno a s, con

$$\varphi(s) = \overline{s}, \text{ y además } j_s^n(\lambda_g \circ f) = j_{\overline{s}}^n\left(\overline{f} \circ \varphi\right)$$

Un difeomorfismo $\phi : M \to \overline{M}$ se dice que define un G-contacto de orden n, si M y $\overline{M}$ tienen G-contacto de orden n en los puntos x, y $\phi(x)$ para todo $x \in M$, es decir $(M, x) \overset{n}{\simeq}_G \left(\overline{M}, \phi(x)\right)$. Por tanto

$$\forall x \in M,\ \exists g_x \in G \text{ tal que } \left(\lambda_{g_x} M, g_x.x\right) \overset{n}{\simeq} \left(\overline{M}, \phi(x)\right)$$

Nota 1 *Nótese que si ϕ es congruencia entonces ϕ define G-contacto de orden n para todo $n \geq 0$.*

Por otra parte un difeomorfismo $\phi : M \to \overline{M}$ siempre tiene G-contacto de orden 0, ya que la acción de G sobre E es transitiva.

En general cualquier difeomorfismo $\phi : M \to \overline{M}$ tendrá G-contacto de orden n cuando la acción natural (2) de G sobre $\mathcal{G}_p^n(E)$ sea transitiva.

1.2. Generalidades sobre Invariantes y clasificación de variedades.

Sea $\mathcal{G}^q$ un abierto de $\mathcal{G}_p^q(E)$ que sea G-invariante. Esto significa que $G.\mathcal{G}^q \subset \mathcal{G}^q$ en la acción natural $G \times \mathcal{G}_p^q(E) \to \mathcal{G}_p^q(E)$. Sea $\mathcal{M} = \mathcal{M}(\mathcal{G}^q)$ la familia ($G-$invariante!) de p-variedades M de E tales que $\mathbf{g}_x^n M \in \mathcal{G}^n$ $\forall x \in M$. A los elementos de $\mathcal{M}$ los llamaremos de forma genérica *variedades admisibles.*

Se define entonces $\mathcal{G}^n = \mathcal{G}_p^n(E, \mathcal{G}^q)$ si $n > q$, y $\mathcal{G}^{q-1} = \mathcal{G}^q \downarrow$ ...etc. Obsérvese que cada $\mathcal{G}^n$ es abierto de $\mathcal{G}_p^n(E)$.

Nota 2 *Aunque no es imprescidible para lo que sigue, queremos indicar que $\mathcal{G}^q$ será un abierto G-invariante de $\mathcal{G}_p^q(E)$ en donde la acción restringida $G \times \mathcal{G}^q \to \mathcal{G}^q$ ya es libre. La existencia de tal $\mathcal{G}^q$ (para acción afectiva) queda garantizada en [Olver], y en caso analítico se garantiza también que $\mathcal{G}^q$ es denso. También se puede garantizar que $\mathcal{G}^q$ es denso en el caso de que G_0 sea compacto o también imponiendo que la acción inicial sea localmente efectiva sobre subconjuntos. (ver epígrafe 1.1.1).*

Estamos interesados en dar criterios prácticos para reconocer cuando dos variedades admisibles son G-congruentes.

1.2.1. Curvaturas.

Una función diferenciable $\kappa : \mathcal{G}_p^n(E) \supset \mathcal{G}^n \to \mathbb{R}$ se llama curvatura de orden n si $\kappa(g.\gamma) = \kappa(\gamma)$ para todo $\gamma \in \mathcal{G}^n$ y todo $g \in G$. El nombre proviene del hecho de que la curvatura κ asocia a cada p-variedad M sumergida en E, tal que $\mathbf{g}^n M \subset \mathcal{G}^n$ la aplicación diferenciable $\kappa_M : M \to \mathbb{R}$ definida por $\kappa_M(x) = \kappa(\mathbf{g}_x^n M)$ (ver notación en la Nota **??** de la pág **??**), y entonces si $\overline{M} = g.M$, entonces

