

UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE
MADRID

FACULTAD DE MATEMÁTICAS

TRABAJO DE FIN DE MÁSTER, JULIO 2018

**Herramientas del cálculo diferencial
en espacios de Banach de dimensión
infinita**

Pelayo del Valle Calzada

Dirigido por

Mar Jiménez Sevilla



Resumen

El trabajo comienza con un análisis del concepto de diferencial en espacios de Banach, para a continuación estudiar sus principales propiedades.

Más adelante se incluye una introducción a la teoría de integración de Bochner, relacionada con el concepto de diferencial por el Teorema fundamental del cálculo.

Por último, se estudia el concepto de polinomio en espacios de Banach y sus propiedades, para aplicarlo a continuación al análisis de los polinomios de Taylor, series de potencias y funciones analíticas.

Abstract

This work starts analyzing the concept of derivative in Banach spaces, to then study its main properties.

An introduction to Bochner's integration theory is included below, related to the concept of derivative by the Fundamental Theorem of calculus.

Finally, the concept of polynomial in Banach spaces and their properties is studied, to be applied later to the analysis of Taylor polynomials, power series and analytical functions.

Índice general

Introducción	1
Notación	3
1. Concepto de diferencial	5
1.1. Diferenciales de orden superior	12
2. Propiedades y reglas de cálculo	19
2.1. Linealidad	19
2.2. Aplicaciones afines	19
2.3. Aplicaciones multilineales	20
2.4. Aplicaciones definidas en suma directa de espacios	21
2.5. Aplicaciones con imagen en suma directa de espacios	23
2.6. Composición de aplicaciones diferenciables	24
2.7. Diferenciabilidad en subespacios afines	25
2.8. Convergencia uniforme y diferenciabilidad	28
2.9. Concepto de difeomorfismo y solución de ecuaciones	30
3. Integración en espacios de Banach	37
3.1. Algunas propiedades de la integral de Bochner	42
3.2. Integración de funciones definidas en un intervalo real	45
3.3. Teorema fundamental del cálculo en espacios de Banach	47
4. Polinomios y propiedades básicas	49
5. Fórmula de Taylor	65

6. Series de potencias	73
7. Funciones analíticas	79
7.1. Funciones analíticas en espacios de Banach complejos	81
7.2. Analiticidad de series de potencias	86
7.3. Funciones analíticas en espacios de Banach reales	88
A. Varios conceptos necesarios	91
B. Aplicaciones multilineales	93
C. Isomorfismos canónicos	102
D. Complejificaciones	103
E. Diferenciabilidad de aplicaciones entre espacios afines	109
F. Teorema del punto fijo de Banach	111
Referencias	113

Introducción

El cálculo diferencial es la parte análisis matemático que estudia las tasas de cambio instantáneas de funciones.

Tiene posiblemente sus orígenes en la Antigua Grecia, con el uso del método exhaustivo o por agotamiento, fundamentalmente empleado para hallar áreas y volúmenes. Fue introducido por Eudoxo, y desarrollado ampliamente por Arquímedes, entre otros. Las ideas subyacentes a este método, como el concepto de cantidad infinitesimal o una aproximación al concepto actual de límite, inspiraron el avance hacia el cálculo diferencial moderno.

Sin embargo no fue hasta finales del siglo XVII cuando Leibnitz y Newton, de forma independiente, sentaron las bases del cálculo diferencial. Hasta entonces, problemas de carácter físico como el cálculo de la velocidad instantánea de un objeto, o de tipo geométrico como encontrar la tangente a una curva, solo disponían de métodos especiales. Algunas ideas y ejemplos importantes fueron desarrollados por Fermat, Descartes o Barrow entre otros.

Newton y Leibniz aunaron el estudio de estos problemas mediante el concepto de derivada, y el teorema fundamental del cálculo, que enlaza la teoría diferencial e integral. No obstante, en sus trabajos Newton y Leibnitz hacen uso del concepto de infinitesimal (fluxiones en la teoría de Newton o diferenciales en la de Leibnitz). Estas eran cantidades positivas “infinitamente pequeñas”: menores que cualquier número positivo pero no nulas. Este concepto intuitivo funcionaba en la práctica, pues la teoría de Newton y Leibnitz era correcta, pero carecía de rigor matemático.

Hicieron falta casi 200 años para que los fundamentos del cálculo diferencial fueran justificados de manera lógica y rigurosa, gracias a los trabajos de Cauchy, Riemann o Weierstrass entre otros, donde fue esencial el concepto de límite, que formalizaba las ideas intuitivas de las cantidades infinitesimales. También en este período se generaliza el estudio de la diferenciación, que hasta entonces estaba limitado a funciones en la recta real, a funciones en el espacio euclídeo y el plano complejo.

Ya en el siglo XX, Banach, junto con Hahn y Helly, introdujo el concepto de espacio de Banach. Este respondía a la pretensión de generalizar los conceptos del análisis a espacios

lo más generales posibles, es decir, espacios abstractos en los que imponer las mínimas hipótesis necesarias para poder tratar los conceptos del análisis.

Con esta misma filosofía, surge la generalización del cálculo diferencial a los espacios de Banach de dimensión arbitraria. La pretensión de este trabajo es la exposición de los conceptos fundamentales de esta teoría.

Como bibliografía fundamental para los resultados que se muestran se ha tomado [2], de resultados más básicos e intuitivos y [7], donde se hace especial incapié a la teoría de polinomios en espacios de Banach arbitrarios. [5] y [9] han sido especialmente importantes en la sección 3, mientras que [10] ha sido de grán interes en la sección 7.

Notación

$\mathbb{N}_0$:	conjunto de los números naturales unión $\{0\}$.
$\mathbb{K}$:	denotará indistintamente tanto al conjunto de los números reales como al de los complejos.
$ A $:	cardinal del conjunto A .
$\text{span}\{A\}$:	espacios vectorial generado por el conjunto A .
$V^\perp$:	subespacio vectorial ortogonal a V .
$X \oplus Y$:	suma directa de los espacios X, Y .
X^n :	$X \oplus \cdots \oplus X$.
${}^n x$:	$(x, \dots, x)$
$\overline{A}$:	adherencia del conjunto A .
$\ \cdot\ _X$:	norma del espacio X .
$\text{dist}(a, b)$:	distancia entre a y b , en un espacio métrico.
$B(a, r)$:	en un espacio métrico X , $\{y \in X : \text{dist}(x, a) \leq r\}$.
$U(a, r)$:	en un espacio métrico X , $\{y \in X : \text{dist}(x, a) < r\}$.
B_X :	bola unidad cerrada del espacio X .
S_X :	esfera unidad del espacio X .
$\mathcal{L}(X, Y)$:	espacio de aplicaciones lineales y continuas de X en Y .
X^* :	espacio dual de X .

Capítulo 1

Concepto de diferencial

Recordemos el concepto esencial del cálculo diferencial clásico, la derivada de una función real de variable real. Dado un abierto $C \subset \mathbb{R}$, una función $f : C \rightarrow \mathbb{R}$ se dice que es derivable en $a \in C$ si existe un número real $f'(a)$ tal que

$$f'(a) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a+t) - f(a)}{t}. \quad (1.1)$$

Este concepto se generaliza de forma inmediata a funciones complejas de variable compleja, pues lo empleado en (1.1) está bien definido de igual forma para números complejos. De hecho se puede realizar la siguiente generalización.

