TEOREMA DE LA FUNCIÓN INVERSA

<u>Definición</u>: Sean $\mathcal{U}, \mathcal{V}$ abiertos de $\mathbb{R}^n$. Decimos que $h: \mathcal{U} \to \mathcal{V}$ es un homeomorfismo de $\mathcal{U}$ en $\mathcal{V}$ si h es biyectiva continua y $h^{-1}: \mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{U}$ es continua.

<u>Definición</u>: Sean $\mathcal{U}, \mathcal{V}$ abiertos de $\mathbb{R}^n$. Decimos que $h: \mathcal{U} \to \mathcal{V}$ es un C^p- difeomorfismo (ó difeomorfismo de clase $p \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$) de $\mathcal{U}$ en $\mathcal{V}$ si h es biyectiva, de clase p y $h^{-1}: \mathcal{V} \to \mathcal{U}$ es de clase p.

En particular todo C^p-difeomorfismo es un homeomorfismo.

<u>EJERCICIOS</u>

i) la composición de homeomorfismos es un homeomorfismo.

ii) la composición de C^p- difeomorfismos es un C^p- difeomorfismo.

iii) Si $L: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ es una aplicación lineal e isomorfismo (por ejemplo, una traslación), entonces L es un C^∞- difeomorfismo de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^n$. En particular, $\forall\ \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ abierto, $L(\mathcal{U})$ es abierto y L es un C^∞- difeomorfismo entre $\mathcal{U}$ y $L(\mathcal{U})$.

TEOREMA DE LA FUNCIÓN INVERSA

Sean $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ abierto, y $f: \mathcal{U} \to \mathbb{R}^n$ $f \in C^p(\mathcal{U})$, $p \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$.
Supongamos que $Jf(a) \neq 0$ para cierto $a \in \mathcal{U}$. Existen entonces abiertos $V \subset \mathbb{R}^n$, $W \subset \mathbb{R}^n$, $a \in V$, $f(a) \in W$ tales que la restricción de f de V a W, $f|_V : V \to W$ es un C^p-difeomorfismo.
Además, $\forall x \in V$, si $y = f(x)$, obtenemos $Df^{-1}(y) = (Df(x))^{-1}$ siendo $f^{-1}: W \to V$ la inversa local de f en a (la inversa de $f^{-1}|_V$).

DEMOSTRACIÓN

1) Por simplicidad, podemos asumir $a = 0$, $f(a) = 0$, $Df(a) = Id$ sin más que considerar

$$\tilde{f}(x) = (Df(a))^{-1} \circ \left(f(a+x) - f(a) \right)$$

En el abierto $\mathcal{U} - a$. Si el resultado es cierto para $\tilde{f}$, también será cierto para f, pues

$$f(y) = Df(a) \circ \tilde{f}(y-a) + f(a)$$

$$= T_{f(a)} \circ Df(a) \circ \tilde{f} \circ T_{-a}(y), \; y \in \mathcal{U}.$$

Siendo T_z la traslación de vector z (isomorfismo).
Así pues f es composición de tres isomorfismos y $\tilde{f}$.

2) Definimos $h(x) = x - f(x)$, $h: \mathcal{U} \to \mathbb{R}^n$, $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$

$$\left.\begin{array}{l} Dh(0) = Id - Df(0) = Id - Id = 0 \\ h \in C^p(\mathcal{U}) \end{array}\right\} \Rightarrow \exists\, r > 0 \,/\, \overline{B}_r(0) \subset \mathcal{U}$$

y $\|Dh(x)\| \leq \left(\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial h_i}{\partial x_j}(x) \right)^2 \right)^{1/2} \leq \frac{1}{2}$, $\forall\, \|x\| \leq r$ (I)

$\Rightarrow \|h(x)\| = \|h(x) - h(0)\| \leq \frac{1}{2}\|x - 0\| = \frac{1}{2}\|x\| \leq \frac{r}{2}$,
(Desigualdad del Valor medio) $\forall\, \|x\| \leq r$.

