Una introducción a las Extensiones Diferenciables de Funciones

Trabajo Fin de Máster en Matemáticas Avanzadas

Facultad de Ciencias Matemáticas

Universidad Complutense de Madrid

2016-2017

Directora:

Mar Jiménez Sevilla

Alumna:

Miriam González de Rábago

ÍNDICE

Introducción

El objeto de este trabajo es el estudio de las extensiones de funciones. Se estudiarán algunos de los resultados que existen relativos a la extensión diferenciable de funciones diferenciables definidas en subconjuntos cerrados de un espacio de Banach. Trabajaremos tanto el caso finito como el infinito dimensional y tanto el caso C^k como el caso Fréchet con derivada posiblemente discontinua.

El estudio de las extensiones de funciones ha sido desde sus inicios una importante fuente de ideas, conceptos y métodos que ha influido poderosamente e incluso ha aunado diferentes partes del análisis matemático. Entre éstas se incluyen por ejemplo el análisis diferencial y complejo.

El problema de la existencia (o inexistencia) de extensiones continuas surgió hace más de cien años y con el tiempo se ha convertido en un importante campo de estudio. En el caso de los espacios métricos las aplicaciones continuas se sustituyen de forma natural por sus equivalentes métricos y las funciones de Lipschitz.

La pregunta acerca de la existencia de una extensión Lipschitz para una función Lipschitz definida en un subconjunto de un espacio métrico con valores reales fue respondida positivamente por Mc Shane en 1934 dando un operador no lineal simple mientras que las condiciones suficientes para el problema general fueron encontradas tan sólo hace unos años, en 2005 por U. Lang-Schlichenmaier. La respuesta incluye varios conceptos (dimensión de Nagata, n-conectividad Lipschitz, …) pertenecientes a una nueva área en desarrollo que puede ser naturalmente llamada Topología Lispchitz.

Si la imagen de una función Lipschitz es un espacio lineal normado, uno puede estudiar una extensión lineal Lipschitz de la función y de la norma del correspondiente operador lineal de extensión usando características geométricas del dominio. A diferencia del caso continuo donde una solución positiva se debe a Borsuk (1933) para espacios métricos separables y Dugundji (1951) para el caso general, la respuesta ahora se sabe que es negativa incluso para funciones reales Lipschitz (Pelczynski, 1960).

Para introducir el tema de las extensiones de funciones en el capítulo 1 se estudiará el caso más general: las extensiones continuas, enunciando y demostrando los teoremas de Tietze y Dugundji. Se estudiarán también las extensiones de funciones uniformemente continuas dentro de las cuales se hará especial mención a las funciones definidas en espacios de Hilbert terminando el capítulo con el teorema de Kirszbraun.

En el capítulo 2 se introduce la diferenciabilidad en las extensiones. Partiendo del teorema más relevante en este aspecto, teorema de Whitney, y su demostración, se expondrán después algunas de sus consecuencias a lo largo de la historia así como alguna de las distintas respuestas que se han dado al problema de extensión de Whitney.

En la segunda parte del capítulo se estudian las extensiones diferenciables tanto en Espacios de Banach separables como no separables.

En el capítulo 3 se aborda el caso Fréchet diferenciable de las extensiones de funciones viendo una generalización conjunta del teorema de extensión de Whitney y el teorema de extensión de Aversa-Laczkovich-Preiss así como varios resultados de extensión de funciones Baire 1 y extensiones que preservan las derivadas.

Para finalizar, en el capítulo 4 se trabaja en el caso infinito dimensional C^1 con derivada localmente uniformemente continua de extensión de funciones a través de diferentes resultados sobre extensiones de normas, extensiones Lipschitz minimales y extensiones diferenciables en espacios de Banach con derivadas Lipschitz. También se trabajará con funciones convexas $C^{1,1}$ en espacios de Hilbert.

Notación: $\Re$ lo utilizaremos para denotar el conjunto de los números reales.

Capítulo 1. Extensión de funciones continuas

En este capítulo se abordará un caso más general de extensiones. Para introducirnos en el tema se comenzará por abordar el caso de extensiones sólo continuas.

Un teorema básico para trabajar con funciones en subconjuntos cerrados de un espacio topológico al que se quieren extender garantizando al menos la continuidad de la extensión es el Teorema de Tietze y la versión dada por Dugundji y conocida como el Teorema de Dugundji los cuales enunciaremos y probaremos en este capítulo.

Posteriormente trabajaremos con extensiones de funciones uniformemente continuas. A este respecto estudiaremos varios resultados generales y terminaremos enunciando un teorema que hace referencia al caso infinito dimensional concretado en funciones definidas en espacios de Hilbert. Los últimos resultados nos servirán de antesala para el Teorema de Kriszbraun.

1.1 Teorema de Tietze

Para realizar una demostración lo más general posible del Teorema de extensión de Tietze para cualquier espacio normal haremos uso del Lema de Urysohn que enunciaremos a continuación junto con algunas definiciones previas. Para ver con más detalle los siguientes resultados así como la demostración del Lema de Urysohn se puede consultar [Mun].

Definición: Decimos que un espacio topológico X es un espacio **normal** $\Leftrightarrow$ los subconjuntos unitarios de X son cerrados y $\forall\ E$ y F subconjuntos cerrados y disjuntos de X existen U y V entornos de E y F respectivamente, también disjuntos. En otras palabras, E y F pueden ser separados mediante entornos.

El *Lema de Urysohn* es un teorema profundo ya que su prueba involucra una idea realmente original que las demostraciones anteriores no incluían.

Lema de Urysohn: Sea X un espacio normal y sean A y B subconjuntos cerrados y disjuntos de X. Sea $[a,b]$ un intervalo cerrado de la recta real. Entonces existe una función continua $f : X \to [a,b]$ tal que $f(x) = a$ para todo x en A y $f(x) = b$ para todo x en B.

Definición: Si A y B son dos subconjuntos del espacio topológico X y si existe una función continua $f : X \to [0,1]$ tal que $f(A) = \{0\}$ y $f(B) = \{1\}$ se dice que A y B **pueden ser separados por una función continua.**

En otras palabras: el lema de Urysohn dice que si cada par de subconjuntos cerrados en X pueden ser separados por conjuntos abiertos disjuntos entonces cada par puede ser separado por una función continua. La implicación opuesta es trivial: si $f: X \to [0,1]$ es la función continua, entonces $f^{-1}\left(\left[0,\frac{1}{2}\right)\right)$ y $f^{-1}\left(\left(\frac{1}{2},1\right]\right)$ son conjuntos abiertos disjuntos que contienen a A y B respectivamente.

En general, separar por funciones continuas es más fuerte que separar por conjuntos abiertos disjuntos.

<u>Definición:</u> Un espacio topológico X es **completamente regular** si los subconjuntos unitarios de X son cerrados en X y para cada punto x_0 y cada subconjunto cerrado A que no contenga a x_0 existe una función continua $f: X \to [0,1]$ tal que $f(x_0) = 1$ y $f(A) = \{0\}$.

Nótese que un espacio normal es completamente regular por el lema de Urysohn.

Aunque no daremos una prueba del lema de Urysohn resaltaremos que para el caso de espacios métricos (X,d) se puede probar de forma directa tomando

$$f(x) = \frac{d(x,A)}{d(x,A)+d(x,B)}.$$

Por último, antes de enunciar el Teorema de Tietze recordaremos la prueba M de Weierstrass, ya que se hará uso de ella en la demostración del Teorema de Tietze.

La **Prueba M de Weierstrass** es un criterio para comprobar la convergencia uniforme de una serie infinita cuyos términos son al mismo tiempo funciones de variable real o compleja.

<u>Proposición.</u> Sea $\{f_n\}$ una sucesión de funciones de variable real o compleja definidas en un conjunto A, y supongamos que para cada f_n existe una constante positiva M_n tal que $|f_n(x)| \leq M_n$ $\forall n \geq 1$ y $\forall x \in A$. Supongamos también que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ converge. Entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ converge uniformemente en A.

En particular, si el conjunto A es un espacio topológico y las funciones f_n son continuas en A, entonces la serie converge a una función continua en A.

Teorema de extensión de Tietze:

Sea X un espacio normal y sea A un subespacio cerrado de X. Se tiene que:

a) Cualquier función continua de A en un intervalo cerrado $[a,b]$ de $\Re$ puede extenderse a una función continua en todo X a $[a,b]$.

b) Cualquier función continua de A en $\Re$ puede extenderse a una función continua de todo X en $\Re$.

Demostración:

La idea de la demostración es construir una sucesión de funciones continuas s_n definida en el espacio entero X, tal que esa sucesión s_n converja uniformemente y tal que la restricción de s_n a A se aproxime a la función f cada vez más y más cuando n es suficientemente grande. Entonces la función límite será continua y su restricción a A será igual a f.

PASO 1. El primer paso es construir una función particular g definida en todo X tal que g no sea demasiado grande y aproxime a f en el conjunto A en un grado razonable de exactitud.

Para ser más precisos tomemos el caso $f : A \to [-r, r]$. Aseguramos que existe una función continua $g : X \to \Re$ tal que:

$$|g(x)| \le \frac{1}{3} r \qquad \text{para todo } x \in X,$$

$$|g(a) - f(a)| \le \frac{2}{3} r \qquad \text{para todo } a \in A.$$

La función g se construye como sigue:

Dividimos el intervalo $[-r,r]$ en 3 intervalos iguales de longitud $\frac{2}{3} r$

$$I_1 = \left[-r, -\frac{1}{3} r\right],\ I_2 = \left[-\frac{1}{3} r, \frac{1}{3} r\right],\ I_3 = \left[\frac{1}{3} r, r\right].$$

Sean B y C los subconjuntos:

$$B = f^{-1}(I_1) \qquad \text{y} \qquad C = f^{-1}(I_3) \qquad \text{de } A$$

Ya que f es continua, B y C son subconjuntos cerrados y disjuntos de A. Por lo tanto son cerrados en X. Por el lema de Urysohn existe una función continua

$g : X \to \left[-\frac{1}{3}r, \frac{1}{3}r\right]$ que tiene la propiedad de que $g(x) = -\frac{1}{3}r$ para cada x en B y $g(x) = \frac{1}{3}r$ para cada x en C.

Observación: Para Espacios de Banach no es necesario el lema de Urysohn, basta con hacer uso de la función distancia. Podríamos definir g alternativamente como sigue:

$$g(x) = \frac{d(x,B)}{d(x,B)+d(x,C)}\frac{2}{3}r - \frac{1}{3}r .$$

Entonces $|g(x)| \le \frac{1}{3}r$ para todo $x \in X$. Aseguramos que para cada $a \in A$, $|g(a) - f(a)| \le \frac{2}{3}r$. Hay 3 casos:

1. Si $a \in B$ entonces ambos $f(a)$ y $g(a)$ pertenecen a I_1.

2. Si $a \in C$ entonces ambos $f(a)$ y $g(a)$ pertenecen a I_3.

3. Y si $a \notin B \cup C$ entonces $f(a)$ y $g(a)$ pertenecen a I_2.

En cada caso $|g(a) - f(a)| \le \frac{2}{3}r$.

PASO 2. Vamos ahora a probar la parte 1 del Teorema de Tietze. Sin pérdida de generalidad podemos reemplazar el intervalo cerrado arbitrario $[a,b]$ de $\mathfrak{R}$ por el intervalo $[-1,1]$.

Sea $f : X \to [-1,1]$ una función continua, entonces f satisface las hipótesis del PASO 1 con $r = 1$. Además, existe una función continua real-valuada g_1 definida en todo X tal que:

$$|g_1(x)| \le \frac{1}{3} \qquad \text{para todo } x \in X,$$

$$|f(a) - g_1(a)| \le \frac{2}{3} \quad \text{para todo } a \in A.$$

Ahora consideramos la función $f - g_1$. Esta función lleva A al intervalo $\left[-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right]$, luego, podemos aplicar el PASO 1 otra vez tomando $r = \frac{2}{3}$.

Obtenemos una función real-valuada g_2 definida en todo X tal que:

$$|g_2(x)| \leq \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right) \qquad \text{para todo } x \in X,$$

$$|f(a) - g_1(a) - g_2(a)| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^2 \qquad \text{para todo } a \in A.$$

Entonces aplicamos el PASO 1 a la función $f - g_1 - g_2$ y así sucesivamente. En el paso general tenemos funciones real-valuadas $g_1, \ldots g_n$ definidas en todo X tales que:

$$|f(a) - g_1(a) \ldots - g_n(a)| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n \qquad \text{para todo } a \in A.$$

Aplicando el PASO 1 a la función $f - g_1 \ldots - g_n$ con $r = \left(\frac{2}{3}\right)^n$ obtenemos una función real-valuada g_{n+1} definida en todo X tal que:

$$|g_{n+1}(x)| \leq \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^n \qquad \text{para todo } x \in X,$$

$$|f(a) - g_1(a) \ldots - g_{n+1}(a)| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} \qquad \text{para todo } a \in A.$$

Por inducción, las funciones g_n están definidas para todo n. Ahora definimos:

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} g_n(x) \qquad \text{para todo } x \in X.$$

Por supuesto tenemos que asegurar la convergencia de esta serie infinita. Pero esto se sigue del Teorema de comparación del cálculo: la serie converge por comparación con la serie geométrica $\frac{1}{3}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$.

Para probar que g es continua debemos ver que la sucesión s_n converge a g uniformemente. Este hecho se sigue de la prueba M de Weierstrass.

Sin asumir este resultado uno puede simplemente notar que si $k > n$ entonces:

$$|s_k(x) - s_n(x)| = \left|\sum_{i=n+1}^{k} g_i(x)\right| \leq \frac{1}{3}\sum_{i=n+1}^{k}\left(\frac{2}{3}\right)^{i-1} < \frac{1}{3}\sum_{i=n+1}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^{i-1} = \left(\frac{2}{3}\right)^n.$$

Manteniendo n fijo y haciendo $k \to \infty$ podemos ver que $|g(x) - s_n(x)| \le \left(\frac{2}{3}\right)^n$ para $\forall x \in X$. Además s_n converge a g uniformemente.

Veamos que $g(a) = f(a) \ \forall a \in A$. Sea $s_n(x) = \sum_{i=1}^{n} g_i(x)$ la n-ésima suma parcial de la serie. Entonces $g(x)$ es por definición el límite de la sucesión infinita $s_n(x)$ de sumas parciales. Ya que $\left| f(a) - \sum_{i=1}^{n} g_i(a) \right| = | f(a) - s_n(a)| \le \left(\frac{2}{3}\right)^n$ para todo $a \in A$, se sigue que $s_n(a) \to f(a)$ para todo $a \in A$. Y por tanto, tenemos que $f(a) = g(a)$ para todo $a \in A$.

Finalmente veamos que g lleva X al intervalo $[-1,1]$. Esta condición de hecho se satisface automáticamente, ya que la serie $\frac{1}{3}\sum_n \left(\frac{2}{3}\right)^n$ converge a 1.

PASO 3. Probaremos ahora el apartado b) del teorema, en el que f lleva A a $\Re$. Podemos reemplazar $\Re$ por el intervalo abierto $(-1,1)$ ya que este intervalo es homeomorfo a $\Re$. Luego, sea f una aplicación continua de A en $(-1,1)$. La parte del Teorema de Tietze ya probada nos muestra que podemos extender f a una aplicación continua $g : X \to [-1,1]$ llevando X a un intervalo cerrado. ¿Cómo podemos encontrar una aplicación h que lleve X en un intervalo abierto?

Dada g, vamos a definir un subconjunto D de X por la ecuación:

$$D = g^{-1}(\{-1\}) \cup g^{-1}(\{1\}).$$

Ya que g es continua, D es un subconjunto cerrado de X. Ya que $g(A) = f(A)$, que está contenido en $(-1,1)$, el conjunto A es disjunto con D. Por el Lema de Urysohn, existe una función continua

$$\phi : X \to [0,1] \text{ tal que } \phi(D) = \{0\} \text{ y } \phi(A) = \{1\}.$$

Definimos $h(x) = \phi(x)g(x)$. Entonces h es continua siendo producto de 2 funciones continuas. Además, h es una extensión de f ya que para $a \in A$, $h(a) = \phi(a)g(a) = 1g(a) = f(a)$. Finalmente, h lleva todo X al intervalo abierto $(-1,1)$ porque si $x \in D$ entonces $\phi(x) = 0$ y resulta que $h(x) = 0$. Con lo que concluye la demostración.

1.2 Teorema de Dugundji

Este teorema y su demostración han sido extraídos de [Du]. Antes de enunciar y demostrar el teorema necesitaremos una definición previa.

Definición: Un espacio afín L **es de tipo** m si para cualquier espacio métrico X y cualquier función continua $f : X \to L$ se cumple lo siguiente:

Para cada $x \in X$ y W entorno en L con $f(x) \in W$ hay un entorno U en X con $x \in U$ y algún conjunto convexo $C \subset L$ tal que $f(U) \subset C \subset W$.

Esta clase de espacios afines incluye todos los espacios topológicos lineales localmente convexos, por ejemplo los espacios euclídeos o más generalmente los Espacios de Banach.

El teorema de Tietze se puede extender a funciones continuas de un espacio de Banach en otro espacio de Banach. Una demostración sería usando particiones de la unidad y sucesivas aproximaciones. Sin embargo, en este trabajo hemos querido presentar también esta demostración de Dugundji por ser distinta de la demostración dada en el teorema de extensión de Tietze y cuyas ideas se aplicarán en el caso de extensiones diferenciables.

Teorema de J. Dugundji:

Sea X un espacio métrico arbitrario. $A \subset X$ un subconjunto cerrado y L un espacio afín tipo m. Entonces cada función continua $f : A \to L$ tiene una extensión continua $F : X \to L$ tal que $F(X) \subset convex(f(A))$, siendo $convex(f(A))$ la envoltura convexa de $f(A)$ (es decir, $convex(f(A)) = \left\{ \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \omega_i : \omega_i \in f(A), \lambda_i \in \Re^+, \sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1 \right\}$).

Demostración

Para cada $x \in X - A$ (el complementario de A en X) sea B_x una bola abierta centrada en x de radio menor que $\frac{1}{2} d(x, A)$, donde d es la métrica de X. La familia $\{B_x / x \in X - A\}$ es un recubrimiento por abiertos del paracompacto $X - A$, luego tiene un refinamiento localmente finito de abiertos $\{U\}$.

Sea $B(A,\eta) = \{y / d(y, A) < \eta\}$ y obsérvese que una bola B_x centrada en el exterior de $B(A,2\eta)$ no puede intersecar a $B(A,\eta)$. Consecuentemente cualquier $U \in \{U\}$ que interseque a $B(A,\eta)$ está contenido en una B_x centrada dentro de $B(A,2\eta)$ luego tiene diámetro $\delta(U) \leq 2\eta$.

A cada $U \in \{U\}$ no vacío le asociamos un punto $a_U \in A$ como sigue: Elegimos un $x_U \in U$ y buscamos $a_U \in A$ con $d(x_U, a_U) < 2d(x_U, A)$.

La propiedad fundamental de los conjuntos $\{U\}$ y los puntos $\{a_U\}$ es:

(*) Para cada $a \in A$ y entorno $W(a)$ de a en X, hay un entorno $V(a) \subset W(a)$ de a con la propiedad: $U \cap V(a) \neq \emptyset \Rightarrow [U \subset W(a)] \wedge [a_U \in A \cap W(a)]$.

En efecto, podemos asumir que $W(a) = B(a, \varepsilon)$. Entonces tomando $V(a) = B\left(a, \frac{\varepsilon}{12}\right)$, cualquier U que interseque a $V(a)$ tiene diámetro $\leq \frac{\varepsilon}{6}$. Luego U está contenido en $B\left(a, \frac{\varepsilon}{4}\right)$.

Además, puesto que de lo anterior se deduce que $d(x_U, a) < \frac{\varepsilon}{4}$ tenemos que

$$d(a_U, a) \leq d(a_U, x_U) + d(x_U, a) \leq 2d(x_U, A) + d(x_U, A) < \frac{3}{4}\varepsilon,$$

esto es $a_U \in W(a)$.

Sea ahora $\{k_U\}$ una partición de la unidad en $X - A$ subordinada a $\{U\}$ y definimos $F : X \to L$ como

$$F(x) = \begin{cases} f(x), & x \in A, \\ \sum_U k_U(x) f(a_U), & x \in X - A. \end{cases}$$

F es continua en cada punto del abierto $X - A$, luego, sólo es necesario probar que lo es en cada punto de A.

Sea $a \in A$ y sea W un entorno de $F(a) = f(a)$. Ya que L es de tipo m y f es continua existe un entorno $W(a)$ en X tal que $f(W(a) \cap A) \subset C \subset W$ para algún convexo C en L.

Elegimos $V(a) \subset W(a)$ que satisfaga la condición **(*)** y probamos que $F(V(A)) \subset W$:

Claramente si $x \in A \cap V(a)$, entonces $f(x) = F(x) \subset C \subset W$. Si $x \in V(a) - A$ entonces X pertenece a lo sumo a un número finito de $U_1, \ldots., U_n$. Luego, en x, sólo $k_{U_1}, \ldots k_{U_n}$ son no nulos. Ya que cada U_i interseca a $V(a)$ los correspondientes a_{U_i} se encuentran todos en $A \cap W(a)$, y por tanto todos los $f(a_{U_i})$ están en C.

Y ya que $F(x)$ está en la envoltura convexa de los puntos $f(a_{U_1}),\ldots,f(a_{U_n})$ encontramos que $F(x)\in C$ también. Así $F(V(a))\subset W$ y F es continua en a.

Ya que F es continua en cada punto de X, la aplicación $F: X\to L$ es continua y la fórmula muestra que F es una extensión de f y $F(X)\subset convex(f(A))$. Esto concluye la demostración.

1.3 Extensión de funciones uniformemente continuas. El caso de Espacios de Hilbert

Para consultar la demostración de los resultados expuestos en este apartado así como ampliar la información sobre el tema se pueden ver las referencias [Du] y [Ben]. Empezaremos dando algunas definiciones y resultados.

Definición: Sean X e Y espacios métricos y sea $f: X\to Y$. El **módulo de continuidad** de f es la función:

$$w_f(t)=\sup\{d(f(x),f(y)): x,y\in X, d(x,y)\le t\}.$$

La aplicación f se dice que es **uniformemente continua** si existe $t_0>0$ tal que $w_f(t)<\infty$ para $t<t_0$ y si $Lim_{t\to 0^+} w_f(t)=0$.

Definición: Un espacio métrico X se dice que es **métricamente convexo** si para cada $x_0,x_1\in X$ y para todo $0<t<1$ hay un punto $x_t\in X$ tal que:

$$d(x_0,x_t)=td(x_0,x_1) \text{ y } d(x_1,x_t)=(1-t)d(x_0,x_1).$$

Equivalentemente, dos bolas cerradas $B(x,s)$ y $B(y,t)$ en X tienen intersección no vacía sí y sólo sí $d(x,y)\le s+t$.

Cuando X es un subconjunto convexo de un espacio de Banach, o más generalmente cuando es métricamente convexo, la desigualdad triangular nos muestra que $w_f(t+s)\le w_f(t)+w_f(s)$, es decir, w_f es subaditiva.

Lema:

i) Todo espacio métrico X es isométrico a un subconjunto de $l_\infty(\Gamma)$ para algún conjunto Γ.

ii) Sea Z un subconjunto del espacio métrico Y y sea w una función subaditiva no decreciente cumpliendo que $Lim_{t\to 0} w(t)=0$. Asumimos que $f:Z\to l_\infty(\Gamma)$ es uniformemente continua y que $w_f \leq w$. Entonces f puede extenderse a una función uniformemente continua $F:Y\to l_\infty(\Gamma)$ cuyo módulo de continuidad w_F está también dominado por w. En particular, si f es Lipschitz, también lo será F y con la misma constante de Lipschitz.

Observación: La subaditividad de w es esencial para la existencia de una extensión uniformemente continua. Además si w_f no está acotada por dicha función entonces f no se puede extender a una función uniformemente continua en un espacio métricamente convexo Y que contenga a Z.

Definición: Un subconjunto X de un espacio métrico Y se llama **retracto Lipschitz** de Y si existe una aplicación Lipschitz de Y en X que coincide con la identidad en X.

Un espacio métrico que es un retracto Lipschitz de cualquier espacio métrico que lo contiene como subespacio cerrado se denomina **retracto Lipschitz absoluto**.

Observemos que si X es un retracto de Y, entonces X es cerrado en Y, pues X es el conjunto de puntos donde la retracción r coincide con la identidad en X.

Proposición: Sea X un espacio métrico. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

i) X es un retracto Lipschitz absoluto.

ii) Para cada espacio métrico Y y cualquier subconjunto $Z\subset Y$, cualquier función $f:Z\to X$ Lipschitz puede extenderse a una función Lipschitz $F:Y\to X$.

iii) Para cualquier espacio métrico Y que contenga a X y cualquier espacio métrico Z, toda función Lipschitz $f:X\to Z$ puede extenderse a una función Lipschitz $F:Y\to Z$.

La siguiente definición, así como los ejemplos que la suceden han sido consultados en [Ta].

Definición:

1. Un **filtro** Ψ en un conjunto X es un subconjunto de $P(X)-\{\emptyset\}$ tal que:

i) Si $F_1, F_2 \in \Psi$, entonces $F_1 \cap F_2$ es también un elemento de Ψ.

ii) Si $F \in \Psi$ y $G \supset F$ entonces $G \in \Psi$.

2. Un **ultrafiltro** es un filtro que no está contenido propiamente en otro filtro.

3. Una colección no vacía $\Psi \subset P(X)-\{\emptyset\}$ se dice que es una **base de filtro** si para cada dos elementos $F_1, F_2 \in \Psi$, existe $F_3 \in \Psi$ tal que $F_3 \subset F_1 \cap F_2$.

Ejemplos: Algunos ejemplos de estas clases de objetos son:

1. Si $x \in X$, entonces $\{A \subset X : x \in A\}$ es un filtro. Este filtro es equivalente a la base de filtro $\Psi_x = \{\{x\}\}$. Decimos que dos bases de filtro en X, Ψ y G son equivalentes si $\Psi^+ = \{A \subset X : A$ contiene un elemento de $\Psi\}$ es igual a $G^+ = \{A \subset X : A$ contiene un elemento de $G\}$.

2. En el caso de que X sea un espacio topológico y $x \in X$, entonces la colección de todos los entornos de x en X es un filtro; y la colección $\{A \subset X : x \in cl_X A\}$ es un ultrafiltro, siendo $cl_X A$ la adherencia topológica del subconjunto A en X .

3. Sean k un número cardinal y X un conjunto de cardinalidad mayor o igual que k. Resulta que la colección:

$$\Psi_k(X) = \{F \subseteq X : |X - F| < k\}$$

es un filtro en X .

4. Sea $(X, <_X)$ un conjunto linealmente ordenado con más de un punto, y sea $x \in X$. Entonces:

a) $B(x) = \{(z, y) : z <_X x <_X y\}$ es una base de filtro si x no es el primer ni el último elemento.

b) $D(x) = \{[x, y) : x <_X y\}$ es una base de filtro si x no es el último elemento.

c) $I(x) = \{(y, x]) : y <_X x\}$ es una base de filtro si x no es el primer elemento.

Definición: Una base de filtro $\Psi = \{F_\alpha, \alpha \in A\}$ en un espacio métrico (X, d) se llama **base de filtro $d-$Cauchy** si para cada $\varepsilon > 0$ hay algún F_α con $d-$diámetro $\delta(F_\alpha) < \varepsilon$.

Definición: Sea (X,d) un espacio métrico. Una base de filtro Ψ en X **converge a** $x \in X$ si para cada entorno N de X existe $F \in \Psi$ tal que $F \subseteq N$. En este caso escribimos: $\Psi \to x$.

Utilizaremos ahora el concepto de base de filtro para demostrar el siguiente teorema para la extensión de funciones uniformemente continuas.

Hay que tener en cuenta que la imagen uniformemente continua de un espacio completo no es necesariamente completa. La biyección: $f:(\Re, d_e) \to ((-1,1), d_e)$, siendo d_e la distancia euclidea, dada por:

$$x \to \frac{x}{1+|x|}$$

es uniformemente continua e incluso un homeomorfismo, sin embargo la imagen es evidentemente no completa.

Las aplicaciones continuas en espacios completos se espera que tengan un significado especial. El siguiente teorema de extensión fundamental tiene muchas aplicaciones, una estándar es definir la función a^x con x real $(a>0)$ desde el conocimiento de a^r con r racional.

Teorema: Sean (X,d') un espacio métrico arbitrario y $A \subset X$ un subconjunto denso. Sean Y $d-$completo y $f:A \to Y$ uniformemente continua. Entonces existe una y sólo una extensión continua $F:X \to Y$ tal que F es también uniformemente continua.

Demostración:

Para cada $x \in X$ la base de filtro de entornos $U(x) \cap A$ es ciertamente $d'-$Cauchy.

Utilizaremos el siguiente resultado:

> **Teorema:** Si $f:(X,d') \to (Y,d)$ es uniformemente continua entonces la imagen de una base de filtro $d'-$Cauchy es una base de filtro $d-$Cauchy.

Esto nos asegura que la base de filtro $f(U(x) \cap A)$ es $d-$Cauchy. Utilizaremos ahora el siguiente resultado:

> **Teorema:** Sea D un subconjunto denso de X , sea Y un espacio regular y sea $f:D \to Y$ continua. Entonces f tiene una extensión $F:X \to Y$ si y sólo si la base de filtro $f(D \cap U(x))$ converge para cada $x \in X$. Si F existe, entonces F es única.

En función del cual f puede ser extendida por continuidad a una única $F: X \to Y$ continua. Ahora probaremos que F es uniformemente continua.

Dado $\varepsilon > 0$, sea $\delta > 0$ tal que $d(f(a_1), f(a_2)) < \varepsilon$ siempre que $d'(a_1, a_2) < \delta$ y $a_1, a_2 \in A$. Veremos que $d(F(x_1), F(x_2)) < 3\varepsilon$ siempre que $d'(x_1, x_2) < \frac{\delta}{3}$ y $x_1, x_2 \in X$.

De hecho, ya que F es continua encontraremos entornos $U(x_1), U(x_2)$ tales que $F(U(x_i)) \subset B(F(x_i), \varepsilon)$, $i = 1,2$ y definimos

$$W(x_i) = U(x_i) \cap B(x_i, \frac{\delta}{3}), \qquad i = 1, 2.$$

Ahora, $A \cap W(x_i) \neq \varnothing$ ya que A es denso y elegimos $a_i \in A \cap W(x_i)$, $i = 1, 2$.

Entonces porque $d'(a_1, a_2) \leq d'(a_1, x_1) + d'(x_1, x_2) + d'(x_2, a_2) < 3\frac{\delta}{3}$ encontramos que:

$$d(F(x_1), F(x_2)) \leq d(F(x_1), f(a_1)) + d(f(a_1), f(a_2)) + d(f(a_2), F(x_2)) < 3\varepsilon$$

lo cual completa la demostración.

<u>Observaciones</u>.

(i) La hipótesis de que f es uniformemente continua es esencial. Sea $A = E^1 - \{0\} \subset E^1$ y sea $Y = E^1$ La aplicación $f(x) = \frac{x}{|x|}$ de $A \to E^1$ no puede extenderse sobre E^1.

(ii) Por otro lado la hipótesis de que Y es $d-$completo es también esencial.

Por ejemplo, sean $X = E^1$, $A \subset X$ el subespacio de los racionales e $Y = A$. La aplicación identidad $f: A \to A$ es uniformemente continua, pero no puede extenderse a una aplicación continua $F: E^1 \to A$ ya que E^1 es conexo y F no puede ser constante.

(iii) Si la aplicación del teorema anterior es un homeomorfismo, no es cierto en general que su extensión F sea también un homeomorfismo.

Por ejemplo, sea $X = I = [0,1]$, sea $A = Int(I) = (0,1)$ y sea Y la circunferencia unidad S^1 en $\Re^2$. Usando la métrica euclídea, la aplicación $x \to e^{2\pi i x}$ de $Int(I)$ en $S^1 - \{(1,0)\}$ es un homeomorfismo uniformemente continuo; sin embargo, su extensión sobre I no es biyectiva.

A pesar de esto hay un tipo de homeomorfismo para el cual este comportamiento no puede ocurrir:

Un homeomorfismo $h:(X,d)\cong(Y,d^{'})$ se llama **isomorfismo uniforme** de X e Y siempre que tanto h como h^{-1} sean uniformemente continuas.

Una **isometría sobreyectiva** es un ejemplo particularmente importante de isomorfismo uniforme, pero la primera noción es más general:

La aplicación $\chi:(\Re,d_e)\rightarrow(\Re,d')$ donde $d'=\min(1,d_e)$ y d_e es la distancia euclídea es un isomorfismo uniforme aunque no es una isometría.

