Sobre la estructura conforme de los espacio_tiempo

Javier Lafuente López

March 25, 2026

Contents

1 Estructura proyectiva.

En lo que sigue M será una variedad diferenciable real conexa y con dimensión finita $n \geq 2$.

En este artículo conexión es sinónimo de conexión lineal (no necesariamente simétrica). Métrica significa métrica semi-Riemanniana. Una métrica semi-Riemanniana no Riemanniana la llamaremos métrica indefinida. Recuérdese que una métrica de Lorentz es no definida y tiene signatura $(-, +, ..., +)$.

Finalmente, si g es una métrica en M, una conexión ∇ se dirá g-métrica si preserva el producto g por transporte paralelo, es decir $\nabla g = 0$. Si además ∇ es simétrica, se llama conexión de Levi-Civita (que como es bien conocido, fijada g, existe y es única).

Equivalencia proyectiva de conexiones.

Una linea geodésica de una conexión ∇ en M, es la imagen de una geodésica de ∇.

Dos conexiones ∇ y $\overline{\nabla}$ en M se dicen proyectivamente equivalentes si tienen las mismas líneas geodésicas. Esta relación es de equivalencia, y se denotará por $[\nabla]$ la clase de equivalencia proyectiva definida por la conexión ∇. Se denomina $\mathcal{P} = [\nabla]$ estructura proyectiva en M.

Nótese que dada una conexión, existe una única simétrica con el mismo spray de geodésicas. Por tanto cada estructura proyectiva admite siempre un representante simétrico.

Teorema 1.1 *Dos conexiones simétricas ∇ y $\overline{\nabla}$ son proyectivamente equivalentes si y solo si existe una 1-forma α en M tal que:*

$$\overline{\nabla}_X Y - \nabla_X Y = \alpha(X)Y + \alpha(Y)X \quad \textit{para todo } X, Y \in \mathfrak{X}(M)$$

Demostración. Las conexiones ∇ y $\overline{\nabla}$ tienen las mismas líneas geodésicas, si y solo si el tensor diferencia $\Delta : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \ni (X, Y) \longrightarrow \overline{\nabla}_X Y - \nabla_X Y \in \mathfrak{X}(M)$ verifica: $\Delta(X, X)$ es proporcional a X para todo $X \in \mathfrak{X}(M)$. Restringiéndonos a $V = T_pM$, se prueba que la función $\beta_p : T_pM \to \mathbb{R}$ con $\Delta(v, v) = \beta_p(v)v$ es diferenciable, y homogénea de grado 1. Por un teorema de Euler, se concluye que β_p es una forma lineal. Finalmente se ve que la asignación $p \to \beta_p$ define una 1-forma en M. Como las conexiones ∇ y $\overline{\nabla}$ son simétricas, el tensor Δ es simétrico, y se concluye que la 1-forma $\alpha = \frac{1}{2}\beta$ es la buscada. ■

Veamos de forma más explícita porqué ∇ y $\overline{\nabla}$ tienen las mismas geodésicas:

Lema 1.1 *Sean ∇ y $\overline{\nabla}$ conexiones simétricas proyectivamente equivalentes y sea α la 1-forma en M tal que:*

$$\overline{\nabla}_X Y - \nabla_X Y = \alpha(X)Y + \alpha(Y)X \quad \textit{para todo } X, Y \in \mathfrak{X}(M)$$

Si $\gamma : [0, b) \ni t \longrightarrow \gamma(t) \in M$ es una ∇-geodésica, entonces se define un cambio de parámetro $[0, b) \ni t \longrightarrow s(t) = \int_0^t \exp(\Lambda(\zeta))d\zeta \in [0, b')$, siendo:

$$\Lambda(\zeta) = 2\int_0^\zeta \alpha(\gamma'(t))dt$$

Entonces $\overline{\gamma} : [0, b') \ni s \longrightarrow \gamma(t(s)) \in M$ es la $\overline{\nabla}$-geodésica con $\overline{\gamma}'(0) = \gamma'(0)$, siendo $[0, b') \ni s \longrightarrow t(s) \in [0, b)$ la aplicación inversa de $t \longrightarrow s(t)$.

La demostración se obtiene por simple comprobación.

2 Estructura conforme.

Dos métricas g y $\overline{g}$ en M se dicen conformemente equivalentes si existe una función $\sigma : M \longrightarrow \mathbb{R}^+$ diferenciable, con $\overline{g} = e^{2\sigma}g$. Esta relación es de equivalencia, y se denotará por $\mathcal{C} = [g]$ la clase de equivalencia definida por la métrica g. Se denomina a $\mathcal{C} = [g]$ estructura conforme en M.

La estructura conforme $\mathcal{C} = [g]$ se dice indefinida, Riemanniana, o Lorentz, según g lo sea.

2.1 Estructura causal.

Una estructura conforme Lorentz con una orientación tiempo se llama estructura causal $\mathcal{C}^+$. Los puntos de M se consideran entonces sucesos. Usaremos libremente los conceptos definiciones y resultados de la teoría de causalidad. Nuestra referencia en este punto es [ON].

Observación 2.1 *En una estructura causal Lorentz $\mathcal{C}^+$ en M, los conceptos de curva temporal, causal y luz, desprovistos del adjetivo pasada o futura mantienen su validez aunque no sea orientable tiempo. Conviene en particular recordar el siguiente teorema de Causalidad:*

Teorema 2.1 *Sea (M, g) una variedad de Lorentz, y $\gamma : [a, b] \to M$ una curva causal uniendo $p = \gamma(a)$ con $q = \gamma(b)$. Entonces, existe siempre una curva temporal (arbitrariamente próxima a γ) uniendo p a q, a no ser que γ sea un segmento de línea geodésica luz sin puntos conjugados.*

Se concluye de aquí que la propiedad de ser segmento de línea geodésica luz sin puntos conjugados, solo depende de la estructura conforme $\mathcal{C}$, que determina por tanto unívocamente las líneas geodésicas luz de cualquier métrica $g \in \mathcal{C}$. Establecemos la siguiente:

Definición 2.1 *Sea $\mathcal{C}$ una estructura conforme Lorentz en M.*

a) *Dos puntos $p, q \in M$ se dicen luz-separados, si hay una curva causal - pero no temporal - que los une.*

b) *Un rayo de luz, es la línea definida por una curva luz $\gamma : I \to M$ que verifica la siguiente propiedad: Para cada $s \in I$, existe $\epsilon > 0$ tal que para todo $t, t' \in (s - \epsilon, s + \epsilon) \cap I$, $\gamma(t)$ está luz-separado de $\gamma(t')$.*

Por el teorema de causalidad se concluye:

Corolario 2.1 *En una estructura conforme Lorentz $\mathcal{C}$, los rayos de luz son las líneas geodésicas luz asociadas a cualquier métrica $g \in \mathcal{C}$.*

Más adelante en se obtendrá generalización de este resultado para estructuras conformes indefinidas.

Lema 2.1 *Sean g y $\overline{g}$ métricas de M con $\overline{g} = e^{2\sigma} g$ para cierta función $\sigma : M \to \mathbb{R}$ diferenciable, y supóngase ∇ la conexión de Levi-Civita de g. Entonces, la conexión $\overline{\nabla}$ de Levi-Civita de $\overline{g}$ viene caracterizada por la identidad:*

$$\overline{g}(\overline{\nabla}_X Y, Z) = e^{2\sigma}\{g(\nabla_X Y, Z) + X(\sigma)g(Y, Z) + Y(\sigma)g(X, Z) - Z(\sigma)g(X, Y)\}$$

para todo $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$.

Demostración. La fórmula anterior permite definir una única conexión $\overline{\nabla}$ que es simétrica. Por otra parte, se comprueba que:

$$\begin{aligned} X(\overline{g}(Y,Z)) &= X(e^{2\sigma}g(Y,Z)) = e^{2\sigma}(X(g(Y,Z)) + 2X(\sigma)g(Y,Z)) \\ &= e^{2\sigma}(g(\overline{\nabla}_X Y, Z) + g(Y, \overline{\nabla}_X Z)) = \overline{g}(\overline{\nabla}_X Y, Z) + \overline{g}(Y, \overline{\nabla}_X Z) \end{aligned}$$

Por tanto $\overline{\nabla}$ es la conexión de Levi-Civita para $\overline{g}$.