$$\kappa_M(x) = \kappa(\mathbf{g}_x^n M) = \kappa(g.\mathbf{g}_x^n M) = \kappa\left(\mathbf{g}_{g.x}^n \overline{M}\right) = \kappa_{\overline{M}}(g.x)$$

y por tanto *se preserva por congruencias.* Además una curvatura κ de orden n, puede considerarse de orden $n+1$ identificando κ con $\kappa\circ\downarrow: \mathcal{G}^{n+1} \to \mathbb{R}$ ya que si $\gamma \in \mathcal{G}^{n+1}$y $g \in G$

$$(\kappa\circ\downarrow)(g.\gamma) = \kappa(g.(\gamma\downarrow)) = \kappa(\gamma\downarrow) = (\kappa\circ\downarrow)(\gamma)$$

Proposición 3 *Si $\phi : M \to \overline{M}$ es un difeomorfismo entre variedades admisibles que define un G-contacto de orden n, entonces se verifica que $\kappa_M(x) = \kappa_{\overline{M}}(\phi(x))$ para toda curvatura de orden n.*

Definición 4 *Un sistema de curvaturas $(\kappa^1, \ldots, \kappa^\mu)$ se llama sistema completo de curvaturas para el G-contacto de orden n en $M \in \mathcal{M}$ si todo difeomorfismo $\phi : M \to \overline{M}$ entre variedades admisibles tal que $\kappa_M^i(x) = \kappa_{\overline{M}}^i(\phi(x))$ para todo $x \in M$ y todo $i = 1, \ldots \mu$, es necesariamente congruencia.*

1.2.2. Curvaturas y prolongación de campos.

En una acción diferenciable $G \times \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ se llama campo fundamental (o prolongación de orden 0) del vector $X \in \mathfrak{g}$, al campo $X^{(0)}$de $\mathcal{E} = \mathcal{G}_p^0(E)$ definido punto a punto por la fórmula

$$X^{(0)}(x) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} (\exp(tX).x)$$

Se trata del único campo de $\mathcal{E}$ que tiene por flujo $\phi : \mathbb{R}\times\mathcal{E} \to \mathcal{E}$ definido por $\phi(t,x) = \phi_t(x) = \exp(tX).x$. La aplicación $\mathfrak{g} \to \mathfrak{X}(\mathcal{E})$, $X \to X^{(0)}$ es $\mathbb{R}$-lineal se verifica

$$[X,Y]^{(0)} = -\left[X^{(0)}, Y^{(0)}\right]$$

En particular en un espacio de Klein $E = (E, G, \lambda)$ tenemos tambien la prolongación $X \to X^{(0)}$ y fijado t, $\phi_t = \lambda_{\exp(tX)} : E \to E$ es un difeomorfismo que induce el difeomorfismo (ver epígrafe **??** en pág **??**) $(\phi_t)_* : \mathcal{G}_p^\ell(E) \to \mathcal{G}_p^\ell(E)$ definido por

$$(\phi_t)_* \left(\mathbf{g}_s^\ell f\right) = \mathbf{g}_s^\ell (\phi_t \circ f) = \exp(tX) . \mathbf{g}_s^\ell f$$

y la aplicación $\phi^{(\ell)} : \mathbb{R} \times \mathcal{G}_p^\ell(E) \to \mathcal{G}_p^\ell(E)$ con $\phi^{(\ell)}(t, \gamma) = (\phi_t)_* (\gamma)$ define un flujo en $\mathcal{G}_p^\ell(E)$, con $\phi_t^{(\ell)}(\gamma) = \phi^{(\ell)}(t, \gamma) = (\phi_t)_* (\gamma)$, que corresponde a un único campo $X^{(\ell)}$ en $\mathcal{G}_p^\ell(E)$ definido por la condición

$$X^{(\ell)}(\gamma) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} (\exp(tX) . \gamma)$$

que se denomina prolongación de orden ℓ de X. Nótese que $X^{(\ell)}$ es la (0)-prolongación de $\left(X^{(\ell)}\right)^{(0)}$ de X en la acción natural $G \times \mathcal{G}_p^\ell(E) \to \mathcal{G}_p^\ell(E)$. Por tanto se tiene:

Teorema 5 *La aplicación $\mathfrak{g} \ni X \to X^{(\ell)} \in \mathfrak{X}\left(\mathcal{G}_p^\ell(E)\right)$ es un homomorfismo entre álgebras de Lie. Es decir, es $\mathbb{R}$-lineal, y*

$$[X, Y]^{(\ell)} = -\left[X^{(\ell)}, Y^{(\ell)}\right], \forall X, Y \in \mathfrak{g}$$

Proposición 6 *Sea $\kappa : \mathcal{G}_p^n(E) \supset \mathcal{G}^n \to \mathbb{R}$ aplicación diferenciable. Si κ es una curvatura de orden n entonces κ es integral primera de $X^{(n)}$ (prolongación de orden n de X) para todo $X \in \mathfrak{g}$. Por otra parte si G es conexo y $(X_1, \ldots X_r)$ es una base de su álgebra de Lie g, entonces para que κ sea curvatura de orden n es suficiente con que sea integral primera de cada $X_i^{(n)}$ $i = 1, \ldots r$.*

Demostración. Si κ es una curvatura de orden n entonces para cada $X \in \mathfrak{g}$ y $\gamma \in \mathcal{G}^n$ se tiene

$$\kappa(\exp(tX) . \gamma) = \kappa(\gamma) = \ \forall t$$

lo que significa que κ es constante sobre las curvas integrales de $X^{(n)}$.

Por otra parte, si κ es integral primera de cada $X_i^{(n)}$ entonces para cualquier $\gamma \in \mathcal{G}^n$ se tiene

$$\kappa(\exp(tX_i) . \gamma) = \kappa(\gamma) \ \forall t, \forall i = 1, \ldots r$$

y la condición $\kappa(g.\gamma) = \kappa(\gamma)$ se verifica para todo $\gamma \in \mathcal{G}^n$ y todo $g \in G$ de la forma $g = \exp(t_1 X_1) \ldots \exp(t_r X_r)$. Pero si G es conexo está generado por $\{\exp(tX_i) : t \in \mathbb{R},\ i = 1, \ldots r\}$, ya que la aplicación

$$(t_1, \ldots, t_r) \to \exp(t_1 X_1) \ldots \exp(t_r X_r)$$

es difeomorfismo local en torno al origen. Esto concluye la demostración. ■

Sea $\mathfrak{g}^{(n)}$ la pseudodistribución generada por $\left(X_i^{(n)}\ i = 1, \ldots r.\right)$, es decir, para cada $\gamma \in \mathcal{G}_p^n(E)$,

$$\mathfrak{g}^{(n)}(\gamma) = \operatorname{Span}\left(X_i^{(n)}(\gamma)\ \ i = 1, \ldots r.\right) \subset T_\gamma \mathcal{G}_p^n(E)$$

Por el teorema 5 se concluye que si $X = t_1X_1 + \cdots + t_rX_r \in \mathfrak{g}$, entonces $X^{(n)} = t_1X_1^{(n)} + \cdots + t_rX_r^{(n)} \in \mathfrak{g}^{(n)}$ y por tanto

$$\mathfrak{g}^{(n)}(\gamma) = \left\{X^{(n)}(\gamma) : X \in \mathfrak{g}\right\}$$

además como $[X,Y]^{(n)} = \left[X^{(n)}, Y^{(n)}\right]$ la pseudodistribución $\mathfrak{g}^{(n)}$ es involutiva. La llamamos pseudodistribución porque no es posible garantizar que $\dim \mathfrak{g}^{(n)}(\gamma)$ sea siempre la misma cuando $\gamma \in \mathcal{G}_p^n(E)$.