<u>Corolario:</u> Sea Y un espacio $d-$completo, sea Y' $d'-$completo y sean $A\subset Y$, $A'\subset Y'$ densos. Entonces cada isomorfismo uniforme $h:A\cong A'$ tiene una extensión $H:Y\cong Y'$ que es también un isomorfismo uniforme. Además si h es una isometría entonces H también lo es.

Por último este teorema nos sitúa en el marco de los Espacios de Hilbert, en el caso infinito dimensional.

<u>Teorema:</u> Sean H_1 y H_2 dos espacios de Hilbert. Asumimos que A es un subconjunto de H_1 y que w es una función cóncava no negativa en $\Re^+$ cumpliendo que $Lim_{t\rightarrow0^+}w(t)=0$. Entonces toda función uniformemente continua $f:A\rightarrow H_2$ cuyo módulo de continuidad esté acotado por w se extiende a una función uniformemente continua $F:H_1\rightarrow H_2$ definida en todo H_1 cuyo módulo de continuidad está también acotado por w.

<u>Observación:</u> Para poder extender f a una función uniformemente continua definida en todo H_1 es necesario, por supuesto, que w_f esté dominado por una función subaditiva η cumpliendo que $Lim_{t\rightarrow0^+}\eta(t)=0$. El teorema muestra que esta condición es también suficiente.

Este teorema para $w(t)=\lambda t$, es decir, para extensiones de funciones Lipschitz fue estudiado por Kirszbraun y es el contenido del siguiente apartado.

1.4 Teorema de Kirszbraun

Antes de enunciar y demostrar el teorema de Kirszbraun empezaremos mencionando algunos casos más generales como la fórmula de extensiones de funciones uniformemente continuas de un espacio métrico en $\Re^n$ que podemos encontrar en [Ben]:

Proposición: Sea Z un subespacio de un espacio métrico Y y sea ω una función subaditiva no decreciente cumpliendo que $Lim_{t\to 0}\omega(t)=0$. Si tenemos una función f real valuada en Z , es decir, $f:Z\to\Re$ uniformemente continua y con $\omega_f\leq\omega$, entonces f puede extenderse a una función uniformemente continua $F:Y\to\Re$ cuyo módulo de continuidad ω_F esté también dominado por ω. En particular, si f es Lipschitz también lo será F y con la misma constante de Lipschitz.

Demostración: La función F viene dada por la siguiente fórmula explícita:

$$F(y)=\inf\{f(z)+\omega(d(z,y)):z\in Z\}$$

Para ver que $F(y)$ es finito para todo y, fijamos cualquier $z_0\in Z$. Entonces:

$$f(z)+\omega(d(z,y))\geq f(z_0)-\omega(d(z,z_0))+\omega(d(z,y))\geq f(z_0)-\omega(d(y,z_0))$$

para todo $z\in Z$. También es evidente que F es una extensión de f . Para estimar el módulo de continuidad de F , fijamos $x,y\in Y$ y elegimos z_0 tal que $F(x)$ es esencialmente igual a $f(z_0)+\omega(d(z_0,x))$. Ya que $F(y)\leq f(z_0)+\omega(d(z_0,y))$, se sigue de la desigualdad triangular en Y y de la subaditividad de ω que $F(y)-F(x)\leq\omega(d(x,y))$. Un argumento similar prueba que $F(x)-F(y)\leq\omega(d(x,y))$.

Observación: La subaditividad de ω es esencial para la existencia de una extensión uniformemente continua. En efecto, si ω_f no estuviera limitada por una función de este tipo, entonces f no se podría extender a una función uniformemente continua en un espacio métricamente convexo Y que contenga a Z .

Del anterior resultado se deduce el siguiente teorema de extensión de funciones Lipschitz de $\Re^n$ en $\Re^m$ para la norma euclidea que se puede consultar en [Ev]:

Teorema de Extensión de funciones Lipschitz: Sea $A\subset\Re^n$ y sea $f:A\to\Re^m$ una función Lipschitz continua. Entonces existe una función Lipschitz continua $\overline{f}:\Re^n\to\Re^m$ tal que:

(i) $\overline{f}=f$ en A

(ii) $Lip(\overline{f})\leq\sqrt{m}Lip(f)$

Demostración: Aunque la demostración se puede deducir del anterior resultado, merece la pena detallar los pasos.

1. Primero asumimos que: $f : A \to \Re$. Definimos:

$$\overline{f}(x) := \inf_{a \in A} \{ f(a) + Lip(f)|x-a| \},\ (x \in \Re^n),$$

siendo │ . │ la norma euclídea.

Si $b \in A$, entonces tenemos que $\overline{f}(b) = f(b)$. Esto se sigue de que para todo $a \in A$,

$$f(a) + Lip(f)|b-a| \geq f(b);$$

mientras que obviamente $\overline{f}(b) \leq f(b)$. Si $x, y \in \Re^n$, entonces:

$$\overline{f}(x) \leq \inf_{a \in A} \{ f(a) + Lip(f)(|y-a| + |x-y|) \} = \overline{f}(y) + Lip(f)|x-y|.$$

Igualmente,

$$\overline{f}(y) \leq \overline{f}(x) + Lip(f)|x-y|.$$

2. En el caso general $f : A \to \Re^m$, $f = (f^1,\ldots,f^m)$, definimos $\overline{f} := (\overline{f}^1,\ldots,\overline{f}^m)$. Entonces:

$$\left|\overline{f}(x) - \overline{f}(y)\right|^2 = \sum_{i=1}^{m} \left|\overline{f}^i(x) - \overline{f}^i(y)\right|^2 \leq m(Lip(f))^2 |x-y|^2.$$

Observación: El Teorema de Kirszbraun asegura que de hecho existe una extensión $\overline{f}$ con $Lip(\overline{f}) = Lip(f)$.

Por otro lado si S es un subconjunto arbitrario de un espacio métrico X entonces toda función Lipschitz $f : S \to \Re$ tiene una extensión Lipschitz $g : X \to \Re$ con $Lip(g) = Lip(f)$. De hecho se puede definir

$$g(\xi) = \inf\{ f(x) + Lip(f) \cdot dist(x,\xi) : x \in S \} \text{ para } \xi \in X.$$

Para ampliar la información de este apartado se puede consultar [Fed]. Para demostrar el Teorema de Kirszbraun haremos uso del siguiente resultado:

Lema: Sea $P \subset \Re^n \times (0,\infty)$ un subconjunto no vacío, compacto y sea

$$Y_t = \{ y : |y-a| \leq rt, \forall (a,r) \in P \},\ \text{ para } 0 \leq t < \infty.$$

Entonces, $c = \inf\{t : Y_t \neq \emptyset\} < \infty$ e Y_c está formado por un único punto b. Además b pertenece a la envoltura convexa de

$$A = \{ a : (a,r) \in P \text{ y } |b-a| = rc \text{ para algún } r \}.$$

Teorema de Kirszbraun: Si $S \subset \Re^m$ y $f : S \to \Re^n$ es Lipschitz, entonces f tiene una extensión Lipschitz $g : \Re^m \to \Re^n$ con $Lip(g) = Lip(f)$.

Demostración:

Supongamos que $Lip(f) = 1$ y consideremos la clase Ω de todas las extensiones Lipschitz de f que llevan algún subconjunto de $\Re^m$ en $\Re^n$ y tienen constante de Lipschitz 1. Por el principio maximal de Hausdorff o Lema de Zorn (en un conjunto A parcialmente ordenado siempre existe al menos una cadena maximal) Ω tiene un elemento maximal (respecto a la inclusión):

$$g : T \to \Re^n \quad \text{donde} \quad T \subset \Re^m.$$

Veremos que si suponemos que $\xi \in \Re^m - T$ (es decir $\Re^m - T$ no es vacío) existe $\eta \in \Re^n$ con $|\eta - g(x)| \le |\xi - x|$ para todo $x \in T$, de donde se obtendrá que $g \cup \{(\xi, \eta)\} \in \Omega$ y g no podría ser maximal en Ω. Probemos por tanto que la intersección de las bolas cerradas es

$$\cap \{B[g(x), |x - \xi|] : x \in T\} \ne \emptyset.$$

Ya que estas bolas son compactas será suficiente verificar que

$$\cap \{B[g(x), |x - \xi|] : x \in F\} \ne \emptyset,$$

para cualquier subconjunto F finito de T. Para este propósito aplicaremos el Lema precedente con

$$P = \{(g(x), |x - \xi|) : x \in F\}.$$

Existen por tanto una colección de puntos distintos $x_1, \ldots x_k$ con $g(x_i) \in A$, un número no negativo c, un punto b en $\Re^n$ y una colección de números positivos $\lambda_1, \ldots \lambda_k$ tales que

$$|b - g(x_i)| = |x_i - \xi| c \quad \text{para} \quad i = 1, \ldots k \quad \text{y}$$

$$b = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i g(x_i), \quad \text{con} \quad 1 = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i.$$

Y usando la identidad $2u \bullet v = |u|^2 + |v|^2 - |u - v|^2$ para la norma euclidea y el producto escalar asociado a ella, obtenemos

$$0 = 2\left|\sum_i \lambda_i [g(x_i) - b]\right|^2 = 2\sum_{i,j} \lambda_i \lambda_j [g(x_i) - b] \bullet [g(x_j) - b] =$$

$$= \sum_{i,j} \lambda_i \lambda_j [|g(x_i) - b|^2 + |g(x_j) - b|^2 - |g(x_i) - g(x_j)|^2] \geq$$

$$\geq \sum_{i,j} \lambda_i \lambda_j [c^2 |x_i - \xi|^2 + c^2 |x_j - \xi|^2 - |x_i - x_j|^2] =$$

$$= \sum_{i,j} \lambda_i \lambda_j [2c^2 (x_i - \xi) \bullet (x_j - \xi) + (c^2 - 1) |x_i - x_j|^2] =$$

$$= 2 \left| c \sum_i \lambda_i (x_i - \xi) \right|^2 + (c^2 - 1) \sum_{i,j} \lambda_i \lambda_j |x_i - x_j|^2 .$$

Concluimos que $c \leq 1$ y $b \in Y_1 = \{ y : |y - a| \leq r, \forall (a,r) \in P \}$, con lo que queda demostrado el teorema.

<u>**Observación.**</u> La conclusión del teorema precedente puede fallar si alguno o ambos $\Re^m$ o $\Re^n$ están metrizados por una norma no inducida por un producto interior. Por ejemplo consideremos

$$S = \{(1,-1), (-1,1), (1,1)\} \subset \Re^2$$

Y $f : S \to \Re^2$ tal que $f(1,-1) = (1,0)$, $f(-1,1) = (-1,0)$, $f(1,1) = (0, \sqrt{3})$. Definimos las métricas

$$\mu(x) = \sup\{|x_1|, |x_2|\} \qquad \text{y} \qquad v(x) = [(x_1)^2 + (x_2)^2]^{\frac{1}{2}} \text{ para } x \in \Re^2 .$$

Entonces $\mu(u - v) = 2 = v[f(u) - f(v)]$ para $u, v \in S$ y $\mu(u) = 1$ para $u \in S$. Pero no existe $\eta \in \Re^2$ con $v[\eta - f(u)] \leq 1$ para todo $u \in S$. Luego f no tiene una extensión a $S \cup \{(0,0)\}$ con constante de Lipschitz 1 asociada a las métricas μ y v.

Capítulo 2. Extensión de funciones con diferenciabilidad. Teorema de Whitney

En este capítulo se dará un paso más en el estudio de las extensiones de funciones introduciendo la condición de diferenciabilidad para las mismas.

El eje central del capítulo es el Teorema de Whitney que comenzaremos enunciando y demostrando. Posteriormente hablaremos sobre el Problema de Extensión de Whitney y la respuesta al mismo que han dado varios autores a lo largo de los últimos años centrándonos en el trabajo de Fefferman.

Después estudiaremos las extensiones diferenciables en Espacios de Banach separables por un lado y no separables por otro lado. Así como las extensiones diferenciables de funciones vectoriales valuadas definidas en subconjuntos cerrados de espacios de Banach.

2.1 Teorema de Whitney

Veremos a continuación tanto el enunciado como la demostración del Teorema más importante en el marco de las extensiones de funciones tanto por su versatilidad como herramienta como por su importancia histórica.

El teorema y su demostración se pueden consultar en [Ev].

Para demostrar el Teorema de Extensión de Whitney haremos uso del Teorema de recubrimiento de Vitali.

Definición: Una **clase Vitali o recubrimiento de Vitali** V para un conjunto E de $\Re^d$ es una familia de conjuntos de tal manera que, para cada $x \in E$ y $\delta > 0$ hay un conjunto U en la colección V con $x \in U$ y el diámetro de U no nulo y menor que δ.

Teorema del Recubrimiento de Vitali: Sea V un recubrimiento de Vitali para un conjunto E de $\Re^n$ tal que $\sup\{\operatorname{diam} B : B \in V\} < \infty$. Existe entonces una subfamilia numerable F de bolas cerradas disjuntas en V tales que $\bigcup_{B \in V} B = \bigcup_{B \in F} B$.

Notación previa necesaria:

Sean $C \subset \Re^n$ cerrado, $f : C \to \Re$ y $d : C \to \Re^n$ definimos:

$$R(y,x) = \frac{f(y) - f(x) - d(x) \cdot (y - x)}{|x - y|} \qquad (x, y \in C, x \neq y)$$

Sean ahora $K \subseteq C$ compacto y $\delta > 0$ definimos:

$$\rho_K(\delta) = \sup\{|R(y,x)| \text{ tal que } 0 < |x - y| < \delta, x, y \in K\}$$

Teorema de Extensión de Whitney, caso C^1:

Asumimos que f, d son continuas y para cada subconjunto compacto $K \subseteq C$:

$$\rho_K(\delta) \to 0 \text{ si } \delta \to 0 \text{ (*)}.$$

Entonces existe una función $\overline{f} : \Re^n \to \Re$ tal que:

i) $\overline{f}$ es C^1,

ii) $\overline{f} = f$ y $D\overline{f} = d$ en C.

Demostración:

Sea el abierto $U = \Re^n - C$. Definimos:

$$r(x) = \frac{1}{20}\min\{1, dist(x, C)\}.$$

Por el Teorema de recubrimiento de Vitali existe un conjunto contable:

$$\{x_j\}_{j=1}^{\infty} \subset U \text{ tal que } U = \bigcup_{j=1}^{\infty} B(x_j, 5r(x_j))$$

y tal que las bolas cerradas $\{B(x_j, r(x_j))\}_{j=1}^{\infty}$ son disjuntas.

Para cada $x \in U$ definimos:

$$S_x = \{x_j \,/\, B(x, 10r(x)) \cap B(x_j, 10r(x_j)) \neq \varnothing\}$$

Afirmación #1: $card(S_x) \leq (129)^n$ y $\dfrac{1}{3} \leq \dfrac{r(x)}{r(x_j)} \leq 3$ si $x_j \in S_x$.

Vamos a probar la afirmación. Si $x_j \in S_x$ entonces

$$|r(x) - r(x_j)| \leq \frac{1}{20}|x - x_j| \leq \frac{1}{20}(10r(x) + 10r(x_j)) = \frac{1}{2}(r(x) + r(x_j)).$$

Por tanto $r(x) \leq 3r(x_j)$, $r(x_j) \leq 3r(x)$.

Además tenemos:

$$|x - x_j| + r(x_j) \leq 10(r(x) + r(x_j)) + r(x_j) = 10r(x) + 11r(x_j) \leq 43r(x).$$

Consecuentemente:

$$B(x_j, r(x_j)) \subset B(x, 43r(x)).$$

Ya que las bolas $\{B(x_j, r(x_j))\}_{j=1}^{\infty}$ son disjuntas, y teniendo en cuenta que $r(x_j) \geq \frac{r(x)}{3}$, obtenemos

$$card(S_x)\alpha(n)\left(\frac{r(x)}{3}\right)^n \leq \alpha(n)(43r(x))^n,$$

siendo el volumen de una bola en $\Re^n$ de radio R la cantidad $V_{n,R} = \alpha(n)R^n$, con la constante $\alpha(n) = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma((n/2)+1)}$ dependiendo solo de n.

Entonces

$$card(S_x) \leq (129)^n$$

Ahora elegimos $\mu : \Re \to \Re$ tal que $\mu \in C^{\infty}$, $0 \leq \mu \leq 1$, $\boldsymbol{\mu(t) \equiv 1}$ para $t \leq 1$ y $\mu(t) \equiv 0$ para $t \geq 2$.

Para cada $j = 1\ldots$ definimos:

$$u_j(x) = \mu\left(\frac{|x - x_j|}{5r(x_j)}\right), \; x \in \Re^n.$$

Entonces:

$$\begin{cases} u_j \in C^{\infty} & para & 0 \leq u_j \leq 1, \\ u_j \equiv 1 & en & B(x_j, 5r(x_j)), \\ u_j \equiv 0 & en & \Re^n - B(x_j, 10r(x_j)). \end{cases}$$

Además, si la derivada de μ está acotada en valor absoluto por una constante c, entonces

$$|Du_j(x)| \leq \frac{c}{5r(x_j)} \leq \frac{3c}{5r(x)} \text{ si } x_j \in S_x \textbf{ (**)}.$$

Notemos además que $u_j = 0$ en $B(x, 10r(x))$ si $x_j \notin S_x$.

Definimos $\sigma(x) = \sum_{j=1}^{\infty} u_j(x)$, $x \in \Re^n$. Ya que $u_j = 0$ en $B(x, 10r(x))$ si $x_j \notin S_x$ vemos que:

$$\sigma(y) = \sum_{x_j \in S_x} u_j(x) \text{ si } y \in B(x, 10r(x)).$$

Por la afirmación #1 $card(S_x) \leq (129)^n$. Esto y (**) implican que:

$$\sigma \in C^{\infty}(U),\ \sigma \geq 1 \text{ en } U,\ \left|D\sigma(x)\right| \leq \frac{c_1}{r(x)},\ x \in U,$$

siendo $c_1 = \dfrac{3c \cdot 129^n}{5}$. Ahora para cada $j \in \aleph$ definimos:

$$v_j(x) = \frac{u_j(x)}{\sigma(x)},\ x \in U.$$

Nótese que $Dv_j(x) = \dfrac{Du_j}{\sigma} - \dfrac{u_j D\sigma}{\sigma^2}$ y que $\sigma \geq 1$ en U. Luego:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{\infty} v_j(x) = 1, & \\ \sum_{j=1}^{\infty} Dv_j(x) = 0, & \text{para } x \in U, \\ \left|Dv_j(x)\right| \leq \dfrac{c_2}{r(x)}, & \end{cases}$$

para una constante c_2 que depende sólo de c_1. Las funciones $\{v_j\}_{j=1}^{\infty}$ son además una partición diferenciable de la unidad en U. Ahora, para cada $j = 1\ldots$ elegimos un punto cualquiera $s_j \in C$ tal que:

$$\left|x_j - s_j\right| = dist(x_j, C).$$

Finalmente, definimos $\overline{f} : \Re^n \to \Re$ de la siguiente manera:

$$\overline{f}(x) = \begin{cases} f(x), & si\ x \in C, \\ \sum_{j=1}^{\infty} v_j(x)[f(s_j) + d(s_j) \cdot (x - s_j)], & si\ x \in U. \end{cases}$$

Obsérvese que $\overline{f} \in C^{\infty}(U)$ y

$$D\overline{f}(x) = \sum_{x_j \in S_x} \left([f(s_j) + d(s_j) \cdot (x - s_j)]Dv_j(x) + v_j(x)d(s_j)]\right),\ x \in U.$$

Afirmación #2: $D\overline{f}(a) = d(a),\ \forall a \in C$. Vamos a probar esta afirmación. Fijamos $a \in C$ y sea el compacto $K = C \cap B(a,1)$.

Definimos:

$$\phi(\delta) = \sup\{\left|R(x,y)\right| / x, y \in K, 0 \leq \left|x - y\right| \leq \delta\} + \sup\{\left|d(x) - d(y)\right| / x, y \in K, \left|x - y\right| \leq \delta\}$$

Ya que $d : C \to \Re^n$ es continua, de (*) se sigue que:

$$\phi(\delta) \to 0 \text{ si } \delta \to 0 \text{ (***)}.$$

Si $x \in C$ y $|x-a| \le 1$ entonces:

$$\left|\overline{f}(x) - \overline{f}(a) - d(a)\cdot(x-a)\right| = |f(x) - f(a) - d(a)\cdot(x-a)| = |R(x,a)||x-a| \le \phi(|x-a|)|x-a|$$

$$\text{y } |d(x) - d(a)| \le \phi(|x-a|).$$

Ahora supongamos que $x \in U$, $|x-a| \le \dfrac{1}{6}$.

Calculamos $\left|\overline{f}(x) - \overline{f}(a) - d(a)\cdot(x-a)\right| = \left|\overline{f}(x) - f(a) - d(a)\cdot(x-a)\right| \le$

$$\le \sum_{x_j \in S_x} \left|v_j(x)[f(s_j) - f(a) + d(s_j)(x-s_j) - d(a)(x-a)]\right| \le$$

$$\le \sum_{x_j \in S_x} v_j(x)\left[f(s_j) - f(a) + d(s_j)(a-s_j)\right] + \sum_{x_j \in S_x} v_j(x)\left[(d(s_j) - d(a))(x-a)\right].$$

Ahora $|x-a| \le \dfrac{1}{6}$ implica que $r(x) = \dfrac{1}{20}\operatorname{dist}(x,C) \le \dfrac{1}{20}|x-a|$.

Luego para $x_j \in S_x$

$$\left|a-s_j\right| \le \left|a-x_j\right| + \left|x_j - s_j\right| \le 2\left|a-x_j\right| \le 2\left(|x-a| + \left|x-x_j\right|\right) \le$$

$$\le 2\left(|x-a| + 10(r(x) + r(x_j))\right) \le 2\left(|x-a| + 40r(x)\right) \le 6|x-a| \le 1.$$

De los cálculos anteriores y la afirmación #1 se sigue que existe una constante C' tal que

$$\left|\bar{f}(x) - \bar{f}(a) - d(a)\cdot(x-a)\right| \le C'\phi(6|x-a|)|x-a|,$$

para todo $x \in U$ con $|x-a| \le \dfrac{1}{6}$.

En vista de (***) los cálculos anteriores implican que para cada $a \in C$:

$$\left|\overline{f}(x) - \overline{f}(a) - d(a)\cdot(x-a)\right| \le o(|x-a|), \text{ si } x \to a.$$

Luego $D\overline{f}(a)$ existe y es igual a $d(a)$.

Afirmación #3: $\overline{f} \in C^1(\Re^n)$.

Demostración: Fijamos $a \in C$, $x \in \Re^n$ con $|x-a| \leq \frac{1}{6}$. Si $x \in C$, entonces $\left|D\overline{f}(x) - D\overline{f}(a)\right| = |d(x) - d(a)| \leq \phi(|x-a|)$. Si $x \in U$, elegimos $b \in C$ tal que $|x-b| = dist(x,C)$.

Entonces $\left|D\overline{f}(x) - D\overline{f}(a)\right| = \left|D\overline{f}(x) - d(a)\right| \leq \left|D\overline{f}(x) - d(b)\right| + |d(b) - d(a)|$.

Ya que $|b-a| \leq |b-x| + |x-a| \leq 2|x-a|$, tenemos: $|d(b) - d(a)| \leq \phi(2|x-a|)$.

Teniendo en cuenta que $\sum_{x_j \in S_x} Dv_j(x) = 0$, sumando y restando términos adecuados obtenemos, podemos entonces estimar:

$$\left|D\overline{f}(x) - d(b)\right| = \left|\sum_{x_j \in S_x} [f(s_j) + d(s_j)(x - s_j)]Dv_j(x) + v_j(x)[d(s_j) - d(b)]\right| \leq$$

$$\leq \left|\sum_{x_j \in S_x} [-f(b) + f(s_j) + d(s_j)(b - s_j)]Dv_j(x)\right| + \left|\sum_{x_j \in S_x} [(d(s_j) - d(b))(x - b)]Dv_j(x)\right|$$

$$+ \left|\sum_{x_j \in S_x} v_j(x)[d(s_j) - d(b)]\right| \qquad (****)$$

$$\leq \frac{c_3}{r(x)} \sum_{x_j \in S_x} \phi(|b - s_j|)|b - s_j| + \frac{c_3}{r(x)} \sum_{x_j \in S_x} \phi(|b - s_j|)|x - b| + \sum_{x_j \in S_x} \phi(|b - s_j|),$$

para un constante c_3 que depende de c_1 . Ahora $|x-b| \leq |x-a| \leq \frac{1}{6}$. Y además $r(x) = \frac{1}{20}|x-b| \leq \frac{1}{120}$. Si $x_j \in S_x$, entonces $r(x_j) \leq 3r(x) \leq \frac{1}{40} < \frac{1}{20}$. Luego $r(x_j) = \frac{1}{20}|x_j - s_j|$, para $x_j \in S_x$. Consecuentemente si $x_j \in S_x$ entonces

$$|b - s_j| \leq |b - x| + |x - x_j| + |x_j - s_j| \leq 20r(x) + 10(r(x) + r(x_j)) + 20r(x_j) \leq$$

$$\leq 120r(x) = 6|x-b| \leq 6|x-a|$$

Luego, (****) implica que

$$\left|D\bar{f}(x) - d(b)\right| \leq c_4 \cdot \phi(6|x-a|).$$

para algún c_4 que depende de c_1.

Esta estimación y los cálculos anteriores prueban que:

$$\left|D\bar{f}(x) - D\bar{f}(a)\right| \le c_5 \cdot \phi(6|x-a|),$$

para algún c_5 que depende de c_1. Y con esto se concluye la demostración del teorema.

Observación. La anterior construcción es lineal en f en el siguiente sentido: Puesto que $\sigma = \sum_{j\in\Re} u_j$ depende sólo del conjunto cerrado C, si los pares (f_1, d_1) y (f_2, d_2) corresponden a funciones $f_1, f_2 : C \to \Re$ y $d_1, d_2 : C \to \Re^n$ que verifican las hipótesis del teorema entonces,

$$\overline{f_1 + f_2} = \overline{f_1} + \overline{f_2} \qquad \text{y} \qquad D(\overline{f_1 + f_2}) = D(\overline{f_1}) + D(\overline{f_2}).$$

2.2 El Teorema de Whitney a lo largo de la historia. Extensiones del Teorema de Whitney

A partir del Teorema de Whitney expuesto y demostrado en el apartado anterior se plantea la cuestión de qué condiciones son necesarias para extenderlo aumentando lo máximo posible la derivabilidad de la extensión. Esta cuestión se conoce como el Problema de extensión de Whitney y es el objeto de trabajo de este apartado. Veremos algunos de los resultados publicados por diversos autores a lo largo de los últimos años y la evolución que ha tenido el estudio de este problema.

Se enuncia como sigue:

Problema de Extensión de Whitney: Sea $m \ge 1$ y sea $f : E \to \Re$ con $E \subset \Re^n$ cerrado. ¿Cómo podemos caracterizar las funciones f que se extienden a una función F que sea C^m en $\Re^n$?

Fue el propio Whitney quien comenzó a trabajar en el tema en los siguientes trabajos: [Whit 1], [Whit 2] y [Whit 3] en el año 1934, mediante el asentamiento del problema de extensión probando el Teorema de Extensión de Whitney clásico, en el caso $n = 1$ a través de las llamadas diferencias divididas y en el caso $n > 1$ a través de polinomios de Taylor que aproximan adecuadamente localmente. Se puede ver una demostración de este resultado en [Fed] y se enuncia a continuación.

Teorema de Extensión de Whitney. Caso General C^k

Supongamos que Y es un espacio vectorial normado, k un entero no negativo, A un subconjunto cerrado de $\Re^m$ y a cada $a \in A$ corresponde la función polinomial:

$$P_a : \Re^m \to Y \text{ con grado } P_a \leq k.$$

Siempre que $C \subset A$ y $\delta > 0$ sea $\rho(C,\delta)$ el supremo del conjunto de todos los números:

$$\left\| D^i P_a(b) - D^i P_b(a) \right\| \cdot |a-b|^{i-k} (k-i)! \text{ para } i = 0,\ldots k \text{ y } a,b \in C \text{ con } 0 < |a-b| \leq \delta.$$

Si $\rho(C,\delta) \to 0$ cuando $\delta \to 0^+$ para cada subconjunto compacto C de A, entonces existe una aplicación $g : \Re^m \to Y$ de clase k tal que $D^i g(a) = D^i P_a(a)$ para $i = 0,\ldots k$ y $a \in A$.

En 1958, G. Glaeser en [Gla] resolvió el problema de Whitney para $C^1(\Re^n)$ introduciendo un objeto geométrico llamado "espacio paratangente iterado". El trabajo de Glaeser influyó en todos los trabajos posteriores sobre el tema. Más tarde Y. Brundyi y P. Shvartsman en una serie de artículos ([Bru 1], [Bru 2], [Bru 3], [Bru 4], [Bru 5], [Bru 6], [Sh 1], [Sh 2] y [Sh 3]) estudiaron el análogo al problema de Whitney para $C^{m,\omega}(\Re^n)$ (que posteriormente definiremos) y otros espacios de funciones. Ellos conjeturaron también que la extensión F puede ser tomada dependiendo linealmente de f. Para espacios de funciones entre C^0 (espacio de funciones continuas) y $C^{1,1}$ (que posteriormente definiremos) tuvieron éxito probando sus conjeturas utilizando el elegante método denominado de "Selección de Lipschitz". En [Bru 6] los autores caracterizan los $(m-1)-$jet (concepto que definiremos a continuación) de una función $C^{m,\omega}$ en un conjunto $E \subset \Re^n$.

El siguiente progreso en el problema de Whitney fue el trabajo de Bierstone-Milman-Pawlucki en [Bri]. Estos autores introducen un análogo al espacio paratangente iterado de Glaeser relevante para $C^m(\Re^n)$. Ellos conjeturaron una solución completa al problema de extensión de Whitney basándose en su espacio paratangente y encontraron evidencias que apoyaban su conjetura.

Por último, Fefferman en [Fe1] presentó un teorema que resolvía el problema de Whitney que veremos a continuación. De hecho el teorema que expone Fefferman es equivalente por dualidad a las conjeturas de Bierstone-Milman-Pawlucki reemplazando el espacio paratangente que ellos proponen con una variante natural.

Para enunciar algunos de los resultados realizados por Fefferman y otros autores en torno al Teorema de Whitney y sus extensiones, es necesario definir el concepto de Jets.

La siguiente definición se la debemos a J.Dieudonné [Di1], [Di2].

Para hacernos una idea general un jet de orden k es una clase de equivalencia de aplicaciones de clase C^k que, en un punto, tienen (para cualquier carta) las mismas derivadas hasta el orden k. Los jets de orden 1 se identifican con las aplicaciones lineales tangentes.

Vamos a dar ahora la definición formal:

Definición. Sean X e Y dos variedades diferenciables y f,g dos funciones de clase $C^r, r \geq 1$ definidas en un entorno abierto del punto $x \in X$, con valores en Y. Si k es un entero tal que $0 \leq k \leq r$, las funciones f y g tienen contacto de orden $\geq k$ en el punto $x \in X$ si $f(x) = g(x)$ y si por cada carta (U, φ, n) en X a x y cada carta (V, Ψ, m) en Y al punto $f(x) = g(x)$ las expresiones locales F, G de f, g son tales que:

$\dfrac{\|F(t) - G(t)\|}{\|z - t\|^k}$ tiende a cero si $t \in \Re^n$ tiende a $z = \varphi(x)$, o, equivalentemente si

$$D^p F(z) = D^p G(z) \text{ para } 1 \leq p \leq k .$$

Si esta condición se satisface para un par de cartas, entonces se satisface para todos los pares.

Si f y g tienen contacto de orden $\geq k$ $\forall k$ se dice que tienen contacto de orden infinito en x. La relación " f y g tienen contacto de orden $\geq k$ en el punto x " es una relación de equivalencia entre $C^k -$aplicaciones definidas en entornos de x con valores en Y.

Una clase de equivalencia de esta relación se llama jet de orden k de X en Y con fuente x y destino y (el valor común de las aplicaciones en las clases de equivalencia)

Definición: La clase de equivalencia de f se denota $J_x^k(f)$ y se llama **jet de orden k de f en el punto x .**

El conjunto de los jets de orden k con fuente x y destino y se escribe $J_x^k(X,Y)_y$.

El conjunto de los jets de orden k con fuente x se escribe $J_x^k(X,Y)$.

El conjunto de los jets de orden k con destino y se escribe $J^k(X,Y)_y$.

La unión de los conjuntos $J_x^k(X,Y)$ $\forall x \in X$ y $\forall y \in Y$ se escribe $J^k(X,Y)$.

Si $Y = \Re$ escribimos $P_x^k(X)$ en lugar de $J_x^k(X,Y)$ y $P_x^k(f)$ en lugar de $J_x^k(f)$.

