Facultad de Ciencias
MATEMÁTICAS

Carla Benítez García

Geodésicas en variedades semi-riemannianas con cambio transversal de signatura

Geodesics on semi-riemannian manifolds with transverse type changing metrics

Trabajo Fin de Máster
Universidad Complutense de Madrid
Máster en Matemáticas Avanzadas
Madrid, Septiembre de 2024

Dirigido por
Marco Castrillón López
Javier Lafuente López

Marco Castrillón López
Departamento de Álgebra,
Geometría y Topología
Universidad Complutense de
Madrid
28040, Madrid

Javier Lafuente López
Departamento de Álgebra,
Geometría y Topología
Universidad Complutense de
Madrid
28040, Madrid

Agradecimientos

Me gustaría agradecer a mis tutores, Javier y Marco, por confiar en mí para llevar a cabo este trabajo. Su dedicación y esfuerzo en cada etapa del desarrollo han sido fundamentales, despertando siempre mi ilusión por la geometría. A todos mis compañeros, por haber formado juntos nuestra pequeña *familia matemática*, por compartir su pasión conmigo y por haberme hecho sentir como en casa aún estando a kilómetros de distancia. A mis amigos, por estar siempre presentes y acompañarme en cada paso de este camino. A Diego, por haber sido mi pilar fundamental durante todo el proceso y por creer en mí de manera incondicional. Y, por último, a mi familia, por darme siempre la oportunidad de perseguir mis objetivos y por no dudar jamás de mí.

Carla Benítez García
Madrid, 2 de septiembre de 2024

Resumen · Abstract

Resumen

Un tensor métrico g de tipo $(0,2)$ en una variedad diferenciable M se dice que cambia transversalmente de signatura, si en torno a cada punto donde es degenerada, existe un sistema de coordenadas que verifica que la diferencial de la función $\det(g_{ij})$ en el punto no se anula. Esta condición implica que el conjunto Σ en donde g es degenerada es una hipersuperficie, la signatura cambia en una unidad al atravesarla y se pide que el radical unidimensional en cada punto $p \in \Sigma$ sea siempre transverso a Σ. El objetivo de esta memoria es estudiar las líneas geodésicas que atraviesan Σ. Basado en el trabajo de Kossowski y Kriele [3] quienes prueban que, bajo estas condiciones, por cada punto de Σ atraviesa una única pregeodésica en la dirección del radical y determinan las otras direcciones en las que existen geodésicas que atraviesen la hipersuperficie.

Palabras clave: *Tensor métrico – Signatura – Hipersuperficie – Radical – Transverso – Geodésica*

Abstract

A tensor field g of type $(0,2)$ on a smooth manifold M is a transverse type changing metric, if around each point where it is degenerate, there exists a coordinate system such that the function $\det(g_{ij})$ has non-zero differential at the point. This condition implies that the set Σ, where g is degenerate, is a hypersurface, the signature changes by one unit upon crossing it, and the one-dimensional radical at each point $p \in \Sigma$ is always required to be transverse to Σ. The aim of this work is to study the geodesic lines that cross Σ. Based on the article of Kossowski and Kriele [3], who proved that, under these conditions, through each point of Σ crosses a unique pregeodesic in the direction of the radical, and they determine the other directions in which there are geodesics crossing the hypersurface.

Keywords: *Tensor field – Signature – Hypersurface – Radical – Transverse – Geodesic*

Contenido

Introducción

La *geometría semi-riemanniana* es una extensión de la geometría riemanniana que permite la existencia de métricas no definidas positivas. Esta rama de la geometría diferencial se ocupa de estudiar las propiedades y estructuras de variedades diferenciales dotadas de un tensor métrico, que se conocen como *variedades semi-riemannianas*.

Las *geodésicas* son curvas que hacen crítica la longitud del camino entre dos puntos en una variedad, generalizando la noción euclídea de línea recta. En la geometría semi-riemanniana, las geodésicas se definen como curvas con aceleración cero. Estas cobran especial importancia para comprender la estructura de los espacios curvos y describir el movimiento de partículas en estos espacios, lo que tiene aplicaciones directas en la física, especialmente en la relatividad general.

El propósito de esta memoria es estudiar las geodésicas de una variedad M dotada de un tensor simétrico g de tipo $(0, 2)$. Existe la posibilidad de que dicho tensor g sea degenerado, así un punto $x \in M$ se dice *singular* si g_x es degenerada y denotamos por Σ al conjunto de todos los puntos singulares. De esta manera, g induce sobre cada componente conexa de $M \setminus \Sigma$ una métrica semi-riemanniana. Por otro lado, se dice que g es de *tipo transverso* si en torno a cada punto singular existe un sistema local de coordenadas (x^i) verificando que la diferencial de la función $\det(g_{ij})$ es no nula en dicho punto, donde $g = g_{ij} dx^i \otimes dx^j$ es la expresión local de g. Además, esta propiedad es independiente del sistema de coordenadas tomado.

Como consecuencia, se deduce que si g es de tipo transverso, entonces Σ es una hipersuperficie y se dice que M es un *Σ-espacio*. Bajo estas condiciones se obtienen dos resultados fundamentales: la signatura cambia en una unidad al atravesar Σ y para cada punto $p \in \Sigma$ el subespacio radical Rad_p es unidimensional. Asimismo, se exigirá que dicho radical sea siempre transverso a la hipersuperficie Σ.

A partir de aquí, como resultado del estudio de las líneas geodésicas en M como Σ-espacio, surge de manera natural la siguiente cuestión:

¿Existen líneas geodésicas en M que atraviesen la hipersuperficie Σ?

Marek Kossowski y *Marcus Kriele* respondieron dicha pregunta en 1994 en su artículo *"Transverse, type changing, pseudo riemannian metrics and the extendability of geodesics"*, que hace uso de teoremas de variedades estables en sistemas dinámicos (véase [3]). Esta memoria está basada en este trabajo y tiene como principal objetivo dar respuesta a esa pregunta.

Para resolver el problema se estudian por separado las líneas geodésicas que atraviesan Σ en la dirección del radical y aquellas que atraviesan la hipersuperficie en otra dirección transversal. Además, es importante resaltar que ha sido necesaria la construcción de una determinada base móvil para resolver un detalle incorrecto en el *Teorema 1* de [3]. De esta manera, se obtienen los dos teoremas esenciales del trabajo. El primero de ellos nos dice que la existencia de geodésicas transversales que atraviesen Σ viene determinada por el valor de un tensor $\mathbb{I}$, en concreto, existirá una geodésica transversal a la hipersuperficie Σ en $p \in \Sigma$ si dicho tensor $\mathbb{I}_p$ se anula. Por otro lado, para todo punto $p \in \Sigma$ existe una pregeodésica que atraviesa Σ en dicho punto en la dirección radical.

1

Preliminares

En este capítulo, recordaremos toda la teoría de variedades diferenciables y sistemas dinámicos necesaria e introduciremos la geometría semi-riemanniana en la que se basa este trabajo (para más detalles, véase [5]).

1.1. Variedades diferenciables

Intuitivamente, sabemos que una *variedad diferenciable* M es un espacio topológico que localmente es equivalente a $\mathbb{R}^m$. Formalmente, es una variedad topológica de dimensión m dotada de un atlas completo $\mathcal{A}$.

Sea M una variedad diferenciable de dimensión m, recordamos que se definen los vectores tangentes como operadores que actúan (como derivadas direccionales) en el anillo de funciones $\mathfrak{F}(M) = \{f : M \to \mathbb{R} \mid f \text{ diferenciable}\}$.

Definición 1.1. *Sea $x \in M$, un vector tangente a M en x es una función real $v : \mathfrak{F}(M) \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que para todo $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ y $f, g \in \mathfrak{F}(M)$ cumple:*

- $v(\lambda f + \mu g) = \lambda v(f) + \mu v(g)$,
- $v(fg) = v(f)g(p) + f(p)v(g)$.

El *espacio tangente* a M en $x \in M$ es el espacio vectorial

$$T_xM = \{v : \mathfrak{F}(M) \longrightarrow \mathbb{R} \mid v \text{ es vector tangente a } M \text{ en } x\}.$$

Las operaciones del espacio vectorial sobre T_xM son las inducidas por la suma de funciones reales y el producto por un número real de este tipo de funciones.

Sea $(U, \varphi \equiv (x^1, \ldots, x^m))$ una carta en M tal que $x \in U$, definimos para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$ los siguientes vectores tangentes a M en x

$$\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_x : \mathfrak{F}(M) \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_x (f) = \left.\frac{\partial(f \circ \varphi^{-1})}{\partial r^i}\right|_{\varphi(x)},$$

para todo $f \in \mathfrak{F}(M)$, donde $r^1, \dots, r^m$ son las funciones coordenadas naturales de $\mathbb{R}^m$. Estos vectores determinan la base canónica

$$\left\{ \left. \frac{\partial}{\partial x^1} \right|_x, \dots, \left. \frac{\partial}{\partial x^m} \right|_x \right\}$$

de T_xM asociada a la carta (U, φ), es decir, para todo $x \in M$ la dimensión del espacio tangente T_xM coincide con la dimensión de M. Además, para todo $v \in T_xM$ se verifica que

$$v = \sum_{i=1}^{m} v(x^i) \left. \frac{\partial}{\partial x^i} \right|_x .$$

Sean ahora M y N dos variedades diferenciables, $f : M \longrightarrow N$ una aplicación diferenciable y $x \in M$. Entonces, f induce una aplicación lineal $df_x : T_pM \longrightarrow T_{f(x)}N$ entre los correspondientes espacios tangentes, definida por

$$[(df_x)(v)](h) = v(h \circ f)$$

para todo $v \in T_xM$ y $h \in \mathfrak{F}(N)$. La aplicación df_x se denomina la diferencial de f en x.

Por otro lado, el *espacio cotangente* T_x^*M en el punto x de la variedad M es el espacio vectorial dual de T_xM, esto es,

$$T_x^*M = \{\alpha_x : T_xM \longrightarrow \mathbb{R} \mid \alpha_x \text{ es lineal}\}.$$

En lo que sigue, veremos que los espacios tangente y cotangente nos permiten definir los campos de vectores y las 1-formas, respectivamente.

Definición 1.2. *Un campo de vectores V en una variedad diferenciable M es una aplicación que asigna a cada punto $x \in M$ un vector apoyado en él, es decir, $V(x) := V_x \in T_xM$ para todo $x \in M$.*

Si V es un campo vectorial en M y $f \in \mathfrak{F}(M)$, entonces $V(f)$ denota la función real en M tal que para todo $x \in M$ viene dada por,

$$V(f)(x) = V_x(f).$$

De esta manera, un campo de vectores V es diferenciable si $V(f)$ es diferenciable para todo $f \in \mathfrak{F}(M)$.

Al conjunto de todos los campos de vectores en M se le denota por $\mathfrak{X}(M)$. En particular, $\mathfrak{X}(M)$ es un $\mathfrak{F}(M)-$módulo con las operaciones $(fV)(x) = f(x)V(x)$ y $(V + W)(x) = V(x) + W(x)$, para todo $f \in \mathfrak{F}(M)$ y $V, W \in \mathfrak{X}(M)$.

En concreto, si $(U, \varphi \equiv (x^1, \dots, x^m))$ es una carta en M, entonces para todo $i \in \{1, \dots, m\}$, el campo de vectores $\frac{\partial}{\partial x^i}$ en U que envía a cada $x \in U$ en

$\frac{\partial}{\partial x^i}\big|_x$ es el i-ésimo campo vectorial coordenado de φ y se sigue que para cada campo vectorial V,

$$V = \sum_{i=1}^{m} V(x^i) \frac{\partial}{\partial x^i}.$$

Ahora, podemos introducir las 1-formas, que no son más que los objetos duales de los campos de vectores.

Definición 1.3. *Una $1-$forma θ en una variedad M es una función que asigna en cada punto x un elemento $\theta(x) := \theta_x$ del espacio cotangente T_x^*M.*

Si θ es una 1-forma en M y $V \in \mathfrak{X}(M)$, se denota por $\theta(V)$ a la función real en M tal que para todo $x \in M$ queda determinada por,

$$\theta(V)(x) = \theta_p(V_x).$$

Luego, de forma análoga a $\mathfrak{X}(M)$, el conjunto $\mathfrak{X}^*(M)$ de todas las $1-$formas en M es un $\mathfrak{F}(M)$-módulo.

Definición 1.4. *La diferencial de $f \in \mathfrak{F}(M)$ es la 1-forma df tal que, para todo vector tangente v en M, se cumple que $(df)(v) = v(f)$.*

Dada $(U, \varphi \equiv (x^1, \ldots, x^m))$ una carta en M, entonces tenemos las 1-formas $\{dx^1, \ldots, dx^m\}$ en U, que en cada punto $x \in U$ forman la base dual de $\left\{ \frac{\partial}{\partial x^1}\big|_x, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^m}\big|_x \right\}$, esto es,

$$dx^i\big|_x \left(\frac{\partial}{\partial x^j}\bigg|_x \right) = \delta^{ij}.$$

Además, se sigue que toda 1-forma θ viene dada por,

$$\theta = \sum_{i=1}^{m} \theta\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right) dx^i.$$

A continuación, presentaremos el fibrado tangente de una variedad y recordaremos su estructura diferenciable.

Definición 1.5. *Sea M una variedad diferenciable de dimensión m, se define el fibrado tangente de M como la unión de todos los espacios tangentes a M y se denota TM, esto es,*

$$TM = \bigcup_{x \in M} T_x M.$$

De esta manera, la aplicación $\pi : TM \longrightarrow M$, dada por $\pi(v) = x$ si $v \in T_xM$, se denomina *proyección canónica.*

Además, sobre el fibrado tangente TM se puede definir una estructura diferenciable de dimensión $2m$. En efecto, sea $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha \equiv (x_\alpha^1, \dots, x_\alpha^m))\}_{\alpha\in A}$ un atlas de M. Consideramos los abiertos $\widetilde{U_\alpha} = \pi^{-1}(U_\alpha) \subseteq TM$ y las aplicaciones $\widetilde{\varphi_\alpha} : \pi^{-1}(U_\alpha) \longrightarrow \varphi_\alpha(U_\alpha) \times \mathbb{R}^m \subseteq \mathbb{R}^{2m}$ dadas por

$$\widetilde{\varphi_\alpha}(v) = \big(\varphi_\alpha(\pi(v)), dx_\alpha^1|_{\pi(v)}(v), \dots, dx_\alpha^m|_{\pi(v)}(v)\big)\,.$$

Dicho de otro modo, si $v \in TM$ está dado por

$$v = \sum_{i=1}^m v_\alpha^i \left.\frac{\partial}{\partial x_\alpha^i}\right|_{\pi(v)},$$

entonces, $\widetilde{\varphi_\alpha}(v) = (\varphi_\alpha(\pi(v)), v_\alpha^1, \dots, v_\alpha^m)$.

Así, $\{(\widetilde{U_\alpha}, \widetilde{\varphi_\alpha})\}_{\alpha\in A}$ es un atlas de TM. Denotando $dx_\alpha^i := \dot{x}_\alpha^i$ las coordenadas $(x_\alpha^1, \dots, x_\alpha^m, \dot{x}_\alpha^1, \dots, \dot{x}_\alpha^m)$ se denominan las *coordenadas naturales* en TM.

Por otro lado, se define una *base móvil* de M como un conjunto de m campos vectoriales $\{e_1, \dots, e_m\}$, tales que para cada punto $x \in M$, el conjunto $\{e_1(x), \dots, e_m(x)\}$ es una base del espacio tangente T_xM.

De esta manera, si para cada $x \in M$ tomamos un sistema local de coordenadas $(U, \varphi \equiv (x^1, \dots, x^m))$ con $x \in U$ y sea $\{e_1, \dots, e_m\}$ una base móvil de M, tal que para todo $v \in T_xM$ se tiene que

$$v = \sum_{a=1}^m u^a(v) e_a(x).$$

Entonces, surgen las coordenadas inducidas $\{x^1, \dots, x^m, u^1, \dots, u^m\}$ en el fibrado tangente TM, que llamaremos *coordenadas mixtas.*

Por último, recordaremos que a partir de los conjuntos $\mathfrak{X}(M)$ y $\mathfrak{X}^*(M)$ se definen los campos tensoriales en una variedad.

Definición 1.6. *Dados $r, s \geq 0$ dos enteros, un campo tensorial A en una variedad diferenciable M de tipo (r, s) sobre $\mathfrak{X}(M)$ es una función $\mathfrak{F}(M)$-multilineal $A : \mathfrak{X}^*(M)^r \times \mathfrak{X}(M)^s \longrightarrow \mathfrak{F}(M)$.*

Al conjunto de todos los campos tensoriales de tipo (r, s) sobre M se le denota por $\mathcal{I}_s^r(M)$, que es un $\mathfrak{F}(M)$-módulo. En particular, los tensores de tipo $(0, s)$ se llaman *covariantes* y los de tipo $(r, 0)$, $r \geq 1$, se llaman *contravariantes.*

Mientras que solo se pueden sumar tensores del mismo tipo, cualquier par de tensores pueden ser multiplicados de la siguiente manera.

Definición 1.7. *Sean* $A \in \mathcal{A}^r_s(M)$ *y* $B \in \mathcal{I}^{r'}_{s'}(M)$*, se define el producto tensorial de* A *y* B *como la aplicación* $A \otimes B : \mathfrak{X}^*(M)^{r+r'} \times \mathfrak{X}(M)^{s+s'} \longrightarrow \mathfrak{F}(M)$ *dada por,*

$$\begin{aligned}(A \otimes B)(\theta^1, \dots, \theta^{r+r'}, X_1, \dots, X_{s+s'}) =& \\ =& A(\theta^1, \dots, \theta^r, X_1, \dots, X_s) B(\theta^1, \dots, \theta^{r'}, X_1, \dots, X_{s'}).\end{aligned}$$

Nótese que $A \otimes B$ es un campo tensorial de tipo $(r + r', s + s')$.