Proposición 7 *Si en la acción natural (2)$G \times \mathcal{G}^n \to \mathcal{G}^n$ todos los grupos de isotropía son conjugados con un subgrupo G_n entonces $\mathfrak{g}^{(n)}$ induce en $\mathcal{G}^n$ una distribución involutiva sus hojas son las órbitas $G.\gamma$ que son espacios homogeneos tipo G/G_n*

Localmente las hojas de la distribución se pueden determinar mediante una colección $\kappa^1, \ldots \kappa^{\mu_n}$ de funciones diferenciables $\kappa^\nu : \mathcal{G}_p^n(E) \supset \mathcal{G}^n \to \mathbb{R}$ de forma que

$$\begin{cases} \kappa^1 = c^1 \\ \vdots \\ \kappa^{\mu_n} = c^{\mu_n} \end{cases}$$

representan las ecuaciones implícitas de una hoja para cada elección $c^1, \ldots, c^{\mu_n}$ de constantes. Se supone que las (κ^ν) son funcionalmente independientes en el sentido de que la aplicación $(\kappa^1, \ldots \kappa^{\mu_n}) : \mathcal{G}^n \to \mathbb{R}^{\mu_n}$ tenga rango máximo. Se dice entonces que $(\kappa^1, \ldots \kappa^{\mu_n})$ forman un sistema completo de curvaturas de orden n (ver nota siguiente). En estas condiciones se tiene

Lema Si las funciones $\kappa^\nu : \mathcal{G}_p^n(E) \supset \mathcal{G}^n \to \mathbb{R}$ forman un sistema completo de curvaturas de orden n, entonces cualquier otra curvatura κ de orden n es de la forma

$$\kappa = \phi\left(\kappa^1, \ldots, \kappa^{\mu_n}\right)$$

para cierta función diferenciable $\phi : \mathbb{R}^{\mu_n} \to \mathbb{R}$.

Demostración. Obviamente si $\kappa = \phi(\kappa^1, \ldots \kappa^{\mu_n})$, entonces κ es constante sobre cada hoja de la distribución $\mathfrak{g}^{(n)}$. Recíprocamente: es posible elegir una carta para $\mathcal{G}^n$ de la forma $(\kappa^1, \ldots, \kappa^{\mu_n}, w^1, \ldots, w^{r_n})$ y ahora $(\kappa^\nu = c^\nu,\ 1 \le \nu \le \mu_n)$ representa una hoja $\mathcal{H}(c^1, \ldots, c^{\mu_n})$ de la distribución., y la curvatura κ toma sobre ella el valor constante digamos $\phi(c^1, \ldots, c^{\mu_n})$. Por tanto la expresión de κ en las anteriores coordenadas $\kappa = \phi\left(\kappa^1, \ldots, \kappa^{\mu_n}\right)$, para cierta función diferenciable ϕ. ■

De acuerdo con la definición 4 se tiene

Proposición 8 *El sistema de curvaturas* $\left(\kappa^1, \ldots, \kappa^{\mu_n}\right)$ *es un sistema completo de orden* n *en* $M \in \mathcal{M}$ *si y solo si es un sistema completo para el* G*-contacto de orden* n *en* M*.*

1.2.3. Invariantes tensoriales.

Si V es espacio vectorial entonces $T_l^k V$ denota al espacio vectorial de los tensores tipo (k, l) (k veces contaravariantes y l covariante).

El fibrado (k, l)-tensorial en la Grassmanianana $\mathcal{G}_p^1(E)$ de la variedad E es $T_l^k \mathcal{G}_p^1(E)$ definido como

$$T_l^k \mathcal{G}_p^1(E) = \cup_{\sigma \in \mathcal{G}_p^1(E)} T_l^k \sigma$$

que constituye un fibrado sobre $\mathcal{G}_p^1(E)$ (con su proyección natural) y fibra tipo $T_l^k(\mathbb{R}^p)$.

Un invariante (k, l)-tensorial de orden n sobre las variedades de $\mathcal{M}$, es una aplicación diferenciable entre fibrados $\Phi : \mathcal{G}^n \subset \mathcal{G}_p^n(E) \to T_l^k \mathcal{G}_p^1(E)$, que asocia a cada $\gamma \in \mathcal{G}^n$, el tensor $\Phi_\gamma \in T_l^k(T_\gamma)$, siendo $T_\gamma = \downarrow_1^n \gamma \in \mathcal{G}_p^1(E)$, y además verifica la siguiente condición de invariancia:

$$\left(\lambda_g\right)_* \Phi_\gamma = \Phi_{g.\gamma}, \forall g \in G, \forall \gamma \in \mathcal{G}^n \tag{3}$$

es decir, para cada $\gamma \in \mathcal{G}^n$ y cada $g \in G$, $\left(\lambda_g\right)_* : T_\gamma \to T_{g.\gamma} = g.T_\gamma$ es un isomorfismo lineal y estamos exigiendo que $\left(\lambda_g\right)_* \Phi_\gamma = \Phi_{g.\gamma}$.