Aplicando un conocido resultado de álgebra lineal relativo al hecho de que el cono de luz, si es no vacío, determina salvo constantes multiplicativas no nulas, la forma cuadrática que lo define, se concluye: ∎

Teorema 2.2 *Dos métricas indefinidas en M dan lugar a la misma estructura conforme $\mathcal{C}$ si y solo si ambas métricas definen los mismos conos de luz en cada espacio tangente.*

Observación 2.2 *Una definición alternativa de estructura conforme (indefinida) en M, consiste en identificarla con una asignación suave de un cono de luz en cada espacio tangente. La suavidad se refiere a la existencia de una métrica indefinida en el entorno de cada punto, que induzca en dicho entorno los conos de luz que la estructura asigna. Sin embargo, usando particiones diferenciables se prueba la existencia de alguna métrica global con este requisito.*

Conexiones conformes.

Sea $\mathcal{C}$ una estructura conforme en M, y ∇ una conexión. Se dice que ∇ es $\mathcal{C}$-conforme si induce transformaciones lineales conformes (entre los espacios tangentes) por transporte paralelo. Esto equivale a decir en el caso indefinido que ∇ preserva los conos de luz por transporte paralelo. En particular, las geodésicas de las conexiones conformes en estructuras de Lorentz, mantienen un carácter causal (temporal, luz, o espacial) definido.

Teorema 2.3 *Sea $\mathcal{C} = [g]$ una estructura conforme, ∇ la conexión de Levi-Civita asociada a g, y $\overline{\nabla}$ una conexión simétrica. La condición necesaria y suficiente para que $\overline{\nabla}$ sea $\mathcal{C}$-conforme es que exista un campo de vectores $A \in \mathfrak{X}(M)$ tal que:*

$$\overline{\nabla}_X Y - \nabla_X Y = \alpha(X)Y + \alpha(Y)X - g(X,Y)A \quad \textit{para todo } X, Y \in \mathfrak{X}(M)$$

donde α es la 1-forma g-métricamente equivalente a A, $\alpha : \mathfrak{X}(M) \ni X \longrightarrow g(A,X) \in \mathfrak{F}(M)$. En particular, $A = grad\ \sigma$ y $\alpha = d\sigma$ cuando ∇ y $\overline{\nabla}$ son las conexiones de Levi-Civita asociadas a g y $\overline{g} = e^{2\sigma}g$ respectivamente. Por otra parte, las líneas geodésicas luz de dos conexiones $\mathcal{C}$-conformes simétricas, necesariamente coinciden.

Para probar el Teorema es necesario el siguiente Lema técnico cuya demostración aparece en el Apéndice III:

Lema 2.2 *Fijada la conexión $\mathcal{C}$-conforme ∇, y una 1-forma $\alpha \in \mathfrak{X}^*(M)$, entonces la conexión $\tilde{\nabla}$ definida por:*

$$\tilde{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + \alpha(X)Y$$

es conforme, y de hecho, fijado $g \in \mathcal{C}$ puede elegirse α de forma que la conexión $\tilde{\nabla}$ sea g-métrica.

Por otra parte la relación entre los tensores de torsión $\overline{T}$ y $\tilde{T}$ de $\overline{\nabla}$ y $\tilde{\nabla}$ es: $\overline{T}(X,Y) = T(X,Y) + \alpha(X)Y - \alpha(Y)X$.

Demostración. (Teorema 2.3)*:*

Supóngase primero que partimos de una conexión (simétrica) $\overline{\nabla}$, $\mathcal{C}$-conforme. Por el lema, existe una conexión g-métrica $\tilde{\nabla}$ con $\overline{\nabla}_X Y = \tilde{\nabla}_X Y + \alpha(X)Y$ para cierta 1-forma α de M, y como la torsión $\overline{T}$ de $\overline{\nabla}$ es nula, se tiene:

$$\tilde{T}(X,Y) = \alpha(Y)X - \alpha(X)Y$$

que en coordenadas locales tiene por componentes: $\tilde{T}^k_{ij} = \delta^k_i \alpha_j - \delta^k_j \alpha_i$.

Si ∇ es la conexión de Levi-Civita asociada a g, la relación que existe entre los símbolos de Christoffel de ∇ y $\tilde{\nabla}$ es la siguiente:

$$\begin{aligned}\tilde{\Gamma}^m_{kl} - \Gamma^m_{kl} &= \frac{1}{2}\{\tilde{T}^m_{kl} + g^{mr}\tilde{T}^s_{rk} g_{ls} + g^{mr}\tilde{T}^s_{rl} g_{ks}\} \\ &= \frac{1}{2}\{\delta^m_k \alpha_l - \delta^m_l \alpha_k + g^{mr}(\delta^s_r \alpha_k - \delta^s_k \alpha_r) g_{ls} + g^{mr}(\delta^s_r \alpha_l - \delta^s_l \alpha_r) g_{ks}\} \\ &= \frac{1}{2}\{\delta^m_k \alpha_l - \delta^m_l \alpha_k + \delta^m_l \alpha_k - a^m g_{kl} + \delta^m_k \alpha_l - a^m g_{kl}\} = \delta^m_k \alpha_l - a^m g_{kl}\end{aligned}$$

donde $a^m = g^{mr}\alpha_r$ y $A = a^m \frac{\partial}{\partial x^m}$ es el campo métricamente equivalente a α. Así:

$$\tilde{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + \alpha(Y)X - g(X,Y)A$$

Por tanto: $\overline{\nabla}_X Y = \tilde{\nabla}_X Y + \alpha(X)Y = \nabla_X Y + \alpha(Y)X + \alpha(X)Y - g(X,Y)A$.

Recíprocamente, dado α, se toma el campo A g-métricamente equivalente, y se prueba que la conexión $\tilde{\nabla}$ definida por $\tilde{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + \alpha(Y)X - g(X,Y)A$ es g-métrica, es decir: $\tilde{\nabla}_X(g(Y,Z)) = g(\tilde{\nabla}_X Y, Z) + g(Y, \tilde{\nabla}_X Z)$, y por el lema 1.3.2 la conexión $\overline{\nabla}$ definida por:

$$\overline{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + \alpha(X)Y + \alpha(Y)X - g(X,Y)A = \tilde{\nabla}_X Y + \alpha(X)Y$$

es conforme y simétrica.

El caso particular $\alpha = d\sigma$ con $\sigma : M \longrightarrow \mathbb{R}$ diferenciable, está contemplado en el lema 1.2.5. La última afirmación relativa a que las líneas geodésicas de ∇ y $\overline{\nabla}$ coinciden se deduce directamente del hecho de que para todo campo luz $X \in \mathfrak{X}(M)$ se tiene $\overline{\nabla}_X X - \nabla_X X = 2\alpha(X)X$. Así si X es ∇-geodésico, entonces $\overline{\nabla}_X X = 2\alpha(X)X$, y X es pregeodésico. ∎

Otra demostración más cuidada es consecuencia del siguiente:

Corolario 2.2 *Supóngase $\mathcal{C}$ indefinida. Dadas ∇ y $\overline{\nabla}$ conexiones $\mathcal{C}$-conformes simétricas, existe una conexión D simétrica con las mismas líneas geodésicas que ∇, y las mismas geodésicas luz que $\overline{\nabla}$. En particular ∇ y $\overline{\nabla}$ tienen las mismas líneas geodésicas luz.*

Demostración. Usando el teorema, se prueba que existe una 1-forma α de manera que:

$$\overline{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + \alpha(X)Y + \alpha(Y)X - g(X,Y)A \quad \text{para todo } X, Y \in \mathfrak{X}(M)$$

siendo g cualquier métrica auxiliar con $\mathcal{C} = [g]$, y A el campo g-equivalente a α. (Nótese que el tensor $(X,Y) \longrightarrow g(X,Y)A$ solo depende de α y la estructura conforme $\mathcal{C}$). La conexión D definida por $D_X Y = \nabla_X Y + \alpha(X)Y + \alpha(Y)X$ es proyectivamente equivalente a ∇ y tiene las mismas geodésicas luz que $\overline{\nabla}$ pues $D_X X = \overline{\nabla}_X X$ para los campos luz. ■

Observación 2.3 *En el caso Lorentz, el corolario anterior, junto con 1.2.4 nos permite afirmar que los rayos de luz son líneas geodésicas de cualquier conexión conforme simétrica.*

Espacio de Weyl.

