



# UNIVERSIDAD COMPLUTENSE MADRID

Trabajo Fin de Máster

Relleno simpléctico de la variedad de contacto  
de los rayos de luz de un espaciotiempo lorentziano

Miguel Prados Abad

Máster en Matemáticas Avanzadas  
Facultad de Ciencias Matemáticas

Dirigido por:  
Marco Castrillón López y Javier Lafuente López

Madrid, Curso 2022/2023



## Resumen

En este trabajo se presenta, de forma medianamente autocontenida, un estudio sobre distintos conjuntos de geodésicas en un espaciotiempo lorentziano  $(M, g)$  de dimensión  $n$ . Se presentan, en primer lugar, algunos contenidos preliminares necesarios para el desarrollo posterior del trabajo.

En segundo lugar se discute, siguiendo resultados previos de otros autores, el conjunto  $\mathcal{M}$  de las geodésicas temporales *desparametrizadas*, esto es, geodésicas temporales salvo parametrización afín. Bajo ciertas condiciones, se dota a dicho conjunto de estructura de variedad simpléctica de dimensión  $2n - 2$  y se da la expresión de la forma simpléctica *natural* inducida por la forma simpléctica canónica del fibrado cotangente.

Posteriormente, también siguiendo estudios previos, se examina el conjunto  $\mathcal{N}$  de las geodésicas luminosas desparametrizadas y el conjunto  $\mathcal{N}_s$  de las geodésicas luminosas *escaladas*, esto es, salvo traslación del parámetro. Bajo ciertas asunciones, se dota a ambos de estructura de variedad diferenciable de dimensiones  $2n - 3$  y  $2n - 2$ , respectivamente. Asimismo, se dota al segundo de una estructura simpléctica que induce en el primero una estructura de contacto, de la que se obtiene una forma de contacto y la expresión de los hiperplanos de contacto. Se demuestra, además, que dicha estructura, al igual que las propias variedades  $\mathcal{N}$  y  $\mathcal{N}_s$ , depende exclusivamente de la clase conforme de la métrica. Para desarrollar todos estos contenidos se presentan algunos resultados previos sobre causalidad de espaciotiempos.

Finalmente, se estudia el espacio  $\mathcal{C}$  de las geodésicas causales desparametrizadas que, bajo ciertas hipótesis, es una variedad diferenciable con borde  $\mathcal{N}$  e interior  $\mathcal{M}$ . Se proporciona, localmente, una 2-forma diferenciable en  $\mathcal{M}$  que es conforme a la forma simpléctica natural y que se extiende diferenciablemente a  $\mathcal{N}$ , también localmente, donde coincide con la diferencial exterior de una forma de contacto. Se trata, por tanto, de una suerte de “relleno simpléctico conforme”, concepto no encontrado en la literatura y que acuñamos como novedoso.

## Abstract

In this master thesis we present, in a reasonably self-contained way, a study of different sets of geodesics in a Lorentzian spacetime  $(M, g)$  of dimension  $n$ . First, we present some preliminary contents necessary for the further development of the work.

Secondly, following previous results from other authors, we discuss the set  $\mathcal{M}$  of *non-parametrized* timelike geodesics, that is, timelike geodesics except for affine reparametrizations. Under certain assumptions, this set is given a  $2n - 2$ -dimensional symplectic manifold structure and we also give the expression of the *natural* symplectic form induced by the canonical symplectic form of the cotangent bundle.

Subsequently, also following previous studies, the set  $\mathcal{N}$  of non-parametrized lightlike geodesics and the set  $\mathcal{N}_s$  of *scaled* lightlike geodesics, that is, except for parameter translations, are examined. Both are endowed, under certain conditions, with differentiable manifold structures of dimensions  $2n - 3$  and  $2n - 2$ , respectively. The latter is also endowed with a symplectic structure which induces a contact structure in the former, from which a contact form and the expression of the contact hyperplanes are obtained. It is also proved that this structure, as well as the manifolds  $\mathcal{N}$  and  $\mathcal{N}_s$  themselves, depend exclusively on the conformal class of the metric. To develop all these contents, some previous results on spacetime causality are presented.

Finally, we study the space  $\mathcal{C}$  of non-parametrized causal geodesics which, under certain hypotheses, is a differentiable manifold with boundary  $\mathcal{N}$  and interior  $\mathcal{M}$ . We provide, locally, a new differentiable 2-form on  $\mathcal{M}$  which is conformal to the natural symplectic form and which extends differentially to  $\mathcal{N}$ , locally, where it coincides with the exterior differential of the contact form. It is, therefore, a kind of “conformal symplectic filling”, a concept not found in the literature and which we coin as novel.

# Índice

<b>Glosario de notación</b>	<b>v</b>
<b>Introducción</b>	<b>1</b>
<b>1. Conceptos previos</b>	<b>2</b>
1.1. Fibrados vectoriales diferenciables. Distribuciones. . . . .	2
1.1.1. Fibrados diferenciables . . . . .	2
1.1.2. Fibrados vectoriales diferenciables . . . . .	3
1.1.3. Distribuciones . . . . .	4
1.1.4. Foliaciones . . . . .	5
1.2. Conexiones afines, derivada covariante y paralelismo . . . . .	6
1.2.1. Conexiones lineales y conexiones afines . . . . .	6
1.2.2. Derivada covariante. Geodésicas afines . . . . .	8
1.2.3. Transporte paralelo . . . . .	9
1.3. Tensores, campos tensoriales y formas . . . . .	10
1.4. Variedades semiriemannianas . . . . .	12
1.4.1. Espacios vectoriales pseudoeuclídeos. Carácter causal de vectores . . . . .	13
1.4.2. Métricas semiriemannianas. Orientación temporal de variedades lorentzianas . . . . .	14
1.4.3. La conexión de Levi-Civita . . . . .	15
1.4.4. Variaciones de curvas . . . . .	16
1.4.5. Campos de Jacobi . . . . .	18
1.4.6. El <i>spray</i> geodésico . . . . .	19
1.5. Geometría simpléctica . . . . .	20
1.5.1. Espacios vectoriales simplécticos . . . . .	21
1.5.2. Variedades simplécticas . . . . .	22
1.6. Geometría de contacto . . . . .	24
<b>2. Estructura simpléctica del espacio de geodésicas temporales</b>	<b>28</b>
2.1. Descripción del espacio tangente $T_vTM$ con campos de Jacobi . . . . .	28
2.2. Estructura simpléctica de $TM$ . . . . .	29
2.3. La variedad $\mathcal{M}$ de las geodésicas temporales en $M$ . . . . .	30
2.4. El espacio tangente $T_T\mathcal{M}$ . . . . .	35
2.5. La forma simpléctica en $\mathcal{M}$ . . . . .	37

<b>3. Estructura de contacto del espacio de rayos de luz</b>	<b>38</b>
3.1. Estructura causal de espaciotiempos . . . . .	38
3.2. La variedad $\mathcal{N}$ de los rayos de luz en $M$ . . . . .	41
3.3. Los espacios tangentes $T_{\Gamma_s}\mathcal{N}_s$ y $T_{\Gamma}\mathcal{N}$ y la forma simpléctica en $\mathcal{N}_s$ . . . . .	46
3.4. La variedad $\mathcal{N}$ como variedad de contacto . . . . .	47
<b>4. Relleno simpléctico de <math>\mathcal{N}</math></b>	<b>52</b>
4.1. El espacio $\mathcal{C}$ de las geodésicas causales . . . . .	52
4.2. Una nueva 2-forma simpléctica en $\mathcal{M}$ . . . . .	53
4.3. $\mathcal{M}$ como relleno simpléctico de $\mathcal{N}$ . . . . .	54
4.4. Rellenos simplécticos . . . . .	56
4.5. Un nuevo concepto de relleno simpléctico . . . . .	57
<b>5. Conclusiones</b>	<b>58</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>60</b>

## Glosario de notación

$\mathcal{M}$	conjunto de geodésicas temporales desparametrizadas: $\{\text{Im } \gamma \mid \gamma \text{ geod. temp. maximal}\}$
$\mathcal{N}$	conjunto de geodésicas luminosas despar. (rayos luz): $\{\text{Im } \gamma \mid \gamma \text{ geod. lum. maximal}\}$
$\mathcal{N}_s$	conjunto de geodésicas luminosas escaladas
$\mathcal{C}$	conjunto de geodésicas causales desparametrizadas: $\{\text{Im } \gamma \mid \gamma \text{ geod. causal maximal}\}$
$\mathcal{J}(\gamma)$	conjunto de campos de Jacobi sobre una geodésica $\gamma$ (1.4.5)
$\mathcal{J}^0(\gamma)$	conjunto de campos de Jacobi $Y$ sobre $\gamma$ tales que $g(Y'(0), \dot{\gamma}(0)) = 0$
$\mathcal{J}^T(\gamma)$	conjunto de campos de Jacobi $Y$ sobre $\gamma$ tales que $Y = b\dot{\gamma}$ para cierto $b \in \mathbb{R}$
$\mathcal{J}^\perp(\gamma)$	conjunto de campos de Jacobi $Y$ sobre $\gamma$ tales que $g(Y(t), \dot{\gamma}(t)) = 0, \forall t$
$\mathcal{J}^{\text{tan}}(\gamma)$	conjunto de campos de Jacobi $Y$ sobre $\gamma$ tales que $Y(t) = (at + b)\dot{\gamma}(t)$ para $a, b \in \mathbb{R}$
$T_\Gamma \mathcal{M}$	$\cong \{\langle Y \rangle = Y + \mathcal{J}^T(\gamma) \mid Y \in \mathcal{J}^0(\gamma)\}, \gamma \in \Gamma$
$T_\Gamma \mathcal{N}$	$\cong \{\langle Y \rangle^{\text{tan}} = Y + \mathcal{J}^{\text{tan}}(\gamma) \mid Y \in \mathcal{J}^0(\gamma)\}, \gamma \in \Gamma$
$T_{\Gamma_s} \mathcal{N}_s$	$\cong \{\langle Y \rangle^T = Y + \mathcal{J}^T(\gamma) \mid Y \in \mathcal{J}^0(\gamma)\}, \gamma \in \Gamma_s$
$\mathcal{W}$	elemento de $T_\Gamma \mathcal{M}$
$\mathcal{W}^{\text{tan}}$	elemento de $T_\Gamma \mathcal{N}$
$\mathcal{W}^T$	elemento de $T_{\Gamma_s} \mathcal{N}_s$
$\omega$	forma simp. canónica del fibrado cotangente; a partir del ap. 2.3, forma simp. en $\mathcal{M}$
$\omega_g$	forma simpléctica en el fibrado tangente $= \hat{g}^* \omega$
$\hat{g}$	aplicación de Legendre
$\tilde{\omega}$	nueva 2-forma en $\mathcal{M}$ , conforme a $\omega$ (4.3)
$\chi$	<i>spray</i> geodésico (1.60)
$H$	vectores temporales <i>unitarios</i> (2.8)
$L$	vectores luminosos (3.2)

---

## Introducción

El estudio de las geodésicas en variedades afines ha suscitado gran interés en la comunidad matemática. La teoría de la Relatividad General y su descripción de las trayectorias de partículas (masivas o no) como geodésicas en un espaciotiempo *lorentziano* ha motivado que su estudio en el marco de las variedades *semiriemannianas* sea especialmente rico.

Investigaciones de finales del siglo pasado (Low, 1989), (Low, 1990), (Beem et al., 1996) comenzaron a considerar el conjunto de las geodésicas definidas en una variedad afín y aportaron condiciones suficientes para que dicho espacio admitiese una estructura de variedad diferenciable. En otras palabras, en lugar de estudiar las propiedades de las geodésicas como curvas, estudiaron las propiedades del conjunto formado por todas ellas.

Por supuesto, por los motivos ya mencionados, algunas de estas investigaciones prestaron especial atención al caso *semiriemanniano*, donde ya se conocía la existencia de varios tipos de geodésicas: las *temporales*, las *espaciales* y las *luminosas*. Para éstas últimas ya se sabía, también, que son *conformes*, esto es, que métricas que difieran exclusivamente en un factor de proporcionalidad (llamado *factor conforme*) tienen idénticas geodésicas luminosas.

El estudio del espacio de las geodésicas luminosas en un espaciotiempo *lorentziano* proporcionó interesantes resultados que relacionaron ciertas propiedades de dicho espacio con la *estructura causal* del espaciotiempo. En particular, se demostró que la *pseudoconvexidad luminosa* de un espaciotiempo es una condición necesaria y suficiente para que el espacio de sus geodésicas luminosas,  $\mathcal{N}$ , admita estructura de variedad de Hausdorff (teor. 3.25). Análogo resultado se obtuvo para la *pseudoconvexidad causal* como condición necesaria y suficiente para que el espacio de las geodésicas causales,  $\mathcal{C}$ , admita estructura de variedad de Hausdorff (teor. 4.3). Este último resultado se traslada, por supuesto, al caso del espacio de las geodésicas temporales,  $\mathcal{M}$ , proporcionando una condición suficiente para que éste admita una estructura de variedad de Hausdorff.

Una vez que se dispone de espacios de geodésicas que admiten estructura de variedad (Hausdorff o no), se puede estudiar si éstos admiten alguna estructura adicional. En el caso de las geodésicas de una variedad *riemanniana* o las geodésicas temporales o espaciales en una variedad *semiriemanniana* se demostró (Cariñena et al., 1991) que éstos admiten estructura de *variedad simpléctica*. Estudios más recientes (Bautista et al., 2015b) proporcionaron una construcción alternativa de dicha estructura simpléctica utilizando la *reducción simpléctica generalizada*. Esta construcción, la que seguiremos en el presente trabajo, fue estudiada para el caso de las geodésicas temporales en el Trabajo Fin de Máster (Gómez Zaragoza, 2020).

Por su parte, el ya mencionado estudio (Bautista et al., 2015b) demostró que el espacio de geodésicas luminosas podía ser dotado de *estructura de contacto* inducida por la estructura simpléctica del espacio de geodésicas luminosas *escaladas*. Esta construcción fue estudiada en el Trabajo Fin de Máster (Espinosa Ruiz, 2022).

En este trabajo se desarrollará la relación entre estas dos estructuras: la simpléctica del espacio de geodésicas temporales,  $\mathcal{M}$ , y la de contacto del espacio de geodésicas luminosas,  $\mathcal{N}$ . Dicha relación se concretará la definición local de una 2-forma diferenciable en  $\mathcal{M}$ , conforme a la forma simpléctica natural, y en su extensión local a  $\mathcal{N}$  de manera que, en  $\mathcal{N}$ , dicha extensión coincida con la diferencial exterior de una forma de contacto. Finalmente, se expondrán algunos de los conceptos básicos sobre rellenos simplécticos y se dará la definición de un nuevo concepto de relleno: el de *relleno simpléctico conforme*, basándonos en los resultados obtenidos para  $\mathcal{M}$  y  $\mathcal{N}$ .

## 1. Conceptos previos

En esta sección se incluyen los conceptos necesarios para el desarrollo posterior del trabajo. Se exponen todos ellos de manera lo más breve y concisa posible, tratando de evitar las demostraciones y remitiendo a la bibliografía correspondiente en cada caso.

A lo largo de todo el trabajo se presumirán conocimientos básicos de topología general y variedades diferenciables, que pueden encontrarse en numerosas referencias, como (Warner, 1983), (Lee, 2012) o (Sánchez Caja *et al.*, 2012). En cualquier caso, se hace necesaria la siguiente observación relativa a la propia definición de variedad diferenciable.

Las variedades diferenciables se definen como una variedad topológica dotada de una estructura diferenciable. A su vez, las variedades topológicas se definen, en general, como espacios topológicos *localmente euclídeos*, *Hausdorff* ( $T_2$ ) y *segundo axioma de numerabilidad* (ANII). En ocasiones se omite el requisito de ser  $T_2$  o ANII, apareciendo ejemplos “sofisticados” de variedades. Nosotros exigiremos siempre ambas propiedades, excepto cuando tratemos con variedades cociente (véase la observación previa a la definición 1.16), en cuyo caso omitiremos la exigencia de que sean Hausdorff.

Para trabajar con este tipo de variedades *no Hausdorff* se debe proceder con cautela, pues algunos resultados que son válidos para variedades Hausdorff dejan de ser ciertos, como sucede para la existencia de particiones continuas de la unidad.

### 1.1. Fibrados vectoriales diferenciables. Distribuciones.

En este apartado introduciremos algunos conceptos fundamentales de las teorías de fibrados vectoriales y de distribuciones. Asimismo, definiremos el concepto de foliación y construiremos la variedad cociente por una distribución regular. Todo ello nos servirá en las secciones 2 y 3 para construir las variedades de geodésicas temporales o luminosas, respectivamente, en un espaciotiempo lorentziano.

#### 1.1.1. Fibrados diferenciables

**Definición 1.1.** Un *fibrado diferenciable* es una 4-upla  $(M, B, p, F)$ , donde

- i)  $M, B, F$  son variedades diferenciables,
- ii)  $\pi: M \rightarrow B$  es una sumersión sobreyectiva<sup>1</sup>,
- iii) Alrededor de cada punto  $b \in B$  existe un entorno abierto  $U \subset B$  y un difeomorfismo  $\varphi_U: \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times F$  tal que el diagrama siguiente, en el que  $\pi_1: U \times F \rightarrow U$  es la proyección sobre la primera coordenada, es conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} \pi^{-1}(U) & \xrightarrow{\varphi_U} & U \times F \\ & \searrow \pi & \downarrow \pi_1 \\ & & U. \end{array}$$

A cada  $M_b = \pi^{-1}(b)$  se le denomina *fibra sobre  $b \in B$* , y se tiene que  $M_b \cong F$ ,  $\forall b \in B$ . Por ello, se suele decir que  $M$  (espacio *total*) es un fibrado diferenciable de  $B$  (espacio *base*) con

<sup>1</sup>En realidad, esto no supone ninguna exigencia adicional, pues ambas cualidades vendrán garantizadas por la propiedad iii).



fibra  $F$ . Por comodidad, en ocasiones diremos que  $\pi: M \rightarrow B$  es un fibrado diferenciable. Por su parte, a  $\varphi_U$  se le suele denominar *trivialización local* (de  $\pi$ ).

Si tenemos dos trivializaciones locales  $\varphi_U$  y  $\varphi_V$  con  $U \cap V \neq \emptyset$  podemos considerar la aplicación

$$\varphi_{UV} = \varphi_U \circ \varphi_V^{-1}: (U \cap V) \times F \rightarrow (U \cap V) \times F,$$

que es un difeomorfismo de la forma  $\varphi_{UV}(b, f) = (b, \tilde{\varphi}_{UV}(b, f))$ . Así, podemos definir

$$g_{UV}: U \cap V \rightarrow \text{Diff}(F)$$

dada por  $g_{UV}(b)(f) = \tilde{\varphi}_{UV}(b, f)$ ,  $\forall b \in U \cap V, f \in F$ . Se suele denominar a dichas aplicaciones *funciones de transición*.

**Definición 1.2.** Sea  $(M, B, \pi, F)$  un fibrado diferenciable. Una *sección local* de  $\pi$  en un entorno  $U_b$  de  $b \in B$  es una aplicación diferenciable  $s: U_b \rightarrow M$  tal que  $\pi \circ s = \text{id}_{U_b}$ . Una *sección (global) de  $\pi$*  es una sección local definida en todo el conjunto  $B$ . Se denota al conjunto de las secciones (globales) como  $\Gamma(M)$ .

### 1.1.2. Fibrados vectoriales diferenciables

**Definición 1.3.** Sea  $(M, B, \pi, F)$  un fibrado y  $G < \text{Homeo}(F)$ . Se dice que  $(M, B, \pi, F)$  tiene una *G-estructura* si para cada  $b \in B$  se tiene una identificación de las fibras  $\psi_b: F \rightarrow M_b$ , y una trivialización local  $\varphi_U: \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times F$  de manera que la composición  $\varphi_b = \varphi_U \circ \psi_b$

$$F \xrightarrow{\psi_b} M_b \subset \pi^{-1}(U) \xrightarrow{\varphi_U} \{b\} \times F \equiv F$$

verifica  $\varphi_b \in G$ . A  $G$  se le denomina *grupo de estructura del fibrado*.

Nótese que si  $b \in U \cap V \subset B$ , una posible identificación es  $\psi_b = \varphi_V^{-1}|_{\{b\} \times F}$ . Así, se tiene una definición *equivalente* exigiendo que  $\varphi_{UV}(b) \in G$  para todo punto  $b \in U \cap V$ .

**Definición 1.4.** Un *fibrado vectorial diferenciable* es un fibrado diferenciable  $(M, B, \pi, W)$  en el que la fibra es un espacio vectorial sobre un cuerpo  $\mathbb{K}$ , y que tiene grupo de estructura  $G = GL(W)$ . Se dice que el fibrado es de *rango*  $r = \dim_{\mathbb{K}}(W)$ .

En otras palabras, un fibrado vectorial diferenciable es un fibrado diferenciable en el que las fibras son espacios vectoriales y la restricción de las trivializaciones a cada una de ellas es un isomorfismo de espacios vectoriales. En este trabajo consideraremos que dichos espacios vectoriales son reales.

De forma natural, al conjunto de secciones de un fibrado vectorial se le puede dotar de estructura de espacio vectorial y de módulo sobre  $C^\infty(M)$ . Un ejemplo fundamental es el espacio de los campos vectoriales diferenciables en una variedad, que son justamente las secciones del fibrado tangente.

**Definición 1.5.** Sea  $\pi: M \rightarrow B$  un fibrado vectorial diferenciable y sea  $N \subset M$  una subvariedad regular (embebida) tal que para cada  $b \in B$ , se tiene que  $N_b = \pi^{-1}(b) \cap N$  es un subespacio vectorial de  $M_b = \pi^{-1}(b)$ . Si  $\pi|_N: N \rightarrow B$  es un fibrado vectorial diferenciable se dice que es un *subfibrado vectorial diferenciable* de  $\pi: M \rightarrow B$ .

**Definición 1.6.** Dado un fibrado vectorial diferenciable  $(M, B, \pi, W)$  y  $p \in M$ , definimos el *subespacio vertical sobre  $p$*  como  $V_p = \ker(d_p \pi) = T_p M_{\pi(p)} \subset T_p M$ . La unión disjunta de estos espacios proporciona un subfibrado del fibrado tangente  $TM \rightarrow M$ , denominado el *fibrado vertical de  $M$* :

$$VM = \{(p, v) \in TM \mid v \in V_p\}.$$

### 1.1.3. Distribuciones

El presente apartado, que será imprescindible para realizar la definición precisa de las variedades de geodésicas temporales y luminosas, se ha extraído de (Lee, 2012, Cap. 19), donde pueden encontrarse todas las demostraciones de los resultados aquí enunciados.

**Definición 1.7.** Sea  $M$  una variedad diferenciable de dimensión  $m$  y sea  $n < m$ . Una *distribución  $n$ -dimensional*  $\Delta$  es una asignación  $p \in M \mapsto \Delta_p \subset T_p M$ , donde  $\Delta_p$  es un subespacio vectorial  $n$ -dimensional. Se dice que una distribución es *diferenciable* si para cada  $p \in M$  existe un entorno  $U \subset M$  de  $p$  y existen  $n$  campos diferenciables  $X_1, \dots, X_n \in \mathfrak{X}(M)$  tales que  $\forall y \in U$ , se tiene que  $\Delta_y$  está generado por  $\{X_1(y), \dots, X_n(y)\}$ .

De manera equivalente, podemos ver una distribución diferenciable como un subfibrado vectorial diferenciable del fibrado tangente  $\pi: TM \rightarrow M$ , esto es, una subvariedad regular  $\Delta \subset TM$  de manera que  $\Delta_p = \pi^{-1}(p) \cap \Delta \subset \pi^{-1}(p) = T_p M$  sea un subespacio vectorial y  $\pi|_{\Delta}: \Delta \rightarrow M$  vuelva a ser un fibrado vectorial diferenciable. En particular, el fibrado vertical es también un ejemplo de distribución diferenciable. En adelante, siempre que hablemos de distribuciones entenderemos que éstas son diferenciables.

Se suele decir que un campo diferenciable  $X \in \mathfrak{X}(M)$  *está en  $\Delta$*  si es una sección diferenciable de  $\Delta$ , esto es, si  $X_p \in \Delta_p$ ,  $\forall p \in M$ . En tal caso, se denota  $X \in \Gamma(\Delta)$ . Por supuesto,  $\Gamma(\Delta) \subset \Gamma(TM) = \mathfrak{X}(M)$  es un subespacio vectorial.

Introducimos ahora dos conceptos sobre distribuciones diferenciables *a priori* muy distintos que, como veremos a continuación, están íntimamente ligados.

**Definición 1.8.** Se dice que una distribución  $\Delta$  es *involutiva* si dados dos campos diferenciables  $X, Y \in \Gamma(\Delta)$  se tiene que  $[X, Y] \in \Gamma(\Delta)$ , esto es, si  $\Gamma(\Delta) \subset \mathfrak{X}(M)$  es un subálgebra de Lie.

**Definición 1.9.** Sea  $M$  una variedad de dimensión  $m$  y  $\Delta$  una distribución  $n$ -dimensional. Una subvariedad inmersa  $N \subset M$  se dice *integral* si para cada  $y \in N$  se tiene  $T_y N = \Delta_y$ . Se dice que la distribución es *integrable* si para todo punto  $p \in M$  existe una variedad integral que lo contiene.

El siguiente resultado, que relaciona los dos conceptos recién definidos, puede demostrarse sin demasiada dificultad.

**Proposición 1.10.** *Toda distribución integrable es involutiva.*

Introducimos ahora un nuevo concepto, más restrictivo que el de integrabilidad de una distribución, que nos permitirá enunciar uno de los teoremas centrales de este apartado.

**Definición 1.11.** Un sistema local de coordenadas  $(p, U; \varphi = x^1, \dots, x^m)$  se dice que es *plano respecto a  $\Delta$*  si  $\varphi(U) \subset \mathbb{R}^m$  es un cubo y para cada  $p \in U$  se tiene que  $\Delta_p$  está generado por  $\left. \frac{\partial}{\partial x^1} \right|_p, \dots, \left. \frac{\partial}{\partial x^n} \right|_p$ . Se dice que una distribución  $\Delta$  en  $M$  es *completamente integrable* si cada punto  $p \in M$  admite un sistema local de coordenadas plano respecto a  $\Delta$ .

Por supuesto, toda distribución completamente integrable es integrable, pues cada sección del tipo  $x^{n+1} = c_{n+1}, \dots, x^m = c_m$ , para ciertas constantes  $c_j \in \mathbb{R}$ , será una variedad integral de dicha distribución. El siguiente teorema, de carácter fundamental en el estudio de las variedades diferenciables, nos proporciona la equivalencia entre los tres conceptos definidos hasta el momento.

**Teorema 1.12** (Local de Frobenius). *Toda distribución involutiva es completamente integrable.*

Una consecuencia del Teorema de Frobenius local es el teorema denominado de “estructura local de variedades integrales” que, *grosso modo*, garantiza que las variedades integrales de una distribución involutiva cortan a los sistemas de coordenadas planos en una unión numerable abiertos disjuntos de secciones de dichos sistemas de coordenadas.

#### 1.1.4. Foliaciones

**Definición 1.13.** Una *foliación* de  $M$  es una familia  $\mathcal{F}$  de subvariedades  $n$ -dimensionales conexas e inmersas en  $M$  que satisface las siguientes propiedades:

- i)  $\mathcal{F}$  es una partición disjunta de  $M$ , esto es,  $M = \bigsqcup_{A \in \mathcal{F}} A$ ,
- ii) Cada punto  $p \in M$  admite un sistema local de coordenadas  $(p, U; \varphi = x^1, \dots, x^m)$  tal que  $\varphi(U) \subset \mathbb{R}^m$  es un cubo y tal que cada variedad  $A \in \mathcal{F}$  o bien no interseca a  $U$  o bien lo interseca en una unión numerable de secciones  $n$ -dimensionales dadas por  $x^{n+1} = c_{n+1}, \dots, x^m = c_m$ , para ciertos  $c_j \in \mathbb{R}$  constantes. Se dice que dicho sistema de coordenadas es *plano respecto a  $\mathcal{F}$* .

A las subvariedades  $A \in \mathcal{F}$  se les denomina *hojas* de la foliación.

Los dos siguientes resultados nos muestran que las foliaciones están en correspondencia biunívoca con las distribuciones involutivas. De forma sencilla se puede demostrar el siguiente resultado, que nos permitirá asociar a cada foliación una distribución involutiva.

**Proposición 1.14.** *La colección de espacios tangentes a las hojas de una foliación forma una distribución involutiva.*

El resultado recíproco, consecuencia del Teorema de Frobenius local, es mucho más profundo.

**Teorema 1.15** (Global de Frobenius). *Sea  $\Delta$  una distribución  $n$ -dimensional involutiva en  $M$ . La familia  $\mathcal{F}_\Delta$  de las variedades integrales maximales conexas de  $\Delta$  es una foliación de  $M$ .*

Dada una distribución involutiva  $\Delta \subset TM$ , podemos considerar la relación de equivalencia en  $M$  dada por

$$p \sim q \iff \exists F \in \mathcal{F}_\Delta \mid p, q \in F.$$

Podemos considerar asimismo el conjunto cociente  $M/\sim \equiv M/\Delta \equiv \mathcal{F}_\Delta$ , que es un espacio topológico con la topología cociente. Se puede comprobar además (Palais, 1957, pág. 12) que la proyección sobre el cociente  $\Pi_\Delta: M \rightarrow M/\Delta$  es una aplicación abierta.

**Observación.** *Nótese que el espacio topológico cociente recién definido no necesariamente será de Hausdorff ( $T_2$ ).*

En los siguientes párrafos definiremos la propiedad de *regularidad* de una distribución involutiva  $\Delta$ . Esto nos permitirá dotar de una estructura de variedad diferenciable (no Hausdorff) al espacio topológico  $M/\Delta$ .

**Definición 1.16.** Sea  $\Delta \subset TM$  una distribución involutiva  $n$ -dimensional. Se dice que un sistema de coordenadas  $(p, U; \varphi = x^1, \dots, x^m)$  es *regular* (respecto a  $\Delta$ ) si es plano respecto a  $\Delta$  y cada hoja  $F \in \mathcal{F}_\Delta$  interseca a  $U$  en a lo sumo una sección  $n$ -dimensional. Una hoja  $F \in \mathcal{F}_\Delta$  se dice *regular* si todo punto  $p \in F$  admite un entorno coordinado regular. Análogamente, la distribución  $\Delta$  se dice *regular* si todas las hojas de  $\mathcal{F}_\Delta$  son regulares.

El siguiente teorema, que culmina el presente apartado, será de gran utilidad a la hora de definir una estructura diferenciable en los conjuntos de geodésicas temporales y luminosas. La demostración, que requiere la introducción de algunos conceptos previos, puede encontrarse en (Palais, 1957, págs. 13-19) y en (Brickell et al., 1970, págs. 204-206).

**Teorema 1.17.** Sea  $\Delta \subset TM$  una distribución  $n$ -dimensional regular y sea  $(U; \varphi = x^1, \dots, x^m)$  un sistema de coordenadas regular respecto de  $\Delta$ . Existe entonces una única parametrización  $\psi_U: \Pi_\Delta(U) \rightarrow \mathbb{R}^{m-n}$  tal que

$$(\psi_U \circ \Pi_\Delta)(p) = (x^{n+1}(p), \dots, x^m(p)), \quad \forall p \in U.$$

La colección de todos los sistemas de coordenadas  $(\Pi_\Delta(U), \psi_U)$  constituye un atlas diferenciable de  $M/\Delta$  que la convierte en una variedad diferenciable (no Hausdorff) de dimensión  $m - n$ . Además, con dicha estructura diferenciable, la proyección  $\Pi_\Delta$  es una sumersión.

En general, dada una distribución regular  $\Delta$ , siempre consideraremos que  $M/\Delta$  está dotada de la estructura diferenciable dada por el teorema anterior. Así, diremos que ésta es la estructura diferenciable *natural* de  $M/\Delta$ .

Se comprueba de manera sencilla que, en las condiciones del teorema anterior, para cada  $p \in M$  se tiene que  $\ker(d_p \Pi_\Delta) = T_p F = \Delta_p \subset T_p M$ , donde  $F \in \mathcal{F}$  es la hoja que contiene a  $p$ , esto es,  $F = \Pi_\Delta^{-1}(\Pi_\Delta(p))$ . En consecuencia, para cada  $p \in M$  se tiene el isomorfismo canónico

$$\overline{d_p \Pi_\Delta}: T_p M / T_p F \xrightarrow{\cong} T_{\Pi_\Delta(p)}(M/\Delta).$$

## 1.2. Conexiones afines, derivada covariante y paralelismo

En este apartado introduciremos las conexiones lineales en un fibrado vectorial diferenciable, con especial interés en las conexiones afines, así como la derivada covariante y el transporte paralelo. Estos conceptos son esenciales para dar, en este mismo apartado, la definición de geodésica afín, concepto central de este trabajo. Definiremos, asimismo, el tensor de Riemann, que necesitaremos en el apartado 1.4.5 para introducir los campos de Jacobi.