Nota 9 *Observese que una curvatura* κ *es un invariante* (k, l)*-tensorial con* $k = l = 0$*.*

Se dice que el invariante Φ es de orden $= n$, si existen $\gamma, \overline{\gamma} \in \mathcal{G}^n$ con $\gamma \downarrow = \overline{\gamma} \downarrow \in \mathcal{G}_p^{n-1}(E)$ y sin embargo $\Phi_\gamma \neq \Phi_{\overline{\gamma}}$.

U invariante tensorial Φ de orden n asigna a cada variedad admisible $M \in \mathcal{M}$, un campo tensorial $\Phi_M \in \mathfrak{T}_l^k(M)$ con

$$\Phi_M(x) = \Phi_{\mathbf{g}_x^n M}\ \forall x \in M$$

Si $M = (f : S)$ escribimos $\Phi_f = f^* \Phi_M$.

La condición (3) supone que $\left(\lambda_g\right)_* \Phi_M = \Phi_{\lambda_g(M)}$, para todo $g \in G$. Esto significa si $M = (f : S)$ que $\Phi_f = \Phi_{\lambda_g \circ f}$ para todo $g \in G$.

En general, un difeomorfismo $\phi : M \to \overline{M}$ entre variedades sumergidas en E, se dice que respeta al invariante Φ, cuando $\phi_* \Phi_M = \Phi_{\overline{M}}$. Y por la condición (3) esto sucede si ϕ es congruencia. En este sentido podemos decir que Φ se preserva por congruencias (o transformaciones λ_g de G).

Nota 10 (!) *Probaremos que es posible construir una única conexión simétrica G-invariante sobre E que hace geodésicas a las curvas integrales de los campos fundamentales en la acción $G \times E \to E$. Esta conexión nos permite asociar a cada M perteneciente a cierta clase $\mathcal{F}$* densa *de variedades admisibles una estructura conforme $\mathcal{C}^M$ y dos conexiones D^M y ∇^M (llamadas normal y conforme) que son todos invariantes (en un sentido obvio) por la acción del grupo G. Esto significa que todos los tensores deducidos de ellas determinan invariantes tensoriales.*

Si tenemos $(s_1, \ldots s_p)$ parametrización (local) de S y $(x_1 \ldots x_m)$ parametrización local en E, el invariante Φ es de orden n si Φ_f depende de las derivadas

$$\frac{\partial^{|\alpha|} (x_j \circ f)(s_1, \ldots s_p)}{\partial s_{\alpha_1} \ldots \partial s_{\alpha_k}}$$

para $j = 1, \ldots m$, $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$ con $|\alpha| = \sum \alpha_i n$, y es de orden $= n$ s no depende de las derivadas de orden superior a n.

Supuesto $M = (f : S)$, $\overline{M} = \left(\overline{f} : \overline{S}\right)$, $a = f(s) = \overline{f}(\overline{s})$ la condición $\mathbf{g}_a^n M = \mathbf{g}_a^n \overline{M}$ equivale a decir que existe un difeomorfismo $\varphi : S \to \overline{S}$ en torno a s, con

$$\varphi(s) = \overline{s}, \text{ y además } j_s^n f = j_s^n \left(\overline{f} \circ \varphi\right)$$

y entonces debería verificarse

$$\left(\varphi^* \Phi_{\overline{f}}\right)(s) = \Phi_f(s)$$

Se tiene entonces el siguiente criterio:

Proposición 11 *El invariante $\Phi : f \to \Phi_f$ es de orden n si $\Phi_f(s) = \Phi_{\overline{f}}(s)$ cada vez que $f, \overline{f} : S \to E$ son p-variedades con $j_s^n f = j_s^n \overline{f}$.*