En lo que sigue $\mathcal{C}$ es una estructura conforme Lorentz en M. Si U es un entorno de $p \in M$, se denota por $J(p,U)$ (resp. $I(p,U)$) al conjunto de puntos x de U que se unen a p por una curva causal (resp. temporal). Por el teorema de Causalidad, cada punto $x \in G^*(p,U) = J(p,U) - I(p,U)$ puede unirse a p mediante un rayo de luz τ_x contenido en U. Denotamos por $G(p,U) = G^*(p,U) \cup \{p\}$.

Tomando un entorno normal del punto p respecto a una métrica auxiliar $g \in \mathcal{C}$, puede demostrarse:

Lema 2.3 *Para cada punto $p \in M$ existe un entorno U de p (arbitrariamente pequeño), de forma que $U - G(p,U)$ es abierto, y se descompone en tres componentes conexas $I^+(p,U)$, $I^-(p,U)$, y $E(p,U)$. ($I(p,U) = I^+(p,U) \cup I^-(p,U)$). Por otra parte, cualquier curva σ que parte de p, con vector inicial espacial, entra en $E(p,U)$.*

Supóngase ahora que $\mathcal{P}$ es una estructura proyectiva definida por cierta conexión simétrica ∇ en M. Discutiremos a continuación la equivalencia entre dos criterios de compatibilidad causal entre $\mathcal{P}$ y $\mathcal{C}$.

Teorema 2.4 *Son equivalentes las siguientes afirmaciones:*

a) *En cada punto $p \in M$ existe un entorno U de p arbitrariamente pequeño en donde se verifica la siguiente propiedad: Si $x \in J(p,U)$, existe una geodésica causal contenida en U, uniendo p con x*

b) *Los rayos de luz de $\mathcal{C}$ son líneas geodésicas de $\mathcal{P}$.*

Demostración. $(a) \Rightarrow (b)$ Fijado $p \in M$, podemos suponer que el entorno U de la propiedad (a) es un entorno normal de p respecto a la conexión ∇, y en él se verifica el Lema 1.4.1. De esta manera, para cada $x \in G(p, U)$ existe un rayo de luz τ_x en U uniendo p con x. Por la condición (a) (y ser U ∇-normal) existe una (única) línea geodésica $\gamma_{px} : [0, 1] \to U$, uniendo p y x, que es curva causal. Pero si γ_{px} no es τ_x se concluye que $x \in I(p, U)$ lo cual es contradictorio. Esto prueba que el rayo de luz τ_x es línea geodésica de ∇.

$(b) \Rightarrow (a)$ Fijado $p \in M$ tomemos U entorno normal respecto a ∇, y supóngase que en él se verifica el Lema 1.4.1. Sea $x \in J(p, U)$. Si $x \in G(p, U)$ el rayo de luz τ_x que une p con x es la geodésica causal buscada. Podemos suponer por ejemplo, que $x \in I^+(p, U)$, y sea $\gamma : [0, 1] \longrightarrow U$ la única geodésica que une p con x. Si $\gamma'(0)$ es luz, por la hipótesis (b) γ es un rayo de luz y estamos en el caso anterior. Probemos que $\gamma'(0)$ es temporal: Si $\gamma'(0)$ es espacial, hay un $\epsilon > 0$ con $\gamma(\epsilon) \in E(p, U)$. Como $\gamma(1) = x \in I^+(p, U)$ se concluye por el lema que para cierto $r < 1$, $y = \gamma(r) \in G(p, U)$. Esto supone que hay dos líneas geodésicas en U: $\gamma([0, r])$ y el rayo de luz τ_y, que unen p con y en U, lo cual es contradictorio. Así, $\gamma'(0)$ es un vector temporal. Como $\gamma'(t)$ nunca puede ser vector luz (por la hipótesis (b) γ sería un rayo de luz y $\gamma'(0)$ sería luz) se concluye que γ es una curva temporal, tal y como queríamos demostrar. ∎

Definición 2.2 *Cuando la estructura proyectiva $\mathcal{P}$ verifica las condiciones equivalentes a) y b) se dice que $\mathcal{P}$ es compatible con $\mathcal{C}$. A la terna $(M, \mathcal{P}, \mathcal{C})$ se le denomina espacio de Weyl.*

Como la estructura proyectiva $\mathcal{P}$ inducida por una conexión simétrica ∇ conforme, verifica la propiedad (b) (ver 1.3.4), se concluye que $\mathcal{P}$ es compatible con $\mathcal{C}$. Demostraremos a continuación que todas las estructuras proyectivas $\mathcal{P}$ compatibles con $\mathcal{C}$ pueden obtenerse por este procedimiento.

Teorema 2.5 (De Weyl) *Dado un espacio de Weyl $(M, \mathcal{P}, \mathcal{C})$, existe una única conexión simétrica $\mathcal{C}$-conforme $\overline{\nabla} \in \mathcal{P}$.*

Se requiere del siguiente resultado de álgebra lineal que se probará en el Apéndice I:

Lema 2.4 *Sea $\Delta : V \times V \to V$ un tensor simétrico sobre el espacio vectorial de Lorentz V. Supóngase que $\Delta(u, u)$ es proporcional a u para todo vector luz u de V. Existe entonces una única 1-forma $\beta \in V^*$ y un único vector $A \in V$ tales que:*

$$\Delta(v, w) = \langle v, w \rangle A + \beta(v) w + \beta(w) v \quad \textit{para todo } v, w \in V$$

Demostración. El esquema de la demostración del teorema de Weyl es ahora el siguiente:

Fijemos $g \in \mathcal{C}$, y sea D la conexión de Levi-Civita asociada. Fijemos también una conexión simétrica $\nabla \in \mathcal{P}$. Considérese ahora el tensor diferencia de ambas:

$$\Delta(X,Y) = \nabla_X Y - D_X Y \quad (X, Y \in \mathfrak{X}(M))$$

Como las líneas geodésicas luz de $\mathcal{C}$ y $\mathcal{P}$ coinciden, Δ define en cada espacio tangente un tensor de las características del Lema, y existen $\beta \in \mathfrak{X}^*(M)$ y $A \in \mathfrak{X}(M)$ tales que:

$$\Delta(X,Y) = g(X,Y)A + \beta(X)Y + \beta(Y)X \quad \text{para todo } X, Y \in \mathfrak{X}(M)$$

si α es la 1-forma métricamente equivalente a A, se toma entonces:

$$\overline{\nabla}_X Y = \nabla_X Y - (\beta+\alpha)(X)Y - (\beta+\alpha)(Y)X, \quad \overline{D}_X Y = D_X Y - \alpha(X)Y - \alpha(Y)X + g(X,Y)A$$

Por el Teorema 1.1.1, $\overline{\nabla} \in \mathcal{P}$ y por 1.3.1, $\overline{D}$ es $\mathcal{C}$-conforme, y se tiene:

$$\overline{\nabla}_X Y - \overline{D}_X Y = \Delta(X,Y) - \beta(X)Y - \beta(Y)X - g(X,Y)A = 0$$

por tanto $\overline{\nabla} = \overline{D}$ es la conexión buscada.

Por otra parte, si $\tilde{\nabla}$ verifica las mismas condiciones, entonces:

$$\tilde{\nabla}_X Y - \overline{\nabla}_X Y = \tilde{\beta}(X)Y + \tilde{\beta}(Y)X = \tilde{\alpha}(X)Y + \tilde{\alpha}(Y)X - g(X,Y)\acute{\imath}$$

para cierta 1-forma $\tilde{\beta} \in \mathfrak{X}^*(M)$, y cierto campo $\acute{\imath} \in \mathfrak{X}(M)$. Necesariamente es $\acute{\imath} = 0$, con lo que $\tilde{\alpha} = \tilde{\beta} = 0$, y $\overline{\nabla} = \tilde{\nabla}$. ■

CONEXIONES LOCALMENTE MÉTRICAS.