3) Para $y \in \overline{B}_{r/2}(0)$, definimos

$$h_y : \overline{B}_r(0) \to \overline{B}_r(0)$$
$$h_y(x) = y + h(x)$$

<u>BIEN DEFINIDA</u>: $\|h_y(x)\| \leq \|y\| + \|h(x)\| \leq \frac{r}{2} + \frac{r}{2} = r$, si $\|x\| \leq r$ e $\|y\| \leq \frac{r}{2}$.

Observemos que, en particular, si $\|y\| < \frac{r}{2}$, entonces $\|h_y(x)\| < r$, $\forall\, \|x\| \leq r$.

<u>h_y ES CONTRACTIVA</u>: $\|h_y(x) - h_y(x')\| = \|h(x) - h(x')\| \underset{(I)}{\leq} \frac{1}{2}\|x - x'\|$, $\forall\, x, x' \in \overline{B}_r(0)$. (II)

Podemos aplicar el Teorema del punto fijo para aplicaciones contractivas y deducir que existe un único punto fijo $x_y \in \overline{B}_r(0)$, es decir, un único $x_y \in \overline{B}_r(0)$ tal que $h_y(x_y) = y + h(x_y) = y + (x_y - f(x_y)) = x_y$,

es decir, un único $x_y \in \overline{B}_r(0)$ tal que $y = f(x_y)$.

Además, por la anterior observación, si $\|y\| < \frac{r}{2}$, entonces $\|x_y\| = \|h_y(x_y)\| < r$. Por tanto,

$$\boxed{\forall \|y\| < \frac{r}{2}, \exists ! \, x_y \in B_r(0) \text{ tal que } y = f(x_y)} \quad (\mathrm{III})$$

4) Definimos entonces $W := B_{r/2}(0)$, abierto de $\mathbb{R}^n$

$V := f^{-1}(B_{r/2}(0)) \cap B_r(0)$, abierto de $\mathbb{R}^n$

(si f es continua, la imagen inversa de un abierto es un abierto; en particular $f^{-1}(B_{r/2}(0))$ es abierto).

La afirmación (III) nos dice que la restricción de f a V en W es una biyección, $f|_V : V \longrightarrow W$.

Podemos considerar la inversa local

$$(f|_V)^{-1} : W \longrightarrow V$$
$$y \longrightarrow (f|_V)^{-1}(y) = x_y$$

Para simplificar la notación escribiremos f^{-1} en lugar de $(f|_V)^{-1}$.

Veamos que $f^{-1} : W \longrightarrow V$ es continua:

Si $y, y' \in W$,

$$\|f^{-1}(y) - f^{-1}(y')\| = \|x_y - x_{y'}\| = \|h_y(x_y) - h_{y'}(x_{y'})\| =$$

x_y punto fijo de h_y
$x_{y'}$ punto fijo de $h_{y'}$

$$= \| y + h(x_y) - y' - h(x_{y'}) \| \leq \| y - y' \| + \| h(x_y) - h(x_{y'}) \|$$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{Por (II)}}}{\leq} \| y - y' \| + \frac{1}{2} \| x_y - x_{y'} \| .$$

Por tanto, $\frac{1}{2} \| x_y - x_{y'} \| \leq \| y - y' \|$, es decir

$$\| f^{-1}(y) - f^{-1}(y') \| \leq 2 \| y - y' \| , \quad \forall \, y, y' \in W .$$

Así, f^{-1} es continua (de hecho lipschitziana, con constante de Lipschitz 2) y un homeomorfismo de W en V.

5) $Jf(x)$ es una expresión polinomial de las funciones $\left\{ \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(x) \right\}_{i,j=1}^{n}$ y por tanto de clase $C^p(\mathcal{U})$. Puesto que $Jf(0) \neq 0$, podemos asumir en el paso 1) que elegimos r suficientemente pequeño para que $Jf(x) \neq 0$, $\forall x \in \overline{B}_r(0)$.