El conjunto $P_x^k(X)$ tiene estructura natural de $\Re-$álgebra y tenemos:

$$P_x^k(f+g)=P_x^k(f)+P_x^k(g);\ P_x^k(\alpha f)=\alpha P_x^k(f) \text{ para } \alpha\in\Re$$

$$P_x^k(fg)=P_x^k(f)P_x^k(g).$$

El conjunto $J_0^k(\Re^n,\Re^m)$ de jets de orden k de $\Re^n$ en $\Re^m$ con fuente y destino el origen de esos espacios se denota por $L_{n,m}^k$.

Este conjunto acarrea una estructura natural de espacio vectorial real de dimensión $m\binom{k+n}{n}-m$ y los jets de los monomios $x\to x^\alpha e_j$ $(1\le j\le m, 0\le|\alpha|\le k)$ forman una base canónica.

Cada conjunto de jets $J_x^k(X,Y)_y$ está en correspondencia uno a uno con $L_{n,m}^k$ por medio de cartas en los puntos x,y (donde $\dim_x(X)=n$ y $\dim_y(Y)=m$) pero si $k\ge 2$ la estructura de espacio vectorial en $J_x^k(X,Y)_y$ obtenida por transporte de $L_{n,m}^k$ depende de la elección de las cartas.

Cuando $k=1$, $J_0^1(\Re,X)_x$ es el espacio tangente $T_x(X)$.

Para el trabajo que nos ocupa nos resultará de mayor utilidad y mejor comprensión la siguiente definición dada por Brudnyi en [Bru 7]:

Definición: Sea F el espacio lineal de las funciones $k-$veces diferenciables en un dominio $G\subset\Re^n$. Se define el **espacio de los $k-$jets**, J^kF, como el espacio de todas las funciones vectoriales ($k-$jets) $\vec{f}:=\{f_\alpha\}_{|\alpha|\le k}$ en G con valores en $\Re^N$ tales que para algún $f\in F$ y todos los $|\alpha|\le k$, se tiene que $D^\alpha f=f_\alpha$.

Aquí $N=N(k,n):=card\{\alpha\in Z_+^n;|\alpha|\le k\}$.

Si F es un espacio (semi-) normado, J^kF está equipado con la (semi-) norma:

$$\left\|\vec{f}\right\|_{J^kF}:=\inf\left\{\|f\|_F; D^\alpha f=f_\alpha, |\alpha|\le k\right\}.$$

Específicamente eligiendo F igual a $C^k(G), C_b^k(G)$, etc, podemos simplemente escribir $J^k(G), J_b^k(G),\ldots$ en lugar de J^kF. Ya que G es abierto, todas las f_α con $\alpha\ne 0$ están unívocamente definidas por f_0, es decir, la norma de $\vec{f}\in J_b^k(G)$ satisface:

$$\left\|\vec{f}\right\|_{J_b^k(G)}=\|f_0\|_{C_b^k(G)}:=\sup_{|\alpha|\le k}\|f_\alpha\|_{C_b(G)}$$

En particular, la proyección lineal $\vec{f} \mapsto f_0$ lleva isométricamente $J_b^k(G)$ en $C_b^k(G)$; de hecho en ocasiones estos espacios se identificarán.

Sucesivamente, la topología de Fréchet en $J^k(G)$ (k puede ser infinito) se define por la convergencia uniforme en subconjuntos compactos de G, es decir, esta topología está determinada por la familia de seminormas:

$$|f|_{m,C} := \sup_{|\alpha|\le k}\sup_{x\in C}|f_\alpha(x)|,$$

Donde $0 \le m \le k$ y $C \subset G$ recorre todos los subconjuntos compactos de G.

Notación previa a los resultados expuestos por Fefferman:

<u>**Definición:**</u> Por un **módulo** ω se entenderá una función continua no decreciente y cóncava, $\omega : [0,+\infty[\to [0,+\infty[$ con $\omega(0) = 0$. Un **módulo lineal** es un módulo tal que $t \to kt$, donde $k \ge 0$.

Tanto la siguiente notación como los resultados posteriores pueden consultarse en [Fe1]

<u>**Definición:**</u> Un **módulo de continuidad regular** es una función $\omega(t)$, definida para $0 \le t \le 1$ (es decir, $\omega : [0,1] \to [0,\infty)$) y cumpliendo las siguientes condiciones:

(1) $\omega(0) = Lim_{t\to 0^+}\omega(t) = 0$ y $\omega(1) = 1$,

(2) $\omega(t)$ es creciente (no necesariamente estricto) en $[0,1]$,

(3) $\dfrac{\omega(t)}{t}$ es decreciente (no necesariamente estricto) en $(0,1]$.

Supongamos que ω es un módulo de continuidad regular y supongamos que $m \ge 0$ Definimos $C^{m,\omega}(\Re^n)$ como el espacio de todas las funciones C^m, $F : \Re^n \to \Re$ con norma:

$$\|F\|_{C^{m,\omega}(\Re^n)} = \max\left\{\max_{|\beta|\le m}\sup_{x\in\Re^n}\left|\partial^\beta F(x)\right|, \max_{|\beta|=m}\sup_{x,y\in\Re^n, 0<|x-y|\le 1}\frac{\left|\partial^\beta F(x) - \partial^\beta F(y)\right|}{\omega(|x-y|)}\right\}$$

finita.

Nótese que podemos obtener una norma equivalente permitiendo todos los β con $|\beta| \le m$ en el segundo supremo.

Análogamente definimos $C^{m,\omega}_{loc}(\Re^n)$ como el espacio de todas las funciones F que coinciden con alguna $F_K \in C^{m,\omega}(\Re^n)$ para cualquier conjunto compacto dado $K \subset \Re^n$.

Fijamos $m, n \geq 1$ en lo que sigue, mientras expongamos los resultados de Fefferman.

Tomamos $\mathcal{P}$ para denotar el **espacio vectorial real-valuado de polinomios de grado** $\leq m$ en $\Re^n$ y tomamos: $D = \dim \mathcal{P}$

Si $F \in C^m_{loc}(\Re^n)$ e $y \in \Re^n$ entonces escribimos $J_y(F)$ para el $m-$jet de F en y, es decir, el polinomio:

$$x \to \sum_{|\beta| \leq m} \frac{1}{\beta!} \left(\partial^\beta F(y)\right) \cdot (x-y)^\beta$$

Escribimos R_y para denotar al anillo de jets en y. Más precisamente $R_y = \mathcal{P}$, con el operador multiplicación que da lugar a $P \cdot Q = S$ ($P, Q, S \in \mathcal{P}$) si y sólo si $\partial^\beta (PQ - S)(y) = 0$ para $|\beta| \leq m$, donde PQ denota el producto ordinario de polinomios.

<u>**Definición**</u>: Fijado $y \in \Re^n, A > 0$ y sea Ω un subconjunto de R_y. Entonces decimos que Ω es **convexo de Whitney en** y **con constante de Whitney** A si se cumplen las siguientes condiciones:

(a) Ω es cerrado, convexo y simétrico con respecto al origen (esto es $P \in \Omega$ si y sólo si $-P \in \Omega$)

(b) Sean $P \in \Omega$, $Q \in \Omega$ y $0 < \delta \leq 1$ dados. Asumimos que: $\left|\partial^\alpha P(y)\right| \leq \delta^{m-|\alpha|}$ y $\left|\partial^\alpha Q(y)\right| \leq \delta^{-|\alpha|}$, para $|\alpha| \leq m$. Sea $P \cdot Q$ el producto de Q y P en R_y. Entonces $P \cdot Q$ pertenece a $A \cdot \Omega$.

Si $\sigma \subseteq R_x$ es convexo de Whitney con constante de Whitney A entonces es $\omega-$convexo de Whitney para cualquier módulo de continuidad regular, de nuevo con constante de Whitney A.

Como ya se ha dicho, $C^{m,\omega}(\Re^n)$ es el espacio de las funciones C^m, $F : \Re^n \to \Re$ cuyas derivadas hasta el orden m están acotadas y tienen módulo de continuidad ω.

<u>Teorema 1</u>: Dados $m,n \geq 1$ existe $k^{\#}$ dependiendo sólo de m y n para el cual se cumple lo siguiente:

Sea ω un módulo de continuidad regular, sean $E \subseteq \Re^n$ y $f : E \to \Re$, $\sigma : E \to [0,\infty)$ funciones dadas en E. Supongamos que, dado $S \subseteq E$ con cardinalidad a lo sumo $k^{\#}$ existe $F^s \in C^{m,\omega}(\Re^n)$ cumpliendo:

$$\left\|F^s\right\|_{C^{m,\omega}(\Re^n)} \leq 1, \text{ y}$$

$$\left|F^s(x) - f(x)\right| \leq \sigma(x), \forall x \in S.$$

Entonces existe $F \in C^{m,\omega}(\Re^n)$ cumpliendo:

$$\|F\|_{C^{m,\omega}(\Re^n)} \leq A, \quad \text{y}$$

$$\left|F(x) - f(x)\right| \leq A\sigma(x), \forall x \in E.$$

Aquí, A es una constante que depende sólo de m y n.

Luego, para decidir cuándo existe una función $F \in C^{m,\omega}(\Re^n)$ y una constante finita M tal que $\left|F(x) - f(x)\right| \leq M\sigma(x), \forall x \in E$ es suficiente examinar los subconjuntos finitos $S \subseteq E$ con cardinalidad a lo sumo $k^{\#}$.

Veremos ahora una versión del Teorema 1 donde la condición $\left|F(x) - f(x)\right| \leq \sigma(x)$ es reemplazada por el requerimiento de que el $m-$jet de F en x pertenece a un conjunto convexo prescrito.

Supongamos que para cada punto $x \in E$ se nos da un $m-$jet $f(x) \in R_x$ y un subconjunto cerrado simétrico convexo, $\sigma(x) \subseteq R_x$

Sea ω un módulo de continuidad regular. Nos preguntamos: ¿cómo podemos decidir cuándo existe $F \in C^{m,\omega}(\Re^n)$ y una constante $A < \infty$ tal que $J_x(F) - f(x) \in A \cdot \sigma(x), \forall x \in E$?

Así, el teorema análogo al Teorema 1 para conjuntos $\omega-$convexos de Whitney es:

Teorema 2: Dados $m,n \geq 1$ existe $k^{\#}$ dependiendo sólo de m y n para los cuales se da lo siguiente:

Sea ω un módulo de continuidad regular, sea $E \subseteq \Re^n$ y sea $A > 0$. Para cada $x \in E$ supongamos que se nos da un $m-$jet $f(x) \in R_x$ y un subconjunto $\omega-$convexo de Whitney $\sigma(x) \subseteq R_x$ con constante de Whitney A.

Supongamos que dado $S \subseteq E$ con cardinalidad a lo sumo $k^{\#}$ existe $F^s \in C^{m,\omega}(\Re^n)$ cumpliendo:

$$\|F^s\|_{C^{m,\omega}(\Re^n)} \leq 1, \text{ y}$$

$$J_x(F^S) - f(x) \in \sigma(x), \forall x \in S.$$

Entonces existe $F \in C^{m,\omega}(\Re^n)$ cumpliendo:

$$\|F\|_{C^{m,\omega}(\Re^n)} \leq A', \text{ y}$$

$$J_x(F) - f(x) \in A' \cdot \sigma(x), \forall x \in E.$$

Aquí, A' es una constante que depende sólo de m, n y de la constante de Whitney A.

El propósito del trabajo de Fefferman en [Fe1] es probar el Teorema 2 trasladando la prueba del Teorema 1. Ambas pruebas son muy complicadas y técnicas y se escapan de esta memoria en la que pretendíamos hacer una introducción al tema de extensiones.

Además, del Teorema 2 se obtiene el siguiente resultado:

Teorema 3: Sean $m,n \geq 1$. Entonces existe una constante $k^{\#}$, dependiendo sólo de m y n para la cual se cumple lo siguiente:

Sea ω un módulo de continuidad regular y sea $E \subset \Re^n$ un subconjunto arbitrario. Supóngase que para cada $x \in E$ se nos da un $m-$jet $f(x) \in R_x$ y un subconjunto $\sigma(x) \subset R_x$.

Asumimos que cada $\sigma(x)$ es un convexo de Whitney, con constante de Whitney A_0 independiente de x. Asumimos también que dado cualquier subconjunto $S \subset E$ con cardinalidad a lo sumo $k^{\#}$ existe una aplicación $x \to P^x$ de S en $\mathcal{P}$ con:

a) $P^x \in f(x) + \sigma(x), \forall x \in S$.

b) $\left|\partial^{\beta} P^x(x)\right| \leq 1, \forall x \in S, |\beta| \leq m$ y

c) $\left|\partial^{\beta}(P^x - P^y)(y)\right| \leq \omega(|x-y|) \cdot |x-y|^{m-|\beta|}$ para $|\beta| \leq m, |x-y| \leq 1; x, y \in S$.

Entonces existe $F \in C^{m,\omega}(\Re^n)$ con $\|F\|_{C^{m,\omega}(\Re^n)} \leq A_1$ y $J_x(F) \in f(x) + A_1\sigma(x), \forall x \in E$.

Aquí A_1 depende sólo de m,n y de la constante de Whitney A_0 .

Para deducir el Teorema 3 del Teorema 2 se usa el hecho de que la convexidad de Whitney implica la $\omega-$ convexidad de Whitney y se utiliza el siguiente lema:

__Lema:__ Sea ω un módulo de continuidad regular y sea $S \subset \Re^n$ un conjunto finito. Supongamos que se nos da un $m-$jet $P^x \in \mathcal{P}$ asociado a cada punto $x \in S$. Asumimos que:

(a) $\left|\partial^\beta P^x(x)\right| \leq 1, \forall x \in S, |\beta| \leq m$ y que:

(b) $\left|\partial^\beta (P^x - P^y)(y)\right| \leq \omega(|x-y|) \cdot |x-y|^{m-|\beta|}$ para $|\beta| \leq m, |x-y| \leq 1; x,y \in S$

Entonces existe $F^S \in C^{m,\omega}(\Re^n)$ con $\|F^S\|_{C^{m,\omega}(\Re^n)} \leq C$ y $J_x(F^S) = P^x, \forall x \in S$.

Aquí C depende sólo de m y n.

Antes de enunciar el siguiente teorema es necesario definir los siguientes conjuntos, subespacios afines de $\mathcal{P}$.

__Definición.__ Sea $\varphi : E \to \Re$ dada, con $E \subset \Re^n$ compacto como en el problema de Whitney. Por inducción en $l \geq 0$ definimos un subespacio afín $H_l(x_0) \subseteq \mathcal{P}$ para cada punto $x_0 \in E$.

Empezamos con $H_0(x_0) = \{P \in \mathcal{P} : P(x_0) = \varphi(x_0)\}$ para $x_0 \in E$.

El paso de inducción es como sigue:

Fijamos $l \geq 0$ y suponemos que tenemos definido $H_l(x), \forall x \in E$.

Definiremos un subespacio afín $H_{l+1}(x_0) \subseteq H_l(x_0)$ para cada $x_0 \in E$.

Para hacerlo, sea $\bar{k}$ una constante suficientemente grande dependiendo sólo de m y n. Sea $B(x,r)$ la bola de radio r sobre x en $\Re^n$.

Decimos que dado $P_0 \in H_l(x_0)$ pertenece a $H_{l+1}(x_0)$ si se cumple la siguiente condición:

Dado $\varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ tal que para cualesquiera $x_1 ... x_{\bar{k}} \in E \cap B(x_0, \delta)$ existe $P_1 \in H_l(x_1) ...... P_{\bar{k}} \in H_l(x_{\bar{k}})$ con:

$$\left|\partial^{\alpha}(P_i - P_j)(x_j)\right| \leq \varepsilon \left|x_i - x_j\right|^{m-|\alpha|} \text{ para } |\alpha| \leq m, 0 \leq i, j \leq \bar{k}.$$

El conjunto $H_{l+1}(x_0)$ puede ser vacío. Por convención, permitimos el conjunto vacío como un subespacio afín de $\mathcal{P}$.

En principio, $H_l(x_0)$ son computables a partir de $\varphi : E \to \Re$.

El significado de los subespacios $H_l(x_0)$ es que, cuando $F \in C^m(\Re^n)$ con $F = \varphi$ en E, entonces $J_{x_0}(F) \in H_l(x_0)$ para cualquier $l \geq 0$ y $x_0 \in E$ (esto se sigue de una inducción en l usando el Teorema de Taylor).

En particular si algún $H_l(x_0)$ es vacío, entonces φ no admite una extensión C^m.

Teorema 4: Sea $l = 2 \cdot \dim \mathcal{P} + 1$

(A) Si $H_l(x_0)$ es no vacío para todo $x_0 \in E$ entonces φ se puede extender a una función C^m, F en $\Re^n$.

(B) Supongamos que φ se puede extender a una función C^m en $\Re^n$. Sea $x_0 \in E$. Entonces, dado $P_0 \in H_l(x_0)$ existe $F \in C^m(\Re^n)$ con $F = \varphi$ en E y $J_{x_0}(F) = P_0$.

El Teorema 4 resuelve el problema de Whitney y además computa el espacio de todos los posibles $m-$jets en un $x_0 \in E$ dado de las funciones $F \in C^m(\Re^n)$ con $F = \varphi$ en E.

El trabajo de Fefferman en este ámbito es muy extenso. Conjugando la diferenciabilidad de las extensiones con la Lipschicianidad obtenemos los siguientes resultados, que se pueden consultar en [Fe2].

Un problema que resulta muy interesante resolver es el que sigue:

Problema 1: Supongamos que tenemos una función $f : E \to \Re$ donde E es un subconjunto dado de $\Re^n$. ¿Cómo podemos decidir si f se puede extender a una función $C^{m-1,1}$, F en $\Re^n$?

Aquí, $m \geq 1$ es dado y como siempre $C^{m-1,1}$ denota el espacio de funciones cuyas $(m-1)$-ésimas derivadas son 1-Lipschitz. Aunque no se hace ninguna hipótesis sobre el conjunto E o la función f.

Para contestar a esta pregunta se tiene el siguiente resultado.

Teorema A: Dados $m, n \geq 1$, existe k , dependiendo sólo de m y n, para el cual se cumple lo siguiente:

Sea $f : E \to \Re$ dada, con E un subconjunto arbitrario de $\Re^n$. Supongamos que para cualesquiera k puntos $x_1, \ldots\ldots x_k \in E$ distintos, existen polinomios $P_1, \ldots\ldots P_k$ en $\Re^n$ de grado $m-1$ cumpliendo:

(a) $P_i(x_i) = f(x_i)$ para $i = 1, \ldots k$

(b) $\left|\partial^\beta P_i(x_i)\right| \leq M$ para $i = 1, \ldots k$ y $|\beta| \leq m-1$; y

(c) $\left|\partial^\beta (P_i - P_j)(x_i)\right| \leq M\left|x_i - x_j\right|^{m-|\beta|}$ para $i, j = 1, \ldots k$ y $|\beta| \leq m-1$; con M independiente de $x_1, \ldots\ldots x_k$.

Entonces f se puede extender a una función $C^{m-1,1}$ en $\Re$.

El recíproco del Teorema A también es cierto. Además el Teorema A proporciona una solución al problema 1. El punto es que, en el Teorema A, sólo necesitamos extender el valor de la función $f(x_i)$ a un jet P_i en un número finito y fijado de puntos $x_1, \ldots\ldots x_k$. Para aplicar el Teorema de Extensión de Whitney estándar al problema 1, necesitamos primero extender $f(x)$ a un jet P_x en cada punto $x \in E$. Nótese que cada P_i en (a), (b), (c) pueden depender de $x_1, \ldots\ldots x_k$ en lugar de depender de un solo x_i.

Para probar el Teorema A es natural buscar funciones F de la familia de funciones $C^{m-1,1}-$ en $\Re^n$ acotadas y que coinciden con f en subconjuntos $E_1 \subset E$ finitos y arbitrariamente grandes. Llegamos así a un problema de extensión finita.

Problema 2: Dada una función $f : E \to \Re$ definida en un subconjunto $E \subset \Re^n$, calcular el orden de magnitud del ínfimo de las C^m-normas de todas las funciones diferenciables $F : \Re^n \to \Re$ que coinciden con f en E.

"Computar el orden de magnitud" aquí significa dar límites superior e inferior computables $M_{\inf}$, $M_{\sup}$ con $M_{\sup} \leq AM_{\inf}$ para una constante A dependiendo sólo de m y n. (En particular, A debe ser independiente del número y posición de los puntos de E) . Aquí hemos pasado de $C^{m-1,1}$ a C^m. Para conjuntos finitos E, el Problema 2 es completamente equivalente a su análogo para $C^{m-1,1}$.

El Problema 2 nos trae a la mente intentar determinar una función desconocida $F:\Re^n \to \Re$ haciendo un número finito de mediciones, es decir, determinando $F(x)$ para x en un conjunto finito grande E. Por supuesto no podemos decir cuándo $F \in C^m$ haciendo un número finito de mediciones, pero se puede preguntar si los datos correspondientes a la C^m norma de F son grandes (o quizás más grande a medida que se recogen más datos). Las mediciones reales de $f(x)$ estarán sujetas al error experimental $\sigma(x) > 0$. Así, esto nos lleva a una versión más general del Problema 2, el "Problema de extensión finita con barras de errores".

__Problema 3__: Sea $E \subset \Re^n$ un conjunto finito, y sean $f:E \to \Re$ y $\sigma:E \to [0,\infty)$. ¿Cómo podemos decir cuándo existe una función $F:\Re^n \to \Re$ con $\left|F(x)-f(x)\right| \underset{\sim}{<} \sigma(x)$ para todo $x \in E$ y $\|F\|_{C^m(\Re^n)} \underset{\sim}{<} 1$?

Aquí $P \underset{\sim}{<} Q$ significa que $P \le AQ$ para una constante A dependiendo sólo de m y n. (En particular A debe ser independiente del conjunto E).

Este problema es resuelto por el siguiente teorema análogo al Teorema A para conjuntos finitos E.

__Teorema B:__ Dados $m,n \ge 1$ existe $k^\#$ dependiendo sólo de m y n para el cual se cumple lo siguiente:

Sean $f:E \to \Re$ y $\sigma:E \to [0,\infty)$ funciones definidas en un conjunto finito $E \subset \Re^n$. Sea M un número positivo dado. Supongamos que, para cualesquiera k puntos distintos $x_1,\ldots\ldots x_k \in E$ con $k \le k^\#$ existen polinomios de grado $m-1$, $P_1,\ldots\ldots P_k$ en $\Re^n$ cumpliendo:

(a) $\left|P_i(x_i)-f(x_i)\right| \le \sigma(x_i)$ para $i=1,\ldots k$;

(b) $\left|\partial^\beta P_i(x_i)\right| \le M$ para $i=1,\ldots k$ y $|\beta| \le m-1$; y

(c) $\left|\partial^\beta (P_i-P_j)(x_i)\right| \le M \cdot \left|x_i-x_j\right|^{m-|\beta|}$ para $i,j=1,\ldots k$ y $|\beta| \le m-1$.

Entonces existe $F \in C^m(\Re^n)$ con $\|F\|_{C^m(\Re^n)} \le A \cdot M$ y $\left|F(x)-f(x)\right| \le A \cdot \sigma(x)$ para todo $x \in E$.

Aquí, la constante A depende sólo de m y n.

De nuevo, el punto del Teorema B es que sólo necesitamos buscar un número fijo $k^{\#}$ de puntos de E, a pesar de que E puede contener arbitrariamente muchos puntos. El Teorema B resuelve el Problema 3; haciendo $\sigma \equiv 0$ resuelve también el Problema 2. Una vez que conocemos el Teorema B, un argumento de compacidad usando el Teorema de Ascoli nos permite deducir el Teorema A, en una forma más general involucrando las barras de errores.

El Teorema B puede ser reducido al siguiente resultado aplicando el Teorema de extensión de Whitney estándar.

Teorema C: Dados $m,n \geq 1$ existen $k^{\#}$ y A, dependiendo sólo de m y n, para los cuales se cumple lo que sigue. Sean $f : E \to \Re$ y $\sigma : E \to [0,\infty)$ funciones en un conjunto finito $E \subset \Re^n$. Supongamos que para cada subconjunto $S \subset E$ con al menos $k^{\#}$ elementos, existe una función $F^S \in C^m(\Re^n)$ con $\|F^S\|_{C^m(\Re^n)} \leq 1$ y $|F^S(x) - f(x)| \leq \sigma(x)$ para todo $x \in S$. Entonces existe una función $F \in C^m(\Re^n)$ con $\|F\|_{C^m(\Re^n)} \leq A$ y $|F(x) - f(x)| \leq A\sigma(x)$ para todo $x \in E$.

Observación: El Teorema C es la forma más clásica del Problema de Extensión de Whitney. Como se ha mencionado anteriormente, el mismo Whitney lo resolvió en el caso uno-dimensional en términos de diferencias finitas (Ver [Whit 2]).

2.3 Caso infinito dimensional. Extensiones diferenciables de funciones en Espacios de Banach separables con dual separable.

Estudiaremos ahora las extensiones diferenciables C^1 para un caso concreto de espacios topológicos: los espacios de Banach separables (finito o infinito dimensionales). Para consultar o ampliar la información véase [Az 1]. Veremos la demostración de alguno de los resultados, el resto de demostraciones pueden construirse siguiendo un esquema similar o se indicará un esquema de la misma.

En primer lugar recordaremos las siguientes definiciones:

Definición: Sea X un espacio vectorial y sean M, N dos subespacios vectoriales de X. Diremos que X es suma directa de M y N (representado por $X = M \oplus N$) si $M + N = X$ y $M \cap N = \{0\}$. En este caso diremos que N es el **complemento directo** de M. La ley $(m,n) \rightarrow \phi(m.n) := m + n$ define una aplicación, ϕ, de $M \times N$ en X y es fácil comprobar que:

- $X = M \oplus N$ si, y solo si, la aplicación ϕ es una biyección.

- todo subespacio propio de un espacio vectorial admite un complemento directo.

Definición: Sea X un espacio normado, M es un subespacio normado de X cuyo complemento directo es N. Diremos que X es suma topológico-directa de M y N (notado por $X = M \oplus_t N$) si la aplicación $(m,n) \rightarrow m + n$ es un isomorfismo de $M \times N$ sobre X, considerando la topología producto de las inducidas por X en M y N. En tal caso diremos que N es un complemento topológico de M y que M es un **subespacio complementado**.

Veremos a continuación el problema de extensión de funciones diferenciables desde subespacios de Banach a funciones diferenciables en todo el espacio. Esto es, sea X un espacio de Banach con dual separable, X^*. Sean $Y \subset X$ un subespacio cerrado y $f : Y \rightarrow \Re$ una función $C^1 -$diferenciable. Entonces veremos que existe una extensión C^1 de f a X. Aquí la diferenciabilidad es entendida en el sentido Fréchet y restringiremos nuestra atención a las funciones real-valuadas. Para plantear el problema más precisamente, dados un espacio de Banach X, un subespacio cerrado Y y una función C^p-diferenciable $f : Y \rightarrow \Re$, ¿cuándo es posible encontrar una función C^p-diferenciable $F : X \rightarrow \Re$ tal que $F|_Y = f$?

Observación: Nótese que cuando Y es un subespacio complementado de un espacio de Banach arbitrario X, el problema de extensión se puede resolver fácilmente. En efecto, sea $P : X \rightarrow Y$ una proyección lineal continua y sea $f : Y \rightarrow \Re$ una función $C^p -$diferenciable. Entonces $F(x) = f(P(x))$ define una extensión C^p de f en X. Desafortunadamente no todos los subespacios cerrados Y de un espacio de Banach X son complementados.

De hecho, un resultado clásico de Lindenstrauss y Tzafrifi afirma que el único espacio de Banach cuyos subespacios cerrados son todos complementados es el espacio de Hilbert, luego este truco sólo funciona cuando X es un espacio de Hilbert.

Cuando $p = 0$, esta cuestión es el problema de las extensiones continuas de funciones desde subconjuntos cerrados. Una caracterización completa fue dada por el conocido teorema de Tietze visto anteriormente.

Consideramos ahora el caso en el que X es un espacio de Banach separable que admite una norma C^1 – diferenciable, una condición que, como es bien sabido, es equivalente a que X^* sea separable. Entonces si $Y \subset X$ es un subespacio cerrado y $f : Y \to \Re$ es C^1 – diferenciable, veremos que existe una extensión C^1, $F : X \to \Re$.

Los siguientes lemas son herramientas muy útiles para las pruebas de los teoremas que expondremos después:

<u>**Lema 1:**</u> Sea X un espacio de Banach separable que admite una norma C^1 – diferenciable. Entonces existe una constante $C_0 \geq 1$ tal que para cualquier subconjunto $Y \subseteq X$, cualquier función η – Lipschitz, $f : Y \to \Re$ y todo $\varepsilon > 0$ existe una función $C_0\eta$ – Lipschitz C^1 – diferenciable, $K : X \to \Re$ tal que para todo $y \in Y$: $|f(y) - K(y)| < \varepsilon$.

<u>**Lema 2:**</u> Para todo espacio de Banach X y todo subespacio cerrado $Y \subset X$ existen una aplicación continua $H : Y^* \to X^*$ y un número $M \geq 1$ tales que:

(1) $H(y^*)(y) = y^*(y)$ para todo $y^* \in Y^*, y \in Y$;

(2) $\|H(y^*)\|_{X^*} \leq M\|y^*\|_{Y^*}$ para todo $y^* \in Y^*$.

Con estos lemas se está en situación de deducir un resultado de aproximación que es de interés general y que, junto con algunas ideas de las demostración de Tietze producirá los principales resultados en extensiones diferenciables de este apartado.

<u>**Teorema 1:**</u> Sea X un espacio de Banach separable que admite una norma C^1 – diferenciable y sea $Y \subset X$ un subespacio cerrado. Sean $f : Y \to \Re$ una función C^1 – diferenciable y F una extensión continua de f a X. Sea $H : Y^* \to X^*$ un operador extensión como en el lema 2. Entonces para todo $\varepsilon > 0$ existe una función C^1 – diferenciable, $g : X \to \Re$ tal que:

(1) $|F(x) - g(x)| < \varepsilon$ en X y

(2) $\|H(f'(y)) - g'(y)\|_{X^*} \leq \varepsilon$ en Y.

Además si la función C^1 dada, f es Lipschitz en Y y F es una extensión Lipschitz de f en X con $Lip(F) = Lip(f)$ (por ejemplo $F(x) = \inf_{y \in Y}\{f(y) + Lip(f)\|x - y\|\}$), entonces la función g puede elegirse Lipschitz en X y con la propiedad adicional de que:

(3) $Lip(g) \leq CLip(f)$,

donde $C > 1$ es una constante que depende sólo de X.

Demostración: En primer lugar nótese que por el Teorema de Tietze, la extensión continua F siempre existe.

Para esta demostración se utiliza una modificación de la prueba del Teorema 4 de [Az 3] utilizando el Lema 1. Posteriormente se hace uso del Lema 2.

Será conveniente utilizar la siguiente notación: dado un punto $y_k \in Y$, definimos T_k como la $H-$extensión natural del Polinomio de Taylor de primer orden de f en y_k; a saber: $T_k(x) = f(y_k) + H(f'(y_k))(x - y_k)$. Nótese en particular que $T_k \in C^\infty(X, \Re)$ con $T_k'(x) = H(f'(y_k))$ para todo $x \in X$ y $T_k'(y)\big|_Y = f'(y_k)$ para todo $y \in Y$.

Ahora, usando la separabilidad de X, el hecho de que $Y \subset X$ sea cerrado y la continuidad de F, podemos construir un recubrimiento $C = \{B_{r_j}\}_{j=1}^\infty \cup \{B_{s_k}\}_{k=1}^\infty$ de X mediante bolas abiertas con centros x_j e y_k respectivamente, con las siguientes propiedades:

(i) Tenemos que $B_{2r_j} \subset X - Y$, y $|F(x) - F(x_j)| < \varepsilon / 2C_0$ en B_{2r_j}.

(ii) La colección $\{B_{s_k}\} \subset X$ cubre Y con centros $y_k \in Y$ y radios s_k elegidos usando la diferenciabilidad de f en Y y la continuidad en norma del operador extensión H, así que $\|T_k'(y) - f'(y)\|_{Y^*} < \varepsilon / 8C_0$ y $\|T_k'(y) - H(f'(y))\|_{X^*} < \varepsilon / 8C_0$ en $B_{2s_k} \cap Y$.

Será útil en lo sucesivo emplear una notación alternativa para las bolas abiertas B_{r_j} y B_{s_k}. Tomamos $\beta : \aleph \to C$ la biyección donde para cada i, $\beta(i) = B(\beta_1(i); \beta_2(i))$. Sea $\varphi_j \in C^1(X, [0,1])$ con derivada acotada tal que $\varphi_j = 1$ en $B(\beta_1(j); \beta_2(j))$ y $\varphi_j = 0$ fuera de $B(\beta_1(j); 2\beta_2(j))$.