Definición 1.0.1. Sea $C \subset \mathbb{K}$ abierto, Y espacio normado sobre $\mathbb{K}$. Una función $f : C \rightarrow Y$ se dice que es derivable en $a \in C$ si existe $f'(a) \in Y$ tal que

$$f'(a) = \lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ t \in \mathbb{K}}} \frac{f(a+t) - f(a)}{t}.$$

Sin embargo, si pretendemos generalizar la derivada a funciones de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^m$, $n, m \in \mathbb{N}$, hemos de encontrar una reformulación de la derivada (no podemos dividir por $h \in \mathbb{R}^n$). Observando que (1.1) es equivalente a

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{|f(a+h) - f(a) - f'(a)h|}{|h|} = 0$$

podemos intuir la siguiente generalización: Dado un abierto $C \subset \mathbb{R}^n$, una función $f : C \rightarrow \mathbb{R}^m$ se dice que es diferenciable en $a \in C$ si existe una aplicación lineal

$L \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ tal que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|f(a+h) - f(a) - L(h)\|}{\|h\|} = 0.$$

Por tanto la extensión de esta definición a un espacio normado general resulta natural.

Definición 1.0.2. (*Diferencial de Fréchet*) Sean X, Y espacios normados, $A \subset X$ abierto, $f : A \rightarrow Y$ y $a \in A$. Decimos que f es Fréchet diferenciable en a si existe una aplicación lineal continua $L \in \mathcal{L}(X, Y)$ tal que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|f(a+h) - f(a) - L(h)\|_Y}{\|h\|_X} = 0. \quad (1.2)$$

En ese caso, llamaremos al operador L diferencial Fréchet de f en a y lo denotaremos por $Df(a)$.

Dado $h \in X$, podemos deducir de la definición anterior una fórmula para $Df(a)(h)$.

Sea $t \in \mathbb{K}$. De (1.2) podemos deducir

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\|f(a+th) - f(a) - Df(a)(th)\|_Y}{|t|} = \lim_{t \rightarrow 0} \left\| \frac{1}{t} (f(a+th) - f(a)) - Df(a)(h) \right\|_Y = 0.$$

Por tanto tenemos que

$$Df(a)(h) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a+th) - f(a)}{t} = \left. \frac{d}{dt} f(a+th) \right|_{t=0}, \quad (1.3)$$

siguiendo la definición de derivada 1.0.1.

La existencia de $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (f(a+th) - f(a))$ para cada $h \in X$ como aplicación lineal y continua de X en Y es una condición más débil que la propia existencia de diferencial Fréchet, pero suficiente para muchos objetivos, como veremos. Esto motiva la siguiente definición.

Definición 1.0.3. (*Diferencial de Gâteaux*) Sean X, Y espacios normados, $A \subset X$ abierto, $f : A \rightarrow Y$ y $a \in A$. Decimos que f es Gâteaux diferenciable en a si existe $L \in \mathcal{L}(X, Y)$ tal que

$$\lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ t \in \mathbb{K}}} \left\| \frac{1}{t} (f(a+th) - f(a)) - L(h) \right\|_Y = 0 \quad \text{para todo } h \in X. \quad (1.4)$$

o equivalentemente,

$$L(h) = \lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ t \in \mathbb{K}}} \frac{f(a + th) - f(a)}{t}$$

En ese caso, llamaremos al operador L diferencial Gâteaux de f en a y lo denotaremos por $\delta f(a)$.

Obsérvese que la existencia de diferencial de Fréchet es equivalente a pedir que el límite en (1.4) sea uniforme para todo $h \in B_X$ o para todo $h \in S_X$. Para comprobarlo basta tener en cuenta las definiciones de límite y límite uniforme.

Realicemos algunas observaciones que se deducen de las anteriores definiciones.

Observaciones 1.0.4.

- (a) Asumimos que A es abierto, o que x es un punto interior de A , para asegurar la unicidad de la diferencial.

Demostración. En ese caso podemos tomar $U(a, r) \subset A$ para $r > 0$ suficientemente pequeño. Si existieran dos diferenciales (Fréchet o Gâteaux) de f en a , ϕ y ψ , se verificaría, en notación de Landau,

$$f(a + th) - f(a) - \phi(th) = o(t) \quad \text{y} \quad f(a + th) - f(a) - \psi(th) = o(t) \quad (1.5)$$

para $h \in X$ y $t \in \mathbb{R}$ tal que $th \in U(0, r)$. Ahora, restando las expresiones en (1.5)

$$\phi(th) - \psi(th) = o(t) \Rightarrow \phi(h) - \psi(h) = o(1)$$

luego deducimos que $\phi(h) = \psi(h)$, y dado que $h \in X$ es arbitrario, $\phi = \psi$.

□

- (b) Por la reflexión previa a la Definición 1.0.3, si f es diferenciable Fréchet en a es diferenciable Gâteaux en a y $Df(a) = \delta f(a)$.

- (c) Si f es diferenciable Fréchet en a entonces es continua en a .

Demostración. Basta observar que en ese caso $f(a + h) - f(a) = Df(a)(h) + o(\|h\|)$ y $Df(a)$ es continua. □

- (d) Las definiciones 1.0.2 y 1.0.3 dependen de las normas en X e Y , $\|\cdot\|_X$ y $\|\cdot\|_Y$. Sin embargo, f es diferenciable empleando $\|\cdot\|_X$ y $\|\cdot\|_Y$ si y solo si lo es empleando cualesquiera normas equivalentes en X e Y , siendo en todo caso la diferencial la misma.

En particular, si X, Y son finito dimensionales, la diferenciabilidad no depende de las normas (todas son equivalentes), y la hipótesis de continuidad de la diferencial es redundante (toda aplicación lineal es continua).

- (e) La definición de diferencial Fréchet es una generalización de la definición de derivada 1.0.1. De hecho se deduce de las definiciones que f es derivable en a si y solo si es Fréchet diferenciable, siendo en ese caso $Df(a)(h) = f'(a)h$.

Con las hipótesis de la Definición 1.0.2 (1.0.3), si f es Fréchet (Gâteaux) diferenciable en cada punto del abierto A , decimos que f es Fréchet (Gâteaux) diferenciable en A . En este caso podemos definir la aplicación

$$\begin{aligned} Df : A &\longrightarrow \mathcal{L}(X, Y) \\ a &\mapsto Df(a) \end{aligned}$$

(análogo para δf), y podemos plantearnos de nuevo su diferenciabilidad. Esto motivará la definición de diferencial de Fréchet (Gâteaux) de orden superior. Antes de definirla formalmente planteemos algunas propiedades fundamentales de las diferenciales de Fréchet y Gâteaux que necesitaremos en el desarrollo.

Proposición 1.0.5. (*Diferencial de aplicaciones afines*) Sean X, Y espacios normados. Sea $L \in \mathcal{L}(X, Y)$, $b \in Y$ y $f : X \longrightarrow Y$ una aplicación afín dada por $f(x) = L(x) + b$. Entonces f es diferenciable Fréchet en X y $Df(x) = L$ para todo $x \in X$.

Demostración. De nuevo, basta acudir a la Definición 1.0.2 y comprobar que L cumple la igualdad (1.2). □

Proposición 1.0.6. (*Linealidad de la diferencial*) Sean X, Y espacios normados, $A \subset X$ abierto. Sean $f, g : A \longrightarrow Y$ Fréchet (Gâteaux) diferenciables en $a \in A$, y $c \in \mathbb{K}$. Entonces $f + g$ y cf son Fréchet (Gâteaux) diferenciables y $D(f + g)(a) = Df(a) + Dg(a)$, $D(cf)(a) = cDf(a)$ (análogo para el caso Gâteaux).