Demostración. ■

Nota 12 *Lamentablemente la proposición 3 no funciona bien en principio para el caso de invariantes tensoriales que no sean curvaturas. Es decir, un difeomorfismo $\phi : M \to \overline{M}$ que define un G-contacto de orden n, entre las variedades admisibles M y $\overline{M}$, no tiene porqué preservar los invariantes tensoriales Φ de orden n. La dificultad está en que si bien fijado x existe $g_x \in G$ es tal que $(\lambda_{g_x})_* \mathbf{g}_x^n M = \mathbf{g}_{\phi(x)}^n \overline{M}$ y por tanto $(\lambda_{g_x} M, \phi(x)) \overset{n}{\simeq} \left(\overline{M}, \phi(x)\right)$ se tiene*

$$\Phi_{\lambda_{g_x} M}(\phi(x)) = (\lambda_{g_x})_* \Phi_M(x) = \Phi_{\overline{M}}(\phi(x))$$

pero $(\lambda_{g_x})_* \Phi_M(x)$ no tiene porqué coincidir con $\phi_* \Phi_M(x)$ pues no tenemos datos de la relación entre $(\lambda_{g_x})_*$ y ϕ_* como aplicaciones lineales $T_x M \to T_{\phi(x)} \overline{M}$. Por supuesto se verificaría la igualdad $(\lambda_{g_x})_* \Phi_M(x) = \phi_* \Phi_M(x)$ si fuera $\phi_* = (\lambda_{g_x})_* : T_x M \to T_{\phi(x)} \overline{M}$

A pesar de la nota anterior insistimos en mantener la definición 4 para el caso general de invariantes tensoriales. Es decir:

Definición 13 *Un sistema de invariantes tensoriales* $(\Phi^1, \ldots, \Phi^\mu)$ *se llama sistema completo para el* G*-contacto de orden* n *en* $M \in \mathcal{M}$ *si todo difeomorfismo* $\phi : M \to \overline{M}$ *entre variedades admisibles tal que* $\phi_* \Phi^i_M(x) = \Phi^i_{\overline{M}}(\phi(x))$ *para todo* $x \in M$ *y todo* $i = 1, \ldots \mu$*, es necesariamente congruencia.*

Un criterio "en ecuaciones paramétricas"para la determinación y reconocimiento de sistemas completos para el G-contacto de orden n podría ser el siguiente:

Proposición 14 *Supongamos que disponemos de un sistema* $(\Phi^1, \ldots, \Phi^\mu)$ *de invariantes verificando la siguiente propiedad para variedades* $M = (f : S)$, $\overline{M} = (\overline{f} : S)$ *admisibles que "pasan"por el origen o a valor* s_0 *del parametro*

$$\Phi^i_f(s_0) = \Phi^i_{\overline{f}}(s_0), \ 1 \leq i \leq \mu \Rightarrow (f, s_0) \overset{n}{\simeq}_{G_o} (\overline{f}, s_0)$$

Nota 15 *Entonces*$(\Phi^1, \ldots, \Phi^\mu)$ *es sistema completo para el* G*-contacto de orden* n*.*

Demostración. ■

Nota 16 (!!) *Uno de los objetivos de nuestro trabajo consiste en estudiar si es posible establecer sistemas completos de invariantes para el* G*-contacto de orden arbitrario, usando los invariantes indicados en la nota 10*

Por razones que tienen que ver con la Nota 12 introducimos también la siguiente

Definición 17 *Un sistema de invariantes tensoriales* $(\Phi^1, \ldots, \Phi^\mu)$ *se llama saturado para* $M \in \mathcal{M}$*, si para cada* $x \in M$*, el grupo de las transformaciones lineales* $T_xM \to T_xM$ *que dejan invariantes todos los* $\Phi^i_M(x)$ *es discreto.*

Entendemos que cualquier isomorfismo lineal $T_xM \to T_xM$ *deja invariante* $\kappa_M(x)$ *si* κ *es una curvatura. Para evitar ambiguedades admitiremos como saturado en* M *cualquier sistema formado exclusivamente por curvaturas.*

La petición de "saturación"no es demasiado estravagante ya que por ejemplo la primera y segunda formas fundamentales para superficies en el espacio euclídeo son invariantes euclideos tensoriales y determinan un sistema saturado sobre cualquier superficie sin puntos umbílicos.