Por simplicidad supondremos ahora que la variedad M es topológicamente orientable.

Operadores de Divergencia.

Un operador $div : \mathfrak{X}(M) \longrightarrow \mathfrak{F}(M)$ será denominado operador divergencia si para todo $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ y todo $f \in \mathfrak{F}(M)$ se verifica:

OD1) $div(X+Y) = div(X) + div(Y)$

OD2) $div(fX) = X(f) + f\, div(X)$

Teorema 2.6 *El conjunto $\mathcal{D}(M)$ de operadores divergencia en M tiene estructura natural de espacio afín, sobre el espacio vectorial real de las 1-formas $\mathfrak{X}^*(M)$. Es decir:*

1. *Si $div, div' \in \mathcal{D}(M)$ entonces $div' - div \in \mathfrak{X}^*(M)$.*
2. *Si $div \in \mathcal{D}(M)$, entonces $\mathcal{D}(M) = div + \mathfrak{X}^*(M)$.*

Proposición 2.1 *Cualquier operador $div \in \mathcal{D}(M)$ es localizable, es decir: Si U es abierto de M, existe un único operador $div|U \in \mathcal{D}(U)$ tal que $(div|U)(X|U) = (div\, X)|U$ para todo $X \in \mathfrak{X}(M)$.*

Definición 2.3 *Si Ω es una forma de volumen en M, el operador divergencia usual div_Ω definido por la siguiente identidad, para todo $X \in \mathfrak{X}(M)$:*

$$L_X\Omega = (div_\Omega X)\Omega$$

es un operador divergencia que denominamos trivial.

Proposición 2.2 *Si Ω y Ω' son dos formas de volumen en M con $\Omega'^{\sigma}\Omega$ para cierta función diferenciable $\sigma : M \to \mathbb{R}$ entonces:*

$$div_{\Omega'} = div_\Omega + d\sigma$$

En particular se verifica la equivalencia: $div = div_{\Omega'}$ con $\Omega' = \lambda\Omega$.

2.1.1 Trivialización local.

Una trivialización local de un operador $div \in \mathcal{D}(M)$ es un par (U, Ω) donde U es un abierto de M, Ω es una forma de volumen en U, y se verifica:

$$div|U = div_\Omega$$

El operador $div \in \mathcal{D}(M)$ se denomina localmente trivial, si admite una trivialización local por cada punto de M.

Observación 2.4 *1) Si (U, Ω) y (U', Ω') son dos trivializaciones locales del operador $div \in \mathcal{D}(M)$ entonces en cada componente conexa V de $U \cap U'$ existe $\lambda \in \mathbb{R}$ con $\Omega'|V = (\lambda\Omega)|V$.*

Puede establecerse por tanto de forma natural, una "Teoría de Transporte de formas de volumen a lo largo de curvas" respecto de un operador divergencia localmente trivial.

Teorema 2.7 *a) Sea Ω forma de volumen en M, y α una 1-forma. El operador $div = div_\Omega + \alpha \in \mathcal{D}(M)$ es localmente trivial si y solo si α es cerrada, y es trivial, si y solo si α es exacta.*

b) Un operador $div \in \mathcal{D}(M)$ es localmente trivial si y solo si verifica: $div[X, Y] = X(div\, Y) - Y(div\, X)$

c) Los conjuntos $\mathfrak{I}(M)$ y $\mathfrak{Z}(M)$ de operadores divergencia triviales y localmente triviales respectivamente, son subespacios afines de $\mathcal{D}(M)$ con espacios vectoriales asociados respectivos $B^1(M)$ y $Z^1(M)$.

2.1.2 Operador de Divergencia de una conexión.

Fijada una conexión ∇ en M, se prueba que el operador:

$$div_\nabla : \mathfrak{X}(M) \ni X \longrightarrow Traza(V \in \mathfrak{X}(M) \longrightarrow \nabla_V X) \in \mathfrak{F}(M)$$

es un operador de divergencia, que se denomina operador divergencia asociado a la conexión ∇.

Se dice que ∇ preserva localmente formas de volumen por transporte paralelo (brevemente ∇ tiene volumen local) si para todo punto $p \in M$ existe U abierto con $p \in U$, y forma de volumen Ω en U tal que $\nabla\Omega = 0$ en U. Se dice entonces que Ω es un volumen local para ∇. Si $U = M$ se dice que ∇ tiene volumen global, y Ω es volumen global para ∇.

Teorema 2.8 *Sea ∇ una conexión en M:*

a) *La condición necesaria y suficiente para que ∇ preserve una forma de volumen Ω por transporte paralelo es que $div_\nabla = div_\Omega$.*

b) *La condición necesaria y suficiente para que ∇ tenga volumen local es que div_∇ sea localmente trivial.*

De hecho, (U, Ω) es una trivialización local de div_∇ si y solo si Ω es un volumen local para ∇. La expresión local del operador div_∇ en las coordenadas (U, φ) de una carta es:

$$div_\nabla \left(\sum X^i \frac{\partial}{\partial x^i} \right) = \sum \left(\frac{\partial X^i}{\partial x^i} + \Gamma_i X^i \right) \quad \text{donde} \quad \Gamma_i = \sum_k \Gamma_{ik}^k$$

Denotando por $\Gamma_\varphi = \Gamma_i dx^i$, y div_φ el operador divergencia inducido por la forma de volumen canónica $\Omega_\varphi = dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n$ se verifica en U:

$$div_\nabla = div_\varphi + \Gamma_\varphi$$

Corolario 2.3 *La condición necesaria y suficiente para que la conexión ∇ admita volumen local es que para cada carta (U, φ) se verifique: $d(\Gamma_\varphi) = 0$.*

2.1.3 Contracciones del tensor de Curvatura.

Dada una conexión ∇ en M adoptamos la siguiente definición de tensor R de curvatura:

$$R(X,Y)Z = -\nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_Y \nabla_X Z + \nabla_{[X,Y]} Z$$

En las coordenadas $(U, \varphi = (x^1, \ldots, x^n))$ de una carta se tiene:

$$R\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j} \right) \frac{\partial}{\partial x^k} = R_{kij}^h \frac{\partial}{\partial x^h}$$

Se define el tensor de Ricci por:

$$Ricc(X,Y) = Traza(V \in \mathfrak{X}(M) \longrightarrow R(X,V)Y)$$

y en coordenadas podemos escribir: $Ricc_{ik} = \sum_h R_{kih}^h$.

Las otras contracciones de R son:

$$\overline{Ricc}(X,Y) = Traza(V \in \mathfrak{X}(M) \longrightarrow R(V,X)Y)$$
$$TRZ(X,Y) = Traza(V \in \mathfrak{X}(M) \longrightarrow R(X,Y)V)$$

Como $R(X,V)Y = -R(V,X)Y$ se deduce que $-\overline{Ricc} = Ricc$, y de la identidad $R(X,V)Y + R(V,Y)X + R(Y,X)V = 0$ se concluye que $Ricc(X,Y) - Ricc(Y,X) = TRZ(X,Y)$.

El tensor TRZ es una 2-forma que denominamos aquí forma trázica.

Teorema 2.9 *El tensor de Ricci de una conexión ∇ en M es simétrico si y solo si la forma trázica TRZ es idénticamente nula.*

Por otra parte, en las coordenadas locales si $\Gamma_\varphi = \Gamma_i dx^i$ con $\Gamma_i = \sum_k \Gamma_{ik}^k$ se verifica: $TRZ = d(\Gamma_\varphi)$.

Teorema 2.10 *La condición necesaria y suficiente para que la conexión ∇ admita volumen local es que su tensor de Ricci sea simétrico.*

2.1.4 Conexiones (conformes) localmente métricas.

En este epígrafe supondremos fijada en la variedad conexa M una estructura conforme $\mathcal{C}$, y una orientación topológica. Una métrica local de $\mathcal{C}$ es un par (U, g) donde U es abierto de M y g es una métrica en U tal que $[g] = \mathcal{C}|U$.