Consideremos $(Df(x))^{-1}$, para $x \in \overline{B}_r(0)$. La matriz de este isomorfismo se obtiene de la matriz de $Df(x)$ de la siguiente forma: el elemento $a_{ij}(x)$ (fila i, columna j)

$$a_{ij}(x) = (-1)^{i+j} \frac{\det M_{ji}(x)}{Jf(x)} ,$$

donde $M_{ji}(x)$ es la matriz obtenida al suprimir de $Df(x)$ la fila j-ésima y la columna i-ésima.

Observemos que $\det M_{ji}(x)$ es también una expresión polinomial de las funciones $\left\{ \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(x) \right\}_{i,j=1}^{n}$, por tanto

de clase $C^p(U)$. Consecuentemente, $a_{ij}(x)$ es de clase C^p en todos aquellos puntos donde $Jf(x) \neq 0$, en particular en $\overline{B}_r(0)$. Así, $a_{ij}(x)$ es continua en $\overline{B}_r(0)$ y por ser $\overline{B}_r(0)$ compacto, $a_{ij}(x)$ ha de estar acotada en $\overline{B}_r(0)$.

Por tanto, existe una constante $M \geq 0$ tal que

$$\| (Df(x))^{-1} \| \leq \left(\sum_{i,j=1}^{n} (a_{ij}(x))^2 \right)^{1/2} \leq M, \quad \forall x \in \overline{B}_r(0).$$

6) Demostraremos que $f^{-1}: W \longrightarrow V$ es diferenciable.

Sean $y, y+k \in W$, y $f^{-1}(y) = x \in V$, $f^{-1}(y+k) = x+h \in V$, (por tanto $x, x+h \in B_r(0)$)

$$\| f^{-1}(y+k) - f^{-1}(y) - (Df(x))^{-1}(k) \| =$$

$$= \| (x+h) - x - (Df(x))^{-1}(f(x+h) - f(x)) \| =$$

$$= \| (Df(x))^{-1} \circ Df(x)(h) - (Df(x))^{-1}(f(x+h) - f(x)) \|$$

$$= \| (Df(x))^{-1} \circ [f(x+h) - f(x) - Df(x)(h)] \|$$

$$\leq \| (Df(x))^{-1} \| \, \| f(x+h) - f(x) - Df(x)(h) \|,$$

Por tanto,

$$0 \leq \frac{\| f^{-1}(y+k) - f^{-1}(y) - (Df(x))^{-1}(k) \|}{\|k\|} \leq M \cdot \frac{\| f(x+h) - f(x) - Df(x)(h) \|}{\|h\|} \cdot \frac{\|h\|}{\|k\|}$$

$$\underset{(IV)}{\leq} 2M \cdot \frac{\| f(x+h) - f(x) - Df(x)(h) \|}{\|h\|}.$$

La desigualdad (IV) se obtiene de la siguiente acotación:

$$\frac{\|h\|}{\|k\|} = \frac{\|(x+h)-x\|}{\|k\|} = \frac{\|f^{-1}(y+k)-f^{-1}(y)\|}{\|k\|} \leq \frac{2\|k\|}{\|k\|} = 2$$

Por ser f diferenciable en x, dado $\varepsilon>0$, consideramos $\frac{\varepsilon}{2M}>0$ y $\delta'>0$ asociado tal que si $0<\|h\|<\delta'$, entonces

$$\frac{\|f(x+h)-f(x)-Df(x)(h)\|}{\|h\|} < \frac{\varepsilon}{2M}.$$

Por ser f^{-1} 2-Lipschitz en W, si elegimos $\delta := \frac{\delta'}{2}>0$ y $0<\|k\|<\delta$, entonces $0<\|h\| = \|f^{-1}(y+k)-f^{-1}(y)\| \leq 2\|k\| < \delta'$ lo que finalmente nos da,

$$\frac{\|f^{-1}(y+k)-f^{-1}(y)-(Df(f^{-1}(y)))^{-1}(k)\|}{\|k\|} \leq \varepsilon.$$

Es decir, $f^{-1}: W \to V$ es diferenciable y

$$Df^{-1}(y) = \left(Df\left(f^{-1}(y)\right)\right)^{-1}, \ \forall\ y\in W.$$

Observemos que, por el apartado 5) las componentes de la matriz $n\times n$ que definen $Df^{-1}(y)$ tienen las expresiones

$$\tilde{a}_{ij}(y) = a_{ij}(f^{-1}(y)) = (-1)^{i+j}\frac{\det M_{ji}(f^{-1}(y))}{Jf(f^{-1}(y))},$$
$$y\in W$$

(composición de funciones continuas).