1.2. Sistemas dinámicos

Una *curva* en una variedad diferenciable M es una aplicación diferenciable $\gamma : I \longrightarrow M$, donde I es un intervalo abierto de $\mathbb{R}$. Como subvariedad de $\mathbb{R}$, I tiene un sistema coordenado formado por la aplicación identidad u en I.

Definición 1.8. *Dada* $\gamma : I \longrightarrow M$ *una curva, el vector velocidad de* γ *en* $t \in I$ *es*

$$\gamma'(t) = d\gamma \left(\left. \frac{d}{du} \right|_t \right) \in T_{\gamma(t)}M.$$

En concreto, sea $(U, (x^1, \dots, x^m))$ una carta en M con $\gamma(t) \in U$, la expresión coordenada de $\gamma'(t)$ viene dada por,

$$\gamma'(t) = \sum_{i=1}^m \left. \frac{d(x^i \circ \gamma)}{du} \right|_t \left. \frac{\partial}{\partial x^i} \right|_{\gamma(t)}.$$

Definición 1.9. *Una curva* $\gamma : I \longrightarrow M$ *es una curva integral de* $V \in \mathfrak{X}(M)$ *si para todo* $t \in I$ *se verifica que,*

$$\gamma'(t) = V(\gamma(t)).$$

También, se define una *línea integral* de un campo $V \in \mathfrak{X}(M)$ como una subvariedad L de M de dimensión 1 tal que para todo $x \in L$ con $V(x) \neq 0$, existe un entorno abierto L_0 de L con $x \in L_0$ y $L_0 = \operatorname{im} \gamma$, siendo γ una curva integral de V.

Como consecuencia de escribir la condición anterior en coordenadas y por el teorema de existencia y unicidad de soluciones de sistemas de ecuaciones diferenciales de primer orden, se deduce el siguiente resultado.

Proposición 1.10. *Si* $V \in \mathfrak{X}(M)$*, entonces para todo punto* $x \in M$ *existe un intervalo* I *alrededor del* $0 \in \mathbb{R}$ *y una única curva integral* $\gamma : I \longrightarrow M$ *de* V *tal que* $\gamma(0) = x$.

Nótese que si γ es una curva integral de V, entonces $t \to \gamma(t+c)$ también lo es.

Corolario 1.11. *Si $\gamma, \beta : I \longrightarrow M$ son curvas integrales de V tal que $\gamma(a) = \beta(a)$ para algún $a \in I$, entonces $\gamma = \beta$.*

Además, se tiene el siguiente resultado que será de gran utilidad.

Lema 1.12. *Sea $\gamma : I \longrightarrow M$ una curva integral de un campo $V \in \mathfrak{X}(M)$ y $\widetilde{V} = fV$ con $f \in \mathfrak{F}(M)$ y $f(x) \neq 0$ para todo $x \in M$. Entonces, las curvas integrales de los campos de vectores V y V' son las mismas salvo reparametrización, esto es, que tienen las mismas líneas integrables.*

Demostración. Sea $\gamma(t)$ una curva integral del campo de vectores V, sabemos que $\gamma'(t) = V(\gamma(t))$. Queremos encontrar una reparametrización $t = t(s)$ tal que $\widetilde{\gamma}(s) = \gamma(t(s))$ sea curva integral del campo $\widetilde{V} = fV$, esto es,

$$\widetilde{\gamma}'(s) = \widetilde{V}(\widetilde{\gamma}(s)) = f(\widetilde{\gamma}(s))V(\widetilde{\gamma}(s)). \tag{1.1}$$

Pero, tenemos que,

$$\widetilde{\gamma}'(s) = \gamma'(t(s))\frac{dt}{ds} = V(\gamma(t(s)))\frac{dt}{ds} = V(\widetilde{\gamma}(s))\frac{dt}{ds}.$$

Luego, para que se cumple (1.1) basta tomar

$$t(s) = \int_0^s f(\widetilde{\gamma}(s))ds.$$

□

Sea $x \in M$ y $V \in \mathfrak{X}(M)$, consideramos la colección de curvas integrales $\gamma : I_\gamma \longrightarrow M$ de V tales que $0 \in I_\gamma$ y $\gamma(0) = x$. Entonces, el Corolario 1.11 nos dice que $\gamma = \beta$ en $I_\gamma \cap I_\beta$. Luego, podemos considerar $\gamma_x : I_x \longrightarrow M$ curva integral de V con $0 \in I_x$ y $\gamma_x(0) = x$, donde

$$I_x = \bigcup_\gamma I_\gamma.$$

La curva γ_x se llama la *curva integral maximal* de V por x.

Definición 1.13. *Un campo de vectores $V \in \mathfrak{X}(M)$ se dice completo si la curva integral maximal de V que pasa por un punto cualquiera de M está definida en toda la recta real.*

A continuación, veremos como podemos representar todas las curvas integrales de un campo vectorial completo dado en una única aplicación.

Definición 1.14. *El flujo de un campo vectorial completo V en M es la aplicación $\psi : M \times \mathbb{R} \longrightarrow M$ dada por*

$$\psi(x,t) = \gamma_x(t), \tag{1.2}$$

donde γ_x es la curva integral maximal que comienza en x.

Por un lado, si $x \in M$ se mantiene constante, entonces $\psi(x,t) = \psi_x(t)$ es la curva integral γ_x. Por otro lado, si $t \in \mathbb{R}$ es constante, entonces obtenemos una función $\psi_t : M \to M$.

Proposición 1.15. *Si ψ es el flujo de un campo vectorial completo, entonces:*

- *$\psi_0(x)$ es la aplicación identidad en M.*
- *$\psi_s \circ \psi_t = \psi_{s+t}$ para todo $s,t \in \mathbb{R}$.*
- *Para todo $t \in \mathbb{R}$, ψ_t es un difeomorfismo con $\psi_t^{-1} = \psi_{-t}$.*

Sin embargo, en el caso de que el campo vectorial V no sea completo podemos definir $\psi : U \times I \longrightarrow M$ un *flujo local* en V, dado también por la ecuación (1.2), donde U es un entorno de x en M e I un intervalo alrededor del 0 en $\mathbb{R}$. Como consecuencia de la teoría de ecuaciones diferenciales, se tiene que si U, I son suficientemente pequeños, entonces ψ es diferenciable.

Además, el siguiente resultado es análogo a la Proposición 1.15, pero para flujos locales.

Proposición 1.16. *Si $\psi : U \times I \longrightarrow M$ es el flujo local de un campo vectorial, entonces:*

- *$\psi_0(x)$ es la aplicación identidad en U.*
- *$\psi_s \circ \psi_t = \psi_{s+t}$ para todo $s,t \in I$, siempre que $s+t \in I$.*
- *Para todo $t \in I$, $\psi_t : U \longrightarrow \psi_t(U)$ es un difeomorfismo.*

Sea $V \in \mathfrak{X}(M)$ y $\psi : U \times I \longrightarrow M$ el flujo local de V, si para todo $t \in I$ y $x \in U$ se tiene que

$$d\psi_t(x)V(x) = V(\psi_t(x)),$$

entonces se dice que el campo V es invariante por su flujo.

Sea $V \in \mathfrak{X}(M)$ un campo de vectores dado por $V = \sum_i V^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ tal que $V(x_0) = 0$, para cierto $x_0 \in M$, es decir, x_0 es un *punto singular* de V. Se define la *linealización* de V en x_0 como la aplicación $DV|_{x_0} : T_{x_0}M \longrightarrow T_{x_0}M$ dada por,

$$DV|_{x_0}\left(\left.\frac{\partial}{\partial x^j}\right|_{x_0}\right) = \left(\left.\frac{\partial V^i}{\partial x^j}\right|_{x_0}\right)\left(\left.\frac{\partial}{\partial x^j}\right|_{x_0}\right), \quad \forall j \in \{1,\dots,m\}.$$

Además, la linealización de V en x_0 puede definirse de forma intrínseca como

$$DV|_{x_0}(\xi) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \left(d\psi_t|_{x_0}(\xi)\right),$$

para todo $\xi \in T_{x_0}M$, donde ψ es el flujo local de V (véase [1]).

En particular, sea $\xi = \xi^j \frac{\partial}{\partial x^j} \in T_{x_0}M$ se tiene que,

$$\begin{aligned} DV|_{x_0}(\xi) &= \left(\left.\frac{\partial V^i}{\partial x^j}\right|_{x_0}\right)\left(\xi^j \left.\frac{\partial}{\partial x^j}\right|_{x_0}\right) = \left(\left.\frac{\partial V^i}{\partial x^j}\right|_{x_0} \xi^j\right) \left.\frac{\partial}{\partial x^j}\right|_{x_0} = \\ &= \left(\left.\frac{\partial V^i}{\partial x^j}\right|_{x_0} dx^j(\xi)\right) \left.\frac{\partial}{\partial x^j}\right|_{x_0} = dV^i|_{x_0}(\xi) \left.\frac{\partial}{\partial x^j}\right|_{x_0} = \\ &= \left.\left(dV^i \otimes \frac{\partial}{\partial x^j}\right)\right|_{x_0}(\xi). \end{aligned}$$

Por tanto, concluimos que,

$$DV|_{x_0} = \left.\left(dV^i \otimes \frac{\partial}{\partial x^j}\right)\right|_{x_0} = \left(\left.\frac{\partial V^i}{\partial x^j}\right|_{x_0} dx^j\right) \otimes \left.\frac{\partial}{\partial x^j}\right|_{x_0}.$$

A continuación, introducimos el siguiente teorema que posteriormente tendrá especial importancia.

Teorema 1.17. *Sean $V \in \mathfrak{X}(M)$, $x \in M$ un punto singular, esto es, $V(x) = 0$, y N^+ y N^- los subespacios vectoriales generados por los autovectores correspondientes a los autovalores positivos y negativos, respectivamente, de la linealización diagonalizable $DV|_x$. Entonces, existen subvariedades W^+ y W^- invariantes por el flujo de V con $p \in W^+ \cap W^-$. Además,*

$$T_pW^+ = N^+ \quad y \quad T_pW^- = N^-.$$

Demostración. Véase el *Teorema 5.8* de [4].

1.3. Geometría Semi-Riemanniana

En esta sección presentaremos la geometría semi-riemanniana. Esta rama de las matemáticas es una extensión de la geometría riemanniana que se ocupa del estudio de variedades diferenciables dotadas de una métrica no necesariamente positiva definida. Este tipo de geometría es crucial en la física teórica, especialmente en la teoría de la relatividad general.

1.3.1. Variedades Semi-Riemannianas

Veremos que la geometría semi-riemanniana involucra un tipo particular de $(0,2)-$tensor en espacios tangentes. En general, sea V un espacio vectorial de dimensión n y $b : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ una forma bilineal en V y simétrica, es decir, $b(v,w) = b(w,v)$ para todos $v, w \in V$.

Definición 1.18. *Una forma bilineal simétrica b en V es:*

- *Definida positiva (negativa) si para $v \neq 0$, entonces $b(v,v) > 0$ $(b(v,v) < 0)$.*
- *Semidefinida positiva (negativa) si $b(v,v) \geq 0$ $(b(v,v) \leq 0)$ para todo $v \in V$.*
- *No degenerada si se verifica que si $b(v,w) = 0$ para todo $w \in V$, entonces $v = 0$.*

Así, podemos definir el índice de una forma bilineal simétrica.

Definición 1.19. *El índice ν de una forma bilineal simétrica b en V es el mayor entero que sea la dimensión de un subespacio $W \subset V$ en el que $b_{|W}$ es definida negativa.*

De este modo, $0 \leq \nu \leq n$ y $\nu = 0$, si y sólo si, b es semidefinida positiva.

Por otro lado, si consideramos $\{e_1, \ldots, e_n\}$ una base de V, la matriz $(b_{ij})_{n\times n} = b(e_i, e_j)$ se la llama la matriz de b relativa a $\{e_1, \ldots, e_n\}$. Además, como b es simétrica es claro que la matriz (b_{ij}) también lo es. En particular, esta matriz nos permite caracterizar la no degeneración de b.

Proposición 1.20. *Una forma bilineal simétrica es no degenerada, si y sólo si, su matriz relativa a una base (por ende a cualquiera) es invertible.*

De este modo, una forma bilineal g simétrica y no degenerada en un espacio vectorial V se llama un producto escalar.

Así, diremos que dos vectores $v, w \in V$ son ortogonales si $g(v,w) = 0$ y que un vector $u \in V$ es unitario si su norma $|g(u,u)|^{1/2}$, es 1, es decir, $g(u,u) = \pm 1$.

Por tanto, como es usual, un conjunto de vectores unitarios ortogonales dos a dos se dicen ortonormales, y para $n = \dim V$, cualquier conjunto de n vectores ortonormales en V es necesariamente una base de V. Además, sabemos que todo espacio $V \neq 0$ dotado de un producto escalar tiene una base ortonormal.

En consecuencia, la matriz de g relativa a una base ortonormal $\{e_1, \ldots, e_n\}$ de V es diagonal. De hecho,

$$g(e_i, e_j) = \delta_{ij}\varepsilon_j \quad \text{donde} \quad \varepsilon_j = g(e_j, e_j) = \pm 1.$$

Definición 1.21. *La signatura de g se define como $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$ donde los vectores de la base ortonormal se reordenan convenientemente para que los signos negativos (si los hay) queden primero.*

Normalmente, se refiere al índice ν del producto escalar g de V como el índice de V y se escribe $\nu = \operatorname{Ind} V$. De hecho, la signatura de g viene caracterizada por su índice.

Proposición 1.22. *Para cualquier base ortonormal $\{e_1, \ldots, e_n\}$ de V el número de signos negativos en la signatura $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$ de g es el índice ν de V.*

Ahora, estamos en condiciones de introducir las definiciones necesarias para presentar las variedades semi-riemannianas.

Definición 1.23. *Un tensor métrico g en una variedad diferenciable M de dimensión m es un $(0,2)-$tensor simétrico y no degenerado de índice constante.*

En otras palabras, un tensor métrico $g \in \mathcal{I}_2^0(M)$ que asigna diferenciablemente a cada punto $x \in M$ un producto escalar $g_x : T_xM \times T_xM \longrightarrow \mathbb{R}$ y el índice de g_x es el mismo para todo $x \in M$.

Definición 1.24. *Una variedad semi-riemanniana es una variedad diferenciable M dotada de un tensor métrico g.*

En realidad, una variedad semi-riemanniana es un par ordenado (M, g) de manera que dos tensores métricos en la misma variedad determinan diferentes variedades semi-riemannianas. No obstante, la denotaremos simplemente como la variedad diferenciable M.

Dada una variedad semi-riemanniana (M, g) de dimensión m, se llama índice de M al valor ν del índice constante de g con $0 \leq \nu \leq m$. En particular, si $\nu = 0$ decimos que M es una *variedad riemanniana*, mientras que si $\nu = 1$ y $m \geq 2$ decimos que M es una *variedad lorentziana*.

Sea $(U, \varphi \equiv (x^1, \ldots, x^m))$ una carta en M, entonces las componentes del tensor métrico en U son,

$$g_{ij} = g\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right), \quad 1 \leq i, j \leq m.$$

De esta forma, para dos campos vectoriales $V = \sum V^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ y $W = \sum W^j \frac{\partial}{\partial x^j}$ se tiene que

$$g(V, W) = \sum g_{ij} V^i W^j. \tag{1.3}$$

Como g es no degenerado, sabemos que para todo $x \in U$ la matriz $(g_{ij}(x))$ es invertible, cuya matriz inversa denotaremos por $(g^{ij}(x))$. Como consecuencia de los cálculos de los términos de la matriz inversa se sigue que las funciones g^{ij} son diferenciables en U. Además, debido a la simetría de g tenemos que $g_{ij} = g_{ji}$ y por tanto, $g^{ij} = g^{ji}$ para todos $1 \leq i, j \leq m$. Por último, el tensor métrico g en U se escribe como,

$$g = \sum g_{ij}\, dx^i \otimes dx^j.$$

La siguiente definición categoriza a los diferentes tipos de vectores tangentes a M en lo que se llama su *carácter causal.*

Definición 1.25. *Un vector v tangente a M es:*

- *Espacial: si $g(v, v) > 0$ o $v = 0$.*
- *Nulo: si $g(v, v) = 0$ y $v \neq 0$.*
- *Temporal: si $g(v, v) < 0$.*

1.3.2. La conexión de Levi-Civita

Sean V y W dos campos vectoriales en una variedad semi-riemanniana M. El objetivo de esta sección es definir un nuevo campo vectorial en M, que denotaremos $\nabla_V W$, y cuyo valor en cada punto x mida la variación de W en la dirección de V_x.

Definición 1.26. *Una conexión ∇ en una variedad diferenciable M es una función $\nabla : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \longrightarrow \mathfrak{X}(M)$ tal que:*

(D1) $\nabla_V W$ *es* $\mathfrak{F}(M)-$*lineal respecto a* V.
(D2) $\nabla_V W$ *es* $\mathbb{R}-$*lineal respecto a* W.
(D3) $\nabla_V (fW) = (Vf)W + f\nabla_V W$ *para todo* $f \in \mathfrak{F}(M)$.

$\nabla_V W$ *se llama la derivada covariante de W con respecto a V para la conexión ∇.*

Proposición 1.27. *Sea M una variedad semi-riemanniana . Si $V \in \mathfrak{X}(M)$, sea V^* la $1-$forma en M tal que*

$$V^*(X) = g(V, X), \quad \forall X \in \mathfrak{X}(M).$$

Entonces, la función $V \longmapsto V^*$ es un isomorfismo $\mathfrak{F}(M)-$lineal de $\mathfrak{X}(M)$ en $\mathfrak{X}^*(M)$.