Demostración. Basta apoyarse en la Definición 1.0.2 y comprobar que para $f+g$, tomando $L := Df(a) + Dg(a)$ se cumple la igualdad en (1.2), y para cf , tomando $L := cDf(a)$ también se cumple (1.4) (análogo para el caso Gâteaux tomando la Definición 1.0.3 y la igualdad en (1.4)). $\square$

Teorema 1.0.7. (Regla de la cadena) Sean X, Y, Z espacios normados, y $U \subset X$, $V \subset Y$ abiertos. Supongamos que $g : U \rightarrow Y$ es Fréchet diferenciable en $a \in U$, con $g(U) \subset V$, y $f : V \rightarrow Z$ es Fréchet diferenciable en $g(a)$. Entonces $f \circ g : U \rightarrow Z$ es Fréchet diferenciable en a y

$$D(f \circ g)(a) = Df(g(a)) \circ Dg(a).$$

Demostración. Sean $y = g(a + h)$ y $b = g(a)$. Por hipótesis sabemos que

$$y - b = Dg(a)(h) + s(h),$$

con $s(h) = o(\|h\|)$. También por hipótesis sabemos que

$$f(y) = f(b) + Df(b)(y - b) + r(y - b),$$

con $r(y - b) = o(\|y - b\|)$. Combinando ambas hipótesis y teniendo en cuenta la linealidad de $Df(b)$, tenemos que

$$(f \circ g)(a + h) - (f \circ g)(a) - Dg(b) \circ Df(a)h = Df(b)(s(h)) + r(y - b).$$

Por tanto si probamos que la parte derecha de la igualdad es una $o(\|h\|)$ habremos concluido.

Primero, $\|Df(b)(s(h))\| \leq \|Df(b)\| \|s(h)\|$ muestra que $Df(b)(s(h)) = o(\|h\|)$, al ser $s(h) = o(\|h\|)$.

Por otro lado, de nuevo por ser $s(h) = o(\|h\|)$, dado $\varepsilon > 0$ podemos tomar $\|h\|$ suficientemente pequeño de manera que $\|y - b\| = \|Dg(a)(h) - s(h)\| \leq (\|Df(a)\| + \varepsilon) \|h\|$, luego $\|y - b\| / \|h\| \leq \|Df(a)\| + \varepsilon$ acotado. Además la continuidad de f en a implica que $y \rightarrow b$ si $h \rightarrow 0$. En consecuencia

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{r(y - b)}{\|h\|} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{r(y - b)}{\|y - b\|} \frac{\|y - b\|}{\|h\|} = 0,$$

luego $r(y - b) = o(\|h\|)$. $\square$

Para la diferenciabilidad Gâteaux tenemos la siguiente versión de la regla de la cadena.

Teorema 1.0.8. Sean X, Y, Z espacios normados, y $U \subset X$, $V \subset Y$ abiertos. Supongamos que $g : U \rightarrow Y$ es Gâteaux diferenciable en a , con $g(U) \subset V$, y que $f : V \rightarrow Z$ es Fréchet diferenciable en $g(a)$, o bien f es Gâteaux diferenciable en $g(a)$ y f es Lipschitz en V . Entonces $f \circ g : U \rightarrow Z$ es Gâteaux diferenciable en a y

$$\delta(f \circ g)(a) = \delta f(g(a)) \circ \delta g(a).$$

Demostración. Supongamos que f es Fréchet diferenciable en $g(a)$. Obsérvese que por definición si g es Gâteaux diferenciable en a , dado $h \in X$, $s(t) := g(a + th)$ es derivable en 0, con $s'(0) = \delta g(a)(h)$. Luego por la regla de la cadena, $f \circ s$ es Fréchet diferenciable, con $D(f \circ s)(0) = Df(s(0)) \circ Ds(0) = \delta f(g(a)) \circ \delta g(a)(h)$. Por último basta observar que

$$\begin{aligned} \left\| \frac{(f \circ g)(a + th) - (f \circ g)(a)}{t} - \delta f(g(a)) \circ \delta g(a)(h) \right\| \\ = \left\| \frac{f(s(t)) - f(s(0))}{t} - D(f \circ s)(0) \right\|, \end{aligned}$$

que tiende a 0 cuando $t \rightarrow 0$.

Supongamos ahora que f es Gâteaux diferenciable en $g(a)$ y L -Lipschitz en V . Dado $h \in X$,

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(g(a + th)) - f(g(a))}{t} &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(g(a + th)) - f(g(a) + t\delta g(a)(h))}{t} \\ &\quad + \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(g(a) + t\delta g(a)(h)) - f(g(a))}{t}. \end{aligned}$$

El segundo sumando tiende a $\delta f(g(a))(\delta g(a)(h))$ y el primer sumando tiende a 0 pues

$$\left\| \frac{f(g(a + th)) - f(g(a) + t\delta g(a)(h))}{t} \right\| \leq L \left\| \frac{g(a + th) - g(a) + t\delta g(a)(h)}{t} \right\| \xrightarrow{t \rightarrow 0} 0,$$

de donde se deduce el enunciado. $\square$

Obsérvese que si f es Gâteaux diferenciable en $g(a)$, aún si g es Fréchet diferenciable en a $f \circ g$ no es necesariamente Gâteaux diferenciable en a , y si lo es no tiene porqué cumplirse la regla de la cadena. Como ejemplo, consideremos $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$, $g(x) = (x, x^2)$ y $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida como $f(x, y) = 0$ si $y \neq x^2$ y $f(x, x^2) = \operatorname{sgn} x$. g es Fréchet diferenciable en 0 y f es Gâteaux diferenciable en $(0, 0)$. Para ver esto último obsérvese que

para cualquier $h \in \mathbb{R}^2$, $f(th) = 0$ si t es suficientemente pequeño^I, con lo que $\delta f(0,0) = 0$. Sin embargo $f \circ g(x) = \text{sign}x$ no es Gâteaux diferenciable.

De manera análoga, si $f(x, x^2) = x$, $f \circ g(x) = x$ es Gâteaux diferenciable, pero no se cumple la regla de la cadena, $\delta(f \circ g) \neq 0$.

Proposición 1.0.9. Sean X, Y espacios normados, $A \subset X$ abierto, $f : A \rightarrow Y$ y $C \subset A$ convexo. Supongamos que f es Gâteaux diferenciable en cada punto de C y que $\sup_{x \in C} \|\delta f(x)\| = K < \infty$. Entonces f es K -Lipschitz en C .

Demostración. En el caso en que X e Y son espacios complejos, podemos considerar sus versiones reales $X_{\mathbb{R}}$ e $Y_{\mathbb{R}}$, y la diferencial Gâteaux de la aplicación f considerada como una aplicación de $X_{\mathbb{R}}$ a $Y_{\mathbb{R}}$. Este cambio de estructura no tiene impacto en la diferenciabilidad: $\delta_{\mathbb{R}}f(x) \in \mathcal{L}(X_{\mathbb{R}}; Y_{\mathbb{R}})$ y $\delta_{\mathbb{R}}f(x) = \delta f(x)$. Así, podemos asumir sin pérdida de generalidad que los espacios X e Y son reales.

Fijemos $a, b \in C$, tomemos $h = b - a$, y definamos $g : [0, 1] \rightarrow Y$ como $g(t) = f(a + th)$. Sea $\phi \in S_{Y^*}$ tal que $\|f(b) - f(a)\| = \phi(f(b) - f(a))$. Tenemos que $(\phi \circ g)'(t) = \phi(\delta f(a + th)(h))$ para $t \in [0, 1]$. Así, por el Teorema del valor medio para funciones reales de variable real, existe $\xi \in (0, 1)$ tal que $\phi \circ g(1) - \phi \circ g(0) = (\phi \circ g)'(\xi)$. Por lo tanto

$$\|f(b) - f(a)\| = \phi(g(1) - g(0)) = (\phi \circ g)'(\xi) \leq \|\phi\| \|\delta f(a + \xi h)\| \|h\| \leq K \|b - a\|.$$

□

Como consecuencia directa de este resultado, deducimos los siguientes corolarios

Corolario 1.0.10. Sean X, Y espacios normados, $A \subset X$ abierto y $f : A \rightarrow Y$ una aplicación Gâteaux diferenciable tal que $\delta f : A \rightarrow \mathcal{L}(X, Y)$ es continua en $a \in A$. Entonces f es Fréchet diferenciable en a .

Demostración. Definamos la aplicación $g : U \rightarrow Y$ como $g(y) = f(y) - \delta f(a)[y - a]$. Usando la Proposición 1.0.5, $\delta g(y) = \delta f(y) - \delta f(a)$.