Por tanto $\tilde{a}_{ij}$ es continua $\forall\, i,j = 1,\dots,n$ y $f^{-1}: W \to V$ es de clase 1 en W

7) • Si $p=1$, el teorema ya ha sido probado.

• Si $p=2$, hemos de derivar las expresiones $\tilde{a}_{ij}$ para obtener la continuidad de todas sus parciales en W, y por tanto $f^{-1} \in C^2(W)$. Las funciones $\tilde{a}_{ij}$ son composición, cociente (donde el denominador no se anula), suma, producto de las componentes de f, f^{-1} y sus derivadas parciales de orden uno, todas ellas de clase C^1. Por tanto, $\tilde{a}_{ij}$ es de clase C^1 y consecuentemente f^{-1} de clase C^2.

• En general, para $p \geq 2$, se establece un argumento análogo derivando las funciones $\tilde{a}_{ij}$ $p-1$ veces.

//

NOTACIÓN (PARA EL TEOREMA DE LA FUNCIÓN IMPLÍCITA)

Sea $F: A \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^m$ de clase uno en A.

Denotamos por $(F_1, \dots, F_m)$ las componentes de F y por $(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m)$ las $n+m$ variables de F.

Si $a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$, $b = (b_1, \dots, b_m) \in \mathbb{R}^m$ tales que $(a,b) \in A$, denotamos por $\frac{\partial F}{\partial y}(a,b)$ a la matriz de las derivadas parciales de F respecto de $y_1, \dots, y_m$:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1}(a,b) & \cdots\cdots & \frac{\partial F_1}{\partial y_m}(a,b) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial F_m}{\partial y_1}(a,b) & \cdots\cdots & \frac{\partial F_m}{\partial y_m}(a,b) \end{pmatrix}.$$

y la derivada $\frac{\partial F}{\partial x}(a,b)$ es la matriz:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1}(a,b) & \cdots\cdots & \frac{\partial F_1}{\partial x_n}(a,b) \\ \vdots & & \\ \frac{\partial F_m}{\partial x_1}(a,b) & \cdots\cdots & \frac{\partial F_m}{\partial x_n}(a,b) \end{pmatrix}$$

EJERCICIO: i) Si $\mathcal{U}$ es un abierto de $\mathbb{R}^n$ y $\mathcal{V}$ es un abierto de $\mathbb{R}^m$ entonces $\mathcal{U} \times \mathcal{V} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m : x \in \mathcal{U}, y \in \mathcal{V}\}$ es un abierto de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$.

ii) Si $a \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}^m$, y $A \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ es un abierto de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ tal que $(a,b) \in A$ existen entonces $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$, $\mathcal{U}$ abierto de $\mathbb{R}^n$, $\mathcal{V} \subset \mathbb{R}^m$, $\mathcal{V}$ abierto de $\mathbb{R}^m$, con $a \in \mathcal{U}$, $b \in \mathcal{V}$, tales que $\mathcal{U} \times \mathcal{V} \subset A$.