Por el Lema 1 aplicado a $T_k(y) - f(y)$ en $B_{2s_k} \cap Y$, podemos elegir una función C^1-diferenciable, $\delta_k : X \to \Re$ tal que en cada $B_{2s_k} \cap Y$ tenemos ambos:

$$|T_k(y) - f(y) - \delta_k(y)| < 2^{-k-2} \varepsilon M_k^{-1},$$

y $\|\delta_k'(y)\|_{X^*} < \varepsilon / 8$, donde $M_k = \sum_{i=1}^{k} \widetilde{M}_i$ y $\widetilde{M}_i = \sup_{x \in Y \cap B_{2s_i}} \|\varphi_i'(x)\|_{X^*}$.

Entonces, tenemos también que para $y \in B_{2s_k} \cap Y$, usando la estimación de arriba:

$$\|T_k'(y) - H(f'(y)) - \delta_k'(y)\|_{X^*} \le \|T_k'(y) - H(f'(y))\|_{X^*} + \|\delta_k'(y)\|_{X^*} < \varepsilon / 8C_0 + \varepsilon / 8 \le \varepsilon / 4.$$

Sea $\Delta_i(x) = T_k(x) - \delta_k(x)$ si $\beta(i) = B_{s_k}$ es una bola de la subcolección $\{B_{s_l}\}_{l=1}^{\infty}$ cubriendo Y, y $\Delta_i(x) = F(x_j)$ si $\beta(i) = B_{r_j}$ pertenece a la subcolección $\{B_{r_l}\}_{l=1}^{\infty}$ cubriendo $X - Y$.

Después, definimos:

$$h_i = \varphi_i \prod_{k<i} (1 - \varphi_k),$$

y

$$g(x) = \sum_i h_i(x) \Delta_i(x).$$

Nótese que para cada x, si $n := n(x) := \min\{m : x \in \beta(m)\}$, entonces ya que $1 - \varphi_n(x) = 0$ y $\beta(n)$ es abierto, se sigue de la definición de h_j que existe un entorno $N \subset \beta(n)$ de x tal que para $z \in N$, $g(z) = \sum_{j \le n} h_j(z) \Delta_j(z)$, y $\sum_j h_j(z) = \sum_{j \le n} h_j(z)$.

Además, mediante un sencillo cálculo, usando nuevamente el hecho de que $\varphi_n = 1$ en $\beta(n)$ tenemos que $\sum_j h_j(z) = 1$ para $z \in \beta(n)$ y también para todo $z \in X$.

Ahora, fijado cualquier $x_0 \in X$, sea $n_0 = n(x_0)$ y un entorno N_0 de x_0 como antes. Para cada $j \le n_0$ definimos las funciones $V_j : N_0 \to \Re$ y $W_j : N_0 \to \Re$ mediante:

$$V_j(x) = \begin{cases} 0 & si \;\; \beta_1(j) \notin Y \\ |T_k(x) - F(x) - \delta_k(x)| & si \;\; \beta_1(j) = y_k \end{cases}$$

y

$$W_j(x) = \begin{cases} 0 & si \;\; \beta_1(j) \in Y \\ |F(x_i) - F(x)| & si \;\; \beta_1(j) = x_i \end{cases}$$

Entonces para cualquier $x \in N_0$ tenemos que:

$$|g(x) - F(x)| \le \sum_{j \le n_0} h_j(x) \max\{V_j(x), W_j(x)\} \le \sum_{j \le n_0} h_j(x) \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon .$$

Ahora definimos la función α de modo que $\beta_1(j) \in Y, \beta_1(j) = y_{\alpha(j)}$. Recalcamos que $B_{2r_j} \cap Y = \varnothing$ para cada j, y que $\varphi_j = 0$ fuera de B_{2r_j}. Por lo tanto, si $y \in Y$, entonces en la suma $g(y)$ sólo aquellos índices j tales que $\beta_1(j) \in Y$ son distintos de cero.

Recalcamos también que $\sum_j h_j(x) = 1$ para todo $x \in X$ (y por tanto $\sum_j h'_j(x) = 0$) por lo que para todo $y \in Y$ tenemos $H\big(f'(y)\big) = \sum_j h'_j(y) f(y) + \sum_j h_j(y) H\big(f'(y)\big)$. Y $g'(y) = \sum_j h'_j(y)\big(T_{\alpha(j)}(y) - \delta_{\alpha(j)}(y)\big) + \sum_j h_j(y)\big(T'_{\alpha(j)}(y) - \delta'_{\alpha(j)}(y)\big)$.

Finalmente, un sencillo cálculo demuestra que $\|h'_j(x)\| \le M_{\alpha(j)}$ para $\beta_1(j) \in Y$. Con estas observaciones en mente, tenemos:

$$\|g'(y) - H\big(f'(y)\big)\|_{X^*}$$

$$\le \sum_{\substack{j \le n(y) \\ \beta_1(j) \in Y}} \Big(\|h'_j(y)\| \big|T_{\alpha(j)}(y) - f(y) - \delta_{\alpha(j)}(y)\big| + h_j(y) \big\|T'_{\alpha(j)}(y) - H\big(f'(y)\big) - \delta'_{\alpha(j)}(y)\big\|_{X^*} \Big)$$

$$< \sum_{\substack{j \le n(y) \\ \beta_1(j) \in Y}} \|h'_j(y)\| \Big(2^{-\alpha(j)-2} \varepsilon M^{-1}_{\alpha(j)}\Big) + \sum_{\substack{j \le n(y) \\ \beta_1(j) \in Y}} h_j(y) \frac{\varepsilon}{4}$$

$$< \sum_{\substack{j \le n(y) \\ \beta_1(j) \in Y}} M_{\alpha(j)} \Big(2^{-\alpha(j)-2} \varepsilon M^{-1}_{\alpha(j)}\Big) + \frac{\varepsilon}{4} < \varepsilon .$$

Como $H\big(f'(y)\big)\big|_Y = f'(y)$, podemos estimar también $\|g'(y) - f'(y)\|_{Y^*} < \varepsilon$.

Vamos ahora a considerar el caso en el que f es C^1 y Lipschitz en Y y F es cualquier extensión Lipschitz de f a X con $Lip(F) = Lip(f)$. En este caso tenemos que modificar la definición de las funciones Δ_i como sigue.

Sea $\Delta_i(x) = T_k(x) - \delta_k(x)$ si $\beta(i) = B_{s_k}$ es una bola de la subcolección $\{B_{s_l}\}_{l=1}^{\infty}$ cubriendo Y donde δ_k es elegido (usando el Lema 1) tal que $\big|T_k(y) - f(y) - \delta_{k(y)}\big| < 2^{-i-2} \varepsilon M_k^{-1}$, y $\|\delta'_k(y)\|_{X^*} < \varepsilon/8$, donde ahora M_i está definido por $M_i = \sum_{j=1}^{i} \widetilde{M}_j$ y $\widetilde{M}_j = \sup_{x \in B(\beta_1(j); 2\beta_2(j))} \|\varphi'_i(x)\|_{X^*}$. Definimos también $\Delta_i(x) = F_l(x)$ si $\beta(i) = B_{r_l}$ perteneciendo a la subcolección $\{B_{r_j}\}_{j=1}^{\infty}$ cubriendo $X - Y$, donde la función F_l está elegida usando de nuevo el Lema 1 tal que $|F_l(x) - F(x)| < 2^{-i-2} \varepsilon M_l^{-1}$ en B_{2r_l} y $Lip(F_l) \le C_0 Lip(F) = C_0 Lip(f)$. Nótese que, con estas elecciones, tenemos:

$$|\Delta_i(x) - F(x)| < 2^{-i-2} \varepsilon M_l^{-1} \quad \text{en} \quad B\big(\beta_1(i), \beta_2(i)\big), \quad \text{y}$$

$$Lip(\Delta_i) \le \max\left\{ M Lip(f) + \frac{\varepsilon}{8}, C_0 Lip(f) \right\},$$

donde M es como en el Lema 2 (2).

Podemos obviamente asumir que f no es constante, luego $Lip(f) > 0$, y si ε es elegido suficientemente pequeño la última inecuación implica:

$$Lip(\Delta_i) \le C_1 Lip(f),$$

donde C_1 es una constante que depende sólo de X .

Ahora definimos la función C^1, $g : X \to \Re$ por $g(x) = \sum_i \Delta_i(x) h_i(x)$.

Como arriba, podemos comprobar que $|g(x) - F(x)| < \varepsilon$ para todo $x \in X$ y por tanto $\|g'(y) - H(f'(y))\|_{X^*} < \varepsilon$ para todo $y \in Y$; esto es, g satisface las propiedades (1) y (2) del enunciado. Veamos que g satisface también la propiedad (3). Notando que $Lip(h_j) \le M_j$, podemos estimar, para todo $x, z \in X$,

$$g(x) - g(z)$$

$$= \sum_j \Delta_j(x) h_j(x) - \sum_j \Delta_j(z) h_j(z)$$

$$= \sum_j (\Delta_j(x) - F(x))(h_j(x) - h_j(z)) + \sum (\Delta_j(x) - \Delta_j(z)) h_j(z)$$

$$\le \sum_j \frac{\varepsilon}{2^{j+2} M_j} Lip(h_j) \|x - z\| + \sum_j Lip(\Delta_j) \|x - z\| h_j(z)$$

$$\le \left(\frac{\varepsilon}{4} + C_1 Lip(f) \right) \|x - z\| \le C Lip(f) \|x - z\|,$$

siempre que $\varepsilon > 0$ sea suficientemente pequeño (recalcamos que estamos asumiendo que $Lip(f) > 0$), y donde $C = 2C_1 > 1$, es una constante que depende sólo de X . Esto prueba que $Lip(g) \le C Lip(f)$. Con lo que concluye la demostración de este Teorema que será clave tanto en esta sección como en las secciones 2.4 y 2.5.

Con el Teorema 1 se puede probar el siguiente resultado:

Teorema 2: Sea X un espacio de Banach separable que admite una norma C^1 – diferenciable. Sean $Y \subset X$ un subespacio cerrado y $f : Y \to \Re$ una función C^1 – diferenciable y Lipschitz. Entonces existe una extensión C^1 y Lipschitz, $g : X \to \Re$ tal que $Lip(g) \le C Lip(f)$ donde $C > 1$ es una constante que depende sólo de X .

__Demostración:__ En primer lugar nótese que si h es una función Lipschitz acotada definida en Y, entonces existe siempre una extensión Lipschitz acotada de h a X con la misma constante de Lipschitz y acotada por la misma constante (definida, por ejemplo por $x \to \max\{-\|h\|_\infty, \min\{\|h\|_\infty, \inf_{y\in Y}\{h(y)+Lip(h)\|x-y\|\}\}\}$).

Para el propósito de la prueba denotaremos una extensión tal $\bar{h}$. Sea $\varepsilon > 0$.

Vamos a definir una función g por medio de series construidas por inducción.

Por el Teorema 1 existe una función C^1, $g_1 : X \to \Re$ tal que:

* $\left|\overline{f - g_1}\right| < 2^{-1}\varepsilon$ en X,

* $\|f'(y) - g_1'(y)\|_{Y^*} < 2^{-1}\varepsilon/C$ para $y \in Y$ (nótese que en particular esto implica que $Lip(f - g|_Y) \le 2^{-1}\varepsilon/C$), y

* $Lip(g_1) \le CLip(f)$.

Ahora, para $n \ge 2$, supongamos que hemos elegido $g_1, \ldots\ldots g_n$ real-valuadas y C^1 – diferenciables en X tales que para todo $x \in X$ y para todo $y \in Y$,

$$\left|\overline{\left(f - \sum_{i=1}^{n} g_i\right)}(x)\right| < 2^{-n}\varepsilon,$$

$$\left\|f'(y) - \sum_{i=1}^{n} g_i'(y)\right\|_{Y^*} < 2^{-n}\varepsilon/C,$$

y

$$Lip(g_n) \le CLip\left(f - \left(\sum_{j=1}^{n-1} g_j\right)_{|Y}\right).$$

Es claro que una aplicación del Teorema 1 a la función $f - (g_1)_{|Y}$ nos proporciona una función g_2 que, junto con g_1 hace las propiedades anteriores ciertas para $n = 2$. Por lo tanto podemos proceder a la etapa general de nuestra construcción inductiva.

Consideremos la función $l = f - \sum_{i=1}^{n} g_i$ que es C^1 – diferenciable en Y.

Por el Teorema 1 podemos encontrar una función C^1 – diferenciable g_{n+1} en X tal que tenemos:

$$\left|\bar{l}(x) - g_{n+1}(x)\right| < 2^{-n-1}\varepsilon \text{ en } X \qquad (1)$$

y para $y \in Y$,

$$\|l'(y)-g'_{n+1}(y)\|_{Y*} < 2^{-n-1}\, \varepsilon/C \,, \qquad (2)$$

y también,

$$Lip(g_{n+1}) \leq CLip(l)\,. \qquad (3)$$

De (1) tenemos en particular, $\left| f(y) - \sum_{i=1}^{n+1} g_i(y) \right| = |l(y) - g_{n+1}(y)| < 2^{-n-1}\varepsilon$ en Y y entonces $\left| \overline{\left(f - \sum_{i=1}^{n+1} g_i \right)}(x) \right| < 2^{-n-1}\varepsilon$ en X. Esto, junto con (2) y (3) completa el procedimiento inductivo.

Ahora, de (2) tenemos que $Lip\left(f - \left(\sum_{i=1}^{n+1} g_i \right)_{|Y} \right) \leq 2^{-n}\, \varepsilon/C$ y así, de (3) obtenemos:

$$\|g'_{n+1}(x)\| \leq Lip(g_{n+1}) \leq CLip\left(f - \left(\sum_{j=1}^{n} g_j \right)_{|Y|} \right) \leq C2^{-n}\, \varepsilon/C = 2^{-n}\varepsilon\,.$$

Por lo tanto la serie $\sum_j g'_j(x)$ es absoluta y uniformemente convergente en X.

Similarmente podemos estimar $|g_{n+1}(x)| \leq 2^{-n+1}\varepsilon$. Además la serie $g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} g_n(x)$ define una función C^1 en X, que coincide con f en Y por la primera inecuación de las hipótesis de inducción. Finalmente, tenemos:

$$Lip(g) \leq Lip(g_1) + \sum_{n=2}^{\infty} Lip(g_n) \leq CLip(f) + \sum_{n=2}^{\infty} 2^{-(n-1)}\varepsilon \leq 2CLip(f),$$

siempre que $Lip(f) > 0$ (lo cual puede asumirse siempre) y ε sea suficientemente pequeño. Esto completa la demostración.

Observación: Con un poco más de trabajo en las pruebas de los teoremas precedentes se puede tomar la constante C como cualquier número $C > M$, donde M es como en el lema 2. Sin embargo, en general, M será bastante grande por lo que no se puede esperar que cualquier refinamiento en las pruebas anteriores dé lugar a un enunciado del teorema 2 en el cual C pueda ser elegido como cualquier número mayor que 1.

Con los resultados expuestos se prueban los siguientes:

Teorema 3: Sea X un espacio de Banach separable que admite una norma C^1 – diferenciable. Sean $Y \subset X$ un subespacio cerrado y $f: Y \to \Re$ una función C^1 – diferenciable. Entonces existe una extensión C^1 de f a X.

Demostración: Ya que f es C^1 en Y existe $\{B_j\} := \{B(y_j, r_j)\}_{j=1}^{\infty}$ un recubrimiento contable de Y por bolas abiertas en X tales que f es Lipschitz en $B_j \cap Y$ para cada $j \in \aleph$. Sean $U = \cup_{j=1}^{\infty} B_j$ y $W = X - Y$.

Consideremos la función $h : X \to X$ definida por: $h(x) = \dfrac{1}{1 + \|x\|} x$.

Se puede comprobar fácilmente que h es un C^1 – difeomorfismo de X en la bola unidad $\operatorname{int} B_X$ (con inversa $h^{-1}(y) = (1/(1 - \|y\|))y$), que h tiene derivada acotoda y que h preserva líneas y en particular deja invariante el subespacio Y. Componiendo h con las dilataciones y translaciones adecuadas obtenemos difeomorfismos C^1, $h_j : X \to B_j$ tales que h_j es Lipschitz para cada j. Y componiendo las restricciones a Y de esas h_j con nuestra función f, obtenemos funciones C^1 Lipschitz $f_j := f \circ (h_j)_{|Y} : Y \to \Re$. De acuerdo con el Teorema 2 existe una extensión C^1 (y Lipschitz) $G_j : X \to \Re$ de f_j. Entonces la composición:

$$g_j = G_j \circ h_j^{-1}$$

Define una extensión C^1 de $f_{|B_j \cap Y}$ a B_j . Ponemos $g_0 \equiv 1$.

Ahora sea $\{\varphi_0\} \cup \{\varphi_j\}_{j=1}^{\infty}$ una partición de la unidad C^1 subordinada al recubrimiento abierto $\{W\} \cup \{B_j\}_{j=1}^{\infty}$ de X (tal partición de la unidad siempre existe para espacios separables con normas C^1, véase el Teorema VIII.3.2, p.351 de [De]). Definimos:

$$g(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \varphi_j(x) g_j(x)$$

Entonces es claro que g es una extensión C^1 de f a X .

Por último, tenemos el siguiente sencillo corolario:

Corolario: Sea X un espacio de Banach separable que admite una norma C^1 – diferenciable. Sean $U \subset X$ un abierto y $f : U \to \Re$ una función C^1 – diferenciable. Entonces para cualquier subconjunto abierto $V \subset U$ con $\overline{V} \subset U$ existe una extensión de $f|_{\overline{V}}$ a X .

2.4 Extensión diferenciable de funciones en una cierta clase de Espacios de Banach no separables

En esta sección trabajaremos con extensiones en Espacios de Banach no separables. Para consultar o ampliar la información véase: [Jim 1].

Para comenzar daremos la siguiente definición junto con un resultado de interés:

__Definición:__ Una función entre espacios métricos, $f:(M,d_1)\to(M,d_2)$ se dice que es **bi-Lipschitz** si existe una constante $C\geq 1$ tal que:

$$\frac{1}{C}d_1(x,y)\leq d_2\left(f(x),f(y)\right)\leq Cd_1(x,y)$$

__Proposición:__ Una aplicación entre espacios topológicos que sea sobreyectiva y bi-Lipschitz es un homeomorfismo.

Consideramos ahora el problema de extensión de funciones diferenciables desde un subespacio de un espacio de Banach infinito dimensional a una función en todo el espacio. Más precisamente, si X es un espacio de Banach infinito dimensional, Y es un subespacio cerrado de X y $f:Y\to\mathfrak{R}$ es una función C^k- diferenciable, ¿bajo qué condiciones existe una función C^k- diferenciable, $F:X\to\mathfrak{R}$ tal que $F|_Y=f$? Como ya se vio en el apartado anterior, si Y es un subespacio complementado de un espacio de Banach se puede construir fácilmente una extensión de una función diferenciable $f:Y\to\mathfrak{R}$. Pero esta extensión no resuelve el problema ya que si X es un espacio de Banach que no es isomorfo a un espacio de Hilbert, entonces tiene un subespacio cerrado que no es complementado en X. En el apartado anterior se ha expuesto el trabajo de Azagra, Fry y Keener en [Az 1] sobre funciones en espacios de Banach con dual separable. En este apartado se pretende extender dichos resultados a la configuración general de los espacios de Banach donde cada función Lipschitz puede ser aproximada por una función Lipschitz C^1- diferenciable. El procedimiento de las demostraciones es análogo al caso separable.

Para poder enunciar los resultados principales necesitamos definir la propiedad (*) como la propiedad de aproximación Lipschitz y C^1- diferenciable para funciones Lipschitz:

__Definición:__ Un espacio de Banach X **satisface la propiedad (*)** si existe una constante C_0 que depende sólo de X tal que para toda función Lipschitz $f:X\to\mathfrak{R}$ y para todo $\varepsilon>0$ existe una función Lipschitz C^1- diferenciable, $K:X\to\mathfrak{R}$ tal que:

$$\left|f(x)-K(x)\right|<\varepsilon \text{ para todo } x\in X \text{ y } Lip(K)\leq C_0Lip(f).$$

Equivalentemente X satisface la propiedad (*) si hay una constante C_0 que depende sólo de X tal que para todo subconjunto $Y \subset X$ y cualquier función Lipschitz $f: Y \to \Re$ y para todo $\varepsilon > 0$ existe una función Lipschitz C^1- diferenciable, $K: X \to \Re$ tal que:

$$|f(y) - K(y)| < \varepsilon \text{ para todo } y \in Y \text{ y } Lip(K) \leq C_0 Lip(f)$$

En efecto, cualquier función Lipschitz real-valuada f definida en Y puede extenderse a una función Lipschitz en X con la misma constante de Lipschitz. Como se indicó en anteriores apartados, por ejemplo: $F(x) = \inf_{y \in Y} \{f(y) + Lip(f)\|x - y\|\}$

<u>**Observación:**</u> Nótese que cualquier espacio de Banach con dual separable satisface la propiedad (*).

Veremos que si X satisface la propiedad (*) e Y es un subespacio cerrado de X, entonces para toda función C^1- diferenciable real-valuada, f definida en Y, existe una extensión C^1 de f a X. Se exponen a continuación los resultados:

<u>**Teorema 1:**</u> Sea X un espacio de Banach con la propiedad (*). Sean $Y \subset X$ un subespacio cerrado y $f: Y \to \Re$ una función C^1- diferenciable, entonces existe una extensión C^1- diferenciable de f a X. Además si la función f C^1- diferenciable dada es Lipschitz en Y entonces hay una extensión C^1- diferenciable y Lipschitz, $H: X \to \Re$ de f a X tal que $Lip(H) \leq C Lip(f)$ donde C es una constante que depende sólo de X.

<u>**Corolario 1**</u>: Sea M una variedad de Banach paracompacta C^1- diferenciable modelada por un espacio de Banach con la propiedad (*) (en particular cualquier variedad Riemaniana), y sea N una subvariedad C^1- diferenciable de M. Entonces cualquier función $f: N \to \Re$ tiene una extensión C^1- diferenciable a M.

<u>**Teorema 2:**</u> Sean X un espacio de Banach con la propiedad (*), $Y \subset X$ un subconjunto convexo cerrado, $U \subset X$ un conjunto abierto que contiene a Y y $f: U \to \Re$ una función C^1- diferenciable en Y como función en U. Entonces existe una extensión C^1- diferenciable de $f|_Y$ a X. Además si la función C^1- diferenciable, f, dada es Lipschitz en Y, entonces existe una extensión C^1- diferenciable y Lipschitz, $H: X \to \Re$ de $f|_Y$ a X tal que $Lip(H) \leq C Lip(f|_Y)$ donde C es una constante que depende sólo de X.

<u>**Corolario 2:**</u> Sea X un espacio de Banach cumpliendo que existe un homeomorfismo bi-Lipschitz entre X y algún subconjunto de $c_0(\Gamma)$, para algún conjunto Γ, cuyas funciones coordenadas son C^1- diferenciables. Sea $Y \subset X$ un subespacio cerrado y $f: Y \to \Re$ una función C^1- diferenciable (respectivamente C^1- diferenciable y Lipschitz).

Entonces existe una extensión C^1- diferenciable, H de f a X (respectivamente, una extensión C^1- diferenciable y Lipschitz, H de f a X con $Lip(H) \leq CLip(f)$ donde C es una constante que depende sólo de X).

<u>**Corolario 3:**</u> Sea X uno de los siguientes espacios de Banach:

(i) un espacio de Banach tal que existe un homeomorfismo bi-Lipschitz entre X y algún subconjunto de $c_0(\Gamma)$, para algún conjunto Γ, cuyas funciones coordenadas son C^1- diferenciables.

(ii) un espacio de Hilbert.

Sea $Y \subset X$ un subconjunto convexo cerrado, $U \subset X$ un conjunto abierto que contiene a Y y $f: U \to \Re$ una función C^1- diferenciable en Y como función en U (respectivamente una función C^1- diferenciable en Y como función en U y Lipschitz en Y). Entonces existe una extensión C^1- diferenciable, H de $f|_Y$ a X (respectivamente existe una extensión C^1- diferenciable y Lipschitz, H de $f|_Y$ a X tal que $Lip(H) \leq CLip(f|_Y)$ donde C es una constante que depende sólo de X).

Para poder demostrar los resultados anteriores, lo primero que se necesita es la existencia de particiones de la unidad C^1- diferenciables y Lipschitz en espacios de Banach que cumplen la condición (*). Recalcamos aquí la definición:

<u>**Definición.**</u> Un espacio de Banach X **admite de particiones de la unidad** C^1- **diferenciables y Lipschitz** cuando para cualquier recubrimiento abierto $\mathcal{U} = \{U_r\}_{r\in\Omega}$ de X existe una colección de funciones C^1- diferenciables y Lipschitz, $\{\psi_i\}_{i\in I}$ tales que:

(1) $\psi_i \geq 0$ en X para todo $i \in I$,

(2) la familia $\{\operatorname{supp}(\psi_i)_{i\in I}\}$ es localmente finita, donde supp $(\psi_i) = \overline{\{x \in X : \psi_i(x) \neq 0\}}$,

(3) $\{\psi_i\}_{i\in I}$ está subordinada a $\mathcal{U} = \{U_r\}_{r\in\Omega}$, es decir, para cada $i \in I$ existe $r \in \Omega$ tal que $\operatorname{supp}(\psi_i) \subset U_r$ y

(4) $\sum_{i\in I} \psi_i(x) = 1$ para todo $x \in X$.

Por otro lado, se denota por $dist(A, B)$ la distancia entre dos conjuntos A y B, es decir, $\inf\{\|a-b\| : a \in A, b \in B\}$.

El siguiente lema nos proporciona la herramienta para generalizar la construcción de recubrimientos abiertos adecuados en espacios de Banach que serán la clave para obtener una generalización del resultado de extensiones diferenciables dado por Azagra, Fry y Keener en [Az 1].

Lema 1: Sean E un espacio métrico, $\mathcal{U}=\{U_r\}_{r\in\Omega}$ un recubrimiento abierto de E. Entonces existen refinamientos abiertos $\{V_{n,r}\}_{n\in\aleph,r\in\Omega}$ y $\{W_{n,r}\}_{n\in\aleph,r\in\Omega}$ de $\mathcal{U}$ (donde $\aleph$ denota los números naturales) cumpliendo las siguientes propiedades:

(i) $V_{n,r}\subset W_{n,r}\subset U_r$ para todo $n\in\aleph$ y $r\in\Omega$,

(ii) $dist(V_{n,r},E-W_{n,r})\geq 1/2^{n+1}$ para todo $n\in\aleph$ y $r\in\Omega$,

(iii) $dist(W_{n,r},W_{n,r'})\geq 1/2^{n+1}$ para todo $n\in\aleph$ y $r,r'\in\Omega$ con $r\neq r'$,

(iv) para todo $x\in E$ existen una bola abierta $B(x,s_x)$ de E y un número natural n_x tales que:

> **(a)** si $i>n_x$, entonces $B(x,s_x)\cap W_{i,r}=\varnothing$ para todo $r\in\Omega$,
>
> **(b)** si $i\leq n_x$, entonces $B(x,s_x)\cap W_{i,r}\neq\varnothing$ para al menos un $r\in\Omega$,

P. Hájek y M. Johanis en [Ha] probaron que si un espacio de Banach X satisface la propiedad (*) entonces X admite particiones de la unidad C^1-diferenciables y Lipschitz, lo que es, a su vez, equivalente a la existencia de una base $\sigma-$discreta, $\mathcal{B}$ de la topología de X tal que para todo $B\in\mathcal{B}$ existe una función C^1-diferenciable y Lipschitz, $\psi_B:X\to[0,1]$ con $B=\psi^{-1}(0,\infty)$. Cabe resaltar que dado un recubrimiento abierto $\{U_r\}_{r\in\Omega}$ de X no siempre es posible obtener una partición de la unidad C^1-diferenciable y Lipschitz, $\{\psi_r\}_{r\in\Omega}$ con el mismo conjunto de índices tal que $\operatorname{supp}(\psi_r)\subset U_r$. Por ejemplo, si A es un subconjunto no vacío y cerrado de X, W es un subconjunto abierto de X tal que $A\subset W$ con $dist(A,X-W)=0$ y $\{\psi_1,\psi_2\}$ una partición de la unidad C^1-diferenciable subordinada a $\{W,X-A\}$, entonces $\psi_1(A)=1$ y $\psi_1(X-W)=0$ y así, ψ_1 no es Lipschitz. Sin embargo, para probar el Teorema 3 que enunciaremos después, sólo necesitamos los siguientes resultados:

Lema 2: Sea X un espacio de Banach con la propiedad (*). Entonces para todo $\{U_r\}_{r\in\Omega}$ recubrimiento abierto de X existe un refinamiento abierto $\{W_{n,r}\}_{n\in\aleph,r\in\Omega}$ de $\{U_r\}_{r\in\Omega}$ cumpliendo las propiedades del Lema 1 y existe una partición de la unidad C^1- diferenciable y Lipschitz, $\{\psi_{n,r}\}_{n\in\aleph,r\in\Omega}$ tal que $\text{supp}(\psi_{n,r})\subset W_{n,r}\subset U_r$ y $Lip(\psi_{n,r})\leq C_0 2^5(2^n-1)$ para todo $n\in\aleph$ y $r\in\Omega$.

En la demostración del Lema 2 es necesario el Lema 1. Y ambos son necesario para demostrar el Teorema 3, aunque éste se puede probar de manera alternativa utilizando bases $\sigma-$discretas de X y la construcción de adecuadas particiones de la unidad C^1- diferenciables y Lipschitz subordinadas a alguna subfamilia de esa base.

El siguiente lema es una modificación necesaria de la propiedad (*) para probar los resultados principales de este apartado:

Lema 3: Sea X un espacio de Banach con la propiedad (*). Entonces para todo subconjunto $Y\subset X$, toda función $F:X\to\Re$ tal que $F|_Y$ es Lipschitz y todo $\varepsilon>0$ existe una función C^1- diferenciable, $G:X\to\Re$ tal que:

(i) $|F(x)-G(x)|\leq\varepsilon$ para todo $x\in X$, y

(ii) $Lip(G|_Y)\leq C_0 Lip(F|_Y)$. Además, $\|G'(y)\|_{X^*}\leq C_0 Lip(F|_Y)$ para todo $y\in Y$ donde C_0 es la constante dada por la propiedad (*).

(iii) Además, si F es Lipschitz en X, existe una constante $C_1\geq C_0$ que depende sólo de X tal que la función G puede ser elegida Lipschitz en X y $Lip(G)\leq C_1 Lip(F)$.

El siguiente resultado de aproximación es la llave para probar el Teorema 1. Recalcamos que el caso separable está dado en [Az 1] y ha sido estudiado en el precedente apartado.

Teorema 3: Sean X un espacio de Banach con la propiedad (*) e $Y\subset X$ un subespacio cerrado. Sean $f:Y\to\Re$ una función C^1-diferenciable y F una extensión continua de f a X. Entonces, para todo $\varepsilon>0$ existe una función C^1- diferenciable, $G:X\to\Re$ tal que si $g=G|_Y$ entonces:

(i) $|F(x)-G(x)|<\varepsilon$ en X, y

(ii) $\|f'(y)-g'(y)\|_{Y^*}<\varepsilon$ en Y.

(iii) Además si f es Lipschitz en Y y F es una extensión Lipschitz de f a X, entonces la función G puede ser elegida Lipschitz en X y $Lip(G) \leq C_2 Lip(F)$ donde C_2 es una constante que depende sólo de X.

Este teorema proporciona la herramienta para probar el Teorema 1 que establece que toda función C^1- diferenciable (función C^1- diferenciable y Lipschitz) definida en un subespacio cerrado tiene una extensión C^1- diferenciable (extensión C^1- diferenciable y Lipschitz, respectivamente) a X.

La demostración del Corolario 1 es similar al caso separable [Az 1]. (Recalcamos que una variedad paracompacta C^1, M modelada en un espacio de Banach admite particiones de la unidad C^1-diferenciables siempre que el espacio de Banach en el que se modela lo haga).

Un resultado análogo al Teorema 3 puede establecerse para funciones diferenciables definidas en subconjuntos cerrados y convexos, Y de X con las condiciones requeridas dadas en el Teorema 2.

Por último, estudiaremos bajo qué condiciones una función real-valuada definida en un subconjunto cerrado, (posiblemente no convexo) Y de un espacio de Banach X con la propiedad (*) puede ser extendida a una función C^1- diferenciable en X. Desafortunadamente, podemos encontrar ejemplos de funciones real-valuadas, f definidas en un entorno abierto U de un subconjunto cerrado (no convexo), Y de $\Re$ tal que $f: U \to \Re$ es diferenciable en todo punto $y \in Y$, la función $Y \to \Re$, $y \to f'(y)$ es continua en Y y $f|_Y$ no admite ninguna extensión C^1- diferenciable a $\Re$. Así, en general, no podemos obtener un enunciado similar al Teorema 2 para subconjuntos cerrados no convexos, Y de X. Vale la pena señalar que, mediante la aplicación del Teorema del Valor Medio, si $f: Y \to \Re$ admite una extensión C^1- diferenciable, $H: X \to \Re$, entonces, tomando $D(y) := H'(y) \in X^*$ para $y \in Y$, tenemos la siguiente condición de valor medio:

para todo $y \in Y$, para todo $\varepsilon > 0$, existe $r > 0$ tal que:

$$|f(z) - f(w) - D(y)(z-w)| \leq \varepsilon \|z-w\|, \text{ para todo } z, w \in Y \cap B(y,r). \qquad \textbf{(E)}$$

Definición: Si Y es un subconjunto cerrado de un espacio de Banach X, sea $Z := \overline{span}\{y - y' : y, y' \in Y\}$. Sean $f : Y \to \Re$ y $D : Y \to Z^*$ aplicaciones continuas. Diremos que $f : Y \to \Re$ satisface la condición (E) para D si el enunciado (E) es cierto.