### 1.2.1. Conexiones lineales y conexiones afines

En algunos textos se definen las conexiones lineales como un tipo especial de distribuciones en el fibrado tangente que son complementarias al fibrado vertical. Se comprueba que estas distribuciones están en correspondencia biunívoca con las aplicaciones a las que nosotros denominamos conexiones lineales en este trabajo (def. 1.18), de modo que puede verse a ambas definiciones como equivalentes.

En nuestro caso no será necesario entender las conexiones lineales como distribuciones, de modo que evitaremos hacer dicha definición. En cualquier caso, puede consultarse (Castrillón et al., 2010, págs. 47-51), donde se dan ambas definiciones y se demuestra la correspondencia entre ellas.

**Definición 1.18.** Una *conexión lineal* en un fibrado vectorial *real* diferenciable  $(M, B, \pi, W)$  es una aplicación

$$\nabla: \mathfrak{X}(B) \times \Gamma(M) \rightarrow \Gamma(M), \quad \nabla(X, s) = \nabla_X s,$$

que verifica:

- i)  $\nabla$  es  $\mathbb{R}$ -bilineal,

- ii)  $\nabla_{fX}(s) = f\nabla_X s, \forall f \in C^\infty(B), X \in \mathfrak{X}(B), s \in \Gamma(M),$
- iii)  $\nabla_X(fs) = X(f)s + f\nabla_X s, \forall f \in C^\infty(B), X \in \mathfrak{X}(B), s \in \Gamma(M),$  lo que se conoce como *Regla de Leibnitz*.

En particular, para el fibrado tangente  $TM \rightarrow M$  se tiene que  $\Gamma(TM) = \mathfrak{X}(M)$ , luego una conexión lineal en éste es una aplicación  $\nabla: \mathfrak{X}(M)^2 \rightarrow \mathfrak{X}(M)$  que verifica las condiciones de la definición anterior. En este caso, se dice que  $\nabla$  es una conexión *afín* en  $M$ .

Se puede comprobar que una conexión afín es *localizable* (Lee, 2018, Prop. 4.5), esto es, el valor de  $\nabla_X Y$  en un punto  $p \in M$  solo depende de  $X_p$  y de los valores que  $Y$  tome en un entorno<sup>2</sup> de  $p$ . En consecuencia, puede considerarse la actuación de una conexión afín sobre campos definidos no en toda la variedad, sino en un entorno coordenado de algún punto.

Dado un entorno coordenado  $(p, U; x^1, \dots, x^n)$  y denotando  $\partial_i = \frac{\partial}{\partial x^i}$ , podemos considerar  $\nabla_{\partial_i} \partial_j \in \mathfrak{X}(U)$ . Así, se podrá expresar en coordenadas locales como<sup>3</sup>

$$\nabla_{\partial_i} \partial_j = \sum_{k=1}^n \Gamma_{ij}^k \partial_k \equiv \Gamma_{ij}^k \partial_k, \quad (1.1)$$

para ciertas aplicaciones  $\Gamma_{ij}^k \in C^\infty(U)$  a las que denominaremos *símbolos de Christoffel*.

Dada una conexión afín en una variedad diferenciable podemos definir dos aplicaciones de especial relevancia que se comprueba que son *campos tensoriales*<sup>4</sup> sobre dicha variedad:

**Definición 1.19.** Sea  $\nabla$  una conexión afín en  $M$ . Se define la *torsión* de  $\nabla$  como el campo tensorial (1,2)

$$T: \mathfrak{X}(M)^2 \longrightarrow \mathfrak{X}(M), \quad (X, Y) \longmapsto T(X, Y), \quad (1.2)$$

dado por

$$T(X, Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y].$$

Asimismo, se define el *tensor de Riemann* como el campo tensorial (1,3)

$$\mathcal{R}: \mathfrak{X}(M)^3 \longrightarrow \mathfrak{X}(M), \quad (X, Y, Z) \longmapsto \mathcal{R}_{XY}(Z) = \mathcal{R}(X, Y)Z, \quad (1.3)$$

dado por

$$\mathcal{R}_{XY}(Z) = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]} Z.$$

Al igual que todo campo tensorial, el valor en un punto tanto de la torsión como del tensor de Riemann depende únicamente de los valores de los campos correspondientes en dicho punto (véase la observación posterior a la def. 1.28).

El tensor de Riemann se suele denominar *tensor de curvatura* de la variedad afín  $(M, \nabla)$ , al ser un caso particular<sup>5</sup> de curvatura de un fibrado diferenciable dotado de una *conexión de Ehresmann*. En nuestro caso solo trabajaremos con el tensor de Riemann asociado a la *conexión de Levi-Civita* (teor. 1.45).

<sup>2</sup>De hecho, esto puede mejorarse más aún:  $(\nabla_X Y)_p$  solo depende de  $X_p$  y de los valores que  $Y$  tome a lo largo de una curva  $\gamma$  con  $\gamma(0) = p$  y  $\dot{\gamma}(0) = X_p$ .

<sup>3</sup>En la última igualdad estamos empleando el *convenio de sumación de Einstein*, lo que continuaremos haciendo a lo largo del trabajo.

<sup>4</sup>Véanse la def. 1.28 y el comentario previo a la def. 1.29.

<sup>5</sup>En este caso deberíamos ver  $\mathcal{R}$  como una 2-forma en  $M$  valuada sobre  $TM$ . Véase (Kobayashi et al., 1963) para una discusión detallada de las nociones de conexión y curvatura en fibrados diferenciables.

### 1.2.2. Derivada covariante. Geodésicas afines

**Definición 1.20.** Sea  $F: M \rightarrow N$  una aplicación diferenciable. Un *campo vectorial sobre  $F$*  es una aplicación  $Y: M \rightarrow TN$  tal que  $\pi \circ Y = F$ , esto es,  $Y(p) \in T_{F(p)}N$ ,  $\forall p \in M$ .

Dada  $F: M \rightarrow N$  diferenciable, el conjunto  $\mathfrak{X}(F)$  de los campos vectoriales sobre  $F$  tiene, de forma natural, estructura de espacio vectorial sobre  $\mathbb{R}$  y de módulo sobre  $C^\infty(M)$ .

**Observación.** El hecho de que  $\nabla$  (y, por tanto,  $\mathcal{R}$ ) sea localizable, nos permite considerar la actuación de éstos sobre campos vectoriales sobre una aplicación, como hacemos en el apartado iii) del siguiente teorema o en la proposición 1.50. De hecho,  $(\mathcal{R}_{XY}Z)_p$  solamente depende de los valores de  $X_p$ ,  $Y_p$  y  $Z_p$  (véase la observación posterior a la definición 1.28).

Consideremos una curva diferenciable  $\gamma: I \rightarrow M$  y un campo vectorial  $X \in \mathfrak{X}(\gamma)$ . Para cada  $t \in I$ , podemos considerar un entorno coordinado  $(\gamma(t), U; \varphi = x^1, \dots, x^n)$  y expresar localmente  $X(t) = X^i(t) \partial_i(t)$ , donde  $\partial_i(t) \equiv (\partial_i \circ \gamma)(t)$ . En particular, dada una curva diferenciable  $\gamma: I \rightarrow M$ , su *velocidad*  $\dot{\gamma}: I \rightarrow TM$  es un campo vectorial a lo largo de  $\gamma$ . En consecuencia, también podemos expresar<sup>6</sup> localmente  $\dot{\gamma}(t) = \dot{\gamma}^i(t) \partial_i(t)$ .

**Teorema 1.21.** Sea  $\gamma: I \rightarrow M$  una curva diferenciable. Una conexión afín  $\nabla$  en  $M$  determina un único operador  $\frac{D}{dt}: \mathfrak{X}(\gamma) \rightarrow \mathfrak{X}(\gamma)$ , denominado derivada covariante a lo largo de  $\gamma$ , que verifica:

- i)  $\frac{D}{dt}$  es  $\mathbb{R}$ -lineal,
- ii)  $\frac{D}{dt}(fX) = f'X + f \frac{DX}{dt}$ ,  $\forall f \in C^\infty(I)$ ,  $X \in \mathfrak{X}(\gamma)$ ,
- iii) Si  $Y \in \mathfrak{X}(M)$ , entonces  $\frac{D}{dt}(Y \circ \gamma) = \nabla_{\dot{\gamma}} Y$ .

En consecuencia, empleando las propiedades de la derivada covariante y la conexión se obtiene la expresión local

$$\begin{aligned} \frac{DX}{dt}(t) &= \frac{D}{dt} \left( X^i(t) \partial_i(t) \right) = \frac{dX^i}{dt}(t) \partial_i(t) + X^i(t) \frac{D}{dt}(\partial_i(t)) = \\ &= \frac{dX^i}{dt}(t) \partial_i(t) + X^i(t) \nabla_{\dot{\gamma}}(\partial_i) = \frac{dX^i}{dt}(t) \partial_i(t) + X^i(t) \dot{\gamma}^j(t) \nabla_{\partial_j(t)}(\partial_i) = \\ &= \left( \frac{dX^k}{dt}(t) + \Gamma_{ji}^k(\gamma(t)) X^i(t) \dot{\gamma}^j(t) \right) \partial_k(t). \end{aligned}$$

Por simplicidad, omitiremos la referencia expresa a la variable  $t$  siempre que sea posible y denotaremos  $X' = \frac{DX}{dt}$  y  $\dot{X}^k = \frac{dX^k}{dt}$ . Nótese que, de acuerdo con la expresión anterior, en general  $\dot{X}^k \neq (X')^k$ .

Como la velocidad de una curva  $\gamma$  es un campo vectorial a lo largo de  $\gamma$ , podemos definir su *aceleración* como la derivada covariante de su velocidad, esto es,  $\dot{\gamma}' = \frac{D}{dt} \dot{\gamma}$ . Definimos entonces uno de los objetos centrales de este trabajo, las *geodésicas*, como las curvas de aceleración nula:

**Definición 1.22.** Un campo vectorial  $X \in \mathfrak{X}(\gamma)$  se dice *paralelo (a lo largo de  $\gamma$ )* si  $\frac{D}{dt}X \equiv 0$ . Se dice que una curva  $\gamma$  es una *geodésica (afín)* si  $\frac{D}{dt}\dot{\gamma} \equiv 0$  o, equivalentemente, si su velocidad es un campo vectorial paralelo.

<sup>6</sup>Si  $\dot{\gamma} = \varphi \circ \gamma = (\gamma^1, \dots, \gamma^n)$ , entonces se verifica  $\dot{\gamma}^i = \frac{d\gamma^i}{dt}$ .

Empleando la expresión local de los párrafos precedentes se tiene que las geodésicas (afines) son aquellas que verifican

$$\ddot{\gamma}^k + \Gamma_{ji}^k \dot{\gamma}^i \dot{\gamma}^j = 0, \quad \forall k, \quad (1.4)$$

lo que se traduce en un sistema de  $n$  ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden acopladas. Los teoremas de existencia y unicidad de soluciones maximales de ecuaciones diferenciales nos permiten obtener el siguiente resultado (Lee, 2018, Teor. 4.27):

**Teorema 1.23.** *Sea  $M$  una variedad diferenciable dotada de una conexión afín  $\nabla$ . Para cada  $p \in M$  y cada  $v \in T_p M$  existe una única geodésica maximal  $\gamma: I \rightarrow M$  tal que  $\gamma(0) = p$  y  $\dot{\gamma}(0) = v$ . Denotamos a dicha geodésica por  $\gamma_{p,v}$  o, simplemente,  $\gamma_v$ .*

En adelante, consideraremos exclusivamente geodésicas *no constantes*, que en virtud de este teorema verifican que  $\dot{\gamma}(t) \neq 0$ ,  $\forall t \in I$ . Observemos que, con esta convención, la ecuación (1.4) impone ciertas restricciones a las reparametrizaciones de geodésicas: si  $h: J \rightarrow I$  es un difeomorfismo y  $\gamma: I \rightarrow M$  es una geodésica, se tiene que

$$\tilde{\gamma} = \gamma \circ h \text{ es geodésica} \iff h(t) = at + b, \quad \forall t \in J, \text{ para ciertos } a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0,$$

esto es, solamente las reparametrizaciones *afines* de geodésicas son geodésicas.

### 1.2.3. Transporte paralelo

De manera análoga a lo obtenido anteriormente para las geodésicas, la condición local de un campo paralelo  $X \in \mathfrak{X}(\gamma)$  es

$$\dot{X}^k + \Gamma_{ji}^k X^i \dot{\gamma}^j = 0, \quad \forall k.$$

Así, volvemos a tener un sistema de  $n$  ecuaciones diferenciales ordinarias acopladas, en esta ocasión de primer orden. De nuevo, los resultados del ámbito de las ecuaciones diferenciales nos garantizan la existencia y unicidad de campos paralelos a lo largo de una curva, dada una condición inicial (Lee, 2018, Teor. 4.32):

**Proposición 1.24.** *Sea  $\gamma: I \rightarrow M$  una curva diferenciable,  $t_0 \in I$  y  $v \in T_{\gamma(t_0)} M$ . Existe un único campo  $X$  paralelo a lo largo de  $\gamma$  tal que  $X(t_0) = v$ .*

**Definición 1.25.** Sea  $\gamma: I \rightarrow M$  una curva diferenciable y  $a, b \in I$ . Se define el *transporte paralelo a lo largo de  $\gamma$*  como la aplicación

$$\mathcal{T}_a^b: T_{\gamma(a)} M \rightarrow T_{\gamma(b)} M, \quad v \mapsto X(b), \quad (1.5)$$

donde  $X$  es el único campo paralelo a lo largo de  $\gamma$  con  $X(a) = v$ .

**Lema 1.26.** *El transporte paralelo a lo largo de una curva es un isomorfismo<sup>7</sup> vectorial.*

El transporte paralelo a lo largo de una curva “conecta” espacios tangentes a la variedad en puntos distintos. Esta interpretación es justamente la que da nombre a la *conexión*. Así, el transporte paralelo permite comparar vectores de distintos espacios y “recuperar” la noción de derivada covariante a partir del transporte paralelo. En efecto, dada  $\gamma: I \rightarrow M$  curva diferenciable y  $X \in \mathfrak{X}(\gamma)$ , para cada  $t_0 \in I$  se tiene:

$$\frac{DX}{dt}(t_0) = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{\mathcal{T}_t^{t_0} X(t) - X(t_0)}{t - t_0}.$$

<sup>7</sup>Más adelante podremos asegurar que, con la *conexión de Levi-Civita*, el transporte paralelo es una *isometría*. Esto será una consecuencia inmediata de la proposición 1.46.

A la vista de este resultado resulta evidente la razón de que la *derivada* covariante se denomine así. Aunque no se puede calcular directamente la “tasa de variación” infinitesimal de un campo a lo largo de una curva, pues vectores distintos pertenecerán a espacios distintos, trasladando paralelamente uno de ellos sí que podemos calcular la diferencia entre ambos.

En otro orden de cosas, de la definición de transporte paralelo, se tiene que si  $X \in \mathfrak{X}(\gamma)$  es paralelo, entonces  $\mathcal{T}_a^b X(a) = X(b)$ . En particular, si  $\gamma$  es una geodésica, entonces

$$\mathcal{T}_a^b \dot{\gamma}(a) = \dot{\gamma}(b),$$

luego  $\frac{D\dot{\gamma}}{dt} = 0$ , como ya sabíamos.

**Observación.** Nótese que para definir los conceptos relacionados con el paralelismo no hemos necesitado introducir el concepto de métrica. Por tanto, aún no podemos hablar de distancias ni de minimizarlas. Sin embargo, más adelante definiremos las geodésicas métricas como aquellas curvas diferenciables que son puntos críticos del funcional energía y veremos que, con una elección adecuada de la conexión, las geodésicas métricas coinciden con las geodésicas afines. Véase el teorema 1.53.

### 1.3. Tensores, campos tensoriales y formas

En este apartado introducimos de forma breve los conceptos de campo tensorial y de forma diferenciable, así como la diferencial exterior y sus propiedades. Todo ello será necesario posteriormente para la definición de las métricas semiriemannianas, las formas simplécticas y las formas de contacto en una variedad diferenciable. En numerosas referencias puede encontrarse documentación adicional sobre estos conceptos, como en (O’Neill, 1983, Cap. 2) cuya exposición sigue este texto, o (Lee, 2012, Cap. 12).

**Definición 1.27.** Un *tensor de tipo*  $(r, s)$  sobre un espacio vectorial  $V(\mathbb{R})$  es una aplicación  $\mathbb{R}$ -multilineal

$$A: (V^*)^r \times V^s \longrightarrow \mathbb{R}.$$

Al conjunto de los tensores de tipo  $(r, s)$  sobre  $V$ , que es un espacio vectorial sobre  $\mathbb{R}$ , se le denota por  $\mathcal{I}_s^r(V)$ . Si  $M$  es una variedad diferenciable, se puede considerar el  $(r, s)$ -fibrado tensorial como el conjunto

$$\mathcal{I}_s^r(M) = \bigsqcup_{p \in M} \mathcal{I}_s^r(T_p M) = \{(p, A_p) \mid A_p \in \mathcal{I}_s^r(T_p M)\} \quad (1.6)$$

dotado de la proyección natural  $\pi: \mathcal{I}_s^r(M) \rightarrow M$ .

Con las técnicas usuales se comprueba que el  $(r, s)$ -fibrado tensorial sobre  $M$  tiene una estructura natural de variedad diferenciable que lo convierte en un fibrado vectorial diferenciable. Por comodidad, denotaremos  $A_p \equiv (p, A_p) \in \mathcal{I}_s^r(M)$ .

**Definición 1.28.** Sea  $M$  una variedad diferenciable. Un *campo tensorial de tipo*  $(r, s)$  es una aplicación  $C^\infty(M)$ -multilineal

$$A: \mathfrak{X}^*(M)^r \times \mathfrak{X}(M)^s \longrightarrow C^\infty(M).$$

Se suele decir que un campo tensorial de tipo  $(r, 0)$  es  $r$ -contravariante, mientras que uno de tipo  $(0, s)$  es  $s$ -covariante.



Observemos que un campo tensorial de tipo  $(r, s)$  puede verse, de forma equivalente, como una aplicación diferenciable

$$\begin{aligned} A: M &\longrightarrow \mathcal{I}_s^r(M) \\ p &\longmapsto A_p \in \mathcal{I}_s^r(T_p M), \end{aligned}$$

esto es, una sección diferenciable del  $(r, s)$ -fibrado tensorial. La relación entre ambas definiciones es

$$A(\theta^1, \dots, \theta^r, X_1, \dots, X_s)(p) = A_p(\theta^1|_p, \dots, \theta^r|_p, X_1|_p, \dots, X_s|_p),$$

donde  $\theta^i \in \mathfrak{X}^*(M)$ ,  $X_j \in \mathfrak{X}(M)$ ,  $\forall i, j$ ,  $p \in M$ .

**Observación.** Esta identificación nos garantiza que el valor de un campo tensorial en un punto depende únicamente de los valores de sus “entradas” en ese punto. En otras palabras, dados  $\varphi^1, \dots, \varphi^r \in T_p^*M$  y  $v_1, \dots, v_s \in T_p M$ , se tiene que

$$A_p(\varphi^1, \dots, \varphi^r, v_1, \dots, v_s) = A(\theta^1, \dots, \theta^r, X_1, \dots, X_s)(p),$$

para cualesquiera extensiones  $\theta^i \in \mathfrak{X}^*(M)$  de  $\varphi^i$  y  $X_j \in \mathfrak{X}(M)$  de  $v_j$ .

Asimismo, cada aplicación  $C^\infty(M)$ -multilineal  $A: \mathfrak{X}(M)^s \rightarrow \mathfrak{X}(M)$  puede identificarse con un campo tensorial  $\bar{A}$ , de tipo  $(1, s)$ , dado por

$$\bar{A}(\theta, X_1, \dots, X_s) = \theta(A(X_1, \dots, X_s)).$$

**Definición 1.29.** Sean  $k, l, r, s \in \mathbb{N}$  y  $V$  un espacio vectorial real. Se define el *producto tensorial (de tensores)* como la aplicación

$$\otimes: \mathcal{I}_l^k(V) \times \mathcal{I}_s^r(V) \rightarrow \mathcal{I}_{l+s}^{k+r}(V), \quad (A, B) \mapsto A \otimes B,$$

dada por

$$\begin{aligned} (A \otimes B)(\theta_1, \dots, \theta^{k+r}, v_1, \dots, v_{l+s}) &= \\ &= A(\theta^1, \dots, \theta^k, v_1, \dots, v_l) B(\theta^{k+1}, \dots, \theta^{k+r}, v_{l+1}, \dots, v_{l+s}), \end{aligned}$$

y se define el *producto tensorial (de campos tensoriales)*, como  $(A \otimes B)_p = A_p \otimes B_p$ , para  $p \in M$  y  $A, B$  campos tensoriales sobre  $M$ .

**Definición 1.30.** Se dice que un tensor  $n$ -covariante  $A$  es *completamente antisimétrico* o *alternado* si su signo cambia al intercambiar cualesquiera dos de sus argumentos, esto es, si

$$A(v_1, \dots, v_i, \dots, v_j, \dots, v_n) = -A(v_1, \dots, v_j, \dots, v_i, \dots, v_n),$$

o, equivalentemente, si para toda permutación  $\sigma \in S_n$ , se tiene

$$A(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(n)}) = \text{signo}(\sigma) A(v_1, \dots, v_n).$$

Al conjunto de los tensores  $n$ -covariantes alternados sobre  $V$ , que es un subespacio vectorial de  $\mathcal{I}_n^0(V)$  se le denota por  $\Lambda^n(V)$ .

Si  $M$  es una variedad diferenciable de dimensión  $m$ , podemos considerar el conjunto

$$\Lambda^n(M) = \bigsqcup_{p \in M} \Lambda^n(T_p M), \quad (1.7)$$

que es un subfibrado de  $\mathcal{I}_n^0(M)$  denominado el *fibrado exterior de orden  $n$* . Llamaremos  $n$ -formas (diferenciables) a los  $n$ -campos tensoriales alternados, esto es, a las secciones de  $\Lambda^n(M)$ . Denotaremos por  $\Omega^n(M)$  al conjunto de  $n$ -formas sobre  $M$ .

Introducimos ahora una manera de definir tensores alternados a partir de tensores covariantes cualesquiera. Esto nos será de utilidad posteriormente para definir el denominado *producto exterior* de tensores o de formas.

**Definición 1.31.** Se define el operador *antisimetrizador* o *alternador* como la aplicación

$$\text{Alt}: \mathcal{I}_k^0(V) \rightarrow \Lambda^k(V) \subset \mathcal{I}_k^0(V),$$

dada por

$$\text{Alt}(A)(v_1, \dots, v_k) = \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in S_k} \text{signo}(\sigma) A(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(k)}).$$

**Definición 1.32.** Se define el *producto exterior* de tensores covariantes alternados como la aplicación

$$\wedge: \Lambda^k(V) \times \Lambda^l(V) \rightarrow \Lambda^{k+l}(V), \quad (A, B) \rightarrow A \wedge B,$$

dada por

$$A \wedge B = \frac{(k+l)!}{k!l!} \text{Alt}(A \otimes B).$$

Análogamente, se define el *producto exterior de k-formas* como la aplicación

$$\wedge: \Omega^k(M) \times \Omega^l(M) \rightarrow \Omega^{k+l}(M), \quad (\omega, \eta) \rightarrow \omega \wedge \eta,$$

dada por  $(\omega \wedge \eta)_p = \omega_p \wedge \eta_p, \forall p \in M$ .

El producto exterior recién definido convierte a los espacios vectoriales,

$$\Lambda(V) = \bigoplus_{k=0}^m \Lambda^k(V) \quad \text{y} \quad \Omega(M) = \bigoplus_{k=0}^m \Omega^k(M),$$

donde  $m = \dim V = \dim M$ , en *álgebras asociativas graduadas*.

Enunciamos, para concluir esta sección, el siguiente teorema de existencia y unicidad de la *diferencial exterior*, de carácter fundamental en la teoría de *k-formas* diferenciables. Su demostración puede encontrarse, entre otras muchas referencias, en (Lee, 2012, pág. 365).

**Teorema 1.33.** Sea  $M$  una variedad diferenciable. Para cada  $k \in \mathbb{N}$  existe un único operador  $d: \Omega^k(M) \rightarrow \Omega^{k+1}(M)$ , al que se denomina *diferencial exterior*, que verifica:

- i)  $d$  es  $\mathbb{R}$ -lineal,
- ii) Si  $\omega \in \Omega^k(M)$ ,  $\eta \in \Omega^l(M)$ , entonces  $d(\omega \wedge \eta) = d\omega \wedge \eta + (-1)^{k+l} \omega \wedge d\eta$ ,
- iii)  $d \circ d \equiv 0$ ,
- iv) Si  $f \in \Omega^0(M) = C^\infty(M)$ , entonces  $df$  es la diferencial ordinaria de  $f$ .

**Definición 1.34.** Se dice que una  $n$ -forma  $\omega$  es *cerrada* si  $d\omega = 0$ , y que es *exacta* si existe  $\alpha \in \Omega^{n-1}(M)$  tal que  $d\alpha = \omega$ .

De la propiedad iii) del teorema anterior se deduce que toda forma exacta es cerrada.

## 1.4. Variedades semiriemannianas

Introducimos ahora las métricas y las variedades semiriemannianas, con especial atención a las variedades lorentzianas. Éstas serán justamente las que describan al espaciotiempo, el ambiente en el que consideraremos las geodésicas temporales y luminosas.

### 1.4.1. Espacios vectoriales pseudoeuclídeos. Carácter causal de vectores

**Definición 1.35.** Un *espacio vectorial pseudoeuclídeo* es un espacio vectorial real  $V$  dotado de una forma bilineal (esto es, un tensor 2-covariante) simétrica y no degenerada  $g$ .

Se dice que dos vectores  $u, v \in V$  son *ortogonales* si  $g(u, v) = 0$ , lo que denotamos por  $u \perp v$ . Se dice que una base  $\mathcal{B} = \{e_1, \dots, e_n\}$  es *ortonormal* si  $|g(e_i, e_j)| = \delta_{ij}$ ,  $\forall i, j$ .

Siguiendo la nomenclatura de (Javaloyes V. et al., 2010), definimos el *carácter causal* de vectores en un espacio vectorial pseudoeuclídeo como sigue:

**Definición 1.36.** Sean  $V$  un espacio vectorial pseudoeuclídeo y  $v \in V$  un vector distinto de cero. Decimos que

- $v$  es *temporal* si  $g(v, v) < 0$ ,
- $v$  es *luminoso* si  $g(v, v) = 0$ ,
- $v$  es *espacial* si  $g(v, v) > 0$ ,
- $v$  es *causal* si es luminoso o temporal.

**Observación.** No hay una elección estandarizada sobre el carácter causal del vector cero. Nosotros diremos, de nuevo siguiendo a (Javaloyes V. et al., 2010), que  $v \in V$  es

- *nulo* si es luminoso o cero,
- *no causal* si es espacial o cero,
- *no espacial* si es causal o cero.

**Proposición 1.37.** Sea  $(V, g)$  un espacio vectorial pseudoeuclídeo. Entonces  $V$  admite una base ortonormal. Además, todas las bases ortonormales de  $V$  tienen el mismo número de vectores temporales. Llamamos a dicho número el *índice* de  $g$  y lo denotamos por  $\nu$ .

En el caso en que  $\nu = 0$  se tiene que la métrica es definida positiva y se dice que el espacio es *euclídeo*. Por otra parte, cuando  $n = \dim V \geq 2$  y  $\nu \neq 0$  la métrica es indefinida. En particular, cuando  $\nu = 1$  se dice que el espacio es *lorentziano*. En lo que resta de apartado consideraremos que  $V$  es lorentziano de dimensión mayor o igual que 2.

**Proposición 1.38.** El conjunto de vectores temporales (resp. luminosos, causales) tiene 2 componentes conexas. A cada una de ellas la denominamos *cono temporal* (resp. *luminoso, causal*). Además se tiene

- i) Dos vectores  $u, v$  están en el mismo cono temporal si, y sólo si  $g(u, v) < 0$ ,
- ii) Dos vectores independientes  $u, v$  están en el mismo cono causal si, y sólo si  $g(u, v) < 0$ ,
- iii) Si  $u, v$  están en el mismo cono temporal (resp. causal), entonces también lo están  $au + bv$ , para  $a, b > 0$ . En particular, cada cono temporal (resp. causal) es convexo.

**Definición 1.39.** Una *orientación temporal* de un espacio vectorial lorentziano  $V$  es una elección de uno de los conos temporales (o, equivalentemente causales o luminosos) al que se denominará *cono futuro*. Al otro cono se le denominará *cono pasado*.

**Definición 1.40.** Sea  $W \subset V$  un subespacio vectorial. Se dice que

- $W$  es *temporal* si  $(W, g_W)$  es lorentziano o, equivalentemente, si  $W$  contiene al menos un vector temporal,
- $W$  es *espacial* si  $(W, g_W)$  es euclídeo,
- $W$  es *luminoso* si  $(W, g_W)$  es degenerado.

**Lema 1.41.**  $W$  es temporal  $\iff W^\perp$  es espacial.

### 1.4.2. Métricas semiriemannianas. Orientación temporal de variedades lorentzianas

**Definición 1.42.** Sea  $M$  una variedad diferenciable. Una *métrica semiriemanniana* en  $M$  es un campo tensorial 2-covariante simétrico y no degenerado de índice constante, esto es, una aplicación  $C^\infty(M)$ -multilineal

$$g: \mathfrak{X}(M)^2 \rightarrow C^\infty(M),$$

de forma que para cada  $p \in M$ , la forma bilineal

$$g_p: T_p M \times T_p M \longrightarrow \mathbb{R}, \quad g_p(X_p, Y_p) = g(X, Y)(p)$$

es simétrica y no degenerada, y todas ellas tienen el mismo índice  $\nu$ .

Se dice que  $(M, g)$  es una *variedad semiriemanniana*. Cuando la métrica induce en cada punto una forma bilineal definida positiva ( $\nu = 0$ ) se dice que ésta es *riemanniana*, y cuando  $\dim M \geq 2$  y  $g$  define una forma bilineal de índice  $\nu = 1$ , se dice que es *lorentziana*.

Dado un entorno coordenado  $(p, U; x^1, \dots, x^n)$ , para cada  $i, j \in \{1, \dots, n\}$  denotamos

$$g_{ij}: U \rightarrow \mathbb{R}, \quad g_{ij}(q) = g_q(\partial_i(q), \partial_j(q)).$$

Dado  $q \in U$  y dados  $u, v \in T_q M$ , se tiene

$$g_q(u, v) = g_q(u^i \partial_i(q), v^j \partial_j(q)) = u^i v^j g_{ij}(q).$$

Así, la matriz  $\tilde{g}_q = (g_{ij}(q))_{ij}$  es la matriz de  $g_q$  en la base  $(\partial_i(q))_i$ .

Análogamente, denotaremos  $(\tilde{g}_q)^{-1} = (g^{ij}(q))_{ij}$ , de manera que también podemos ver  $g^{ij}: U \rightarrow \mathbb{R}$  como la aplicación  $q \mapsto g^{ij}(q)$ .

Para lo que resta de apartado supondremos que  $M$  es una variedad lorentziana conexa.

**Definición 1.43.** Una *orientación temporal* de  $M$  es una aplicación  $\tau$  que asigna a cada punto  $p \in M$  un cono temporal  $\tau_p \subset T_p M$ , de manera que para cada  $p \in M$  exista un entorno  $U \subset M$  de  $p$  y un campo vectorial  $X \in \mathfrak{X}(U)$  tal que  $X_q \in \tau_q$ ,  $\forall q \in U$ .

Nótese que en esta definición pueden sustituirse los conos temporales por luminosos o causales obteniendo idéntico concepto de orientación temporal.

Se tiene el siguiente resultado, que se demuestra haciendo uso de particiones diferenciables de la unidad<sup>8</sup> (Javaloyes V. et al., 2010, Prop. 3.2):

**Teorema 1.44.** Una variedad lorentziana  $M$  admite una orientación temporal si, y solamente si admite un campo vectorial globalmente definido  $X \in \mathfrak{X}(M)$  tal que  $X_p$  es temporal,  $\forall p \in M$ . En tal caso se dice que  $M$  es temporalmente orientable.

Una variedad lorentziana (conexa) temporalmente orientable admitirá justamente dos orientaciones temporales. Dada una de ellas,  $\tau$ , a los conos  $\tau_p$  se les denominará *conos futuros* y a los conos  $-\tau_p$ , *conos pasados*. De igual modo, los elementos de un cono futuro (resp. pasado) se dirá que *apuntan* al futuro (resp. pasado).

Una curva diferenciable cuyos vectores tangentes sean todos temporales (resp. luminosos, causales, espaciales) se dirá que es temporal (resp. luminosa, causal, espacial). Si los vectores

<sup>8</sup>Para tener garantía de la existencia de éstas es necesario asumir que la variedad sea de Hausdorff y paracompacta, lo cual es cierto en nuestro caso, pues las variedades (excepción hecha de las variedades cociente definidas en el apartado 1.1.4) las asumimos de Hausdorff y ANII. De hecho, la paracompacidad es equivalente a la existencia en  $M$  de una métrica semiriemanniana (Marathe, 1972, Cor. 2).

tangentes a una curva causal apuntan todos al futuro (resp. pasado) se dirá que la curva está *dirigida* al futuro (resp. pasado). En general una curva diferenciable no tendrá por qué tener carácter causal bien definido, pues no todos sus vectores tangentes tendrán que tener el mismo carácter causal.