TEOREMA DE LA FUNCIÓN IMPLÍCITA

Sea $A \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ abierto y $F: A \longrightarrow \mathbb{R}^m$ una función de clase C^p. Supongamos que $(a,b) \in A$ y $F(a,b)=0$. Si $\det\left(\frac{\partial F}{\partial y}(a,b)\right) \neq 0$, existen entonces $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ abierto, $a \in \mathcal{U}$, $\mathcal{V} \subset \mathbb{R}^m$ abierto, $b \in \mathcal{V}$ y una única función $f: \mathcal{U} \longrightarrow \mathcal{V}$ tal que $F(x, f(x)) = 0$, para todo $x \in \mathcal{U}$. Es decir, $\{(x, f(x)) : x \in \mathcal{U}\} = \{(x,y) \in \mathcal{U} \times \mathcal{V} : F(x,y) = 0\}$. $= \{(x,y) \in \mathcal{U} \times \mathcal{V} : y = f(x)\}$

Además, f es de clase C^p en $\mathcal{U}$ y verifica:

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} \cdot \frac{\partial f}{\partial x} = 0 ,$$

o en términos matriciales,

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial y_m} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial F_m}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial F_m}{\partial y_m} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial F_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial F_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

(es decir $\frac{\partial f}{\partial x} = -\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^{-1} \cdot \frac{\partial F}{\partial x}$)

<u>DEMOSTRACIÓN</u>: Vamos a aplicar el Teorema de la función inversa a la función $G: A \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ definida por $G(x,y) = (x, F(x,y))$. La ecuación $F(x,y)=0$ equivale pues a la ecuación $G(x,y) = (x,0)$. En particular $G(a,b) = (a,0)$.

La diferencial de G en (a,b) viene dada por la matriz

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & & 0 & & & \\ & \ddots & & & 0 & \\ 0 & & 1 & & & \\ \hline \frac{\partial F_1}{\partial x_1}(a,b) & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial x_n}(a,b) & \frac{\partial F_1}{\partial y_1}(a,b) & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial y_m}(a,b) \\ \vdots & & & \vdots & & \\ \frac{\partial F_m}{\partial x_1}(a,b) & \cdots & \frac{\partial F_m}{\partial x_n}(a,b) & \frac{\partial F_m}{\partial y_1}(a,b) & \cdots & \frac{\partial F_m}{\partial y_m}(a,b) \end{array}\right)$$