Sea ∇ una conexión conforme. Diremos que ∇ es métrica si existe $g \in \mathcal{C}$ tal que ∇ es la conexión de Levi-Civita de g. Se dice entonces que g es una métrica de ∇. Diremos que es localmente métrica, si por cada punto $p \in M$ existe una métrica local de $\mathcal{C}$ (U, g) con $p \in U$ de forma que $\nabla|U$ es la conexión de Levi-Civita de g.

Teorema 2.11 *Sea ∇ una conexión métrica, y g, $\overline{g}$ métricas de ∇. Existe entonces una constante $c \in \mathbb{R}$ tal que $\overline{g} = e^{2c}g$.*

Demostración. **Supongamos primero que M es simplemente conexa, fijado $p \in M$, y sea $\overline{g}|_p = e^{2c}\ g|_p$, entonces para cada $q \in M$, podemos definir $\overline{g}|_q = e^{2c}\ g|_q$ por transporte paralelo de $\overline{g}|_p = e^{2c}\ g|_p$ a lo largo de una curva γ uniendo p a q y este transporte no depende de la curva γ elegida por ser M simplemente conexo. En el caso de que M sea conexa, en torno a cada punto p puede tomarse un abierto simplemente conexo y hay una constante c_0 de forma que $\overline{g}|_{M_0} = e^{2c_0}\ g|_{M_0}$, y esto permite demostrar que el conjunto

$$N = \left\{x \in M : \overline{g}|_x = e^{2c}\ g|_x\right\}$$

es no vacío (pues $p \in N$), abierto y cerrado a la vez, así que $N = M$. ■

Corolario 2.4 *Supongamos ∇ conforme y localmente métrica. Si (U_1, g_1), (U_2, g_2) son métricas locales de ∇, entonces para cada componente conexa U de $U_1 \cap U_2$ existe una constante λ con $g_2 = \lambda g_1$ en U.*

Observación 2.5 *a) Sea (V, g) un espacio de Lorentz. Una base $(u_1, \ldots, u_n)$ de V, se dirá ortogonal si existe $\lambda \in \mathbb{R}^+$, de forma que $(e_1, \ldots, e_n) = (\lambda u_1, \ldots, \lambda u_n)$ sea base ortonormal.*

b) La estructura conforme en M induce para cada $p \in M$ una estructura conforme en T_pM. Una base $(u_1, \ldots, u_n)$ en T_pM se dirá ortogonal si lo es respecto a $\mathcal{C}_p$.

c) Una métrica $g \in \mathcal{C}$ determina una forma de volumen canónica en M definida por la condición $\Omega(e_1, \ldots, e_n) = 1$ si $(e_1, \ldots, e_n)$ constituye una base ortonormal positivamente orientada. Al operador divergencia trivial asociado, lo denotamos por div_g.

Lema 2.5 *Sea (V, g) un espacio vectorial de Lorentz y Ω forma de volumen en V. Si $\Omega(u_1, \ldots, u_n) = \Omega(\overline{u}_1, \ldots, \overline{u}_n)$, entonces si $(u_1, \ldots, u_n)$ es base ortonormal, $(\overline{u}_1, \ldots, \overline{u}_n)$ también lo es.*

Lema 2.6 *Si ∇ es una conexión conforme y $(u_1,\ldots,u_n)$ es base ortogonal, entonces para toda curva diferenciable $\gamma : [0,b] \to M$ el transporte paralelo define bases ortogonales para todo $t \in [0,b]$.*

Teorema 2.12 *Sea ∇ una conexión conforme. La condición necesaria y suficiente para que ∇ sea conexión métrica, es que el operador divergencia div_∇ sea trivial.*

Demostración. Si $g \in [g]$ es una métrica global, entonces ∇ preserva el volumen de g, y se verifica que $\mathrm{div}_\nabla = \mathrm{div}_\Omega = \mathrm{div}_g$, que es un operador divergencia trivia).

Recíprocamente, supóngase $\mathrm{div}_\nabla = \mathrm{div}_\Omega$ para cierta forma de volumen Ω de M.Fijemos $p \in M$ y $(u_1,\ldots,u_n)$ una base ortogonal de T_pM, con $\Omega(u_1,\ldots,u_n) = 1$. Para cada punto $q \in M$, sea $\gamma_q : [0,1] \longrightarrow M$ una curva diferenciable que une p y q, y tomemos g_q una mÃ©trica en T_qM tal que $(\gamma_q u_1(1),\ldots,\gamma_q u_n(1))$ sea base g_q-ortonormal.

)La métrica g_q no depende de la curva γ_q tomada uniendo p a q, pues si $\overline{\gamma}_q$: $[0,1] \longrightarrow M$ es otra tal curva, por el Lema **??**, la base $(\overline{\gamma}_q u_1(1),\ldots,\overline{\gamma}_q u_n(1))$ es $[g]$-ortogonal, y por tanto g_q-ortogonal).

Como $\nabla\Omega = 0$:

$$1 = \Omega(\gamma_q u_1(1),\ldots,\gamma_q u_n(1)) = \Omega(\overline{\gamma}_q u_1(1),\ldots,\overline{\gamma}_q u_n(1))$$

se concluye por el Lema **??** que $(\overline{\gamma}_q u_1(1),\ldots,\overline{\gamma}_q u_n(1))$ es también base g_q-ortonormal).

Es trivial ver que la correspondencia $M \ni q \to g_q$ define una métrica g global para ∇ ■

Corolario 2.5 *La condición necesaria y suficiente para que una conexión conforme en M sea localmente métrica es que su tensor de Ricci sea simétrico.*

Teorema 2.13 *Dado un operador divergencia div, existe una única conexión conforme ∇ tal que $div = div_\nabla$. Dicha conexión es (localmente) métrica si y solo si div es (localmente) trivial..*

3 APÉNDICE I: Demostración del Lema 2.4

Lema 3.1 *Sea $\Delta : V \times V \to V$ un tensor simétrico sobre el espacio vectorial de Lorentz V. Supóngase que $\Delta(u,u)$ es proporcional a u para todo vector luz u de V. Existe entonces una única 1-forma $\alpha \in V^*$, y un único vector $a \in V$ tales que:*

$$\Delta(v,w) = \langle v,w\rangle a + \beta(v)w + \beta(w)v \quad \textit{para todo } v,w \in V$$

Demostración. Haremos la demostración para dimensión de V igual a cuatro:

Evidentemente los tensores del tipo de arriba pertenecen al espacio vectorial $\mathfrak{J}$ de los tensores $\Delta : V \times V \to V$ tales que $\Delta(u,u)$ es proporcional a u para todo vector luz u de V, y la aplicación:

$$V\times V^* \ni (a,\beta) \longrightarrow (\Delta_{(a,\beta)} : V\times V \ni (u,v) \longrightarrow \langle v,w\rangle a+\beta(v)w+\beta(w)v \in V) \in \mathfrak{J}$$

es lineal e inyectiva, por lo que $\dim \mathfrak{J} \geq 8$. Si probamos por algún procedimiento que $\dim \mathfrak{J} \leq 8$ habremos concluido.

Fijada (e_0,e_1,e_2,e_3) base ortonormal de V, e identificando cada vector con sus coordenadas $(\xi^0,\xi^1,\xi^2,\xi^3)$ tendremos:

$$\Delta(\xi,\xi) = (\Delta^k_{IJ}\xi^I\xi^J)e_k$$

Sea Δ^k la forma bilineal en V con $\Delta^k(\xi,\xi) = \Delta^k_{IJ}\xi^I\xi^J$.

Por hipótesis para cada vector luz existe un número $\gamma(\xi) \in \mathbb{R}$ tal que:

$$\Delta^k(\xi,\xi) = \Delta^k_{IJ}\xi^I\xi^J = \gamma(\xi)\xi^k \quad \text{para } k = 0,1,2,3,4$$

y se tiene para $h,k \in \{0,1,2,3,4\}$ y para todo vector luz:

$$\xi^k\Delta^h(\xi) = \xi^h\Delta^k(\xi)$$

Como la dimensión del espacio de tensores simétricos $V \times V \to V$ es igual a 40, será necesario obtener 32 ecuaciones lineales independientes en los coeficientes Δ^k_{IJ} de los tensores de $\mathfrak{J}$. Sea $\Delta \in \mathfrak{J}$.