De esta forma, en geometría semi-riemanniana podemos libremente transformar un campo vectorial en una $1-$forma y viceversa. Los pares correspondientes $V \longleftrightarrow V^*$ contienen exactamente la misma información y se dice que son *métricamente equivalentes.*

Teorema 1.28. *En una variedad semi-riemanniana M existe una única conexión ∇ tal que*

(D4) $[V, W] = \nabla_V W - \nabla_W V$, *para todos* $V, W \in \mathfrak{X}(M)$.
(D5) $Xg(V, W) = g(\nabla_X V, W) + g(V, \nabla_X W)$, *para todos* $V, W, X \in \mathfrak{X}(M)$.

∇ se llama la conexión de Levi-Civita de M y viene caracterizada por la fórmula de Koszul:

$$\begin{aligned} 2g(\nabla_V W, X) =& Vg(W,X) + Wg(X,V) - Xg(V,W) \\ & - g(V,[W,X]) + g(W,[X,V]) + g(X,[V,W]) \end{aligned} \tag{1.4}$$

A continuación, podemos introducir la conexión dual.

Definición 1.29. *Se define la conexión dual $\nabla^* : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \longrightarrow \mathfrak{X}^*(M)$ tal que para todo $V, W, X \in \mathfrak{X}(M)$,*

$$\begin{aligned} (\nabla^*_V W)(X) =& \tfrac{1}{2} \left(Vg(W,X) + Wg(X,V) - Xg(V,W) \right. \\ & \left. - g(V,[W,X]) + g(W,[X,V]) + g(X,[V,W]) \right) \end{aligned}$$

Nótese que la conexión dual ∇^* está bien definida para métricas degeneradas en las que la conexión ∇ no tiene por qué existir. Sin embargo, en el caso de que existan ambas, como consecuencia de la fórmula de Koszul, para todo $V, W, X \in \mathfrak{X}(M)$ se tiene que

$$(\nabla^*_V W)(X) = g(\nabla_V W, X).$$

Definición 1.30. *Sea $\{x^1, \ldots, x^m\}$ un sistema coordenado en un entorno U en una variedad semi-riemanniana M. Los símbolos de Christoffel de segunda especie para este sistema coordenado son las funciones reales Γ^k_{ij} en U tales que*

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \left(\frac{\partial}{\partial x^j} \right) = \sum_k \Gamma^k_{ij} \frac{\partial}{\partial x^k}, \quad 1 \leq i, j \leq m.$$

Cabe destacar que como resultado de *(D4)* y de que $[\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}] = 0$, se sigue que

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \left(\frac{\partial}{\partial x^j} \right) = \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^j}} \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right)$$

y por ello $\Gamma^k_{ij} = \Gamma^k_{ji}$.

En particular, el siguiente resultado nos dice cómo vienen determinados los símbolos de Christoffel de segunda especie.

Proposición 1.31. *Para un sistema coordenado $\{x^1, \ldots, x^m\}$ en U,*

(i) $\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \left(\sum_j W^j \frac{\partial}{\partial x^j} \right) = \sum_k \left(\frac{\partial W^k}{\partial x^i} + \sum_j \Gamma^k_{ij} W^j \right) \frac{\partial}{\partial x^k}$.

(ii) $\Gamma^k_{ij} = \frac{1}{2} \sum_n g^{kn} \left(\frac{\partial g_{jn}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{in}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^n} \right)$.

Observamos que teniendo en cuenta la propiedad *(D1)*, el apartado *(i)* de la proposición anterior nos permite calcular $\nabla_V W$ en cada entorno coordenado, mientras que el apartado *(ii)* es la descripción en coordenadas de como el tensor métrico determina la conexión de Levi-Civita.

Definición 1.32. *Sea $\{x^1, \dots, x^m\}$ un sistema coordenado en un entorno U en una variedad semi-riemanniana M. Los símbolos de Christoffel de primera especie para este sistema coordenado son las funciones reales Γ_{hij} en U tales que*

$$\Gamma_{hij} = \sum_k g_{hk} \Gamma_{ij}^k.$$

Como consecuencia de la Proposición 1.31 se deduce que,

$$\Gamma_{hij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{jh}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{ih}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^h} \right).$$

Además,

$$\Gamma_{hij} = g\left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \left(\frac{\partial}{\partial x^j} \right), \frac{\partial}{\partial x^h} \right), \quad 1 \leq h, i, j \leq m.$$

En efecto,

$$g\left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \left(\frac{\partial}{\partial x^j} \right), \frac{\partial}{\partial x^h} \right) = g\left(\sum_k \Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial x^k}, \frac{\partial}{\partial x^h} \right) = \sum_k \Gamma_{ij}^k g\left(\frac{\partial}{\partial x^k}, \frac{\partial}{\partial x^h} \right) =$$
$$= \sum_k g_{hk} \Gamma_{ij}^k = \Gamma_{hij}.$$

Por tanto, en el caso de que existan ∇ y ∇^*, en términos de una carta $(U, \varphi \equiv (x^1, \dots, x^n))$ la conexión dual puede ser descrita de la forma

$$\nabla^*_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^j} = \sum_k \Gamma_{ijk} dx^k.$$

De hecho, se tiene que

$$\left(\nabla^*_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^j} \right) \left(\frac{\partial}{\partial x^h} \right) = g\left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \left(\frac{\partial}{\partial x^j} \right), \frac{\partial}{\partial x^h} \right) =$$
$$= \Gamma_{hij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{jh}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{ih}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^h} \right).$$

Por otro lado, la derivada covariante ∇_V se puede extender para operar sobre tensores arbitrarios.

Definición 1.33. *Sea V un campo vectorial en una variedad semi-riemanniana M. Se llama la derivada covariante (de Levi-Civita) a la única derivación tensorial en M tal que*

- $\nabla_V f = V$ *para todo* $f \in \mathfrak{F}(M)$.

- $\nabla_V W$ *es la conexión de Levi-Civita para todo* $W \in \mathfrak{X}(M)$.

Ahora, sea A un $(r,s)-$tensor en M, entonces el campo tensorial $\nabla_V A$ es $\mathfrak{F}(M)-$lineal en $V \in \mathfrak{X}(M)$. Luego, tiene sentido la siguiente definición.

Definición 1.34. *La diferencial covariante de un* $(r,s)-$*tensor* A *en* M *es el* $(r,s+1)$ *tensor* ∇A *tal que*

$$(\nabla A)(\theta^1,\dots,\theta^r,X_1,\dots,X_s,V) = (\nabla_V A)(\theta^1,\dots,\theta^r,X_1,\dots,X_s)$$

para todos $V, X_i \in \mathfrak{X}(M)$ *y* $\theta^j \in \mathfrak{X}^*(M)$.

En particular, en el caso de los tensores de tipo $(0,0)$, es decir, las funciones $f \in \mathfrak{F}(M)$, su diferencial covariante es su diferencial usual $df \in \mathfrak{X}^*(M)$ ya que, para todo $V \in \mathfrak{X}(M)$,

$$(\nabla f)(V) = \nabla_V f = Vf = df(V).$$

Definición 1.35. *Un campo tensorial* A *se dice paralelo si su derivada covariante es nula, esto es,* $\nabla_X A = 0$ *para todo* $X \in \mathfrak{X}(M)$.

Por ejemplo, se prueba que el tensor métrico g es paralelo.

1.3.3. Transporte paralelo

Sea M una variedad semi-riemanniana.

Definición 1.36. *Un campo vectorial* Z *a la largo de una curva diferenciable* $\alpha : I \longrightarrow M$ *es una aplicación* $Z : I \longrightarrow TM$ *tal que* $\pi \circ Z = \alpha$, *donde* $\pi : TM \longrightarrow M$ *es la proyección canónica.*

Es decir, Z asigna diferenciablemente a cada $t \in I$ un vector tangente a M en $\alpha(t)$, esto es, $Z(t) \in T_{\alpha(t)}M$. Además, se tiene que el conjunto $\mathfrak{X}(\alpha)$ de todos los campos vectoriales en α es un $\mathfrak{F}(I)-$módulo.

A continuación, veremos que existe una manera natural de definir un campo vectorial Z' que mida la variación del campo vectorial $Z \in \mathfrak{X}(\alpha)$.

Proposición 1.37. *Sea* $\alpha : I \longrightarrow M$ *una curva en una variedad semi-riemanniana* M. *Entonces, existe una única función de* $\mathfrak{X}(\alpha)$ *en* $\mathfrak{X}(\alpha)$ *tal que* $Z \longmapsto Z' = \frac{\nabla Z}{dt}$, *llamada derivada covariante inducida, verificando que,*

(i) $(aZ_1 + bZ_2)' = aZ_1' + bZ_2'$, *para todo* $a, b \in \mathbb{R}$.
(ii) $(hZ)' = (\frac{dh}{dt})Z + hZ'$, *para todo* $h \in \mathfrak{F}(I)$.
(iii) $(V_\alpha)'(t) = \nabla_{\alpha'(t)}V$, *para todo* $t \in I$ *y* $V \in \mathfrak{X}(M)$.

Además,

(iv) $\frac{d}{dt}\left(g(Z_1, Z_2)\right) = g(Z_1', Z_2) + g(Z_1, Z_2')$.

En concreto, Z' está completamente determinado por la conexión de Levi-Civita ∇ de la siguiente manera,

$$Z' = \sum_i \frac{dZ^i}{dt} \frac{\partial}{\partial x^i}\bigg|_\alpha + \sum_i Z^i \nabla_{\alpha'} \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right). \tag{1.5}$$

En el caso particular de que $Z = \alpha'$ la derivada $Z' = \alpha''$ se llama la aceleración de la curva α.

Definición 1.38. *Un campo vectorial $Z \in \mathfrak{X}(\alpha)$ se dice que es paralelo a lo largo de α si $Z' = 0$.*

Observamos que introduciendo los símbolos de Christoffel a la fórmula coordenada (1.5) se sigue que,

$$Z' = \sum_k \left\{ \frac{dZ^k}{dt} + \sum_{i,j} \Gamma_{ij}^k \frac{d(x^i \circ \alpha)}{dt} Z^j \right\} \frac{\partial}{\partial x^k}. \tag{1.6}$$

En consecuencia, la expresión (1.6) nos dice que la ecuación $Z' = 0$ es equivalente a un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias lineales. Por tanto, a partir de *teorema fundamental de existencia y unicidad* para dichos sistemas de ecuaciones deducimos el siguiente resultado.

Proposición 1.39. *Dada una curva $\alpha : I \longrightarrow M$, sea $a \in I$ y $z \in T_{\alpha(a)}M$. Entonces, existe un único campo vectorial paralelo Z en α tal que $Z(a) = z$.*

Ahora, utilizando la notación de la proposición previa estamos en condiciones de definir el trasporte paralelo.

Definición 1.40. *Sea $b \in I$, se define el transporte paralelo sobre α de $p = \alpha(a)$ a $q = \alpha(b)$ como la función*

$$P = P_a^b(\alpha) : T_pM \longrightarrow T_qM$$

que envía a cada $z \in T_pM$ a $Z(b) \in T_qM$.

1.3.4. Geodésicas

En esta subsección vamos a generalizar la noción Euclídea de línea recta para variedades semi-riemannianas.

Definición 1.41. *Una geodésica en una variedad semi-riemanniana M es una curva $\gamma : I \longrightarrow M$ cuyo campo vectorial γ' es paralelo, es decir, si su aceleración es cero, $\gamma'' = 0$.*

En consecuencia, una curva geodésica γ tiene un comportamiento bastante uniforme. Además, toda curva constante en M es trivialmente una geodésica.

El siguiente resultado se obtiene como consecuencia de aplicar la ecuación (1.6) a

$$\gamma' = \sum_k \frac{d(x^k \circ \gamma)}{dt} \frac{\partial}{\partial x^i} \in \mathfrak{X}(\gamma).$$

Corolario 1.42. *Sea* $\{x^1, \ldots, x^m\}$ *un sistema coordenado en* $U \subset M$*. Una curva* γ *en* U *es una geodésica de* M*, si y sólo si, sus funciones coordenadas* $x^k \circ \gamma$ *verifican las siguientes ecuaciones geodésicas:*

$$\frac{d^2(x^k \circ \gamma)}{dt^2} + \sum_{i,j} \Gamma_{ij}^k(\gamma) \frac{d(x^i \circ \gamma)}{dt} \frac{d(x^j \circ \gamma)}{dt} = 0, \quad 1 \leq k \leq m.$$

Para simplificar la notación, normalmente escribiremos las funciones coordenadas de γ como x^i en lugar de $x^i \circ \gamma$. Por tanto, las ecuaciones geodésicas se reescriben como:

$$\frac{d^2 x^k}{dt^2} + \sum_{i,j} \Gamma_{ij}^k \frac{dx^i}{dt} \frac{dx^j}{dt} = 0, \quad 1 \leq k \leq m. \tag{1.7}$$

Así, si

$$\frac{dx^i}{dt} = \dot{x}^i, \quad 1 \leq i \leq m,$$

entonces,

$$\frac{d\dot{x}^k}{dt} = -\sum_{i,j} \Gamma_{ij}^k \dot{x}^i \dot{x}^j \quad 1 \leq k \leq m.$$

De esta forma, en las coordenadas naturales $\{x^1, \ldots, x^m, \dot{x}^1, \ldots, \dot{x}^m\}$ del fibrado tangente TM, se tiene que una curva $\gamma(t)$ es geodésica en M, si y sólo si, $(\gamma(t), \gamma'(t))$ es curva integral del campo Π en TM dado por,

$$\Pi = \sum_{i,j,k} \dot{x}^i \frac{\partial}{\partial x^i} - \Gamma_{ij}^k \, \dot{x}^i \dot{x}^j \frac{\partial}{\partial \dot{x}^k}, \tag{1.8}$$

que se conoce como *spray geodésico.*

Si $v_x \in T_x M$, entonces,

$$\Pi(v_x) = \Psi_{v_x}(v_x) - \sum_{i,j,k} \Gamma_{ij}^k \, \dot{x}^i(v_x) \dot{x}^j(v_x) \left. \frac{\partial}{\partial \dot{x}^k} \right|_{v_x} \in T_{v_x}(TM),$$

donde $\Psi_{v_x} : T_x M \longrightarrow T_{v_x}(TM)$ es el monomorfismo dado por

$$\Psi_{v_x}\left(\left. \frac{\partial}{\partial x^i} \right|_x \right) = \left. \frac{\partial}{\partial x^i} \right|_{v_x}, \quad 1 \leq i \leq m.$$

Lema 1.43. *Sean Π y $\widetilde{\Pi}$ los campos en TM dados por,*

$$\Pi = \sum_{i,j,k} \dot{x}^i \frac{\partial}{\partial x^i} - \Gamma_{ij}^k \dot{x}^i \dot{x}^j \frac{\partial}{\partial \dot{x}^k} \quad y \quad \widetilde{\Pi} = \Pi + fV$$

donde $f \in \mathfrak{F}(M)$ y V es el campo de Liouville definido como $V = \sum_k \dot{x}^k \frac{\partial}{\partial \dot{x}^k}$. Entonces, las proyecciones a M de las líneas integrales de Π y $\widetilde{\Pi}$ son las mismas.

Demostración. Sea $\gamma(t)$ la proyección a M de una curva integral del campo Π, es decir, que verifica las ecuaciones geodésicas,

$$\frac{d^2x^k}{dt^2} + \Gamma_{ij}^k(x(t)) \frac{dx^i}{dt} \frac{dx^j}{dt} = 0. \tag{1.9}$$

Buscamos un cambio de parámetro $t = t(s)$ tal que $\widetilde{\gamma}(s) = \gamma(t(s))$ sea la proyección a M de una curva integral del campo $\widetilde{\Pi}$, esto es, que $\widetilde{\gamma}$ verifique las ecuaciones,

$$\frac{d^2x^k}{ds^2} + \Gamma_{ij}^k(x(s)) \frac{dx^i}{ds} \frac{dx^j}{ds} + f(x(s)) \frac{dx^k}{ds} = 0. \tag{1.10}$$

Nótese que,

$$\frac{dx^k}{ds} = \frac{dx^k}{dt} \cdot \frac{dt}{ds} \quad \text{y} \quad \frac{d^2x^k}{ds^2} = \frac{d^2x^k}{dt^2} \cdot \left(\frac{dt}{ds}\right)^2 + \frac{dx^k}{dt} \cdot \frac{d^2t}{ds^2}.$$

Así, sustituyendo en (1.10) se sigue que,

$$\frac{d^2x^k}{dt^2} \cdot \left(\frac{dt}{ds}\right)^2 + \frac{dx^k}{dt} \cdot \frac{d^2t}{ds^2} + \Gamma_{ij}^k(x(s)) \frac{dx^i}{dt} \cdot \frac{dx^j}{dt} \cdot \left(\frac{dt}{ds}\right)^2 f(x(s)) \frac{dx^k}{dt} \cdot \frac{dt}{ds} = 0.$$

Ahora, aplicando (1.9) obtenemos que,

$$\frac{dx^k}{dt} \cdot \frac{d^2t}{ds^2} + f(x(s)) \frac{dx^k}{dt} \cdot \frac{dt}{ds} = 0.$$

Luego,

$$\frac{d^2t}{ds^2} \Big/ \frac{dt}{ds} = -f(x(s)),$$

es decir,

$$\ln\left(\frac{dt}{ds}\right) = -\int f(x(s))ds.$$

Por tanto, el cambio de parámetro queda completamente determinado por,

$$\frac{dt}{ds} = \exp\left(-\int f(x(s))ds\right),$$

de forma que $\widetilde{\gamma}$ es la proyección a M de una curva integral de $\widetilde{\Pi}$.