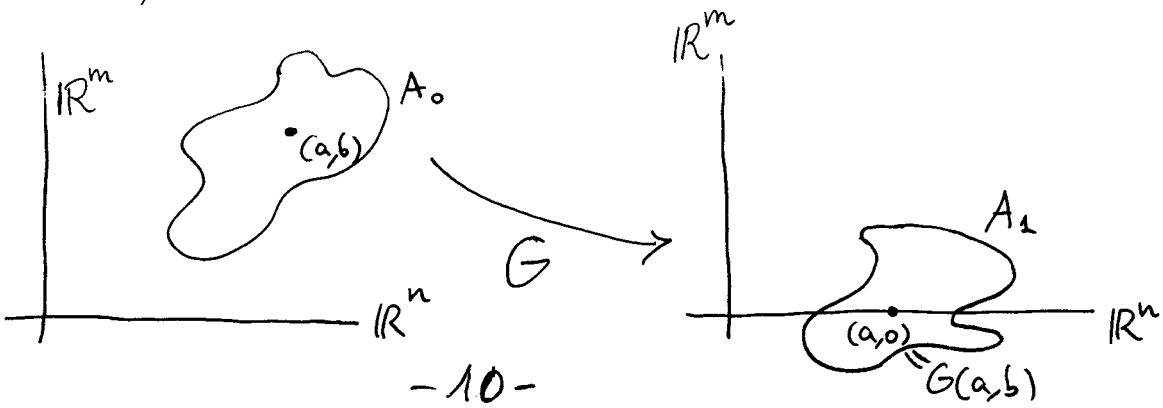
$(n\times n)$ $\quad$ $m\times n$

que abreviadamente podemos expresar como

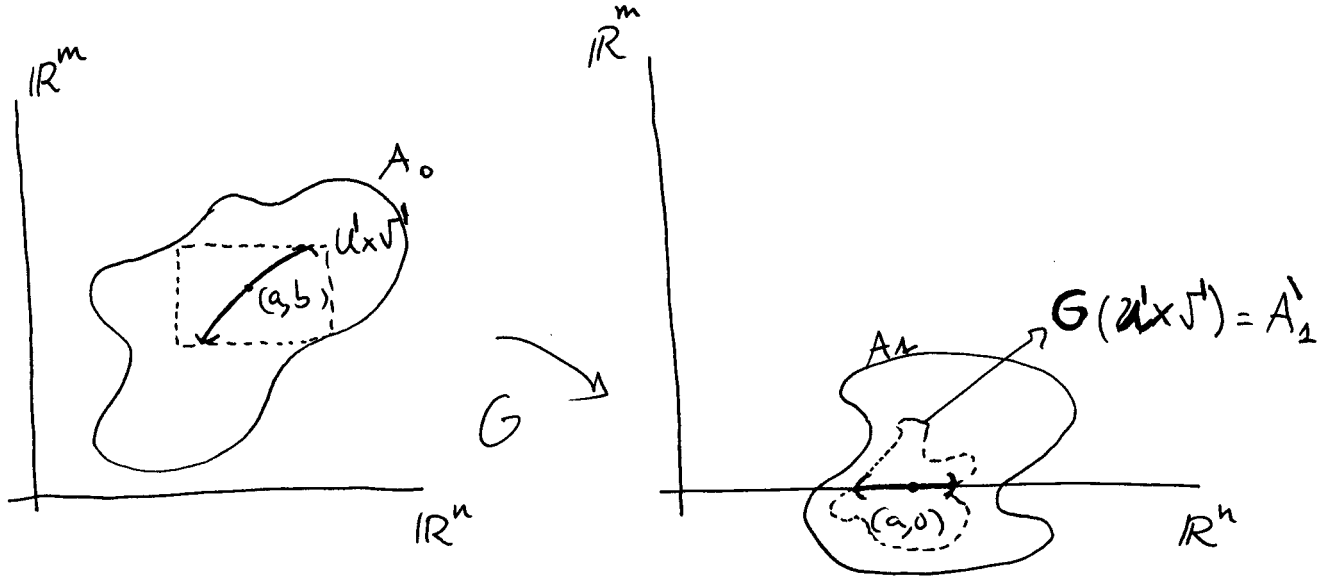
$$\begin{pmatrix} Id & 0 \\ \frac{\partial F}{\partial x}(a,b) & \frac{\partial F}{\partial y}(a,b) \end{pmatrix}$$

donde Id es la matriz identidad.

Claramente, $JG(a,b) = \det\left(\frac{\partial F}{\partial y}(a,b)\right) \neq 0$, por hipótesis. Podemos entonces aplicar el teorema de la función inversa a G, pues además G es de clase C^p en A. Existen entonces abiertos $A_0, A_1 \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$, $(a,b) \in A_0$, $G(a,b) = (a,0) \in A_1$ tales que la restricción de G a A_0, $G: A_0 \longrightarrow A_1$ es un C^p-difeomorfismo.



Consideremos, por el ejercicio propuesto, $\mathcal{U}' \subset \mathbb{R}^n$ abierto y $\mathcal{V}' \subset \mathbb{R}^m$ abierto, $a \in \mathcal{U}'$, $b \in \mathcal{V}'$, tal que el producto $\mathcal{U}' \times \mathcal{V}'$ (que también es un abierto de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$) está incluido en A_0. Llamamos $G(\mathcal{U}' \times \mathcal{V}') = A_1'$.



G es un C^p-difeomorfismo entre $\mathcal{U}' \times \mathcal{V}'$ y A_1' (ambos abiertos de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$)

Definimos, finalmente, la que va a ser la función f de la siguiente manera:

$\mathcal{U} := A_1' \cap \mathbb{R}^n$ abierto de $\mathbb{R}^n$, y $a \in \mathcal{U}$.