Imponiendo la condición $\xi^0\Delta^1(\xi) = \xi^1\Delta^0(\xi)$ a la colección de vectores luz: $u_1 = (1,0,1,0), u_2 = (1,0,-1,0), u_3 = (1,0,0,1), u_4 = (1,0,0,-1), u_5 = (1,0,\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}), u_6 = (1,0,-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}})$ en los que $\xi^0 = 1, \xi^1 = 0$, se deduce $\Delta^1(u_i,u_i) = 0, i = 1,2,3,4,5,6$, obteniéndose el sistema:

- $\Delta^1_{00} + 2\Delta^1_{02} + \Delta^1_{22} = 0$
- $\Delta^1_{00} - 2\Delta^1_{02} + \Delta^1_{22} = 0$
- $\Delta^1_{00} + 2\Delta^1_{03} + \Delta^1_{33} = 0$

- $\Delta^1_{00} - 2\Delta^1_{03} + \Delta^1_{33} = 0$
- $\Delta^1_{00} + \frac{1}{\sqrt{2}}\Delta^1_{02} + \frac{1}{\sqrt{2}}\Delta^1_{03} + \frac{1}{2}\Delta^1_{22} + \frac{1}{2}\Delta^1_{23} + \frac{1}{2}\Delta^1_{33} = 0$
- $\Delta^1_{00} + \frac{1}{\sqrt{2}}\Delta^1_{02} + \frac{1}{\sqrt{2}}\Delta^1_{03} + \frac{1}{2}\Delta^1_{22} - \frac{1}{2}\Delta^1_{23} + \frac{1}{2}\Delta^1_{33} = 0$

■

Demostración. Que equivale a: $\Delta^1_{00} = \Delta^1_{02} = \Delta^1_{03} = \Delta^1_{22} = \Delta^1_{23} = \Delta^1_{33} = 0$

De forma análoga se obtiene: $\Delta^2_{00} = \Delta^2_{01} = \Delta^2_{03} = \Delta^2_{11} = \Delta^2_{13} = \Delta^2_{33} = 0$ $\Delta^3_{00} = \Delta^3_{01} = \Delta^3_{02} = \Delta^3_{11} = \Delta^3_{12} = \Delta^3_{22} = 0$.

Rescribiendo ahora las funciones Δ^k queda por ejemplo: $\Delta^1(\xi) = \xi^1(2\Delta^1_{01}\xi^0 + \Delta^1_{11}\xi^1 + \Delta^1_{21}\xi^2 + \Delta^1_{31}\xi^3)$ $\Delta^2(\xi) = \xi^2(2\Delta^2_{02}\xi^0 + \Delta^2_{12}\xi^1 + \Delta^2_{22}\xi^2 + \Delta^2_{32}\xi^3)$ y la condición $\xi^1\Delta^2(\xi) = \xi^2\Delta^1(\xi)$ para vectores luz, implica:

$$\xi^1\xi^2(2\Delta^1_{01}\xi^0+\Delta^1_{11}\xi^1+\Delta^1_{21}\xi^2+\Delta^1_{31}\xi^3) = \xi^1\xi^2(2\Delta^2_{02}\xi^0+\Delta^2_{12}\xi^1+\Delta^2_{22}\xi^2+\Delta^2_{32}\xi^3)$$

Tomando una base de vectores luz con $\xi^1\xi^2 \neq 0$, se concluye: $\Delta^1_{01} = \Delta^2_{02}, \Delta^1_{11} = \Delta^2_{12}, \Delta^1_{21} = \Delta^2_{22}, \Delta^1_{31} = \Delta^2_{32}$ y aplicando análogo razonamiento intercambiando el 2 y el 3, queda: $\Delta^1_{01} = \Delta^3_{03}, \Delta^1_{11} = \Delta^3_{13}, \Delta^1_{21} = \Delta^3_{23}, \Delta^1_{31} = \Delta^3_{33}$.

Hemos ya obtenido 26 ecuaciones independientes. Las últimas 6 ecuaciones afectan a los coeficientes de la forma bilineal Δ^0. Aplicando al vector luz $\xi = (1,1,0,0)$, $\Delta^0(\xi) = \Delta^1(\xi)$ y a $(1,-1,0,0)$, $\Delta^0(\xi) = \Delta^1(\xi)$ se obtiene: $\Delta^0_{01} = \Delta^1_{01}$ y $\Delta^0_{00} + \Delta^0_{11} = \Delta^1_{11}$. Análogamente: $\Delta^0_{02} = \Delta^2_{02}, \Delta^0_{00} + \Delta^0_{22} = \Delta^2_{22}, \Delta^0_{03} = \Delta^3_{03}, \Delta^0_{00} + \Delta^0_{33} = \Delta^3_{33}$. ■

4 APÉNDICE II: Transporte de formas de volumen

En lo que sigue, $\gamma : I = [0, a] \to M$ es una curva (al menos continua) en $M, \gamma(0) = p, \Omega_p$ es una forma de volumen en T_pM.

4.1 Transporte respecto a un O. divergencia localmente trivial.

Fijado un operador divergencia localmente trivial (ODLT) div en M, se define el transporte paralelo de Ω_p a lo largo de γ como una función $\Omega(t)$ que hace corresponder a cada $t \in I$ una forma de volumen $\Omega(t)$ en $T_{\gamma(t)}M$, verificando las propiedades:

TP0) $\Omega(0) = \Omega_p$

TP1) Para cada $t_0 \in I$ existe una trivialización local de div y $\epsilon > 0$ tal que: $\Omega(t) = \Omega(\gamma(t))$ para todo $t \in I$ con $|t - t_0| < \epsilon$.

Usando la Observación 1) de 2.1.1 es elemental probar:

Teorema 4.1 *El transporte de Ω_p a lo largo de γ, respecto a un ODLT div, existe y es único. El transporte $\Omega(t)$ construido se denotará por: $\Omega(t) = (\gamma\Omega_p)_{div}(t)$.*

Observación 4.1 *Si Ω es una forma de volumen en M, y $\Omega_p = \lambda\Omega(p)$, entonces: $(\gamma\Omega_p)_{div_\Omega}(t) = \lambda\Omega(\gamma(t))$.*

Teorema 4.2 *Si Ω es una forma de volumen en M, y div ODLT tal que $div = div_\Omega + \alpha$ (para α 1-forma, necesariamente cerrada), entonces:*

$$(\gamma\Omega_p)_{div}(t) = \left[\exp \int_0^t \gamma^*(\alpha)\right] (\gamma\Omega_p)_{div_\Omega}(t) \quad (1)$$

Demostración. Podemos elegir Ω de forma que $\Omega_p = \Omega(p)$. Supóngase primero que $\alpha = d\sigma$ en M. Entonces con $\Omega' = \exp(\sigma)\Omega$ y podemos elegir σ con $\sigma(p) = 0$, de forma que $div = div_{\Omega'}$ y $\Omega'(p) = \Omega_p$. Así:

$$\begin{aligned}(\gamma\Omega_p)_{div}(t) &= \Omega'(\gamma(t)) = \exp[\sigma(\gamma(t)) - \sigma(\gamma(0))]\Omega(\gamma(t)) \\ &= \left[\exp \int_0^t \gamma^*(d\sigma)\right] (\gamma\Omega_p)_{div_\Omega}(t)\end{aligned}$$

Como la fórmula (1) del transporte es válida al menos localmente, se concluye que el conjunto de puntos $t \in I$ tales que dicha fórmula es válida es abierto (y cerrado por razones de continuidad). ■

Corolario 4.1 *Sean div y div' ODLT con $div' = div + \beta$ (β cerrada). Entonces:*

$$(\gamma\Omega_p)_{div'}(t) = \left[\exp\int_0^t \gamma^*(\beta)\right](\gamma\Omega_p)_{div}(t)$$

Demostración. Fijada Ω forma de volumen en M, sea $div = div_\Omega + \alpha, div' = div_\Omega + \alpha'$, entonces $\beta = \alpha' - \alpha$, y se tiene:

$$\begin{aligned}(\gamma\Omega_p)_{div'}(t) &= \left[\exp\int_0^t \gamma^*(\alpha')\right]\Omega(\gamma(t)) = \\ &= \left[\exp\int_0^t \gamma^*(\alpha')\right]\left[\exp\int_0^t \gamma^*(-\alpha)\right](\gamma\Omega_p)_{div}(t)\end{aligned}$$

■

4.2 Transporte respecto a un operador divergencia.

Usaremos la fórmula del corolario II.1.5 para definir el transporte de formas de volumen respecto a un OD arbitrario:

Teorema 4.3 *Sea $\overline{div}$ un OD, y sean div, div' ODLT. Supóngase: $\overline{div} = div + \alpha$ y $\overline{div} = div' + \alpha'$. Entonces:*

$$\left[\exp\int_0^t \gamma^*(\alpha)\right](\gamma\Omega_p)_{div}(t) = \left[\exp\int_0^t \gamma^*(\alpha')\right](\gamma\Omega_p)_{div'}(t)$$

A este valor común se le denota por $(\gamma\Omega_p)_{\overline{div}}(t)$, y se denomina transporte paralelo de Ω_p respecto al operador divergencia $\overline{div}$.