Así, la condición (E) es necesaria para extender $f : Y \to \Re$ a una función $C^1 -$ diferenciable $H : X \to \Re$. Además el siguiente resultado establece que la condición (E) es también suficiente en espacios con la propiedad (*).

Teorema 4: Sean X un espacio de Banach con la propiedad (*), $Y \subset X$ un subconjunto cerrado y $f : Y \to \Re$ una función en Y. Entonces, f satisface la condición (E) si y sólo si existe una extensión $C^1 -$ diferenciable H de f a X. Además, si asumimos que la función f es Lipschitz en Y entonces f satisface la condición (E) para alguna función continua: $D : Y \to Z^*$ con $\sup\{\|D(y)\|_{Z^*} : y \in Y\} < \infty$ si y sólo si existe una extensión $C^1 -$ diferenciable y Lipschitz, H de f a X. En este caso, si f satisface la condición (E) para D con $M := \sup\{\|D(y)\|_{Z^*} : y \in Y\} < \infty$, entonces podemos obtener H con $Lip(H) \le (1 + C_1)(M + Lip(f))$, donde C_1 es la constante definida en el Lema 3.

Teorema 5: Sean X un espacio de Banach con la propiedad (*), $Y \subset X$ un subconjunto cerrado y $f : Y \to \Re$ una función cumpliendo la condición (E) para alguna función continua $D : Y \to Z^*$. Consideremos una extensión continua, F de f a X. Entonces, para todo $\varepsilon > 0$ existe una función $C^1 -$ diferenciable, $G : X \to \Re$ tal que si $g := G|_Y$ entonces:

(i) $|F(x) - G(x)| < \varepsilon$ en X, y

(ii) $\|D(y) - G'(y)\|_{Z^*} < \varepsilon$ para todo $y \in Y$ y $Lip(f - g) < \varepsilon$.

(iii) Además, si asumimos que f es Lipschitz en Y, F es una extensión Lipschitz de f a X y $M = \sup\{\|D(y)\|_{Z^*} : y \in Y\} < \infty$ entonces la función G puede ser elegida Lipschitz en X y $Lip(G) \le \frac{\varepsilon}{4} + (1 + C_1)M + C_1 Lip(F)$.

Por último, en el siguiente corolario se da una caracterización de la propiedad (*):

Corolario 4: Sea X un espacio de Banach. Los siguientes enunciados son equivalentes:

(i) X satisface la propiedad (*).

(ii) Asumimos que $f : Y \to \Re$ es una función Lipschitz que cumple la condición (E) para alguna función continua $D : Y \to Z^*$ con $M := \sup\{\|D(y)\|_{Z^*} : y \in Y] < \infty$. Entonces, existe una extensión Lipschitz y C^1-diferenciable de f a X, $H : X \to \Re$ con $Lip(H) \leq C_3(M + Lip(f))$ donde C_3 es una constante que depende sólo del espacio X.

2.5 Extensiones diferenciables de funciones vectoriales valuadas definidas en subconjuntos cerrados de espacios de Banach

Sean X y Z espacios de Banach, A un subconjunto cerrado de X y $f : A \to Z$ una aplicación. En este apartado daremos condiciones necesarias y suficientes para obtener una aplicación C^1-diferenciable, $F : X \to Z$ tal que $F|_A = f$ en los siguientes casos:

(i) X y Z son espacios de Hilbert y X es separable.

(ii) X^* es separable y Z es un retracto Lipschitz absoluto.

(iii) $X = L_2$ y $Z = L_p$ con $1 < p < 2$

(iv) $X = L_p$ y $Z = L_2$ con $1 < p < \infty$ donde L_p es cualquier espacio de Banach separable $L_p(S, \Sigma, \mu)$ con (S, Σ, μ) un espacio de medida finita.

Para consultar las demostraciones de los resultados véase [Jim 2].

Estudiaremos cómo las técnicas dadas en [Az 1] y [Jim 1] pueden ser aplicadas para obtener una extensión C^1-diferenciable de una función C^1-diferenciable y vectorial-valuada definida en un subconjunto cerrado de un espacio de Banach. Más precisamente, si X y Z son espacios de Banach, A un subconjunto cerrado de X y $f : A \to Z$ una aplicación, ¿bajo qué condiciones existe una aplicación C^1-diferenciable, $F : X \to Z$ tal que la restricción de F a A sea f, esto es: $F|_A = f$?

Notación:

(i) Denotaremos por $L(X,Z)$ al espacio de todas las aplicaciones lineales acotadas desde el espacio de Banach X en el espacio de Banach Z.

(ii) Si A es un subconjunto de X la restricción de la aplicación $f:X\to Z$ a A se denota por $f|_A$. Decimos que $G:X\to Z$ es una extensión de $g:A\to Z$ si $G|_A = g$.

(iii) Una aplicación $f:A\to Z$ es $L-$Lipschitz siempre que $\|f(x)-f(y)\|\le L\|x-y\|$ para todo $x,y\in A$ y la constante de Lipschitz de f es $Lip(f):=\sup\left\{\frac{\|f(x)-f(y)\|}{\|x-y\|} : x,y\in A, x\neq y\right\}$.

Como ya se ha mostrado en apartados anteriores, el problema de extensiones C^1-diferenciables para funciones real-valuadas definidas en un subconjunto de un espacio de Banach infinito dimensional se ha estudiado [Az 1], donde además los autores hacen un informe detallado de la teoría de las extensiones diferenciables.

Una generalización de estos resultados puede consultarse en [Jim 1] para espacios de Banach no separables siempre que cumplan una cierta propiedad de aproximación (la propiedad (*) para $(X,\Re)$ que ha sido expuesta en el apartado anterior: 2.4 y que reformularemos a continuación). Cuando X satisface esta propiedad de aproximación, A es un subconjunto cerrado de X y $f:A\to\Re$ es una función, la existencia de una extensión C^1-diferenciable de f está caracterizada por la siguiente propiedad: (que tanto en [Jim 1] como en el apartado anterior se llamó “condición (E)”).

Definición: Sean X y Z espacios de Banach y $A\subset X$ un subconjunto cerrado.

(1) Diremos que la función $f:A\to Z$ **satisface la condición del valor medio** si existe una aplicación continua $D:A\to L(X,Z)$ tal que para todo $y\in A$ y todo $\varepsilon>0$ existe una bola abierta $B(y,r)$ en X tal que:

$$\|f(z)-f(w)-D(y)(z-w)\|\le\varepsilon\|z-w\|,$$

para todo $z,w\in A\cap B(y,r)$. En este caso, decimos que f satisface la condición del valor medio en A para la aplicación D.

(2) Decimos que la aplicación $f:A\to Z$ **satisface la condición del valor medio para una aplicación acotada** si satisface la condición del valor medio para una función continua y acotada: $D:A\to L(X,Z)$, es decir, $\sup\{\|D(y): y\in A\|\}<\infty$.

Una consecuencia directa del teorema del valor medio es que, siempre que $f: A \to Z$ sea la restricción de una aplicación C^1-diferenciable, $F: X \to Z$ (una aplicación C^1-diferenciable y Lipschitz) entonces $f: A \to Z$ satisface la condición del valor medio para $F'|_A$ (la condición del valor medio para la aplicación acotada $F'|_A$, respectivamente).

Buscaremos ahora obtener, bajo ciertas condiciones, extensiones C^1-diferenciables de aplicaciones C^1-diferenciables $f: A \to Z$. Más precisamente, consideremos las siguientes propiedades:

<u>**Definición:**</u>

(1) El par de espacios de Banach (X, Z) tiene la **propiedad (*)** si existe una constante $C_0 \geq 1$, que depende sólo de X y Z, tal que para todo subconjunto $A \subset X$, toda función Lipschitz $f: A \to Z$ y todo $\varepsilon > 0$, existe una función C^1-diferenciable y Lipschitz, $g: X \to Z$ tal que $\|f(x) - g(x)\| < \varepsilon$ para todo $x \in A$ y $Lip(g) \leq C_0 Lip(f)$.

(2) El par de espacios de Banach (X, Z) tiene la **propiedad (A)** si existe una constante $C \geq 1$, que depende sólo de X y Z, tal que para toda función Lipschitz $f: X \to Z$ y todo $\varepsilon > 0$, existe una función C^1-diferenciable y Lipschitz, $g: X \to Z$ tal que $\|f(x) - g(x)\| < \varepsilon$ para todo $x \in X$ y $Lip(g) \leq CLip(f)$.

(3) El par de espacios de Banach (X, Z) tiene la **propiedad (E)** si existe una constante $K \geq 1$, que depende sólo de X y Z, tal que para todo subconjunto A de X y toda función Lipschitz $f: A \to Z$ existe una extensión Lipschitz $F: X \to Z$ tal que $Lip(F) \leq KLip(f)$.

(4) Un espacio de Banach X tiene la propiedad (*), la propiedad (A) o la propiedad (E) siempre que el par $(X, \mathfrak{R})$ las tenga.

Recordemos la siguiente caracterización conocida para retractos Lipschitz absolutos.

<u>**Proposición 1:**</u> Sea Z un espacio métrico. Son equivalentes:

(i) Z es un retracto Lipschitz absoluto.

(ii) Existe $K \geq 1$, que depende sólo de Z, tal que para todo espacio métrico X, todo subconjunto $A \subset X$ y toda función Lipschitz $f: A \to Z$, existe una extensión $F: X \to Z$ de f tal que $Lip(F) \leq KLip(f)$.

Combinando esta caracterización con los resultados en [Ha] obtenemos la siguiente proposición:

Proposición 2: Sea X un espacio de Banach tal que existe un conjunto $\Gamma \neq \emptyset$ y un homeomorfismo bi-Lipschitz $\varphi : X \to c_0(\Gamma)$ con funciones coordenadas C^1- diferenciables, $e_\gamma^* \circ \varphi : X \to \Re$. Sea Z un espacio de Banach que es un retracto Lipschitz absoluto. Entonces el par (X, Z) satisface las propiedades (A) y (E).

Como se verá en la siguiente proposición, la propiedad (*) es necesaria para obtener ciertas extensiones Lipschitz, C^1-diferenciables.

Proposición 3: Sea (X, Z) un par de espacios de Banach tal que existe una constante $C \geq 1$, que depende sólo de X y Z, tal que para todo subconjunto cerrado $A \subset X$ y toda función Lipschitz $f : A \to Z$ cumpliendo la condición del valor medio para una función acotada D con $M = \sup\{\|D(y)\| : y \in A\} < \infty$ y existe una extensión Lipschitz C^1-diferenciable, G de f a X con $Lip(G) \leq C(M + Lip(f))$. Entonces el par (X, Z) satisface la propiedad (*).

Los principales teoremas de extensiones diferenciables de funciones desde subconjuntos cerrados en este contexto son los siguientes:

Teorema 1: Sean (X, Z) un par de espacios de Banach con la propiedad (*), $A \subset X$ un subconjunto cerrado de X y una función $f : A \to Z$. Entonces, f satisface la condición del valor medio si y sólo si hay una extensión C^1-diferenciable, G de f a X.

Teorema 2: Sean (X, Z) un par de espacios de Banach con la propiedad (*), $A \subset X$ un subconjunto cerrado de X y una función $f : A \to Z$. Entonces, f es Lipschitz y satisface la condición de valor medio para una función acotada si y sólo si existe una extensión C^1-diferenciable y Lipschitz, G de f a X.

Además, si f es Lipschitz y satisface la condición del valor medio para una función acotada $D : A \to L(X, Z)$ con $M := \sup\{\|D(y)\| : y \in A\} < \infty$, entonces podemos obtener una extensión C^1-diferenciable y Lipschitz, G con $Lip(G) \leq (1 + C_0)(M + Lip(f))$, donde C_0 es la constante dada por la propiedad (*) (que depende sólo de X y Z).

Como consecuencia obtenemos el siguiente resultado:

Corolario 1: Sean X y Z espacios de Banach y asumimos que se da al menos una de las siguientes condiciones:

(i) X es finito dimensional,

(ii) X y Z son espacios de Hilbert y X es separable,

(iii) $X = L_2$ y $Z = L_p$ con $1 < p < 2$,

(iv) $X = L_p$ y $Z = L_2$ con $1 < p < \infty$ (donde L_p es algún espacio de Banach separable $L_p(S, \Sigma, \mu)$ con (S, Σ, μ) un espacio de medida $\sigma -$finita),

(v) existe un conjunto $\Gamma \neq \emptyset$ y un homeomorfismo bi-Lipschitz $\varphi : X \to c_0(\Gamma)$ con funciones coordenadas $C^1 -$diferenciables (por ejemplo, cuando X^* es separable), y Z es un retracto Lischitz absoluto.

Sea A un subconjunto cerrado de X y $f : A \to Z$ una aplicación. Entonces f satisface la condición del valor medio (la condición del valor medio para una función acotada y f es Lipschitz) en A si y sólo si existe una extensión $C^1 -$diferenciable, (una extensión $C^1 -$diferenciable y Lipschitz, respectivamente), G de f a X.

Además, si f es Lipschitz y satisface la condición del valor medio para una función acotada $D : A \to L(X, Z)$ con $M := \sup\{\|D(y)\| : y \in A\} < \infty$, entonces podemos obtener una extensión $C^1 -$diferenciable y Lipschitz, G con $Lip(G) \leq (1 + C_0)(M + Lip(f))$, donde C_0 es la constante dada por la propiedad (*) (que depende sólo de X y Z).

Para terminar este apartado veremos los resultados para extensiones diferenciables desde subespacios. Sean X y Z espacios de Banach e Y un subespacio cerrado de X. Si toda función $C^1 -$diferenciable, $f : Y \to Z$ puede ser extendida a una función $C^1 -$diferenciable, $G : X \to Z$, entonces para todo operador lineal acotado, $T : Y \to Z$ existe un operador lineal acotado $\tilde{T} : X \to Z$ tal que $\tilde{T}_{|Y} = T$.

Además, si asumimos que toda función $C^1 -$diferenciable y Lipschitz $f : Y \to Z$ puede ser extendida a una función $C^1 -$diferenciable y Lipschitz $G : X \to Z$ con $Lip(G) \leq CLip(f)$ donde C es una constante que depende sólo de X y Z, entonces para todo operador lineal acotado $T : Y \to Z$ existe un operador lineal acotado $\tilde{T} : X \to Z$ tal que $\tilde{T}_{|Y} = T$ y $\|\tilde{T}\|_{L(X,Z)} \leq C\|T\|_{L(Y,Z)}$. En efecto, es suficiente considerar $\tilde{T} = G'(0)$, donde G es la función extendida de T dada por los supuestos.

<u>**Definición:**</u> Decimos que un par de espacios de Banach (X, Z) **satisface la propiedad de extensión lineal** si existe $\lambda \geq 1$ que depende sólo de X y Z, tal que para cada subespacio cerrado $Y \subset X$ y cada operador lineal acotado $T : Y \to Z$, existe un operador lineal acotado $\tilde{T} : X \to Z$ tal que $\tilde{T}_{|Y} = T$ y $\|\tilde{T}\|_{L(X,Z)} \leq C\|T\|_{L(Y,Z)}$.

Proposición 4: Sean (X, Z) un par de espacios de Banach cumpliendo la propiedad de extensión lineal e Y un subespacio cerrado de X. Si $f : Y \to Z$ es una función C^1-diferenciable (una función C^1-diferenciable y Lipschitz), entonces f satisface la condición del valor medio (la condición del valor medio para una función acotada, respectivamente) en Y.

Utilizando los Teoremas 1 y 2 podemos obtener el siguiente resultado para extensiones C^1-diferenciables y C^1-diferenciables y Lipschitz a X de funciones C^1-diferenciables en Y cuando (X, Z) satisface la propiedad (*) y la propiedad de extensión lineal.

Corolario 2: Sea (X, Z) alguno de los siguientes pares de espacios de Banach:

(i) (L_p, L_2), $2 < p < \infty$,

(ii) $(c_0(\Gamma), C(K))$, donde Γ es un conjunto no vacío y K es un espacio métrico compacto,

(iii) $(l_p(\aleph), C(K))$, $1 < p < \infty$ y K es un espacio métrico compacto,

(iv) $(X, C(K))$, X es un espacio de Orlicz con dual separable y K es un espacio métrico compacto,

(v) $(X, c_0(\aleph))$, X con dual separable,

(vi) $(X, \Re)$, tal que existen un conjunto $\Gamma \neq \varnothing$ y un homeomorfismo bi-Lipschitz $\varphi : X \to c_0(\Gamma)$ con funciones coordenadas C^1-diferenciables (por ejemplo, cuando X^* es separable)

Sea Y un subespacio cerrado de X. Entonces toda función C^1-diferenciable, $f : Y \to Z$ tiene una extensión C^1-diferenciable a X.

Además, existe $C \geq 1$, que depende sólo de X y Z, tal que toda función C^1-diferenciable y Lipschitz, $f : Y \to Z$ tiene una extensión C^1-diferenciable y Lipschitz, $F : X \to Z$ a X con $Lip(F) \leq C Lip(f)$.

Consideremos la siguiente definición:

<u>**Definición:**</u> Sean X y Z espacios de Banach e Y un subespacio cerrado de X. Decimos que el par (Y,Z) tiene la **propiedad de X - extensión lineal** si existe $\lambda \geq 1$, que depende sólo de X, Y y Z, tal que para cada función lineal acotada $T: Y \to Z$ existe una extensión lineal acotada $\tilde{T}: X \to Z$ con $\left\|\tilde{T}\right\|_{L(X,Z)} \leq C\|T\|_{L(Y,Z)}$.

Por último, con los Teoremas 1 y 2 y una pequeña modificación de la Proposición 4 obtenemos el siguiente corolario:

<u>**Corolario 3:**</u> Sea (X,Z) un par de espacios de Banach con la propiedad (*). Sea Y un subespacio cerrado de X tal que el par (Y,Z) tiene la propiedad de $X-$ extensión lineal. Entonces cada función C^1-diferenciable, $f: Y \to Z$ tiene una extensión a X. Además, existe $C \geq 1$, que depende sólo de X y Z, tal que toda función C^1-diferenciable y Lipschitz, $f: Y \to Z$ tiene una extensión C^1- diferenciable y Lipschitz, $F: X \to Z$ a X con $Lip(F) \leq CLip(f)$.

Capítulo 3. Extensión de funciones diferenciables. El caso de funciones Fréchet diferenciables con derivada no necesariamente continua.

En este capítulo se mencionarán algunos resultados que profundizan en la derivabilidad de las extensiones de funciones exigiendo condiciones con respecto a las derivadas que no tienen porqué ser necesariamente continuas.

En primer lugar enunciaremos un resultado que generaliza de manera conjunta el teorema de extensión de Whitney y el teorema de extensión de Aversa-Laczkovich-Preiss en el que empezamos a trabajar con las derivadas Fréchet y las funciones Baire 1.

Después daremos un resultado de extensión para funciones Baire 1 vector-valuadas preservando los puntos de continuidad. Y por último terminaremos con varios resultados sobre extensiones vector-valuadas preservando las derivadas.

3.1 Generalización conjunta del Teorema de Extensión C^1 de Whitney y el Teorema de Extensión de Aversa-Laczkovich-Preiss

Veremos una generalización conjunta del Teorema de Extensión C^1 de Whitney y el Teorema de Extensión de Aversa-Laczkovich-Preiss (Teorema ALP). Se puede describir aproximadamente como un teorema de extensión de una función diferenciables definida en un subconjunto cerrado de $\Re^n$ a una función diferenciable en $\Re^n$ preservando la continuidad de la derivada. Los resultados y demostraciones expuestos en este apartado pueden consultarse en [Koc 1].

Definición: Sean $\varnothing \neq F \subset \Re^n$ un conjunto arbitrario, $f : F \to \Re$ una función, $a \in F$ y $L_a \in \Re^n$ decimos que:

(i) L_a es una **derivada (Fréchet)** de f (con respecto a F) si $a \in derF$ (donde $derF$ es el conjunto de puntos de acumulación de F) y

$$\lim_{x\to a; x\in F} \frac{f(x) - f(a) - L_a \cdot (x-a)}{|x-a|} = 0, \quad \text{ó} \quad a \text{ es un punto aislado de } F.$$

(ii) L_a es una **derivada estricta** de f (con respecto a F) si $a \in derF$ y

$$\lim_{y\to a, x\to a; x,y\in F; x\neq y} \frac{f(y) - f(x) - L_a \cdot (y-x)}{|y-x|} = 0 \text{ (con } x = a, y = a \text{ permitido)},$$

ó a es un punto aislado de F.

Es conocido y fácil de probar que una función f en un conjunto abierto $G \subset \Re^n$ es estrictamente diferenciable si y sólo si $f \in C^1(G)$.

El Teorema de Extensión de Whitney al que hacemos mención se encuentra enunciado y demostrado en el primer apartado del capítulo anterior. El otro teorema al que se hace referencia en este apartado es el siguiente: (Véase [Av])

<u>**Teorema ALP**</u>: Sean $F \subset \Re^n$ un conjunto cerrado no vacío, $f : F \to \Re$ una función y $L : F \to \Re^n$ una derivada de f. Entonces f puede extenderse a una función $\overline{f}$ en $\Re^n$ diferenciable en cualquier parte tal que $\left(\overline{f}\right)' = L$ en F si y sólo si $L \in B_1(F)$.

Aquí, $B_1(F)$ denota el conjunto de todas las funciones Baire 1 en F. (Recordamos que una función es **Baire 1** si es límite puntual de una sucesión de funciones continuas). En la demostración de este teorema los autores utilizan sus propios resultados de extensiones de funciones Baire 1.

Combinando los teoremas anteriores Koc y Zajícek demuestran el siguiente teorema, que es el resultado principal de [Koc 1]:

<u>**Teorema:**</u> Sean $F \subset \Re^n$ un conjunto cerrado no vacío, $f : F \to \Re$ una función y $L : F \to \Re^n$ una derivada de f tal que $L \in B_1(F)$. Entonces existe una función $\overline{f} : \Re^n \to \Re$ tal que:

(i) $\overline{f}$ es diferenciable en $\Re^n$,

(ii) $\overline{f}(x) = f(x)$ y $\left(\overline{f}\right)'(x) = L(x)$ para $x \in F$,

(iii) si $a \in F$, L es continua en a y $L(a)$ es una derivada estricta de f en a, entonces $\left(\overline{f}\right)'$ es continua en a,

(iv) $\overline{f}$ es C^∞ en $\Re^n - F$.

<u>**Observación:**</u> El teorema implica fácilmente el caso C^1 del teorema de extensión de Whitney. En efecto, supongamos que las asunciones del teorema de Whitney se cumplen. Es suficiente probar que $L(a)$ es una derivada estricta de f en a para todo $a \in F$, ya que obtenemos la función extendida que deseábamos, $\overline{f}$ aplicando el teorema que acabamos de enunciar.

Por último el siguiente teorema es casi una inmediata reformulación de [Whit 2, Theorem I] para el caso $m = 1$.

<u>**Teorema W1:**</u> Sean $F \subset \Re$ un conjunto cerrado y $f : F \to \Re$ una función. Entonces f puede extenderse a una función C^1 en $\Re$ si y sólo si existe una derivada estricta de f en x para todo $x \in derF$.

3.2 Extensiones de funciones de Baire 1 vector-valuadas preservando los puntos de continuidad

El siguiente teorema de extensión de funciones Baire 1 vector-valuadas ha sido demostrado por Koc y Kolár en [Koc 2]:

Teorema: Sean (X,d) un espacio métrico, $H \subset X$ un conjunto cerrado, Z un espacio lineal normado y $f : H \to Z$ una función Baire 1. Entonces existe una función $g : (X - H) \to Z$ tal que:

$$\lim_{x \to a; x \in X - H} \| g(x) - f(a) \|_Z \frac{dist(x,H)}{d(x,a)} = 0 \qquad (1)$$

para todo $a \in \partial H$,

$$\lim_{x \to a; x \in X - H} g(x) = f(a) \qquad (2)$$

siempre que $a \in \partial H$ y f sea continua en a, y

$$g \text{ está acotada en } B(a,r) - H \qquad (3)$$

siempre que $a \in \partial H$ (o incluso $a \in H$), $r \in (0,\infty) \cup \{\infty\}$ y f esté acotada en $B(a,12r) \cap H$.

Observaciones:

(i) En [Av, Theorem 6] la primera parte del teorema (es decir, la propiedad (1), sin las propiedades (2) y (3)) está demostrada para el caso especial $Z = \Re$ con $\dim(Z) < \infty$.

(ii) En [Koc 1] se extiende el caso anterior incluyendo la propiedad (2). La principal contribución es que Z puede ser un espacio lineal normado arbitrario.

(iii) Las propiedades (1) y (2) constituyen la parte más importante del teorema precedente. Otras declaraciones (continuidad de g y la propiedad (3)) han sido añadidas por los autores ya que podrían ser útiles y no requieren mucho trabajo.

De hecho la continuidad de g se alcanza en el último párrafo de la demostración del teorema ([Koc 2]) y desde ahí es obvio cómo también se puede lograr un mayor grado de diferenciabilidad cuando X admite una estructura lineal y una partición diferenciable de la unidad.

La demostración del teorema depende de un resultado que proporciona una aproximación de una función de Baire 1 dada, f, mediante una sucesión de funciones localmente Lipschitz que convergen uniformemente en puntos de continuidad de f.

3.3 Extensiones de funciones vector valuadas preservando las derivadas

En [Koc 1] M. Koc y L. Zajicek probaron, como ya hemos visto, un resultado que generalizaba de manera conjunta ambos resultados de extensión de V. Aversa, M. Laczkovih y D. Preiss así como el teorema de extensión de Whitney para el caso C^1 para funciones real-valuadas definidas en subconjuntos cerrados de $\Re^n$. Su resultado puede ser descrito aproximadamente como un teorema de extensión a funciones diferenciables preservando los puntos de continuidad de la derivada. Siguiendo el método usado en [Koc 1] M. Koc y Jan Kolár son capaces de generalizar sus resultados focalizándose en las funciones vector-valuadas obteniendo los resultados que veremos a continuación y que pueden consultarse junto con sus demostraciones en [Koc 3]. Koc y Kólar añaden además otras nuevas características como por ejemplo suposiciones no restrictivas permitiendo una función arbitraria (los puntos de diferenciabilidad y continuidad se conservan), la conservación de la propiedad Lipschitz puntual, local y global o la generalización a dominios infinito dimensionales.

Para poder enunciar los resultados recordemos la notación que hemos estado utilizando en secciones anteriores y un par de definiciones. Recordemos en particular la norma de un operador lineal.

Notación: Sean X e Y espacios lineales normados. $L(X,Y)$ es el conjunto de todos los operadores lineales acotados desde X hasta Y. Para $u \in L(X,Y)$, el número

$$\|u\|_{L(X,Y)} := \inf\left\{K > 0 : \|u(x)\|_Y \leq K\|x\|_X ; \forall x \in X\right\}$$

se llama norma del operador lineal u. El conjunto $L(X,Y)$ equipado con la norma $\|\cdot\|_{L(X,Y)}$ forma un espacio lineal normado, que es completo si Y es completo.

Definición 1: Sean X e Y espacios lineales normados, $A \subset X$ un conjunto arbitrario, $f : A \to Y$ una función y $a \in A$.

(i) Un operador lineal acotado $F_a : X \to Y$ es una **derivada relativa de Fréchet** de f en a (con respecto a A) si ya sea a un punto aislado de A, o

$$\underset{x \to a; x \in A}{Lim} \frac{\|f(x) - f(a) - F_a(x-a)\|_Y}{\|x-a\|_X} = 0$$

(ii) Un operador lineal acotado es una **derivada relativa estricta** de f en a (con respecto a A) si ya sea a un punto aislado de A, o

$$\underset{x \to a, y \to a; x, y \in A; x \neq y}{Lim} \frac{\|f(y) - f(x) - S_a(y-x)\|_Y}{\|y-x\|_X} = 0 \text{ (con } x = a, y = a \text{ permitido)}$$

(iii) Decimos que $L: A \to L(X,Y)$ es una derivada de Fréchet relativa (respectivamente estricta) de f (en A) si $L(a)$ es una derivada de Fréchet relativa (respectivamente estricta) en a (con respecto a A) para cada $a \in A$.

Definición 2: Sean X e Y espacios lineales normados, $A \subset X$ un conjunto arbitrario, $f: A \to Y$ una función y $a \in A$. Si $\alpha \in (0,1]$, decimos que f es $\alpha -$ **Hölder continua en** a (con respecto a A) si ya sea a un punto aislado de A, o

$$\underset{x \to a; x \in A}{Lim} \sup \frac{\|f(x) - f(a)\|_Y}{\|x-a\|_X^{\alpha}} < \infty .$$

Por tanto f es **Lipschitz** en a (con respecto a A) si es $1-$ **Hölder continua en** a (con respecto a A), es decir, ya sea a un punto aislado de A, o

$$\underset{x \to a; x \in A}{Lim} \sup \frac{\|f(x) - f(a)\|_Y}{\|x-a\|_X} < \infty .$$

Los principales resultados (que veremos a continuación distinguiendo entre el caso de dominio finito e infinito dimensional) se pueden reformular conjuntamente de la siguiente manera: (recalcamos que para $p \in \aleph \cup \{\infty\}$, C^p denota la clase de funciones $p-$veces continuamente diferenciables en el sentido Fréchet; nótese que esta noción no cambia si sustituimos "en el sentido Fréchet" por "en el sentido Gâteaux")

Teorema 1: Sean X e Y espacios lineales normados, $F \subset X$ un conjunto cerrado, $f: F \to Y$ una función arbitraria y $L: F \to L(X,Y)$ una función Baire 1. Entonces existe una función $\overline{f}: X \to Y$ tal que:

(i) $\overline{f} = f$ en F,

(ii) si $a \in F$ y f es continua en a (con respecto a F), entonces $\overline{f}$ es continua en a,

(iii) si $a \in F$, $\alpha \in (0,1]$ y f es $\alpha -$ Hölder continua en a (con respecto a F), entonces $\overline{f}$ es $\alpha -$ Hölder continua en a; en particular, si f es Lipschitz en a (con respecto a F), entonces $\overline{f}$ es Lipschitz en a,

(iv) si $a \in F$ y $L(a)$ es una derivada Fréchet relativa de f en a (con respecto a F), entonces $\left(\overline{f}\right)'(a) = L(a)$,

(v) $\overline{f}$ es continua en $X - F$,

(vi) si X admite una partición de la unidad C^p – diferenciable, donde $p \in \aleph \cup \{\infty\}$ está fijo, entonces $\overline{f} \in C^p(X - F, Y)$.

Además si $\dim X < \infty$, entonces:

(vii) si $a \in F$, L es continua en a y $L(a)$ es una derivada relativa estricta de f en a (con respecto a F), entonces la derivada Fréchet $\left(\overline{f}\right)'$ es continua en a con respecto a $(X - F) \cup \{a\}$ y $L(a)$ es la derivada estricta de $\overline{f}$ en a (con respecto a X),

(viii) si $a \in F$, $R > 0$, L está acotada en $B(a, R) \cap F$ y f es Lipschitz continua en $B(a, R) \cap F$, entonces $\overline{f}$ es Lipschitz continua en $B(a, r)$ para todo $r < R$; si L está acotada en F y f es Lipschitz continua en F, entonces $\overline{f}$ es Lipschitz continua en X.

Por último separaremos este resultado para los casos: dominio finito dimensional y dominio infinito dimensional. Para ello necesitamos el concepto de partición de la unidad localmente finita que ya hemos visto en anteriores secciones y que recordamos de nuevo. Se necesitará además el lema que damos a continuación.

__**Definición 3:**__ Sean X un espacio métrico, $\mathcal{F}$, una clase de funciones en X y $U \subset X$ un conjunto abierto. Una **partición de la unidad localmente finita**, en U (o de manera abreviada, partición de la unidad en U) es una colección $\{\psi_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ de funciones real valuadas ψ_γ en X tales que $\sum_{\gamma\in\Gamma}\psi_\gamma(x) = 1$ para todo $x \in U$ y existe un entorno V_y de y, para todo $y \in U$ tal que las ψ_γ se anulan en V_y salvo para un número finito de índices γ.

Si $\psi_\gamma \in \mathcal{F}$ para todo $\gamma \in \Gamma$, hablamos de una $\mathcal{F}$ - **partición de la unidad**. Si $\mathcal{F}$ no se especifica usualmente asumimos que son funciones continuas.