### 1.4.3. La conexión de Levi-Civita

En toda variedad semiriemanniana existe una única conexión que verifica dos propiedades de la conexión euclídea<sup>9</sup>: ser *libre de torsión* y ser *compatible con la métrica*. Esto se expresa en el siguiente resultado, cuya demostración puede encontrarse en (Lee, 2018, Teor. 5.10).

**Teorema 1.45** (Fundamental de la Geometría Semiriemanniana). *Sea  $(M, g)$  una variedad semiriemanniana. Existe una única conexión afín  $\nabla$  en  $M$  que verifica:*

i) *Es compatible con la métrica:*

$$X(g(Y, Z)) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z), \quad \forall X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M),$$

ii) *Es libre de torsión:*

$$T(X, Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y] = 0, \quad \forall X, Y \in \mathfrak{X}(M).$$

Esta conexión, que se denomina conexión de Levi-Civita, está caracterizada por la fórmula de Koszul:

$$2g(\nabla_X Y, Z) = X(g(Y, Z)) - Z(g(X, Y)) + Y(g(X, Z)) + g([X, Y], Z) + g([Y, Z], X) - g([X, Z], Y).$$

Observamos en primer lugar que para una conexión libre de torsión y, en particular, para la conexión de Levi-Civita, los símbolos de Christoffel verifican  $\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$ .

Además, puede comprobarse que en un entorno coordenado  $(p, U; x^1, \dots, x^n)$ , los símbolos de Christoffel pueden expresarse como

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} g^{lk} \left( \frac{\partial g_{jl}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^l} + \frac{\partial g_{il}}{\partial x^j} \right): U \rightarrow \mathbb{R}. \quad (1.8)$$

En lo sucesivo consideraremos que  $M \equiv (M, g, \nabla)$  es una variedad semiriemanniana de dimensión  $n$  dotada de la conexión de Levi-Civita.

Con la conexión de Levi-Civita (y, de hecho, con cualquier conexión compatible con la métrica), la derivada *temporal* de la acción de la métrica sobre dos campos vectoriales sobre una curva se comporta de manera natural satisfaciendo una suerte de “regla de Leibniz” para el producto en la que la “derivada de un campo” es su derivada covariante. Esto se expresa en el siguiente resultado, que se demuestra considerando las expresiones locales de los campos y de la derivada covariante (Lee, 2018, Prop. 5.5).

**Proposición 1.46.** *Sea  $\gamma: I \rightarrow M$  una curva diferenciable y sean  $X, Y \in \mathfrak{X}(\gamma)$ . Para cada  $t \in I$ , se verifica*

$$\frac{d}{dt} \left( g(X(t), Y(t)) \right) = g \left( \frac{DX}{dt}(t), Y(t) \right) + g \left( X(t), \frac{DY}{dt}(t) \right).$$

<sup>9</sup>En  $\mathbb{R}^n$  la conexión euclídea es la que, para las coordenadas usuales, verifica  $\Gamma_{ij}^k \equiv 0, \forall i, j, k$ .

**Corolario 1.46.1.** Sea  $\gamma$  una geodésica. Entonces  $\frac{d}{dt} g(\dot{\gamma}, \dot{\gamma}) = 2g\left(\frac{D\dot{\gamma}}{dt}, \dot{\gamma}\right) \equiv 0$ .

En consecuencia, para una geodésica  $\gamma$ , se tiene que  $g_{\gamma(t)}(\dot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t))$  es constante en su dominio y, por tanto,  $\gamma$  tiene carácter causal bien definido. Se dirá que  $\gamma$  es temporal (resp. causal, luminosa, espacial) si lo es alguno de sus vectores tangentes.

En otro orden de cosas, con la conexión de Levi-Civita el tensor de Riemann  $\mathcal{R}$  (def. 1.19) satisface ciertas propiedades de simetría y antisimetría, además de una propiedad análoga a la *identidad de Jacobi*, denominada *identidad de Bianchi*. Exponemos estas propiedades en el siguiente resultado, cuya demostración puede encontrarse en (Lee, 2018, Prop. 7.12), entre otras referencias.

**Proposición 1.47.** Con la conexión de Levi-Civita, el tensor de Riemann satisface las siguientes propiedades,  $\forall X, Y, Z, W \in \mathfrak{X}(M)$ :

- i)  $\mathcal{R}_{XY}Z = -\mathcal{R}_{YX}Z$ , y en particular  $\mathcal{R}_{XX} \equiv 0$ ,
- ii)  $g(\mathcal{R}_{XY}Z, W) = -g(Z, \mathcal{R}_{XY}W)$ , y en particular  $g(\mathcal{R}_{XY}Z, Z) = 0$ ,
- iii)  $g(\mathcal{R}_{XY}Z, W) = g(\mathcal{R}_{ZW}X, Y)$ ,
- iv)  $\mathcal{R}_{XY}Z + \mathcal{R}_{ZX}Y + \mathcal{R}_{YZ}X = 0$ , propiedad a la que se conoce como *identidad de Bianchi*.

A partir del tensor de Riemann (con la conexión de LC) se define una serie de conceptos como la *curvatura seccional*, el *tensor de Ricci*, la *curvatura de Ricci* o la *curvatura escalar*. En el caso de las variedades de dimensión 2 (superficies diferenciables), la curvatura seccional coincide con la ya conocida *curvatura de Gauss*, lo que motiva que el tensor de Riemann sea conocido como *tensor de curvatura*.

#### 1.4.4. Variaciones de curvas

Introducimos ahora una herramienta auxiliar, las variaciones de curvas, que nos será de utilidad tanto para definir el siguiente concepto, los campos de Jacobi, como para dar una relación entre dos nociones de geodésica de distinta naturaleza, las geodésicas afines y las geodésicas métricas. El contenido de este apartado se ha extraído de diversas fuentes, principalmente de (O'Neill, 1983), (Janssen, 2020) y (Candela et al., 2010).

**Definición 1.48.** Sea  $\alpha: I \rightarrow M$  una curva diferenciable con  $I = [a, b]$ . Una *variación de  $\alpha$*  es una aplicación diferenciable  $x: I \times (-\delta, \delta) \rightarrow M$ , para cierto  $\delta > 0$ , de manera que  $x(t, 0) = \alpha(t)$ ,  $\forall t \in I$ . Dada una variación  $x$  de  $\alpha$ , se definen:

- Para cada  $t \in I$ , las *curvas transversales* como las aplicaciones  $x^t: (-\delta, \delta) \rightarrow M$  dadas por  $x^t(s) = x(t, s)$ ,
- Para cada  $s \in (-\delta, \delta)$ , las *curvas longitudinales* como las aplicaciones  $x^s: I \rightarrow M$  dadas por  $x^s(t) = x(t, s)$ .

Una variación  $x$  de  $\alpha$  se dice *de extremos fijos* si  $x(a, s) = \alpha(a)$ ,  $x(b, s) = \alpha(b)$ ,  $\forall s \in (-\delta, \delta)$ .

**Definición 1.49.** El campo vectorial  $V$  sobre  $\alpha$  dado por  $V(t) = \frac{\partial x}{\partial s}(t, 0)$  se denomina *campo variacional de  $x$* . Si cada una de las curvas longitudinales es una geodésica, se dice que  $x$  es una *variación geodésica* o una *familia uniparamétrica de geodésicas*.

Obsérvese que  $V(t)$  es la velocidad inicial de la curva transversal  $x^t$ . En particular, para una variación de extremos fijos se tendrá que  $V(a) = V(b) = 0$ . Más generalmente, pueden considerarse los campos vectoriales tangentes a las curvas longitudinales o transversales

$$\begin{aligned}\partial_s x(\tilde{t}, \tilde{s}) &= \left. \frac{d}{ds} x^t(s) \right|_{(\tilde{t}, \tilde{s})} = \left. \frac{\partial x(t, s)}{\partial s} \right|_{(\tilde{t}, \tilde{s})}, \\ \partial_t x(\tilde{t}, \tilde{s}) &= \left. \frac{d}{dt} x^s(t) \right|_{(\tilde{t}, \tilde{s})} = \left. \frac{\partial x(t, s)}{\partial t} \right|_{(\tilde{t}, \tilde{s})}.\end{aligned}$$

Estos campos son ejemplos de campos vectoriales sobre la variación  $x$ , por lo que denotaremos  $\partial_s x, \partial_t x \in \mathfrak{X}(x)$  (véase la definición 1.20).

A partir de la derivada covariante, definimos dos nuevos operadores  $\frac{D}{dt}, \frac{D}{ds}: \mathfrak{X}(x) \rightarrow \mathfrak{X}(x)$  dados por

$$\left. \frac{DX(t, s)}{dt} \right|_{(\tilde{t}, \tilde{s})} = \left. \frac{DX(t, \tilde{s})}{dt} \right|_{\tilde{t}}, \quad \left. \frac{DX(t, s)}{ds} \right|_{(\tilde{t}, \tilde{s})} = \left. \frac{DX(\tilde{t}, s)}{ds} \right|_{\tilde{s}}.$$

Por simplicidad, denotaremos a los campos correspondientes  $D_t X$  y  $D_s X$ , respectivamente.

Se tiene entonces el siguiente resultado, cuya demostración puede encontrarse en (O'Neill, 1983, Prop. 4.44), que nos será de utilidad más adelante para trabajar con *campos de Jacobi*.

**Proposición 1.50.** *Si  $M$  está dotada de la conexión de Levi-Civita, se verifica:*

- i)  $D_t \partial_s x = D_s \partial_t x$ ,
- ii) Si  $F \in \mathfrak{X}(x)$ , entonces  $D_t D_s F - D_s D_t F = \mathcal{R}(\partial_t x, \partial_s x)F$ .

**Definición 1.51.** Sea  $\alpha: [a, b] \rightarrow M$  una curva diferenciable. Se define su *energía* como

$$E[\alpha] = \frac{1}{2} \int_a^b g_{\alpha(t)}(\dot{\alpha}(t), \dot{\alpha}(t)) dt.$$

Se puede ver entonces  $E$  como un *funcional* definido en cierto espacio de curvas diferenciables<sup>10</sup>  $\alpha: [a, b] \rightarrow M$ . En nuestro caso, consideraremos  $E$  como definida en el espacio  $\mathcal{X}_{p \rightarrow q}$  de las curvas diferenciables  $\alpha: [a, b] \rightarrow M$  tales que  $\alpha(a) = p$ ,  $\alpha(b) = q$ , para dos puntos prefijados  $p, q \in M$  en una misma componente arcoconexa de  $M$ .

**Definición 1.52.** Se dice que una curva  $\alpha \in \mathcal{X}_{p \rightarrow q}$  es una *geodésica (métrica)* si  $\alpha$  es un punto crítico de  $E$  en  $\mathcal{X}_{p \rightarrow q}$ .

Notemos, en primer lugar, que esta definición no requiere que la variedad esté dotada de una conexión afín, de modo que la definición de geodésica métrica es, *a priori*, completamente independiente de la definición de geodésica afín.

Si  $x: I \times (-\delta, \delta) \rightarrow M$  es una variación de  $\alpha$ , podemos definir la energía de las curvas longitudinales de manera análoga y considerar

$$E_x: (-\delta, \delta) \rightarrow \mathbb{R}, \quad E_x(s) = E[x^s] = \frac{1}{2} \int_a^b g_{x^s(\tilde{t})}(\partial_t x(\tilde{t}, s), \partial_t x(\tilde{t}, s)) d\tilde{t}.$$

Pues bien, puede demostrarse que  $\alpha \in \mathcal{X}_{p \rightarrow q}$  es un punto crítico de  $E$  en  $\mathcal{X}_{p \rightarrow q}$  si, y solamente si  $E'_x(0) = 0$ , para toda variación de extremos fijos  $x$  de  $\alpha$ . Véanse (O'Neill, 1983,

<sup>10</sup>De hecho, no es necesario exigir diferenciabilidad en toda la curva. Véase (Candela et al., 2010). En nuestro caso, no nos preocuparemos por esto, dado que para nosotros las geodésicas son diferenciables en todo su dominio.

Cap. 10) para una discusión más detallada o (Candela *et al.*, 2010) para un estudio en el caso en que a las curvas no se les exige diferenciabilidad a trozos.

Concluimos este apartado con un resultado que muestra la relación entre ambas nociones de geodésica y la naturalidad de la conexión de Levi-Civita (Janssen, 2020, Sec. 7.6 y 8.1):

**Teorema 1.53.** *Con la conexión de Levi-Civita, se tiene*

$$E'_x(0) = 0, \forall x \text{ variación de extremos fijos de } \alpha \iff \frac{D\dot{\alpha}}{dt} \equiv 0,$$

*esto es, las geodésicas afines coinciden con las geodésicas métricas.*

### 1.4.5. Campos de Jacobi

En este apartado, extraído principalmente de (O'Neill, 1983), se introduce el concepto de campo de Jacobi, que será de vital importancia para describir el espacio tangente al fibrado tangente de una variedad. A su vez, éste será necesario para la definición de las variedades de geodésicas temporales y luminosas en un espaciotiempo lorentziano.

**Definición 1.54.** Sea  $M$  una variedad semiriemanniana y sea  $\gamma$  una geodésica en  $M$ . Un campo vectorial  $Y$  sobre  $\gamma$  se dice *de Jacobi* si verifica la *ecuación de Jacobi*:

$$Y'' = \frac{D^2 Y}{dt^2} = \mathcal{R}_{Y\dot{\gamma}}(\dot{\gamma}). \quad (1.9)$$

Al ser la condición de Jacobi lineal en  $Y$ , se tiene que el conjunto  $\mathcal{J}(\gamma)$  de los campos de Jacobi sobre una geodésica  $\gamma$  es un subespacio vectorial de  $\mathfrak{X}(\gamma)$ .

Como primer ejemplo de campo de Jacobi podemos considerar la velocidad  $\dot{\gamma} \in \mathfrak{X}(\gamma)$  de  $\gamma$ , que verifica (véase la propiedad *i*) de la proposición 1.47)  $\dot{\gamma}'' = 0 = \mathcal{R}_{\dot{\gamma}\dot{\gamma}}(\dot{\gamma})$ .

De la proposición 1.50 se deduce de manera sencilla el siguiente resultado:

**Lema 1.55.** *El campo variacional de una variación geodésica es un campo de Jacobi.*

Este resultado da lugar a una interpretación (O'Neill, 1983, pág. 216) que tiene importantes implicaciones en Relatividad General: la *desviación geodésica*. El campo variacional  $V$  describe *grosso modo*, la distancia entre dos geodésicas infinitesimalmente cercanas. De manera análoga, su derivada covariante medirá la velocidad relativa entre ambas geodésicas y la segunda derivada covariante, la aceleración entre éstas.

Al ser  $V$  un campo de Jacobi, se verificará  $\frac{D^2 V}{dt^2} = \mathcal{R}_{V\dot{\gamma}}\dot{\gamma}$ , luego dicha aceleración estará íntimamente relacionada con la curvatura de la variedad a lo largo de la geodésica base. Interpretando la ecuación de Jacobi como una especie de Segunda Ley de Newton tenemos que  $\mathcal{R}_{V\dot{\gamma}}\dot{\gamma}$  cumple el papel de una fuerza, a la que se denomina *fuerza de marea*. Decimos que esta interpretación tiene importantes consecuencias en Relatividad General, pues permite la descripción de la gravedad a través de la curvatura del espaciotiempo. En este sentido, la literatura física denomina a la ecuación de Jacobi *ecuación de la desviación geodésica*.

Veamos ahora algunos resultados sobre existencia y unicidad de campos de Jacobi sobre una geodésica.

**Teorema 1.56.** *Sea  $\gamma$  una geodésica con  $\gamma(0) = p$ . Para cada  $v, w \in T_p M$ , existe un único campo de Jacobi  $Y$  sobre  $\gamma$  que verifica  $Y(0) = v$ ,  $Y'(0) = \frac{DY}{dt}(0) = w$ .*



La demostración de este resultado se basa en la obtención de un sistema de ecuaciones diferenciales de cuya solución conocemos, por resultados conocidos, la existencia y unicidad. Para la obtención de dicho sistema se define una *referencia móvil ortonormal*, esto es, una base ortonormal en  $T_p M$  que se traslada paralelamente a lo largo de  $\gamma$ . Posteriormente, para cada  $t \in I$ , se expresa  $Y(t)$  en dicha base y se obtienen las condiciones sobre sus coeficientes.

**Corolario 1.56.1.** *El espacio vectorial  $\mathcal{J}(\gamma)$  de los campos de Jacobi sobre una geodésica  $\gamma: I \rightarrow M$  es isomorfo a  $T_p M \times T_p M$ , donde  $p = \gamma(0)$ . En particular, se trata de un espacio vectorial de dimensión  $2n$ .*

Por otra parte, tenemos el siguiente resultado, recíproco del lema 1.55, que se demuestra haciendo uso de la *exponencial geodésica*<sup>11</sup> para definir una variación geodésica cuyo campo variacional es el buscado, lo que se demuestra a su vez empleando la unicidad de los campos de Jacobi.

**Proposición 1.57.** *Sea  $\gamma$  una geodésica e  $Y \in \mathcal{J}(\gamma)$ . Entonces  $Y$  es el campo variacional de una variación geodésica (de  $\gamma$ ).*

**Lema 1.58.** *Dado  $Y \in \mathcal{J}(\gamma)$ , se verifica  $g(Y(t), \dot{\gamma}(t)) = at + b$  para ciertos  $a, b \in \mathbb{R}$ .*

*Demostración.* Se verifica

$$\frac{d^2}{dt^2} g(Y(t), \dot{\gamma}(t)) = g\left(\frac{D^2 Y}{dt^2}(t), \dot{\gamma}(t)\right) = g(\mathcal{R}_{Y(t), \dot{\gamma}(t)} \dot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t)) = 0, \quad (1.10)$$

donde en la última igualdad hemos empleado el apartado *ii*) de la proposición 1.47. ■

**Proposición 1.59.** *Dada una geodésica no nula<sup>12</sup>  $\gamma$ , el espacio  $\mathcal{J}(\gamma)$  de los campos de Jacobi sobre  $\gamma$  puede expresarse como suma directa  $\mathcal{J}(\gamma) = \mathcal{J}^{\tan}(\gamma) \oplus \mathcal{J}^{\perp}(\gamma)$ , donde*

$$\begin{aligned} \mathcal{J}^{\tan}(\gamma) &= \{Y \in \mathcal{J}(\gamma) \mid \exists a, b \in \mathbb{R}, Y(t) = (at + b)\dot{\gamma}(t), \forall t\}, \\ \mathcal{J}^{\perp}(\gamma) &= \{Y \in \mathcal{J}(\gamma) \mid g(Y(t), \dot{\gamma}(t)) = 0, \forall t\}. \end{aligned}$$

*Demostración.* Sea  $Y \in \mathcal{J}^{\tan}(\gamma) \cap \mathcal{J}^{\perp}(\gamma)$ . Se tiene entonces que  $Y(t) = (at + b)\dot{\gamma}(t)$  para ciertos  $a, b \in \mathbb{R}$ . En consecuencia,  $g(Y(t), \dot{\gamma}(t)) = (at + b)g(\dot{\gamma}, \dot{\gamma}) = 0$ ,  $\forall t$ , y al ser  $\gamma$  no nula, deberá ser  $a = b = 0$ , luego  $Y \equiv 0$ .

Sea ahora  $Y \in \mathcal{J}(\gamma)$  y sean  $a, b \in \mathbb{R}$  tales que  $g(Y(t), \dot{\gamma}(t)) = at + b$ ,  $\forall t$ . Definimos los campos  $Y^{\tan}(t) = (at + b)g(\dot{\gamma}, \dot{\gamma})^{-1}\dot{\gamma}(t) \in \mathcal{J}^{\tan}(\gamma)$  e  $Y^{\perp} = Y - Y^{\tan} \in \mathcal{J}^{\perp}(\gamma)$ , con lo que obtenemos la descomposición buscada. ■

#### 1.4.6. El spray geodésico

La expresión local de las geodésicas (1.4) puede ser reescrita, de forma equivalente, como un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden

$$\begin{cases} \dot{\gamma}^k = \lambda^k, \\ \dot{\lambda}^k = -\Gamma_{ji}^k \lambda^i \lambda^j. \end{cases} \quad (1.11)$$

<sup>11</sup>La exponencial geodésica en  $p \in M$  es una aplicación  $\exp_p: U_p \subset T_p M \rightarrow M$ , definida en el conjunto  $U_p = \{v \in T_p M \mid \gamma_{p,v} \text{ está definida en } 1\}$ , y dada por  $\exp_p(v) = \gamma_{p,v}(1)$ ,  $\forall v \in U_p$ .

<sup>12</sup>De acuerdo con los convenios expuestos en la definición 1.36 y la observación posterior, con esta nomenclatura hacemos referencia a que, para cada  $t$ ,  $\dot{\gamma}(t)$  es no nulo, es decir, ni es cero ni es luminoso.

Asociado a este sistema, en cada entorno coordinado  $((p, v), U; x^1, \dots, x^n, y^1, \dots, y^n)$  de  $TM$ , podemos definir un campo vectorial  $\chi \in \mathfrak{X}(TM)$  dado por

$$\chi(q, w) = \chi(x^1, \dots, x^n, y^1, \dots, y^n) = y^k \frac{\partial}{\partial x^k} \Big|_{(q, w)} - \Gamma_{ji}^k(q) y^i y^j \frac{\partial}{\partial y^k} \Big|_{(q, w)} \quad (1.12)$$

Las curvas integrales  $\alpha: I \rightarrow TM$  de dicho campo serán tales que, denotando  $\alpha^k = y^k \circ \alpha$ ,

$$\dot{\alpha}(t) = \chi_{\alpha(t)} = \alpha^k \frac{\partial}{\partial x^k} \Big|_{\alpha(t)} - \Gamma_{ji}^k(\alpha(t)) \alpha^i \alpha^j \frac{\partial}{\partial x^k} \Big|_{\alpha(t)}. \quad (1.13)$$

Así, expresando  $\beta^k = x^k \circ \alpha$ , se deduce que  $\dot{\beta}^k = \alpha^k$  y  $\dot{\alpha}^k = -\Gamma_{ji}^k \alpha^i \alpha^j$ . En resumen, las coordenadas  $(\beta^k, \alpha^k)$  de las curvas integrales de  $\chi$  verifican el sistema de ecuaciones diferenciales (1.11) y, por tanto, las coordenadas  $\beta^k$  verifican la ecuación (1.4) de las geodésicas. El razonamiento seguido se resume en el siguiente resultado (Geiges, 2008, pág. 26):

**Proposición 1.60.** *Sea  $(M, g, \nabla)$  una variedad semiriemanniana. Existe entonces un único campo vectorial  $\chi \in \mathfrak{X}(TM)$  cuyas curvas integrales son las aplicaciones de la forma*

$$\begin{aligned} \alpha: I &\longrightarrow TM \\ t &\longmapsto (\gamma(t), \dot{\gamma}(t)) \in T_{\gamma(t)} M, \end{aligned} \quad (1.14)$$

donde  $\gamma: I \rightarrow M$  es una geodésica. En general, por comodidad denotaremos  $\alpha \equiv \dot{\gamma}$ . Denominamos a  $\chi$  el spray geodésico de  $M$ .

**Observación.** No se deben confundir las curvas integrales de  $\chi$  con las variedades integrales de la distribución unidimensional  $\langle \chi \rangle$  generada por  $\chi$  en  $TM$ . Por supuesto, la imagen de una curva de la forma (1.14) será una variedad integral de  $\langle \chi \rangle$ . Recíprocamente, todas<sup>13</sup> las variedades integrales maximales conexas de  $\langle \chi \rangle$  son imagen de alguna curva de la forma (1.14). Denotemos por  $\Gamma$  a una de estas variedades integrales maximales conexas y tomemos  $v \equiv (p, v) \in \Gamma$ . Entonces  $\Gamma = \text{Im } \dot{\gamma}_v$ . Pero también<sup>14</sup> se tiene  $\Gamma = \text{Im } \dot{\gamma}$ , donde  $\gamma$  es una reparametrización de  $\gamma_v$  por traslación del parámetro.

## 1.5. Geometría simpléctica

La geometría simpléctica cubre un ámbito muy extenso de la geometría diferencial que guarda gran relación con la mecánica clásica y, más específicamente, con la mecánica analítica. En este trabajo no necesitaremos profundizar excesivamente en esta teoría, de modo que introduciremos los conceptos necesarios de manera breve y concisa. Pueden consultarse (Cannas da Silva, 2001), que realiza un estudio detallado, o (Arnold, 1997), que ofrece una visión más amplia de la relación de la geometría simpléctica con la Física.

<sup>13</sup>Todo punto  $(p, v) \in TM$  está en una (única) variedad integral maximal conexa de  $\langle \chi \rangle$ . Además, por todo punto  $(p, v)$  pasa una curva integral de  $\chi$  de la forma (1.14) (por ejemplo, tomando  $\gamma = \gamma_{(p, v)}$ ). Como dos curvas integrales maximales o bien tienen igual imagen o bien no se cortan, se deduce el resultado.

<sup>14</sup>Nótese que aunque dos geodésicas tengan la misma imagen, esto es, cada una sea una reparametrización (general) de la otra, las imágenes de las aplicaciones de la forma (1.14) correspondientes no tendrán la misma imagen a no ser que la reparametrización sea una traslación del parámetro.

### 1.5.1. Espacios vectoriales simplécticos

**Definición 1.61.** Una *forma simpléctica*  $\omega$  en un espacio vectorial  $V$  es una forma bilineal antisimétrica<sup>15</sup> y no degenerada, esto es,

$$\omega(v, w) = 0, \forall w \in V \iff v = 0.$$

Se dice que  $(V, \omega)$  es un espacio vectorial simpléctico.

Se comprueba sin dificultad que toda forma bilineal antisimétrica definida en un espacio vectorial de dimensión impar es degenerada. En consecuencia, un espacio vectorial simpléctico necesariamente tendrá dimensión par.

**Lema 1.62.** Sea  $(V, \omega)$  un espacio vectorial simpléctico. Existe una base  $e_1, \dots, e_n, f_1, \dots, f_n$  de  $V$  tal que

$$\omega(e_i, e_j) = \omega(f_i, f_j) = 0, \quad \omega(e_i, f_j) = \delta_{ij}.$$

**Definición 1.63.** Sea  $(V, \omega)$  un espacio vectorial simpléctico y  $W$  un subespacio vectorial suyo. Se dice que  $W$  es

- i) *simpléctico* si  $\omega|_{W \times W}$  es no degenerada,
- ii) *isótropo* si  $\omega|_{W \times W} \equiv 0$  o, equivalentemente, si  $W \subseteq W^{\perp\omega}$ ,
- iii) *coisótropo* si  $W^{\perp\omega} \subseteq W$ ,
- iv) *lagrangiano* si es isótropo y coisótropo, esto es, si  $W^{\perp\omega} = W$ .

Tomemos entonces  $(V, \omega)$  un espacio vectorial simpléctico de dimensión  $2n$  y  $W$  un subespacio vectorial coisótropo de dimensión  $m$ . El espacio ortogonal  $W^{\perp\omega}$  tendrá dimensión  $2n - m$  al ser  $\omega$  no degenerada y al ser  $W$  coisótropo deberá suceder que  $n \leq m$ . Podemos considerar el espacio cociente  $W/W^{\perp\omega}$ , que tendrá dimensión  $2(m - n) \geq 0$ . Se tiene entonces el siguiente resultado, que puede demostrarse sin dificultad con las herramientas básicas del álgebra lineal.

**Teorema 1.64** (Reducción coisótropa). Sea  $(V, \omega)$  un espacio vectorial simpléctico y  $W$  un subespacio vectorial coisótropo. La aplicación

$$\bar{\omega}: W/W^{\perp\omega} \times W/W^{\perp\omega} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad ([v], [w]) \longmapsto \omega(v, w),$$

es una forma simpléctica en  $W/W^{\perp\omega}$ . En particular,  $(W/W^{\perp\omega}, \bar{\omega})$  es un espacio vectorial simpléctico de dimensión  $2(m - n)$ .

Es sencillo comprobar que todo hiperplano de un espacio vectorial simpléctico es coisótropo. En consecuencia, el teorema anterior nos garantiza que si  $W \subset V$  es un hiperplano, entonces  $(W/W^{\perp\omega}, \bar{\omega})$  es un espacio vectorial simpléctico de dimensión  $2n - 2$ .

El teorema 1.64, extraído de (Bautista et al., 2015b, págs. 23-24), es un caso particular de la denominada *reducción simpléctica*. Ésta describe matemáticamente cómo la existencia de simetrías en un sistema mecánico permite reducir la dimensión del *espacio de fases* que lo parametriza (Cannas da Silva, 2001, Parte IX).

<sup>15</sup>O lo que es lo mismo, un tensor 2-covariante y antisimétrico, esto es  $\omega \in \Lambda^2(V)$ .

### 1.5.2. Variedades simplécticas

**Definición 1.65.** Una *forma simpléctica*  $\omega$  en una variedad diferenciable  $M$  es una 2-forma diferenciable cerrada y no degenerada, esto es, una aplicación diferenciable

$$\omega: M \rightarrow \Lambda^2(M)$$

tal que  $d\omega = 0$  y para cada  $p \in M$  se tiene que  $\omega_p \in \Lambda^2(T_p M)$  es no degenerada. Se dice que  $(M, \omega)$  es una *variedad simpléctica*.

**Observación.** Dados  $V$  un espacio vectorial de dimensión  $2n$  y  $\omega$  una forma bilineal anti-simétrica en  $V$ , se tiene que  $\omega$  es no degenerada si, y solamente si  $\omega^n \neq 0$ . En consecuencia, una forma simpléctica  $\omega$  en una variedad diferenciable de dimensión  $2n$  es una 2-forma diferenciable cerrada tal que  $\omega^n$  no se anula en ningún punto, esto es, para cada  $p \in M$ ,  $\omega_p^n$  no es idénticamente nula. En tal caso, decimos que  $\omega^n$  es una forma de volumen. La existencia de esta forma de volumen garantiza la orientabilidad de la variedad. En resumen, toda variedad simpléctica es necesariamente orientable.

Vamos a introducir como primer ejemplo la denominada *forma simpléctica canónica* en el fibrado cotangente de una variedad. Para ello, definiremos una 1-forma auxiliar, denominada *de Liouville* o también *potencial simpléctico*, que nos permitirá definir una forma simpléctica como su derivada exterior.

Consideremos entonces  $M$  una variedad diferenciable y denotemos  $N = T^*M$  a su fibrado cotangente. La proyección<sup>16</sup>  $\tilde{\pi}: N \rightarrow M$  es diferenciable, luego  $d\tilde{\pi}: TN \rightarrow TM$ . Cada punto  $q \in N$  será un par  $(p, \varphi_p)$  con  $p = \tilde{\pi}(q) \in M$  y  $\varphi_p \in T_p^*M$ , esto es,  $\varphi_p: T_p M \rightarrow \mathbb{R}$ .

**Definición 1.66.** En las condiciones del párrafo anterior, se define la *1-forma de Liouville* como la aplicación  $\theta: N \rightarrow T^*N = \Lambda^1(N)$  dada por  $\theta_q = \theta_{(p, \varphi_p)} = \varphi_p \circ d_q \tilde{\pi} \in T_q^*N$ :

$$T_q N \xrightarrow{d_q \tilde{\pi}} T_{\tilde{\pi}(q)} M = T_p M \xrightarrow{\varphi_p} \mathbb{R}.$$

**Proposición 1.67.** La 2-forma  $\omega = -d\theta$  es una forma simpléctica en  $N = T^*M$  a la que se denomina *forma simpléctica canónica del fibrado cotangente*.

Además, puede comprobarse que, dado un entorno coordinado  $(p, U; x^1, \dots, x^n)$  en  $M$ , y considerando las coordenadas naturales  $x^1, \dots, x^n, \theta_1, \dots, \theta_n$  en  $T^*U$ , se puede expresar

$$\theta = \sum_i \theta_i dx^i \implies \omega = \sum_i dx^i \wedge d\theta_i. \quad (1.15)$$

Para lo que resta de apartado se ha seguido una exposición similar a la de (Gómez Zaragoza, 2020), realizando aquí demostraciones ligeramente distintas.

**Proposición 1.68.** Sea  $(M, \omega)$  una variedad simpléctica y  $H$  una hipersuperficie suya. Entonces  $\omega$  induce una distribución (diferenciable) 1-dimensional  $H^{\perp\omega}$  en  $H$  dada por

$$H_p^{\perp\omega} = (T_p H)^{\perp_{\omega_p}} \subset T_p H, \quad \forall p \in H. \quad (1.16)$$

*Demostración.* En primer lugar, al ser  $H$  una hipersuperficie y, por tanto,  $T_p H \subset T_p M$  un hiperplano  $\forall p \in H$ , deducimos que  $T_p H$  es coisótropo, luego  $(T_p H)^{\perp_{\omega_p}} \subset T_p H$ . Además,  $\dim(T_p H)^{\perp_{\omega_p}} = 1$  al ser  $\omega$  no degenerada. En resumen,  $H^{\perp\omega}$  es una 1-distribución en  $H$ .

<sup>16</sup>En adelante diferenciaremos la notación  $\pi: TM \rightarrow M$  y  $\tilde{\pi}: T^*M \rightarrow M$  para facilitar la lectura.