$\square$

A continuación, presentamos el siguiente resultado que nos dice cómo viene dado el spray geodésico Π en coordenadas mixtas.

Lema 1.44. *El spray geodésico en las coordenadas mixtas viene dado por el campo*

$$\Pi = \sum_{a,b,c} e_b^a u^b \frac{\partial}{\partial x^a} - \Gamma_{ab}^c u^a u^b \frac{\partial}{\partial u^c},$$

donde $e_b = e_b^a \frac{\partial}{\partial x^a}$ *y los* Γ_{ab}^c *denotan los símbolos de Chritoffel respecto a la referencia* $\{e_1, \ldots, e_m\}$*, esto es,* $\nabla_{e_a} e_b = \Gamma_{ab}^c e_c$.

Demostración. En primer lugar, tenemos en cuenta que si $e_b = e_b^a \frac{\partial}{\partial x^a}$, entonces las coordenadas naturales y las coordenadas mixtas de $\xi \in T_x M$ vienen relacionadas mediante la siguiente relación matricial,

$$\begin{pmatrix} \dot{x}^1(\xi) \\ \vdots \\ \dot{x}^m(\xi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_1^1 & \cdots & e_m^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ e_1^m & \cdots & e_m^m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u^1(\xi) \\ \vdots \\ u^m(\xi) \end{pmatrix}.$$

Sean $X = u^a(X) e_a$, $Y = u^b(Y) e_b$ y Γ_{ab}^c los símbolos de Chritoffel respecto a la referencia $\{e_1, \ldots, e_m\}$. Aplicando las propiedades de ∇ se deduce que,

$$\nabla_X Y = \left\{ X(u^c(Y)) + u^a(X) u^b(Y) \Gamma_{ab}^c \right\} e_c \tag{1.11}$$

De este modo, si γ es una curva en M con $\gamma' = u^a(\gamma') e_a(\gamma)$, sabemos que γ es geodésica si $\nabla_{\gamma'} \gamma' = 0$. Luego, tomando $X = Y = \gamma'$ en (1.11) tenemos que,

$$\nabla_{\gamma'} \gamma' = \left\{ \frac{d(u^c \circ \gamma')}{dt} + (u^a \circ \gamma')(u^b \circ \gamma') \Gamma_{ab}^c(\gamma) \right\} e_c(\gamma) = 0.$$

Es decir, γ es geodésica si verifica las siguientes ecuaciones geodésicas,

$$\frac{d(u^c \circ \gamma')}{dt} + (u^a \circ \gamma')(u^b \circ \gamma') \Gamma_{ab}^c(\gamma), \quad c = 1, \ldots, m.$$

Denotando $u^a := u^a \circ \gamma'$, dado que $\frac{du^c}{dt} = -\Gamma_{ab}^c u^a u^b$ y $\dot{x}^a(\gamma') = u^b(\gamma') e_b^a$, concluimos que el spray geodésico en coordenadas mixtas viene dado por,

$$\Pi = e_b^a u^b \frac{\partial}{\partial x^a} - \Gamma_{ab}^c u^a u^b \frac{\partial}{\partial u^c}.$$

□

Nuevamente, el teorema de existencia y unicidad para ecuaciones diferenciales ordinarias nos permite deducir el siguiente resultado.

Lema 1.45. *Si $v \in T_xM$, entonces existe un intervalo I alrededor del 0 y una única geodésica $\gamma : I \longrightarrow M$ tal que $\gamma(0) = x$ y $\gamma'(0) = v$.*

Por tanto, diremos que γ es la geodésica que empieza en x con velocidad inicial v.

Lema 1.46. *Sean $\alpha, \beta : I \longrightarrow M$ geodésicas. Si existe $a \in I$ tal que $\alpha'(a) = \beta'(a)$, entonces $\alpha = \beta$.*

Proposición 1.47. *Dado un vector tangente $v \in T_xM$, entonces existe una única geodésica γ_v en M tal que*

(i) La velocidad inicial de γ_v es v, esto es, $\gamma'(0) = v$.
(ii) El dominio I_v de γ_v es el mayor posible. Es decir, si $\alpha : J \longrightarrow M$ es una geodésica con velocidad inicial v, entonces $J \subset I_v$ y $\alpha = \gamma_{v|J}$.

El apartado *(ii)* de la proposición previa da sentido a la siguiente definición.

Definición 1.48. *La geodésica γ_v se llama geodésica maximal o geodésica inextendible. En particular, una variedad semi-riemanniana para la que toda geodésica maximal está definida en todo $\mathbb{R}$ se dice geodésicamente completa o solo completa.*

Podemos observar que dada esta definición, si quitamos un punto x de una variedad completa M, entonces $M \setminus \{x\}$ ya no es completa, pues las geodésicas que antes pasaban por x están obligadas a parar.

Definición 1.49. *Una curva α en M se dice espacial si todos sus vectores velocidad $\alpha'(s)$ son espaciales. Análogamente, se define para vectores velocidad temporales y nulos.*

En general, una curva α no tiene por qué tener alguno de estos caracteres causales. Sin embargo, una geodésica γ si deberá tener alguno de ellos por ser γ' paralelo y el trasporte paralelo preserva el tipo causal de los vectores.

Proposición 1.50. *Sea $\gamma : I \longrightarrow M$ una geodésica no constante. Una reparametrización $\gamma \circ h : J \longrightarrow M$ es una geodésica, si y sólo si, h es de la forma $h(t) = at + b$, con $a, b \in \mathbb{R}$.*

El resultado previo muestra como las parametrizaciones de geodésicas tienen un significado geométrico.

Definición 1.51. *Una pregeodésica es una curva que se puede reparametrizar para que sea geodésica.*

Sabemos que si un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden está dado por funciones diferenciables, entonces sus soluciones son diferenciables independientemente del parámetro, valores iniciales y valores iniciales en las primeras derivadas. Como consecuencia de aplicar este resultado a las ecuaciones geodésicas obtenemos la siguiente proposición.

Proposición 1.52. *Sea $v \in TM$, entonces existe un entorno $\mathcal{N}$ de v en TM y un intervalo I alrededor del 0 tal que $(w, s) \longmapsto \gamma_w(s)$ es una función diferenciable bien definida de $\mathcal{N} \times I$ en M.*

2

Métricas con cambio transversal de signatura: Líneas geodésicas

En este capítulo vamos a considerar una variedad diferenciable M conexa y de dimensión m dotada de un $(0,2)-$tensor simétrico. Así, el objetivo será estudiar las geodésicas que atraviesan la hipersuperficie Σ determinada por los puntos donde dicho tensor degenera.

2.1. Métricas que cambian transversalmente de signatura

Sea M una variedad diferenciable y conexa y $g : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{F}(M)$ un $(0,2)-$tensor simétrico. Entonces, para todo punto $x \in M$ se tiene que

$$g_x = g(x) : T_xM \times T_xM \longrightarrow \mathbb{R}$$

es la forma bilineal simétrica inducida en el espacio tangente T_xM. De esta forma, la siguiente definición se obtiene como consecuencia de la posibilidad de que g_x sea degenerada.

Definición 2.1. *Un punto $x \in M$ se dice singular si g_x es degenerada, en caso contrario diremos que x es un punto ordinario.*

Denotamos por Σ al conjunto de puntos singulares. Así, Σ es un conjunto cerrado de M. De esta forma, el conjunto de puntos ordinarios $M \setminus \Sigma$ es un abierto de M.

Definición 2.2. *El orden de degeneración de un punto $x \in M$ es la dimensión del subespacio radical*

$$Rad_x = \{v \in T_xM \mid g_x(v,u) = 0, \forall u \in T_xM\} \subset T_xM.$$

Por ende, es claro que los puntos ordinarios de M son de orden nulo. Además, el tensor g induce sobre cada componente conexa N de $M \setminus \Sigma$ una métrica semi-riemanniana.

En concreto, podemos escribir el conjunto de puntos singulares como

$$\Sigma = \{p \in M \mid \mathrm{Rad}_p \neq \{0\}\}.$$

Sea $p \in \Sigma$ un punto singular y $(U, \varphi \equiv (x^1, \ldots, x^m))$ un sistema local de coordenadas con $p \in U$. Entonces, el conjunto $\Sigma \cap U$ se describe como el conjunto de ceros de la función

$$G_\varphi = \det(g^\varphi_{ab}) : U \longrightarrow \mathbb{R}, \quad a, b \in \{1, \ldots, m\},$$

donde g^φ_{ab} son las componentes de g respecto a φ.

Definición 2.3. *Un punto singular $p \in \Sigma$ se dice regular si es regular para la función G_φ, es decir, si $dG_\varphi(p) \neq 0$.*

Nótese que las condiciones de singularidad y regularidad no dependen de la carta φ. De hecho, se tiene el siguiente resultado.

Proposición 2.4. *Sea $p \in \Sigma$ un punto regular y $\{e_1, \ldots, e_m\}$ una base móvil respecto a la cual la matriz asociada a la métrica es $(\widetilde{g_{ab}})_{a,b\in\{1,\ldots,m\}}$. Entonces,*

$$\det(\widetilde{g_{ab}})(p) = 0 \quad y \quad d(\det(\widetilde{g_{ab}}))(p) \neq 0.$$

Demostración. Sea $p \in \Sigma$ y $(U, \varphi \equiv (x^1, \ldots, x^m))$ un sistema local de coordenadas con $p \in U$, por ser p un punto regular, sabemos que

$$\det(g^\varphi_{ab})(p) = 0 \quad \text{y} \quad d(\det(g^\varphi_{ab}))(p) \neq 0.$$

Sea $P(p)$ la matriz cambio de base entre $\left\{ \frac{\partial}{\partial x^1}\Big|_p, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^m}\Big|_p \right\}$ y $\{e_1(p), \ldots, e_m(p)\}$, sabemos que,

$$(g^\varphi_{ab}(p)) = P(p) \cdot (\widetilde{g_{ab}}(p)) \cdot P^t(p).$$

Por tanto,

$$\det(g^\varphi_{ab})(p) = \det P(p) \cdot \det(\widetilde{g_{ab}})(p) \cdot \det P^t(p).$$

Luego, dado que $\det P(p), \det P^t(p) \neq 0$, por ser $P(p)$ una matriz cambio de base y que $\det(g^\varphi_{ab})(p) = 0$, se deduce que $\det(\widetilde{g_{ab}})(p) = 0$. Además,

$$\begin{aligned} d(\det(g^\varphi_{ab}))(p) =& d(\det P)(p) \cdot \det(\widetilde{g_{ab}})(p) \cdot \det P^t(p) + \\ &+ \det P(p) \cdot d(\det(\widetilde{g_{ab}}))(p) \cdot \det P^t(p) + \\ &+ \det P(p) \cdot \det(\widetilde{g_{ab}})(p) \cdot d(\det P^t)(p) = \\ =& \det P(p) \cdot d(\det(\widetilde{g_{ab}}))(p) \cdot \det P^t(p). \end{aligned}$$

Así, ya que $d(\det(g^\varphi_{ab}))(p) \neq 0$, concluimos que $d(\det(\widetilde{g_{ab}}))(p) \neq 0$.

□

De este modo, la siguiente definición nos da una caracterización de la métrica g.

Definición 2.5. *La métrica g se dice de tipo transverso si para todo $p \in \Sigma \cap U$ se tiene que p es un punto regular.*

En concreto, si la métrica es de tipo transverso, como consecuencia del *Teorema de la Función Implícita*, se deduce que Σ es una hipersuperficie de M, esto es, una subvariedad de M de dimensión $m-1$.

En la situación anterior se dice que (M, g) es un *espacio semi-riemanniano singular* y Σ su *hipersuperficie singular*. Para simplificar diremos que M es un $\Sigma-$espacio. En particular, M es de *radical transverso* en $p \in \Sigma$, si $\mathrm{Rad}_p \cap T_p\Sigma = \{0\}$, en este caso Σ hereda en torno a p una estructura de variedad semi-riemanniana. Mientras que si $\mathrm{Rad}_p \subset T_p\Sigma$ para $p \in \Sigma$, se dice que M es de *radical tangente* en p.

En lo que sigue supondremos siempre que M es un $\Sigma-$espacio de radical transverso a la hipersuperficie Σ.

A continuación, veamos dos propiedades interesantes que tiene M como $\Sigma-$espacio.

Lema 2.6. *Sea M un $\Sigma-$espacio. Entonces alrededor de cada punto $p \in \Sigma$ existe una base móvil $\{e_1, \ldots, e_m\}$ respecto de la cual la matriz asociada a la métrica es diagonal. Además, se tiene que:*

(i) El subespacio radical Rad_p es unidimensional, esto es, $\dim Rad_p = 1$.
(ii) El punto p está en la frontera topológica de exactamente dos componentes conexas M^+ y M^-, y se cumple que

$$Ind(M^-) = Ind(M^+) + 1.$$

Demostración. Sea $p \in \Sigma$, consideramos $\{e_1(p), \ldots, e_r(p), e_{r+1}(p), \ldots, e_m(p)\}$ una base de T_pM respecto a la cual la matriz asociada a la métrica es

$$(g_{ab}(p))_{a,b \in \{1,\ldots,m\}} = \left(\begin{array}{ccc|ccc} \mu_1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \mu_r & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{array}\right)$$

con $\mu_j \neq 0$ para todo $j \in \{1, \ldots, r\}$. Esto nos dice que la dimensión del subespacio radical Rad_p es $s := m - r$.

A continuación, extendemos dicha base diferenciablemente a una base móvil $\{e_1, \ldots, e_r, e_{r+1}, \ldots, e_m\}$. Además, sin pérdida de generalidad, podemos suponer que el subespacio $S = \langle e_1, \ldots, e_r \rangle$ es siempre no singular. En consecuencia, a partir de $\tilde{e}_1 = e_1$ definimos los campos,

$$\tilde{e}_j = e_j - \sum_{i=1}^{j-1} \frac{g(e_j, \tilde{e}_i)}{g(\tilde{e}_i, \tilde{e}_i)} \tilde{e}_i, \quad j \in \{2, \ldots, r\}.$$

De esta forma, obtenemos el conjunto de campos $\{\tilde{e}_1, \ldots, \tilde{e}_r\}$ verificando que,

$$\begin{aligned} f_j &:= g(\tilde{e}_j, \tilde{e}_j) \neq 0, \\ g(\tilde{e}_j, \tilde{e}_i) &= g(e_j, \tilde{e}_i) - \frac{g(e_j, \tilde{e}_i)}{g(\tilde{e}_i, \tilde{e}_i)} g(\tilde{e}_i, \tilde{e}_i) = 0, \end{aligned}$$

para todos $i, j \in \{1, \ldots, r\}$. Ahora, tomamos $\{e_{r+1}, \ldots, e_m\}$ base de $S^\perp$. Luego, la matriz asociada a la métrica respecto a la base móvil $\{\tilde{e}_1, \ldots, \tilde{e}_r, e_{r+1}, \ldots, e_m\}$ es de la forma,

$$(\widetilde{g_{ab}})_{a,b \in \{1,\ldots,m\}} = \left(\begin{array}{ccc|ccc} f_1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & f_r & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & \cdots & 0 & h_{11} & \cdots & h_{1s} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & h_{s1} & \cdots & h_{ss} \end{array} \right)$$

En particular, $h_{ij}(p) = 0$, para todos $i, j \in \{1, \ldots, s\}$. Además, se cumple que $f_j(p) = \mu_j \neq 0$ para todo $j \in \{1, \ldots, r\}$. En efecto,

$$\begin{aligned} f_j(p) = g(\tilde{e}_j, \tilde{e}_j)(p) &= g\left(e_j - \sum_{i=1}^{j-1} \frac{g(e_j, \tilde{e}_i)}{g(\tilde{e}_i, \tilde{e}_i)} \tilde{e}_i, e_j - \sum_{i=1}^{j-1} \frac{g(e_j, \tilde{e}_i)}{g(\tilde{e}_i, \tilde{e}_i)} \tilde{e}_i \right)(p) = \\ &= g(e_j, e_j)(p) = \mu_j \end{aligned}$$

ya que para todo $i \in \{1, \ldots, j-1\}$ se tiene que $g(e_j, \tilde{e}_i)(p) = 0$, por ser $\tilde{e}_i$ combinación de los campos $e_1, \ldots, e_{j-1}$ y verificarse que $g(e_j, e_i)(p) = 0$ para cualquier $i \in \{1, \ldots, j-1\}$.

En lo que sigue, veremos que $s = 1$. Por ser M un Σ−espacio sabemos que $\det(\widetilde{g_{ab}})(p) = 0$ y $d(\det(\widetilde{g_{ab}}))(p) \neq 0$. En concreto, se tiene que

$$\det(\widetilde{g_{ab}}) = f_1 \cdot \ldots \cdot f_r \cdot \det H.$$

donde $H = (h_{ij})_{i,j \in \{1,\ldots,s\}}$ con $H(p) = (0)_{i,j \in \{1,\ldots,s\}}$ y $\det H(p) = 0$. Por tanto,

$$\begin{aligned} d(\det(\widetilde{g_{ab}})) =& d(f_1 \cdot \ldots \cdot f_r \cdot \det H) = \\ =& df_1 \cdot f_2 \cdot \ldots \cdot f_r \cdot \det H + f_1 \cdot df_2 \cdot f_3 \cdot \ldots \cdot f_r \cdot \det H + \cdots \\ & \cdots + f_1 \cdot \ldots \cdot f_{r-1} \cdot df_r \cdot \det H + f_1 \cdot \ldots \cdot f_r \cdot d(\det H). \end{aligned}$$

En consecuencia,

$$0 \neq d(\det(\widetilde{g_{ab}}))(p) = f_1(p) \cdot \ldots \cdot f_r(p) \cdot d(\det H)(p) = \mu_1 \cdot \ldots \cdot \mu_r \cdot d(\det H)(p),$$

de donde se sigue que $d(\det H)(p) \neq 0$. Sin embargo, esto no es posible si $s \geq 2$, ya que en tal caso si $\det H(p) = 0$, se deduce que $d(\det H)(p) = 0$.