Decimos que una partición de la unidad (localmente finita), $\{\psi_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ en U está **subordinada a un recubrimiento abierto** $\mathcal{U}$ de U si para cada $\gamma \in \Gamma$ existe $U_\gamma \in \mathcal{U}$ tal que $\operatorname{supp}(\psi_\gamma) \subset U_\gamma$ donde $\operatorname{supp}(\psi_\gamma) = \overline{\{x \in X : \psi_\gamma(x) \neq 0\}}$.

Decimos que U admite una $\mathcal{F}$ - **partición de la unidad** si para todo recubrimiento abierto $\mathcal{U}$ de U existe una $\mathcal{F}$ - partición de la unidad localmente finita, $\{\psi_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ en U subordina a $\mathcal{U}$.

Antes del siguiente lema recordaremos la definición de diferenciabilidad en el sentido Gateaux.

Sea X un espacio normado, U un abierto no vacío de X. Sea $F: U \subseteq X \to \Re$ una función. Fijado un vector no nulo $h \in X$ y $u_0 \in U$, como U es un conjunto abierto, existirá $\delta > 0$ tal que si $|t| < \delta$, entonces $u_0 + th \in U$. Por lo tanto, si además $t \neq 0$ tiene sentido escribir:

$$\frac{F(u_0 + th) - F(u_0)}{t}.$$

<u>**Definición 4:**</u> Si existe y es finito el siguiente límite:

$$\underset{t \to 0}{Lim} \frac{F(u_0 + th) - F(u_0)}{t},$$

Se llamará **derivada de Gâteaux** de F en la dirección $h \in X$ en el punto $u_0 \in U$.

Como el límite de una función si existe es único, entonces una función puede tener a lo sumo una derivada Gâteaux en el punto u_0 y en la dirección $h \in X$. Usaremos la notación $\delta F(u_0, h)$ para referirnos al límite anterior. Es natural convenir que $\delta F(u_0, 0) = 0$.

<u>**Observación:**</u> El valor de $\delta F(u_0, h)$ es la derivada direccional de F en u_0 en la dirección h y por lo tanto, la derivada Gâteaux anterior se puede considerar una generalización de las derivadas direccionales del cáculo diferencial de varias variables.

La derivada Gâteaux de F depende únicamente del comportamiento local de F cerca del punto. Además, la derivada Gâteaux es una operación lineal, en el sentido de que si F y G tienen variación de Gâteaux en un punto u_0 en la dirección h entonces, $\delta(\alpha F + \beta G)(u_0, h) = \alpha \delta F(u_0, h) + \beta \delta G(u_0, h)$.

<u>**Definición 5:**</u> Puede suceder que exista $\delta F(u_0, h)$ para todo $h \in X$, o en otras palabras que la aplicación $h \to \delta F(u_0, h)$ tenga por dominio todo X. En este caso, si la aplicación $h \to \delta F(u_0, h)$ es lineal y continua (es decir, si pertenece al dual topológico de X) diremos que F es **diferenciable en el sentido de Gâteaux** en u_0 y esta derivada se denota por $F'(u_0): X \to \Re$ tal que $F'(u_0)(h) := \delta F(u_0, h)$.

Lema: Sea X un espacio lineal normado. Sea $\mathcal{F}$:

(a) la clase de todas las funciones continuas en X, o

(b) la clase de todas las funciones continuas en X que son p_1-veces diferenciables Gâteaux para algún $p_1 \in \aleph \cup \{\infty\}$, o

(c) la clase de todas las funciones p_2-veces diferenciables Fréchet en X, para algún $p_2 \in \aleph \cup \{\infty\}$, o

(d) la clase de todas las funciones $C^{p_3}-$ diferenciables para algún $p_3 \in \aleph \cup \{\infty\}$, o

(e) la clase de todas las funciones puntualmente α_1-Hölder continuas en X para algún $\alpha_1 \in (0,1]$, o

(f) la clase de todas las funciones localmente α_2-Hölder continuas en X para algún $\alpha_2 \in (0,1]$, en particular la clase de todas las funciones localmente Lipschitz en X, o

(g) la intersección de dos o varias clases de las anteriores (para algunos $p_1, p_2, p_3, \alpha_1, \alpha_2$)

Sea $\mathcal{F}^+$ la clase de todas las funciones no negativas de $\mathcal{F}$. Si X admite una $\mathcal{F}$-partición de la unidad, entonces todo conjunto abierto $U \subset X$ admite una $\mathcal{F}^+$-partición de la unidad.

Funciones vector-valuadas en dominios infinito dimensionales.

Teorema 2: Sean X e Y espacios lineales normados, $F \subset X$ un conjunto cerrado, $f: F \to Y$ una función arbitraria y $L: F \to L(X,Y)$ una función Baire 1 en F. Entonces existe una función $\overline{f}: X \to Y$ tal que:

(i) $\overline{f} = f$ en F,

(ii) si $a \in F$ y f es continua en a (con respecto a F), entonces $\overline{f}$ es continua en a,

(iii) si $a \in F$, $\alpha \in (0,1]$ y f es $\alpha-$Hölder continua en a (con respecto a F), entonces $\overline{f}$ es $\alpha-$Hölder continua en a; en particular, si f es Lipschitz en a (con respecto a F), entonces $\overline{f}$ es Lipschitz en a,

(iv) si $a \in F$ y $L(a)$ es una derivada Fréchet relativa de f en a (con respecto a F), entonces $\left(\overline{f}\right)'(a) = L(a)$,

(v) $\overline{f}$ es continua en $X - F$,

(vi) si X admite una $\mathcal{F}$-partición de la unidad donde $\mathcal{F}$ es una clase fija de funciones en X del lema anterior, entonces $\left.\overline{f}\right|_{X-F}$ es de clase $\mathcal{F}$ (decimos que $\left.g\right|_U$ es de clase $\mathcal{F}$ en un conjunto abierto U si para todo $x \in U$ existe un entorno V de x tal que $\left.g\right|_U$ es la restricción de una función de $\mathcal{F}$).

Demostración: Si $F = \varnothing$ entonces el teorema se cumple trivialmente. Por tanto, supongamos que F es no vacío. Para cada $x \in X$, tomamos:

$$r(x) := \frac{1}{20} dist(x, F) \qquad (1)$$

Además, para cada $x \in X - F$, elegimos cualquier punto $\hat{x} \in F$ tal que:

$$\left\| x - \hat{x} \right\|_X \leq 2dist(x, F) \qquad (2)$$

Si (iv) está bajo consideración, X admite una $\mathcal{F}$-partición de la unidad. Si este no fuera el caso, admite al menos una partición de la unidad (ya que X es un espacio métrico) y elegimos $\mathcal{F}$ como la clase de funciones continuas en X.

Por el Lema, existe una $\mathcal{F}$-partición de la unidad no negativa y localmente finita, $\{\phi_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ en $X - F$ subordinada al recubrimiento $\{B(x,10r(x)) : x \in X - F\}$. Luego, en particular,

$$\{\phi_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma} \subset \mathcal{F}, \qquad (3)$$

$$0 \leq \phi_\gamma, \forall \gamma \in \Gamma \qquad (4)$$

$$\sum_{\gamma\in\Gamma} \phi_\gamma(x) = 1, \forall x \in X - F \qquad (5)$$

y para todo $\gamma \in \Gamma$ existe $x_\gamma \in X - F$ tal que:

$$\operatorname{supp} \phi_\gamma \subset B(x_\gamma, 10r(x_\gamma)) \qquad (6)$$

Para todo $x \in X - F$, denotamos:

$$S_x := \{\gamma \in \Gamma : B(x,10r(x)) \cap B(x_\gamma, 10r(x_\gamma)) \neq \varnothing\} \qquad (7)$$

Claramente, si $\gamma \in \Gamma - S_x$, entonces $\phi_\gamma(x) = 0$ por (6). Además, si $\gamma \in S_x$ entonces:

$$\left| r(x) - r(x_\gamma) \right| \leq Lip(r) \left\| x - x_\gamma \right\|_X = \frac{1}{20} \left\| x - x_\gamma \right\|_X \leq \frac{1}{20}\left(10r(x) + 10r(x_\gamma)\right).$$

Por lo tanto

$$\frac{1}{3} \leq \frac{r(x)}{r(x_\gamma)} \leq 3 \text{ siempre que } \gamma \in S_x. \qquad (8)$$

La demostración se completa con la aplicación del siguiente teorema, gracias al cual se obtiene la extensión $\overline{f}$ requerida.

Teorema: Sean (X,ϑ) un espacio métrico, $H \subset X$ un conjunto cerrado, Z un espacio lineal normado y $f : H \to Z$ una función de Baire 1. Entonces existe una función continua $g : (X - H) \to Z$ tal que:

$$\underset{x\to a, x\in X-H}{Lim} \|g(x) - f(a)\|_Z \frac{dist(x,H)}{\vartheta(x,a)} = 0 \qquad \text{(NT)}$$

para todo $a \in \partial H$,

$$\underset{x\to a, x\in X-H}{Lim} g(x) = f(a) \qquad \text{(C)}$$

siempre que $a \in \partial H$ y f es continua en a y

$$g \text{ es acotada en } B(a,r) - H \qquad \text{(B)}$$

siempre que $a \in H, r \in (0,\infty) \cup \{\infty\}$ y f sea acotada en $B(a,12r) \cap H$.

Este teorema proporciona las herramientas de trabajo para comprobar que se cumplen cada uno de los apartados del teorema que queremos demostrar.

Sea $A : (X - F) \to L(X,Y)$ la función construida en el teorema anterior (para $H = F$ y $Z = L(X,Y)$) Definimos $\overline{f} = X \to Y$ mediante:

$$\overline{f}(x) := \begin{cases} f(x) & si \quad x \in F \\ \sum_{\gamma\in\Gamma} \phi_\gamma(x)[f(\hat{x}_\gamma) + A(x_\gamma)(x - x_\gamma)] & si \ x \in X - F \end{cases} \qquad (9)$$

Obviamente, $\overline{f} = f$ en F , lo cual prueba (i).

Ya que las aplicaciones lineales con $C^\infty -$diferenciables y la partición de la unidad $\{\phi_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ es localmente finita, podemos concluir fácilmente usando (3) que $\overline{f}\big|_{X-F}$ es de clase $\mathcal{F}$. Las condiciones (vi), si se considera, y (v) se cumplen.

Sea $a \in F$. Para un $x \in X - F$ arbitrario y $\gamma \in S_x$, por (1), (2), (7) y (8), tenemos:

$$\|x_\gamma - x\|_X \le 10r(x_\gamma) + 10r(x) \le 40r(x) = 2dist(x,F) \qquad (10)$$

$$\|x_\gamma - x\|_X \le 10r(x_\gamma) + 10r(x) \le 40r(x_\gamma) = 2dist(x_\gamma,F) \qquad (11)$$

$$\|\hat{x} - x_\gamma\|_X \le \|\hat{x} - x\|_X + \|x - x_\gamma\|_X \le 2dist(x,F) + 2dist(x,F) = 4dist(x,F), \qquad (12)$$

$$\|\hat{x}_\gamma - x_\gamma\|_X \le 2\|\hat{x} - x_\gamma\|_X \le 8dist(x,F),$$

$$\|\hat{x}_\gamma - \hat{x}\|_X \leq \|\hat{x}_\gamma - x_\gamma\|_X + \|x_\gamma - \hat{x}\|_X \leq 8dist(x,F) + 4dist(x,F) = 12dist(x,F) \qquad (13)$$

$$\|\hat{x}_\gamma - x\|_X \leq \|\hat{x}_\gamma - x_\gamma\|_X + \|x_\gamma - x\|_X \leq 8dist(x,F) + 2dist(x,F) = 10dist(x,F) \qquad (14)$$

$$\|\hat{x}_\gamma - x\|_X \leq \|\hat{x}_\gamma - x_\gamma\|_X + \|x_\gamma - x\|_X \leq 2dist(x_\gamma,F) + 2dist(x_\gamma,F) = 4dist(x_\gamma,F) \qquad (15)$$

Ya que $dist(x,F) \leq \|x-a\|_X$, por (2), (10) y (14), obtenemos:

$$\|x_\gamma - a\|_X \leq \|x_\gamma - x\|_X + \|x-a\|_X \leq 3\|x-a\|_X \qquad (16)$$

$$\|\hat{x}_\gamma - a\|_X \leq \|\hat{x}_\gamma - x\|_X + \|x-a\|_X \leq 11\|x-a\|_X \qquad (17)$$

$$\|\hat{x} - a\|_X \leq \|\hat{x} - x\|_X + \|x-a\|_X \leq 3\|x-a\|_X \qquad (18)$$

Ya que las condiciones (ii), (iii) y (iv) claramente se satisfacen para $a \in \mathrm{int}(F)$, podemos además asumir que $a \in \partial F$. Si $x \in X - F$, por (4), (5), (6), (7) y (9), obtenemos:

$$\|\overline{f}(x) - \overline{f}(a)\|_Y = \left\|\sum_{\gamma\in\Gamma}\phi_\gamma(x)\left[f(\hat{x}_\gamma) + A(x_\gamma)(x-\hat{x}_\gamma) - f(a)\right]\right\|_Y$$

$$= \left\|\sum_{\gamma\in\Gamma}\phi_\gamma(x)\left[f(\hat{x}_\gamma) - f(a) + L(a)(x-\hat{x}_\gamma) + (A(x_\gamma) - L(a))(x-\hat{x}_\gamma)\right]\right\|_Y$$

$$\leq \sum_{\gamma\in S_X}\phi_\gamma(x)\|f(\hat{x}_\gamma) - f(a)\|_Y + \sum_{\gamma\in S_X}\phi_\gamma(x)\|L(a)\|_{L(X,Y)}\|x-\hat{x}_\gamma\|_X \qquad (19)$$

$$+ \sum_{\gamma\in S_X}\phi_\gamma(x)\|A(x_\gamma) - L(a)\|_{L(X,Y)} dist(x_\gamma,F)\frac{\|x-\hat{x}_\gamma\|_X}{dist(x_\gamma,F)}$$

Primero suponemos que f es continua en a (con respecto a F) y fijamos $\varepsilon_1 > 0$. Existe $\delta_1 > 0$ tal que:

$$\|f(z) - f(a)\|_Y \leq \varepsilon_1 \text{ para todo } z \in F, \|z-a\|_X < \delta_1 \qquad (20)$$

Por (NT) del Teorema anterior existe $\delta_2 > 0$ tal que:

$$\|A(t) - L(a)\|_{L(X,Y)} dist(t,F) < \varepsilon_1 \text{ para todo } t \in X-F, \|t-a\|_X < \delta_2 \qquad (21)$$

Si $x \in X - F$ y $\|x-a\|_X < \min\left(\varepsilon_1, \frac{\delta_1}{11}, \frac{\delta_2}{3}\right)$, entonces, para todo $\gamma \in S_X$, usando (16) y (17) obtenemos $\|x_\gamma - a\|_X < \delta_2$ y $\|\hat{x}_\gamma - a\|_X < \delta_1$. Entonces, por (4), (5), (14), (15), (19), (20) , (21) y $dist(x.,F) \leq \|x-a\|_X$ obtenemos:

$$\|\overline{f}(x) - \overline{f}(a)\|_Y < \varepsilon_1 + 10\|L(a)\|_{L(X,Y)}\varepsilon_1 + 4\varepsilon_1 = (5 + 10\|L(a)\|_{L(X,Y)})\varepsilon_1$$

Ya que $\varepsilon_1 > 0$ era arbitrario, $\overline{f}$ es continua en a y por lo tanto (ii) queda probado.

Ahora, supongamos que $\alpha \in (0,1]$ y f es $\alpha-$Hölder continua en a (con respecto a F). Entonces existen $K > 0$ y $\delta_3 > 0$ tales que:

$$\|f(z) - f(a)\|_Y \leq K\|z-a\|_X^\alpha \text{ para todo } z \in F, \|z-a\|_X < \delta_3 \tag{22}$$

Por (NT) del Teorema anterior, existe $\delta_4 > 0$ tal que

$$\|A(t) - L(a)\|_{L(X,Y)} dist(t,F) < \|t-a\|_X \text{ para todo } t \in X - F, \|t-a\|_X < \delta_4 \tag{23}$$

Sea $x \in X - F$ tal que $\|x-a\|_X < \min\left(\frac{\delta_3}{11}, \frac{\delta_4}{3}, 1\right)$. Entonces para todo $\gamma \in S_X$ usando (16) y (17) obtenemos $\|x_\gamma - a\|_X < \delta_4$ y $\|\hat{x}_\gamma - a\|_X < \delta_3$. De modo similar, como arriba, por (4), (5), (14), (15), (16), (17), (19), (22), (23) y $dist(x,F) \leq \|x-a\|_X$ obtenemos:

$$\|\overline{f}(x) - \overline{f}(a)\|_Y \leq K \sum_{\gamma \in S_X} \phi_\gamma(x) \|\hat{x}_\gamma - a\|_X^\alpha + 10\|L(a)\|_{L(X,Y)} \|x-a\|_X \tag{24}$$

$$+ 4\sum_{\gamma \in S_X} \phi_\gamma(x) \|x_\gamma - a\|_X \leq (11^\alpha K + 10\|L(a)\|_{L(X,Y)} + 12)\|x-a\|_X^\alpha,$$

ya que $\|x-a\|_X < \|x-a\|_X^\alpha$ como $\|x-a\|_X < 1$ y $\alpha \in (0,1]$. Por lo tanto $\overline{f}$ es $\alpha-$Hölder continua en a y (iii) queda probado.

Finalmente, probaremos (iv). Fijado $\varepsilon_2 > 0$. Por (NT) del Teorema anterior existe $\delta_5 > 0$ tal que:

$$\|A(t) - L(a)\|_{L(X,Y)} \frac{dist(t,F)}{\|t-a\|_X} < \varepsilon_2 \text{ para todo } t \in X - F, \|t-a\|_X < \delta_5 \tag{25}$$

Ya que $L(a)$ es una derivada de Fréchet de f en a (con respecto a F), existe $\delta_6 > 0$ tal que:

$$\|f(z) - f(a) - L(a)(z-a)\|_Y \leq \varepsilon_2 \|z-a\|_X \text{ para todo } z \in F, \|z-a\|_X < \delta_6 \tag{26}$$

Si $x \in X - F$ y $\|x-a\|_X < \min\left(\frac{\delta_5}{3}, \frac{\delta_6}{11}\right)$, entonces, para todo $\gamma \in S_X$, usando (16) y (17) obtenemos $\|x_\gamma - a\|_X < \delta_5$ y $\|\hat{x}_\gamma - a\|_X < \delta_6$. Por lo tanto, por (4), (5), (6), (7), (9), (15), (16), (17), (25) y (26) obtenemos:

$$\|\overline{f}(x) - \overline{f}(a) - L(a)(x-a)\|_Y = \left\|\sum_{\gamma \in \Gamma} \phi_\gamma(x)\left[f(\hat{x}_\gamma) + A(x_\gamma)(x - \hat{x}_\gamma) - f(a) - L(a)(x-a)\right]\right\|_Y$$

$$=\left\|\sum_{\gamma\in\Gamma}\phi_\gamma(x)\left[f(\hat{x}_\gamma)-f(a)-L(a)(\hat{x}_\gamma-a)+(A(x_\gamma)-L(a))(x-\hat{x}_\gamma)\right]\right\|_Y$$

$$\leq \sum_{\gamma\in S_X}\phi_\gamma(x)\left\|f(\hat{x}_\gamma)-f(a)-L(a)(\hat{x}_\gamma-a)\right\|_Y$$

$$+\sum_{\gamma\in S_X}\phi_\gamma(x)\left\|A(x_\gamma)-L(a)\right\|_{L(X,Y)}\left\|x-\hat{x}_\gamma\right\|_X$$

$$\leq \sum_{\gamma\in S_X}\phi_\gamma(x)\varepsilon_2\left\|\hat{x}_\gamma-a\right\|_X$$

$$+\sum_{\gamma\in S_X}\phi_\gamma(x)\left\|A(x_\gamma)-L(a)\right\|_{L(X,Y)}\frac{dist(x_\gamma,F)}{\left\|x_\gamma-a\right\|_X}\frac{\left\|x-\hat{x}_\gamma\right\|_X}{dist(x_\gamma,F)}\left\|x_\gamma-a\right\|_X$$

$$\leq 11\varepsilon_2\left\|x-a\right\|_X+12\varepsilon_2\left\|x-a\right\|_X=23\varepsilon_2\left\|x-a\right\|_X .$$

Ya que $\varepsilon_2>0$ era arbitrario y $L(a)$ es una derivada de Fréchet de $\overline{f}$ en a con respecto a F, finalmente obtenemos:

$$\lim_{x\to a}\frac{\left\|\overline{f}(x)-\overline{f}(a)-L(a)(x-a)\right\|_Y}{\left\|x-a\right\|_X}=0$$

de donde $(\overline{f})'(a)=L(a)$, lo cual prueba (iv) y completa la demostración.

<u>**Corolario 1:**</u> Sean X un espacio lineal normado que admite una partición de la unidad diferenciable Fréchet, $F\subset X$ un conjunto cerrado no vacío, Y un espacio lineal normado, $f:F\to Y$ una función arbitraria y $L:F\to L(X,Y)$ una derivada Fréchet de f (con respecto a F). Entonces L es Baire 1 en F si y sólo si existe una función $\overline{f}:X\to Y$ tal que $\overline{f}$ extiende a f, $\overline{f}$ es diferenciable Fréchet en cualquier parte de X y $\left(\overline{f}\right)'=L$ en F.

Funciones vector-valuadas en dominios finito dimensionales.

Teorema 3: Sean $F \subset \Re^n$ un conjunto cerrado, Y un espacio lineal normado, $f : F \to Y$ una función arbitraria y $L : F \to L(\Re^n, Y)$ una función Baire 1 en F. Entonces existe una función $\overline{f} : \Re^n \to Y$ tal que:

(i) $\overline{f} = f$ en F,

(ii) si $a \in F$ y f es continua en a (con respecto a F), entonces $\overline{f}$ es continua en a,

(iii) si $a \in F$, $\alpha \in (0,1]$ y f es $\alpha -$ Hölder continua en a (con respecto a F), entonces $\overline{f}$ es $\alpha -$ Hölder continua en a; en particular, si f es Lipschitz en a (con respecto a F), entonces $\overline{f}$ es Lipschitz en a,

(iv) si $a \in F$ y $L(a)$ es una derivada Fréchet relativa de f en a (con respecto a F), entonces $\left(\overline{f}\right)'(a) = L(a)$,

(v) $\overline{f} \in C^\infty(\Re^n - F, Y)$,

(vi) si $a \in F$, L es continua en a y $L(a)$ es una derivada relativa estricta de f en a (con respecto a F), entonces la derivada Fréchet $\left(\overline{f}\right)'$ es continua en a con respecto a $(\Re^n - F) \cup \{a\}$ y $L(a)$ es la derivada estricta de $\overline{f}$ en a (con respecto a $\Re^n$),

(vii) si $a \in F$, $R > 0$, L está acotada en $B(a,R) \cap F$ y f es Lipschitz continua en $B(a,R) \cap F$, entonces $\overline{f}$ es Lipschitz continua en $B(a,r)$ para todo $r < R$; si L está acotada en F y f es Lipschitz continua en F, entonces $\overline{f}$ es Lipschitz continua en X.

Corolario 2: Sean $F \subset \Re^n$ un conjunto cerrado no vacío, Y un espacio lineal normado, $f : F \to Y$ una función arbitraria y $L : F \to L(\Re^n, Y)$ es una derivada Fréchet relativa de f (en F) tal que L es Baire 1 en F. Entonces existe una función $\overline{f} : \Re^n \to Y$ tal que:

(i) $\overline{f}$ es diferenciable Fréchet en $\Re^n$,

(ii) $\overline{f} = f$ y $\left(\overline{f}\right)' = L$ en F

(iii) si $a \in F$, L es continua en a y $L(a)$ es una derivada relativa estricta de f en a (con respecto a F) entonces la derivada Fréchet $\left(\overline{f}\right)'$ es continua en a.

(iv) $\overline{f} \in C^\infty(\Re^n - F, Y)$.

Capítulo 4. Extensión de funciones C¹ con derivada localmente uniformemente continua. Caso infinito dimensional.

Para finalizar, en este capítulo profundizaremos un poco más en la diferenciabiliad de las extensiones de funciones.

Empezaremos hablando sobre las funciones diferenciables en espacios de Banach con derivadas Lipschitz.

Continuaremos mostrando varios resultados relativos a la extensión de normas. En primer lugar estudiaremos la relación entre la extensibilidad diferenciable de normas y la complementabilidad de subespacios y en segundo lugar abordaremos la extensión de normas uniformemente diferenciables en espacios de Banach.

Y por último enumeraremos algunos resultados sobre extensiones Lipschitz minimales de funciones diferenciables en espacios de Hilbert.

4.1 Funciones diferenciables en espacios de Banach con derivadas Lipschitz

En esta sección hablaremos sobre el trabajo de John C. Wells en [We].

Wells demuestra que el teorema de extensión de Whitney falla para espacios de Hilbert separables mostrando una función C^3 en un subconjunto cerrado de l^2 que verifica la condición de Whitney pero que no tiene extensión C^3.

Mencionaremos sólo algunos de sus resultados. Para ello utilizaremos la siguiente definición:

<u>Definición:</u>

$$B_M^k(E,F) = \left\{ f \,/\, f \in C^k(E,F) : \left\| D^k f(y) - D^k f(x) \right\| \le M \left\| x - y \right\|, \forall x, y \right\}$$

$$B^k(E,F) = \{ f \,/\, f \in B_M^k(E,F) \text{ para algún } M \}.$$

Un espacio de Banach E se dice que es B^k **diferenciable** si existe una función $f \in B_M^k(E,R)$ con $f(0) \neq 0$ y supp(f) acotado para algún M. (Donde R es un espacio de Banach arbitrario). Entonces B^{k+1} diferenciable implica B^k diferenciable y E se dice que es B^∞ diferenciable si E es B^k diferenciable para todo k.

Funciones B^k y espacios de Banach B^k diferenciables

<u>**Proposición 1:**</u> Si $f \in B_M^k(E,F)$ entonces:

$$\left\| f(x+h) - f(x) - \sum_{j=1}^{k} D^j f(x)[h]/j! \right\| \leq M\|h\|^{k+1}/(k+1)!$$

<u>**Proposición 2:**</u> $f \in B_M^k(E,F)$ si y sólo si se cumplen las tres condiciones:

(1) f está acotada en algún conjunto abierto,

(2) para todo subespacio finito dimensional H, $f|_H(x)$ es continua,

(3) tomando $\Delta_h f(x) = f(x+h) - f(x)$ se tiene que $\|\Delta_h^{k+1} f(x)\| \leq M\|h\|^{k+1}$ para todo x y h en E.

<u>**Observación:**</u> el último apartado es consecuencia del teorema del valor medio. Sea $f \in B_M^k(E,F)$:

$$\Delta_h^{k+1} f(x) = \Delta_h \Delta_h^k f(x) = \Delta_h^k Df(x+c_1h)[h] = \ldots = \Delta_h D^k f(x+c_1h+\ldots+c_kh)[h],$$

para algunos $0 < c_i < 1$. Luego $\|\Delta_h^{k+1} f(x)\| \leq M\|h\|^{k+1}$.

<u>**Proposición 3:**</u> Supongamos $f_p \in B_M^k(E,F)$ y $\underset{p}{Lim}\, f_p(x) = f(x)$ para todo x en E. Si f_p están uniformemente acotadas en un conjunto abierto, entonces $f \in B_M^k(E,F)$ y $D^j f(x)[h] = \underset{p}{Lim}\, D^j f_p(x)[h]$.

<u>**Proposición 4:**</u> (Inversa del Teorema de Taylor) Supongamos que $f: E \to F$ está acotada en algún conjunto abierto y para todo x existen funciones $d^j f(x)$: $j-$multilineales desde E hasta F cumpliendo:

$$\left\| f(x+h) - f(x) - \sum_{j=1}^{k} d^j f(x)[h]/j! \right\| \leq M\|h\|^{k+1}/(k+1)!.$$

Entonces $f \in B_M^k(E,F)$ y $D^j f(x) = d^j f(x)$.

Recordemos que fue Wells en este trabajo el que demuetra haciendo uso de las anteriores proposiciones el resultado bien conocido de la existencia de particiones de la unidad B^k diferenciables en espacios separables y que enunciamos a continuación.

Teorema 1: Supongamos que E es un espacio de Banach separable B^p diferenciable y $\{U_\alpha\}$ es un recubrimiento abierto. Entonces existe una partición de la unidad $\{f_i\}$ refinando $\{U_\alpha\}$ con $f_i \in B^p(E,\Re)$ para cada i.

Demostración:

Encontramos dos recubrimientos abiertos contables finitos localmente $\{V_i^1\},\{V_i^2\}$ refinando $\{U_\alpha\}$ y funciones $g_i \in B^p(E,\Re)$ tales que $\overline{V}_i^1 \subset \overline{V}_i^2, 0 \le g_i(x) \le 1, g_i(\overline{V}_i^1) = 1$ y $g_i(CV_i^2) = 0$. Para cada $x \in E$ encontramos una $\varphi_x \in B(E,\Re)$ tal que $0 \le \varphi_x \le 1, \varphi_x(x) = 1$ y tal que el soporte de φ_x está contenido en algún U_α. Sea $A_x = \{y / \varphi_x(y) > 1/2\}$. Entonces $\{A_x\}$ recubre E y ya que E es Lindelof, podemos extraer una subfamilia contable $\{A_{x_i}\}$ de $\{A_x\}$ que también recubra E.

Sean ahora $C_j = \{t_j \le 1/2 - 1/j,$ o $t_i \ge 1/2 + 2/j,$ para algún $i < j\}$, $B_j = \{t_j \ge 1/2, t_i \le 1/2 + 1/j, i < j\}$ en $\Re^j$. Entonces la distancia $(B_j, C_j) > 0$ y podemos encontrar $\eta_j \in B^p(\Re^j, \Re)$ con $\eta_j(t_1,...,t_j) = 1$ para $(t_1,...,t_j) \in B_j$ y $\eta_j(t_1,...,t_j) = 0$ para $(t_1,...,t_j) \in C_j$. Sea $\psi_1(x) = \varphi_{x_1}(x)$ y $\psi_j(x) = \eta_j(\varphi_{x_1}(x),...,\varphi_{x_j}(x))$ para $j \ge 2$. Definimos $V_i^1 = \{x / \psi_i(x) > 1/2\}$, $V_i^2 = \{x / \psi_i(x) > 0\}$. Ya que $V_i^2 \subset$support φ_{x_1}, $\{V_i^2\}$ refina $\{U_\alpha\}$.

Para probar que $\{V_i^1\}$ recubre E, supongamos que $x \in E$ y que $i(x)$ es el primer entero para el cual $\varphi_i(x) \ge 1/2$. Dicho entero existe porque los A_i's cubren E. Entonces $\psi_{i(x)} = 1$, y por tanto $x \in V_{i(x)}^1$, luego $\{V_i^1\}$ recubre E. Ahora supongamos de nuevo que $x \in E$ y encontremos un entero $n(x)$ tal que $\varphi_{n(x)}(x) > 1/2$. Entonces, existe por continuidad de $\varphi_{n(x)}$, un entorno N_x de x y un $a_x > 1/2$ tales que $\inf_{y \in N_x} \varphi_{n(x)}(y) \ge a_x$. Elegimos k suficientemente grande tal que $k > n(x)$ y $2/k < a_x - 1/2$. Entonces para $j \ge k$, $\varphi_{n(x)}(y) > 1/2 + 2/j$ para $y \in N_x$ y de aquí, $\psi_j(y) = 0$ para $y \in N_x$. Además $N_x \cap V_j^2 = \varnothing$ para $j \ge k$ luego $\{V_i^2\}$ es localmente finito.

Finalmente tomemos algún $h \in B^p(\Re,\Re)$ con $h(t) = 1$ para $t \le 0$ y $h(t) = 0$ para $t \ge 1/2$, $0 \le h \le 1$. Definiendo $g_i(x) = h(\psi_i(x))$ tenemos que $g_i \in B^p(E,\Re)$ y $0 \le g \le 1$, $g_i(\overline{V}_i^1) = 1$, $g_i(CV_i^2) = 0$. Ahora sea $f_1(x) = g_1(x)$ y $f_i(x) = g_i(x)(1 - g_1(x))...(1 - g_{i-1}(x))$ para $i \ge 2$. Entonces $f_i \in B^p(E,\Re)$ y support $f_i \subset$ support $g_i \subset V_i^2$, de donde cada punto de E posee un entorno en el que todos excepto un número finito de f_i's se anulan. Ya que $\{x / g_i(x) = 1\} \supset V_i^2$, $\prod_{i=1}^n (1 - g_i(x)) = 0$ para cada x y algún n.