Dado $\varepsilon > 0$ por hipótesis existe $\eta > 0$ tal que $\|\delta f(y) - \delta f(a)\| = \|\delta g(y)\| < \varepsilon$ para todo $y \in U$ tal que $\|y - a\| < \eta$. Entonces, por la Proposición 1.0.9, g es ε -Lipschitz en $U(x, \eta)$. Así, para un $h \in U(0, \eta)$ arbitrario

$$\|f(x + h) - f(x) - \delta f(x)[h]\| = \|g(x + h) - g(x)\| \leq \varepsilon \|h\| = o(\|h\|).$$

□

^I $y = x^2$ es estrictamente convexa, luego la recta th , $t \in \mathbb{R}$, solo puede cortar a la gráfica a lo sumo en dos puntos (siendo uno el origen).

Corolario 1.0.11. Sean X, Y espacios normados, $A \subset X$ abierto conexo y $f : A \rightarrow Y$ una aplicación Fréchet diferenciable en A . si $Df(x) = 0$ para todo $x \in A$, entonces f es constante.

Demostración. Sea $a \in A$ y denotemos por B el conjunto de todos los puntos $b \in A$ tales que $f(b) = f(a)$. Por ser f continua, B es un conjunto cerrado en A . Por otro lado dado $u \in B$ podemos considerar $r > 0$ tal que $U(u, r) \subset A$. Por la Proposición 1.0.9, como $U(u, r)$ es convexo y $Df(x) = 0$ para todo $x \in U(u, r)$, deducimos que f es constante en $U(u, r)$. Por tanto concluimos que B también es abierto en A . Como A es conexo, necesariamente $B = A$, lo que concluye la prueba. $\square$

1.1. Diferenciales de orden superior

Definición 1.1.1. (*Diferencial de Fréchet segunda*) Sean X, Y espacios normados, $A \subset X$ abierto, $f : A \rightarrow Y$ y $a \in A$. Decimos que f es dos veces Fréchet diferenciable en a si existe $Df(x)$ para x en un entorno de a y la aplicación Df es Fréchet diferenciable en a . En ese caso definimos la segunda diferencial Fréchet de f en a como $D(Df)(a) \in \mathcal{L}(X, \mathcal{L}(X, Y))$ y la denotamos por $D^2f(a)$.

$D^2f(a) = D(Df)(a) \in \mathcal{L}(X, \mathcal{L}(X, Y))$ a cada $h \in X$ le hace corresponder $D^2f(a)(h) \in \mathcal{L}(X, Y)$, siendo la imagen de $k \in X$ bajo esta última aplicación $(D^2f(a)(h))(k) \in Y$. Por el Teorema C.0.2, $\mathcal{L}(X, \mathcal{L}(X, Y))$ es isomorfo a $\mathcal{L}({}^2X, Y)$, y con esta identificación $D^2f(a) \in \mathcal{L}({}^2X, Y)$ es una aplicación bilineal tal que $(h, k) \mapsto D^2f(a)(h, k) := (D^2f(a)(h))(k)$. Véase el Apéndice B para más información sobre aplicaciones multilineales.

Inductivamente definimos la n -ésima diferencial Fréchet de f en a .

Definición 1.1.2. (*Diferencial de Fréchet n -ésima*) Con las hipótesis de la definición anterior y dado $n \in \mathbb{N}$, decimos que f es n veces Fréchet diferenciable en a si existe $D^{n-1}f(x) \in \mathcal{L}({}^{n-1}X, Y)$ para x en un entorno de a y la aplicación $D^{n-1}f$ es Fréchet diferenciable en a . En ese caso definimos la n -ésima diferencial de Fréchet de f en a como $D(D^{n-1}f)(a) \in \mathcal{L}(X, \mathcal{L}({}^{n-1}X, Y))$ y la denotamos por $D^n f(a)$. Usando de nuevo la identificación en C.0.2 podemos considerar $D^n f(a) \in \mathcal{L}({}^nX, Y)$.

Si f es n veces Fréchet diferenciable en cada punto de A , decimos que es n veces Fréchet diferenciable en A . En ese caso, si la aplicación Df^n es continua en A decimos

que f es de clase C^n . Decimos que f es de clase C^∞ si es de clase C^n para todo $n \in \mathbb{N}$. Por convenio tomaremos $D^0 f(a) = f$, y diremos que f es de clase C^0 si f es continua.

Denotaremos por $C^n(A, Y)$ al conjunto de las funciones de clase C^n de A en Y , $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$.

Observaremos a continuación algunos resultados que se derivan de esta definición.

Observaciones 1.1.3.

- (a) f es n veces Fréchet diferenciable en a si y solo si f es i veces Fréchet diferenciable en un entorno de a y $D^i f$ es $n-i$ veces diferenciable en a , $i \in \{1, \dots, n\}$, y en ese caso $D^n f(a) = D^{n-i}(D^i f)(a)$.

Demostración. Para probarlo podemos aplicar inducción sobre n . Para $n = 2$, la propiedad se cumple por definición. Basta observar que se cumple para $n > 2$ si se cumple para $n - 1$:

Si f es n veces Fréchet diferenciable en a , entonces por definición es $n-1$ veces Fréchet diferenciable en un entorno de a , $U(a, r)$. Aplicando la hipótesis de inducción, $D^i f$ será $n-1-i$ veces diferenciable en $U(a, r)$, y $D^{n-1} f(x) = D^{n-1-i}(D^i f)(x)$. Por tanto, como existe $D(D^{n-1} f)(a) = D^n f(a)$, existirá $D(D^{n-1-i}(D^i f))(a) = D^{n-i}(D^i f)(a)$ y serán iguales. La implicación contraria se demuestra de forma análoga. $\square$

- (b) Podemos deducir una fórmula similar a (1.3) para $D^n f(a)(h_1, \dots, h_n) \in Y$:

$$D^n f(a)(h_1, \dots, h_n) = \frac{d}{dt_n} \dots \frac{d}{dt_1} f \left(a + \sum_{i=1}^n t_i h_i \right) \Big|_{t_1=\dots=t_n=0}$$

Demostración. Para $n = 1$ basta observar (1.3).

Para $n = 2$, $D^2 f(a) = D(Df)(a) \in \mathcal{L}(X, \mathcal{L}(X, Y))$. Aplicando la fórmula (1.3) a Df se tiene

$$D^2 f(a)(h) = \frac{d}{dt} Df(a + th) \Big|_{t=0}.$$

Luego

$$D^2 f(a)(h, k) = \frac{d}{dt} Df(a + th) \Big|_{t=0} (k) = {}^{\Pi} \frac{d}{dt} Df(a + th)(k) \Big|_{t=0}.$$

Ahora, de nuevo por (1.3),

$$Df(a + th)(k) = \frac{d}{ds} f(a + th + sk) \Big|_{s=0}.$$

$${}^{\Pi} F(k) := \frac{d}{dt} Df(a + th) \Big|_{t=0} (k). \quad \left\| \left(\frac{(Df(a+th) - Df(a))}{t} - F \right) (k) \right\| \leq \left\| \frac{(Df(a+th) - Df(a))}{t} - F \right\| \|k\| \longrightarrow 0.$$

Por tanto

$$D^2f(a)(h, k) = \left. \frac{d}{dt} \frac{d}{ds} f(a + th + sk) \right|_{t=s=0}.$$

El caso general se comprueba inductivamente observando que

$$\begin{aligned} D^n f(a)(h_1)(h_2, \dots, h_n) &= D(D^{n-1}f)(a)(h_1)(h_2, \dots, h_n) \\ &= \left. \frac{d}{dt} D^{n-1}f(a + th_1)(h_2, \dots, h_n) \right|_{t=0} \end{aligned}$$

□

La n -ésima diferencial de Fréchet no solo es multilineal, sino que además es simétrica, $D^n f(a) \in \mathcal{L}^s({}^n X, Y)$.