Por tanto, se concluye que $s = 1$, es decir, el subespacio radical Rad_p es unidimensional y la matriz asociada a la métrica respecto a la base móvil $\{\tilde{e}_1, \ldots, \tilde{e}_r, e_{r+1}, \ldots, e_m\}$ es una matriz diagonal de la forma

$$(\widetilde{g_{ab}})_{a,b\in\{1,\ldots,m\}} = \left(\begin{array}{ccc|c} f_1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & f_{m-1} & 0 \\ \hline 0 & \cdots & 0 & f_m \end{array}\right).$$

Aquí, sabemos que $f_m(p) = 0$ y $df_m(p) \neq 0$. Por ende, concluimos que f_m cambia de signo en un entorno de $p \in \Sigma$. Así que, el punto $p \in \Sigma$ se encuentra en la frontera topológica de dos componentes conexas M^+ y M^- en las que la signatura de g cambia en una única unidad, esto es,

$$\mathrm{Ind}\,(M^-) = \mathrm{Ind}\,(M^+) + 1.$$

$\square$

Aplicando este resultado, se dice que el $\Sigma-$espacio M es de *Lorentz-Riemann* si $M \setminus \Sigma$ tiene dos componentes conexas M^+ riemanniana y M^- Lorentziana.

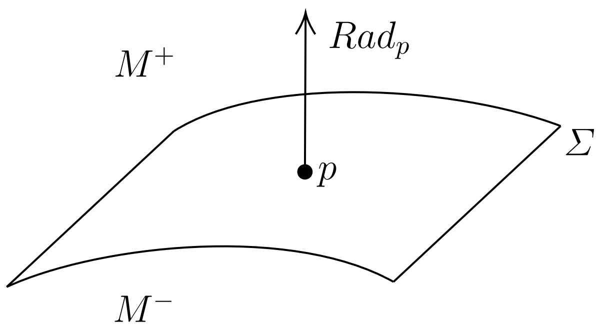

Figura 2.1. Hipersuperficie Σ

Definición 2.7. *Sea $p \in \Sigma$ se define el tensor simétrico*

$$\mathbb{I}_p : T_pM \times T_pM \times Rad_p \longrightarrow \mathbb{R}$$

como,

$$\mathbb{I}_p(u_p, w_p, r_p) = (\nabla^*_U W)(R)$$

donde $U, W, R \in \mathfrak{X}(M)$ tales que $U(p) = u_p$, $W(p) = w_p$ y $R(p) = r_p$.

Nótese que $\mathbb{I}_p$ está bien definido ya que sabemos que la conexión dual ∇^* funciona para métricas degeneradas.

En lo que sigue, a menos que el índice que se repita sea m, para simplificar usaremos la *notación de Einstein* eliminando el signo de sumatorio y entendiendo que en la expresión resultante un índice indica la suma sobre todos los posibles valores del mismo. Además, tendremos en cuenta el siguiente convenio de índices: $i, j, k \in \{1, \ldots, m-1\}$ y $a, b, c, d \in \{1, \ldots, m\}$.

Ahora, para $p \in \Sigma$ tomamos un sistema local de coordenadas $(U, \varphi \equiv (x^1, \ldots, x^m))$ con $p \in U \subset M$ tal que $x^m = 0$ es una ecuación simple de Σ y una base móvil $\{e_1, \ldots, e_m\}$, tal que para todo $x \in U$ y $\xi \in T_xM$, $\xi = u^a(\xi)e_a(x)$. Esto es, $\{x^1, \ldots, x^m, u^1, \ldots, u^m\}$ son las coordenadas mixtas en el fibrado tangente TM.

En particular, veremos que debemos escoger dicha base móvil $\{e_1, \ldots, e_m\}$ verificando ciertas propiedades. Para ello, veamos primero el siguiente resultado previo.

Lema 2.8. *Sea $f : I_\varepsilon \longrightarrow \mathbb{R}$ una función de clase $\mathcal{C}^k$ con $k \geq 1$ definida en $I_\varepsilon := (-\varepsilon, \varepsilon)$ para $\varepsilon > 0$ y $f(0) = 0$. Entonces, la función*

$$\varphi(t) = \int_0^1 f'(st)ds$$

de clase $\mathcal{C}^{k-1}$ verifica que $f(t) = t\varphi(t)$ y $\varphi(0) = f'(0)$.

Demostración. Definimos $u := st$ y fijado t consideramos $f_t(s) = f(st)$. Entonces,

$$\int_0^1 \frac{df_t}{ds}ds = f_t(s)|_{s=0}^{s=1} = f_t(1) - f_t(0) = f(t) - f(0) = f(t).$$

No obstante,

$$\left.\frac{df_t}{ds}\right|_s = \left.\frac{df}{du}\right|_{st} \left.\frac{du}{ds}\right|_s = tf'(st).$$

Por ende, $f(t) = \int_0^1 tf'(st)ds = t\varphi(t)$ y es claro que $\varphi(0) = f'(0)$.

□

A continuación, tal y cómo anticipábamos, veamos qué condiciones debemos imponer sobre la base móvil $\{e_1, \ldots, e_m\}$.

Proposición 2.9. *Sea $p \in \Sigma$, existe un entorno U de M con $p \in U$ y una base móvil $\{e_1, \ldots, e_m\}$ en él verificando las siguientes propiedades:*

(i) Los campos $\{e_1, \ldots, e_{m-1}\}$ son tangentes a $\Sigma \cap U$.

(ii) La matriz asociada a la métrica respecto dicha base es de la forma

$$(g_{ab})_{a,b\in\{1,\ldots,m\}} = \left(\begin{array}{c|c} (g_{ij})_{i,j\in\{1,\ldots,m-1\}} & \begin{matrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix} \\ \hline \begin{matrix} 0 & \cdots & 0 \end{matrix} & \tau \end{array}\right).$$

(iii) Para todo $i \in \{1, \ldots, m-1\}$, se cumple que $g(e_m, [e_m, e_i]) = 0$.

Demostración. Sabemos que Σ es una hipersuperficie de M, así que consideramos $(\Sigma_0, (x^1, \ldots, x^{m-1}))$ una carta de Σ y un campo $\tilde{e}_m$ tal que para todo $p \in \Sigma$ se verifique que $\tilde{e}_m(p) \in \mathrm{Rad}_p$.

Además, fijado $p_0 \in \Sigma$ consideramos $\psi : U \times I \longrightarrow M$ el flujo local de $\tilde{e}_m$ por $p_0 \in U$ y aplicando la Proposición 1.16 sabemos que:

- Para todo $t \in I$, el subconjunto $\psi_t(U)$ es un abierto de M de forma que la aplicación $\psi_t : U \longrightarrow M_t$ es un difeomorfismo.
- Para todo $p \in U$ se tiene que $\psi_p := \gamma_p$ es curva integral de $\tilde{e}_m$ por p, es decir, $\psi_p(0) = p$.

A continuación, considerando la aplicación $\psi|_{U\cap\Sigma}$ y teniendo en cuenta que $\psi(p_0, 0) = p_0$ queremos ver que la aplicación

$$d\psi|_{(p_0,0)} : T_{p_0}\Sigma \times \mathbb{R} \longrightarrow T_{p_0}M$$

es no singular. En efecto, si $\xi \in T_{p_0}\Sigma$ y $\alpha : J \longrightarrow \Sigma$ es una curva en Σ verificando que $\alpha(0) = p_0$ y $\alpha'(0) = \xi$, tomamos la curva $\widetilde{\alpha}(t) = (\alpha(t), 0)$ con $\frac{d}{dt}\big|_{t=0} \widetilde{\alpha} = (\xi, 0)$ por lo que,

$$\begin{aligned} d\psi|_{(p_0,0)}(\xi, 0) &= \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} \psi(\widetilde{\alpha}(t)) = \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} \psi(\alpha(t), 0) = \\ &= \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} \gamma_{\alpha(t)}(0) = \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} \alpha(t) = \xi, \\ d\psi|_{(p_0,0)}(0, 1) &= \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} \psi(p_0, t) = \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} \gamma_{p_0}(t) = \\ &= \gamma'_{p_0}(0) = \tilde{e}_m(p_0). \end{aligned}$$

Por tanto, como consecuencia del *Teorema de la Función Inversa* se deduce que existen Σ_0 abierto de Σ con $p_0 \in \Sigma_0$, M_0 abierto de M y $\varepsilon > 0$ tal que $\psi : \Sigma_0 \times I_\varepsilon \longrightarrow M_0$ es un difeomorfismo y denotemos $\Sigma_t := \psi_t(\Sigma_0)$.

De este modo, para todo $x \in M_0$ consideramos $\psi^{-1}(x) = (p, t)$ para ciertos $p \in \Sigma_0$ y $t \in I_\varepsilon$. Así, definimos $x^m(x) := t$. En consecuencia, hemos obtenido una carta $(M_0, (x^1, \ldots, x^m))$ de M dada por,

$$x^i(x) = x^i(\pi_1(\psi^{-1}(x))) \quad \text{y} \quad x^m(x) = \pi_2(\psi^{-1}(x))$$

donde $\pi_1 : \Sigma_0 \times I_\varepsilon \longrightarrow \Sigma_0$ y $\pi_2 : \Sigma_0 \times I_\varepsilon \longrightarrow I_\varepsilon$ son las proyecciones sobre la primera y la segunda componente, respectivamente.

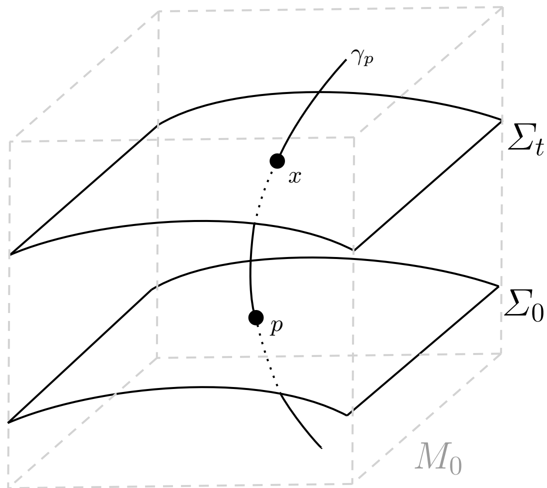

Figura 2.2. Difeomorfismo $\psi : \Sigma_0 \times I_\varepsilon \to M_0$

En lo que sigue tomamos los campos

$$e_i = \frac{\partial}{\partial x^i} \quad \text{y} \quad \widehat{e}_m = \frac{\partial}{\partial x^m}.$$

Como consecuencia, dado que $\Sigma = \{x^m = 0\}$, se cumple (i), ya que los campos e_i son tangentes a $\Sigma \cap U$ pues,

$$dx^m(e_i) = dx^m\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right) = \frac{\partial}{\partial x^i}(x^m) = 0.$$

Por otro lado, la matriz asociada a g respecto de la base $\{e_1, \ldots, e_{m-1}, \widehat{e}_m\}$ es de la forma,

$$(g_{ab})_{a,b\in\{1,\ldots,m\}} = \left(\begin{array}{c|c} & g_{1m} \\ (g_{ij})_{i,j\in\{1,\ldots,m-1\}} & \vdots \\ & g_{m-1\,m} \\ \hline g_{1m} \cdots g_{m-1\,m} & g_{mm} \end{array}\right).$$

Pero, en concreto, sabemos que,

$$(g_{ab})|_{x^m=0} = \left(\begin{array}{c|c} & 0 \\ (g_{ij}(x^k,0)) & \vdots \\ & 0 \\ \hline 0 \quad \cdots \quad 0 & 0 \end{array}\right).$$

Por tanto, aplicando el Lema 2.8, tenemos que existen funciones $h_a(x^i, x^m)$, con $a \in \{1, \ldots, m\}$, tales que $g_{am}(x^i, x^m) = x^m h_a(x^i, x^m)$. Entonces, la matriz (g_{ab}) se reescribe de la siguiente manera,

$$(g_{ab})_{a,b\in\{1,\ldots,m\}} = \left(\begin{array}{c|c} & x^m h_1 \\ (g_{ij})_{i,j\in\{1,\ldots,m-1\}} & \vdots \\ & x^m h_{m-1} \\ \hline x^m h_1 \cdots x^m h_{m-1} & x^m h_m \end{array}\right).$$

A continuación, debemos modificar el campo $\widehat{e}_m$ para que sea ortogonal a todos los e_i. Para ello, definimos e_m como sigue,

$$e_m := \varphi_j e_j + \widehat{e}_m = \varphi_j e_j + \frac{\partial}{\partial x^m},$$

para ciertas funciones φ_j. Además, para que $e_m(p)$ con $p \in \Sigma$ esté en la dirección del radical Rad_p, debemos imponer que,

$$\varphi_j|_{x^m=0} = 0.$$

Luego, teniendo en cuenta de nuevo el Lema 2.8, se sigue que existen funciones ψ_j tales que $\varphi_j = x^m \psi_j$, es decir,

$$e_m = x^m \psi_j e_j + \widehat{e}_m.$$

Ahora, exigiendo la condición de ortogonalidad, esto es, $g(e_i, e_m) = 0$ para todo $i \in \{1, \ldots, m-1\}$, obtenemos que,

$$\begin{aligned} g(e_i, e_m) &= g(e_i,\, x^m \psi_j e_j + \widehat{e}_m) = x^m \psi_j g(e_i, e_j) + g(e_i, \widehat{e}_m) = \\ &= x^m \psi_j g_{ij} + x^m h_i = x^m(\psi_j g_{ij} + h_i) = 0. \end{aligned}$$

Por ende, $\psi_j g_{ij} + h_i = 0$, es decir, $\psi_j = -(g_{ij})^{-1} h_i$. Así e_m queda completamente determinado por dichas funciones y, denotando $\tau := g_{mm}$, se verifica (ii).

Por último, veamos que (iii) es cierto, esto es, $g(e_m, [e_m, e_i]) = 0$. Para ello, teniendo en cuenta (ii), basta ver que el campo $[e_m, e_i]$ está generado únicamente por los campos $\{e_1, \ldots, e_{m-1}\} = \left\{\frac{\partial}{\partial x^1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^{m-1}}\right\}$. En efecto,

$$[e_m, e_i] = [e_m, e_i](x^j)\frac{\partial}{\partial x^j} + [e_m, e_i](x^m)\frac{\partial}{\partial x^m} = [e_m, e_i](x^j)\frac{\partial}{\partial x^j},$$

ya que se cumple lo siguiente,

$$\begin{aligned} [e_m, e_i](x^m) &= e_m(e_i(x^m)) - e_i(e_m(x^m)) = \\ &= e_m\left(\frac{\partial}{\partial x^i}(x^m)\right) - e_i\left(\left(x^m \psi_j \frac{\partial}{\partial x^j} + \frac{\partial}{\partial x^m}\right)(x^m)\right) = \\ &= e_i(0) - e_i(1) = 0. \end{aligned}$$

□

En lo que sigue, consideraremos la base móvil $\{e_1, \ldots, e_m\}$ definida en la Proposición 2.9. En concreto, Σ viene dado por $\tau(x) = 0$. Por otro lado, sea $p \in \Sigma$ el radical Rad_p queda determinado por $e_m(p)$. Además, como la métrica g es de tipo transverso sabemos que

$$d\tau_{|p} \neq 0 \quad \text{y} \quad \det\big((h_{ij})_{i,j\in\{1,\ldots,m-1\}}\big) \neq 0.$$

2.2. Geodésicas transversales

A continuación, comenzaremos a estudiar la existencia de geodésicas que atraviesen la hipersuperficie Σ. Este es un problema que surge de manera natural como consecuencia de la importancia de las curvas geodésicas en la geometría semi-riemanniana.

Para ello, recordamos que el Lema 1.44 nos dice que el spray geodésico en coordenadas mixtas viene dado por el campo,

$$\Pi = e^a_b u^b \frac{\partial}{\partial x^a} - \Gamma^c_{ab} u^a u^b \frac{\partial}{\partial u^c}.$$

Ahora, aplicando que $\Gamma^m_{ab} = g^{cm}\Gamma_{cab} = g^{mm}\Gamma_{mab} = \frac{1}{\tau}\Gamma_{mab}$ se sigue que,

$$\Pi = e^a_b u^b \frac{\partial}{\partial x^a} - \Gamma^i_{ab} u^a u^b \frac{\partial}{\partial u^i} - \frac{1}{\tau}\Gamma_{mab} u^a u^b \frac{\partial}{\partial u^m}.$$

En particular, sean $x \in U$ y $\xi \in T_xM$, tenemos que Π aplicado a ξ es de la forma,

$$\Pi(\xi) = \Psi_\xi(\xi) - \Gamma^i_{ab} u^a(\xi) u^b(\xi) \left.\frac{\partial}{\partial u^i}\right|_\xi - \frac{1}{\tau(x)}\Gamma_{mab} u^a(\xi) u^b(\xi) \left.\frac{\partial}{\partial u^m}\right|_\xi . \tag{2.1}$$

En efecto,

$$\Psi_\xi(\xi) = \dot{x}^a(\xi) \left.\frac{\partial}{\partial x^a}\right|_\xi = e^a_b u^b(\xi) \left.\frac{\partial}{\partial x^a}\right|_\xi ,$$

donde $\Psi_\xi : T_xM \longrightarrow T_\xi(TM)$ es el isomorfismo dado por,

$$\Psi_\xi\left(\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_x\right) = \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_\xi , \quad 1 \leq i \leq m.$$

Ahora, por fin estamos en condiciones de presentar el teorema que le da nombre a esta sección.