Además $\sum_{i=1}^{n} f_i(x) = 1 - \prod_{i=1}^{n}(1 - g_i(x))$, luego $\sum_{i=1}^{n} f_i(x) \equiv 1$ y $\{f_i\}$ es una partición de a unidad refinando $\{U_\alpha\}$ con $f_i \in B^p$ para cada i. Como queríamos demostrar.

Para los espacios L^p se puede ver que para p un entero par $D^{p+1}\|x\|^p = 0$ y que para p un entero no par $\left\| D^k \|x+h\|^p - D^k \|x\|^p \right\| \le (p!/k!)\|h\|^{p-k}$. Así que L^p es B^∞ diferenciable para p un entero par y L^p es $B^{[p-1]}$ diferenciable para p un entero no par. No todo espacio C^1 diferenciable es B^1 diferenciable como prueba el siguiente corolario.

<u>Teorema 2</u>: Si $n = 2^N$, dotamos al espacio euclídeo $n-$dimensional con la norma $\|x\| = \sup\limits_{i=1,\dots,n} |x_i|$. Supongamos que $f \in B_M^1(E^n, \Re)$ con $f(0) = 0$ y $f(x) \ge 1$ cuando $\|x\| \ge 1$. Entonces $M \ge 2N$.

<u>Demostración:</u>

Asumimos que $M < 2N$, y sea $A = \{x / x_i = \pm 1/N$ para $i = 1,\dots,n$ excepto para al menos un i_0 donde $|x_{i_0}| \le 1/N\}$. Entonces A es radialmente simétrico y conexo, luego existe un $h_1 \in A$ con $Df(0)[h_1] = 0$. h_1 tiene al menos 2^{N-1} componentes $= 1/N$. Igualmente existe un $h_2 \in A$ con $Df(h_1)[h_2] = 0$, y podemos elegir $\sigma_2 = \pm 1$ tal que $h_1 + \sigma_2 h_2$ tiene al menos 2^{N-2} componentes igual a $2/N$. Inductivamente elegimos $h_k \in A$ y σ_k, $k = 3,\dots,N$ tales que $Df(h_1 + \sigma_2 h_2 + \dots + \sigma_{k-1} h_{k-1})[h_k] = 0$ y $h_1 + \sigma_2 h_2 + \dots + \sigma_k h_k$ tiene 2^{N-k} componentes iguales a k/N. Entonces $\|h_1 + \dots + \sigma_N h_N\| = 1$, luego, por la Proposición 1, se tiene que:

$$|1-0| = |f(h_1 + \sigma_2 h_2 + \dots + \sigma_N h_N) - f(0)|$$

$$= \sum_{k=1}^{N} |f(h_1 + \sigma_2 h_2 + \dots + \sigma_k h_k) - f(h_1 + \sigma_2 h_2 + \dots + \sigma_{k-1} h_{k-1})| \le N \cdot \frac{1}{2} M N^{-2} < 1$$

Lo cual es una contradicción.

<u>Ejemplo:</u> Usando el teorema se puede demostrar que c_0 no es B^1 diferenciable. En efecto, supongamos que $f \in B_M^1(c_0, \Re)$ con $f(0) = 0$ y $f(1) \ge 1$ cuando $\|x\| \ge 1$, y restringimos f a $\{x / x_i = 0, i > 2^{(M+1)/2}\}$ para obtener una contradicción con el teorema.

<u>Observación</u>: En este teorema sólo hemos utilizado la continuidad uniforme de Df.

Conjuntos convexos y funciones B_M^1

Si A es un subconjunto de un espacio de Banach E, sea $d(x,A)=\inf_{y\in A}\|y-x\|$. Entonces $d(x,A)\in B_1^0(E,\Re)$. Si A es convexo, $d(x,A)$ comparte muchas propiedades con $\|x\|$. La siguiente proposición es bien conocida:

Proposición 5: Sea A un subconjunto cerrado convexo de un espacio de Banach, E con norma diferenciable. Supongamos que $d(x,A)=\|x-p(x)\|$ para todo $x\in E$ y algún $p(x)\in A$. Entonces $d(x,A)\in D(E-A,\Re)$ (es decir , la función en x, $d(x,A)$ es diferenciable en $E-A$), $Dd(x,A)=D\|\ \|(x-p(x))$. (Donde $D\|\ \|(x)$ denota la derivada de $\|\ \|$ en x).

Funciones B^1 en espacios de Hilbert

Suponemos que H es un espacio de Hilbert real dotado de la norma usual e identificaremos H^* con H y escribimos $\langle y,x\rangle = y\cdot x$ y $\|x\|^2 = x^2$

Teorema 3: Sea A un subespacio cerrado no vacío de cualquier espacio de Hilbert H dotado de la norma usual. Supongamos que f_0 es una función real valuada en A. Entonces existe una $f\in B_M^1(H,\Re)$ con $f\big|_A = f_0$ si y sólo si existe una función $f_1 : A\to H$ tal que para todo $x,y\in A$:

$$f_0(y)\le f_0(x)+\frac{1}{2}(f_1(x)+f_1(y))\cdot(y-x)+\frac{1}{4}M(y-x)^2-\frac{1}{4}(f(y)-f(x))^2/M$$

Además, f puede tomarse de tal forma que $f(x)\ge\inf_{y\in A} d_y(x)$ donde $d_y(x)=f_0(y)-\frac{1}{2}f_1^2(y)/M+\frac{1}{4}M(x-y+f_1(y)/M)^2$ y tal que si $g(x)\in B_M^1(H,\Re)$ con $g(x)=f_0(x)$ y $Dg(x)=f_1(x)$ para $x\in A$, entonces $g(x)\le f(x),\forall x$.

Dos importantes corolarios de este teorema son los siguientes:

Corolario 1: Sea A un subconjunto cerrado de un espacio de Hilbert H. Entonces existe una $f \in B_M^1(H,\Re)$ con $f(x) \geq \frac{1}{4} M d^2(x,A)$ y $g(x) \leq f(x)$ si $g \in B_M^1(H,\Re)$ y $g(A) = Dg(A) = 0$.

Demostración: Hacemos $f_0 = f_1 = 0$ en A. Entonces $d_y(x) = \frac{1}{4} M (y-x)^2$ y el corolario se cumple.

Corolario 2: Dados A y B cerrados en un espacio de Hilbert H con $d(A,B) = \delta > 0$, existe una $f \in B^1_{4/\delta^2}(H,\Re)$ con $0 \leq f(x) \leq 1$ y $f(A) = 0$ y $f(B) = 1$.

Funciones B^2

Teorema 4: Supongamos que $f \in B_M^2(\Re^N,\Re)$, $f(A) = 0$ y $f(x) \geq 1$ cuando $d(x,A) \geq 1$ donde $A = \{x | x_i$ (i'ésima coordenada de $x) \leq 0, \|x\| \leq 1\}$. Entonces $N < M^2 + M^4$.

Corolario 3: Sea $A = \{x \mid x \in \ell^2, x_i \leq 0, \|x\| \leq 1\}$ y supongamos que $f \in C^2(\ell^2,\Re)$ con $f(A) = 0$ y $f(\{x | d(x,A) \geq 1\}) \geq 1$. Entonces $f \notin B^2(\ell^2,\Re)$.

La demostración del corolario es obvia a partir del Teorema anterior.

Por último enunciaremos el siguiente resultado negativo de extensión diferenciable:

Corolario 4: Existe un subconjunto cerrado A de ℓ^2 y funciones $f_0, f_1, f_2, f_3 : A \to \Re, L(\ell^2,\Re), L_s^2(\ell^2,\Re), L_s^3(\ell^2,\Re)$ que verifican las condiciones del teorema de extensión de Whitney con la propiedad de que no existe una función ni de clase C^3 ni de clase B^2 que coincida con f_0 en el conjunto cerrado.

Demostración:

Sean $A = \{x$ tales que $x_1 = 1, x_i \leq 0$ para $i = 2,3,\ldots$ y $\|x - e_1\| \leq 1\}$, y $B = \{x : x_1 = 1, d(x,A) \geq 1\}$. Sean CA y CB los conos formados en A y B con el origen. Definimos $f_0(x) = x_1^8$, $f_1(x)[h] = 8x_1 h_1$, $f_2(x)[h] = 56 x_1^6 h_1^2$, $f_3(x)[h] = 336 x_1^5 h_1^3$ para $x \in CA$ y $f_0(x) = f_1(x) = f_2(x) = f_3(x) = 0$ en CB. Entonces es fácil ver que estas funciones satisfacen las hipótesis del Teorema de Extensión de Whitney.

Si $f \in C^3(\ell^2,\Re)$ o $B^2(\ell^2,\Re)$, y $f|_{CA \cup CB} = f_0(x)$ (siendo f la extensión de f_0), entonces en el primer caso $D^3 f(x)$ está acotada cerca del cero, y en ambos casos $f|_{x_1 = a} \in B^2(\{x : x_1 = a\},\Re)$ para algún $a > 0$. Pero esto es imposible por el Corolario 3. Como queríamos demostrar.

4.2 Extensión diferenciable de normas y complementabilidad de subespacios

Estudiaremos en este apartado las extensiones de normas viendo que la extensión diferenciable de normas desde un subespacio Y de X es en algunos casos suficientemente fuerte como para proporcionar un procedimiento para producir una proyección de X en Y. Los resultados y sus demostraciones pueden consultarse en [Zi].

<u>**Teorema 1:**</u> Sea X un espacio de Banach tal que X^* es separable y sea Y un subespacio Hilbert de X. Entonces, las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(i) Y es complementado en X.

(ii) La norma Hilbertiana $\|\cdot\|$ de Y puede extenderse a una función real-valuada φ en X que, como función en X, es diferenciable Fréchet en todos los puntos de la esfera unidad de Y, que denotamos por $S_1(Y)$, y de forma que la función $y \to \varphi'(y)$ es una **función localmente Lipschitziana** que lleva $S_1(Y)$ en X^*.

<u>**Demostración:**</u>

En primer lugar asumimos que Y es complementado en X por una proyección P. La función real valuada definida para $x \in X$ por $\varphi(x) = \|Px\|$ es una extensión de $\|\cdot\|$ en Y y la diferenciabilidad de $\|\cdot\|$ en Y implica que φ es diferenciable Fréchet en todos los puntos no nulos $y \in Y$ y que $\varphi'(y)(h) = \|y\|'(Ph)$, para todo $h \in X$. Ya que la diferencial de la norma Hilbertiana $\|\cdot\|$ es localmente Lipschitziana en $Y-\{0\}$, se sigue que la función $y \to \varphi'(y)$ es una función localmente Lipschitziana de $Y-\{0\}$ en X^*. Por tanto (i) implica (ii).

La demostración de la implicación en el otro sentido se sigue de la idea principal de la demostración del Lema 7.2 de [Lin]:

Supongamos que (ii) se verifica. Sea D la función de $Y^*-\{0\}$ en $S_1(Y)$ que asigna a un $f \in Y^*-\{0\}$ dado, un $y \in S_1(Y)$ unívocamente determinado, para el cual $f(y) = \|f\|^*_{Y^*}$. Definimos la función L de $Y^*-\{0\}$ en X^* mediante:

$$Lf(x) = \|f\|^*_{Y^*} \cdot \varphi'(Df)(x) \text{ para } x \in X.$$

Ya que $\|\cdot\|$ es Hilbertiana D es una función localmente Lipschitziana de $Y^*-\{0\}$ en $S_1(Y)$ y usando el hecho de que φ' es localmente Lipschitziana en la esfera unidad de Y, obtenemos que:

a) L es una función localmente Lipschitziana de $Y^* - \{0\}$ en X^*, y

b) $Lf(y) = f(y)$ para $y \in Y$.

Para poder continuar con la demostración utilizaremos la siguiente definición:

Definición: Diremos que un espacio de Banach X tiene la **propiedad de Radon-Nikodým** con respecto a $(\Omega, \sum, \mu)$ si para cada medida vectorial numerablemente aditiva $G: \sum \to X$, $\mu-$continua y de variación acotada, existe $g \in L^1(\mu, X)$ tal que: $G(E) = \int_E g d\mu$ para toda $E \in \sum$.

Diremos que un espacio de Banach X tiene la **propiedad de Radon-Nikodým** si X tienen la propiedad con respecto a todo espacio de medida finita.

Ya que X^* posee la propiedad de Radon-Nikodym, el resultado de Mankiewicz [Man] nos asegura que existe un conjunto S denso en Y^* formado por puntos en los cuales L es diferenciable Gâteaux. Sea f un punto en S y sea G la derivada Gâteaux de L en f. Entonces G es un operador lineal continuo de Y^* en X^* cuyo operador dual es un operador lineal continuo P de X en Y. Ya que esto implica que $Gf(y) = f(y)$ para $y \in Y$, obtenemos que P es una proyección de Z en Y. Con lo que la demostracón queda finalizada.

Observación: Si $1 < p < 2$ entonces L_p contiene un subespacio no complementado Y que es isomorfo a un espacio de Hilbert. De acuerdo con el Teorema 1, una norma equivalente Hilbertiana en Y no puede ser extendida a L_p de la forma que se indica aquí. En particular no se puede extender una norma hilbertiana definida en Y (que es una función C^∞) a una función C^2 en L_p para $1 < p < 2$.

El siguiente lema es clave para probar el Teorema 2.

Lema 1: Sea X con $\|\cdot\|$ un espacio de Banach y sea Y un subespacio de X. Asumimos que $\|\cdot\|$, como función en X, es diferenciable Gâteaux en todos los puntos distintos de cero de Y. Sea D el subconjunto de $S_1(Y^*)$ formado por los funcionales f que alcanzan su norma, es decir, para los cuales existe $y \in Y, \|y\| = 1$, tal que $f(y) = 1$. Definimos la función H de D en X^* como sigue:

Dado $f \in D$, elegimos $y \in S_1(Y)$ tal que $f(y) = 1$ y ponemos $Hf = \|y\|' \in S_1^*(X^*)$, es decir, la derivada Gâteaux de la norma en el punto y. Entonces H está bien definida en D, $Hf(y) = f(y)$ para todo $y \in Y$ y H es continua en D para la $w*-$topología de Y^* y la $w*-$topología de X^*.

Antes de enunciar el siguiente lema y el Teorema 2 necesitaremos la siguiente definición:

__Definición__: Sea X con la norma $\|\cdot\|$ y la bola unidad B_1 un espacio de Banach. Decimos que una norma equivalente $|||\cdot|||$ en X **tiene la propiedad** (P) si:

(i) $|||\cdot|||$ es diferenciable Gâteaux, y

(ii) existe un conjunto compacto, convexo y simétrico, $C \subset X$ tal que para la bola unidad $B_1^{'}$ de la norma $|||\cdot|||$ tenemos: $B_1^{'} = B_1 + C$.

__Lema 2: (Klee)__ Sea X con la norma $\|\cdot\|$ un espacio de Banach separable. Entonces X admite una norma equivalente $|||\cdot|||$ con la propiedad (P).

__Teorema 2__: Sea X con la norma $\|\cdot\|$ un espacio de Banach e Y un subespacio de X tal que $Y = C(K)$ para algún compacto K. Asumimos que existe una norma equivalente $|||\cdot|||$ en Y con la propiedad (P) tal que $|||\cdot|||$ puede extenderse a una norma equivalente $|||\cdot|||$ en X que es, como función en X diferenciable Gâteaux en todos los puntos distintos de cero de Y. Entonces Y es complementado en X.

Por último enunciaremos y demostraremos el siguiente corolario, cuya demostración utiliza como herramientas clave el Teorema 2 y el Lema 2.

__Corolario 1__: Sea K un espacio compacto e $Y = C(K)$ separable e infinito dimensional. Entonces Y es isomorfo a c_0 si y sólo si para cualquier espacio de Banach separable $X \supset Y$ y para cualquier norma equivalente diferenciable Gâteaux, $\|\cdot\|$ en Y, $\|\cdot\|$ puede extenderse a una norma equivalente diferenciable Gâteaux en X.

__Demostración:__

Asumimos que Y es isomorfo a c_0, que X es un espacio separable que contiene a Y y que $\|\cdot\|$ es una norma diferenciable Gâteaux equivalente en Y. De acuerdo con el Teorema de Sobczyk (que declara que toda copia de c_0 dentro de un espacio de Banach separable es complementada por una proyección de norma como mucho 2) existe una proyección lineal continua P de X en Y. Sea $\|\cdot\|$ una norma diferenciable Gâteaux equivalente en X (véase por ejemplo el Lema 2).

Se sigue que $|||x||| = \left(\|x - Px\|^2 + \|Px\|^2\right)^{1/2}$ es una norma diferenciable Gâteaux equivalente en X, que es una extensión de la norma $\|\cdot\|$ en Y.

Por otro lado, supongamos que la condición en el Corolario 1 se cumple para un espacio separable $Y = C(K)$, y sea X un espacio de Banach separable que contiene a Y. De acuerdo con el Lema 2, existe una norma equivalente $\|\cdot\|$ con la propiedad (P) en Y. Usando la condición en el Corolario 1, extendemos $\|\cdot\|$ a una norma diferenciable Gâteaux equivalente en X. El Teorema 2 entonces nos dice que Y es complementado en X. De esta forma, el espacio $Y = C(K)$ es complementado en cualquier espacio de Banacha separable $X \supset Y$. Esto significa, de acuerdo con el resultado de D. Amir [AM] que Y es isomofo a c_0.

4.3 Extensión de normas uniformemente diferenciables en Espacios de Banach

Vamos a ver una caracterización de la extensión de normas uniformemente diferenciables en un espacio Y a normas uniformemente diferenciables a un espacio de Banach reflexivo X. Los resultados pueden consultarse en [Fry].

Consideremos el siguiente problema: Sea P alguna propiedad de diferenciabilidad de una norma en un espacio de Banach X. Entonces, dado un subespacio $Y \subset X$, y una norma equivalente $\|\cdot\|_Y$ en Y con la propiedad P, ¿es posible extender $\|\cdot\|_Y$ a una norma en X con la propiedad P? Equivalentemente, ¿puede $\|\cdot\|_Y$ con la propiedad P ser la restricción de una norma equivalente en X con la norma P?

Como hemos visto en la anterior sección, Vaclav E. Zizler trabajó en la demostración de la extensibilidad diferenciable de normas desde subespacios de espacios topológicos en distintos casos en [Zi]. En concreto, recordemos los dos resultados vistos:

(a) Existe un espacio de Banach separable X, un subespacio no complementado $Y \subset X$ y una norma diferenciable Gâteaux tal que esa norma no puede ser extendida a una norma diferenciable Gâteaux en X. Este resultado se prueba por contradicción usando la suposición de que existe una extensión para ver que en ese caso Y es complementado en X.

(b) Si X^* es separable e Y es un subespacio Hilbertiano de X con esfera unidad S_Y, entonces la norma Hilbertiana en Y se extiende a una función $\varphi : X \to \Re$ que, como función en X es diferenciable Fréchet en S_Y, con φ' localmente Lipschitz en S_Y si y sólo si Y es complementado. Zizler también demuestra que si Y es complementado el problema de la extensión diferenciable es fácilmente resoluble.

Notación:

(i) En los resultados siguientes asumimos que todos los espacios de Banach son reales (X , Y ,…).

(ii) Si $G \subset X$ es un subconjunto, entonces la función distancia a G será: $dist(\cdot, G): X \to \Re$ dada por $dist(x,G) = \inf \{\|x-y\| : y \in G\}$.

Definición 1: Una norma en un espacio de Banach se dice que es **uniformemente diferenciable Fréchet** (o simplemente uniformemente diferenciable) si el límite:

$$\underset{t \to 0}{Lim}\, t^{-1}(\|x+th\| - \|x\|),$$

existe, es continuo y lineal en h y es uniforme en $(x,h) \in S_X \times S_X$.

Sea $U \subset X$ un subconjunto abierto de un espacio de Banach e Y un espacio de Banach. Recordemos que una función $f: U \to Y$ se dice que es **diferenciable Fréchet** en $x \in U$ si el límite:

$$df(x)(h) \equiv \underset{t \to 0}{Lim}\, t^{-1}(f(x+th) - f(x)), \tag{1}$$

existe, es continuo y lineal en h y es uniforme en $h \in S_X$.

Si $f: U \to Y$ es diferenciable Fréchet en todo $x \in U$ con $U \subset X$ abierto, $A \subset U$ es un subconjunto y el límite (1) es uniforme para $(x,h) \in A \times S_X$ entonces decimos que f es **uniformemente diferenciable Fréchet en** A, o, simplemente **uniformemente diferenciable en** A. La colección de todas estas funciones se escribe como $UF(A,Y)$.

Entenderemos aquí la diferenciabiliad en el sentido Fréchet y asumiremos que todos los subespacios de las siguientes proposiciones son cerrados.

Definición 2: Diremos que un espacio de Banach X es **uniformemente convexo** si para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que:

$$x, y \in S_X, \|x-y\| \geq \varepsilon \Rightarrow \|x+y\| \leq 2(1-\delta).$$

Definición 3: Un espacio normado X se dice que es **estrictamente convexo** si verifica cualquiera de las dos condiciones equivalentes:

(i) si $x, y \in X$ y $\|x+y\| = \|x\| + \|y\|$ con $y \neq 0$, entonces existe $t \geq 0$ tal que $x = ty$.

(ii) si $x, y \in S_X$ y $x \neq y$, entonces $\|x+y\| < 2$.

<u>Definición 4:</u> La función $\delta : [0,2] \to [0,1]$ definida mediante:

$$\delta(\varepsilon) = \inf\left\{1 - \frac{\|x+y\|}{2} : x, y \in S_X ; \|x-y\| = \varepsilon\right\}$$

se llama **módulo de convexidad** del espacio normado X y con ello se tiene que X es estrictamente convexo si y sólo si $\delta(2) = 1$.

Se define además la **característica de convexidad** de un espacio de Banach X como el número real $\varepsilon_0 = \sup\{\varepsilon : \delta(\varepsilon) = 0\}$.

<u>Definición 5:</u> Un espacio de Banach es **uniformemente no-cuadrado** si y sólo si $\varepsilon_0 < 2$.

<u>Definición 6:</u> Un espacio de Banach es **superreflexivo** si y sólo si admite una norma equivalente con la cual es uniformemente no-cuadrado.

Sea X un espacio de Banach súperreflexivo con una norma uniformemente diferenciable $\|\cdot\|$ e Y un subespacio con una norma uniformemente diferenciable equivalente dada $\|\cdot\|_Y$. Suponemos, sin pérdida de generalidad, que $\|\cdot\| \leq \|\cdot\|_Y$ en Y.

<u>Proposición 1:</u> Sea X un espacio de Banach súperreflexivo e Y un subespacio con una norma equivalente uniformemente diferenciable $\|\cdot\|_Y$. Entonces existe una extensión de $\|\cdot\|_Y$ a una función uniformemente diferenciable y acotada en un entorno de S_X si y sólo si existe una norma equivalente uniformemente diferenciable en X que extiende la norma $\|\cdot\|_Y$.

<u>Demostración:</u>

Fijamos un subespacio $Y \subset X$, una norma uniformemente diferenciable $\|\cdot\|$ en X, y sea $\|\cdot\|_Y$ una norma equivalente uniformemente diferenciable en Y que podemos asumir que satisface $A\|\cdot\|_{|Y} \geq \|\cdot\|_Y \geq \|\cdot\|_{|Y}$, para algún $A > 0$. A menos que se diga lo contrario, todas las bolas cerradas están tomadas con respecto a $\|\cdot\|$.

Supongamos primero que existe $f : X \to \Re$ una extensión de $\|\cdot\|_Y$ que es uniformemente diferenciable en un entorno de S_X con

$\sup\{ f(x) : x \in S_X \} \equiv \sqrt{M} < \infty$. Ahora, para $y \in Y$, $f(y) = \|y\|_Y \geq \|y\|$, y por lo tanto para todo $y \in Y - \{0\}$, $f(y/\|y\|) \geq 1$. Ya que f es uniformemente continua en S_X, existe $\delta > 0$ tal que para cualquier $y_0 \in S_Y$ y para $y \in B_{3\delta}(y_0) \cap S_X$, tenemos que $f(y) > 1/2$. Definimos los conjuntos:

$$S_1 = \{x \in X : dist(x,Y) \leq \delta\} \quad \text{y} \quad S_2 = \{x \in X : dist(x,Y) \geq 2\delta\}.$$

Sea $\zeta \in C^\infty(\Re, [0,1])$ tal que $\zeta(t) = 0$ si $t \leq 3\delta/2$ y $\zeta(t) = 1$ si $t \geq 2\delta$ y ponemos $h(x) = \zeta(dist(x,Y))$. Ya que X es súperreflexivo, tenemos que $h \in UF(X,[0,1])$, y tenemos $h = 0$ en S_1, y $h = 1$ en S_2. Para $x \in X$, definimos $g(x) = \sqrt{f^2(x) + h(x)}$.

Nótese que tenemos $g|_Y = \|\cdot\|_Y$, y $1/2 \leq g(x/\|x\|) \leq 1 + M$ para todo $x \in X - \{0\}$.

Además, ambas $g(x/\|x\|)$ y $(g(x/\|x\|))'$ son uniformemente continuas en los conjuntos $\{x \in X : \|x\| > r\}, r > 0$.

Componiendo $\|\cdot\|$ con funciones diferenciables apropiadas en $\Re$ construimos funciones $\xi_n \in UF(X,[0,1])$ tales que ξ_n se anulan en un entorno del origen y $\xi_n(x) \equiv 1$ para $\|x\| \geq 1/3n$. Definimos $\psi_n : X \to \Re$ mediante:

$$\psi_n(x) = \begin{cases} \|x\| g(x/\|x\|) \xi_n(x) & para\ x \neq 0, \\ 0 & para\ x = 0. \end{cases}$$

Se sigue de la definición de ξ_n que ψ_n es uniformemente diferenciable en subconjuntos acotados de X. Nótese que $\psi_n(x) \geq \max\{0, 1/2\|x\| - 1/3n\}$ para todo $x \in X$ y también para todo $y \in Y$ con $\|y\| \geq 1/3n$, tenemos que $\psi_n(y) = \|y\|_Y$.

Siguiendo la demostración de Theorem V.3.2 de [De] o la de Theorem 10.7 de [Fa], definimos una función convexa $\Psi_n : \mathrm{int}(4B_X) \to \Re$ mediante:

$$\Psi_n(x) = \inf\left\{ \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \psi_n(x_j) : x = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_j, \sum_{j=1}^{n} \lambda_j = 1, \lambda_j \geq 0, n \in \aleph \right\}.$$

Usando el método de [Fa], ya que ψ_n es uniformemente diferenciable en $4B_X$, tenemos que Ψ_n es uniformemente diferenciable en $\mathrm{int}(3B_X)$.

Escribiremos la derivada de Ψ_n en x como $\Psi_n'(x)$. Ya que $\psi_n(x) \geq \max\{0, \frac{1}{2}\|x\| - \frac{1}{3n}\}$ se sigue que $\Psi_n(x) \geq \max\{0, \frac{1}{2}\|x\| - \frac{1}{3n}\}$ y por lo tanto $\Psi_n(x) \leq 1$ implica $\|x\| < 3$.

Establecemos $\tilde{\Psi}_n(x) = (\Psi_n(x) + \Psi_n(-x))/2$ y μ_n igual al funcional de Minkowski de $B_n = \{x \in X : \tilde{\Psi}_n(x) \leq 1\}$. Ya que $\tilde{\Psi}_n(0) = 0$ y $B_n \subset \operatorname{int}(4B_x)$ para todo n tenemos que μ_n es una norma equivalente en X para cada n. Además, ya que

$$\psi_n(x) \geq \max\left\{0, \frac{1}{2}\|x\| - \frac{1}{3n}\right\} \geq \max\left\{0, \frac{1}{2}\|x\| - \frac{1}{3}\right\},$$

Y

$$\psi_n(x) = \|x\| g(x/\|x\|) \xi_n(x) \leq (1 + M)\|x\|,$$

Las mismas desigualdades se dan para $\tilde{\Psi}_n$, y por lo tanto existen constantes $A_1, A_2 > 0$, independientes de n, tales que para todo $x \in X$ y $n \geq 1$,

$$A_1\|x\| \leq \mu_n(x) \leq A_2\|x\| \qquad (1)$$

Ahora utilizaremos el Teorema de la Función Implícita en la ecuación $\tilde{\Psi}_n(x/(\mu_n(x))) = 1$ para obtener:

$$\mu_n'(x) = -\left(\tilde{\Psi}_n'(x)(x)\right)^{-1} \tilde{\Psi}_n'(x) \text{ para } x \text{ tal que } \mu_n(x) = 1.$$

Nótese que ya que $\tilde{\Psi}_n$ es convexo, tenemos que $\tilde{\Psi}_n'(x)(x) \geq \tilde{\Psi}_n(x) - \tilde{\Psi}_n(0) = \tilde{\Psi}_n(x)$, y por lo tanto para x tal que $\mu_n(x) = 1$, tenemos que $\tilde{\Psi}_n'(x)(x) \geq 1$. Se sigue que $\mu_n(x)$ es diferenciable Fréchet. Además, ya que $\tilde{\Psi}_n'$ es uniformemente continua en el conjunto $S_n = \{x \in X : \mu_n(x) = 1\}$, tenemos que μ_n es uniformemente diferenciable en S_n, y por lo tanto μ_n es una norma uniformemente diferenciable equivalente en X.

Después, fijamos cualquier $x_0 \in X - \{0\}$, elegimos n_0 con $\|x_0\| > 1/3n_0$ y elegimos $\delta > 0$ tal que $x \in B_\delta(x_0)$ implica que $\|x\| > 1/3n_0$. Entonces para todos $m, n > n_0$, y $x \in B_\delta(x_0)$, tenemos que $\mu_n(x) = \mu_m(x)$, y por lo tanto $|\mu_n(x) - \mu_m(x)| \to 0$ uniformemente en $B_\delta(x_0)$. Ya que $\mu_n(x) \leq A_2\|x\|$ para todo n, μ_n converve también uniformemente sobre el origen.

Se sigue que existe una función continua μ con $\mu_n \to \mu$.

Un argumento similar prueba que μ_n' converge uniformemente en un entorno sobre cualquier $x \neq 0$, y por lo tanto μ es continuamente diferenciable Fréchet en $X - \{0\}$. Ahora, para $x \in S \equiv \{x \in X : \mu(x) = 1\}$, tenemos que $\mu_n(x) = \mu_m(x)$ para todo $n, m > (1/3)(1+M)$, y por lo tanto $\mu_n' \to \mu'$ uniformemente en S. Ya que las μ_n' son uniformemente continuas en S, se sigue que μ' es uniformemente continua en S. Esto, junto con (1), prueba que μ es una norma uniformemente diferenciable equivalente en X.

Luego, sea $\varepsilon \in (0,1)$ y elegimos n_0 tal que $(1 + A + M)/3n_0 < \varepsilon/4$. Ahora, para $y \in Y$ y cualquier n, $\psi_n(y) = \xi_n(y)\|y\|_Y$, y por lo tanto para $y \in Y$ con $\|y\| \geq 1/3n_0$, tenemos que $\psi_{n_0}(y) = \|y\|_Y$. Además, para todo $n \geq n_0$ e $y \in Y$, $\left|\psi_n(y) - \|y\|_Y\right| < \varepsilon/2$, o $\|y\|_Y - \varepsilon/2 < \psi_n(y) < \|y\|_Y + \varepsilon/2$. Un argumento de convexidad ahora nos da que $\|y\|_Y - \varepsilon/2 < \Psi_n(y) < \|y\|_Y + \varepsilon/2$, y por lo tanto para todo $n \geq n_0$ e $y \in Y$, $\left|\tilde{\Psi}_n(y) - \|y\|_Y\right| < \varepsilon/2$.

Se sigue que $\left|\mu_n(y) - \|y\|_Y\right| < \varepsilon\|y\|_Y$ para $n \geq n_0$ e $y \in Y - \{0\}$, ya que $\|\cdot\|_Y$ es una norma y μ_n en Y es el funcional de Minkowski del conjunto $\{y \in Y : \tilde{\Psi}_n(y) \leq 1\}$.

En efecto, sean $n \geq n_0$, $y \in Y - \{0\}$ y $\lambda > 0$ tales que $\tilde{\Psi}_n(\lambda^{-1}y) = 1$. Entonces tenemos $\left|1 - \|\lambda^{-1}y\|_Y\right| < \varepsilon/2$, que implica que $1/(1-\varepsilon/2) > \lambda/\|y\|_Y > 1/(1+\varepsilon/2)$, y por lo tanto $\|y\|_Y((\varepsilon/2)/(1-\varepsilon/2)) > \lambda - \|y\|_Y > \|y\|_Y((-\varepsilon/2)/(1+\varepsilon/2))$, de donde se sigue la desigualdad deseada.