Teorema 1.1.4. Sean X, Y espacios normados, $A \subset X$ abierto, $f : A \rightarrow Y$, $a \in A$ y $n \in \mathbb{N}$. Supongamos que f es n veces Fréchet diferenciable en a . Entonces $D^n f(a) \in \mathcal{L}^s({}^n X, Y)$.

Demostración. Podemos suponer sin pérdida de generalidad que $a = 0$. En otro caso basta analizar $g(x) := f(a + x)$, con $D^n g(0) = D^n f(a)$.

Realizaremos la prueba por inducción sobre n . Asumamos primero $n = 2$. Dado que Df es diferenciable en 0, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$\|Df(x) - Df(0) - D(Df)(0)\| < \varepsilon \|x\| \quad \text{para } x \in U(0, 2\delta).$$

Para $v \in U(0, \delta)$, definimos $g_v(u) : U(0, \delta) \rightarrow Y$ por

$$g_v(u) = f(u + v) - f(u) - f(v) + f(0) - (D(Df)(0)(v))(u). \quad (1.6)$$

Teniendo en cuenta que $D(Df)(0) \in \mathcal{L}({}^2 X, Y)$, y por tanto $D(Df)(0)(v) \in \mathcal{L}(X, Y)$, se tiene

$$\begin{aligned} Dg_v(u) &= Df(u + v) - Df(u) - D(Df)(0)(v) \\ &= (Df(u + v) - Df(0) - D(Df)(0)(u + v)) \\ &\quad - (Df(u) - Df(0) - D(Df)(0)(u)) \end{aligned}$$

Por tanto, por (1.6), se tiene

$$\|Dg_v(u)\| \leq \varepsilon \|u + v\| + \varepsilon \|u\| \leq 2\varepsilon(\|u\| + \|v\|).$$

Dado $u \in U(0, \delta)$, aplicando la Proposición 1.0.9 en $B(0, \|u\|)$ y dado que $g_v(0) = 0$ concluimos que

$$\|g_v(u)\| \leq 2\varepsilon(\|u\| + \|v\|) \|u\| \leq 2\varepsilon(\|u\| + \|v\|).$$

Se sigue que dados $w, z \in X$, $(w, x) \neq (0, 0)$, se tiene

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\|f(tw + tz) - f(tw) - f(tz) + f(0) - D^2f(0)(tw, tz)\|}{(\|tw\| + \|tz\|)^2} = 0,$$

luego

$$D^2f(0)(w, z) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(tw + tz) - f(tw) - f(tz) + f(0) - D^2f(0)(tw, tz)}{t^2}.$$

Como esta última expresión no varía intercambiando w y z , concluimos que $D^2f(0)$ es simétrica.

Completaremos la prueba por inducción sobre n . Supongamos $n > 2$ y $D^{n-1}f(x) \in \mathcal{L}^s(n-1X, Y)$ para x en un entorno de 0. Obsérvese que cualquier permutación puede ser expresada como composición de trasposiciones adjacentes, por lo que es suficiente probar que dados $u_1, \dots, u_n \in X$, y $p \in \{1, \dots, n-1\}$ se tiene

$$D^n f(0)(u_1, \dots, u_n) = D^n f(0)(u_1, \dots, u_{p-1}, u_{p+1}, u_p, \dots, u_n).$$

Si $p = 1$, basta observar que $D^n f(0) = D^2(D^{n-2}f)(0)$, y podemos aplicar el caso $n = 2$ para $D^{n-2}f$:

$$(D^2(D^{n-2}f)(0)(u_1, u_2))(u_3, \dots, u_n) = (D^2(D^{n-2}f)(0)(u_2, u_1))(u_3, \dots, u_n).$$

Si $p > 1$, recordemos que por hipótesis de inducción $D^{n-1}f(x) \in \mathcal{L}^s(n-1X, Y)$ para x en un entorno de 0. Por tanto $D^n f(0)(u_1) = D(D^{n-1}f)(0)(u_1) \in \mathcal{L}^s(n-1X, Y)$, y

$$D^n f(0)(u_1, \dots, u_n) = D(D^{n-1}f)(0)(u_1)(u_2, \dots, u_n)$$

es una función simétrica de $u_2, \dots, u_n$. □

Observación 1.1.5. (*Derivabilidad y diferenciabilidad Fréchet*) Sea $A \subset \mathbb{K}$ abierto, $a \in A$, Y espacio normado y $f : A \rightarrow Y$. La Definición 1.0.1 puede generalizarse a derivadas superiores.

Dado $n \in \mathbb{N}$, se dice que f es n veces derivable en a si $f^{(n-1)}(x) \in Y$ está definido en un entorno de a y la aplicación $f^{(n-1)}$ es derivable en a . En ese caso se define la derivada n -ésima de f en a como $\left(f^{(n-1)}\right)'(a)$ y se denota por $f^{(n)}(a)$.

Para funciones con dominio en $\mathbb{K}$ podemos estudiar por tanto su derivabilidad y su diferenciabilidad Fréchet. Sin embargo, en realidad estos conceptos son equivalentes: f es n veces derivable en a si y solo si f es n veces Fréchet diferenciable en a y además, en ese caso,

$$f^{(n)}(a) = Df^n(a)(1, \dots, 1).$$

Demostración. Comprobemos esta afirmación por inducción sobre n . Si $n = 1$ basta recurrir a la Observación 1.0.4 (e).

Supongamos la afirmación cierta para $n - 1$. f es n veces derivable en a con derivada $f^{(n)}(a)$ si y solo si

$$\begin{aligned} & \left\| f^{(n-1)}(a+h) - f^{(n-1)}(a) - f^{(n)}(a)h \right\| \\ &= \left\| Df^{n-1}(a+h)(1, \dots, 1) - Df^{n-1}(a)(1, \dots, 1) - f^{(n)}(a)h \right\| = o(|h|), \quad h \rightarrow 0 \end{aligned}$$

donde hemos empleado la hipótesis de inducción.

Observemos ahora que dada una aplicación $T \in \mathcal{L}^s(n-1\mathbb{K}, Y)$,

$$\begin{aligned} \|T\|_{\mathcal{L}^s(n-1X, Y)} &= \sup_{|x_i|=1, i=1, \dots, n-1} \|T(x_1, \dots, x_{n-1})\|_Y \\ &= \sup_{|x_i|=1, i=1, \dots, n-1} |x_1 \dots x_{n-1}| \|T(1, \dots, 1)\|_Y = \|T(1, \dots, 1)\|_Y \end{aligned}$$

Definamos ahora la aplicación multilinear continua $F : X \rightarrow \mathcal{L}^s(n-1\mathbb{K}, Y)$, con $F(h)$ tal que $(h_1, \dots, h_{n-1}) \mapsto F(h)(h_1, \dots, h_{n-1}) := f^{(n)}(a)hh_1 \dots h_{n-1} \in Y$. Entonces por la reflexión anterior

$$\begin{aligned} & \left\| Df^{n-1}(a+h) - Df^{n-1}(a) - F(h) \right\|_{\mathcal{L}^s(n-1X, Y)} \\ &= \left\| Df^{n-1}(a+h)(1, \dots, 1) - Df^{n-1}(a)(1, \dots, 1) - f^{(n)}(a)h \right\|_Y. \end{aligned}$$

De lo anterior se deduce que existe $f^{(n)}(a)$ si y solo si existe $D^n f(a) = F$, y además en ese caso $f^{(n)}(a) = D^n f(a)(1, \dots, 1)$. $\square$

Inspirados en el Teorema 1.1.4, definiremos la diferencial de Gâteaux n -ésima de forma que también sea simétrica.

Definición 1.1.6. (*Diferencial de Gâteaux n -ésima*) Sean X, Y espacios normados, $A \subset X$ abierto, $f : A \rightarrow Y$, $a \in A$ y $n \in \mathbb{N}$. Decimos que f es n veces Gâteaux diferenciable en a si existe $\delta^{n-1}f(x) \in \mathcal{L}^s(n-1X, Y)$ para x en un entorno de a , la aplicación $\delta^{n-1}f$ es Gâteaux diferenciable en a y además $\delta(\delta^{n-1}f)(a) \in \mathcal{L}^s(nX, Y)$ (es simétrica). En este caso decimos que $\delta(\delta^{n-1}f)(a)$ es la diferencial de Gâteaux n -ésima y la denotamos por $\delta^n f(a)$.