La réplica a la proposición 3 y que amortigua en parte la perplejidad sugerida en la Nota 12 es la siguiente

Proposición 18 *Si* $\phi : M \to \overline{M}$ *es un difeomosfismo de* G*-contacto de orden* n *que preserva un sistema saturado* $(\Phi^1, \ldots, \Phi^\mu)$ *de invariantes sobre la variedad* $M \in \mathcal{M}$ *entonces* ϕ *preserva todo invariante de orden* n*.*

Demostración. ■

1.2.4. Gérmenes geométricos de variedades

Dos variedades punteadas M y $\overline{M}$ de E se dice que definen el mismo germen en $x \in M \cap \overline{M}$, si existe un entorno común de U de x en M y en $\overline{M}$. Escribimos entonces $(M,x) \overset{(\infty)}{\simeq} (\overline{M},x)$ y cada clase $\mathbf{g}_x^{(\infty)}M$ se denomina germen de M en x. Dos gérmenes $g_x^{(\infty)}M$ y $g_{\overline{x}}^{(\infty)}\overline{M}$ se dirán G-congruentes, si existen entornos U de x en M y $\overline{U}$ de $\overline{x}$ en $\overline{M}$, y existe $g \in G$ tal que $g.x = \overline{x}$, y $g.U = \overline{U}$. Esta relación de congruencia , es de equivalencia sobre la familia de todas las variedades punteadas. Denotamos por $g_x^{[\infty]}M$ a la clase definida por (M,x), que denominamos germen geométrico (o G-germen) definido por M en el punto x.

1.2.5. Sistemas independientes de invariantes

En adelante, la palabra *invariante* significa *invariante tensorial.*

Diremos que un difeomorfismo $\phi : M \to \overline{M}$ entre variedades admisibles respeta el invariante Φ si $\phi_*\Phi_M = \Phi_{\overline{M}}$.

El invariante Φ se dice que depende de un sistema $\left(\Phi^{(1)}, \ldots, \Phi^{(\mu)}\right)$ de invariantes, si todo difeomorfismo entre variedades admisibles que respete a $\Phi^{(1)}, \ldots, \Phi^{(r)}$ respeta necesariamente a Φ.

Si cada $\Phi^{(i)}$ no depende de los demás elementos de la familia se dice que el sistema de invariantes $\left(\Phi^{(1)}, \ldots, \Phi^{(r)}\right)$ es independiente.

1.2.6. Sistemas completos

Un problema fundamental en el estudio de la geometría de variedades en el espacio de Klein E, es el de su clasificación geométrica, que consiste en dar criterios algorítmicos para reconocer cuando dos variedades son G-congruentes.

Definición 19 *Un sistema de invariantes* $(\Phi^1, \ldots, \Phi^\mu)$ *se dice completo para una variedad* M*, si cualquier difeomorfismo* $\phi : M \to \overline{M}$ *entre variedades admisibles que los respete a todos, es necesariamente una congruencia. Un tal sistema se denomina sistema completo para la familia invariante* $\mathcal{F} \subset \mathcal{M}$ *si lo es para cada* $M \in \mathcal{F}$*. Naturalmente, si el sistema no fuera independiente, es tautológico que podría reducirse a otro mas pequeño independiente y completo.*

Nota 20 *La condición necesaria y suficiente para que* $(\Phi^1, \ldots, \Phi^\mu)$ *sea completo para* $M = (f : S)$ *es que para todo* $\overline{f} : S \to E$ *admisible se verifique la equivalencia:*

$$\Phi^i_f = \Phi^i_{\overline{f}} \; 1 \le i \le \mu \Leftrightarrow \overline{f} = \lambda_g \circ f \; \textit{para algún } g \in G$$