Para comprobar que dicha distribución es diferenciable consideramos un entorno coordinado  $(p, U; x^1, \dots, x^{m-1})$  de  $H$  y definimos la aplicación diferenciable

$$f: TU \longrightarrow U \times \mathbb{R}^{m-1} \\ (q, v) \mapsto \left( q, (\omega_q(v, \partial_{1,q}), \dots, \omega_q(v, \partial_{m-1,q})) \right),$$

donde hemos denotado  $\partial_{i,q} = \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_q$ . Definimos asimismo el conjunto

$$\ker f = f^{-1}(U \times \{0\}) = \{(q, v) \mid q \in U, f(q, v) = (q, 0)\}.$$

Con las técnicas habituales, se comprueba de manera sencilla que  $\ker f$  es un subfibrado vectorial diferenciable del fibrado tangente  $TU \rightarrow U \subset H$ , cuyas fibras son precisamente  $(T_q H)^\perp$ ,  $\forall q \in U$ . De la arbitrariedad de  $p$ , se deduce el resultado buscado. ■

Supongamos ahora que  $(M, \omega)$  es una variedad simpléctica y  $H$  una hipersuperficie suya. Al ser la distribución  $H^\perp$  1-dimensional, en particular será involutiva. En estas circunstancias, el teorema 1.15 nos garantiza que la familia  $\mathcal{F}_{H^\perp}$  de variedades integrales maximales conexas de  $H^\perp$  es una foliación de  $H$ . Así, podemos considerar el espacio cociente  $H/H^\perp$  dotado de la proyección  $\Pi_{H^\perp}: H \rightarrow H/H^\perp$ . Por simplicidad, denotaremos  $\Pi = \Pi_{H^\perp}$  siempre que no haya lugar a ambigüedad.

Dado entonces un punto  $p \in H$ , podemos considerar la hoja  $F = \Pi^{-1}(\Pi(p)) \subset H$  que lo contiene. Ésta es la variedad integral maximal conexa de  $H^\perp$  que contiene a  $p$ . En otras palabras, se verifica  $T_p F = (H_p)^\perp = (T_p H)^\perp$ ,  $\forall p \in F$ . Además,  $F$  se representa en  $H/H^\perp$  por  $\Pi(p)$ . Indistintamente se suele denominar a  $F$  y a  $\Pi(p)$  la *órbita* de  $p$ , por lo que al espacio  $H/H^\perp$  se le denomina *espacio de órbitas*. Del teorema 1.17 se deduce el siguiente resultado sobre este espacio, al requerir que la distribución  $H^\perp$  sea regular:

**Corolario 1.68.1.** *Sea  $(M, \omega)$  una variedad simpléctica de dimensión  $m$  y  $H$  una hipersuperficie suya. Si la distribución  $H^\perp$  es regular, entonces  $H/H^\perp$  admite una estructura natural de variedad diferenciable (no necesariamente Hausdorff) de dimensión  $m - 2$  respecto de la cual la proyección  $\Pi: H \rightarrow H/H^\perp$  es una sumersión.*

Al ser  $\Pi$  una sumersión, para cada  $p \in H$  se tiene que  $d_p \Pi: T_p H \rightarrow T_{\Pi(p)} H/H^\perp$  es sobreyectiva. En consecuencia, de las consideraciones posteriores al teorema 1.17 y de las previas al corolario 1.68.1 se tiene el isomorfismo *canónico*

$$\overline{d_p \Pi}: T_p H / T_p F = T_p H / (T_p H)^\perp \xrightarrow{\cong} T_{\Pi(p)} H / H^\perp. \quad (1.17)$$

**Proposición 1.69.** *En las condiciones del corolario anterior,  $\omega$  induce en  $H/H^\perp$  una única forma simpléctica  $\tilde{\omega}$  tal que  $\Pi^* \tilde{\omega} = \omega|_H$ , esto es<sup>17</sup>, tal que para cada  $p \in H$  y  $u, v \in T_p H$  se verifica*

$$\omega_p(v, w) = \tilde{\omega}_{\Pi(p)}(d_p \Pi(v), d_p \Pi(w)).$$

*Demostración.* Para cada punto  $p \in H$ , el teorema 1.64 nos garantiza que la aplicación  $\overline{\omega}_p: T_p H / (T_p H)^\perp \times T_p H / (T_p H)^\perp \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$\overline{\omega}_p([v], [w]) = \omega_p(v, w), \quad \forall v, w \in T_p H,$$

<sup>17</sup>La notación  $\Pi^* \tilde{\omega}$  es la estándar para el *pull-back* de una  $k$ -forma a través de una aplicación diferenciable. Por su parte, denotamos  $\omega|_H \equiv i^* \omega$ , donde  $i: H \hookrightarrow M$  es la inclusión.

es una forma simpléctica en  $T_p H / (T_p H)^\perp$ . Teniendo en cuenta que el isomorfismo  $\overline{d_p \Pi}$  está dado por  $[v] \leftrightarrow d_p \Pi(v)$ ,  $\forall v \in T_p H$ , podemos trasladar esta forma simpléctica a  $T_{\Pi(p)} H / H^\perp$  considerando

$$\tilde{\omega}_{\Pi(p)}(d_p \Pi(v), d_p \Pi(w)) = \overline{\omega}_p([v], [w]) = \omega_p(v, w), \quad \forall v, w \in T_p H. \quad (1.18)$$

En resumen, por el momento hemos demostrado que la asignación

$$\begin{aligned} \tilde{\omega}: H/H^\perp &\rightarrow \Lambda^2(H/H^\perp) \\ \Pi(p) &\mapsto \tilde{\omega}_{\Pi(p)} \end{aligned} \quad (1.19)$$

está bien definida. Así, queda demostrar que dicha asignación es una aplicación diferenciable y, por tanto, una 2-forma, así como que ésta es cerrada y única.

La primera de las cuestiones es consecuencia de un resultado técnico<sup>18</sup> y del hecho de que  $\Pi$  sea una sumersión y  $\Pi^* \tilde{\omega} = \omega|_H$  sea una forma diferenciable en  $H$ . Por su parte, que  $\tilde{\omega}$  sea cerrada es consecuencia directa de las propiedades de la diferencial exterior con respecto al pull-back:

$$\Pi^* d\tilde{\omega} = d(\Pi^* \tilde{\omega}) = d\omega|_H = d(i^* \omega) = i^* d\omega = 0,$$

y, al ser  $d_p \Pi$  sobreyectiva  $\forall p \in H$ , se deduce que  $d\tilde{\omega} = 0$ , como queríamos demostrar.

Por último, la unicidad de la forma simpléctica  $\tilde{\omega}$  en  $H/H^\perp$  tal que  $\omega|_H = \Pi^* \tilde{\omega}$  es consecuencia directa de que  $\Pi$  sea una sumersión sobreyectiva. ■

## 1.6. Geometría de contacto

Exponemos ahora una breve introducción a la geometría de contacto, limitándonos a describir lo necesario para definir una estructura de contacto en la variedad de geodésicas luminosas. Se sigue aquí la exposición de (Cannas da Silva, 2001, Cap. 10), que puede consultarse para un estudio introductorio, pero algo más extenso.

**Definición 1.70.** Sea  $M$  una variedad diferenciable de dimensión  $m$ . Un *elemento de contacto* es un par  $(p, H_p)$ , donde  $p \in M$  y  $H_p \subset T_p M$  es un hiperplano. Se dice que  $p$  es el *punto de contacto* y que  $H_p$  es el *hiperplano de contacto*.

Un elemento de contacto determina, salvo multiplicación por un escalar no nulo, una forma lineal  $\alpha_p: T_p M \rightarrow \mathbb{R}$  cuyo núcleo es  $\ker \alpha_p = H_p$ .

Supongamos ahora que  $H$  es una distribución diferenciable de dimensión  $m - 1$ , esto es, una distribución de hiperplanos. Localmente, esta distribución de hiperplanos podrá ser expresada como el núcleo de una 1-forma  $\alpha: M \rightarrow T^*M$  (Geiges, 2008, Lema 1.1.1). Ésta, evidentemente, no será única pues cualquier producto por una función diferenciable que no se anule tendrá el mismo núcleo. Se dice que  $\alpha$  es una *1-forma local asociada a  $H$* .

**Definición 1.71.** Una *estructura de contacto* en una variedad diferenciable  $M$  es una distribución de hiperplanos  $H$  tal que para alguna (y, por tanto, para toda) 1-forma local asociada  $\alpha$  se tiene que  $d\alpha|_H$  es no degenerada<sup>19</sup>. Se dice que el par  $(M, H)$  es una *variedad de contacto*, que  $\alpha$  es una *forma (local) de contacto* y que  $H$  es una distribución *máximamente no integrable*.

<sup>18</sup>**Lema:** Sean  $M, N$  dos variedades diferenciables y  $\varphi: M \rightarrow N$  una sumersión. Sea asimismo  $\omega$  una forma (no necesariamente diferenciable) en  $N$ . Si  $\varphi^* \omega$  es una forma diferenciable en  $M$ , entonces  $\omega$  es diferenciable.

<sup>19</sup>Esto es,  $(d\alpha)_p: H_p \times H_p \rightarrow \mathbb{R}$  es no degenerada para todo punto  $p$  en el dominio de  $\alpha$ .

Si  $H$  es una estructura de contacto en  $M$ , al ser  $d\alpha|_H$  no degenerada (decimos, por comodidad, que es *simpléctica*) la dimensión de  $H_p$  será necesariamente par,  $\dim H_p = 2n$ . Como además  $\dim H_p = \dim M - 1$ , deducimos que  $\dim M = m = 2n + 1$  y, en particular, toda variedad de contacto tiene dimensión impar.

Consideramos el conjunto

$$\ker(d\alpha_p) = \{v \in T_p M \mid d\alpha_p(v, w) = 0, \forall w \in T_p M\}.$$

De nuevo, la no degeneración de  $(d\alpha_p)|_{H_p}$  nos garantiza que  $H_p \cap \ker(d\alpha_p) = \{0\}$ . Además,  $\dim \ker(d\alpha_p) \neq 0$ , pues en caso contrario  $d\alpha_p$  sería no degenerada y, en particular,  $M$  tendría dimensión par. En consecuencia  $T_p M = H_p \oplus \ker(d\alpha_p)$ .

La observación posterior a la definición 1.65 nos garantiza que la restricción de  $(d\alpha_p)^n$  a  $H_p$  no es idénticamente nula, de donde se deduce sin dificultad que  $\alpha_p \wedge (d\alpha_p)^n$ , definida en  $T_p M$ , tampoco es idénticamente nula.

En general no tendrá por qué existir una forma de contacto definida globalmente. La obstrucción a dicha existencia es puramente topológica, pues se tiene

$$\exists \alpha \text{ forma de contacto global} \iff \text{el fibrado vectorial } TM/H \text{ es trivial.} \quad (1.20)$$

El fibrado  $TM/H$  es unidimensional, por lo que ser trivial es equivalente a ser *orientable* (en el sentido de la orientabilidad de fibrados vectoriales). En general, si  $\Delta$  es un subfibrado vectorial de  $TM$ , se dice que  $\Delta$  es *coorientable* si  $TM/\Delta$  es trivial. Pueden consultarse (Cannas da Silva, 2001) y (Geiges, 2008) para un estudio más detallado de este asunto.

Se tiene el siguiente resultado, del que ya hemos probado la implicación a la derecha, que permite adoptar definiciones equivalentes de estructura de contacto:

**Proposición 1.72.** *Sea  $H$  una distribución en  $M$  de dimensión  $m - 1$ . Entonces*

$$H \text{ es una estructura de contacto} \iff \alpha \wedge (d\alpha)^n \neq 0, \forall \alpha \text{ forma local asociada a } H.$$

Por su parte,  $\alpha \wedge (d\alpha)^n$  es una forma de orden  $2n + 1 = \dim M$ . Por tanto, si  $H$  es una estructura de contacto y  $\alpha$  es una forma de contacto global, entonces  $\alpha \wedge (d\alpha)^n$  es una *forma de volumen* en  $M$  y, en particular,  $M$  deberá ser orientable.

Nos centramos ahora en varios resultados que proporcionan una interesante relación entre geometría simpléctica y de contacto. Esta relación nos proporcionará, en el capítulo 3, la estructura de contacto en la variedad de geodésicas luminosas. Ambos resultados, con los que concluimos este capítulo, pueden encontrarse en (Bautista et al., 2015b, Teors. 5.1 y 5.2). La demostración del segundo de ellos seguirá una exposición similar a la de (Espinosa Ruiz, 2022, Teor. 4.3.2).

**Proposición 1.73.** *Sea  $(M, \omega)$  una variedad simpléctica y  $H$  una hipersuperficie suya. Supongamos que  $H^\perp \omega$  es una distribución regular y denotemos por  $\tilde{\omega}$  a la única forma simpléctica en  $H/H^\perp$  que verifica  $\Pi^* \tilde{\omega} = i^* \omega$  (Cor. 1.68.1 y Prop. 1.69). Si existe una 1-forma  $\theta$  en  $M$  tal que  $\omega = -d\theta$  y existe una 1-forma  $\tilde{\theta}$  en  $H/H^\perp$  tal que  $\Pi^* \tilde{\theta} = i^* \theta = \theta|_H$ , entonces  $\tilde{\omega} = -d\tilde{\theta}$ .*

*Demostración.* Las propiedades de la diferencial exterior con respecto al pull-back nos garantizan que

$$\Pi^* \tilde{\omega} = i^* \omega = i^* (-d\theta) = -d(i^* \theta) = -d(\Pi^* \tilde{\theta}) = \Pi^* (-d\tilde{\theta}),$$

de donde se deduce el resultado al ser  $\Pi$  una sumersión sobreyectiva. ■



**Teorema 1.74.** Sea  $(M, \omega)$  una variedad simpléctica exacta con  $\omega = -d\theta$ ,  $N$  una variedad de dimensión  $\dim N = \dim M - 1$  y  $\pi: M \rightarrow N$  una sumersión sobreyectiva. Denotamos por  $H$  a la distribución en  $M$  dada por  $H_p = \ker(\theta_p)$ ,  $\forall p \in M$ . Supongamos que para cada par de puntos  $p_1, p_2 \in M$  con  $\pi(p_1) = \pi(p_2) = q$  se tiene que  $d_{p_1}\pi(H_{p_1}) = d_{p_2}\pi(H_{p_2}) \subset T_q N$  es un hiperplano. Entonces se puede definir una estructura de contacto  $\bar{H}$  en  $N$  dada por

$$\bar{H}_q = d_p\pi(H_p), \quad \forall q = \pi(p) \in N.$$

*Demostración.* Al ser  $\pi: M \rightarrow N$  una sumersión, se tiene que  $\dim(\ker d_p\pi) = 1$ . Como  $d_p\pi(H_p) \subset T_{\pi(p)}N$  es un hiperplano, entonces  $\ker d_p\pi \subset H_p$ . Asimismo, se deduce que  $(d_p\pi)^{-1}(\bar{H}_{\pi(p)}) = H_p$ . En los siguientes párrafos veremos que, de hecho,  $\ker d_p\pi = H_p^\perp$ , y al tener ambos espacios igual dimensión bastará probar la inclusión de izquierda a derecha.

Sea  $v \in \ker d_p\pi$ . Queremos demostrar que  $\omega_p(v, w) = 0$ ,  $\forall w \in H_p = \ker \theta_p$ . Se tiene:

$$\omega_p(v, w) = -d\theta_p(v, w) = v(\theta_p(w)) - w(\theta_p(v)) - \theta_p([v, w]), \quad \forall w \in H_p,$$

donde los dos primeros términos del lado derecho se anulan al ser  $v, w \in H_p = \ker \theta_p$ . Así, solo necesitamos comprobar que  $\theta_p([v, w]) = 0$ ,  $\forall w \in H_p$ ,  $\forall v \in \ker d_p\pi$ , para lo que necesitaremos recurrir a resultados técnicos sobre flujos de campos vectoriales.

Para cada  $q \in N$  denotamos a la fibra que se proyecta sobre  $q$  por  $F_q = \pi^{-1}(q)$ . Consideramos  $U \subset M$  abierto y  $X \in \mathfrak{X}(U)$  un campo vectorial tal que  $X_p \in T_p F_{\pi(p)}$ ,  $\forall p \in U$ , esto es, un campo tangente a las fibras de  $\pi$ . Por supuesto, se tiene que  $T_p F_{\pi(p)} = \ker d_p\pi$ .

Consideramos  $\phi_t: M \rightarrow M$  el flujo<sup>20</sup> de  $X$  y tomemos  $Y \in \mathfrak{X}(U)$  un campo vectorial con  $Y_p \in H_p$ ,  $\forall p \in U$ . Como se tiene que

$$d_{\phi_t(p)}\pi \circ d_p\phi_t = d_p(\pi \circ \phi_t) = d_p\pi,$$

entonces  $d_{\phi_t(p)}\pi(d_p\phi_t(Y_p)) = d_p\pi(Y_p) \in \bar{H}_{\pi(p)}$  y de las observaciones iniciales se deduce que

$$d_p\phi_t(Y_p) \in H_{\phi_t(p)}, \quad \forall t, \forall p$$

y, en particular,  $d_{\phi_t(p)}\phi_{-t}(Y_p) \in H_p$ .

Empleando la expresión del corchete de Lie como *derivada de Lie* se obtiene:

$$[X_p, Y_p] = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{d_{\phi_t(p)}\phi_{-t}(Y_p) - Y_p}{t} \in H_p,$$

de donde se deduce inmediatamente que  $\theta_p([X_p, Y_p]) = 0$ , como queríamos demostrar.

Hemos demostrado, por tanto, que  $\ker d_p\pi = H_p^\perp$ ,  $\forall p \in M$ . Considerando la restricción  $(d_p\pi)|_{H_p}: H_p \rightarrow T_{\pi(p)}N$ , y al ser  $\ker d_p\pi \subset H_p$ , se tiene que

$$H_p / \ker d_p\pi = H_p / H_p^\perp \cong d_p\pi(H_p) = \bar{H}_{\pi(p)}.$$

Veamos ahora que existe una 1-forma local  $\alpha$  asociada a la distribución  $\bar{H}$  que verifica que  $d\alpha|_{\bar{H}}$  es no degenerada. Para cada  $p \in M$  y cada par de elementos  $\xi_1, \xi_2 \in H_p / H_p^\perp$  definimos

$$\tilde{\omega}_p(\xi_1, \xi_2) = \omega_p(u_1, u_2), \quad (1.21)$$

<sup>20</sup>El *flujo* de un campo vectorial  $X \in \mathfrak{X}(M)$  es una aplicación  $\phi: I \times M \rightarrow M$ , con  $0 \in I \subseteq \mathbb{R}$ , tal que  $\phi(t, p) = \phi_t(p) = \alpha_p^X(t)$ , donde  $\alpha_p^X$  es la única curva integral de  $X$  que verifica  $\alpha_p^X(0) = p$ . En ocasiones se denomina flujo de  $X$  a la aplicación  $\phi_t: M \rightarrow M$ ,  $p \mapsto \phi_t(p)$ .



donde  $u_i \in \xi_i$ . El teorema 1.64 garantiza que  $\tilde{\omega}_p$  está bien definida y es no degenerada.

Sea ahora  $\sigma: U \subseteq N \rightarrow M$  una sección local diferenciable de  $\pi$ , esto es,  $\pi \circ \sigma = id_U$ . Emplearemos  $\sigma$  para trasladar la forma bilineal  $\tilde{\omega}_p$  a  $\overline{H}_{\pi(p)}$ , definiendo para cada  $q \in U$  y cada  $\bar{\xi}_1, \bar{\xi}_2 \in \overline{H}_q$

$$\overline{\omega}_q(\bar{\xi}_1, \bar{\xi}_2) = \tilde{\omega}_{\sigma(q)}(\xi_1, \xi_2), \quad (1.22)$$

donde  $\bar{\xi}_i = \overline{d_{\sigma(q)}\pi}(\xi_i)$ , siendo  $\overline{d_{\sigma(q)}\pi}$  el isomorfismo entre  $H_{\sigma(q)}/H_{\sigma(q)}^\perp$  y  $\overline{H}_q$ . De nuevo, es inmediato que  $\overline{\omega}_q$  es no degenerada,  $\forall q \in U$ .

Por otra parte,  $\sigma^*\theta$  es una 1-forma diferenciable en  $U$  que verifica  $-d(\sigma^*\theta) = -\sigma^*d\theta = \sigma^*\omega$ . Además, para cada  $q \in U \subset N$  y cada par  $w_1, w_2 \in T_qN$  se tiene

$$(\sigma^*\omega)_q(w_1, w_2) = \omega_{\sigma(q)}(d_q\sigma(w_1), d_q\sigma(w_2)),$$

y de la independencia de  $u_i \in \xi_i$  en (1.21) deducimos que  $(\sigma^*\omega)_{\overline{H}} = \overline{\omega}$  en el dominio de  $\sigma$ . Por su parte,

$$\ker(\sigma^*\theta)_q = \{w \in T_qN \mid \theta_{\sigma(q)}(d_q\sigma(w)) = 0\} = \{w \in T_qN \mid d_q\sigma(w) \in H_{\sigma(q)}\} = \overline{H}_q.$$

En conclusión,  $-\sigma^*\theta$  es una 1-forma local asociada a  $\overline{H}$  cuya diferencial, restringida a  $\overline{H}$ , es  $\overline{\omega}$ , que es no degenerada. La existencia de secciones locales de  $\pi$  alrededor de cada punto de  $N$  concluye la demostración. ■

Obsérvese que a lo largo de la demostración hemos empleado una herramienta auxiliar, la sección local  $\sigma$  de  $\pi$ , de cuya elección dependen las formas bilineales  $\overline{\omega}_q$  y la 1-forma  $\sigma^*\theta$ . Sin embargo, se razona sin demasiada dificultad que la estructura de contacto  $\overline{H}$  es independiente de la elección de la sección  $\sigma$ .

## 2. Estructura simpléctica del espacio de geodésicas temporales

En este apartado trataremos de describir el espacio  $\mathcal{M}$  de las geodésicas temporales de una variedad lorentziana conexa  $M$  temporalmente orientada de dimensión  $n$ , esto es, un *espaciotiempo*  $n$ -dimensional (def. 3.4). Veremos que, bajo ciertas condiciones,  $\mathcal{M}$  admite una estructura de variedad diferenciable de dimensión  $2n - 2$  a la que se puede dotar de una forma simpléctica, partiendo de la de  $TM$  (sección 2.2).

### 2.1. Descripción del espacio tangente $T_v TM$ con campos de Jacobi

Sea  $(p, v) \equiv v \in TM$ . Sabemos que el fibrado tangente es una variedad diferenciable de dimensión  $2n$ . Su espacio tangente en  $v$  será un espacio vectorial de dimensión  $2n$  que podemos identificar, vía el corolario 1.56.1, con el espacio  $\mathcal{J}(\gamma)$  de campos de Jacobi sobre una geodésica. En este apartado construiremos un isomorfismo *natural* de manera explícita entre ambos espacios y, por lo tanto, un isomorfismo  $T_v TM \cong T_p M \times T_p M$ .

De una parte, tenemos

$$T_v TM = \{ \xi = \dot{\alpha}(0) \mid \alpha: J \rightarrow TM \text{ diferenciable con } \alpha(0) = v \},$$

donde una curva diferenciable  $\alpha: J \rightarrow TM$  es un campo vectorial sobre  $\beta = \pi \circ \alpha$ .

De otra parte, consideramos  $\gamma_v: I \rightarrow M$  la única geodésica maximal tal que  $\gamma(0) = p$  y  $\dot{\gamma}(0) = v$ . Ésta puede expresarse (Lee, 2018, Prop. 5.19) como  $\gamma_v(t) = \exp_p(tv)$ ,  $\forall t \in I$ .

Dado ahora  $\xi \in T_v TM$ , consideramos una curva diferenciable  $\alpha: J \rightarrow TM$  con  $\alpha(0) = v$  y  $\dot{\alpha}(0) = \xi$  y definimos la aplicación

$$x_\alpha: [-\delta, \delta] \times [-\varepsilon, \varepsilon] \longrightarrow M, \quad x_\alpha(t, s) = \exp_{\beta(s)}(t\alpha(s)) = \gamma_{\alpha(s)}(t),$$

donde los intervalos  $[-\delta, \delta] \subseteq I$  y  $[-\varepsilon, \varepsilon] \subseteq J$  serán lo suficientemente estrechos como para que la exponencial esté siempre bien definida.

Se tiene entonces que  $x_\alpha(t, 0) = \gamma_v(t)$ ,  $\forall t \in [-\delta, \delta]$ . Además,  $x_\alpha^s(t) = \gamma_{\alpha(s)}(t)$ , luego  $x_\alpha^s$  es una geodésica. En resumen,  $x_\alpha$  es una variación geodésica de  $\gamma_v$ .

Consideramos el campo variacional  $Y_\alpha$  de  $x_\alpha$  que, de acuerdo con el lema 1.55, es un campo de Jacobi. Se verifica

$$\begin{aligned} Y_\alpha(0) &= \frac{\partial x_\alpha}{\partial s}(0, 0) = \frac{d}{ds} \Big|_{s=0} \exp_{\beta(s)}(0) = \frac{d}{ds} \Big|_{s=0} \beta(s) = \dot{\beta}(0) \in T_p M, \\ Y'_\alpha(0) &= \frac{DY_\alpha}{dt}(0) = \frac{D}{dt}(\partial_s x_\alpha)(0, 0) = \frac{D}{ds}(\partial_t x_\alpha)(0, 0) = \frac{D}{ds} \Big|_0 \alpha(s) = \alpha'(0) \in T_p M, \end{aligned} \quad (2.1)$$

donde en la segunda línea hemos empleado la proposición 1.50 y hemos sustituido

$$\partial_t x_\alpha(0, s) = \frac{d}{dt} \Big|_0 \exp_{\beta(s)}(t\alpha(s)) = \alpha(s).$$

Veamos ahora que el campo de Jacobi recién definido no depende de la elección de la curva  $\alpha$ . Se verifica, por una parte,

$$\dot{\beta}(0) = \frac{d}{ds} \Big|_{s=0} (\pi \circ \alpha)(s) = d\pi_{\alpha(0)}(\dot{\alpha}(0)) = d\pi(\xi). \quad (2.2)$$

Por otra parte, en un entorno coordenado  $((p, v), U; x^1, \dots, x^n, y^1, \dots, y^n)$  de  $TM$  podemos expresar  $\xi = (\eta^1, \dots, \eta^n, \xi^1, \dots, \xi^n)$  y  $\alpha(s) = (\beta^1(s), \dots, \beta^n(s), \alpha^1(s), \dots, \alpha^n(s))$ . Empleando la expresión local de la derivada covariante, se deduce que

$$\alpha'(0) = \left( \dot{\alpha}^k(0) + \Gamma_{ji}^k(\beta(0)) \alpha^i(0) \dot{\beta}^j(0) \right) \partial_k(0) = \left( \xi^k + \Gamma_{ji}^k(p) v^i \eta^j \right) \frac{\partial}{\partial x^k} \Big|_{(p,v)}. \quad (2.3)$$

En resumen,  $Y_\alpha(0)$  e  $Y'_\alpha(0)$  no dependen de la curva  $\alpha$ , sino únicamente de  $(p, v)$  y  $\xi$ . Ahora, el teorema 1.56 nos garantiza que el campo de Jacobi  $Y_\alpha$  tampoco depende de  $\alpha$ , pues éste está caracterizado por sus valores en 0. Denotamos, por tanto,  $Y_\xi \equiv Y_\alpha$ . Así, hemos demostrado que la siguiente aplicación está bien definida

$$T_v TM \ni \xi \longmapsto Y_\xi \in \mathcal{J}(\gamma_v). \quad (2.4)$$

De manera rutinaria se comprueba que esta aplicación es lineal. Además, las expresiones de  $Y_\xi(0)$  e  $Y'_\xi(0)$  nos garantizan su inyectividad. Al tener ambos espacios la misma dimensión, deducimos que se trata de un isomorfismo de espacios vectoriales.

## 2.2. Estructura simpléctica de $TM$

En una variedad semiriemanniana  $(M, g)$  podemos considerar la siguiente aplicación diferenciable, denominada *de Legendre*

$$\begin{aligned} \hat{g}: TM &\longrightarrow T^*M, \\ (p, v) &\mapsto (p, g_p(v, \cdot)), \end{aligned}$$

que nos proporciona un isomorfismo  $(\hat{g}, id_M)$  de fibrados vectoriales diferenciables.

A través del *pull-back*, la aplicación de Legendre permite trasladar la 1-forma de Liouville (véase la definición 1.66) al fibrado tangente, definiendo  $\theta_g = \hat{g}^* \theta: TM \rightarrow T^*TM$ , esto es, para cada  $(p, v) \in TM$  y cada  $\xi \in T_{(p,v)} TM$ , se tiene que

$$(\theta_g)_{(p,v)}(\xi) = \theta_{(p, g_p(v, \cdot))}(d\hat{g}(\xi)) = g_p(v, (d\hat{\pi} \circ d\hat{g})(\xi)) = g_p(v, d\pi(\xi)),$$

donde en la última igualdad hemos empleado que  $d\hat{\pi} \circ d\hat{g} = d\pi$ .

De nuevo, en un entorno coordenado  $((p, v), U; x^1, \dots, x^n, y^1, \dots, y^n)$  de  $TM$  podemos expresar  $v = v^i \frac{\partial}{\partial x^i} \in T_p M$  y  $\xi = \eta^i \frac{\partial}{\partial x^i} + \xi^i \frac{\partial}{\partial y^i} \in T_v TM$ . En consecuencia, se puede expresar

$$(\theta_g)_{(p,v)}(\xi) \equiv \theta_g(\xi) = g_p\left(v^i \frac{\partial}{\partial x^i}, \eta^j \frac{\partial}{\partial x^j}\right) = v^i \eta^j g_{ij},$$

donde hemos empleado que  $d\pi(\xi) = \eta^j \frac{\partial}{\partial x^j}$ . De este modo, se puede expresar localmente

$$\theta_g = g_{ij} y^j dx^i.$$

Análogamente, podemos trasladar al fibrado tangente la forma simpléctica canónica  $\omega$  en el fibrado cotangente definiendo  $\omega_g = \hat{g}^* \omega: TM \rightarrow \Lambda^2(TM)$ , esto es, para cada  $(p, v) \in TM$  y cada  $\xi_1, \xi_2 \in T_{(p,v)} TM$ ,

$$(\omega_g)_{(p,v)}(\xi_1, \xi_2) \equiv \omega_g(\xi_1, \xi_2) = \omega_{(p, g_p(v, \cdot))}(d\hat{g}(\xi_1), d\hat{g}(\xi_2)).$$

Las propiedades de la diferencial exterior con respecto al pull-back nos garantizan que

$$\omega_g = \hat{g}^* \omega = \hat{g}^*(-d\theta) = -d(\hat{g}^*\theta) = -d\theta_g,$$

luego en particular,  $\omega_g$  es una 2-forma exacta. La no degeneración de  $\omega$  nos garantiza que  $\omega_g$  es también no degenerada. En resumen,  $(TM, \omega_g)$  es una variedad simpléctica *exacta* de dimensión  $2n$ .

De la expresión local de  $\theta_g$  se deduce la de  $\omega_g$  como

$$\omega_g = -d\theta_g = -d(g_{ij}y^j dx^i) = y^j dx^i \wedge dg_{ij} + g_{ij} dx^i \wedge dy^j = y^j \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} dx^i \wedge dx^k + g_{ij} dx^i \wedge dy^j.$$

**Proposición 2.1.** Sea  $v \equiv (p, v) \in TM$ ,  $\xi, \xi_1, \xi_2 \in T_v TM$  e  $Y_\xi, Y_{\xi_1}, Y_{\xi_2} \in \mathcal{J}(\gamma_v)$  los campos de Jacobi sobre  $\gamma_v$  asociados. Entonces

$$\frac{d}{dt} \left( g(Y'_{\xi_1}(t), Y_{\xi_2}(t)) - g(Y_{\xi_1}(t), Y'_{\xi_2}(t)) \right) = 0. \quad (2.5)$$

Además, se tienen las siguientes identidades:

$$\theta_g(\xi) = g_p(v, Y_\xi(0)), \quad y \quad \omega_g(\xi_1, \xi_2) = g(Y'_{\xi_1}, Y_{\xi_2}) - g(Y_{\xi_1}, Y'_{\xi_2}). \quad (2.6)$$

*Demostración.* La primera identidad se demuestra de manera sencilla empleando las simetrías del tensor de Riemann (prop. 1.47). Igualmente, la segunda identidad se deduce directamente de consideraciones previas, recordando que  $Y_\xi(0) = d\pi(\xi)$ .