Observaciones 1.1.7.

(a) Si f es n veces diferenciable Fréchet en a entonces es n veces diferenciable Gâteaux en a y $D^n f(a) = \delta^n f(a)$.

Demostración. Para $n = 1$ véase la Observación 1.0.4 (b). Para el caso general basta aplicar inducción empleando que por definición $D^n f(a) = D(D^{n-1}f)(a)$ y $\delta^n f(a) = \delta(\delta^{n-1}f)(a)$. $\square$

(b) La fórmula deducida en Observaciones 1.1.3 (b) es válida si f es n veces diferenciable Gâteaux en a :

$$\delta^n f(a)(h_1, \dots, h_n) = \frac{d}{dt_n} \dots \frac{d}{dt_1} f \left(a + \sum_{i=1}^n t_i h_i \right) \Big|_{t_1=\dots=t_n=0}.$$

Demostración. Basta observar que por definición

$$\begin{aligned} \delta f(a)(h_1, \dots, h_n) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\delta^{n-1} f(a + th_1) - \delta^{n-1} f(a)}{t} (h_2, \dots, h_n) \\ &= \frac{d}{dt} \delta^{n-1} f(a + th_1)(h_2, \dots, h_n) \Big|_{t=0} \end{aligned}$$

y aplicar inducción. $\square$

Por definición, para una función f n veces diferenciable en a se tiene, para $h \in X$

$$\delta^n f(a)(h) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} [\delta^{n-1} f(a + th) + \delta^{n-1} f(a)] \in \mathcal{L}^{(n-1)X, Y}, \quad (1.7)$$

en la norma $\|\cdot\|_{\mathcal{L}^{(n-1)X, Y}}$.

Sin embargo, muchos autores definen $\delta^n f(a)$ exigiendo la condición más débil de convergencia puntual. Es decir, definen

$$\delta^n f(a)(h)(h_1, \dots, h_{n-1}) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} [\delta^{n-1} f(a + th)(h_1, \dots, h_{n-1}) + \delta^{n-1} f(a)(h_1, \dots, h_{n-1})], \quad (1.8)$$

en la norma $\|\cdot\|_Y$

Obsérvese que ambas definiciones de diferencial Gâteaux k -ésima no son equivalentes, aunque están relacionadas^{III}.

Esto motiva la siguiente definición.

Definición 1.1.8. Sean X, Y espacios normados, $A \subset X$ abierto, $f : A \rightarrow Y$, $a \in A$ y $n \in \mathbb{N}$.

Decimos que f es dos veces σ -Gâteaux diferenciable en a si existe $\delta f(x)$ para x en un entorno de a y el límite

$$\sigma^2 f(a)(h_1, h_2) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\delta f(a + th_1)(h_2) - \delta f(a)(h_2)}{t}$$

existe para todo $h_1, h_2 \in X$ y es una aplicación n -multilineal continua y simétrica.

Decimos que f es n veces σ -Gâteaux diferenciable en a si existe $\sigma^{n-1} f(x) \in \mathcal{L}(^{n-1}X, Y)$ para x en un entorno de a y el límite

$$\sigma^n f(a)(h_1, \dots, h_n) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sigma^{n-1} f(a + th_1)(h_2, \dots, h_n) - \sigma^{n-1} f(a)(h_2, \dots, h_n)}{t}$$

existe para todo $h_1, \dots, h_n \in X$ y es una aplicación n -multilineal continua y simétrica.

Decimos que una f es de clase G^n en A si existe la σ -diferencial de Gâteaux n -ésima para todo punto de A . Decimos que f es de clase G^∞ si f es de clase G^n para todo $n \in \mathbb{N}$.

Si bien la Definición 1.1.6 resulta más natural, veremos que esta segunda definición será de gran utilidad.

^{III}Si la expresión en (1.7) está bien definida, entonces la expresión en (1.8) existe y coincide con la primera.

Capítulo 2

Propiedades y reglas de cálculo

Establecidos los conceptos de diferencial de Fréchet y Gâteaux y sus diferenciales de orden superior, estudiaremos ahora sus principales propiedades.

2.1. Linealidad

La Proposición 1.0.6 puede generalizarse de manera inmediata.

Proposición 2.1.1. (*Linealidad de las diferenciales de orden superior*) Sean X, Y espacios normados, $A \subset X$ abierto. Sean $f, g : A \rightarrow Y$ n veces Fréchet (Gâteaux) diferenciables en $a \in A$, y $c \in \mathbb{K}$. Entonces $f + g$ y cf son n veces Fréchet (Gâteaux) diferenciables y $D^k(f + g)(a) = D^k f(a) + D^k g(a)$, $D^k(cf)(a) = cD^k f(a)$ (análogo para el caso Gâteaux). En concreto, $C^n(A, Y)$ es un subespacio lineal de $C(A, Y)$.

Demostración. Se deduce por inducción a partir del Teorema 1.0.6, empleando que por definición $D^n f(a) = D(D^{n-1}f)(a)$ (análogo para el caso Gâteaux). $\square$

2.2. Aplicaciones afines

Como hemos visto en la Proposición 1.0.5, una aplicación afín $f(x) = L(x) + b$ es diferenciable Fréchet en X , con diferencial constante para todo $x \in X$ $Df(x) = L$. Dado que la diferencial de una aplicación constante es 0, f es de clase C^∞ , y $D^n f(x) = 0$ para $n \geq 2$.

2.3. Aplicaciones multilineales

Véase el Apéndice B para una introducción a las aplicaciones multilineales. La diferenciabilidad de estas aplicaciones viene descrita por el siguiente resultado.

Teorema 2.3.1. *Sean $X_1, \dots, X_n$, e Y espacios normados sobre $\mathbb{K}$ y sea $M \in \mathcal{L}(X_1, \dots, X_n; Y)$. Escribamos $X = X_1 \oplus \dots \oplus X_n$. Entonces $M \in C^\infty(X; Y)$. Para $k \leq n$ y para todo $x = (x_1, \dots, x_n) \in X$ tenemos*

$$D^k M(x) \left((h_1^1, \dots, h_n^1), \dots, (h_1^k, \dots, h_n^k) \right) = \sum_{\pi} M(z_1^\pi, \dots, z_n^\pi),$$

donde la suma se hace sobre todas las aplicaciones inyectivas $\pi : \{1, \dots, k\} \longrightarrow \{1, \dots, n\}$ y donde

$$z_j^\pi = \begin{cases} h_j^l & \text{si } j = \pi(l) \text{ para algún } l \in \{1, \dots, k\}, \\ x_j & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

En particular $D^n M$ es constante, luego para $k > n$ $D^k M = 0$.

Demostración. Fijemos $x = (x_1, \dots, x_n) \in X$. Para $h = (h_1, \dots, h_n) \in X$ tenemos, por la Observación B.0.2, que

$$\begin{aligned} & \left\| M(x+h) - M(x) - \sum_{j=1}^n M(x_1, \dots, x_{j-1}, h_j, x_{j+1}, \dots, x_n) \right\| \\ & \leq \sum_{\substack{A \subset \{1, \dots, n\} \\ |A| \geq 2}} \left\| M \left((\chi_A(j)h_j + (1 - \chi_A(j))x_j)_{j=1}^n \right) \right\| \\ & \leq \sum_{\substack{A \subset \{1, \dots, n\} \\ |A| \geq 2}} \|M\| \|h\|^{|A|} \|x\|^{n-|A|} = o(\|h\|), \quad h \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Como $h \mapsto \sum_{j=1}^n M(x_1, \dots, x_{j-1}, h_j, x_{j+1}, \dots, x_n) \in \mathcal{L}(X; Y)$, se deduce que M es Fréchet diferenciable en x y la fórmula para la primera derivada es cierta.