Teorema 2.10. *Sea M un $\Sigma-$espacio, $p \in \Sigma$ y $v_p \in T_pM \setminus T_p\Sigma$. Entonces, existe una geodésica γ con $\gamma'(0) = v_p$, si y sólo si, $\mathbb{I}_p(v_p, v_p, r_p) = 0$ para algún $r_p \in Rad_p$ con $r_p \neq 0$.*

Demostración. Veamos cada una de las implicaciones por separado.

"$\Rightarrow$" Podemos asumir sin pérdida de generalidad que $d\tau(v_p) < 0$. Luego, para $x \in U$ y $\xi \in T_xM$ la ecuación (2.1) nos dice que el spray geodésico viene dado por,

$$\Pi(\xi) = \Psi_\xi(\xi) - \Gamma^i_{ab}u^a(\xi)u^b(\xi)\left.\frac{\partial}{\partial u^i}\right|_\xi - \frac{1}{\tau(x)}\Gamma_{mab}u^a(\xi)u^b(\xi)\left.\frac{\partial}{\partial u^m}\right|_\xi .$$

Ahora, teniendo en cuenta que $\tau(p) = 0$ y que

$$\Gamma_{mab} = g(\nabla_{e_a}e_b, e_m) = \mathbb{I}_p(e_a(p), e_b(p), e_m(p))$$

para todo $p \in \Sigma$, concluimos que para que exista $\Pi(v_p)$ debe cumplirse que,

$$\Gamma_{mab}u^a(v_p)u^b(v_p) = \mathbb{I}_p(e_a(p), e_b(p), e_m(p))u^a(v_p)u^b(v_p) = \mathbb{I}_p(v_p, v_p, e_m(p)) = 0.$$

Es decir, $\mathbb{I}_p(v_p, v_p, e_m(p)) = 0$ con $e_m(p) \in \mathrm{Rad}_p$ tal y cómo queríamos demostrar.

"$\Leftarrow$" Para probar el recíproco definimos el campo

$$S = (\tau \circ \pi)\Pi,$$

donde $\pi : TM \to M$ es la proyección canónica. Por tanto,

$$S(\xi) = \tau(x)\Psi_\xi(\xi) - \tau(x)\Gamma^i_{ab}u^a(\xi)u^b(\xi)\left.\frac{\partial}{\partial u^i}\right|_\xi - \Gamma_{mab}u^a(\xi)u^b(\xi)\left.\frac{\partial}{\partial u^m}\right|_\xi .$$

En particular, el Lema 1.12 nos dice que Π y S tienen las mismas curvas integrales salvo reparametrización siempre que $\tau \circ \pi \neq 0$.

Dado que $(\tau \circ \pi)(v_p) = \tau(p) = 0$ y que por hipótesis

$$\Gamma_{mab}u^a(v_p)u^b(v_p) = \mathbb{I}_p(v_p, v_p, e_m(p)) = 0,$$

se deduce que $S(v_p) = 0$. Por tanto, linealizamos S en v_p y obtenemos,

$$\begin{aligned} DS|_{v_p} =&(d\tau \circ \pi_*) \otimes \left(\Psi_{v_p}(v_p) - \Gamma^i_{ab}u^a(v_p)u^b(v_p)\frac{\partial}{\partial u^i}\right) \\ &- d\left(\Gamma_{mab}u^a u^b\right)|_{v_p} \otimes \left.\frac{\partial}{\partial u^m}\right|_{v_p}, \end{aligned}$$

donde d denota la diferencial exterior.

El primer objetivo de la prueba consiste en hallar los autovalores y autovectores de $DS|_{v_p}$. Para ello, previamente observamos que,

$$\frac{\partial}{\partial u^m}\left(\Gamma_{mab}u^a(\xi)u^b(\xi)\right) = d\tau(\xi).$$

En efecto,

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial u^m}\left(\Gamma_{mab}u^a(\xi)u^b(\xi)\right) &= \Gamma_{mmc}u^c(\xi) + \Gamma_{mbm}u^b(\xi) = \\ &= \left(\Gamma_{mmb} + \Gamma_{mbm}\right)u^b(\xi) = \\ &= (\Gamma_{mmi} + \Gamma_{mim})u^i(\xi) + 2\Gamma_{mmm}u^m(\xi) = \\ &= e_m(\tau)u^m(\xi) = d\tau(\xi).\end{aligned}$$

Nótese que hemos aplicado la *fórmula de Koszul* (1.4) para determinar Γ_{mmi}, Γ_{mim} y Γ_{mmm}, esto es,

$$\begin{aligned}\Gamma_{mmi} =&\frac{1}{2}\left(e_m(g_{im}) + e_i(g_{mm}) - e_m(g_{mi})\right.\\ &\left.-g(e_m,[e_i,e_m]) + g(e_i,[e_m,e_m]) + g(e_m,[e_m,e_i])\right) = \\ =&\frac{1}{2}e_i(\tau) + g(e_m,[e_m,e_i]) = \\ =&g(e_m,[e_m,e_i]) = 0,\\ \Gamma_{mim} =&\frac{1}{2}\left(e_i(g_{mm}) + e_m(g_{mi}) - e_m(g_{im})\right.\\ &\left.-g(e_i,[e_m,e_m]) + g(e_m,[e_m,e_i]) + g(e_m,[e_i,e_m])\right) = \\ =&\frac{1}{2}e_i(\tau) = 0,\\ \Gamma_{mmm} =&\frac{1}{2}\left(e_m(g_{mm}) + e_m(g_{mm}) - e_m(g_{mm})\right.\\ &\left.-g(e_m,[e_m,e_m]) + g(e_m,[e_m,e_m]) + g(e_m,[e_m,e_m])\right) = \\ =&\frac{1}{2}e_m(\tau).\end{aligned}$$

Aquí, hemos utilizado que $[e_m, e_m] = 0$ y la Proposición 2.9, que nos dice que $g_{im} = g_{mi} = 0$, $g(e_m, [e_m, e_i]) = 0$ y $e_i(\tau) = 0$.

Como consecuencia, realicemos el cálculo de los siguiente autovalores y autovectores:

- En primer lugar, $\frac{\partial}{\partial u^m}$ es un autovector de $DS|_{v_p}$ con autovalor positivo $-d\tau(v_p) > 0$. En efecto, dado que $\pi_*\left(\frac{\partial}{\partial u^m}\right) = 0$, se tiene que,

$$\begin{aligned}DS|_{v_p}\left(\frac{\partial}{\partial u^m}\right) &= -d\left(\Gamma_{mab}u^a u^b\right)|_{v_p}\left(\frac{\partial}{\partial u^m}\right)\frac{\partial}{\partial u^m} = \\ &= -\frac{\partial}{\partial u^m}\left(\Gamma_{mab}u^a(v_p)u^b(v_p)\right)\frac{\partial}{\partial u^m} = \\ &= -d\tau(v_p)\frac{\partial}{\partial u^m}.\end{aligned}$$

- Por otro lado, para cualquier

$$X \in \mathcal{D} := \left\{ \Psi_{v_p}(v_p) \mid v_p \in T_p\Sigma \right\} \oplus \operatorname{span}\left\{ \frac{\partial}{\partial u^1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial u^{m-1}} \right\},$$

existe un $C(X) \in \mathbb{R}$ tal que $X + C(X)\frac{\partial}{\partial u^m}$ es un autovector de $DS|_{v_p}$ con autovalor 0. Efectivamente,

$$\begin{aligned} DS|_{v_p}\left(X + C(X)\tfrac{\partial}{\partial u^m}\right) =& (d\tau \circ \pi_*)\left(X + C(X)\tfrac{\partial}{\partial u^m}\right)\left(\Psi_{v_p}(v_p) - \Gamma^i_{ab}u^a(v_p)u^b(v_p)\tfrac{\partial}{\partial u^i}\right) \\ & - d\left(\Gamma_{mab}u^a u^b\right)|_{v_p}\left(X + C(X)\tfrac{\partial}{\partial u^m}\right)\tfrac{\partial}{\partial u^m} = \\ =& - d\left(\Gamma_{mab}u^a u^b\right)|_{v_p}(X)\tfrac{\partial}{\partial u^m} \\ & - C(X)\tfrac{\partial}{\partial u^m}\left(\Gamma_{mab}u^a(v_p)u^b(v_p)\right)\tfrac{\partial}{\partial u^m} = \\ =& - d\left(\Gamma_{mab}u^a u^b\right)|_{v_p}(X)\tfrac{\partial}{\partial u^m} \\ & - C(X)d\tau(v_p)\tfrac{\partial}{\partial u^m} = 0. \end{aligned}$$

Nótese que $\pi_*\left(\frac{\partial}{\partial u^m}\right) = 0$ y $(d\tau \circ \pi_*)(X) = d\tau(w) = 0$ con $w \in T_p\Sigma$. Por tanto, el $C(X) \in \mathbb{R}$ buscado es,

$$C(X) = -\frac{d\left(\Gamma_{mab}u^a u^b\right)|_{v_p}(X)}{d\tau(v_p)}.$$

Así que, la aplicación $\mathcal{D} \longrightarrow \ker(DS|_{v_p})$ tal que $X \longmapsto X + C(X)\frac{\partial}{\partial u^m}$ es un monomorfismo y se tiene que

$$\dim \ker(DS|_{v_p}) \geq \dim \mathcal{D} = 2m - 2.$$

- Por último, para calcular el autoespacio generalizado asociado a autovalores negativos observamos que,

$$\begin{aligned} & DS|_{v_p}\left(\Psi_{v_p}(v_p) - \Gamma^i_{ab}u^a(v_p)u^b(v_p)\tfrac{\partial}{\partial u^i}\right) = \\ =& (d\tau \circ \pi_*)\left(\Psi_{v_p}(v_p) - \Gamma^i_{ab}u^a(v_p)u^b(v_p)\tfrac{\partial}{\partial u^i}\right)\left(\Psi_{v_p}(v_p) - \Gamma^i_{ab}u^a(v_p)u^b(v_p)\tfrac{\partial}{\partial u^i}\right) \\ & - d\left(\Gamma_{mab}u^a u^b\right)|_{v_p}\left(\Psi_{v_p}(v_p) - \Gamma^i_{ab}u^a(v_p)u^b(v_p)\tfrac{\partial}{\partial u^i}\right)\tfrac{\partial}{\partial u^m} = \\ =& d\tau(v_p)\left(\Psi_{v_p}(v_p) - \Gamma^i_{ab}u^a(v_p)u^b(v_p)\tfrac{\partial}{\partial u^i}\right) \\ & - d\left(\Gamma_{mab}u^a u^b\right)|_{v_p}\left(\Psi_{v_p}(v_p) - \Gamma^i_{ab}u^a(v_p)u^b(v_p)\tfrac{\partial}{\partial u^i}\right)\tfrac{\partial}{\partial u^m}. \end{aligned}$$

En consecuencia, existe $k_0 \in \mathbb{R}$ tal que

$$\nu = \Psi_{v_p}(v_p) - \Gamma^i_{ab}u^a(v_p)u^b(v_p)\tfrac{\partial}{\partial u^i} + k_0\tfrac{\partial}{\partial u^m} \in T_{v_p}TM$$

es un autovector de $DS|_{v_p}$ con autovalor negativo $d\tau(v_p) < 0$, esto es,

$$\begin{aligned} & DS|_{v_p}\left(\Psi_{v_p}(v_p) - \Gamma^i_{ab}u^a(v_p)u^b(v_p)\tfrac{\partial}{\partial u^i} + k_0\tfrac{\partial}{\partial u^m}\right) = \\ & = d\tau(v_p)\left(\Psi_{v_p}(v_p) - \Gamma^i_{ab}u^a(v_p)u^b(v_p)\tfrac{\partial}{\partial u^i} + k_0\tfrac{\partial}{\partial u^m}\right). \end{aligned} \tag{2.2}$$

En efecto, por un lado,

$$\begin{aligned}
&DS|_{v_p}\left(\Psi_{v_p}(v_p) - \mathit{\Gamma}^i_{ab}u^a(v_p)u^b(v_p)\tfrac{\partial}{\partial u^i} + k_0\tfrac{\partial}{\partial u^m}\right) = \\
&\quad = d\tau(v_p)\left(\Psi_{v_p}(v_p) - \mathit{\Gamma}^i_{ab}u^a(v_p)u^b(v_p)\tfrac{\partial}{\partial u^i}\right) \\
&\qquad - d\left(\mathit{\Gamma}_{mab}u^a u^b\right)|_{v_p}\left(\Psi_{v_p}(v_p) - \mathit{\Gamma}^i_{ab}u^a(v_p)u^b(v_p)\tfrac{\partial}{\partial u^i}\right)\tfrac{\partial}{\partial u^m} \\
&\qquad - k_0 d\tau(v_p)\tfrac{\partial}{\partial u^m}.
\end{aligned}$$

Mientras que, por otro lado,

$$\begin{aligned}
&d\tau(v_p)\left(\Psi_{v_p}(v_p) - \mathit{\Gamma}^i_{ab}u^a(v_p)u^b(v_p)\tfrac{\partial}{\partial u^i} + k_0\tfrac{\partial}{\partial u^m}\right) = \\
&\quad = d\tau(v_p)\left(\Psi_{v_p}(v_p) - \mathit{\Gamma}^i_{ab}u^a(v_p)u^b(v_p)\tfrac{\partial}{\partial u^i}\right) + k_0 d\tau(v_p)\tfrac{\partial}{\partial u^m}.
\end{aligned}$$

Por ello, para que se verifique (2.2) debe cumplirse que,

$$\begin{aligned}
k_0 d\tau(v_p)\tfrac{\partial}{\partial u^m} = &- d\left(\mathit{\Gamma}_{mab}u^a u^b\right)|_{v_p}\left(\Psi_{v_p}(v_p) - \mathit{\Gamma}^i_{ab}u^a(v_p)u^b(v_p)\tfrac{\partial}{\partial u^i}\right)\tfrac{\partial}{\partial u^m} \\
&- k_0 d\tau(v_p)\tfrac{\partial}{\partial u^m}.
\end{aligned}$$

Así que, el $k_0 \in \mathbb{R}$ deseado es,

$$\begin{aligned}
k_0 &= -\frac{d\left(\mathit{\Gamma}_{mab}u^a u^b\right)|_{v_p}\left(\Psi_{v_p}(v_p) - \mathit{\Gamma}^i_{ab}u^a(v_p)u^b(v_p)\tfrac{\partial}{\partial u^i}\right)}{2d\tau(v_p)} = \\
&= \frac{1}{2}C\left(\Psi_{v_p}(v_p) - \mathit{\Gamma}^i_{ab}u^a(v_p)u^b(v_p)\tfrac{\partial}{\partial u^i}\right).
\end{aligned}$$

De hecho, nótese que $\pi_*(\nu) = v_p$, ya que $\pi_*\left(\Psi_{v_p}(v_p)\right) = v_p$ y $\pi_*\left(\frac{\partial}{\partial u^a}\right) = 0$.

Finalmente, de aquí concluimos que

$$T_{v_p}TM = N^- \oplus N^0 \oplus N^+,$$

donde N^- y N^+ denotan los autoespacios generalizados de autovalores de $DS|_{v_p}$ negativos y positivos, respectivamente. Mientras que N^0 es el autoespacio de autovalor 0. Como resultado del estudio realizado previamente y dado que $\dim T_{v_p}TM = 2m$, sabemos que $\dim N^- = \dim N^+ = 1$ y $\dim N^0 = 2m - 2$.

A continuación, aplicando el Teorema 1.17 se deduce que existen subvariedades W_s y W_u de TM que son invariantes por el flujo de S y satisfacen que $T_{v_p}W_s = N^-$ y $T_{v_p}W_u = N^+$.

En particular, W_s es una curva inmersa diferenciable que interseca las fibras sobre $\mathit{\Sigma}$ transversalmente en v_p y existe una parametrización regular $\gamma_1(t)$ de W_s en torno a v_p tal que $\gamma_1(0) = v_p$ y $\gamma_1'(0) = \nu$. De esta forma, consideramos $\gamma_2 := \pi \circ \gamma_1$ la proyección de γ_1, verificando que

$$\gamma_2(0) = (\pi \circ \gamma_1)(0) = \pi(\gamma_1(0)) = \pi(v_p) = p,$$
$$\gamma_2'(0) = (\pi \circ \gamma_1)'(0) = \pi_*(\gamma_1'(0)) = \pi_*(\nu) = v_p.$$

En concreto, se tiene que γ_2 es una línea pregeodésica sobre M. Esto se debe a que W_s es línea integral del campo S y, en consecuencia, también lo es del campo Π. Por tanto, basta tener en cuenta que las líneas integrales de Π se proyectan en líneas geodésicas sobre M.

Además, el *Teorema 7* de [2] y que $\mathbb{I}_p(v_p, v_p, r_p) = 0$ nos dice que existe un único campo vectorial diferenciable y paralelo P sobre γ_2 y $P(0) = v_p$.