Por su parte, para demostrar la tercera identidad necesitamos hacer uso de la expresión local de  $\omega_g$ . Así, para  $\xi_r = \eta_r^j \frac{\partial}{\partial x^j} + \zeta_r^k \frac{\partial}{\partial y^k} \in T_v TM$ ,  $r \in \{1, 2\}$ , se tiene<sup>1</sup>:

$$\begin{aligned} \omega_g(\xi_1, \xi_2) &= v^j (g_{si} \Gamma_{kj}^s + g_{js} \Gamma_{ki}^s) (\eta_1^i \eta_2^k - \eta_2^i \eta_1^k) + g_{ij} (\eta_1^i \zeta_2^j - \eta_2^i \zeta_1^j) = \\ &= v^j g_{si} \Gamma_{kj}^s \eta_1^i \eta_2^k + \cancel{v^j g_{js} \Gamma_{ki}^s \eta_1^i \eta_2^k} - v^j g_{si} \Gamma_{kj}^s \eta_2^i \eta_1^k - \cancel{v^j g_{js} \Gamma_{ki}^s \eta_2^i \eta_1^k} + g_{ij} (\eta_1^i \zeta_2^j - \eta_2^i \zeta_1^j) = \\ &= g_{ij} (\eta_1^i \zeta_2^j + \Gamma_{ks}^i v^s \eta_1^k \eta_2^j) - g_{ij} (\eta_2^i \zeta_1^j + v^s \Gamma_{ks}^i \eta_2^k \eta_1^j) = \\ &= g_p \left( \eta_1^i \frac{\partial}{\partial x^i}, (\zeta_2^j + \Gamma_{ks}^j v^s \eta_2^k) \frac{\partial}{\partial x^j} \right) - g_p \left( \eta_2^i \frac{\partial}{\partial x^i}, (\zeta_1^j + \Gamma_{ks}^j v^s \eta_1^k) \frac{\partial}{\partial x^j} \right) = \\ &= g_p(Y_{\xi_1}(0), Y'_{\xi_2}(0)) - g_p(Y'_{\xi_1}(0), Y_{\xi_2}(0)). \end{aligned}$$

■

### 2.3. La variedad $\mathcal{M}$ de las geodésicas temporales en $M$

En este apartado queremos construir el conjunto de las geodésicas temporales maximales *desparametrizadas* en  $M = (M, g, \nabla)$  y dotarlo de estructura de variedad diferenciable simpléctica. Para ello, consideramos en primera instancia el conjunto  $\mathcal{M}'$  de todas las geodésicas temporales maximales en  $M$ , esto es, las geodésicas maximales  $\gamma$  tales que  $g(\dot{\gamma}, \dot{\gamma}) < 0$ .

Introducimos en  $\mathcal{M}'$  la relación de equivalencia dada por  $\gamma_1 \sim \gamma_2 \iff \text{Im } \gamma_1 = \text{Im } \gamma_2$  y consideramos el conjunto cociente  $\mathcal{M} = \mathcal{M}' / \sim$  inducido en  $\mathcal{M}'$  por dicha relación. Diremos que las clases de equivalencia  $[\gamma] = \{\tilde{\gamma} : I \rightarrow M \text{ geodésica temporal maximal} \mid \text{Im } \tilde{\gamma} = \text{Im } \gamma\}$

<sup>1</sup>Aquí empleamos la expresión local de los símbolos de Christoffel (1.8) para obtener la identidad:

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} = g_{si} \Gamma_{kj}^s + g_{js} \Gamma_{ki}^s.$$

son geodésicas temporales maximales *desparametrizadas*. De modo equivalente, podemos ver

$$\mathcal{M} \cong \{\text{Im } \gamma \mid \gamma \text{ es geodésica temporal maximal}\}.$$

Dos geodésicas  $\gamma_1, \gamma_2 \in [\gamma]$  se diferencian exclusivamente en un cambio de parametrización, en otras palabras,  $[\gamma]$  es una geodésica “salvo parametrización”. Además, sabemos que las únicas reparametrizaciones de geodésicas que son geodésicas son las afines (véase la discusión posterior al teorema 1.23). Así, se tiene

$$[\gamma] = \{\gamma \circ h \mid h: J \xrightarrow{\cong} I, h(t) = at + b, a, b \in \mathbb{R}\}. \quad (2.7)$$

En particular, en cada clase de equivalencia existen geodésicas  $\gamma_b$ , que decimos que están *parametrizadas por el arco* o por el *tiempo propio*, tales que  $g(\dot{\gamma}_b, \dot{\gamma}_b) = -1$ . Por simplicidad, siempre consideraremos a una de estas geodésicas como *representante natural*<sup>2</sup> de su clase de equivalencia. Además, para no hacer referencia a ningún representante de las clases de equivalencia, denotaremos por  $\Gamma$  a los elementos de  $\mathcal{M}$ .

Consideramos ahora el conjunto

$$H = \{v \equiv (p, v) \in TM \mid g(v, v) = -1\}, \quad (2.8)$$

que es una hipersuperficie de  $TM$ . Los resultados de las secciones 1.5.2 y 2.2 nos permiten considerar la distribución unidimensional (y, por tanto, involutiva)  $H^\perp_{\omega_g}$ , donde  $\omega_g$  es la forma simpléctica canónica de  $TM$ , así como el espacio cociente  $H/H^\perp$ . Sabemos que si  $H^\perp$  es regular entonces  $H/H^\perp$  admitirá una estructura de variedad diferenciable que hará que la proyección sea una sumersión, y una única forma simpléctica  $\omega$  tal que  $\Pi^*\omega = \omega_g|_H$ . De hecho, para cada  $v \in H$  se tendrá un isomorfismo

$$\overline{d_v\Pi}: T_vH/(T_vH)^\perp \longrightarrow T_{\Pi(v)}(H/H^\perp). \quad (2.9)$$

El conjunto  $H$  tiene dos componentes conexas,  $H^+$  y  $H^-$ , formadas por los elementos  $v \in H$  que apuntan al futuro o al pasado, respectivamente, separadas por la *sección cero* del fibrado tangente. Al ser las componentes conexas abiertas en  $H$ , los resultados 2.2–2.5 siguen siendo ciertos al reemplazar  $H$  por  $H^+$  o  $H^-$  y considerar la distribución  $H^\perp$  restringida al conjunto correspondiente, que denotamos por simplicidad de la misma manera.

Pues bien, más adelante identificaremos  $\mathcal{M} \equiv H^+/H^\perp$ , empleando como herramienta el *spray* geodésico, lo que dotará a  $\mathcal{M}$  de la estructura de variedad simpléctica buscada. Para ello, necesitamos considerar los siguientes resultados previos:

**Proposición 2.2.** *Sea  $(p, v) \in H$ . Entonces  $\chi_{(p,v)} \in T_vH$ . En otras palabras,  $\chi|_H \in \mathfrak{X}(H)$  y, por tanto,  $\chi|_H$  genera una distribución unidimensional en  $H$ , a la que denotamos por  $\langle \chi|_H \rangle$ .*

*Demostración.* Tomemos  $(p, v) \in H$  y consideremos  $\gamma$  la única geodésica maximal en  $M$  tal que  $\gamma(0) = p$  y  $\dot{\gamma}(0) = v$ . Entonces,  $g(\dot{\gamma}, \dot{\gamma}) \equiv -1$  y, en consecuencia, la curva  $\alpha: I \rightarrow H$  dada por  $\alpha = (\gamma, \dot{\gamma})$  está bien definida y verifica  $\alpha(0) = (p, v)$  y  $\dot{\alpha}(0) = \chi_{(p,v)}$ . ■

**Proposición 2.3.** *Sea  $(p, v) \in H$ . El campo de Jacobi  $Y \in \mathcal{J}(\gamma_v)$  asociado a  $\chi_{(p,v)} \in T_vH$  es  $Y = \dot{\gamma}_v \in \mathcal{J}^{\text{tan}}(\gamma_v)$ .*

<sup>2</sup>Hay tantas geodésicas parametrizadas por el arco como posibles *traslaciones temporales*, esto es, del tipo  $\gamma_b(t) = \gamma(t + b)$ ,  $b \in \mathbb{R}$ . Así, la elección de la geodésica representante no es canónica.

*Demostración.* De las expresiones locales (1.12) y (2.1)-(2.3) del *spray* geodésico y del campo de Jacobi asociado a un elemento  $\xi \in T_v TM$  se deduce que si  $Y \in \mathcal{J}(\gamma_v)$  es el campo de Jacobi asociado a  $\chi_{(p,v)} \in T_{(p,v)}H$ , entonces

$$Y(0) = d\pi(\chi_{(p,v)}) = v, \quad Y'(0) = 0.$$

Como  $\dot{\gamma}_v \in \mathcal{J}(\gamma_v)$  también verifica dichas condiciones, la unicidad dada por el teorema 1.56 nos proporciona el resultado buscado. ■

**Proposición 2.4.** Sea  $\xi \in T_v H \subset T_v TM$ . Entonces, el campo de Jacobi asociado  $Y_\xi$  verifica  $g(Y'_\xi(0), v) = 0$ . De hecho, la aplicación

$$T_v H \ni \xi \mapsto Y_\xi \in \mathcal{J}^0(\gamma_v) = \{Y \in \mathcal{J}(\gamma_v) \mid g(Y'(0), v) = 0\} \quad (2.10)$$

es un isomorfismo de espacios vectoriales.

*Demostración.* Sabemos que  $g(Y'_\xi(0), v) = g(\alpha'(0), v)$ , donde  $\alpha: I \rightarrow TM$  es cualquier curva tal que  $\alpha(0) = v \equiv (p, v)$  y  $\dot{\alpha}(0) = \xi$ . En particular, podemos tomar  $\alpha$  de manera que para cada  $t \in I$ , se verifique  $\alpha(t) \in H$ . Así, se tiene

$$g(\alpha(t), \alpha(t)) = -1, \forall t \implies g(\alpha'(t), \alpha(t)) = 0, \forall t \implies g(\alpha'(0), \alpha(0)) = g(\alpha'(0), v) = 0.$$

Además, al estar un campo de Jacobi  $Y$  determinado por los valores de  $Y(0)$  y  $Y'(0)$ , imponer una condición lineal sobre las coordenadas de este último vector reduce la dimensión en 1. Así,  $\dim \mathcal{J}^0(\gamma_v) = \dim \mathcal{J}(\gamma_v) - 1 = 2n - 1 = \dim T_v H$ .

Como  $T_v TM \ni \xi \mapsto Y_\xi \in \mathcal{J}(\gamma_v)$  es un isomorfismo, y la imagen de  $T_v H$  por éste está contenida en  $\mathcal{J}^0(\gamma_v)$ , la igualdad de dimensiones nos garantiza el resultado. ■

**Proposición 2.5.** Para cada  $v \equiv (p, v) \in H$ , se tiene que  $\chi_{(p,v)} \perp T_v H$ . Al ser  $H^\perp$  unidimensional,  $H_v^\perp$  estará generado por  $\chi_{(p,v)}$ . En consecuencia,  $H^\perp \equiv \langle \chi|_H \rangle$ , esto es, ambas distribuciones coinciden.

*Demostración.* Sean  $(p, v) \in H$  y  $\xi \in T_v H$ . Por la proposición anterior, sabemos que el campo de Jacobi asociado a  $\chi_{(p,v)}$  es  $\dot{\gamma}$ . En consecuencia, se verifica

$$\omega_g(\chi_{(p,v)}, \xi) = g(\dot{\gamma}'(0), Y_\xi(0)) - g(\dot{\gamma}(0), Y'_\xi(0)) = -g(v, Y'_\xi(0)) = 0,$$

donde en la última igualdad hemos empleado la proposición 2.4. ■

A la vista de este resultado, deducimos que si  $\alpha = (\gamma, \dot{\gamma})$  es una curva integral de  $\chi$ , esto es,  $\chi_{\alpha(t)} = \dot{\alpha}(t)$ , entonces se verifica

$$\dot{\alpha}(t) \in (T_{\alpha(t)} H)^\perp, \forall t.$$

De la proposición anterior deducimos que el espacio cociente  $H/H^\perp$  es el espacio de las órbitas de la distribución  $\langle \chi|_H \rangle$ , esto es, el conjunto de sus variedades integrales maximales conexas. Estas, como comentamos en la observación posterior a la proposición 1.60, son las imágenes de las aplicaciones  $\alpha = (\gamma, \dot{\gamma})$ , donde  $\gamma$  es una geodésica maximal, que estén contenidas en  $H$ . En otras palabras, los elementos de  $H/H^\perp$  son de la forma  $\text{Im } \dot{\gamma}$ , donde  $\gamma$  es una geodésica temporal maximal parametrizada por el arco.

Tratamos en los siguientes párrafos de establecer la conexión entre  $\mathcal{M}$  y  $H/H^\perp$  que, como habíamos avanzado, se traducirá en la identificación  $\mathcal{M} \equiv H^+/H^\perp$ .

Dada una geodésica temporal desparametrizada,  $\Gamma = [\tilde{\gamma}] \in \mathcal{M}$ , ya sabemos que todas las geodésicas  $\gamma \in \Gamma$  pueden expresarse como  $\gamma(t) = \tilde{\gamma}(at + b)$ , con  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $a \neq 0$ . Si solo consideramos las que están parametrizadas por el arco, fijaremos el valor de  $|a|$ , pero no el de  $b$ . Así, tendremos “dos familias” de geodésicas temporales maximales parametrizadas por el arco: unas dirigidas al futuro,  $\{\gamma^{a,b}\}_{b \in \mathbb{R}}$ , y otras dirigidas al pasado,  $\{\gamma^{-a,b}\}_{b \in \mathbb{R}}$ .

Las aplicaciones  $\alpha = (\gamma, \dot{\gamma})$  correspondientes a distintas geodésicas de una misma familia tendrán igual imagen. Por el contrario, las correspondientes a familias distintas tendrán distintas imágenes. De este modo, a la hora de asociar a cada elemento  $[\tilde{\gamma}] \in \mathcal{M}$  un elemento  $\text{Im } \dot{\gamma} \in H/H^\perp$  no solo hay que tener en cuenta la parametrización por el arco, sino también la orientación temporal de las curvas.

Así las cosas, podemos considerar la aplicación

$$\begin{aligned} \Phi: \mathcal{M} &\longrightarrow H^+/H^\perp \\ \Gamma &\longmapsto \text{Im } \dot{\gamma}, \end{aligned} \quad (2.11)$$

donde  $\gamma$  es cualquier geodésica maximal en  $\Gamma$  que esté parametrizada por el arco y dirigida al futuro. Esta aplicación es claramente una biyección, por los comentarios realizados hasta el momento, lo que nos permite *identificar*

$$H^+/H^\perp = H^+/\langle \chi|_H \rangle \equiv \mathcal{M}, \quad (2.12)$$

con lo que, como ya anunciamos, si  $\langle \chi|_H \rangle = H^\perp$  es una distribución regular, entonces  $\mathcal{M}$  admitirá una estructura de variedad diferenciable simpléctica de dimensión  $2n - 2$ .

Observemos, además, que dado un elemento  $v \in H^+$ , se tiene que  $\Pi(v) \in H^+/H^\perp$  podrá expresarse como  $\Pi(v) = \text{Im } \dot{\gamma}_v$ . En consecuencia,  $\Pi(v) = \Phi([\gamma_v])$ .

Por último, construiremos explícitamente la estructura diferenciable de  $\mathcal{M}$ . Daremos, para ello, tres atlas diferenciables equivalentes:

- i) El primero de ellos es el proporcionado por el teorema 1.17 (véase (Brickell et al., 1970, pág. 205)). Supongamos que la distribución  $\langle \chi|_H \rangle$  es regular y tomemos un sistema de coordenadas regular  $(U, \varphi = x^1, \dots, x^{2n-1})$  en  $H^+$ . Denotamos  $U' = \Pi(U) \subset \mathcal{M}$ . Al ser  $(U, \varphi)$  regular, cada hoja  $\Gamma$  interseca a  $U$  en a lo sumo una sección unidimensional, esto es,  $\Pi^{-1}(\Gamma) \cap U$  es de la forma  $\varphi^{-1}(I \times \{a\})$ , para cierto  $I \subseteq \mathbb{R}$  conexo y cierto  $a \in \mathbb{R}^{2n-2}$ . En resumen, tenemos el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc} U \subset H^+ & \xrightarrow{\varphi} & \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{2n-2} \\ \Pi \downarrow & & \downarrow p_2 \\ U' \subset \mathcal{M} & \xrightarrow{\tilde{\varphi}} & \mathbb{R}^{2n-2}. \end{array}$$

Definimos entonces  $\tilde{\varphi}(\Gamma) = p_2(\varphi(v))$ , donde  $v \in \Pi^{-1}(\Gamma)$ . Los comentarios precedentes nos garantizan que  $\tilde{\varphi}$  está bien definida. Con cierta dificultad puede demostrarse que los sistemas coordenados  $(U', \tilde{\varphi})$  forman un atlas diferenciable (véase la mencionada referencia).

- ii) De forma alternativa, supongamos que  $(M, g)$  es fuertemente causal (def. 3.13). Dado un punto de  $M$ , consideremos un entorno suyo  $U$  globalmente hiperbólico y causalmente convexo (en  $M$ ). Además, consideremos una hipersuperficie de Cauchy  $S$  (def. 3.14) en  $U$ . Restringiendo el entorno lo suficiente puede conseguirse que  $S$  admita una

parametrización global  $\phi_S$ . Definimos

$$U_S = \{v \equiv (p, v) \in H^+ \mid p \in S\} \cong S \times \mathbb{R}^{n-1}.$$

Se tiene que  $\dim U_S = 2n - 2$ . Además, al ser  $U$  causalmente convexo, toda curva temporal dirigida al futuro corta a  $S$  a lo sumo en un punto. Así, se tiene el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc} U_S \subset H^+ & \xrightarrow{\phi} & S \times \mathbb{R}^{n-1} \\ \Pi \downarrow & & \downarrow \phi \times \text{id} \\ U'_S \subset \mathcal{M} & \xrightarrow{\tilde{\phi}} & \mathbb{R}^{2n-2}, \end{array}$$

donde  $\phi$  es una parametrización de  $S$ .

Definimos entonces  $\tilde{\phi}(\Gamma) = (\phi \times \text{id})(\phi(v))$ , donde  $v \in \Pi^{-1}(\Gamma)$ . Los comentarios previos garantizan que  $\tilde{\phi}(\Gamma)$  no depende de la elección de  $v$  y, por tanto,  $\tilde{\phi}$  está bien definida.

De nuevo, de forma sencilla se comprueba que  $\mathcal{M}$  puede recubrirse por conjuntos del tipo  $U'_S = \Pi(U_S)$  y que todos ellos, junto con las cartas  $\phi_S^{-1}: \mathcal{M}_S \rightarrow U_S$ , proporcionan un atlas diferenciable de  $\mathcal{M}$  equivalente al obtenido en el apartado anterior.

- iii) Por último, definiremos otro atlas en  $\mathcal{M}$  que proporciona la misma estructura diferenciable que los anteriores y que nos será de utilidad más adelante (véase el final del apartado 4.2).

De nuevo, supongamos que  $(M, g)$  es fuertemente causal, tomemos un entorno  $U$  globalmente hiperbólico y causalmente convexo y una hipersuperficie de Cauchy  $S$  en  $U$  que admita una parametrización global. Consideremos un campo vectorial *sobre la inclusión*  $X: S \rightarrow H^+ \subset TM$ . Asimismo, definamos el conjunto

$$V_S = \{v \equiv (p, v) \in TM \mid p \in S, g(X_p, v) = -1, g(v, v) < 0\}.$$

Nótese que las dos últimas condiciones de la expresión anterior implican que para cada  $(p, v) \in V_S$  se tiene que  $v$  es temporal y, de hecho, está en el mismo cono temporal que  $X_p$ . Definimos entonces la aplicación  $f_S: V_S \rightarrow U_S$  dada por  $f_S(v) = v/\sqrt{-g(v, v)}$ , que es un difeomorfismo.

En consecuencia, la proyección  $\Pi: V_S \rightarrow \mathcal{M}$  proporciona una nueva parametrización de  $\mathcal{M}$ . Además, es inmediato comprobar que estas aplicaciones definen un atlas diferenciable en  $\mathcal{M}$  que induce la misma estructura diferenciable que los anteriores.

**Observaciones.** i) *Para construir el segundo y el tercer atlas diferenciable hemos necesitado suponer que  $(M, g)$  es fuertemente causal. Sin embargo, como se mencionará en la sección 4, esta condición es suficiente para que  $\mathcal{M}$  admita estructura de variedad, pero no es necesaria.*

- ii) *Las estructuras diferenciables construidas no necesariamente serán de Hausdorff, lo que sí puede conseguirse al exigir condiciones adicionales sobre la estructura causal, como la hiperbolicidad global.*



## 2.4. El espacio tangente $T_\Gamma \mathcal{M}$

Como consecuencia de la proposición 2.5 se tiene el siguiente resultado, que nos proporciona una descripción de  $(T_v H)^\perp$  que nos será de utilidad para describir  $T_\Gamma \mathcal{M}$ .

**Proposición 2.6.** *Sea  $v \in H$  y  $\xi \in (T_v H)^\perp$ . Entonces*

$$Y_\xi \in \mathcal{J}^0(\gamma_v) \cap \mathcal{J}^{\text{tan}}(\gamma_v) = \{a\dot{\gamma}_v \mid a \in \mathbb{R}\} =: \mathcal{J}^T(\gamma_v).$$

*Además,  $\dim(\mathcal{J}^T(\gamma_v)) = 1$  y, en consecuencia,  $(T_v H)^\perp \cong \mathcal{J}^T(\gamma_v)$ .*

*Demostración.* Sea  $\xi \in (T_v H)^\perp$ . La proposición 2.5 nos garantiza la existencia de  $a \in \mathbb{R}$  tal que  $\xi = a\chi_v$ . Como la aplicación dada por (2.4) es lineal, se tiene que  $Y_\xi = aY_{\chi_v} = a\dot{\gamma}_v$ , de donde deducimos que  $Y_\xi \in \mathcal{J}^{\text{tan}}(\gamma_v)$ .

Como  $\dim \mathcal{J}^{\text{tan}}(\gamma_v) = 2$ , solamente tenemos que demostrar que  $\mathcal{J}^{\text{tan}}(\gamma_v) \not\subset \mathcal{J}^0(\gamma_v)$ , lo cual es inmediato pues, de hecho, definiendo  $Y(t) = t\dot{\gamma}(t)$  se tiene que  $Y \in \mathcal{J}^{\text{tan}}(\gamma_v)$ , y sin embargo  $Y \notin \mathcal{J}^0(\gamma_v)$ . ■

Llegados a este punto, tratemos de describir el espacio tangente a  $\mathcal{M}$  en uno de sus puntos,  $[\gamma_v]$ , con  $v \in H^+$ . Como expresábamos en las ecuaciones (2.9) y (2.12), se tendrá

$$T_{[\gamma_v]} \mathcal{M} = T_{\Pi(v)}(H^+/H^\perp) \cong T_v H / (T_v H)^\perp \cong \frac{\mathcal{J}^0(\gamma_v)}{\mathcal{J}^T(\gamma_v)} \cong \mathcal{J}^\perp(\gamma_v), \quad (2.13)$$

donde en el último isomorfismo hemos empleado la descomposición dada por la proposición 1.59, el segundo Teorema de Isomorfía de Noether, y el hecho de que  $\mathcal{J}^\perp(\gamma_v) \subset \mathcal{J}^0(\gamma_v)$ . Nótese, que  $\dim \mathcal{J}^\perp(\gamma_v) = 2n - 2$ , como esperábamos.

Esta descripción del espacio tangente puede obtenerse de manera alternativa y directa, lo que nos dará una interpretación clara de su significado. Para ello, consideramos una curva diferenciable  $\Lambda: I \rightarrow \mathcal{M}$  tal que  $\Lambda(0) = \Gamma = \gamma$ . Para cada  $s \in I$ ,  $\Lambda(s)$  es una geodésica temporal desparametrizada, que nosotros *identificamos* con una de sus representantes parametrizadas por el arco y dirigida al futuro,  $\gamma^s$ . De estas, recordamos, hay tantas como traslaciones temporales, esto es,  $\Lambda(s) = [\gamma^s] = \gamma^{s,b}$ ,  $\forall b \in \mathbb{R}$ , donde  $\gamma^{s,b}(t) = \gamma^s(t+b)$ . Dicho de otro modo, la elección de la curva *representante* no es única, sino que está dada *salvo traslación temporal*.

Al ser  $\Lambda$  diferenciable, existirá una variación  $x$  de  $\gamma$  por geodésicas temporales de manera que, *definiendo*<sup>3</sup>  $\gamma^s = x(\cdot, s)$ , se tendrá que  $\gamma^s \in \Lambda(s)$ ,  $\forall s \in I$ . De hecho, por los motivos discutidos en el párrafo precedente, para cada  $b \in \mathbb{R}$  la variación  $x^b$  dada por  $x^b(\cdot, s) = \gamma^{s,b}$  también verificará dicha propiedad. *Identificamos*  $\Lambda(s) \equiv x(\cdot, s)$ .

Para estudiar  $T_\Gamma \mathcal{M}$  supongamos que  $\Lambda$  es localmente inyectiva y veamos qué condiciones debe cumplir su vector tangente  $\dot{\Lambda}(0)$ . Se tiene que

$$(\dot{\Lambda}(0))(t) = \left( \frac{d}{ds} \Big|_0 \Lambda(s) \right)(t) \equiv \left( \frac{d}{ds} \Big|_0 x(\cdot, s) \right)(t) = \partial_s x(t, 0) := Y(t), \quad \forall t \in (-\delta, \delta),$$

y en particular,  $Y$  es el campo variacional de  $x$ , luego un campo de Jacobi<sup>4</sup> sobre  $\gamma$ .

<sup>3</sup>Aquí estamos identificando a  $\gamma^s$  con su (única) extensión maximal.

<sup>4</sup>El dominio de  $Y$  será un subconjunto del de  $\gamma$ . Así, identificamos a  $Y$  con su (única) extensión como campo de Jacobi sobre  $\gamma$ .

Por su parte, al ser  $x$  una variación geodésica por geodésicas *temporales* desparametrizadas, y teniendo en cuenta que  $\dot{\gamma}^s(t) = \partial_t x(t, s)$ , se verifica  $g(\dot{\gamma}^s, \dot{\gamma}^s) = -1$ ,  $\forall s$  y, por tanto

$$\begin{aligned} \left. \frac{d}{ds} \right|_0 g(\dot{\gamma}^s, \dot{\gamma}^s) &= 2g\left(D_s \partial_t x(t, 0), \partial_t x(t, 0)\right) = 2g\left(D_t \partial_s x(t, 0), \dot{\gamma}(t)\right) = \\ &= 2g(D_t Y(t), \dot{\gamma}(t)) = 2g(Y'(t), \dot{\gamma}(t)) = 0, \forall t, \end{aligned}$$

donde en la segunda igualdad hemos empleado el apartado *i*) de la proposición 1.50. Así, hemos demostrado que  $Y = \dot{\Lambda}(0) \in \mathcal{J}^0(\gamma)$ . En particular, podemos expresar  $Y = Y^{\tan} + Y^\perp$ , con  $Y^{\tan} \in \mathcal{J}^T(\gamma_v)$  e  $Y^\perp \in \mathcal{J}^\perp(\gamma)$ .

Al ser  $Y \in \mathcal{J}^0(\gamma)$ , se tiene que  $\frac{d}{dt} g(Y(t), \dot{\gamma}(t)) = 0$  y, por tanto,  $g(Y, \dot{\gamma}) = b$ . Así, podemos expresar (véase la demostración de la proposición 1.59)  $Y^{\tan} = -b\dot{\gamma}$ .

Ahora bien, no todas las variaciones  $x$  de  $\gamma$  por geodésicas temporales pueden ser asociadas con una curva diferenciable  $\Lambda: I \rightarrow \mathcal{M}$ , con  $\Lambda(0) = \Gamma$ , que sea localmente inyectiva. Supongamos que  $\Lambda$  fuese constante en un entorno de 0. Se tendría entonces que  $[\gamma] = [\gamma^s]$ ,  $\forall s \in J \subset I$ , o lo que es lo mismo,  $\text{Im } \gamma = \text{Im } \gamma^s$ ,  $\forall s$ . En consecuencia, las geodésicas  $\gamma^s$  son reparametrizaciones (traslaciones temporales pues, como siempre, consideramos que todas están parametrizadas por el arco) de  $\gamma$ . Por supuesto, al tratarse de una curva constante alrededor de 0, se debería tener  $\dot{\Lambda}(0) = 0$ .

Sin embargo, definamos la variación  $x(t, s) = \gamma(t + h(s))$ , donde  $h$  es diferenciable. Entonces podemos identificar  $\Lambda(s) = \gamma^{h(s)}$ ,  $\forall s$ . El campo variacional asociado a esta variación es  $Y(t) = \dot{h}(0)\dot{\gamma}(t) \in \mathcal{J}^T(\gamma)$ . En resumen, si  $\Lambda$  es constante en un entorno de 0, entonces  $Y \in \mathcal{J}^T(\gamma)$ .

Por lo expuesto anteriormente, deberemos considerar que  $Y = \dot{\Lambda}(0) \equiv 0$ , esto es, realmente estamos trabajando en el espacio cociente  $\mathcal{J}^0(\gamma)/\mathcal{J}^T(\gamma) \cong \mathcal{J}^\perp(\gamma)$ . La aparición de campos de Jacobi tangentes es, por tanto, solo un “artefacto”, producto de haber identificado clases de equivalencia con una de sus representantes parametrizadas por el arco.

Por su parte, dadas dos  $\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma$  con  $\gamma_2(t) = \gamma_1(at + b)$ ,  $a \neq 0$ , existe un isomorfismo canónico

$$\begin{aligned} \Theta_{\gamma_1 \rightarrow \gamma_2}: \mathcal{J}^0(\gamma_1) &\rightarrow \mathcal{J}^0(\gamma_2) \\ Y_1 &\longmapsto Y_2, \end{aligned} \tag{2.14}$$

donde  $Y_2(t) = Y_1(at + b)$ .

En consecuencia, tenemos que

$$T_\Gamma \mathcal{M} \cong \left\{ \langle Y \rangle = Y + \mathcal{J}^T(\gamma) \mid Y \in \mathcal{J}^0(\gamma) \right\} \cong \mathcal{J}^\perp(\gamma), \tag{2.15}$$

donde  $\gamma \in \Gamma$  es *cualquier* geodésica. El isomorfismo (2.14) nos garantiza que para cualquier elección de  $\gamma \in \Gamma$ , las descripciones de  $T_\Gamma \mathcal{M}$  son equivalentes.

Denotaremos por  $\rho_\gamma$  al isomorfismo  $\rho_\gamma: \mathcal{J}^0(\gamma)/\mathcal{J}^T(\gamma) \rightarrow T_\Gamma \mathcal{M}$  dado por (2.13). Asimismo, denotaremos por  $\mathcal{W}$  a los elementos de  $T_\Gamma \mathcal{M}$ .

Visto de manera equivalente, si trabajásemos con geodésicas maximales viéndolas como aplicaciones (esto es, “no desparametrizadas”) y considerásemos las variaciones correspondientes tendríamos que la parte tangencial del campo variacional *solo mueve la parametrización*, mientras que es la parte ortogonal la que *mueve* la geodésica.

Notemos, por último, que con esta descripción de  $T_\Gamma \mathcal{M}$ , la diferencial de  $\Pi: H^+ \rightarrow \mathcal{M}$  viene dada para cada  $v \in H^+$  y cada  $\xi \in T_v H^+$  por

$$d_v \Pi(\xi) = \rho_{\gamma_v}(\langle Y_\xi \rangle).$$

## 2.5. La forma simpléctica en $\mathcal{M}$

Sea  $\gamma \in \Gamma$  cualquier geodésica parametrizada por el arco y dirigida al futuro y sean  $\mathcal{W}_1, \mathcal{W}_2 \in T_\Gamma \mathcal{M}$ . Sabemos que todo elemento  $Y_i \in \rho_\gamma^{-1}(\mathcal{W}_i)$  puede expresarse de manera única como  $Y_i = A_i + B_i$  con  $A_i \in \mathcal{J}^\perp(\gamma)$  y  $B_i \in \mathcal{J}^{\text{tan}}(\gamma) \cap \mathcal{J}^0(\gamma)$ . Además, dos elementos distintos de una misma clase diferirán exclusivamente en la parte tangencial. Denotemos por  $\xi_1, \xi_2 \in T_v H$  a los elementos tales que  $Y_i = Y_{\xi_i}$ .

A la vista de la ecuación (2.6), que da la expresión de la forma simpléctica en  $TM$ , definimos una forma simpléctica en  $T_\Gamma \mathcal{M}$  dada por:

$$\omega_\Gamma(\mathcal{W}_1, \mathcal{W}_2) = \omega_g(\xi_1, \xi_2) = g(Y'_1, Y_2) - g(Y_1, Y'_2). \quad (2.16)$$

Para que dicha forma bilineal esté bien definida, no deberá depender de los representantes elegidos: ni de los campos de Jacobi  $Y_i \in \rho_\gamma^{-1}(\mathcal{W}_i)$ , ni de la geodésica  $\gamma \in \Gamma$ . Comprobemos que, en efecto, esto es lo que sucede.

Por una parte, la independencia de la geodésica  $\gamma$ , representante de la clase  $\Gamma$ , es consecuencia directa de la ecuación (2.5) y del hecho de que dos geodésicas parametrizadas por el arco y dirigidas al futuro pertenecientes a una misma clase  $\Gamma$  diferirán exclusivamente en una traslación del parámetro.