Procedamos por inducción. Sea $1 \leq k \leq n$ y supongamos que M es k -veces diferenciable Fréchet en X y la fórmula para $D^k M$ es cierta. Fijemos una aplicación inyectiva $\pi : \{1, \dots, k\} \longrightarrow \{1, \dots, n\}$. Sea $p = n - k$ y $j_1 < \dots < j_p$ la enumeración de $\{1, \dots, n\} \setminus \pi(\{1, \dots, k\})$. Sea $M_\pi(x_{j_1}, \dots, x_{j_p})(h^1, \dots, h^k) := M(z_1^\pi, \dots, z_n^\pi)$. Entonces, por construcción, $M_\pi(x_{j_1}, \dots, x_{j_p}) \in \mathcal{L}({}^k X; Y)$ y además $M_\pi \in \mathcal{L}(X_{j_1}, \dots, X_{j_p}; \mathcal{L}({}^k X; Y))$.

Por la primera parte de la prueba sabemos que M_π es diferenciable Fréchet en $X_{j_1} \oplus \dots \oplus X_{j_p}$. Ahora, si $T_\pi : X \longrightarrow X_{j_1} \oplus \dots \oplus X_{j_p}$ es la proyección canónica (que es lineal), entonces $M_\pi \circ T_\pi$ es Fréchet diferenciable en X por la regla de la cadena. Como, por

hipótesis de inducción, $D^k M = \sum_{\pi} M_{\pi} \circ T_{\pi}$, se deduce que M es $(k+1)$ -veces diferenciable en X .

También podemos probar que la fórmula es igualmente válida para $D^{k+1}M$. Emplearemos que M_{π} es una aplicación multilineal diferenciable Fréchet y que se cumple la fórmula para $k = 1$.

$$\begin{aligned}
 D^{k+1}M(x)(h, h^1, \dots, h^k) &= D\left(D^k M\right)(x)(h)(h^1, \dots, h^k) \\
 &= D\left(\sum_{\pi} M_{\pi} \circ T_{\pi}\right)(x)(h)(h^1, \dots, h^k) \\
 &= \sum_{\pi} (DM_{\pi})(T_{\pi}(x)) \circ T_{\pi}(h)(h^1, \dots, h^k) \\
 &= \sum_{\pi} (DM_{\pi})(x_{j_1}, \dots, x_{j_p})(h_{j_1}, \dots, h_{j_p})(h^1, \dots, h^k) \\
 &= \sum_{\pi} \sum_{s=1}^p M_{\pi}(x_{j_1}, \dots, h_{j_s}, \dots, x_{j_p})(h_i, \dots, h_n) \\
 &= \sum_{\alpha} M(z_1^{\alpha}, \dots, z_n^{\alpha}),
 \end{aligned}$$

tomando la última suma sobre todas las aplicaciones intectivas $\alpha : \{1, \dots, k+1\} \rightarrow \{1, \dots, n\}$.

Cuando $k = n$ obtenemos así

$$D^n M(x)[(h_1^1, \dots, h_n^1), \dots, (h_1^n, \dots, h_n^n)] = \sum_{\pi \in S_n} M(h_{\pi(1)}^1, \dots, h_{\pi(n)}^n),$$

donde S_n es el conjunto de todas las permutaciones de $\{1, \dots, n\}$. Se sigue que $x \mapsto D^n M(x)$ es una aplicación constante, y por tanto $D^{n+1}M(x) = 0$ para todo $x \in X$. $\square$

2.4. Aplicaciones definidas en suma directa de espacios

Sean $X_1, \dots, X_n, Y$ espacios normados, $X = X_1 \oplus \dots \oplus X_n$, $A \subset X$ abierto, $a = (a_1, \dots, a_n) \in A$ y $f : A \rightarrow Y$.

Si consideramos I_r la aplicación tal que $x_r \in X_r \mapsto (a_1, \dots, a_{r-1}, x_r, a_{r+1}, \dots, a_n) \in X$, se tiene

$$\begin{aligned}
 f \circ I_r : X_r &\longrightarrow Y \\
 x_r &\longmapsto f(a_1, \dots, a_{r-1}, x_r, a_{r+1}, \dots, a_n).
 \end{aligned}$$

Definición 2.4.1. Decimos que f es Fréchet diferenciable en a respecto a la r -ésima variable si $f \circ I_r$ es Fréchet diferenciable en a_r . En ese caso llamamos diferencial Fréchet parcial de f en a respecto a la r -ésima variable a $D(f \circ I_r)(a_r) \in \mathcal{L}(X_r, Y)$ y la denotamos por $D_r f(a)$.

Teorema 2.4.2. Si f es Fréchet diferenciable en a , entonces cada una de sus derivadas parciales $D_r f(a)$, $r \in \{1, \dots, n\}$, existe. Además se tiene

$$Df(a)(h) = \sum_{r=1}^n D_r f(a)(h_r) \quad \text{para cada } h = (h_1, \dots, h_n) \in X.$$

Demostración. Si $i_r : X_r \rightarrow X$ es la inyección $x_r \mapsto (0, \dots, 0, x_r, 0, \dots, 0)$, se tiene que $I_r(x_r) = a + i_r(x_r - a_r)$. Por tanto I_r es una aplicación afín con $DI_r(a_r) = i_r$, siguiendo la Proposición 1.0.5. Por tanto, por la regla de la cadena

$$D_r f(a) = D(f \circ I_r)(a_r) = Df(a) \circ i_r \quad (2.1)$$

$D_r f(a)$ está bien definida.

Consideremos ahora $p_r : X \rightarrow X_r$ la proyección tal que $(x_1, \dots, x_n) \mapsto x_r$. Entonces $f = f \circ \sum_{r=1}^n i_r \circ p_r$. Luego por la regla de la cadena y (2.1) tenemos

$$Df(a) = \sum_{r=1}^n Df(a) \circ i_r \circ p_r = \sum_{r=1}^n D_r f(a) \circ p_r,$$

y por tanto

$$Df(a)(h) = \sum_{r=1}^n D_r f(a)(h_r).$$

□

Analicemos ahora el recíproco.

Teorema 2.4.3. Supongamos que $D_r f$, $r \in \{1, \dots, n\}$, existen en un entorno de a y son continuas en a . Entonces f es Fréchet diferenciable en a .

Demostración. Consideremos X con la norma del máximo. Definamos

$$g(x) = f(x) - f(a) - \sum_{r=1}^n D_r f(a)(x_r - a_r).$$

Entonces $D_r g(x) = D_r f(x) - D_r f(a)$. Como las derivadas parciales son continuas, dado $\varepsilon > 0$ existe $s > 0$ tal que $\|D_r g(x)\| < \varepsilon$, $r \in \{1, \dots, n\}$, si $x \in U(a, s)$. Aplicando

la Proposición 1.0.9 se tiene

$$\begin{aligned} \|g(x)\| &= \|g(x) - g(a)\| \leq \sum_{r=1}^n \|g(x_1, \dots, x_k, a_{k+1}, \dots, a_n) - g(x_1, \dots, x_{k-1}, a_k, \dots, a_n)\| \\ &< \sum_{r=1}^n \varepsilon \|x_r - a_r\| \leq n\varepsilon \|x - a\|. \end{aligned}$$

Como ε es arbitrario, deducimos que

$$f(x) = f(a) + \sum_{r=1}^n D_r f(a)(x_r - a_r) + o(\|x - a\|),$$

lo que prueba el enunciado. $\square$

El razonamiento de esta sección no es extrapolable a la diferenciabilidad Gâteaux, pues no podemos relacionar la diferenciabilidad de f y $f \circ I_r$ mediante la regla de la cadena, véase la observación siguiente al Teorema 1.0.8.

2.5. Aplicaciones con imagen en suma directa de espacios

Sean $X, Y_1, \dots, Y_n$ espacios normados, $Y = Y_1 \oplus \dots \oplus Y_n$, $A \subset X$ abierto, $a \in A$ y $f : A \rightarrow Y$.