Por otro lado, se verifica que P es tangente a γ_2 en todo punto. En efecto, basta considerar que si γ_2 es pregeodésica y P es un campo vectorial paralelo a lo largo de γ_2, entonces el ángulo que forma $P(t)$ con $\gamma_2'(t)$ es constante α_0. Luego,

$$\alpha_0 = \lim_{t \to 0} (\widehat{P(t), \gamma'(t)}) = (\widehat{v_p, v_p}) = 0.$$

De este modo, podemos parametrizar γ_2 para obtener una curva

$$\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \longrightarrow M$$

para algún $\varepsilon > 0$ con $\gamma' = P$, esto es, $\gamma(0) = p$ y $\gamma'(0) = v_p$. Por tanto, concluimos que la curva γ es la geodésica buscada.

$\square$

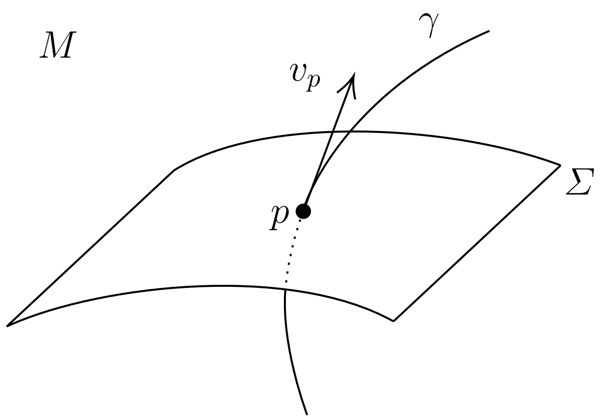

Figura 2.3. Curva geodésica γ con $\gamma'(0) = v_p$

2.3. Geodésicas radicales

Nótese que en el Teorema 2.10, el vector $v_p \in T_pM \setminus T_p\Sigma$ no pertenece al espacio radical Rad_p. Pues en ese caso, se tendría que $v_p = \lambda e_m(p)$ para cierto

$\lambda \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$. En consecuencia, $\mathbb{I}_p(v_p, v_p, e_m(p)) \neq 0$. En efecto, aplicado la *fórmula de Koszul* (1.4) se deduce que,

$$\begin{aligned}\mathbb{I}_p(v_p, v_p, e_m(p)) &= \mathbb{I}_p(\lambda e_m(p), \lambda e_m(p), e_m(p)) = \lambda^2 \mathbb{I}_p(e_m(p), e_m(p), e_m(p)) = \\ &= \lambda^2 g(\nabla_{e_m} e_m, e_m) = \tfrac{\lambda^2}{2} e_m(\tau) = \tfrac{\lambda^2}{2} d\tau(e_m(p)) = \tfrac{\lambda}{2} d\tau(v_p) \neq 0.\end{aligned}$$

De esta manera, en el siguiente teorema estudiamos que ocurre en el caso de que $v_p \in \mathrm{Rad}_p$, es decir, que las geodésicas atraviesen la hipersuperficie Σ en la dirección del subespacio radical.

Teorema 2.11. *Sea M un $\Sigma-$espacio con radical transverso en $p \in \Sigma$. Entonces, si $r_p \in Rad_p$, existe una curva diferenciable pregeodésica γ con $\gamma(0) = p$ y $\gamma'(0) = r_p$.*

Demostración. En primer lugar, nótese que vamos a utilizar la misma notación y coordenadas en TM que en la prueba del Teorema 2.10.

Como sabemos que el vector $e_m(p)$ genera al radical Rad_p, asumimos que $r_p = \lambda e_m(p)$ para cierto $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, esto es,

$$u^i(r_p) = 0 \quad \text{y} \quad u^m(r_p) = \lambda.$$

Además, podemos suponer sin pérdida de generalidad que $d\tau(r_p) < 0$ y $\mathbb{I}_p(r_p, r_p, e_m(p)) \neq 0$.

A continuación, para todo $x \in M$ definimos la función

$$h(x) := \frac{1}{2} d\tau(\lambda e_m(x))$$

y consideramos el siguiente campo vectorial desplazado,

$$\widetilde{S}(\xi) := S(\xi) + h(x) u^a(\xi) \left.\frac{\partial}{\partial u^a}\right|_{\xi}, \quad \xi \in T_x M.$$

Nótese que las proyecciones a M de las líneas integrales de los campos $\widetilde{S}$, S y Π son las mismas. Pues, por el Lema 1.43 lo son las de Π y $\widetilde{\Pi} = \Pi + \frac{h}{\tau} V$ y por el Lema 1.12 los campos $\widetilde{S} = \tau \widetilde{\Pi}$ y $\widetilde{\Pi}$ tienes las mismas líneas integrales en $TM \setminus \pi^{-1}(\Sigma)$.

De este modo, $\widetilde{S}(r_p) = 0$. Efectivamente,

$$\begin{aligned}\widetilde{S}(r_p) =& S(r_p) + h(p) u^a(r_p) \left.\frac{\partial}{\partial u^a}\right|_{r_p} = \\ =& \tau(p) \Psi_{r_p}(r_p) - \tau(p) \Gamma^i_{ab} u^a(r_p) u^b(r_p) \left.\frac{\partial}{\partial u^i}\right|_{r_p} - \Gamma_{mab} u^a(r_p) u^b(r_p) \left.\frac{\partial}{\partial u^m}\right|_{r_p} +\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+ h(p)u^a(r_p)\left.\frac{\partial}{\partial u^a}\right|_{r_p} = \\
=&-\lambda^2 \Gamma_{mmm}\left.\frac{\partial}{\partial u^m}\right|_{r_p} + \frac{\lambda^2}{2} d\tau(e_m(p))\left.\frac{\partial}{\partial u^m}\right|_{r_p} = \\
=&-\frac{\lambda^2}{2} e_m(\tau)\left.\frac{\partial}{\partial u^m}\right|_{r_p} + \frac{\lambda^2}{2} e_m(\tau)\left.\frac{\partial}{\partial u^m}\right|_{r_p} = 0.
\end{aligned}
$$

En consecuencia, podemos linealizar el campo $\widetilde{S}$ en r_p, es decir,

$$
\begin{aligned}
\left. D\widetilde{S}\right|_{r_p} =&(d\tau \circ \pi_*) \otimes \left(\Psi_{r_p}(r_p) - \Gamma^i_{ab} u^a(r_p) u^b(r_p)\frac{\partial}{\partial u^i}\right) \\
&- d\left(\Gamma_{mab}u^a u^b\right)|_{r_p} \otimes \left.\frac{\partial}{\partial u^m}\right|_{r_p} + d\left(h u^a\right)|_{r_p} \otimes \left.\frac{\partial}{\partial u^a}\right|_{r_p} = \\
=&(d\tau \circ \pi_*) \otimes \left(\Psi_{r_p}(r_p) - \lambda^2 \Gamma^i_{mm}\frac{\partial}{\partial u^i}\right) - d\left(\Gamma_{mab}u^a u^b\right)|_{r_p} \otimes \left.\frac{\partial}{\partial u^m}\right|_{r_p} \\
&+ h(p) du^i(r_p) \otimes \left.\frac{\partial}{\partial u^i}\right|_{r_p} + h(p) du^m(r_p) \otimes \left.\frac{\partial}{\partial u^m}\right|_{r_p} + \lambda dh(p) \otimes \left.\frac{\partial}{\partial u^m}\right|_{r_p}.
\end{aligned}
$$

Ahora, nos interesa calcular los autovalores y autovectores de $\left. D\widetilde{S}\right|_{r_p}$.

- En primer lugar, veamos que $\frac{\partial}{\partial u^m}$ es un autovector de $\left. D\widetilde{S}\right|_{r_p}$ con autovalor positivo $-\frac{1}{2}d\tau(r_p) > 0$. Teniendo en cuenta que $\pi_*\left(\frac{\partial}{\partial u^m}\right) = 0$, se deduce que,

$$
\begin{aligned}
\left. D\widetilde{S}\right|_{r_p}\left(\frac{\partial}{\partial u^m}\right) =&- d\left(\Gamma_{mab}u^a u^b\right)|_{r_p}\left(\frac{\partial}{\partial u^m}\right)\frac{\partial}{\partial u^m} \\
&+ h(p) du^i(r_p)\left(\frac{\partial}{\partial u^m}\right)\frac{\partial}{\partial u^i} + h(p) du^m(r_p)\left(\frac{\partial}{\partial u^m}\right)\frac{\partial}{\partial u^m} \\
&+ \lambda dh(p)\left(\frac{\partial}{\partial u^m}\right)\frac{\partial}{\partial u^m} = \\
=&-\frac{\partial}{\partial u^m}\left(\Gamma_{mab}u^a(r_p)u^b(r_p)\right)\frac{\partial}{\partial u^m} \\
&+ h(p)\frac{\partial}{\partial u^m}\left(u^i(r_p)\right)\frac{\partial}{\partial u^i} + h(p)\frac{\partial}{\partial u^m}\left(u^m(r_p)\right)\frac{\partial}{\partial u^m} \\
&+ \lambda\frac{\partial}{\partial u^m}\left(h(p)\right)\frac{\partial}{\partial u^m} = \\
=&- d\tau(r_p)\frac{\partial}{\partial u^m} + h(p)\frac{\partial}{\partial u^m} = \left(-d\tau(r_p) + h(p)\right)\frac{\partial}{\partial u^m} = \\
=&\left(-d\tau(r_p) + \frac{1}{2}d\tau(r_p)\right)\frac{\partial}{\partial u^m} = -\frac{1}{2}d\tau(r_p)\frac{\partial}{\partial u^m}.
\end{aligned}
$$

- Por otro lado, para todo $w_p \in T_p\Sigma$, $\Psi_{w_p}(w_p)$ es un autovector de $D\widetilde{S}\Big|_{r_p}$ con autovalor 0. Recordando que

$$\Psi_{w_p}(w_p) = e^a_b u^b(w_p) \left.\frac{\partial}{\partial x^a}\right|_{w_p}$$

y que $d\tau(w_p) = 0$ para todo $w_p \in T_p\Sigma$, es claro que,

$$D\widetilde{S}\Big|_{r_p} \left(\Psi_{w_p}(w_p)\right) = 0.$$

- Además, para todo $j \in \{1, \ldots, m-1\}$ se tiene que $\frac{\partial}{\partial u^j}$ es un autovector de $D\widetilde{S}\Big|_{r_p}$ con autovalor negativo $\frac{1}{2}d\tau(r_p) < 0$. Como antes, aplicando que $\pi_*\left(\frac{\partial}{\partial u^j}\right) = 0$, se sigue que,

$$\begin{aligned}
D\widetilde{S}\Big|_{r_p}\left(\frac{\partial}{\partial u^j}\right) = & - d\left(\Gamma_{mab}u^a u^b\right)|_{r_p}\left(\frac{\partial}{\partial u^j}\right)\frac{\partial}{\partial u^m} \\
& + h(p)du^i(r_p)\left(\frac{\partial}{\partial u^j}\right)\frac{\partial}{\partial u^i} + h(p)du^m(r_p)\left(\frac{\partial}{\partial u^j}\right)\frac{\partial}{\partial u^m} \\
& + \lambda dh(p)\left(\frac{\partial}{\partial u^j}\right)\frac{\partial}{\partial u^m} = \\
= & - \frac{\partial}{\partial u^j}\left(\Gamma_{mab}u^a(r_p)u^b(r_p)\right)\frac{\partial}{\partial u^m} \\
& + h(p)\frac{\partial}{\partial u^j}\left(u^i(r_p)\right)\frac{\partial}{\partial u^i} + h(p)\frac{\partial}{\partial u^j}\left(u^m(r_p)\right)\frac{\partial}{\partial u^m} \\
& + \lambda\frac{\partial}{\partial u^j}\left(h(p)\right)\frac{\partial}{\partial u^m} = \\
= & h(p)\frac{\partial}{\partial u^j} = \frac{1}{2}d\tau(r_p)\frac{\partial}{\partial u^j}.
\end{aligned}$$

Nótese que, aplicando la Proposición 2.9 obtenemos que,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial u^j}\left(\Gamma_{mab}u^a(r_p)u^b(r_p)\right) = & \Gamma_{mib}u^b(r_p) + \Gamma_{mai}u^a(r_p) = \\
= & \left(\Gamma_{mia} + \Gamma_{mai}\right)u^a(r_p) = \\
= & \lambda\left(\Gamma_{mim} + \Gamma_{mmi}\right) = \\
= & \lambda g(e_m, [e_m, e_i]) = 0.
\end{aligned}$$

- Por último, existen $c^1, \ldots, c^{m-1} \in \mathbb{R}$ tales que

$$\eta = \Psi_{r_p}(r_p) + c^k\frac{\partial}{\partial u^k}$$

es autovector de $D\widetilde{S}\Big|_{r_p}$ con autovalor negativo $d\tau(r_p) < 0$.

$$
\begin{aligned}
D\widetilde{S}\Big|_{r_p}\left(\Psi_{r_p}(r_p) + c^k\tfrac{\partial}{\partial u^k}\right) =& (d\tau \circ \pi_*)\left(\Psi_{r_p}(r_p) + c^k\tfrac{\partial}{\partial u^k}\right)\left(\Psi_{r_p}(r_p) - \lambda^2 \Gamma^i_{mm}\tfrac{\partial}{\partial u^i}\right)\\
&- d\left(\Gamma_{mab}u^a u^b\right)|_{r_p}\left(\Psi_{r_p}(r_p) + c^k\tfrac{\partial}{\partial u^k}\right)\tfrac{\partial}{\partial u^m}\\
&+ h(p)du^i(r_p)\left(\Psi_{r_p}(r_p) + c^k\tfrac{\partial}{\partial u^k}\right)\tfrac{\partial}{\partial u^i}\\
&+ h(p)du^m(r_p)\left(\Psi_{r_p}(r_p) + c^k\tfrac{\partial}{\partial u^k}\right)\tfrac{\partial}{\partial u^m}\\
&+ \lambda dh(p)\left(\Psi_{r_p}(r_p) + c^k\tfrac{\partial}{\partial u^k}\right)\tfrac{\partial}{\partial u^m} =\\
=& d\tau(r_p)\left(\Psi_{r_p}(r_p) - \lambda^2\Gamma^i_{mm}\tfrac{\partial}{\partial u^i}\right)\\
&- c^k\tfrac{\partial}{\partial u^k}\left(\Gamma_{mab}u^a(r_p)u^b(r_p)\right)\tfrac{\partial}{\partial u^m}\\
&+ h(p)c^k\tfrac{\partial}{\partial u^k}\left(u^i(r_p)\right)\tfrac{\partial}{\partial u^i}\\
&+ h(p)c^k\tfrac{\partial}{\partial u^k}\left(u^m(r_p)\right)\tfrac{\partial}{\partial u^m}\\
&+ \lambda c^k\tfrac{\partial}{\partial u^k}(h(p))\tfrac{\partial}{\partial u^m} =\\
=& d\tau(r_p)\left(\Psi_{r_p}(r_p) - \lambda^2\Gamma^i_{mm}\tfrac{\partial}{\partial u^i}\right) + h(p)c^k\tfrac{\partial}{\partial u^k} =\\
=& d\tau(r_p)\left(\Psi_{r_p}(r_p) + \left(\tfrac{1}{2}c^k - \lambda^2\Gamma^k_{mm}\right)\tfrac{\partial}{\partial u^k}\right).
\end{aligned}
$$

Luego, para los valores $c^k = -2\lambda^2\Gamma^k_{mm}$, $k \in \{1, \ldots, m-1\}$, se cumple lo que queremos.

Además, nótese que $\pi_*(\eta) = r_p$, pues $\pi_*\left(\Psi_{r_p}(r_p)\right) = r_p$ y $\pi_*\left(\frac{\partial}{\partial u^k}\right) = 0$.

Finalmente, recopilando todo lo obtenido hasta ahora tenemos que

$$T_{r_p}TM = \widetilde{N}^- \oplus \widetilde{N}^0 \oplus \widetilde{N}^+,$$

donde N^- y N^+ denotan los autoespacios generalizados de autovalores de $D\widetilde{S}|_{r_p}$ negativos y positivos, respectivamente. Mientras que N^0 es el autoespacio de autovalor 0. En concreto, hemos deducido que dim $\widetilde{N}^0 = m-1$, dim $\widetilde{N}^+ = 1$ y dim $\widetilde{N}^- = m$, siendo $d\tau(r_p)$ el autovalor más negativo.

Por tanto, sea Y el autoespacio asociado al autovalor $d\tau(r_p)$, aplicando el argumento que se muestra en el *Teorema 2* de [3], deducimos que existe una subvariedad $\widetilde{L}$ invariante por el flujo de $\widetilde{S}$ tal que $r_p \in \widetilde{L}$ y $T_{r_p}\widetilde{L} = Y$.

Ahora, consideramos $\widetilde{\gamma}(t)$ una parametrización regular de $\widetilde{L}$ en un entorno de r_p con $\widetilde{\gamma}(0) = r_p$ y $\widetilde{\gamma}'(0) = \eta$. Entonces, la proyección $\gamma = \pi \circ \widetilde{\gamma}$ de $\widetilde{\gamma}$ define una parametrización regular de $L = \pi(\widetilde{L})$ en torno a p verificando que

$$
\begin{aligned}
\gamma(0) &= \pi(\widetilde{\gamma}(0)) = \pi(r_p) = p,\\
\gamma'(0) &= \pi_*(\widetilde{\gamma}'(0)) = \pi_*(\eta) = r_p.
\end{aligned}
$$

En consecuencia, la proyección L de $\widetilde{L}$ determina una curva diferenciable pregeodésica γ con $\gamma(0) = p$ y $\gamma'(0) = r_p$.

$\square$

2.4. Ejemplos de geodésicas

En esta sección tomaremos diferentes métricas en $\mathbb{R}^2$ y hallaremos las geodésicas en cada uno de los casos, estudiando así aquellas que puedan atravesar la hipersuperficie formada por los puntos en los que la métrica degenera.