$\mathcal{V} := \mathcal{V}'$

$f = \pi \circ G^{-1} \circ i$, $\quad f : \mathcal{U} \longrightarrow \mathcal{V}$, siendo

$$i : \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow A_1' \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$$
$$x \longrightarrow i(x) = (x, 0)$$

$G^{-1}(x,0) = (x, (G^{-1})_{n+1}(x,0), \dots, (G^{-1})_{n+m}(x,0))$

$G^{-1} : A_1' \longrightarrow \mathcal{U}' \times \mathcal{V}'$ la función inversa local de $G : \mathcal{U}' \times \mathcal{V}' \longrightarrow A_1'$, que tiene de componentes $G^{-1}(x,y) = (x_1, \dots, x_n, (G^{-1})_{n+1}(x,y), \dots, (G^{-1})_{n+m}(x,y))$

y π la proyección

$$\pi : \mathcal{U}' \times \mathcal{V}' \longrightarrow \mathcal{V}' = \mathcal{V}$$
$$(x,y) \longrightarrow \pi(x,y) = y$$

Es decir, $f(x) = \pi \circ G^{-1}(x,0) = \left((G^{-1})_{n+1}(x,0), \dots, (G^{-1})_{n+m}(x,0) \right)$

siendo $(G^{-1})_k$ la k-ésima componente de G^{-1}

Puesto que $i \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, $G^{-1} \in C^p(A_1')$ y $\pi \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m)$ la composición $f \in C^p(\mathcal{U})$. Además,

$$\{(x, f(x)) : x \in \mathcal{U}\} = \{(x,y) \in \mathcal{U} \times \mathcal{V} : F(x,y) = 0\}$$

$\Big($ para $(x,y) \in \mathcal{U} \times \mathcal{V}$, $F(x,y) = 0 \iff G(x,y) = (x,0) \iff$

$(x,y) = G^{-1}(x,0) \underset{!!}{\iff} \underbrace{\pi(x,y)}_{y} = \pi(G^{-1}(x,0)) = \pi \circ G^{-1} \circ i(x) = f(x)$

$\iff y = f(x) \Big)$

Y esto prueba la primera parte del enunciado.

La expresión de las derivadas parciales de f se obtienen derivando implícitamente las siguientes ecuaciones para $x \in \mathcal{U}$,

$$F_1(x_1, \dots, x_n, f_1(x_1, \dots, x_n), f_2(x_1, \dots, x_n), \dots f_m(x_1, \dots, x_n)) = 0$$
$$\vdots$$
$$F_m(x_1, \dots, x_n, f_1(x_1, \dots, x_n), \dots\dots, f_m(x_1, \dots, x_n)) = 0$$

Para $i=1,\dots,m$, $j=1,\dots,n$, obtenemos:

$$\frac{\partial F_i}{\partial x_j} + \frac{\partial F_i}{\partial y_1}\cdot\frac{\partial f_1}{\partial x_j} + \dots + \frac{\partial F_i}{\partial y_m}\cdot\frac{\partial f_m}{\partial x_j} = 0$$

Es decir, $\dfrac{\partial F_i}{\partial x_j} = -\left(\dfrac{\partial F_i}{\partial y_1}\cdot\dfrac{\partial f_1}{\partial x_j} + \dots + \dfrac{\partial F_i}{\partial y_m}\cdot\dfrac{\partial f_m}{\partial x_j}\right)$

En forma matricial:

$$\left(\frac{\partial F_i}{\partial x_1},\dots,\frac{\partial F_i}{\partial x_n}\right) = -\left(\frac{\partial F_i}{\partial y_1},\dots,\frac{\partial F_i}{\partial y_m}\right)\begin{pmatrix}\frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}\\ \vdots & & \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}\end{pmatrix}$$

$$i=1,\dots,n$$

De lo que obtenemos

$$\begin{pmatrix}\frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial x_n}\\ \vdots & & \\ \frac{\partial F_m}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial F_m}{\partial x_n}\end{pmatrix} = -\begin{pmatrix}\frac{\partial F_1}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial y_m}\\ \vdots & & \\ \frac{\partial F_m}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial F_m}{\partial y_m}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}\\ \vdots & & \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}\end{pmatrix}$$

lo que concluye la demostración del Teorema.

//