En cuanto a la independencia de los campos de Jacobi  $Y_1$  e  $Y_2$ , representantes de las clases  $\rho_\gamma^{-1}(\mathcal{W}_1)$  y  $\rho_\gamma^{-1}(\mathcal{W}_2)$ , respectivamente, observemos que, al ser  $B_i \in \mathcal{J}^{\text{tan}}(\gamma) \cap \mathcal{J}^0(\gamma)$ , éstos deberán poder expresarse como  $B_i(t) = b_i \dot{\gamma}(t)$ . En consecuencia,

$$\begin{aligned} \omega_\Gamma(\mathcal{W}_1, \mathcal{W}_2) &= g(A'_1, A_2 + b_2 \dot{\gamma}) - g(A_1 + b_1 \dot{\gamma}, A'_2) = \\ &= g(A'_1, A_2) - g(A_1, A'_2), \end{aligned}$$

donde en la segunda igualdad hemos empleado que  $A_i \in \mathcal{J}^\perp(\gamma)$  y, por tanto,  $g(A'_i, \dot{\gamma}) = 0$ . En conclusión, la forma bilineal definida depende exclusivamente de la parte ortogonal, esto es, depende de las clases  $\mathcal{W}_i$  y no de los representantes  $Y_i$ .

Los razonamientos precedentes garantizan que la ecuación (2.16) está bien definida y es una forma simpléctica en  $\mathcal{M}$ .

Por su parte, dados  $v \in H$  y  $\xi_1, \xi_2 \in T_v H$ , se tiene

$$(\Pi^* \omega)(\xi_1, \xi_2) = \omega_{\Pi(v)}(d_v \Pi(\xi_1), d_v \Pi(\xi_2)) = \omega_{[\gamma_v]}(\rho_\gamma(\langle Y_{\xi_1} \rangle), \rho_\gamma(\langle Y_{\xi_2} \rangle)) = \omega_g(\xi_1, \xi_2).$$

En otras palabras, la forma simpléctica recién definida es la única que verifica  $\Pi^* \omega = \omega_{g|_H}$ .

### 3. Estructura de contacto del espacio de rayos de luz

En este capítulo construiremos el espacio  $\mathcal{N}$  de los rayos de luz de un espaciotiempo y lo dotaremos de una estructura de variedad diferenciable de contacto *inducida* por la estructura simpléctica de  $\mathcal{M}$ .

#### 3.1. Estructura causal de espaciotiempos

En primer lugar trataremos brevemente las nociones de *clase conforme* o *estructura causal (clásica) de espaciotiempos* con el objetivo de introducir algunos de los niveles de la denominada *escalera de causalidad* o *jerarquía causal* de espaciotiempos que nos serán de utilidad para garantizar que  $\mathcal{N}$  admita una estructura de variedad (Hausdorff). Seguiremos para ello la célebre revisión (Minguzzi et al., 2008), en la que se discuten los avances más recientes del momento en dicha materia.

Comenzamos con algunas definiciones que nos permiten relacionar métricas lorentzianas sobre una misma variedad y trasladar esta relación a la coincidencia entre sus conos de luz.

**Definición 3.1.** Se dice que dos métricas lorentzianas  $g, \tilde{g}$  sobre una misma variedad diferenciable  $M$  son *conformes* si<sup>1</sup>  $\tilde{g} = e^{2u}g$ , para cierta función diferenciable  $u: M \rightarrow \mathbb{R}$ .

Evidentemente, la relación “ser conformes” es una relación de equivalencia en el conjunto de las métricas lorentzianas sobre una misma variedad. A las clases de equivalencia bajo esta relación las denominamos *clases conformes* de métricas. Denotaremos por  $\mathbf{g}$  a la clase conforme de  $g$ , esto es, al conjunto

$$\mathbf{g} = \{\tilde{g} = e^{2u}g \mid u: M \rightarrow \mathbb{R} \text{ diferenciable}\}.$$

Nótese que el carácter causal de una curva diferenciable en una variedad lorentziana  $(M, g)$  solamente depende de la clase conforme de la métrica  $g$ .

Pues bien, se tienen los siguientes dos resultados, que muestran la importancia de estudiar los conos luminosos para obtener propiedades *conformes*, esto es, dependientes exclusivamente de la clase conforme de  $g$ .

**Lema 3.2.** Sea  $(V, g)$  un espacio vectorial pseudoeuclídeo (def. 1.35) y sea  $b$  una forma bilineal simétrica en  $V$ . Entonces son equivalentes:

- i) Existe  $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  tal que  $b = cg$ ,
- ii)  $g(v, v) = 0 \iff b(v, v) = 0$ .

**Lema 3.3.** Dos métricas lorentzianas  $g, \tilde{g}$  sobre una variedad diferenciable de dimensión mayor que 2 son conformes si, y solamente si tienen los mismos vectores luminosos.

Consideramos ahora el concepto “completo” de espaciotiempo, que incluye una estructura adicional: la orientación temporal.

**Definición 3.4.** Un *espaciotiempo* es una variedad<sup>2</sup> lorentziana conexa  $(M, g)$  temporalmente orientada.

<sup>1</sup>El factor 2 se suele añadir para evitar la aparición de factores  $1/2$  en otras expresiones.

<sup>2</sup>Asumimos siempre que los espaciotiempos son variedades de Hausdorff, lo que refleja el *principio de localidad* de las teorías físicas (Bautista et al., 2015a).

Nótese que, en general,  $M$  no tendrá por qué ser orientable, propiedad que es lógicamente independiente de la orientabilidad temporal.

**Definición 3.5.** Se dice que dos espaciotiempos  $(M, g)$  y  $(M, \tilde{g})$  sobre la misma variedad son *puntualmente conformes* si las métricas son conformes y las orientaciones temporales coinciden en cada punto.

Nuevamente, la relación de conformalidad puntual de espaciotiempos es una relación de equivalencia en el conjunto de los espaciotiempos definidos sobre una misma variedad. A las clases de equivalencia bajo esta relación las denominamos *clases puntualmente conformes* de espaciotiempos.

**Definición 3.6.** Se dice que dos espaciotiempos  $(M, g)$  y  $(\tilde{M}, \tilde{g})$  son *conformes* si existe un difeomorfismo  $\phi: M \rightarrow \tilde{M}$  tal que los espaciotiempos  $(M, g)$  y  $(M, \phi^*\tilde{g})$  con la orientación temporal dada por el pull-back de la orientación temporal en  $\tilde{M}$  son puntualmente conformes.

Nótese que la conformalidad puntual de espaciotiempos definidos sobre una misma variedad es un caso particular de la conformalidad de espaciotiempos, sin más que tomar  $\phi = Id$ . De nuevo, la relación de conformalidad es una relación de equivalencia en el conjunto de todos los espaciotiempos, lo que motiva la siguiente definición fundamental.

**Definición 3.7.** Se denomina *clase conforme* o *estructura causal (clásica)* de un espaciotiempo  $(M, g)$  a la clase de equivalencia  $[(M, g)]$  por la relación de conformalidad.

Nótese que dos espaciotiempos sobre la misma variedad que difieran exclusivamente en su orientación temporal son, por definición, *no puntualmente conformes*. Puede comprobarse que además, podrían ni siquiera ser conformes (Minguzzi et al., 2008), es decir, dos espaciotiempos sobre la misma variedad con orientaciones temporales opuestas pueden no tener la misma estructura causal.

Por simplicidad, trabajaremos con las clases puntualmente conformes de espaciotiempos definidos sobre una misma variedad  $M$ . Dado un espaciotiempo  $(M, g)$  denotamos a su clase puntualmente conforme por  $(M, \mathbf{g})$ . Cuando, de nuevo por simplicidad de nomenclatura, nos refiramos a un espaciotiempo por  $(M, \mathbf{g})$  estaremos indicando que las propiedades se verifican para cualquier espaciotiempo de dicha clase.

Por supuesto, el carácter causal y la dirección temporal de una curva causal  $\alpha$  en un espaciotiempo  $(M, g)$  solo depende de la clase puntualmente conforme  $(M, \mathbf{g})$ . Así, una curva causal (resp. luminosa, temporal) dirigida al futuro (resp. pasado) en un espaciotiempo  $(M, g)$  lo seguirá siendo en todo espaciotiempo de la clase conforme  $(M, \mathbf{g})$ .

Sin embargo, una geodésica  $\gamma$  en un espaciotiempo  $(M, g)$  podría dejar de serlo en otro espaciotiempo de la misma clase conforme. En otras palabras, el carácter geodésico de una curva diferenciable no es un *invariante conforme*. Se tiene, no obstante, el siguiente resultado, que puede encontrarse en (Candela et al., 2010, pág. 10) o (Minguzzi et al., 2008):

**Teorema 3.8.** *Dos espaciotiempos puntualmente conformes admiten las mismas geodésicas luminosas temporalmente orientadas. En consecuencia, el carácter de geodésica luminosa (temporalmente orientada o no) es un invariante conforme.*

**Definición 3.9.** Sea  $(M, g)$  un espaciotiempo y  $p, q \in M$ . Se definen las siguientes *relaciones de causalidad*:

- i) Se dice que  $p$  *precede cronológicamente* a  $q$ , lo que se denota  $p \ll q$ , si existe una curva temporal dirigida al futuro  $\gamma: [a, b] \rightarrow M$  tal que  $\gamma(a) = p$  y  $\gamma(b) = q$ .
- ii) Se dice que  $p$  *precede de manera estrictamente causal* a  $q$ , lo que se denota  $p < q$ , si existe una curva causal dirigida al futuro  $\gamma: [a, b] \rightarrow M$  tal que  $\gamma(a) = p$  y  $\gamma(b) = q$ .

Para las siguientes definiciones consideraremos que una *curva cerrada* es una curva diferenciable  $\alpha: [a, b] \rightarrow M$  (como siempre, con  $\dot{\alpha}(t) \neq 0, \forall t$ ) tal que  $\alpha(a) = \alpha(b)$ . En (Minguzzi et al., 2008) se refieren a este concepto como *loop*.

**Definición 3.10.** Se dice que un espaciotiempo  $(M, g)$  es *cronológico* si no admite curvas temporales cerradas o, equivalentemente, si la relación cronológica es irreflexiva, esto es,  $p \ll q \implies p \neq q$ .

**Definición 3.11.** Un espaciotiempo  $(M, g)$  se dice *causal* si no admite curvas causales cerradas o, equivalentemente, si la relación causal estricta es irreflexiva, esto es,  $p < q \implies p \neq q$ .

**Definición 3.12.** Sea  $(M, g)$  un espaciotiempo y  $V \subset M$  un subconjunto abierto. Se dice que  $V$  es *causalmente convexo* (en  $M$ ) si toda curva causal en  $M$  con extremos en  $V$  está enteramente contenida en  $V$ .

**Definición 3.13.** Un espaciotiempo  $(M, g)$  se dice *fuertemente causal* en  $p$  si para todo entorno  $U$  de  $p$  existe un entorno  $V \subset U$  de  $p$  que es causalmente convexo. Equivalentemente, si todo entorno  $U$  de  $p$  admite un entorno  $V \subset U$  de  $p$  tal que toda curva causal dirigida al futuro y con extremos en  $V$  está enteramente contenida en  $U$ . Se dice que  $(M, g)$  es *fuertemente causal* si lo es en todos los puntos de  $M$ .

Evidentemente, todo espaciotiempo causal es cronológico. Además, se comprueba de forma sencilla que todo espaciotiempo fuertemente causal es causal. Estos son tres ejemplos de “escalones” de la escalera de causalidad. Pasamos a definir un cuarto, el más restrictivo de todos ellos y que culmina dicha escalera. Definimos para ello el siguiente concepto, de suma importancia: las hipersuperficies de Cauchy. Damos aquí una definición, de entre varias equivalentes, que no necesita la definición previa de los conceptos de *dominio de dependencia*, *horizonte de Cauchy* o *conjunto atemporal*.

**Definición 3.14.** Una *hipersuperficie de Cauchy* en un espaciotiempo  $(M, g)$  es un subconjunto  $S \subset M$  al que toda curva temporal maximal interseca una única vez.

**Definición 3.15.** Un espaciotiempo  $(M, g)$  se dice *globalmente hiperbólico* si admite una hipersuperficie de Cauchy (diferenciable espacial<sup>3</sup>).

Existen otras definiciones alternativas del concepto de espaciotiempo globalmente hiperbólico. Una de ellas involucra la compacidad de las intersecciones de futuros y pasados causales de puntos distintos. La equivalencia entre ambas definiciones la proporciona el renombrado *teorema de Geroch* (Minguzzi et al., 2008, Teors. 3.75 y 3.78).

<sup>3</sup>Se dice que una subvariedad  $S$  de  $M$  es *espacial* si para cada punto  $p \in S$  el espacio tangente  $T_p S$  es un subespacio espacial de  $T_p M$  (def. 1.40). Si una superficie de Cauchy diferenciable es espacial, entonces toda curva causal maximal la intersecará una única vez (Minguzzi et al., 2008, pág. 44).

Puede demostrarse (Minguzzi *et al.*, 2008, Teor. 2.14), además, que dado un espacio-tiempo  $(M, g)$  y un entorno  $U$  de un punto  $p$ , se puede encontrar un entorno  $V \subset U$  que sea globalmente hiperbólico.

Al margen de la escalera de causalidad *usual*, existen otros conceptos relacionados con la estructura causal de  $(M, g)$  como la *pseudoconvexidad causal o luminosa* (Beem *et al.*, 1987), que serán de utilidad más adelante.

**Definición 3.16.** Un espaciotiempo  $(M, g)$  se dice *causalmente pseudoconvexo* (resp. *luminosamente pseudoconvexo*) si para todo conjunto compacto  $K \subset M$  existe otro compacto  $K' \subset M$  tal que toda geodésica causal (resp. luminosa) con extremos en  $K$  está íntegramente contenida en  $K'$ .

Claramente, la pseudoconvexidad causal es una condición más fuerte que la pseudoconvexidad luminosa. Además, se tiene que la pseudoconvexidad luminosa es un invariante conforme (teor. 3.8). Por último, se puede comprobar que la hiperbolicidad global implica la pseudoconvexidad causal y, de hecho, con la definición alternativa mencionada anteriormente la deducción es inmediata. La ubicación precisa de estos conceptos en la escalera de causalidad se encuentra actualmente en discusión. Véase, por ejemplo, (Heddicke *et al.*, 2021).

### 3.2. La variedad $\mathcal{N}$ de los rayos de luz en $M$

En este apartado buscamos construir el conjunto de las geodésicas luminosas maximales *desparametrizadas* de un espaciotiempo  $(M, g)$  y dotarlo de estructura de variedad diferenciable. El teorema 3.8 garantiza que este conjunto será un *objeto conforme*, esto es, dependerá únicamente de la clase conforme  $g$ . En cualquier caso, emplearemos una métrica auxiliar  $\tilde{g} \in g$ , como *herramienta de trabajo*.

De manera análoga a como hemos procedido en el apartado 2.3, consideramos en primer lugar el conjunto  $\mathcal{N}'$  de todas las geodésicas luminosas maximales en  $M$ , es decir, las geodésicas maximales  $\gamma$  tales que  $g(\dot{\gamma}, \dot{\gamma}) = 0$ .

Introducimos en  $\mathcal{N}'$  la relación de equivalencia dada por  $\gamma_1 \sim \gamma_2 \iff \text{Im } \gamma_1 = \text{Im } \gamma_2$  y, de nuevo, consideramos el conjunto cociente  $\mathcal{N} = \mathcal{N}' / \sim$ . Denominamos geodésicas luminosas maximales *desparametrizadas*, o simplemente *rayos de luz*, a las clases de equivalencia. Claramente, se tiene

$$\mathcal{N} \cong \{\text{Im } \gamma \mid \gamma \text{ es geodésica luminosa maximal}\}. \quad (3.1)$$

Nuevamente, las clases de equivalencia  $\Gamma = [\gamma]$  están dadas por la ecuación (2.7). Sin embargo, ahora no hay geodésicas parametrizadas por el arco, de modo que no hay representantes “privilegiadas” de las clases de equivalencia. Dicho de otro modo, al trabajar con geodésicas temporales y tomar como representantes naturales a las geodésicas parametrizadas por el arco estábamos fijando el parámetro  $a$  y dejando libre el parámetro  $b$  en la ecuación (2.7); ahora nos vemos en la obligación de dejar ambos parámetros “libres”.

Consideramos, de forma análoga a lo expuesto en el apartado 2.3, el conjunto

$$L = \{v \equiv (p, v) \in TM \mid g(v, v) = 0, v \neq 0\}, \quad (3.2)$$

que es una hipersuperficie de  $TM$ . Este tiene dos componentes conexas,  $L^+$  y  $L^-$ , formadas por los elementos  $v \in L$  que apuntan al futuro o al pasado, respectivamente.



De nuevo, los resultados de las secciones 1.5.2 y 2.2 nos permiten considerar la distribución involutiva  $L^{\perp\omega_g}$ , y el espacio cociente  $L/L^{\perp}$ . Si  $L^{\perp}$  es regular entonces  $L/L^{\perp}$  admite una estructura de variedad diferenciable que hace a la proyección una sumersión y una única forma simpléctica  $\omega$  tal que  $\Pi^*\omega = \omega_{g|L}$ . Además, para cada  $v \in L$  se tendrá un isomorfismo

$$\overline{d_v\Pi}: T_vL/(T_vL)^{\perp} \longrightarrow T_{\Pi(v)}(L/L^{\perp}). \quad (3.3)$$

Ahora bien, al contrario de lo que sucedía en la sección 2.3, en la que construimos una aplicación con la que identificar  $\mathcal{M} \equiv H^+/H^{\perp}$ , ahora no podremos identificar  $\mathcal{N}$  con  $L^{\perp}/L^{\perp}$ , pues no podremos construir una aplicación análoga a la de la ecuación (2.11), al no existir las curvas luminosas parametrizadas por el arco. En esta ocasión, la identificación será con un nuevo conjunto, denominado de geodésicas luminosas maximales *escaladas*. Para la construcción de este conjunto consideramos una nueva relación de equivalencia en  $\mathcal{N}'$  dada por

$$\gamma_1 \sim_s \gamma_2 \iff \exists b \in \mathbb{R} \text{ tal que } \gamma_1(t) = \gamma_2(t+b), \forall t, \quad (3.4)$$

y definimos  $\mathcal{N}_s = \mathcal{N}'/\sim_s$ . Denotaremos por  $\Gamma_s = [\gamma]_s \in \mathcal{N}_s$  a las clases de equivalencia.

En otras palabras, ahora dos geodésicas estarán relacionadas si una se obtiene de la otra por una *traslación* de su parámetro, mientras que para la definición de  $\mathcal{N}$  las considerábamos relacionadas si una se obtenía a partir de la otra por medio de *cualquier* reparametrización. En particular, ahora identificamos menos geodésicas, por lo que cabe esperar que el conjunto cociente  $\mathcal{N}_s$  sea “más grande”. En efecto, a lo largo de la presente sección veremos que, bajo ciertas condiciones,  $\mathcal{N}_s$  y  $\mathcal{N}$  son variedades diferenciables de dimensión  $2n-2$  y  $2n-3$ , respectivamente.

Algunos resultados de la sección 2.3 pueden trasladarse directamente para el caso de las geodésicas luminosas. Es el caso de las siguientes proposiciones, análogas a 2.2-2.5:

**Proposición 3.17.** Sea  $v \equiv (p, v) \in L$ . Entonces  $\chi_{(p,v)} \in T_vL$ . En otras palabras,  $\chi|_L \in \mathfrak{X}(L)$ , luego  $\chi|_L$  genera una distribución unidimensional en  $L$  a la que denotamos por  $\langle \chi|_L \rangle$ .

**Proposición 3.18.** Sea  $v \in L$ . El campo de Jacobi  $Y \in \mathcal{J}(\gamma_v)$  asociado a  $\chi_{(p,v)}$  es  $Y = \dot{\gamma}_v$ .

**Proposición 3.19.** Sea  $\xi \in T_vL \subset T_vTM$ . Entonces, el campo de Jacobi asociado  $Y_{\xi}$  verifica  $g(Y'_{\xi}(0), v) = 0$  y la aplicación

$$T_vL \ni \xi \mapsto Y_{\xi} \in \mathcal{J}^0(\gamma_v) = \{Y \in \mathcal{J}(\gamma_v) \mid g(Y'(0), v) = 0\} \quad (3.5)$$

es un isomorfismo de espacios vectoriales.

**Proposición 3.20.** Para cada  $v \equiv (p, v) \in L$  se tiene que  $\chi_{(p,v)} \perp T_vL$ . En consecuencia,  $L^{\perp}$  está generado por  $\chi_{(p,v)}$  y, por tanto,  $L^{\perp} \equiv \langle \chi|_L \rangle$ .

Al igual que sucedía en la sección 2.3, de la proposición 3.20 se deduce que el espacio cociente  $L/L^{\perp}$  es el espacio de las variedades integrales maximales conexas de la distribución  $\langle \chi|_L \rangle$ , que son las imágenes de las aplicaciones  $\alpha = (\gamma, \dot{\gamma})$ , donde  $\gamma$  es una geodésica maximal, que estén contenidas en  $L$ . Ahora, sin embargo, no podemos considerar una aplicación análoga a la dada por (2.11), pues en este caso no disponemos de geodésicas parametrizadas por el arco. Así, dos aplicaciones  $\alpha_1, \alpha_2$  de la forma (1.14) correspondientes a geodésicas  $\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma$  de la misma clase de equivalencia de  $\mathcal{N}$  tendrán imágenes distintas a no ser que  $\gamma_1$  y  $\gamma_2$  estén relacionadas por una traslación del parámetro, esto es,  $\gamma_1 \sim_s \gamma_2$  (3.4).



En esta situación se hace patente que la correspondencia análoga<sup>4</sup> a la dada por (2.11) deberá serlo entre  $\mathcal{N}_s$  y  $L/L^\perp$ . En efecto, la aplicación

$$\begin{aligned}\Psi_s: \mathcal{N}_s &\longrightarrow L/L^\perp \\ \Gamma_s &\longmapsto \text{Im } \dot{\gamma},\end{aligned}\tag{3.6}$$

donde  $\gamma$  es cualquier geodésica en  $\Gamma_s$ , es claramente una biyección. *Identificamos*, por tanto,

$$L/L^\perp = L/\langle \chi|_L \rangle \equiv \mathcal{N}_s,\tag{3.7}$$

y concluimos que si  $\langle \chi|_L \rangle = L^\perp$  es una distribución regular, entonces  $\mathcal{N}_s$  admite una estructura de variedad diferenciable simpléctica de dimensión  $2n - 2$ . Nótese además que para cada  $v \in L$  se tiene que  $\Pi(v) = \text{Im } \dot{\gamma}_v = \Psi_s([\gamma_v]_s)$ .

Por conveniencia futura, consideraremos el conjunto de las geodésicas luminosas maximales escaladas *dirigidas al futuro*, al que denotaremos  $\mathcal{N}_s^+$ . Por supuesto, se tiene

$$\mathcal{N}_s^+ \equiv L^+/L^\perp \subset L/L^\perp \equiv \mathcal{N}_s,$$

y los resultados referentes a la estructura de variedad diferenciable se trasladan de manera inmediata a  $\mathcal{N}_s^+$ .

En cualquier caso, aún no hemos dado estructura de variedad al conjunto  $\mathcal{N}$  de los rayos de luz. Esto será lo que nos ocupará durante los siguientes párrafos, en los que identificaremos  $\mathcal{N} \equiv L^+/\langle \chi, \Delta \rangle$ , donde  $\Delta$  es el campo de Euler<sup>5</sup>.

**Proposición 3.21.** *Sea  $(p, v) \in L$ . Entonces  $\Delta_{(p,v)} \in T_v L$ . En otras palabras,  $\Delta|_L \in \mathfrak{X}(L)$ .*

*Demostración.* La curva  $f_v: \mathbb{R} \rightarrow TM$  dada por  $f_v(t) = e^t v$  está íntegramente contenida en  $L$ , para todo  $v \equiv (p, v) \in L$ . ■

**Proposición 3.22.** *Los campos  $\chi|_L$  y  $\Delta|_L$  generan una distribución bidimensional involutiva en  $L$  a la que denotamos por  $\mathcal{D} = \langle \chi|_L, \Delta|_L \rangle$ .*

*Demostración.* Las expresiones locales (1.12) y (3.8) del *spray* geodésico y el campo de Euler nos garantizan que  $\Delta_{(p,v)}$  y  $\chi_{(p,v)}$  son linealmente independientes,  $\forall (p, v) \in L$ . Por su parte, las proposiciones 2.2 y 3.21 nos aseguran que  $\Delta|_L, \chi|_L \in \mathfrak{X}(L)$ . En consecuencia, ambos campos definen una distribución bidimensional en  $L$ .

Sea entonces  $(p, v) \in L$ , con  $v = y^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ . Consideramos

$$[\Delta_{(p,v)}, \chi_{(p,v)}] = \left[ v^i \frac{\partial}{\partial y^i}, v^k \frac{\partial}{\partial x^k} - \Gamma_{rj}^k v^r v^j \frac{\partial}{\partial y^k} \right] = y^i \frac{\partial}{\partial x^i} - \Gamma_{ij}^k y^i y^j \frac{\partial}{\partial y^k} = \chi_{(p,v)} \in \mathcal{D},$$

con lo que  $\mathcal{D} = \langle \chi|_L, \Delta|_L \rangle$  es involutiva. ■

<sup>4</sup>Nótese que en este caso la correspondencia es con  $L/L^\perp$  y no con  $L^+/L^\perp$ . Si quisiéramos obtener una correspondencia con  $L^+/L^\perp$  deberíamos restringir  $\mathcal{N}_s$  al conjunto de las geodésicas escaladas dirigidas al futuro, o bien modificar la relación de equivalencia  $\sim_s$  de modo que identificase geodésicas dadas por  $\gamma_1(t) = \gamma_2(\pm t + b)$ .

<sup>5</sup>El *campo de Euler* es el campo  $\Delta \in \mathfrak{X}(TM)$  dado para cada  $(p, v) \in TM$  por  $\Delta_{(p,v)} = \frac{d}{dt} \Big|_0 (e^t v) = d_0 f_v \left( \frac{\partial}{\partial t} \right)$ , donde  $f_v(t) = e^t v$ ,  $\forall t$ . Se verifica  $\dot{f}_v(s) = \Delta_{f_v(s)}$ , esto es, las  $f_v$  son las curvas integrales de  $\Delta$ . Empleando las coordenadas locales usuales en  $TM$ , en las que  $v = y^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ , la expresión local de  $\Delta$  viene dada por

$$\Delta_{(p,v)} = y^i \frac{\partial}{\partial y^i} \Big|_{(p,v)} \in T_{(p,v)} TM.\tag{3.8}$$

A la vista de estos resultados se tiene que (teor. 1.15)  $\mathcal{D}$  induce una foliación en  $L$  y podemos considerar el espacio cociente  $L/\mathcal{D} = L/\langle \chi|_H, \Delta|_H \rangle$ . Además, si la distribución  $\mathcal{D}$  es regular, entonces  $L/\mathcal{D}$  admite una estructura de variedad diferenciable de dimensión  $2n - 3$  con respecto de la cual la proyección  $\Pi_{\mathcal{D}}: L \rightarrow L/\mathcal{D}$  es una sumersión (teor. 1.17).

Describamos ahora las hojas (esto es, las variedades integrales maximales conexas) de la foliación  $\mathcal{F}$  inducida por  $\mathcal{D}$  en  $L$ . Por comodidad, supondremos que el espaciotiempo  $M$  es *fuertemente causal* (def. 3.13), condición suficiente pero no necesaria para garantizar la regularidad de  $\mathcal{D}$ .

Sea  $(p, v) \in L$  y llamemos  $A$  a la hoja de  $\mathcal{F}$  que contiene a  $(p, v)$ . Por supuesto, se tendrá  $\text{Im } \dot{\gamma}_v, \text{Im } f_v \subset A$ , al ser  $\dot{\gamma}_v$  y  $f_v$  curvas integrales de  $\chi$  y  $\Delta$  que pasan por  $(p, v)$ . Las imágenes de curvas de estos tipos son, *grosso modo*, el “esqueleto” de  $A$ , como se ilustra en la figura 3.2.

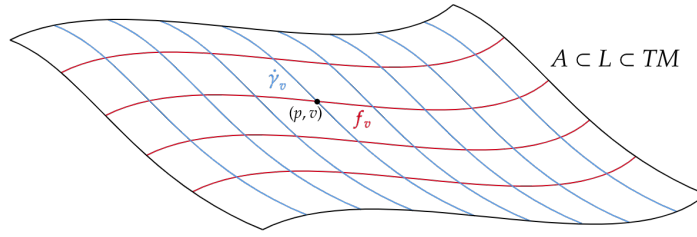


Figura 1: Esquema de una hoja de la foliación  $\mathcal{F}$  junto con algunas imágenes de curvas integrales de  $\chi$  y  $\Delta$ . (Elaboración propia)

El teorema 1.15 nos garantiza, de nuevo, que cada una de las familias  $\{\text{Im } \dot{\gamma}_v \mid (p, v) \in A\}$  y  $\{\text{Im } f_v \mid (p, v) \in A\}$  es una foliación de  $A$  de hojas unidimensionales. De hecho, para cada  $(q, w) \in A$  se tiene<sup>6</sup>

$$\begin{aligned} \{\text{Im } \dot{\gamma}_v \mid v \in A\} &= \{\text{Im } \dot{\gamma}_v \mid v \in \text{Im } f_w\} = \{\text{Im } \dot{\gamma}_{f_w(t)} \mid t \in \mathbb{R}\}, \\ \{\text{Im } f_v \mid v \in A\} &= \{\text{Im } f_v \mid v \in \text{Im } \dot{\gamma}_w\} = \{\text{Im } f_{\dot{\gamma}_w(t)} \mid t \in D(\gamma_w)\}, \end{aligned} \quad (3.9)$$

donde  $D(\gamma_w)$  es el dominio de  $\gamma_w$ .

Así, empleando por ejemplo la igualdad superior, se tiene que

$$\begin{aligned} A &= \bigcup_{t \in \mathbb{R}} \text{Im } \dot{\gamma}_{f_w(t)} = \bigcup_{t \in \mathbb{R}} \text{Im } \dot{\gamma}_{e^{t w}} = \bigcup_{t \in \mathbb{R}} \left\{ (\gamma_{e^{t w}}(s), \dot{\gamma}_{e^{t w}}(s)) \mid s \in D(\gamma_{e^{t w}}) \right\} = \\ &= \left\{ (\gamma_{a w}(s), \dot{\gamma}_{a w}(s)) \mid a \in \mathbb{R}^+, s \in D(\gamma_{a w}) \right\} = \left\{ (\gamma_w(t), a \dot{\gamma}_w(t)) \mid a \in \mathbb{R}^+, t \in D(\gamma_w) \right\}. \end{aligned}$$

La condición de causalidad fuerte (def. 3.13) nos garantiza las hojas  $A \in \mathcal{F}$  son efectivamente subvariedades, al no permitir ni que las geodésicas causales tengan autointersecciones<sup>7</sup> ni que existan “curvas causales casi cerradas” (Minguzzi et al., 2008, pág. 27).

A modo de comprobación, veamos que  $T_{(p,v)}A \in \langle \chi_{(p,v)}, \Delta_{(p,v)} \rangle$ ,  $\forall (p, v) \in A$ . Para ello, consideramos  $\alpha: I \rightarrow A$  tal que  $\alpha(0) = (p, v)$ , con  $v = y^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ . Esta curva estará dada por

$$\alpha(t) = \left( \gamma_v(\beta(t)), a(t) \dot{\gamma}_v(\beta(t)) \right),$$

<sup>6</sup>Es sencillo comprobar que las hojas  $A$  no tienen patologías como, por ejemplo, “agujeros”.

<sup>7</sup>Para esto solo es necesario requerir que  $M$  sea *causal* (def. 3.11).

donde  $a: I \rightarrow \mathbb{R}^+$ ,  $\beta: I \rightarrow D(\gamma_v)$  son diferenciables. Además, podemos suponer sin pérdida de generalidad que  $a(0) = 1$  y  $\beta(0) = 0$ . Se tiene entonces

$$\dot{a}(t) = \dot{\gamma}^i(\beta(t))\dot{\beta}(t) \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_{\alpha(t)} + \dot{a}(t)\dot{\gamma}^i(\beta(t)) \frac{\partial}{\partial y^i} \Big|_{\alpha(t)} + a(t)\dot{\gamma}^k(\beta(t))\dot{\beta}(t) \frac{\partial}{\partial y^k} \Big|_{\alpha(t)}$$

y, empleando la ecuación de las geodésicas (1.4) y las expresiones locales (1.12) y (3.8) del *spray* geodésico y del campo de Euler, respectivamente, se tiene en particular,

$$\begin{aligned} \dot{a}(0) &= y^i \dot{\beta}(0) \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_{(p,v)} + \dot{a}(0) y^i \frac{\partial}{\partial y^i} \Big|_{(p,v)} - \Gamma_{ij}^k(p) y^i y^j \dot{\beta}(0) \frac{\partial}{\partial y^i} \Big|_{(p,v)} = \\ &= \dot{\beta}(0) \chi_{(p,v)} + \dot{a}(0) \Delta_{(p,v)} \in \langle \chi_{(p,v)}, \Delta_{(p,v)} \rangle, \end{aligned}$$

como esperábamos, al ser  $A$  una variedad integral de  $\mathcal{D}$ .