Ejemplo 2.12. Consideramos en $\mathbb{R}^2$ la métrica

$$g = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix}$$

que es singular en $\Sigma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 0\}$ y en donde el vector que determina al radical es $\frac{\partial}{\partial y}$ transverso a Σ.

Calculando los símbolos de Christoffel en $\mathbb{R}^2 \setminus \Sigma$ obtenemos que

$$\Gamma_{11}^1 = \Gamma_{11}^2 = \Gamma_{12}^1 = \Gamma_{12}^2 = \Gamma_{22}^1 = 0 \quad \text{y} \quad \Gamma_{22}^2 = \frac{1}{2y}.$$

Por tanto, deducimos que las ecuaciones de las geodésicas en $\mathbb{R}^2 \setminus \Sigma$ vienen dadas por el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales,

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= 0, \\ \ddot{y} + \frac{1}{2y} (\dot{y})^2 &= 0, \end{aligned}$$

cuya solución es,

$$\begin{aligned} x(t) &= at + b, \\ y(t) &= c\,(3t + d)^{\frac{2}{3}}, \end{aligned}$$

para ciertos $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. De esta forma, si buscamos una geodésica $\gamma(t)$ con condiciones iniciales $\gamma(0) = (x_0, y_0)$ y $\gamma'(0) = (u_0, v_0)$, se deduce que

$$a = u_0, \quad b = x_0, \quad c = y_0^{\frac{1}{3}} \left(\frac{v_0}{2}\right)^{\frac{2}{3}} \quad \text{y} \quad d = \frac{2y_0}{v_0}$$

con $v_0 \neq 0$. Así, la geodésica γ viene determinada por

$$\gamma(t) = \left(u_0 t + x_0,\ y_0^{\frac{1}{3}} \left(\frac{v_0}{2}\right)^{\frac{2}{3}} \left(3t + \frac{2y_0}{v_0}\right)^{\frac{2}{3}} \right)$$

y su velocidad en cada punto es

$$\gamma'(t) = \left(u_0,\ 2y_0^{\frac{1}{3}} \left(\frac{v_0}{2}\right)^{\frac{2}{3}} \left(3t + \frac{2y_0}{v_0}\right)^{-\frac{1}{3}} \right).$$

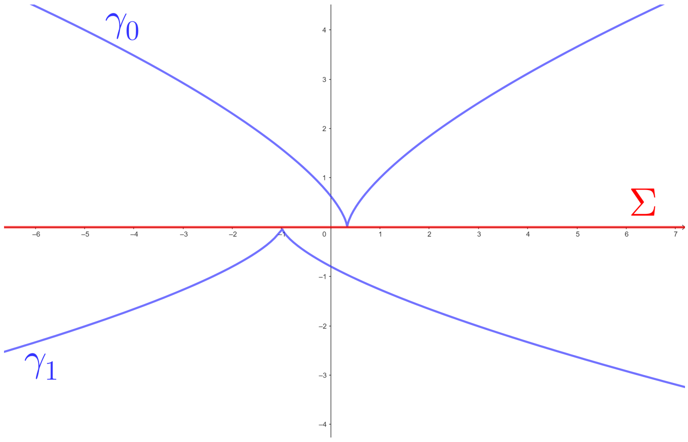

Figura 2.4. Geodésicas en $\mathbb{R}^2$ con la métrica g

En concreto, algunos ejemplos generales de pedazos de geodésicas llegando a tocar Σ, pero sin atravesarla, vienen representados en la Figura 2.4.

En particular, si $u_0 = 0$ obtenemos geodésicas verticales en la dirección del radical de la forma

$$\gamma(t) = \left(x_0,\ y_0^{\frac{1}{3}} \left(\frac{v_0}{2} \right)^{\frac{2}{3}} \left(3t + \frac{2y_0}{v_0} \right)^{\frac{2}{3}} \right),$$

que cortan a Σ en $t_0 = -\frac{2y_0}{3v_0}$, pero no la atraviesan. No obstante, los pedazos de geodésicas verticales en $y > 0$ e $y < 0$ pegan diferenciablemente atravesando Σ, véase la Figura 2.5.

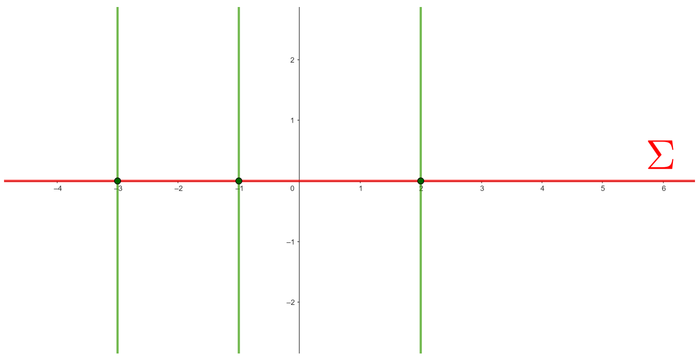

Figura 2.5. Geodésicas radicales

Sin embargo, aunque toda geodésica en la forma general corta a Σ en $t_0 = -\frac{2y_0}{3v_0}$, pegar dos pedazos de geodésicas generales en $y > 0$ e $y < 0$ no produce una línea diferenciable, ya que $\gamma'(t)$ no es diferenciable en $t_0 = -\frac{2y_0}{3v_0}$, véase la Figura 2.6.

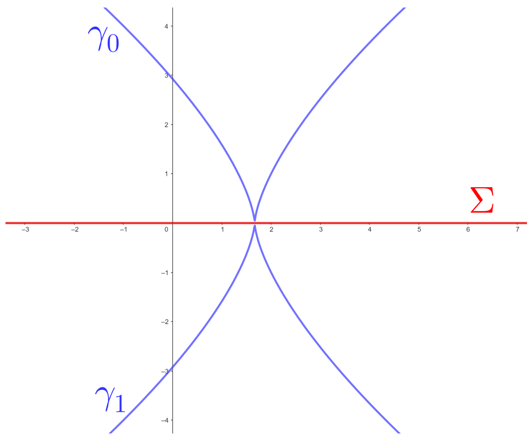

Figura 2.6. Geodésicas en $\mathbb{R}^2$ con la métrica g

En consecuencia, deducimos que las únicas geodésicas que atraviesan la hipersuperficie Σ son las geodésicas verticales, es decir, las geodésicas radicales. Luego, según el Teorema 2.10, esto nos dice que sea $p \in \Sigma$, no existe un vector tangente $v_p \in T_p\mathbb{R}^2 \setminus T_p\Sigma$ tal que $\mathbb{I}_p(v_p, v_p, r_p) = 0$, para algún $r_p \in \mathrm{Rad}_p$ con $r_p \neq 0$. En efecto, sea $r_p = \left.\frac{\partial}{\partial y}\right|_p$ y $v_p = \alpha_p \left.\frac{\partial}{\partial x}\right|_p + \beta_p \left.\frac{\partial}{\partial y}\right|_p$ se tiene que

$$
\begin{aligned}
\mathbb{I}(v_p, v_p, r_p) = g(\nabla_{v_p} v_p, r_p) &= \\
&= g\left(\frac{\beta^2}{2y}\frac{\partial}{\partial y} + \alpha\frac{\partial \alpha}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x} + \alpha\frac{\partial \beta}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y} + \beta\frac{\partial \alpha}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x} + \beta\frac{\partial \beta}{\partial y}\frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial y}\right) = \\
&= \frac{\beta^2}{2} + \alpha\frac{\partial \beta}{\partial x}y + \beta\frac{\partial \beta}{\partial y}y.
\end{aligned}
$$

Teniendo en cuenta que $p \in \Sigma$, esto es, p es de la forma $p = (x_0, y_0)$ con $y_0 = 0$, se sigue que $\mathbb{I}_p(v_p, v_p, r_p) = 0$, si y sólo si, $\beta_p = 0$. Es decir, $v_p = \alpha_p \left.\frac{\partial}{\partial x}\right|_p \in T_p\Sigma$, pero esto no es posible ya que hemos dicho que $v_p \in T_p\mathbb{R}^2 \setminus T_p\Sigma$.

En general, no es sencillo encontrar ejemplos de métricas que nos permitan hallar las expresiones explícitas de las geodésicas. No obstante, a continuación presentamos un ejemplo en el que representemos geodésicas que atraviesan la hipersuperficie Σ en una dirección distinta a la del radical.

Ejemplo 2.13. Tomamos en $\mathbb{R}^2$ la métrica

$$
g = \begin{pmatrix} e^y & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix}
$$

que es singular en $\Sigma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 0\}$ y en donde el vector que determina al radical es $\frac{\partial}{\partial y}$ transverso a Σ.

Los símbolos de Christoffel en $\mathbb{R}^2 \setminus \Sigma$ vienen dados por

$$\Gamma_{11}^1 = \Gamma_{12}^2 = \Gamma_{22}^1 = 0, \quad \Gamma_{11}^2 = -\frac{e^y}{2y}, \quad \Gamma_{12}^1 = \frac{1}{2} \quad \text{y} \quad \Gamma_{22}^2 = \frac{1}{2y}.$$

Luego, las ecuaciones de las geodésicas en $\mathbb{R}^2 \setminus \Sigma$ quedan determinadas por el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales,

$$\begin{aligned} \ddot{x} + \frac{1}{2}\dot{x}\dot{y} &= 0, \\ \ddot{y} + \frac{1}{2y}(\dot{y})^2 - \frac{e^y}{2y}(\dot{x})^2 &= 0. \end{aligned}$$

Sin embargo, aunque es complicado encontrar la expresión explícita de las geodésicas, el Teorema 2.10 nos da la condición de existencia de geodésicas que atraviesan Σ en una dirección distinta a la del radical. En efecto, sea $p \in \Sigma$ y los vectores $r_p = \frac{\partial}{\partial y}\Big|_p \in \mathrm{Rad}_p$ y $v_p = \alpha_p \, \frac{\partial}{\partial x}\big|_p + \beta_p \, \frac{\partial}{\partial y}\Big|_p \in T_p\mathbb{R}^2 \setminus T_p\Sigma$ se tiene que

$$\begin{aligned} &\mathbb{I}(v_p, v_p, r_p) = g(\nabla_{v_p} v_p, r_p) = \\ &= g\left(\alpha\beta\tfrac{\partial}{\partial x} - \alpha^2\tfrac{e^y}{2y}\tfrac{\partial}{\partial y} + \tfrac{g^2}{2y}\tfrac{\partial}{\partial y} + \tfrac{\beta^2}{2y}\tfrac{\partial}{\partial y} + \alpha\tfrac{\partial\alpha}{\partial x}\tfrac{\partial}{\partial x} + \alpha\tfrac{\partial\beta}{\partial x}\tfrac{\partial}{\partial y} + \beta\tfrac{\partial\alpha}{\partial y}\tfrac{\partial}{\partial x} + \beta\tfrac{\partial\beta}{\partial y}\tfrac{\partial}{\partial y}, \tfrac{\partial}{\partial y}\right) = \\ &= -\frac{1}{2}\alpha^2 e^y + \frac{\beta^2}{2} + \alpha\frac{\partial\beta}{\partial x}y + \beta\frac{\partial\beta}{\partial y}y. \end{aligned}$$

Por tanto, teniendo en cuenta que $p \in \Sigma$ implica que p es de la forma $p = (x_0, y_0)$ con $y_0 = 0$, se deduce que $\mathbb{I}_p(v_p, v_p, r_p) = 0$, si y sólo si, $\alpha_p = \pm\beta_p$. Es decir, existirá una geodésica que atraviese Σ en la dirección de $v_p \in T_p\mathbb{R}^2 \setminus T_p\Sigma$, si y sólo,

$$v_p = \alpha_p \left.\frac{\partial}{\partial x}\right|_p \pm \alpha_p \left.\frac{\partial}{\partial y}\right|_p.$$

Finalmente, veamos una representación de las geodésicas en este ejemplo. En primer lugar, en la Figura 2.7 vemos geodésicas que no atraviesan Σ. Por otro lado, en la Figura 2.8 se representan geodésicas radicales. Por último, en la Figura 2.9 observamos geodésicas transversales, que atraviesan Σ en una dirección distinta a la del radical.

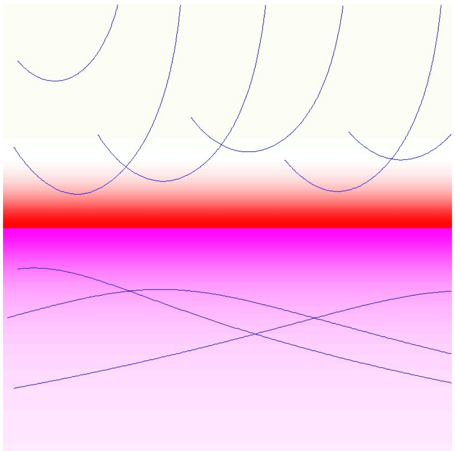

Figura 2.7. Geodésicas que no atraviesan Σ

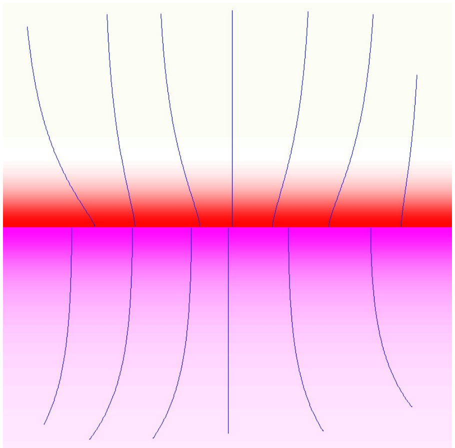

Figura 2.8. Geodésicas radicales

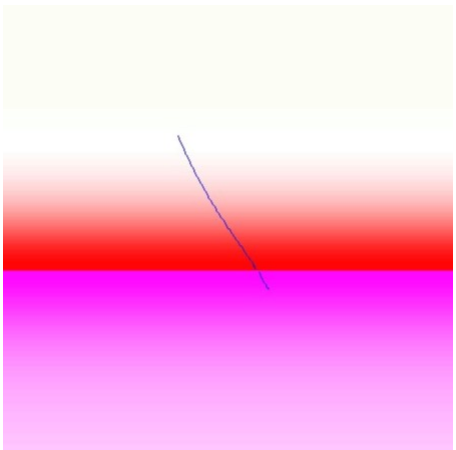

Figura 2.9. Geodésicas transversales

Conclusiones

En esta memoria hemos estudiado las geodésicas que atraviesan la hipersuperficie Σ determinada por los puntos en los que la métrica g es degenerada. Este problema lo hemos abordado diferenciando dos casos fundamentales: las geodésicas radicales, que atraviesan la hipersuperficie en la dirección del subespacio radical y las geodésicas transversales que lo hacen en otra dirección transversal.

Cabe destacar que para el desarrollo de estos resultados ha sido necesaria la construcción previa de una base móvil $\{e_1, \ldots, e_m\}$ de M verificando ciertas propiedades.

Por un lado, la existencia de las geodésicas transversales está condicionada por el valor del tensor $\mathbb{I}$. Por otro lado, para determinar las geodésicas radicales partimos de un campo radical e_m, es decir, un campo en M tal que $e_m(p) \in \mathrm{Rad}_p$ para todo $p \in \Sigma$, y construimos en TM el campo $\widetilde{S} = \tau \Pi + hV$ siendo $h = \frac{1}{2} e_m(\tau)$, $\tau = g(e_m, e_m)$ y donde Π denota al spray geodésico y V el campo de Liouville. Así, $\widetilde{S}$ tiene a $r_p = \lambda e_m(p)$ como punto singular para todo $p \in \Sigma$.

De esta manera, se ha conseguido encontrar para cada $p \in \Sigma$ una línea $\widetilde{L}_p$ invariante por el flujo de $\widetilde{S}$ con $r_p \in \widetilde{L}_p$ unívocamente determinada y que varía diferenciablemente con $p \in \Sigma$. En consecuencia, se prueba entonces que $L_p = \pi(\widetilde{L}_p)$ es una línea pregeodésica que atraviesa Σ en la dirección del radical, esto es, $T_p L_p = \mathrm{Rad}_p$.

En el futuro sería interesante explorar en nuevas direcciones. En particular, con la familia de líneas L_p con $p \in \Sigma$ se construye una carta (x^i, x^m) en un entorno U de M tal que $p \in U$, a esta carta se le denomina carta normal, de forma que la matriz asociada a la métrica respecto a ella es de la forma

$$(g_{ab})_{a,b \in \{1,\ldots,m\}} = \left(\begin{array}{ccc|c} & & & 0 \\ & (g_{ij}) & & \vdots \\ & & & 0 \\ \hline 0 & \cdots & 0 & x^m \end{array}\right)$$

y las líneas $x^i := x^i(p)$, $x^m := t$, para todo $p \in \Sigma$, constituyen la familia de las líneas radicales. En estas condiciones, se prueba que la línea pregeodésica radical L_p que atraviesa Σ por el punto p es esencialmente única.

Bibliografía

[1] R. Abraham and J. E. Marsden, *Foundations of Mechanics, Second Edition.* Addison-Wesley Publishing Company, Inc, 1987.

[2] M. Kossowski, *Pseudo-Riemannian metric singularities and the extandability of parallel transport.* Proc. Amer. Math. Soc. 99.1 (1987), 147-154.

[3] M. Kossowski and M.Kriele, *Transverse, type changing, pseudo riemannian metrics and the extendability of geodesics.* Proc. Roy. Soc. London Ser. A 444 (1994), no. 1921, 297–306.

[4] J.D. Meiss, *Differential Dynamical Systems*, Society for Industrial and Applied Mathematics, 2007.

[5] B. O'Neill, *Semi-Riemannian Geometry With Applications to Relativity*, New York: Academic Press, 1983.