Finalmente, para cualquier $y_0 \in Y - \{0\}$ fijado y $\varepsilon' \in (0,1)$, trabajando en un entorno $B_\delta(y_0) \subset Y$ de y_0 tal que $0 \notin B_\delta(y_0)$ y usando nuestra estimación anterior con $\varepsilon < \varepsilon'/(\delta + \|y_0\|)$, podemos encontrar un $n_0 = n_0(y)$ tal que para todo $n \geq n_0$, $\left|\mu_n(y) - \|y\|_Y\right| < \varepsilon'$ en $B_\delta(y_0)$. Ya que $\mu_n \to \mu$ uniformemente en Y, esto implica que $\left|\mu(y) - \|y\|_Y\right| < \varepsilon'$ en un entorno de y_0, y entonces $\mu|_Y = \|\cdot\|_Y$, ya que ε' e y_0 son arbitrarios (el caso $y_0 = 0$ es claro). Y con esto concluye la demostración.

Proposición 2: Sea X un espacio de Banach superreflexivo e Y un subespacio. Supongamos que existe una proyección no lineal continua $\nu : X \to Y$ que es uniformemente diferenciable y acotada en un entorno de S_X. Entonces cualquier norma equivalente uniformemente diferenciable en Y puede ser extendida a una norma equivalente uniformemente diferenciable en todo X.

Proposición 3: Sea X un espacio superreflexivo e $Y \subset X$ un subespacio. Entonces cualquier norma equivalente en Y puede ser aproximada uniformemente en subconjuntos acotados de Y por restricciones de normas uniformemente diferenciables en X.

Terminamos con una observación simple de que la proposición previa puede ser reescrita en una forma ligeramente diferente. Si $(Y, |\cdot|)$ es un espacio de Banach superreflexivo, sea Z el espacio de todas las normas uniformemente diferenciables en Y equivalentes a $|\cdot|$ (la norma $|\cdot|$ no necesariamente tiene que ser uniformemente diferenciable). Definimos una métrica en Z por:

$$\rho(n_1, n_2) = \sup\{|n_1(x) - n_2(x)| : x \in (B_Y, |\cdot|)\}.$$

Entonces con esta notación tenemos:

Corolario: Sea X un espacio superreflexivo e $(Y, |\cdot|)$ un subespacio. Entonces el conjunto de normas equivalentes uniformemente diferenciables en Y que pueden ser extendidas a una norma uniformemente diferenciable en X es denso en (Z, ρ)

4.4 Extensión Lipschitz minimal de funciones diferenciables definidas en espacios de Hilbert

En este apartado esbozaremos el trabajo realizado por Erwan Le Gruyer en [Gru].

Le Gruyer generaliza la constante de Lipschitz a los campos de jets y prueba que tales campos se extienden a un campo de dominio total $\Re^n$ con la misma constante. Este resultado puede verse como el análogo para los campos del teorema de extensión mínimal de Kirszbraun para funciones Lipschitz y, por lo tanto, establece un vínculo entre el teorema de Kirszbraun y el teorema de Whitney. De hecho, este resultado se mantiene no sólo en el Euclídeo $\Re^n$ sino también en general en espacios de Hilbert (separables o no). El autor aplica el resultado al problema de extensión funcional minimal diferenciable Lipschitz en espacios euclídeos y muestra que ningún teorema del tipo Brudnyi- Shvartsman se cumple para este último problema. Concluyendo con un primer enfoque del problema de extensión absolutamente minimal Lipschitz en el caso diferenciable que se estudió originalmente por Aronsson en el caso continuo.

Sea T un campo de jets afines, definidos en un subconjunto no vacío de $\Re^n$: para $a \in dom(T)$, $T(a)$ (o brevemente T_a) es una función afín real-valuada $y \in \Re^n \to T_a(y) \in \Re$. Otro campo U se dice que extiende T si $dom(U) \supset dom(T)$ y T es la restricción de U a $dom(T)$.

Una función diferenciable real-valuada u de dominio $\Re^n$ se dice que extiende el campo T si el campo U de la extensión de Taylor de u extiende T.

El **problema de extensión de Lipschitz** es: encontrar una condición necesaria y suficiente en T asegurando que T se extiende a alguna función diferenciable teniendo derivada Lipschitz. Este problema fue resuelto por Glaeser en [Gla], siendo la condición:

$$K_W^1(T) := \sup_{a \neq b \in dom(T)} \sup_{k=0,1} \frac{\left\| D^k T_a(b) - D^k T_b(b) \right\|}{\|b-a\|^{2-k}} (2-k)! < \infty \text{ (para Whitney),}$$

$$K_G^1(T) := \sup_{a \neq b \in dom(T)} \sup_{x \in \Re^n} \frac{T_a(x) - T_b(x)}{\|b-a\| \left(\|x-a\| + \|x-b\| \right)} < \infty \text{ (para Glaeser).}$$

En general, ningún múltiplo de K_W o K_G es exactamente $Lip(Du)$ cuando T es el campo de extensiones de Taylor de una función totalmente diferenciable u.

Posteriormente Le Gruyer establece que Γ^1 definida por:

$$\Gamma^1(T) := 2\sup_{y\in\Re^n}\ \sup_{a\neq b\in dom(T)} \frac{T_a(y)-T_b(y)}{\|a-y\|^2+\|b-y\|^2}$$

tiene esta propiedad. Nótese que los funcionales K_W, K_G y Γ^1 son equivalentes en el sentido usual (cada uno de ellos está acotado por un múltiplo de otro) y por lo tanto Γ^1 puede usarse también en lugar de K_W, K_G para resolver el problema de extensión diferenciable Lipschitz.

Consideremos ahora el problema de extensión minimal Lipschitz.

Definición 1: Una función diferenciable real-valuada u de dominio $\Re^n$ se dice que es una **extensión minimal de** T si para cualquier otra extensión v de T tenemos que $Lip(Du) \leq Lip(Dv)$.

En su forma más débil el problema es: Sea T tal que $K^1(T) < \infty$ (donde K^1 denota K_W, K_G o Γ^1). ¿Existe una función totalmente diferenciable u que sea una extensión minimal Lipschitz de T?

Recordemos el:

Teorema de extensión de Kirszbraun: Sea f una función Lipschitz definida en un subconjunto no vacío de $\Re^m$ y que va a $\Re^n$ ($\Re^m$ y $\Re^n$ ambos equipados con sus normas euclídeas). Entonces existe una extensión total Lipschitz g de f tal que $Lip(g) = Lip(f)$. Como consecuencia tenemos $L^*(f) = Lip(f)$ donde:

$$L^*(f) := \inf\{Lip(g) : g \text{ es una extensión total Lipschitz de } f\}.$$

En otras palabras tenemos una formulación interior de $L^*(f)$ que tiene, por definición, una formulación externa. Restringiendo otra vez a B_m (siendo B_m la bola unidad compacta de $\Re^m$) la existencia de una extensión minimal Lipschitz de f por si sola es una simple consecuencia del teorema de Glaeser aplicado al caso continuo. La conclusión más fuerte del teorema de Kirszbraun es que $L^*(f) = Lip(f)$

Notación: Llamaremos $L^*(T) = \Gamma^1(T)$ donde:

$$L^*(T) := \inf\{Lip(Du) : u \text{ es una extensión total diferenciable de } T\}.$$

Teorema 1: El funcional $\Gamma^1 : T \to \Gamma^1(T) \in \Re^+ \cup \{\infty\}$ es el único que satisface:

(P0) Γ^1 es creciente, esto es, U extiende T implica que $\Gamma^1(U) \geq \Gamma^1(T)$.

(P1) Si U tiene dominio total cumpliendo $\Gamma^1(U) < +\infty$ entonces la función total u definida por $u(x) := U_x(x)$ es diferenciable y su derivada Du es Lipschitz.

(P2) Si u es una función diferenciable de dominio total con Du Lipschitz, entonces:

$$\Gamma^1(U) = Lip(Du),$$

donde U es el campo de extensión de Taylor de u.

(P3) Para cualquier T tal que $\Gamma^1(T) < +\infty$, T se extiende a un campo total U de jets afines cumpliendo:

$$\Gamma^1(U) = \Gamma^1(T).$$

Una consecuencia inmediata del teorema es que para cualquier T tal que $\Gamma^1(T) < +\infty$, existe una función total diferenciable u que es una extensión minimal de T y cualquier extensión minimal u de T cumple $Lip(Du) = \Gamma^1(T)$. Se sigue que:

$$\Gamma^1(T) = L^*(T).$$

Este teorema se cumple no sólo en $\Re^m$ sino de hecho en cualquier espacio de Hilbert, separable o no. Por lo tanto este teorema generaliza el teorema de extensión de Whitney en el caso diferenciable real-valuado.

Caso de los campos de Jets afines

Notación: H denotará un espacio de Hilbert (separable o no) equipado con un producto interior $\langle \cdot ; \cdot \rangle$ y norma euclídea asociada $\|\cdot\| = \langle \cdot ; \cdot \rangle^{1/2}$.

Vía el producto escalar, identificaremos los vectores de H y las formas lineales en H, en particular el gradiente y el diferencial.

Para cualquier campo T de jets afines, escribimos:

$$T_a(x) := u_a + \langle D_a u \; ; x - a \rangle, a \in dom(T), x \in H \text{, donde } u_a \in \Re, D_a u \in H.$$

Definición 2: Definimos la constante de Lipschitz $\Gamma^1(T)$ de T:

$$\Gamma^1(T) := 0 \text{ si } dom(T) \text{ tiene un solo elemento}$$

y si no (como ya dijimos antes) $\Gamma^1(T) := 2 \sup_{y \in \Re^n} \sup_{a \neq b \in dom(T)} \dfrac{T_a(y) - T_b(y)}{\|a - y\|^2 + \|b - y\|^2}$.

Los siguientes resultados son herramientas claves para la demostración del teorema 2 que enunciaremos después.

<u>Proposición 1:</u> Si $dom(T)$ tiene al menos dos elementos tenemos:

$$\Gamma^1(T) := \sup_{a \neq b \in dom(T)} \left(\sqrt{A_{a,b}^2 + B_{a,b}^2} + |A_{a,b}| \right),$$

donde

$$A_{a,b} := \frac{2(u_a - u_b) + \langle D_a u + D_b u \ ; b - a \rangle}{\|a - b\|^2},$$

y

$$B_{a,b} := \frac{\|D_a u - D_b u\|}{\|a - b\|}.$$

<u>Proposición 2:</u> Sea u una función diferenciable de dominio total H con Du Lipschitz. Entonces:

$$\Gamma^1(U) = Lip(Du),$$

donde U es un campo de extensión de Taylor de u.

<u>Proposición 3:</u> Sea U un campo de jets afines de dominio total H cumpliendo $\Gamma^1(U) < +\infty$. Entonces la función total u definida por $u(x) := U_x(x)$ es diferenciable y su derivada Du es Lipschitz.

<u>Teorema 2:</u> Sea T un campo de jets afines con $\Gamma^1(T) < +\infty$. Entonces T se extiende a un campo total U de jets afines cumpliendo:

$$\Gamma^1(U) = \Gamma^1(T).$$

<u>Demostración:</u> Sea T un campo de jets afines tal que $\Gamma^1(T) < \infty$. Establezcamos

$$K := \frac{1}{2}\Gamma^1(T), \ S := dom(T)$$

Por inducción transfinita (esto es por el Lema de Zorn) es suficiente probar que para cualquier $x \in H, x \notin dom(T)$, existen $u_x \in \Re, D_x u \in H$, tales que:

$$-K \leq \frac{T_x(y) - T_a(y)}{\|x - y\|^2 + \|a - y\|^2} \leq K \text{ , para cualquier } a \in S, y \in H \qquad (1)$$

donde $T_x(y) := u_x + \langle D_x u; y - x \rangle$.

Si $K = 0$ entonces el campo T es constante en $dom(T)$ y podemos (y debemos) extender T en H por esta función constante.

Por lo tanto, desde ahora, asumimos que $K > 0$. Usando la proposición 1, la condición (1) es equivalente a:

$$\left|A_{a,x}\right| + \sqrt{A_{a,x}^2 + B_{a,x}^2} \leq 2K \quad \text{para} \quad \text{todo} \quad a \in S. \qquad (2)$$

Nótese que la inecuación (2) es equivalente a:

$$\left|A_{a,x}\right| \leq K - \frac{B_{a,x}^2}{4K}.$$

Primer paso: Eliminación de $\underline{u_x}$. La condición (2) es equivalente a ambas condiciones: para cualquier $a \in S$

$$u_x \leq u_a + \frac{1}{2}\langle D_a u + D_x u; x - a\rangle + \frac{K}{2}\|a - x\|^2 - \frac{1}{8K}\|D_a u - D_x u\|^2 , \qquad (3)$$

y para cualquier $b \in S$

$$u_b + \frac{1}{2}\langle D_b u + D_x u; x - b\rangle + \frac{K}{2}\|b - x\|^2 - \frac{1}{8K}\|D_b u - D_x u\|^2 \leq u_x . \qquad (4)$$

Examinando las condiciones (3) y (4) vemos que u_x existe sólo si:

$$\left(u_b + \frac{1}{2}\langle D_b u + D_x u; x - b\rangle + \frac{K}{2}\|b - x\|^2 - \frac{1}{8K}\|D_b u - D_x u\|^2\right)$$

$$\leq \qquad (5)$$

$$\left(u_a + \frac{1}{2}\langle D_a u + D_x u; x - a\rangle + \frac{K}{2}\|a - x\|^2 - \frac{1}{8K}\|D_a u - D_x u\|^2\right)$$

para cualquier $a, b \in S$.

Pero, a la inversa, si la condición (2) se cumple inferimos que:

$$\min \leq \max \qquad (6)$$

donde

$$\min := \sup_{b \in S}\left(u_b + \frac{1}{2}\langle D_b u + D_x u; x - b\rangle - \frac{K}{2}\|b - x\|^2 + \frac{1}{8K}\|D_b u - D_x u\|^2\right),$$

y

$$\max := \inf_{a \in S}\left(u_a + \frac{1}{2}\langle D_a u + D_x u; x - a\rangle - \frac{K}{2}\|a - x\|^2 + \frac{1}{8K}\|D_a u - D_x u\|^2\right).$$

Se sigue que la existencia de u_x es consecuencia de la existencia de $D_x u$ cumpliendo (2): podemos tomar para u_x cualquier número entre $\min$ y $\max$.

Luego, en esta etapa de la prueba, podemos eliminar $u_x \in \Re$ y tenemos sólo que probar la existencia de un $D_x u \in H$ que cumpla la condición (2).

Segundo paso: Eliminación de $D_x u$ (formulación geométrica). Escribiendo la condición (2) bajo la forma $Q \leq 0$, vemos que Q es un polinomio cuadrático de $D_x u$ para cualesquiera $a, b \in S$. Escribiendo este polinomio cuadrático bajo la forma canónica, la condición (2) se convierte, después de tediosos pero elementales cálculos en:

$$\left\| D_x u - V_{a,b} \right\|^2 \leq \alpha_{a,b} + \beta_{a,b} \text{ , para cualesquiera } a, b \in S \tag{7}$$

donde

$$V_{a,b} := \frac{1}{2}\left(D_a u + D_b u\right) + K(b-a),$$

$$\alpha_{a,b} := 4K(u_a - u_b) + 2K\left\langle D_a u + D_b u; b-a \right\rangle - \frac{1}{2}\left\| D_a u - D_b u \right\|^2 + 2K^2 \left\| a-b \right\|^2,$$

$$\beta_{a,b} := \left\| \frac{1}{2}\left(D_a u - D_b u\right) + K\left(2x - a - b\right) \right\|^2.$$

Usando la definición de $\Gamma^1(T)$ tenemos que $\left(A_{a,b}^2 + B_{a,b}^2\right)^{1/2} + \left|A_{a,b}\right| \leq 2K$, y además

$$0 \leq -4K\left|A_{a,b}\right| - B_{a,b}^2 + 4K^2. \tag{8}$$

Ya que $\alpha_{a,b}$ puede ser escrito como $\alpha_{a,b} = \frac{1}{2}\left(4KA_{a,b} - B_{a,b}^2 + 4K^2\right) \left\| a-b \right\|^2$, se sigue que

$$\alpha_{a,b} \geq 0.$$

Entonces, tomando $r_{a,b} := \sqrt{\alpha_{a,b} + \beta_{a,b}}$, la condición (2) se transforma en:

$$\left\| D_x u - V_{a,b} \right\|^2 \leq r_{a,b}^2 \text{ , para todo } a, b \in S . \tag{9}$$

En otras palabras, denotando $B_{a,b}$ a la bola cerrada de centro $V_{a,b}$ y radio $r_{a,b}$ el problema original se reduce a

$$\bigcap_{(a,b)\in S^2} B_{a,b} \neq \varnothing . \tag{10}$$

O, por compacidad,

$$\bigcap_{(a,b)\in F^2} B_{a,b} \neq \varnothing \text{ , para cualquier subconjunto finito no vacío } F \text{ de } S. \qquad (11)$$

Desde ahora, por (11), podemos asumir sin pérdida de generalidad que S es finito.

Tercer paso: Eliminación de $D_x u$ *(formulación algebraica).*

Realizaremos aquí tan sólo un esquema de las herramientas utilizadas para completar la demostración de este paso.

En primer lugar es necesario definir los siguientes elementos:

Para cualesquiera $a,b,c,d \in S$ y cualquier $x \in H$ definimos:

$$\Phi((a,b),(c,d)) := r_{a,b}^2 + r_{c,d}^2 - \|V_{a,b}\|^2 - \|V_{c,d}\|^2,$$

$$X_{a,x} := \frac{1}{2} D_a u + K(x-a) \text{ , } Y_{b,x} := \frac{1}{2} D_b u + K(b-x).$$

Las herramientas para completar este paso de la demostración son los siguientes lemas:

Lema 1: Para cualesquiera $a,b,c,d \in S$ y cualquier $x \in H$ tenemos:

$$\Phi((a,b),(c,d)) \geq -4(\langle X_{a,x}; Y_{d,x}\rangle + \langle X_{c,x}; Y_{b,x}\rangle)$$

Lema 2: Asumiendo que existe $(a,b) \in S^2$ tal que $r_{a,b} = 0$. Entonces $\bigcap_{(c,d)\in S^2} B_{c,d} \neq \varnothing$.

Lema 3: (Kirszbraun): Para cualquier $\lambda \geq 0$ denotamos por $B_{a,b}(\lambda)$ la bola cerrada de centro $V_{a,b}$ y radio $\lambda r_{a,b}$. Denotamos por λ_m el valor más pequeño de λ para el cual $\bigcap_{a,b\in S} B_{a,b}(\lambda) \neq \varnothing$. Entonces $\bigcap_{a,b\in S} B_{a,b}(\lambda_m)$ contiene un elemento singular V_m y este elemento pertenece a la envoltura convexa del conjunto E de aquellos $V_{a,b}$ tales que: $\|V_m - V_{a,b}\| = \lambda_m r_{a,b}$.

Del lema anterior podemos escribir:

$$V_m := \sum_{(a,b)\in E_0} \xi_{a,b} V_{a,b}$$

donde

$$E_0 := \{(a,b) \in S^2 : \|V_m - V_{a,b}\| = \lambda_m r_{a,b}\}$$

y,

$$\sum_{(a,b)\in E_0} \xi_{a,b} = 1 \text{ , } \xi_{a,b} \geq 0 \text{ para todo } (a,b) \in E_0.$$

La demostración se completa con el siguiente paso.

Tomando: $\Delta := \sum_{(a,b),(c,d)\in E_0} \xi_{a,b}\xi_{c,d}(-\|V_{c,d}-V_{a,b}\|^2 + r_{a,b}^2 + r_{c,d}^2)$

Último paso: Verificación de la condición $\Delta \geq 0$.

La demostración de este último paso consiste en el desarrollo de la siguiente igualdad:

$$\|V_m\|^2 = \sum_{(a,b),(c,d)\in E_0} \xi_{a,b}\xi_{c,d}\langle V_{a,b};V_{c,d}\rangle,$$

y el uso del Lema 1.

El caso funcional

Como consecuencia del Teorema 2 obtenemos el siguiente teorema que concierne a al problema de extensión minimal diferenciable Lipschitz en el caso funcional. Este teorema se cumple en $\Re^d$ equipado con la estructura euclídea.

Definición 3: Sea t una función real-valuada con $dom(t)$ un subconjunto compacto de $\Re^d$. Definimos:

$$\Gamma^1(t) := inf\left\{\Gamma^1(T) : T \text{ es un campo de jets afines extendiendo } t\right\}.$$

Teorema 3: Sea t una función real-valuada con $dom(t)$ un subconjunto compacto de $\Re^d$.

(1) La función parcial t se extiende a una función Lipschitz total diferenciable si y sólo si $\Gamma^1(t) < \infty$

(2) Si $\Gamma^1(t) < \infty$ entonces existe una función total diferenciable Lipschitz, u extendiendo a t que cumple:

* $Lip(Du) = \Gamma^1(t)$;

* u es una extensión minimal diferenciable Lipschitz de t tal que $Lip(Du) \leq Lip(Dv)$ para cualquier extensión total diferenciable v de t.

4.5 Extensión de funciones convexas $C^{1,1}$ en espacios de Hilbert

Sean H un espacio de Hilbert, $E \subset H$ un subconjunto arbitrario y $f : E \to \Re$ y $g : E \to H$ dos funciones. Estudiaremos condiciones necesarias y suficientes en el par (f, G) para la existencia de una función convexa $F \in C^{1,1}(H)$ tal que $F = f$ y $\nabla F = G$ en E y veremos que F puede ser tomada de tal forma que $Lip(\nabla F) \le 2Lip(G)$. Tanto los resultados como las demostraciones pueden consultarse en [Az 2].

Denotaremos por H a un espacio de Hilbert real cualquiera equipado con un producto interior $\langle \cdot,\cdot \rangle$. La norma de H la denotaremos por $\|\cdot\|$. Por un $1-$jet (f, G) en un subconjunto $E \subset H$ entendemos un par de funciones $f : E \to \Re$, $G : E \to H$. Dado un $1-$jet (f, G) definido en $E \subset H$. Como se ha visto en la sección anterior, Le Gruyer probó en [Gru] que una condición necesaria y suficiente en un jet (f, G) para tener una extensión F a todo el espacio H es:

$$\Gamma(f, G, E) := \sup_{x,y \in E} \left(\sqrt{A_{x,y}^2 + B_{x,y}^2} + |A_{x,y}| \right) < \infty,$$

$$\text{donde } A_{x,y} = \frac{2(f(x) - f(y)) + \langle G(x) + G(y), y - x \rangle}{\|x - y\|^2} \text{ y}$$

$$B_{x,y} = \frac{\|G(x) - G(y)\|}{\|x - y\|} \text{ para todo } x, y \in E, x \ne y.$$

Esta condición es equivalente a:

$$2 \sup_{y \in H} \sup_{a \ne b \in E} \frac{f(a) - f(b) + \langle G(a), y - a \rangle - \langle G(b), y - b \rangle}{|a - y|^2 + |b - y|^2} < \infty,$$

Le Gruyer también probó en [Gru] que la extensión F satisface:

$$Lip(\nabla F) = \Gamma(F, \nabla F, H) = \Gamma(f, G, E).$$

Veremos ahora un resultado análogo para funciones convexas.

<u>**Definición:**</u> Diremos que un par de funciones $f : E \to \Re$, $G : E \to H$ definidas en un subconjunto $E \subset H$, satisfacen la **condición** $(CW)^{1,1}$ **en** E siempre que exista una constante $M > 0$ con

$$f(x) - f(y) - \langle G(y), x - y \rangle \ge \frac{1}{4M} \|G(x) - G(y)\|^2 \qquad (CW^{1,1})$$

para todo $x, y \in E$.

Observación: Si (f,G) satisface $(CW)^{1,1}$ en E entonces

$$f(x) \geq f(y) + \langle G(y), x-y \rangle \text{ para todo } x, y \in E$$

$$\text{y } \sup_{x \neq y, x, y \in E} \left\{ \frac{\left| f(x) - f(y) - \langle G(y), x-y \rangle \right|}{\|x-y\|^2}, \frac{\|G(x)-G(y)\|}{\|x-y\|} \right\} \leq 2M .$$

En particular, G es $2M-$Lipschitz en E.

Para finalizar enunciaremos los resultados:

Teorema 1: Sean E un subconjunto de H y $f : E \to \Re$, $G : E \to H$ dos funciones. Existe una función convexa F de clase $C^{1,1}(H)$ tal que $F = f$ y $\nabla F = G$ en E si y sólo si (f,G) satisface la condición $(CW)^{1,1}$ en E. Además si $M > 0$ es como en la definición anterior, entonces F puede ser elegida tal que $(F, \nabla F)$ también satisfaga la condición $(CW)^{1,1}$ en H con la misma constante M.

Equivalentemente, teniendo en cuenta la observación anterior, el Teorema 1 puede ser reformulado en términos de la constante de Lipschitz de la siguiente manera:

Teorema 2: Sean E un subconjunto de H, $f : E \to \Re$ una función y $G : E \to H$ una función Lipschitz. Una condición necesaria y suficiente en el par (f,G) para la existencia de una función convexa F de clase $C^{1,1}(H)$ tal que $F = f$ y $\nabla F = G$ en E es que (f,G) satisfaga $(CW)^{1,1}$ en E con $M = Lip(G)$. Además, F puede ser tomada tal que $Lip(\nabla F) \leq 2Lip(G)$.

Bibliografía

[AM] D. Amir, Projections onto continuous functions spaces. Proc. Amer. Math. Soc. 15, 396-402 (1964)

[Av] V. Aversa, M. Laczkovich, D.Preiss, Extension of diferenciable functions, Comment. Math. Univ. Carolina. 26 (1985) 597-609.

[Az 1] D. Azagra, R. Fry, L. Keener, Smooth extensions of functions on separable Banach spaces, Mathematische Annalen (2010) 347: 285-297.

[Az 2] D. Azagra, C. Mudarra, An Extension Theorem for convex Functions of class $C^{1,1}$ on Hilbert spaces, Preprint 2016. ArXiv: 1603.00241.

[Az 3] D. Azagra, R. Fry, J. Gómez Gil, J.A. Jaramillo, M. Lovo: C^1 – fine approximation of functions on Banach spaces with unconditional basis. Oxf. Q. J. Math. 56, 13-20 (2005)

[Ben] Yoav Benyamini and Joram Lindenstrauss-Geometric nonlinear functional analysis. Vol.1-American Mathematical Society (2000) (American Mathematical Society colloquium publications 48).

[Bri] E. Brierstone, P. Milman, W. Pawlucki, Differentiable functions define don closed sets, A probleM of Whitney, Inventiones MAth. 151, No. 2 (2003), 329-352.

[Bru 1] Y. Brudnyi, On an extension theorem, Funk. Anal. I Prilzhen. 4 (1970), 97-98; English transl. In Func. Anal. Appl. 4 (1970), 252-253.

[Bru 2] Y. Brudnyi and P. Shvartsman, A linear extension operator for a space of smooth functions defined on closed subsets of $\Re^n$, Dokl. Akad. Nauk SSSR 280 (1985), 268-270.

[Bru 3] Y. Brudnyi and P. Shvartsman, Generalizations of Whitney's extension theorem, IMRN 3 (1994), 129-139.

[Bru 4] Y. Brudnyi and P. Shvartsman, The Whitney problem of existence of a linear extension operator, J. Geometric Analysis 7, No. 4 (1997), 515-574.

[Bru 5] Y. Brudnyi and P. Shvartsman, Whitney's extension problem for multivariate $C^{1,\omega}$ functions, Trans. Amer. Math. Soc. 353, No. 6 (2001), 2487-2512.

[Bru 6] Y. Brudnyi and P. Shvartsman, The trace of the jet space $J^k\Lambda^\omega$ to an arbitrary closed subset of $\Re^n$, Transcactions of the AMS, 350, (1998), 1519-1553.

[Bru 7] Alexander Brudnyi and Yuri Brudnyi, Methods of Geometric Analysis in Extension anda Trace Problems, Volume 1 and 2. Monographs in Mathematics Vol 102. Birkhäuser. Springer Basel AG 2012.

[De] R. Deville, G. Godefroy, V. Zizler: Smoothness and Renormings in Banach Spaces, vol 64. Pitman Monographs and Surveys in Pure and Applied Mathematics. Pitman, London (1993).

[Di1] J. Dieudonné, Panorama de las matemáticas puras. La elección bourbakista. Editorail Reverté S.A 1987. 20.

[Di2] J. Dieudonné, Éléments d'Analyse, Vols, 1-9, Gauthier-Villars, Paris, 1963-1982 (English translations: Treatise on Analysis Vols 1-6, Academic Press, New York, 1960-1978. Capítulo 16, Volumen 3, (1972) 34.).

[Du] James Dugundji, Topology, Allyn and Bacon Series in Advanced Mathematics, Irving Kaplansky, University of Chicago (1966) 187-189.

[Ev] Lawrence C. Evans, Ronald F. Gariepy, Measure Theory and Fine Properties of Functions, Revised Edition, CRC Press, Taylor & Francis Group, LLC, 2015. 276-282.

[Fa] M. Fabian, P.Habala, P.Hájek, V.M. Santalucía, J.Pelant and V.Zizler, Functional analysis and infinite-dimensional geometry, CMS Books in Mathematics 8 (Springer-Verlag. New York, 2001)

[Fe1] Charles Fefferman, A Generalized Sharp Whitney Theorem for Jets, Revista Matemática Iberiamericana 21 (2005) nº2, 577-688.

[Fe2] Charles Fefferman, A Sharp form of Whitney's extension theorem, Annals of Mathematics, 161, (2005), 509-577.

[Fed] Herbert Federer, Geometric Measure Theory, Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1969.

[Fry] R. Fry, Extensions of uniformly smooth norms on Banach spaces, Bull. Austral. Math. Soc. Vol 65 (2002) [423-430].

[Gla] G. Glaeser, Etudes de quelques algebres tayloriennes, J d'Analyse 6 (1958), 1-124.

[Gru] E.L Gruyer, Minimal Lipschitz extensions to differentiable functions defined on a Hilbert space. Geom. Funct. Anal 19(4) (2009), 1101-1118.

[Ha] P. Hájek, M. Johanis, Smooth approximations, J. Funct. Anal. 259 (3) (2010) 561-582.

[Jim 1] Mar Jiménez Sevilla, Luis Sánchez González, Smooth extension of functions on a certain class of non-separable Banach spaces, J.Math. Anal. Appl. 378 (2011) 173-183.

[Jim 2] Mar Jiménez Sevilla, Luis Sánchez González, On Smooth extension of vector-valued functions defined on closed subsetsof Banach spaces, Math. Annn (2013) 355: 1201-1219.

[Koc 1] Martin Koc, Ludêk Zajícek, A joint generalization of Whitney's C^1 extension theorem and Aversa-Laczkovich-Preiss's extension theorem, J.Math. Anal. 338 (2012) 1027-1039.

[Koc 2] M. Koc, J.Kolár, Extensions of vector-valued Baire one functions with preservation of points of continuity, Journal of Mathematical Analysis and Applications 442 (1), 138-148, 2016.

[Koc 3] M. Koc, Jan Kolár, Extensions of vector-valued functions with preservation of derivatives, Preprint 2016, ArXiv: 1602.05750.

[Lin] J. Lindenstrauss, Extension of compact operators. Mem. Amer. Math. Soc. 48 (1964)

[Man] P. Mankiewicz, On the differentiability of Lipschitz mappings in Frechet Spaces, Studia Math. 45, 15-29 (1973)

[Mun] J. R. Munkres, Topology, 2nd edition, Prentice Hall, New Jersey (2000) 207-222.

[Sh 1] P. Shvartsman, Lipschitz selections of multivalued mappings and traces of the Zygmund class of functions to an arbitrary compact, Dokl. Acad. Nauk SSSR 276 (1984), 559-562; English transl. In Soviet Math. Dokl. 29 (1984), 565-568.

[Sh 2] P. Shvartsman, On traces of functions of Zygmund classses, Sibirskyi Mathem. J. 28 N5 (1987), 203-215; English transl. In Siberian Math. J. 28 (1987), 853-863.

[Sh 3] P. Shvartsman, Lipschitz selections of set-valued functions and Helly's theorem, J. Geometric Analysis 12, No. 2 (2002), 289-324.

[Ta] Ángel Tamariz Mascarúa. Algunas Aplicaciones de la Teoría de Conjuntos a la Topología. Departamento de Matemáticas. Facultad de Ciencias. UNAM. Aportaciones Matemáticas, Serie Comunicaciones 27 (2000) 257-275.

[We] John C. Wells, Differentiable functions on Banach spaces with Lipschitz derivatives, J.Diferential Geometry. 8 (1973) 135-152.

[Whit 1] H. Whitney, Analytic extensions of differentiable functions defined in closed sets, Transactions A.M.S 36 (1934), 63-89.

[Whit 2] H. Whitney, Differentiable functions defined in closed sets I, Transactions A.M.S 36 (1983) 369-387.

[Whit 3] H. Whitney, Functions differentiable on the boundaries of regions, Annals of Math 35 (1934) 482-485.

[Zi] Vaclav E. Zizler, Smooth extension of norms and complementability of subspaces, Arch. Math, Vol 53, 585-589 (1989).