Ahora sí, estamos en disposición de establecer la relación entre  $\mathcal{N}$  y  $L/\mathcal{D}$ . Consideremos  $\Gamma \in \mathcal{N}$ . Si  $\gamma_1 \in \Gamma$ , podemos considerar  $A_{\gamma_1} = \{(\gamma_1(t), a\dot{\gamma}_1(t)) \mid a \in \mathbb{R}^+, t \in D(\gamma_1)\}$ . Si otra geodésica  $\gamma_2 \in \Gamma$  puede expresarse como  $\gamma_2(t) = \gamma_1(ct + b)$  con  $c \in \mathbb{R}^+$  y  $b \in \mathbb{R}$ , se tendrá  $A_{\gamma_1} = A_{\gamma_2}$ . Sin embargo, si  $\gamma_3(t) = \gamma_1(ct + b)$  con  $c \in \mathbb{R}^-$ , entonces será  $A_{\gamma_1} \neq A_{\gamma_3}$ .

En otras palabras, dos geodésicas luminosas de una misma clase en  $\mathcal{N}$  (esto es, relacionadas entre sí por un cambio de parametrización general) definirán la misma hoja de  $\mathcal{F}$  si, y solamente si ambas tienen la misma *dirección temporal*, esto es, ambas están dirigidas al futuro o al pasado. En conclusión, podemos definir la aplicación

$$\begin{aligned} \Psi: \mathcal{N} &\longrightarrow L^+/\mathcal{D} \\ \Gamma &\longmapsto A_\gamma, \end{aligned} \tag{3.10}$$

donde  $\gamma$  es *cualquier* geodésica en  $\Gamma$  que esté dirigida al futuro. Evidentemente,  $\Psi$  es una biyección, y podríamos haber construido una biyección análoga hacia  $L^-/\mathcal{D}$  considerando las geodésicas dirigidas al pasado. De este modo, *identificamos*

$$L^+/\mathcal{D} = L^+/\langle \chi|_L, \Delta|_L \rangle \equiv \mathcal{N}, \tag{3.11}$$

y deducimos que si  $\mathcal{D}$  es regular, entonces  $\mathcal{N}$  admite una estructura de variedad diferenciable de dimensión  $2n - 3$  respecto de la cual la proyección  $\Pi: L^+ \rightarrow L^+/\mathcal{D}$  es una sumersión. Por último, observemos que para cada  $v \in L^+$ ,  $\Pi(v) = A_{\gamma_v} = \Psi([\gamma_v])$ .

Como hemos mencionado anteriormente, la condición de causalidad fuerte nos permite asegurar que las hojas de la foliación  $\mathcal{F}$  inducida por  $\mathcal{D} = \langle \chi|_L, \Delta|_L \rangle$  en  $L$  son subvariedades de  $L$ . También hemos mencionado que si  $\mathcal{D}$  es regular, entonces  $\mathcal{N}$  admitirá una estructura de variedad diferenciable de dimensión  $2n - 3$ . Pues bien, se tiene el siguiente teorema (Low, 2006, Teor. 1), que afirma que la condición de causalidad fuerte es suficiente para garantizar la regularidad de dicha distribución.

**Teorema 3.23.** *Sea  $(M, g)$  un espaciotiempo fuertemente causal de dimensión  $n$ . Entonces  $\mathcal{N}$ , el espacio de sus geodésicas luminosas desparametrizadas, hereda de  $TM$  una estructura de variedad diferenciable de dimensión  $2n - 3$ .*

Sin embargo, la condición de causalidad fuerte no es necesaria para que  $\mathcal{N}$  admita una estructura de variedad diferenciable (Low, 1989): lo único que hay que exigir es que las geodésicas luminosas no se aproximen a sí mismas arbitrariamente cerca y de manera tangencial. Por su parte, aun exigiendo que  $M$  sea fuertemente causal, no podemos garantizar que  $\mathcal{N}$  sea de Hausdorff. El siguiente teorema nos proporciona condiciones suficientes para ello.

**Teorema 3.24.** *Sea  $(M, g)$  fuertemente causal. Si  $\mathcal{N}$  no es de Hausdorff, entonces  $M$  admitirá singularidades desnudas<sup>8</sup> y, en particular,  $M$  no podrá ser globalmente hiperbólico.*

Más intuitiva es la formulación contrarrecíproca, que garantiza que si  $M$  es globalmente hiperbólico, entonces  $\mathcal{N}$  es una variedad de Hausdorff. No obstante, de nuevo, la condición es suficiente, pero no necesaria (Low, 2006). Se tiene, de hecho, el siguiente resultado (Low, 1990, pág. 948):

**Teorema 3.25.** *Sea  $(M, g)$  un espaciotiempo fuertemente causal. Entonces  $\mathcal{N}$  es una variedad de Hausdorff si, y solamente si  $(M, g)$  es luminosamente pseudoconvexo.*

Cabría preguntarse ahora por qué se ha hablado de causalidad de espaciotiempos al describir el espacio  $\mathcal{N}$  de geodésicas luminosas, pero no se ha hecho lo propio al describir el espacio  $\mathcal{M}$  de las geodésicas temporales. Por supuesto, como ya mencionamos en el apartado 3.1, dos espaciotiempos puntualmente conformes tienen las mismas curvas causales (resp. temporales, luminosas) orientadas temporalmente. Sin embargo, también mencionamos que el carácter geodésico de una curva no es un invariante conforme salvo en el caso de las geodésicas luminosas (teor. 3.8).

En otras palabras,  $\mathcal{N}$  es un objeto conforme, al contrario que  $\mathcal{M}$ . En consecuencia, no parece esperable que al imponer condiciones sobre la clase puntualmente conforme de  $(M, g)$ , por ejemplo, al situar a  $M$  en la escalera de causalidad, se pueda obtener algún resultado sobre la posible estructura diferenciable de  $\mathcal{M}$ . Las condiciones suficientes para garantizar que  $\mathcal{M}$  sea una variedad (Hausdorff o no) deberían, en principio, ser condiciones sobre la variedad  $M$  y/o sobre la métrica  $g$ , y no solo sobre la clase conforme de  $(M, g)$ .

En este sentido, en (Low, 1990, Prop. 3.2) se demuestra que la pseudoconvexidad causal es una condición suficiente y necesaria para que la variedad de las geodésicas causales  $\mathcal{C}$  sea de Hausdorff (sección 4.1) y, en consecuencia, es una condición suficiente para que la variedad de geodésicas temporales  $\mathcal{M}$  sea de Hausdorff.

### 3.3. Los espacios tangentes $T_{\Gamma_s}\mathcal{N}_s$ y $T_{\Gamma}\mathcal{N}$ y la forma simpléctica en $\mathcal{N}_s$

En este apartado describiremos los espacios tangentes a las variedades  $\mathcal{N}$  y  $\mathcal{N}_s$  empleando las identificaciones (3.7) y (3.11). Para ello, presentaremos dos proposiciones análogas a la proposición 2.6, teniendo en cuenta que en este caso no es posible emplear la descomposición dada por la proposición 1.59, al estar trabajando con geodésicas luminosas.

**Proposición 3.26.** *Sea  $v \in L$  y  $\xi \in (T_v L)^\perp = \langle \chi_v \rangle$ . Entonces  $Y_\xi = a\dot{\gamma}_v$  para cierto  $a \in \mathbb{R}$  y, por tanto<sup>9</sup>,  $(T_v L)^\perp \cong \{a\dot{\gamma}_v \mid a \in \mathbb{R}\} =: \mathcal{J}^T(\gamma_v)$ .*

*Demostración.* Sea  $\xi \in (T_v L)^\perp = \langle \chi_v \rangle$ . Existe entonces  $a \in \mathbb{R}$  tal que  $\xi = a\chi_v$ . La proposición 3.18 garantiza que  $Y_{\chi_v} = \dot{\gamma}_v$ , de donde se deduce el resultado. ■

**Proposición 3.27.** *Sea  $v \in L^+$  y sea  $\xi \in T_v A = \langle \chi_v, \Delta_v \rangle = \mathcal{D}_v$ . Entonces  $Y_\xi \in \mathcal{J}^{\tan}(\gamma_v)$  y, por tanto,  $\mathcal{D}_v = T_v A \cong \mathcal{J}^{\tan}(\gamma_v)$ .*

<sup>8</sup>Véanse (Low, 1989) y (Minguzzi et al., 2008, pág. 43).

<sup>9</sup>Nótese que ahora  $\mathcal{J}^T(\gamma) \neq \mathcal{J}^{\tan}(\gamma) \cap \mathcal{J}^0(\gamma) = \mathcal{J}^{\tan}(\gamma)$ .

*Demostración.* Sea  $\xi \in \mathcal{D}_v$ . Existen entonces  $a, b \in \mathbb{R}$  tales que  $\xi = a\chi_v + b\Delta_v$ . Al ser lineal la aplicación dada por (2.4), se tendrá que  $Y_\xi = aY_{\chi_v} + bY_{\Delta_v}$ . Además:

- La proposición 3.18 nos garantiza que  $Y_{\chi_v} = \dot{\gamma}_v$ .
- De (2.1)-(2.3), (3.8) se deduce que  $Y_{\Delta_v}(0) = 0$  e  $Y'_{\Delta_v}(0) = v$ . Como  $t\dot{\gamma}_v \in \mathcal{J}(\gamma_v)$  verifica dichas condiciones, el teorema 1.56 nos garantiza que  $Y_{\Delta_v} = t\dot{\gamma}_v$ .

En conclusión,  $Y_\xi(t) = (a + tb)\dot{\gamma}_v(t)$ , luego  $Y_\xi \in \mathcal{J}^{\tan}(\gamma_v)$ , como queríamos demostrar. El isomorfismo  $T_v A \cong \mathcal{J}^{\tan}(\gamma_v)$  es consecuencia de la igualdad de dimensiones. ■

A la vista de estos resultados deducimos que

$$\begin{aligned} T_{[\gamma_v]_s} \mathcal{N}_s &= T_{\Pi(v)}(L/L^\perp) \cong T_v L / (T_v L)^\perp \cong \frac{\mathcal{J}^0(\gamma_v)}{\mathcal{J}^T(\gamma_v)}, & v \in L, \\ T_{[\gamma_v]} \mathcal{N} &= T_{\Pi(v)}(L^+/\mathcal{D}) \cong T_v H / T_v A \cong \frac{\mathcal{J}^0(\gamma_v)}{\mathcal{J}^{\tan}(\gamma_v)}, & v \in L^+. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Además, con una discusión similar a la realizada en la sección 2.4, esta vez considerando exclusivamente variaciones por geodésicas luminosas, se obtienen las siguientes expresiones análogas a (2.15), que también pueden obtenerse directamente de las expresiones anteriores:

$$T_{\Gamma_s} \mathcal{N}_s \cong \left\{ \langle Y \rangle^T = Y + \mathcal{J}^T(\gamma) \mid Y \in \mathcal{J}^0(\gamma) \right\}, \quad \gamma \in \Gamma_s, \quad (3.13)$$

$$T_\Gamma \mathcal{N} \cong \left\{ \langle Y \rangle^{\tan} = Y + \mathcal{J}^{\tan}(\gamma) \mid Y \in \mathcal{J}^0(\gamma) \right\}, \quad \gamma \in \Gamma. \quad (3.14)$$

Por coherencia con la notación del caso temporal, denotaremos por  $\rho_\gamma$  a los isomorfismos  $\rho_\gamma: \mathcal{J}^0(\gamma)/\mathcal{J}^{\tan}(\gamma) \rightarrow T_\Gamma \mathcal{N}$  y  $\rho_\gamma: \mathcal{J}^0(\gamma)/\mathcal{J}^T(\gamma) \rightarrow T_{\Gamma_s} \mathcal{N}_s$  dados por (3.12). Asimismo, denotaremos a los elementos de los espacios tangentes por  $\mathcal{W}^{\tan} \in T_\Gamma \mathcal{N}$  y  $\mathcal{W}^T \in T_{\Gamma_s} \mathcal{N}_s$ .

Al igual que razonamos en la sección 2.5, la expresión de la forma simpléctica  $\omega_g$  en  $TM$  sugiere definir para cada  $\mathcal{W}_1^T, \mathcal{W}_2^T \in T_{\Gamma_s} \mathcal{N}_s$

$$\omega_{\Gamma_s}(\mathcal{W}_1^T, \mathcal{W}_2^T) = \omega_g(\xi_1, \xi_2) = g(Y'_1, Y_2) - g(Y_1, Y'_2).$$

donde  $Y_i \in \rho_\gamma^{-1}(\mathcal{W}_i^T)$  para cierto  $\gamma \in \Gamma_s$  y  $\xi_i \in T_v L$  es tal que  $Y_{\xi_i} = Y_i \in \mathcal{J}^0(\gamma)$ . La comprobación de que esta aplicación está bien definida y es una forma simpléctica en  $\mathcal{N}_s$  (y, por tanto, la única) que verifica  $\Pi^* \omega = \omega_{g|_L}$  es análoga a la hecha en la sección 2.5.

Nótese que, a pesar de que la variedad  $\mathcal{N}_s$  sea un objeto conforme, la forma simpléctica  $\omega$  recién definida (al igual que la forma simpléctica  $\omega_g$  en  $TM$ ) depende de la elección concreta de la métrica  $g \in \mathfrak{g}$  y, por tanto, no es un objeto conforme.

Observemos, por último, que al ser  $\mathcal{N}_s^+ \subset \mathcal{N}_s$  abierto, todos los resultados obtenidos para  $\mathcal{N}_s$  se trasladan inmediatamente a  $\mathcal{N}_s^+$ .

### 3.4. La variedad $\mathcal{N}$ como variedad de contacto

El objetivo de este apartado será dotar a  $\mathcal{N}$  de una estructura de contacto, empleando para ello los resultados 1.73 y 1.74. Comprobaremos, además, que aunque la forma simpléctica  $\omega$  en  $\mathcal{N}_s^+$  depende de la elección de la métrica auxiliar  $g \in \mathfrak{g}$ , la estructura de contacto será un invariante conforme.

Para evitar ambigüedades, en el resto de la sección diferenciaremos la notación de las proyecciones denotando  $\Pi: L^+ \rightarrow L^+/\mathcal{D} \equiv \mathcal{N}$  y  $\Pi_s: L^+ \rightarrow L^+/L^\perp \equiv \mathcal{N}_s^+$ . Nótese que, análogamente a lo que sucedía en la sección 2.4, si  $\xi \in T_v L$ , se verifica:

$$d_v \Pi_s(\xi) = \rho_{\gamma_v}(\langle Y_\xi \rangle^T), \quad d_v \Pi(\xi) = \rho_{\gamma_v}(\langle Y_\xi \rangle^{\text{tan}}).$$

Veamos entonces que la forma simpléctica  $\omega$  en  $\mathcal{N}_s^+$  es exacta. Para ello definiremos una 1-forma  $\theta$  en  $\mathcal{N}_s^+$  que verifique  $\Pi_s^* \theta = \theta_g|_{L^+}$  y emplearemos la proposición 1.73, que nos garantizará que  $\omega = -d\theta$ . Como en la sección anterior, la expresión (2.6) nos sugiere definir para cada elemento  $\mathcal{W}^T \in T_{\Gamma_s} \mathcal{N}_s^+$ ,

$$\theta_{\Gamma_s}(\mathcal{W}^T) = \theta_g(\xi) = g(\dot{\gamma}, Y),$$

donde  $\gamma \in \Gamma_s$ ,  $Y \in \rho_\gamma^{-1}(\mathcal{W}^T)$  y  $\xi \in T_{\gamma(0)} L^+$  es tal que  $Y = Y_\xi \in \mathcal{J}^0(\gamma)$ . Al igual que para las formas bilineales definidas en los espacios tangentes de  $\mathcal{M}$  y  $\mathcal{N}_s^+$ , esta aplicación estará bien definida si no depende del campo  $Y \in \rho_\gamma^{-1}(\mathcal{W}^T)$  ni de la geodésica  $\gamma \in \Gamma_s$ . Veamos que, en efecto, esto es lo que sucede.

La independencia de la geodésica  $\gamma \in \Gamma_s$  se deduce del hecho de que dos geodésicas en  $\Gamma_s$  difieren exclusivamente en una traslación del parámetro y del hecho de que al ser  $Y \in \mathcal{J}^0(\gamma)$ , entonces  $g(\dot{\gamma}(t), Y(t))$  es constante. Por su parte, la independencia de  $Y \in \rho_\gamma^{-1}(\mathcal{W}^T)$  es consecuencia inmediata de la propia definición de  $\theta$ , teniendo en cuenta que las geodésicas de  $\Gamma_s$  son luminosas.

Asimismo, se verifica  $\Pi_s^* \theta = \theta_g|_{L^+}$ , pues para cada  $v \in L^+$  y cada  $\xi \in T_v L^+$ , se tiene

$$(\Pi_s^* \theta)_v(\xi) = \theta_{\Pi_s(v)}(d_v \Pi_s(\xi)) = \theta_{[\gamma_v]_s}(\rho_{\gamma_v}(\langle Y_\xi \rangle)) = \theta_g(\xi).$$

En conclusión, la proposición 1.73 nos garantiza que  $\omega = -d\theta$  y, en particular,  $(\mathcal{N}_s^+, \omega)$  es exacta. Por supuesto, la 1-forma  $\theta$  (al igual que  $\theta_g$ ) dependen de la elección concreta de la métrica auxiliar  $g \in \mathcal{G}$ .

Trataremos ahora de inducir en  $\mathcal{N}$  una estructura de contacto, haciendo uso del teorema 1.74. Para ello, definimos en primer lugar la aplicación *natural*<sup>10</sup>

$$\begin{aligned} \pi: \mathcal{N}_s^+ &\longrightarrow \mathcal{N} \\ \Gamma_s &\longmapsto \Gamma, \end{aligned}$$

donde  $\Gamma$  es el único elemento de  $\mathcal{N}$  que, como conjunto, contiene a  $\Gamma_s$ . Por una parte, es evidente que  $\pi$  es sobreyectiva. Además, para cada  $v \in L^+$  se tiene que  $\pi(\Pi_s(v)) = \pi([\gamma_v]_s) = [\gamma_v] = \Pi(v)$ , de modo que  $\pi \circ \Pi_s = \Pi$ . En otras palabras, el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} L^+ & \xrightarrow{\Pi_s} & L^+/L^\perp \equiv \mathcal{N}_s^+ \\ & \searrow \Pi & \downarrow \pi \\ & & L^+/\mathcal{D} \equiv \mathcal{N}. \end{array}$$

<sup>10</sup>Nótese que podríamos haber definido la aplicación análoga tomando como dominio al conjunto  $\mathcal{N}_s$ .

En consecuencia, el siguiente diagrama de diferenciales es también conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} T_v L^+ & \xrightarrow{d_v \Pi_s} & T_{\Pi_s(v)} L^+ / L^\perp \equiv T_{[\gamma_v]_s} \mathcal{N}_s^+ \\ & \searrow d_v \Pi & \downarrow d_{[\gamma_v]_s} \pi \\ & & T_{\Pi(v)} L^+ / \mathcal{D} \equiv T_{[\gamma_v]} \mathcal{N}. \end{array}$$

Así,  $d_{[\gamma_v]_s} \pi \circ d_v \Pi_s = d_v \Pi$ , y al ser  $\Pi$  una sumersión, deducimos que  $d_{[\gamma_v]_s} \pi$  debe ser sobreyectiva, esto es,  $\pi$  es una sumersión. Además, de la conmutatividad de este diagrama se deduce también que

$$d_{[\gamma]_s} \pi(\rho_{\gamma_v}(\langle Y \rangle^T)) = \rho_{\gamma_v}(\langle Y \rangle).$$

Por otra parte, si  $\gamma \in \Gamma$  e  $Y_1, Y_2 \in \mathcal{J}^0(\gamma)$  son tales que  $A = Y_1 - Y_2 \in \mathcal{J}^{\text{tan}}(\gamma)$ , entonces  $g(\dot{\gamma}(0), A(0)) = 0$ . En consecuencia,  $g(\dot{\gamma}(0), Y(0))$  toma el mismo valor para todo representante  $Y \in \rho_\gamma^{-1}(\mathcal{W}^{\text{tan}})$ . En otras palabras, para  $\gamma \in \Gamma_s$  se tiene

$$d_{\Gamma_s} \pi(\mathcal{W}_1^T) = d_{\Gamma_s} \pi(\mathcal{W}_2^T) = \mathcal{W}^{\text{tan}} \implies \theta_{\Gamma_s}(\mathcal{W}_1^T) = \theta_{\Gamma_s}(\mathcal{W}_2^T). \quad (3.15)$$

Supongamos ahora dos elementos distintos  $\Gamma_{1s}, \Gamma_{2s} \in \mathcal{N}_s$  tales que  $\pi(\Gamma_{1s}) = \pi(\Gamma_{2s})$ , y tomemos  $\mathcal{W}_i^T \in T_{\Gamma_{is}} \mathcal{N}_s$ . Entonces, aunque se verifique  $d_{\Gamma_{1s}} \pi(\mathcal{W}_1^T) = d_{\Gamma_{2s}} \pi(\mathcal{W}_2^T)$ , se tendrá, en general, que  $\theta_{\Gamma_{1s}}(\mathcal{W}_1^T) \neq \theta_{\Gamma_{2s}}(\mathcal{W}_2^T)$ , lo que no nos permite definir una 1-forma en  $\mathcal{N}$  de forma inmediata.

Sin embargo, para cada  $\Gamma \in \mathcal{N}$  podemos escoger una representante  $\gamma \in \Gamma$  y, por tanto, un único elemento  $\Gamma_s \in \mathcal{N}_s$  que nos permita definir dicha 1-forma.

Tomamos, para ello, un campo vectorial auxiliar *sobre la inclusión*  $X: S \rightarrow H \subset TM$ , cuya existencia está garantizada por ser  $M$  temporalmente orientable (teor. 1.44). Además, supondremos, por simplicidad<sup>11</sup>, que el espaciotiempo  $(M, g)$  es globalmente hiperbólico y que  $S \subset M$  es una hipersuperficie de Cauchy diferenciable y espacial cualquiera. Al ser  $S$  espacial, toda curva causal maximal la intersecará una única vez.

Tomamos una geodésica  $\alpha \in \Gamma \in \mathcal{M} \cup \mathcal{N}$ , esto es, una geodésica causal. Existe entonces un único  $t_1$  tal que  $\alpha(t_1) = p \in S$ . Ya sabemos que toda curva  $\gamma \in \Gamma$  puede expresarse como  $\gamma(t) = \gamma^{a,b}(t) = \alpha(at + b)$ , para ciertos  $a \in \mathbb{R}^*$ ,  $b \in \mathbb{R}$ . En particular,  $\gamma^{a,b}(0) = \alpha(b)$  y, por tanto,  $p = \gamma^{a,t_1}(0) \in S$ ,  $\forall a \in \mathbb{R}^*$ .

Consideramos entonces  $g(\dot{\gamma}^{a,t_1}(0), X_p) = ag(\dot{\alpha}(t_1), X_p)$ . Al ser  $X_p$  temporal, se tiene<sup>12</sup> que  $g(\dot{\alpha}(t_1), X_p) \neq 0$ . En consecuencia, existe un único  $a \in \mathbb{R}^*$  tal que  $g(\dot{\gamma}^{a,t_1}(0), X_p) = -1$ .

En resumen, para cada  $\Gamma \in \mathcal{M} \cup \mathcal{N}$  existe una única geodésica  $\gamma \in \Gamma$  tal que

$$p = \gamma(0) \in S \quad \text{y} \quad g(\dot{\gamma}(0), X_p) = -1. \quad (3.16)$$

Así, todo elemento  $\Gamma \in \mathcal{M} \cup \mathcal{N}$  está *canónicamente* representado por una única geodésica  $\gamma \in \Gamma$ : aquella que verifica (3.16). En consecuencia, podemos identificar  $\gamma \equiv \Gamma$ .

<sup>11</sup>Relajando esta hipótesis a la causalidad fuerte se podría hacer un estudio análogo considerando entornos globalmente hiperbólicos alrededor de cada punto (Minguzzi et al., 2008) y, por tanto, con *superficies de Cauchy locales*.

<sup>12</sup>Utilizamos aquí los siguientes resultados: (1a) Dos vectores  $x, y \in \tau_p$  tienen la misma orientación si, y solo si  $g(x, y) < 0$ . En consecuencia (1b), si  $x, y \in \tau_p$ , entonces  $g(x, y) \neq 0$ . (2) Si  $x, y \in T_p M$  son causales e independientes, entonces  $g(x, y) \neq 0$  (Javaloyes V. et al., 2010).



Nótese<sup>12</sup> que, además, esta geodésica tiene la misma orientación temporal que la de  $X_p$  que, sin pérdida de generalidad, podemos suponer futura.

Ahora sí, podemos definir una 1-forma  $\bar{\theta}$  en  $\mathcal{N}$  dada para cada  $\Gamma \in \mathcal{N}$  por

$$\bar{\theta}_\Gamma(\mathcal{W}^{\text{tan}}) = \theta_{\Gamma_s}(\mathcal{W}^T), \quad (3.17)$$

donde  $\Gamma_s$  es la geodésica luminosa escalada que contiene a la única geodésica  $\gamma \in \Gamma$  que verifica (3.16), y  $\mathcal{W}^T \in T_{\Gamma_s}\mathcal{N}_s$  es cualquier elemento tal que  $d_{\Gamma_s}\pi(\mathcal{W}^T) = \mathcal{W}^{\text{tan}}$ . En particular, para  $\gamma \in \Gamma_s$ , se verifica  $\theta_{\Gamma_s} = (\pi^*\bar{\theta})_{\Gamma_s}$ . Nótese, no obstante, que la 1-forma  $\bar{\theta}$  recién definida depende del campo auxiliar  $X$  tomado para seleccionar a la representante  $\gamma \in \Gamma$  (3.16).

Consideremos ahora

$$H_{\Gamma_s} = \ker \theta_{\Gamma_s} = \left\{ \mathcal{W}^T \in T_{\Gamma_s}\mathcal{N}_s \mid g(\dot{\gamma}, Y) = 0, \forall \gamma \in \Gamma_s, Y \in \rho_\gamma^{-1}(\mathcal{W}^T) \right\}, \quad (3.18)$$

que proporciona una distribución de hiperplanos  $H$  en  $\mathcal{N}_s$ . En los siguientes párrafos deduciremos que, a pesar de que  $\theta$  dependa de la elección de la métrica auxiliar  $g \in \mathbf{g}$ , la distribución de hiperplanos  $H$  recién obtenida depende exclusivamente de la estructura conforme  $\mathbf{g}$ .

En primer lugar, sabemos (3.8) que dos métricas conformes  $g, \tilde{g}$  admiten las mismas geodésicas luminosas. Así, si tenemos un campo de Jacobi  $Y$  respecto de  $g$  y consideramos una variación geodésica por geodésicas luminosas cuyo campo variacional sea  $Y$ , ésta será también una variación geodésica por geodésicas luminosas para la métrica  $\tilde{g}$ . En consecuencia,  $Y$  también es un campo de Jacobi respecto de  $\tilde{g}$ , de donde se concluye inmediatamente el resultado.

De consideraciones precedentes se puede deducir sin gran dificultad que

$$\pi(\Gamma_{1s}) = \pi(\Gamma_{2s}) = \Gamma \implies d_{\Gamma_{1s}}\pi(H_{\Gamma_{1s}}) = d_{\Gamma_{2s}}\pi(H_{\Gamma_{2s}}) := \bar{H}_\Gamma. \quad (3.19)$$

El teorema 1.74 nos garantiza entonces que  $\bar{H}$  es una estructura de contacto en  $\mathcal{N}$ . De hecho, es inmediato comprobar que  $\bar{H}_\Gamma = \ker \bar{\theta}_\Gamma$ , esto es, la distribución de hiperplanos  $\bar{H}$  está generada por  $\bar{\theta}$  o, dicho de otro modo,  $\bar{\theta}$  es una 1-forma asociada a ésta. En consecuencia, ni siquiera habría sido necesario emplear el mencionado teorema. Nótese además que, aunque  $\bar{\theta}$  dependa de la elección del campo auxiliar  $X$ , la distribución de hiperplanos  $\bar{H}$  no depende de dicha elección.

En todo caso, podemos expresar los hiperplanos de contacto como

$$\begin{aligned} \bar{H}_\Gamma &= \ker \bar{\theta}_\Gamma = \left\{ \mathcal{W}^{\text{tan}} \mid g(\dot{\gamma}, Y) = 0, \forall \gamma \in \Gamma, Y \in \rho_\gamma^{-1}(\mathcal{W}^{\text{tan}}) \right\} = \\ &= \left\{ \mathcal{W}^{\text{tan}} \mid \rho_\gamma^{-1}(\mathcal{W}^{\text{tan}}) \subseteq \mathcal{J}^\perp(\gamma), \forall \gamma \in \Gamma \right\}. \end{aligned} \quad (3.20)$$

De forma análoga al caso de la distribución de hiperplanos  $H$  en  $\mathcal{N}_s$ , puede demostrarse que, a pesar de que  $\bar{\theta}$  dependa de la métrica auxiliar  $g \in \mathbf{g}$ , la estructura de contacto  $\bar{H}$  recién obtenida depende exclusivamente de la estructura conforme  $\mathbf{g}$ . Esta propiedad puede demostrarse de manera alternativa empleando el concepto de *cielo*  $S(p)$  de un punto  $p \in M$ . Véase (Bautista et al., 2015a).

Nótese, además, que el teorema 1.74 nos proporcionaba las 1-formas de contacto como  $-\sigma^*\bar{\theta}$ , donde  $\sigma$  es una sección de  $\pi$ . En general, la elección de la sección  $\sigma$  proporcionará diferentes formas de contacto, aunque todas ellas definan una misma estructura de contacto. Sin embargo, en este caso todas las formas de contacto coinciden, como consecuencia de las ecuaciones (3.15) y (3.19).



Observemos, asimismo, que la 1-forma de contacto  $\bar{\theta}$  está *globalmente*<sup>13</sup> definida. En particular, el fibrado vectorial  $T\mathcal{N}/\bar{H}$  es trivial (1.20) o, equivalentemente, la estructura de contacto  $\bar{H}$  es coorientable. En consecuencia,  $\bar{\theta} \wedge (d\bar{\theta})^m$  es una forma de volumen en  $\mathcal{N}$ , de donde se deduce que  $\mathcal{N}$  es orientable, algo que ya sabíamos al ser  $\mathcal{N} = \partial\mathcal{M}$  (véase 4.1).

Notemos, por último, que al ser  $\omega = -d\theta$  y  $\theta_{\Gamma_s} = (\pi^*\bar{\theta})_{\Gamma_s}$  para  $\Gamma_s \subset \Gamma$  conteniendo a la única representante  $\gamma \in \Gamma$  que verifica (3.16), se tiene que

$$\omega_{\Gamma_s} = -d\theta_{\Gamma_s} = -d(\pi^*\bar{\theta})_{\Gamma_s} = \pi^*(-d\bar{\theta})_{\Gamma_s}. \quad (3.21)$$

---

<sup>13</sup>Si hubiéramos trabajado con un espaciotiempo fuertemente causal y, por tanto, con superficies de Cauchy *locales*, habríamos definido formas de contacto  $\bar{\theta}$  locales alrededor de cada punto, todas ellas asociadas a la estructura de contacto  $\bar{H}$ .

## 4. Relleno simpléctico de $\mathcal{N}$

En este capítulo abordaremos, por fin, el objetivo central del presente trabajo: el estudio de la relación entre la estructura simpléctica de  $\mathcal{M}$  y la estructura de contacto de  $\mathcal{N}$ .

Para ello, consideraremos en primer lugar un nuevo espacio, el de las geodésicas causales, así como algunas propiedades que garantizan que pueda ser dotado de estructura de variedad. Posteriormente, construiremos una nueva forma simpléctica en  $\mathcal{M}$  conforme a la forma canónica obtenida en el apartado 2.5. Seguidamente, demostraremos que ésta se extiende a los hiperplanos de contacto de  $\mathcal{N}$  proporcionando una 2-forma que coincide con la forma de contacto definida por (3.17). Y por último, repasaremos algunos de los conceptos clásicos de relleno simpléctico (fuerte/débil) y daremos uno nuevo, el de *relleno simpléctico conforme*, que se ajusta a nuestros resultados.

### 4.1. El espacio $\mathcal{C}$ de las geodésicas causales

Construimos aquí el conjunto de las geodésicas causales maximales *desparametrizadas* en  $M$ , de manera análoga a la hecha en los apartados 2.3 y 3.2. Consideramos en primer lugar el conjunto  $\mathcal{C}'$  de todas las geodésicas causales maximales en  $M$ , es decir, las geodésicas maximales  $\gamma$  tales que  $g(\dot{\gamma}, \dot{\gamma}) \leq 0$ . Introducimos en  $\mathcal{C}'$  la relación de equivalencia dada por  $\gamma_1 \sim \gamma_2 \iff \text{Im } \gamma_1 = \text{Im } \gamma_2$  y consideramos el conjunto cociente  $\mathcal{C} = \mathcal{C}' / \sim$ . Denominamos geodésicas causales maximales *desparametrizadas* a las clases de equivalencia. Claramente, se tiene

$$\mathcal{C} = \mathcal{M} \sqcup \mathcal{N} \cong \{\text{Im } \gamma \mid \gamma \text{ es geodésica causal maximal}\}. \quad (4.1)$$

Al contrario de lo que sucedía para el espacio  $\mathcal{N}$  de las geodésicas luminosas, que era un objeto conforme, este nuevo espacio no lo es, pues el carácter de geodésica temporal depende de la elección concreta de la métrica dentro de una clase conforme. De este modo, en adelante la elección de la métrica no será meramente auxiliar, lo que se explicita al denotar a los espaciotiempos por  $(M, g)$  en lugar de  $(M, g)$ .