Demostración. Sea

$$\overline{\Omega}(t) = \left[\exp\int_0^t \gamma^*(\alpha)\right](\gamma\Omega_p)_{div}(t) y \overline{\Omega}'(t) = \left[\exp\int_0^t \gamma^*(\alpha')\right](\gamma\Omega_p)_{div'}(t)$$

Se tiene $div' = div + (\alpha - \alpha')$. Por II.1.5 se verifica:

$$(\gamma\Omega_p)_{div'}(t) = \left[\exp\int_0^t \gamma^*(\alpha - \alpha')\right](\gamma\Omega_p)_{div}(t)$$

y se deduce $\overline{\Omega}'(t) = \overline{\Omega}(t)$ por simple sustitución. ■

Corolario 4.2 *Si div, div' son OD en M, con $div' = div + \alpha$ entonces:*

$$(\gamma\Omega_p)_{div'}(t) = \left[\exp\int_0^t \gamma^*(\alpha)\right](\gamma\Omega_p)_{div}(t)$$

4.3 Operador divergencia de una conexión afín.

Una conexión ∇ (no necesariamente simétrica) en M, induce un operador $div_\nabla : \mathfrak{X}(M) \ni X \longrightarrow -\text{Traza}(A_X) \in \mathfrak{F}(M)$ con $A_X : \mathfrak{X}(M) \ni V \longrightarrow T(V,X) - \nabla_V X \in \mathfrak{X}(M)$ que es un operador divergencia, que en coordenadas locales se escribe:

$$div_\nabla(X) = \sum \frac{\partial X^k}{\partial x^k} + X^j \sum \Gamma^k_{jk}$$

Se puede probar que el transporte de formas volumen inducido por la conexión, coincide con el definido por el operador div_∇.

Sin embargo para nuestro propósito es suficiente con lo siguiente:

Teorema 4.4 *Sea ∇ una conexión, y Ω forma de volumen en M. Entonces: Ω es un volumen para ∇ si y solo si $div_\nabla = div_\Omega$. En particular, ∇ admite volumen global, si y solo si div_∇ es trivial.*

Demostración. Se ve fácilmente que para cada $X \in \mathfrak{X}(M)$ es $A_X = L_X - \nabla_X$ que induce un operador diferencial tal que $A_X(f) = 0$ para todo $f \in \mathfrak{F}(M)$. Así, si Ω es un volumen para ∇, y $(X_1, \ldots, X_n)$ es una paralelización local de M, se tiene para $X \in \mathfrak{X}(M)$ por ser $\nabla_X \Omega = 0$:

$$(L_X\Omega)(X_1, \ldots, X_n) = (A_X\Omega)(X_1, \ldots, X_n) =$$
$$-\sum \Omega(\ldots, A_X X_i, \ldots) = (-\text{traza } A_X)\Omega(X_1, \ldots, X_n)$$

el recíproco se prueba de forma análoga. ■

Corolario 4.3 *Una conexión en M admite un volumen local en un entorno de cada punto, si y solo si el operador div_∇ es un ODLT.*

5 APÉNDICE III: Operadores divergencia y estructuras.

Lema 5.1 *Fijada la conexión $\mathcal{C}$-conforme ∇, y una 1-forma $\alpha \in \mathfrak{X}^*(M)$, entonces la conexión $\tilde{\nabla}$ definida por:*

$$\tilde{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + \alpha(X)Y$$

es conforme, y de hecho, fijado $g \in \mathcal{C}$ puede elegirse α de forma que la conexión $\tilde{\nabla}$ sea g-métrica.

Demostración. Sea $\gamma : [0, a] \to M$ una curva diferenciable, y $X(t)$ un campo ∇-paralelo a lo largo de γ. Probaremos que $\tilde{X}(t) = \left[\exp \int_0^t \alpha\right] X(t)$ es un campo $\tilde{\nabla}$-paralelo. En efecto, denotando $E(t) = \exp \int_0^t -\gamma^*\alpha$, se verifica: $\frac{dE}{dt} = -E\alpha(\gamma')$, y

$$\begin{aligned} \tilde{\nabla}_{\gamma'} \tilde{X} = \tilde{\nabla}_{\gamma'}(E \cdot X) &= \frac{dE}{dt} X + E\alpha(\gamma')X \\ &= -\alpha(\gamma')EX + \alpha(\gamma')EX = 0 \end{aligned}$$

. Por tanto $\tilde{\nabla}$ lleva igual que ∇ bases ortogonales a bases ortogonales por transporte paralelo, y $\tilde{\nabla}$ es conforme. ■

La cuestión ahora es, si fijada la conexión $\mathcal{C}$-conforme y una métrica $g \in \mathcal{C}$, es posible elegir la 1-forma α de manera que la conexión $\tilde{\nabla}$ sea g-métrica. La respuesta es ahora trivialmente afirmativa, si se tiene en cuenta que: $div_{\tilde{\nabla}} = div_{\nabla} + n\alpha$ y tomando $n\alpha = div_g - div_{\nabla}$ se concluye que $div_{\tilde{\nabla}} = div_g$, por lo que $\tilde{\nabla}$ es g-métrica.

5.1 Operador divergencia y estructura proyectiva.

Teorema 5.1 *Dada una estructura proyectiva $\mathcal{P}$ en M, y div OD en M, existe una única conexión simétrica ∇ compatible con $\mathcal{P}$ y tal que $div_{\nabla} = div$.*

Demostración. Sea $\nabla \in \mathcal{P}$. Usando el Teorema 1.1.1 se ve que todas las conexiones (simétricas) $\overline{\nabla}$ compatibles con $\mathcal{P}$ se obtienen de la forma: $\overline{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + \gamma(X)Y + \gamma(Y)X$ para γ 1-forma en M. Se prueba inmediatamente que: $div_{\overline{\nabla}} = div_{\nabla} + (n+1)\gamma$, así- es suficiente tomar $(n+1)\gamma = div - div_{\nabla}$. ■

5.2 Operador divergencia y estructura conforme.

Teorema 5.2 *Dada una estructura conforme $\mathcal{C}$ en M, y div OD en M, existe una única conexión simétrica $\overline{\nabla}$ compatible con $\mathcal{C}$ y tal que $div_{\overline{\nabla}} = div$.*

Demostración. Sea ∇ conexión g-métrica. Usando el Teorema 1.2.2 se ve que todas las conexiones (simétricas) $\overline{\nabla}$-conformes se obtienen de la forma:

$$\overline{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + \alpha(X)Y + \alpha(Y)X - g(X,Y)A$$

para α 1-forma en M y A el campo g-equivalente. Se prueba inmediatamente que: $div_{\overline{\nabla}} = div_{\nabla} + n\alpha$, así es suficiente tomar $n\alpha = div - div_{\nabla}$. ■