Para una clase $\mathcal{F} \subset \mathcal{M}$ *densa* de variedades probaremos que se verifica el siguiente resultado

Teorema 21 *para cada variedad $M \in \mathcal{F}$ y cada $x \in M$, existe un entorno U de x en M, y un entero positivo n de forma que si $\phi : U \to \overline{M}$ es un difeomorfismo con G-contacto n entonces ϕ es congruencia.*

Por tanto fijado $x \in M$, encontrar un sistema completo $(\Phi^1, \ldots, \Phi^\mu)$ de invariantes del entorno U de x en M suficientemente pequeño, equivale a buscar un sistema completo para el $G-$contacto de orden n en U (ver definición 13)

Nota 22 (!!!) *La demostración del teorema 21 puede encontrarse en [Jensen] y [Olver]. Nosotros presentamos un argumento simple que solo utiliza la parte de unicidad del teorema de Frobenius que se basa esencialmente en la identidad*

$$\mathbf{g}_s^1 (\mathbf{g}^n f) = \mathbf{g}_s^{n+1} f$$

1.2.7. Niveles de exigencia para la solución.

Resolver un problema de clasificación G-geométrica de variedades admisibles puede entenderse según dos niveles de exigencia, que podríamos describir así:

Nivel 1 Encontrar un sistema independiente $\left(\Phi^1, \ldots, \Phi^{(r)}\right)$ de invariantes con la siguiente propiedad: Si $f, \overline{f} : \mathbb{S} \to E$ definen parametrizaciones globales de variedades admisibles $M = f(\mathbb{S})$, $\overline{M} = \overline{f}(\mathbb{S})$, se tiene la equivalencia

$$\Phi_f^i = \Phi_{\overline{f}}^i \text{ , } i = 1, \ldots, \mu \iff \overline{f} \circ f^{-1} : M \to \overline{M} \text{ es } G\text{-congruencia}$$

Esta propiedad caracteriza en efecto, a los sistemas completos de invariantes.

Nivel 2 Encontrar las ecuaciones de compatibilidad. Es decir, fijados un abierto $\mathbb{S}$ (simplemente conexo) de $\mathbb{R}^p$ y campos tensoriales ϕ^i $i = 1, \ldots \mu$ en $\mathbb{S}$, determinar condiciones *computables* digamos (C) necesarias y suficientes para que exista una inmersión f de forma que $\phi^i = \Phi_f^i$ $i = 1, \ldots \mu$. Denotemos por

$$\mathfrak{F}(\mathbb{S}) = \left\{ \left\{ \phi^i : 1 \leq i \leq r \right\} : \text{verifican las condiciones } (C) \right\}$$

Supóngase que $\left\{\phi^i\right\} \in \mathfrak{F}(\mathbb{S})$. Una vez determinada una *solución* $f : \mathbb{S} \to E$ todas las demás son de la forma $\lambda_g \circ f$ cuando $g \in G$. Por tanto, supuesto $0 = (0, \ldots, 0) \in \mathbb{S}$, y fijado $o \in E$ (por ejemplo el origen o) los *datos* ϕ^i determinan un único germen geométrico, digamos $g_o^{[\infty]} M$.

Queda aún por aclarar cuando otra familia de datos $\left\{\overline{\phi}^i\right\} \in \mathfrak{F}(\mathbb{S})$ determinan el mismo germen. De hecho, si $\zeta : \mathbb{S}_0 \to \mathbb{S}$ es un monomorfismo con

$\mathbb{S}_0 \subset \mathbb{S}$, y $\zeta(0) = 0$, y $\left\{\phi^{(i)}\right\} \in \mathfrak{F}(\mathbb{S})$, entonces $\left\{\zeta^* \phi^i\right\} \in \mathfrak{F}(\mathbb{S})$ induce el mismo germen geométrico. Además si $\left\{\overline{\phi}^i\right\} \in \mathfrak{F}(\mathbb{S})$ determinan el mismo germen $\left\{\phi^i\right\}$ entonces existe una tal ζ con $\left\{\zeta^* \phi^{(i)}\right\} = \left\{\phi^{(i)}\right\}$.