Se tiene el siguiente resultado que proporciona condiciones suficientes para que  $\mathcal{C}$  admita estructura de variedad diferenciable (Low, 1990, Prop. 2.1).

**Proposición 4.1.** *Sea  $(M, g)$  un espaciotiempo fuertemente causal. Entonces  $\mathcal{C}$  admite una estructura natural de variedad diferenciable con borde  $\partial\mathcal{C} = \mathcal{N}$  e interior  $\text{int } \mathcal{C} = \mathcal{M}$ .*

Al igual que sucedía en el apartado 3.2, la condición de causalidad fuerte no es necesaria para que  $\mathcal{C}$  admita una estructura de variedad diferenciable y no es suficiente para garantizar que dicha estructura sea de Hausdorff. Nótese, además, que las condiciones de Hausdorff de  $\mathcal{M}$  y  $\mathcal{N}$  son independientes: existen espaciotiempos en los que  $\mathcal{M}$  es de Hausdorff pero  $\mathcal{N}$  no lo es, y viceversa.

Se tienen, no obstante, los siguientes resultados (Low, 1990), análogos a los teoremas 3.24 y 3.25. Nótese que, en este caso, la métrica no es meramente auxiliar.

**Teorema 4.2.** *Sea  $(M, g)$  fuertemente causal. Si  $\mathcal{C}$  no es de Hausdorff, entonces  $M$  admite singularidades desnudas y, en particular,  $M$  no es globalmente hiperbólico.*

En consecuencia, la hiperbolicidad global vuelve a ser condición suficiente para que  $\mathcal{C}$  sea de Hausdorff. Sin embargo, esta condición es, de nuevo, no necesaria.

**Teorema 4.3.** *Sea  $(M, g)$  un espaciotiempo fuertemente causal. Entonces  $\mathcal{C}$  es una variedad de Hausdorff si, y solamente si  $(M, g)$  es causalmente pseudoconvexo.*

## 4.2. Una nueva 2-forma simpléctica en $\mathcal{M}$

De nuevo<sup>11</sup>, por simplicidad, supondremos que el espaciotiempo  $(M, g)$  es globalmente hiperbólico y que  $S \subset M$  es una hipersuperficie de Cauchy diferenciable y espacial cualquiera.

En el apartado 2.5 construimos la forma simpléctica *natural*  $\omega$  en  $\mathcal{M}$  (2.16). Para ello, tomamos una descripción del espacio tangente  $T_\Gamma \mathcal{M} \cong \mathcal{J}^\perp(\gamma)$ , donde  $\gamma \in \Gamma$  era cualquier geodésica parametrizada por el arco y dirigida al futuro (2.15). Sin embargo, la elección de  $\gamma \in \Gamma$  podría haberse hecho de distinta forma, lo que podría proporcionar nuevas formas en  $\mathcal{M}$  empleando la misma expresión (2.16). Pues bien, en este apartado construiremos una nueva forma  $\tilde{\omega}$  en  $\mathcal{M}$  conforme<sup>1</sup> a  $\omega$  que, como veremos posteriormente, es *compatible* con la estructura de contacto de  $\mathcal{N}$ .

Recordemos (2.14) que para cada par de elementos  $\gamma, \alpha \in \Gamma$  con  $\gamma(t) = \alpha(at + t_1)$ , existía un isomorfismo canónico

$$\begin{aligned} \Theta_{\alpha \rightarrow \gamma}: \mathcal{J}^0(\alpha) &\rightarrow \mathcal{J}^0(\gamma) \\ Y_\alpha &\mapsto Y_\gamma, \end{aligned}$$

donde  $Y_\gamma(t) = Y_\alpha(at + t_1)$ . Veamos que, además,  $\Theta = \Theta_{\alpha \rightarrow \gamma}$  verifica  $\Theta(\mathcal{J}^\perp(\alpha)) = \mathcal{J}^\perp(\gamma)$ .

En efecto, sea  $Y_\alpha \in \mathcal{J}^\perp(\alpha)$ . Consideramos  $\Theta(Y_\alpha) \in \mathcal{J}^0(\gamma)$ . Se tiene entonces

$$g(\Theta(Y_\alpha), \dot{\gamma}) = g(Y_\gamma(t), \dot{\gamma}(t)) = a g(Y_\alpha(at + t_1), \dot{\alpha}(at + t_1)) = 0,$$

y de la inyectividad de  $\Theta$  se deduce la igualdad buscada.

Por su parte, la ecuación (2.13) proporcionaba isomorfismos  $\rho_\gamma: \mathcal{J}^\perp(\gamma) \rightarrow T_\Gamma \mathcal{M}$ , y  $\rho_\alpha: \mathcal{J}^\perp(\alpha) \rightarrow T_\Gamma \mathcal{M}$ . En conclusión, se tiene el siguiente diagrama de isomorfismos:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{J}^\perp(\alpha) & \xrightarrow{\Theta} & \mathcal{J}^\perp(\gamma) \\ & \searrow \rho_\alpha \quad \swarrow \rho_\gamma & \\ & T_\Gamma \mathcal{M} & \end{array}$$

que nos permite seguir identificando  $T_\Gamma \mathcal{M} \cong \mathcal{J}^\perp(\gamma) \cong \mathcal{J}^\perp(\alpha)$ . Además, el isomorfismo  $\rho_\gamma$  puede obtenerse también de la manera alternativa expuesta tras la ecuación (2.13).

En adelante, reservaremos la notación  $\gamma$  para la única representante de  $\Gamma \in \mathcal{C}$  dada por la ecuación (3.16). Con ella, podemos definir una *nueva* 2-forma<sup>2,3</sup>  $\tilde{\omega}$  en  $\mathcal{M}$ , dada para cada  $\mathcal{W}_1, \mathcal{W}_2 \in T_\gamma \mathcal{M}$  por

$$\tilde{\omega}_\gamma(\mathcal{W}_1, \mathcal{W}_2) = g(Y'_1, Y_2) - g(Y_1, Y'_2), \quad (4.2)$$

donde  $Y_i \in \rho_\gamma^{-1}(\mathcal{W}_i) \subset \mathcal{J}^0(\gamma)$ . La demostración de la independencia de los representantes es análoga a la de la sección 2.5. En ocasiones, denotaremos a esta forma por  $\tilde{\omega}_\mathcal{M}$ .

Veamos que esta nueva forma es conforme a la forma simpléctica *natural*  $\omega$ , esto es, que existe  $\mu: \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}^+$  diferenciable tal que  $\omega = \mu \tilde{\omega}$ . Para ello, denotamos por  $\gamma$  a la representante canónica de  $\Gamma$  dada por (3.16) y por  $\alpha$  a la única representante de  $\Gamma$  parametrizada por el arco y dirigida al futuro tal que  $\alpha(0) = \gamma(0)$ .

<sup>1</sup>Análogamente a lo definido para métricas, se dice que dos formas  $\omega, \tilde{\omega}$  en  $\mathcal{M}$  son *conformes* si  $\tilde{\omega} = \mu\omega$ , para cierta función diferenciable  $\mu: \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}^+$ . Nótese que, aunque  $\omega$  sea una forma simpléctica,  $\tilde{\omega}$  no tendrá por qué serlo, ya que es posible que no sea cerrada.

<sup>2</sup>Aunque la expresión sea la misma que (2.16), ahora, al tomar una representante dada por una parametrización distinta, esta forma no necesariamente coincidirá con aquella.

<sup>3</sup>Nótese que, de haber trabajado con un espaciotiempo fuertemente causal, la definición de  $\tilde{\omega}$  sólo podría hacerse *localmente*.

Se podrá expresar  $\alpha(t) = \gamma(at)$  para cierto  $a \in \mathbb{R}^+$ . En consecuencia, se tendrá

$$-1 = g(\dot{\alpha}(t), \dot{\alpha}(t)) = a^2 g(\dot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t)) \implies a = \sqrt{\frac{-1}{g(\dot{\gamma}, \dot{\gamma})}} := |\dot{\gamma}|^{-1}.$$

Sean ahora  $Y_i \in \rho_\gamma^{-1}(\mathcal{W}_i) \subset \mathcal{J}^0(\gamma)$ . Los elementos  $Z_i := \Theta_{\gamma \rightarrow \alpha}(Y_i) \in \mathcal{J}^0(\alpha)$ , que están dados por  $Z_i(t) = Y_i(at)$  (2.14), verifican  $Z_i \in \rho_\alpha^{-1}(\mathcal{W}_i)$ . Por tanto, podemos expresar

$$\omega(\mathcal{W}_1, \mathcal{W}_2) = g(Z'_1, Z_2) - g(Z_1, Z'_2) = g(aY'_1, Y_2) - g(Y_1, aY'_2) = a\tilde{\omega}(\mathcal{W}_1, \mathcal{W}_2).$$

En consecuencia, se verifica  $\omega = a\tilde{\omega}$ , esto es, las formas simplécticas  $\omega$  y  $\tilde{\omega}$  son conformes, con factor<sup>4</sup> conforme  $\mu: \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}^+$  dado por  $\mu(\gamma) = a_\gamma = |\dot{\gamma}|^{-1}$ . El hecho de que esta aplicación sea diferenciable no es en absoluto inmediato. Sin embargo, esto se puede demostrar estudiando las parametrizaciones  $\psi_S$  de  $\mathcal{M}$  construidas al final del apartado 2.3. En efecto, dada una hipersuperficie local de Cauchy  $S$ , se tiene que la aplicación

$$\begin{aligned} h_S: V_S &\rightarrow \mathbb{R} \\ v &\mapsto g(v, v)^{-1} \end{aligned}$$

es diferenciable. En consecuencia, la aplicación  $h_S \circ \psi_S^{-1}: \mathcal{M}_S \rightarrow \mathbb{R}$  es también diferenciable. Notamos, por último, que  $h_S \circ \psi_S^{-1} = \mu|_{\mathcal{M}_S}$ , de donde concluimos la diferenciable de  $\mu$ .

### 4.3. $\mathcal{M}$ como relleno simpléctico de $\mathcal{N}$

La ecuación (4.2) permite extender  $\tilde{\omega}$  a los hiperplanos de contacto  $\overline{H}_\Gamma \equiv \overline{H}_\gamma$  (3.20) de  $\mathcal{N}$ . En efecto si  $\mathcal{W}_1^{\text{tan}}, \mathcal{W}_2^{\text{tan}} \in \overline{H}_\gamma$  veamos que

$$\tilde{\omega}_\gamma(\mathcal{W}_1^{\text{tan}}, \mathcal{W}_2^{\text{tan}}) = g(Y'_1, Y_2) - g(Y_1, Y'_2) \quad (4.3)$$

es independiente de los representantes  $Y_i \in \rho_\gamma^{-1}(\mathcal{W}_i^{\text{tan}})$ . Supongamos que  $Y_i, \tilde{Y}_i \in \rho_\gamma^{-1}(\mathcal{W}_i^{\text{tan}})$ . Podrá expresarse entonces  $Y_i = \tilde{Y}_i + A_i$ , donde  $A_i \in \mathcal{J}^{\text{tan}}(\gamma)$ . De este modo, se puede expresar  $A_i(t) = (a_i + b_i t)\dot{\gamma}(t)$  y se tiene

$$\begin{aligned} g(Y'_1, Y_2) - g(Y_1, Y'_2) &= g(\tilde{Y}'_1 + A'_1, \tilde{Y}_2 + A_2) - g(\tilde{Y}_1 + A_1, \tilde{Y}'_2 + A'_2) = \\ &= g(\tilde{Y}'_1, \tilde{Y}_2) - g(\tilde{Y}_1, \tilde{Y}'_2), \end{aligned}$$

donde en la segunda igualdad hemos utilizado que  $g(\tilde{Y}'_i, A_j) = 0$ , al ser  $\tilde{Y}_i \in \mathcal{J}^0(\gamma)$ , que  $g(\tilde{Y}_i, A'_j) = 0$ , al ser  $\tilde{Y}_i \in \mathcal{J}^\perp(\gamma)$ , y que  $g(A'_i, A_j) = 0$ , al ser  $\gamma$  una geodésica luminosa.

En los siguientes párrafos construiremos una extensión de  $\tilde{\omega}$  a *todo* el espacio tangente  $T_\gamma \mathcal{N}$ . Para ello, consideremos un campo vectorial  $\mathcal{X} \in \mathfrak{X}(\mathcal{C})$ . Su flujo  $\phi_\mathcal{X}$  está definido, en su dominio, por  $\phi_\mathcal{X}(\gamma, s) = \Gamma^s$ , donde  $s \mapsto \Gamma^s$  es la curva integral maximal de  $\mathcal{X}$  tal que  $\Gamma^0 = \Gamma \equiv \gamma$ . Los teoremas de diferenciable de flujo (Lafuente, 2013) nos garantizan que el dominio  $D(\phi_\mathcal{X})$  es abierto y que en él el flujo es una aplicación diferenciable.

El flujo da lugar a una variación geodésica  $x_\gamma(t, s) = \Gamma^s(t) \equiv \gamma^s(t)$ , donde  $\gamma^s \in \Gamma^s$  es la única geodésica que verifica (3.16). Así, podemos considerar su campo variacional

$$Y_\gamma = \left. \frac{\partial x_\gamma}{\partial s} \right|_{s=0} \in \mathcal{J}(\gamma) \quad (4.4)$$

que, por construcción, verifica  $Y_\gamma \in \rho_\gamma^{-1}(\mathcal{X}_\gamma)$ .

<sup>4</sup>Nótese, de nuevo, que de haber trabajado con un espaciotiempo fuertemente causal,  $\mu$  estaría definida sólo *localmente*. Nótese, además, que el valor de  $\mu$  depende de la elección del campo auxiliar  $X$  (3.16).

Hasta ahora hemos exigido, por comodidad, que el espaciotiempo fuese globalmente hiperbólico. Sin embargo, relajando dicha hipótesis a la causalidad fuerte del espaciotiempo se obtienen resultados análogos, trabajando con superficies de Cauchy *locales*. De este modo, se obtendrán 1-formas de contacto  $\bar{\theta}$ , aplicaciones  $\mu$  y 2-formas  $\tilde{\omega}$  *locales*.

Dicho esto, enunciamos el siguiente resultado en el caso fuertemente causal:

**Teorema 4.4.** *Sea  $(M, g)$  un espaciotiempo fuertemente causal. Para cada  $\gamma_0 \equiv \Gamma_0 \in \mathcal{N}$  existe un entorno  $U$  de  $\Gamma_0$  en  $\mathcal{C}$  en el que  $\mu$  (y, por tanto,  $\tilde{\omega}$ ) está definida, tal que para todo par de campos diferenciables  $\mathcal{X}, \mathcal{Y} \in \mathfrak{X}(U)$ , se tiene que la aplicación  $f: U \rightarrow \mathbb{R}$  dada por*

$$f(\gamma) = \tilde{\omega}(\mathcal{X}_\gamma, \mathcal{Y}_\gamma) = g(Y'_\gamma, \hat{Y}_\gamma) - g(Y_\gamma, \hat{Y}'_\gamma), \quad (4.5)$$

donde  $Y_\gamma, \hat{Y}_\gamma$  están contruidos con el procedimiento anterior, es diferenciable.

*Demostración.* De la diferenciabilidad del flujo se deduce que la aplicación (4.4) proporciona aplicaciones diferenciables

$$\gamma \mapsto Y_\gamma(0) \in TM, \quad \text{y} \quad \gamma \mapsto Y'_\gamma(0) \in TM,$$

y análogamente para  $\hat{Y}$ . ■

Nótese, en primer lugar, que la aplicación (4.5), al igual que  $\mu$ , depende del campo vectorial *auxiliar*  $X$  tomado para escoger la geodésica  $\gamma \in \Gamma$  (3.16).

Nótese además que, si hubiésemos exigido en el teorema 4.4 que el espaciotiempo fuese globalmente hiperbólico, entonces tanto  $\mu$  como  $\tilde{\omega}$  estarían globalmente definidas y tendríamos el siguiente corolario:

**Corolario 4.4.1.** *Sea  $(M, g)$  un espaciotiempo globalmente hiperbólico. Para todo par de campos diferenciables  $\mathcal{X}, \mathcal{Y} \in \mathfrak{X}(\mathcal{C})$ , se tiene que la aplicación (4.5), definida en  $\mathcal{C}$ , es diferenciable.*

Por otra parte, observemos que aunque para definir la aplicación (4.5) hayamos necesitado considerar campos diferenciables  $\mathcal{X}, \mathcal{Y} \in \mathfrak{X}(U)$ , es inmediato comprobar que, en cada punto  $\gamma \in U$ , la definición es independiente de las extensiones  $\mathcal{X}$  e  $\mathcal{Y}$  de  $\mathcal{W}_1^{\text{tan}} = \mathcal{X}_\gamma$  y  $\mathcal{W}_2^{\text{tan}} = \mathcal{Y}_\gamma$ .

En consecuencia, para cada  $\gamma \in \mathcal{C}$  tenemos una forma bilineal  $\tilde{\omega}_\gamma$ . Al ser (4.5) diferenciable para cualesquiera campos diferenciables  $\mathcal{X}, \mathcal{Y} \in \mathfrak{X}(U)$ , deducimos<sup>5</sup> que  $\tilde{\omega}$  es un campo tensorial en  $U$  que, por supuesto, es antisimétrico. Estudiemos ahora la relación entre estas nuevas formas y la estructura de contacto de  $\mathcal{N}$ .

Tomemos, para  $\gamma \in U \cap \mathcal{N}$ , dos vectores  $\mathcal{W}_1^{\text{tan}}, \mathcal{W}_2^{\text{tan}} \in T_\gamma \mathcal{N}$ . Denotemos  $\gamma \in \Gamma_s \in \mathcal{N}_s^+$ . En particular, se tiene  $\pi(\Gamma_s) = \Gamma \equiv \gamma$ . Tomemos los campos de Jacobi  $Y_i \in \rho_\gamma^{-1}(\mathcal{W}_i^{\text{tan}})$  dados por el procedimiento anterior (4.4) y denotemos  $\mathcal{W}_i^T = \rho_\gamma(\langle Y_i \rangle^T)$ , de donde deducimos que  $d_{\Gamma_s} \pi(\mathcal{W}_i^T) = \mathcal{W}_i^{\text{tan}}$ . Se tiene entonces (3.21):

$$\tilde{\omega}_\gamma(\mathcal{W}_1^{\text{tan}}, \mathcal{W}_2^{\text{tan}}) = g(Y'_1, Y_2) - g(Y_1, Y'_2) = \omega_{\Gamma_s}(\mathcal{W}_1^T, \mathcal{W}_2^T) = (-d\bar{\theta})_\gamma(\mathcal{W}_1^{\text{tan}}, \mathcal{W}_2^{\text{tan}}).$$

De la arbitrariedad de  $\gamma \in U \cap \mathcal{N}$  y de  $\mathcal{W}_1^{\text{tan}}, \mathcal{W}_2^{\text{tan}} \in T_\gamma \mathcal{N}$  se deduce que

$$\tilde{\omega}|_{U \cap \mathcal{N}} = -d\bar{\theta}. \quad (4.6)$$

<sup>5</sup>**Lema:** sea  $\tilde{\omega}: M \rightarrow \mathcal{I}_2^0(M)$  (véase la notación de 1.27) tal que  $\tilde{\omega}_p \in \mathcal{I}_2^0(T_p M)$ ,  $\forall p$  y tal que para todo par de campos  $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$  la aplicación  $p \rightarrow \tilde{\omega}_p(X_p, Y_p)$  es diferenciable. Entonces  $\tilde{\omega}$  es un campo tensorial.

En resumen hemos definido, en un entorno  $U$  de cada geodésica  $\gamma \in \mathcal{C}$ , una 2-forma  $\tilde{\omega}$  que, en  $U \cap \mathcal{M}$  es conforme a la forma simpléctica natural  $\omega$ , y en  $U \cap \mathcal{N}$  coincide, salvo el signo, con la diferencial exterior de la forma de contacto global encontrada en la sección 3.

#### 4.4. Rellenos simplécticos

En esta sección se recopilan los conceptos elementales sobre rellenos simplécticos siguiendo, fundamentalmente, los textos (Eliashberg, 1991), (McDuff, 1991).

Consideremos en primer lugar  $(N, H)$  una variedad de contacto que, por simplicidad, asumiremos coorientable (véase el apartado 1.6). Sea  $\alpha$  una forma de contacto asociada a  $H$  que, por tanto, puede definirse *globalmente*. Cualquier otra forma de contacto  $\tilde{\alpha}$  asociada a  $H$  estará dada por  $\tilde{\alpha} = f\alpha$  para cierta función diferenciable  $f$  que no se anule.

En consecuencia,  $(d\tilde{\alpha})|_H = f(d\alpha)|_H$ . Decimos entonces que  $(d\tilde{\alpha})|_H$  y  $(d\alpha)|_H$  están en la misma clase conforme simpléctica. En otras palabras, la clase conforme simpléctica de  $(d\alpha)|_H$  depende únicamente de  $H$ , por lo que la denotamos  $CS(H)$ . Nótese que, si  $N$  es conexa,

$$CS(H) = CS^+(\alpha) \sqcup CS^-(\alpha),$$

donde  $CS^\pm(\alpha) = \{f(d\alpha)|_H \mid \pm f > 0\}$  son las clases conformes simplécticas *orientadas* de  $H$ .

Al ser  $H$  coorientable, sabemos que  $N$  es orientable y una orientación suya estará dada por la elección de una clase conforme simpléctica orientada de  $H$ . Sin pérdida de generalidad, denotaremos por  $CS^+(H)$  a la clase escogida.

**Definición 4.5.** Se dice que una variedad simpléctica compacta  $(M, \omega)$  es un *relleno simpléctico (fuerte)* de una variedad de contacto  $(N, H)$  si  $N = \partial M$  y existe una forma de contacto  $\alpha$  en  $N$  tal que  $\omega|_N = d\alpha$ . Se dice que  $(N, H)$  es *simplécticamente rellenable* si admite un relleno simpléctico (fuerte).

**Definición 4.6.** Sea  $(M, \omega)$  una variedad simpléctica compacta y sea  $N$  una componente<sup>6</sup> de  $\partial M$  dotada de una estructura de contacto coorientable  $H = \ker \alpha$ . Escogemos la clase conforme simpléctica orientada  $CS^+(H)$  que induzca en  $N$  la misma orientación que  $\omega$ . Se dice entonces que  $\omega$  *domina* a  $H$  si para cada  $x \in N$ , la restricción  $\omega|_{H_x}$  está en  $CS^+(H)$ . Se dice que  $N$  es *de tipo contacto* si admite una estructura de contacto dominada por  $\omega$ .

En un principio se pensaba que una noción de relleno simpléctico más débil que el de la definición 4.5 podía hacerse definiendo un “relleno simpléctico débil” de una variedad de contacto  $(N, H)$  como una variedad simpléctica compacta  $(M, \omega)$  tal que  $N = \partial M$  es de tipo contacto. Cuando la dimensión de  $M$  es 4, este nuevo concepto es efectivamente más débil que el anterior. Sin embargo, para dimensiones superiores, ambos conceptos son equivalentes, como muestra el siguiente teorema (McDuff, 1991, Lema 2.1):

**Teorema 4.7.** Sea  $(M, \omega)$  una variedad simpléctica compacta con  $\dim M \geq 6$ . Una componente  $N$  del borde de  $M$  es de tipo contacto si, y solo si existe una forma de contacto  $\alpha$  en  $N$  tal que  $\omega|_N = d\alpha$ . En tal caso, decimos que  $N$  es una componente convexa de  $\partial M$ .

Investigaciones más recientes (Massot et al., 2013, pág. 293) han aportado nuevas definiciones de relleno simpléctico débil que para variedades de dimensión 6 o superior proporciona un concepto estrictamente más débil que el de relleno simpléctico fuerte y para variedades de dimensión 4 se reduce al concepto de relleno simpléctico débil definido a partir de la dominación de una estructura de contacto.

<sup>6</sup>Esto es,  $N$  es unión de componentes conexas de  $\partial M$ .

#### 4.5. Un nuevo concepto de relleno simpléctico

Seguindo el resultado del teorema 4.4, se propone la siguiente definición:

**Definición 4.8.** Decimos que una variedad simpléctica  $(M, \omega)$  es un *relleno simpléctico conforme* de una variedad de contacto  $(N, H)$  si se verifican las siguientes condiciones

- i)  $N = \partial M$ ,
- ii) Para cada  $p \in N$  existe un entorno  $U$  de  $p$  en  $M \cup N$  y una función diferenciable  $\mu: U \cap M \rightarrow \mathbb{R}^+$  tal que  $\mu\omega$  se extiende diferenciablemente a  $U$ , y
- iii) La extensión coincide en  $U \cap N$  con la diferencial exterior de una forma de contacto.

Esta definición se puede escribir de forma equivalente como:

**Definición 4.9** (Reformulación def. 4.8). Decimos que una variedad simpléctica  $(M, \omega)$  es un *relleno simpléctico conforme* de una variedad de contacto  $(N, H)$  si  $N = \partial M$  y para cada  $p \in N$  existe un entorno  $U$  de  $p$  en  $M \cup N$ , una función diferenciable  $\mu: U \cap M \rightarrow \mathbb{R}^+$  y una 1-forma de contacto  $\theta$  en  $U \cap N$  tales que para cualesquiera campos diferenciables  $X, Y \in \mathfrak{X}(U)$  se tiene que la aplicación  $f: U \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$f(q) = \begin{cases} \mu(q) \omega_q(X_q, Y_q), & \text{si } q \in U \cap M, \\ (d\theta)_q(X_q, Y_q), & \text{si } q \in U \cap N, \end{cases}$$

es diferenciable.

En conclusión, con esta nueva nomenclatura, los resultados de la sección 4.3 se resumen en el siguiente teorema:

**Teorema 4.10.** Sea  $(M, g)$  un espaciotiempo fuertemente causal. Entonces  $(\mathcal{M}, \omega)$  es un relleno simpléctico conforme de  $(\mathcal{N}, \overline{H})$ .

Recuérdese que, si exigiésemos que el espaciotiempo fuese globalmente hiperbólico, entonces tanto la aplicación  $\mu$  como la 1-forma de contacto  $\theta$  estarían globalmente definidas.

## 5. Conclusiones

El apartado 4.3 culmina con los dos resultados centrales del presente trabajo: el teorema 4.4, que afirma que las 2-formas locales  $\tilde{\omega}$  en  $\mathcal{M}$ , conformes a la forma simpléctica  $\omega$ , se extienden localmente a  $\mathcal{N}$ , y los comentarios posteriores junto con la ecuación (4.6), que garantizan que la extensión coincide en  $\mathcal{N}$ , salvo signo, con la diferencial exterior de la forma de contacto dada en la sección 3.

Las secciones siguientes revisan el concepto de relleno simpléctico en la literatura e introducen un concepto ligeramente distinto, el de *relleno simpléctico conforme* que, hasta donde el autor tiene conocimiento, no se encuentra en la literatura. Éste permite reenunciar los resultados del apartado 4.3 de manera compacta, obteniendo el teorema 4.10, un resultado que, de nuevo de acuerdo con el conocimiento actual del autor, tampoco se encuentra en la literatura.

En futuros trabajos se podría abordar diversas materias relacionadas con estos resultados, como por ejemplo:

- i) Dar una interpretación física a la forma simpléctica  $\omega$ , a la 2-forma  $\tilde{\omega}$  y a la estructura de contacto  $\overline{H}$ .
- ii) Construir los espacios de geodésicas  $\mathcal{M}$ ,  $\mathcal{N}$  y  $\mathcal{C}$ , así como sus estructuras adicionales, para el caso de modelos de espaciotiempos concretos empleados en Relatividad General Matemática. De especial interés podrían ser el espacio de Minkowski, el de Sitter y el anti-de Sitter, que proporcionan modelos de espaciotiempo de curvatura constante cero, positiva y negativa, respectivamente.
- iii) Estudiar la relación entre el concepto de relleno simpléctico conforme y los distintos tipos de relleno simpléctico dados en la literatura.
- iv) Profundizar en el análisis de la relación entre la estructura de contacto y el *cielo* de un observador (Bautista *et al.*, 2015a).

Algunos de estos aspectos ya están siendo estudiados lo que, previsiblemente, podría dar lugar a la publicación de un artículo de investigación.



## Bibliografía

- [1] V. I. Arnold. *Mathematical methods of classical mechanics*. Graduate texts in mathematics. Springer, 1997.
- [2] A. Bautista. «Geometric structures and causality in the space of light rays of a spacetime». PhD. Universidad Complutense de Madrid, 2016.
- [3] A. Bautista, A. Ibort y J. Lafuente. «Causality and skies: is non-refocussing necessary?» En: *Classical and Quantum Gravity* (2015).
- [4] A. Bautista, A. Ibort y J. Lafuente. «On the space of light rays of a space-time and a reconstruction theorem by Low». En: *Classical and Quantum Gravity* (2014).
- [5] A. Bautista, A. Ibort y J. Lafuente. *The Contact Structure in the Space of Light Rays*. 2015.
- [6] J. K. Beem, R. J. Low y P. E. Parker. «Spaces of geodesics: products, coverings, connectedness». En: *Geometriae Dedicata* (1996).
- [7] J. K. Beem y P. E. Parker. «Pseudoconvexity and general relativity». En: *Journal of Geometry and Physics* (1987).
- [8] F. Brickell y R. S. Clark. *Differentiable manifolds*. Van Nostrand Reinhold, 1970.
- [9] A. M. Candela y M. Sánchez. *Geodesics in semi-Riemannian Manifolds: Geometric Properties and Variational Tools*. 2010.
- [10] A. Cannas da Silva. *Lectures on symplectic geometry*. Springer, 2001.
- [11] J. F. Cariñena y C. López. «Symplectic structure on the set of geodesics of a riemannian manifold». En: *International Journal of Modern Physics* (1991).
- [12] M. Castrillón y V. Muñoz. *Bundles*. Curso de Doctorado. Universidad Complutense de Madrid, 2010.
- [13] Y. Eliashberg. «On symplectic manifolds with some contact properties». En: *Journal of Differential Geometry* (1991).
- [14] N. Espinosa Ruiz. «Estructuras geométricas en espacios de rayos de luz». Trabajo Fin de Máster. Universidad Complutense de Madrid, 2022.
- [15] H. Geiges. *An Introduction to Contact Topology*. Cambridge University Press, 2008.
- [16] J. Gómez Zaragoza. «Estructuras geométricas en espacios de geodésicas». Trabajo Fin de Máster. Universidad Complutense de Madrid, 2020.
- [17] J. Hedicke *et al.* «Causal simplicity and (maximal) null pseudoconvexity». En: *Classical and Quantum Gravity* (2021).
- [18] B. Janssen. *Teoría de la Relatividad General*. Universidad de Granada, España, 2020.
- [19] M. Á. Javaloyes V. y M. Sánchez. *An introduction to Lorentzian geometry and its applications*. São Carlos: RiMa, 2010.
- [20] S. Kobayashi y K. Nomizu. *Foundations of Differential Geometry. Vol. 1*. Wiley Classics Library. Wiley, 1963.
- [21] J. Lafuente. «Variedades diferenciables». Universidad Complutense de Madrid, 2013.
- [22] J. M. Lee. *Introduction to Riemannian Manifolds*. Springer, 2018.
- [23] J. M. Lee. *Introduction to Smooth Manifolds*. Springer, 2012.

- 
- [24] R. J. Low. «Spaces of causal paths and naked singularities». En: *Classical and Quantum Gravity* (1990).
  - [25] R. J. Low. «The geometry of the space of null geodesics». En: *Journal of Mathematical Physics* (1989).
  - [26] R. J. Low. «The Space of Null Geodesics (and a New Causal Boundary)». En: *Analytical and Numerical Approaches to Mathematical Relativity*. Lecture Notes in Physics. Berlin, Heidelberg: Springer, 2006.
  - [27] K. B. Marathe. «A condition for paracompactness of a manifold». En: *Journal of Differential Geometry* (1972).
  - [28] P. Massot, K. Niederkrüger y C. Wendl. «Weak and strong fillability of higher dimensional contact manifolds». En: *Inventiones mathematicae* (2013).
  - [29] D. McDuff. «Symplectic manifolds with contact type boundaries». En: *Inventiones mathematicae* (1991).
  - [30] E. Minguzzi y M. Sánchez. «The causal hierarchy of spacetimes». En: *Recent Developments in Pseudo-Riemannian Geometry*. EMS Press, 2008.
  - [31] B. O'Neill. *Semi-Riemannian geometry with applications to relativity*. Academic Press, 1983.
  - [32] R. S. Palais. *A global formulation of the Lie theory of transportation groups*. American Mathematical Society, 1957.
  - [33] M. Sánchez Caja y J. L. Flores Dorado. *Introducción a la Geometría Diferencial de Variedades*. Editorial Académica Española, 2012.
  - [34] F. Warner. *Foundations of differentiable manifolds and Lie groups*. Springer, 1983.