6 APÉNDICE IV: Tensor de Weyl.

Sea $M = M^m$, con $m \geq 3$ una variedad diferenciable con estructura conforme $\mathcal{C}$, en donde se destaca una métrica $g \in \mathcal{C}$ para usarla como *"punto de partida"*, y denotamos $\langle X, Y \rangle = g(X,Y)$ y $(X,Y) \to \nabla_X Y$ a la conexión de Levi-Civita de g. Si $(X,Y) \to T(X,Y)$ es un tensor covariante denotamos por $X \to \widetilde{T}(X)$ el único tensor tal que

$$\left\langle \widetilde{T}(X), Y \right\rangle = T(X,Y)$$

y por $(X,Y,Z) \to \widehat{T}(X,Y,Z)$ al tensor

$$\widehat{T}(X,Y,Z) = g(X,Y)\,\widetilde{T}(Z)$$

Por otra parte llamando $tr(T) = tr\left(X \to \widetilde{T}(X)\right)$ denotamos por

$$\widehat{tr}(T) = tr(T)\,g$$

Observación 6.1 *Llamamos la atención sobre el hecho de que la construcción de los tensores $\widehat{T} = \widehat{T}_g$ y $\widehat{tr}(T) = \widehat{tr}(T)_g$ a partir de T y de $g \in \mathcal{C}$, depende de T y de $\mathcal{C}$ pero no de la métrica g usada dentro de la clase conforme $\mathcal{C}$, es decir $\widehat{T}_g = \widehat{T}_{\overline{g}}$ y $\widehat{tr}(T)_g = \widehat{tr}(T)_{\overline{g}}$ si g, $\overline{g} \in \mathcal{C}$. Este hecho tendrá relevancia a la hora de construir la curvatura conforme de Weyl.*

La razón de esto es la siguiente: si $\overline{g} = e^{2\sigma} g$, en coordenadas se tiene

$$\overline{g}_{ij} = e^{2\sigma} g_{ij},\ \left(\overline{g}_{ij}\right)^{-1} = \left(\overline{g}^{ij}\right) = e^{-2\sigma}\left(g^{ij}\right)$$

por lo que

$$\widetilde{T}^i_j = T_{jk} g^{ki},\ tr(T) = T_{jk} g^{kj},$$
$$\widehat{T}^i_{rsj} = g_{rs}\ T_{jk} g^{ki},\ \widehat{tr}(T)_{rs} = g_{rs} T_{jk} g^{kj}$$

Si $\overline{g} = e^{2\sigma} g$ es otra métrica conforme de $\mathcal{C}$ para cierta $\sigma : M \to \mathbb{R}$ diferenciable denotando $\overline{\nabla}$ las conexión de Levi-Civita de $\overline{g}$ se tiene

$$\overline{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + X(\sigma)\,Y + Y(\sigma)\,X - g(X,Y)\,A, \text{ donde } A = \mathrm{grad}_g\,\sigma \quad (1)$$

El tensor de curvatura de g es

$$R(X,Y)\,Z = -\nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_Y \nabla_X Z + \nabla_{[X,Y]} Z$$

y denotamos por $\overline{R}$ al tensor de curvatura de $\overline{g}$, entonces un *penoso calculo* prueba que el tensor diferencia

$$D(X,Y)\,Z = \overline{R}(X,Y)\,Z - R(X,Y)\,Z$$

se escribe

$$\begin{aligned} D(X,Y)Z = &\{Q(Y,Z) + \langle Y,Z\rangle \langle A,A\rangle\} X \\ &- \{Q(X,Z) + \langle X,Z\rangle \langle A,A\rangle\} Y \\ &+ \langle Y,Z\rangle \widetilde{Q}(X) - \langle X,Z\rangle \widetilde{Q}(Y) \end{aligned} \tag{2}$$

donde

$$\begin{aligned} \widetilde{Q}(X) &= \nabla_X A - \langle X,A\rangle A \\ Q(X,Y) &= \left\langle \widetilde{Q}(X), Y \right\rangle = \langle \nabla_X A, Y\rangle - \langle X,A\rangle \langle A,Y\rangle \end{aligned}$$

El tensor de Ricci, Ric de g está definido por

$$Ric(X,Z) = tr\{Y \to R(X,Y)Z\}$$

es un tensor simétrico y su curvatura escalar es

$$Sc = tr\left(\widetilde{Ric}\right)$$

Observación 6.2 *Observese que no es correcto decir que la curvatura escalar $\overline{Sc}$ de $\overline{g}$ sea $\widetilde{\overline{Sc}}$.*

El tensor diferencia

$$E(X,Z) = \overline{Ric}(X,Z) - Ric(X,Z) = tr\{Y \to D(X,Y)Z\}$$

viene dado por la fórmula

$$E(X,Z) = (2-m)Q(X,Z) - \{(q + (m-1))\langle A,A\rangle\} \langle X,Z\rangle$$

donde $q = tr\left(\widetilde{Q}\right)$ es decir

$$E = (2-m)Q + \{(q + (m-1))\langle A,A\rangle\} g \tag{3}$$

Así que $\widetilde{E}(X) = \widetilde{\overline{Ric}}(X) - \widetilde{Ric}(X)$ tiene la siguiente expresión:

$$\widetilde{E}(X) = (2-m)\widetilde{Q}(X) - \{q + (m-1)\langle A,A\rangle\} X$$

contrayendo $\widetilde{E}$ queda

$$\begin{aligned} tr\left(\widetilde{E}\right) &= (2-m)q - \{(q + (m-1))\langle A,A\rangle\} m \\ &= (2-2m)q - (m-1)m\langle A,A\rangle \end{aligned} \tag{4}$$

despejando q en (4) y sustituyendo en (3) y despejando Q queda

$$Q = -\frac{1}{2}\langle A, A\rangle g + \frac{1}{2(m-1)(m-2)}\widehat{tr}(E) - \frac{1}{(m-2)}E$$

finalmente, sustituyendo esta expresión de Q en (2) queda:

$$\begin{aligned} D(X,Y)Z = &\frac{1}{(m-2)}\{E(X,Z)Y - E(Y,Z)X\} \\ &+ \frac{1}{(m-2)}\left\{\widehat{E}(X,Z,Y) - \widehat{E}(Y,Z,X)\right\} \\ &- \frac{1}{(m-1)(m-2)}\left\{\left(\widehat{tr}E\right)(X,Z)Y - \left(\widehat{tr}E\right)(Y,Z)X\right\} \end{aligned} \tag{5}$$

Teniendo en cuenta que $E = \overline{Ric} - Ric$, $\widehat{E} = \widehat{\overline{Ric}} - \widehat{Ric}$, $\widehat{tr}E = \widehat{tr}\overline{Ric} - \widehat{tr}Ric$, podemos construir el tensor

$$\begin{aligned} G(X,Y)Z = &\frac{1}{(m-2)}\{Ric(X,Z)Y - Ric(Y,Z)X\} \\ &+ \frac{1}{(m-2)}\left\{\widehat{Ric}(X,Z,Y) - \widehat{Ric}(Y,Z,X)\right\} \\ &- \frac{1}{(m-1)(m-2)}\left\{\left(\widehat{tr}Ric\right)(X,Z)Y - \left(\widehat{tr}Ric\right)(Y,Z)X\right\} \end{aligned}$$

...¡que depende sólo de g!

$$\begin{aligned} \overline{G}(X,Y)Z = &\frac{1}{(m-2)}\left\{\overline{Ric}(X,Z)Y - \overline{Ric}(Y,Z)X\right\} \\ &+ \frac{1}{(m-2)}\left\{\widehat{\overline{Ric}}(X,Z,Y) - \widehat{\overline{Ric}}(Y,Z,X)\right\} \\ &- \frac{1}{(m-1)(m-2)}\left\{\left(\widehat{tr}\overline{Ric}\right)(X,Z)Y - \left(\widehat{tr}\overline{Ric}\right)(Y,Z)X\right\} \end{aligned}$$

...¡que depende sólo de $\overline{g}$! El tensor de curvatura de Weyl se define entonces para g y $\overline{g}$ respectivamente:

$$\begin{aligned} C(X,Y)Z &= R(X,Y)Z - G(X,Y)Z \\ \overline{C}(X,Y)Z &= \overline{R}(X,Y)Z - \overline{G}(X,Y)Z \end{aligned}$$

y se tiene entonces por (5)

$$D = \overline{G} - G$$

$$\overline{C} - C = \overline{R} - R + G - \overline{G} = D - \left(\overline{G} - G\right) = 0$$