Consideremos la proyección $p_r : Y \rightarrow Y_r$ tal que $(y_1, \dots, y_n) \mapsto y_r$, y la inyección $i_r : Y_r \rightarrow Y$ tal que $x_r \mapsto (0, \dots, 0, x_r, 0, \dots, 0)$.

La aplicación f puede ser escrita como $x \mapsto (f_1(x), \dots, f_n(x))$ donde $f_r(x)$ es la r -ésima componente de $f(x)$. Se tiene

$$f_r = p_r \circ f, f = \sum_{r=1}^n i_r \circ f_r. \quad (2.2)$$

Podemos deducir entonces el siguiente resultado.

Teorema 2.5.1. *La aplicación f es Fréchet (Gâteaux) diferenciable en a si y solo si $f_1, \dots, f_n$ también lo son. En ese caso $Df(a) = (Df_1(a), \dots, Df_n(a))$, es decir:*

$$Df(a) = \sum_{r=1}^n i_r \circ Df_r(a)$$

(análogo para el caso Gâteaux).

Demostración. Es consecuencia de la regla de la cadena (Teorema 1.0.7 para el caso Fréchet y Teorema 1.0.8 para el caso Gâteaux) y la ecuación (2.2). $\square$

2.6. Composición de aplicaciones diferenciables

Sean X, Y, Z espacios normados, $U \subset X$, $V \subset Y$ abiertos y $a \in U$. Supongamos además que tenemos $g : U \rightarrow Y$ con $g(U) \subset V$, y $f : V \rightarrow Z$.

Sabemos que la composición de aplicaciones Fréchet diferenciables es Fréchet diferenciable por el Teorema 1.0.7. Para la composición de funciones más regulares tenemos el siguiente resultado.

Proposición 2.6.1. *Supongamos que g es n veces Fréchet diferenciable en a y f es n veces Fréchet diferenciable en $g(a)$. Entonces $f \circ g : U \rightarrow Z$ es n veces Fréchet diferenciable en a . Además si f y g son de clase C^n , $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, también $f \circ g$ lo es.*

Demostración. Realizaremos la prueba por inducción sobre n . Para $n = 1$, el enunciado se sigue de la Proposición 1.0.7. Supongamos $n > 1$ y que el resultado es cierto para $n - 1$. Veamos que $D(f \circ g) = Df(g(\cdot)) \circ Dg(\cdot)$ es $n-1$ veces diferenciable en a . Por hipótesis, Df es $n-1$ veces diferenciable en $g(a)$ y g es $n-1$ veces diferenciable en a , luego por hipótesis de inducción $Df(g(\cdot))$ es $n-1$ veces diferenciable en a . También sabemos que Dg es $n-1$ veces diferenciable en a .

Consideremos la aplicación

$$\begin{aligned} w : \mathcal{L}(Y, Z) \oplus \mathcal{L}(X, Y) &\longrightarrow \mathcal{L}(X, Z) \\ (A, B) &\longmapsto A \circ B, \end{aligned}$$

bilineal y continua, luego por el Teorema 2.3.1 de clase C^∞ . Consideremos también

$$\begin{aligned} v : U &\longrightarrow \mathcal{L}(Y, Z) \oplus \mathcal{L}(X, Y) \\ x &\longmapsto (Df(g(x)), Dg(x)), \end{aligned}$$

$n-1$ veces diferenciable en a . Entonces, aplicando hipótesis de inducción, $w \circ v = Df(g(\cdot)) \circ Dg(\cdot)$ es $n-1$ veces diferenciable en a .

La segunda parte del enunciado se prueba de forma análoga. $\square$

Teniendo en cuenta este resultado, podemos deducir en el Teorema 2.5.1 que f es k veces diferenciable en a (de clase C^k) si y solo si $f_1, \dots, f_n$ también lo son.

2.7. Diferenciabilidad en subespacios afines

Sean X, Y espacios normados, $A \subset X$ abierto y $f : A \rightarrow Y$. Sea $W = v + Z$ un subespacio afín de X , donde $v \in X$ y $Z \subset X$ es un subespacio de X . Consideremos f restringida al espacio afín W .

Podemos extender el estudio de la diferenciabilidad a este caso de forma natural.

Definición 2.7.1. Decimos que $f|_{A \cap W}$ es Fréchet diferenciable en $a \in A \cap W$ si existe $L \in \mathcal{L}(Z, Y)$ tal que

$$f(a + h) - f(a) - L(h) = o(\|h\|), \quad (2.3)$$

para todo $h \in Z$ con $\|h\|$ suficientemente pequeña. En ese caso llamamos a L diferencial Fréchet y la denotamos por $Df(a)$

Obsérvese que si $\|h\|$ es suficientemente pequeño, $a + h \in A \cap W$ (si $a \in W$, entonces $W = a + Z$).

La generalización de las diferenciales Fréchet superiores y los correspondientes conceptos de Gâteaux se realiza también de forma natural. En el Apéndice E se realiza un estudio general para aplicaciones entre espacios afines, y se prueba que el análisis de la diferenciabilidad puede reducirse al tratamiento de aplicaciones entre espacios normados.

De la definición podemos deducir fácilmente el siguiente resultado.

Proposición 2.7.2. Si f es n veces Fréchet (Gâteaux) diferenciable en $x \in W \cap A$, $n \in \mathbb{K}$. Entonces $f|_{W \cap A}$ también lo es y

$$D^n(f|_{W \cap A})(x) = (D^n f(x))|_{Z^n} \in \mathcal{L}(Z, Y)$$

(análogo para caso Gâteaux y σ -Gâteaux).

Demostración. Para $k = 1$, observemos que si existe $L \in \mathcal{L}(X, Y)$ tal que la ecuación en (2.3) se cumple $\forall h \in X$, en concreto $L \in \mathcal{L}(Z, Y)$ y (2.3) se cumplirá $\forall h \in Z$. La prueba se completa por inducción, teniendo en cuenta que $D^k(f|_{W \cap A})(x) = D(D^{k-1}(f|_{W \cap A}))(x)$.

El razonamiento para el caso Gâteaux es análogo. $\square$

También serán de gran utilidad en la sección 7.1 los siguientes resultados.

Teorema 2.7.3. Sea X un espacio de Banach, Y un espacio normado, $U \subset X$ abierto, $f : U \rightarrow Y$, y sea $k \in \mathbb{N}$ tal que $\dim(X) \geq k + 1$. Supongamos además que $\phi \circ f$ es medible Baire para cada $\phi \in Y^*$. Entonces f es de clase G^k en U si y solo si para cada subespacio afín $(k + 1)$ -dimensional $E \subset X$ la aplicación $f|_{E \cap U}$ es G^k -diferenciable.

Demostración. Véase Definición A.0.2 para definición de función Baire medible.

$\Rightarrow$ Es evidente.

$\Leftarrow$ Probaremos esta implicación por inducción sobre k . Debido a que la prueba para el caso $k = 1$ es casi idéntica al paso de inducción, solamente veremos el paso de inducción de $k - 1$ a k .

Fijemos $x \in U$ y sea $M : X^k \rightarrow Y$ definida como

$$M(h_1, \dots, h_k) = \sigma^k(f|_{(x+E) \cap U})(x)[h_1, \dots, h_k], \text{ donde } E = \text{span}\{h_j\}_{j=1}^k.$$

Obsérvese que está bien definido, pues $x \in U \cap (x + E)$ y $h_j \in E$ para $j = 1, \dots, k$. Además por definición de k -ésima diferencial Gâteaux $M \in L^s(kX; Y)$ (véase Apéndice B para definición de $L^s(kX; Y)$).

Ahora, veamos que M es continua. Emplearemos la siguiente notación. Para $x \in U$, $h_1, \dots, h_n \in X$

$$\Delta^1 f(x; h) = f(x + h) - f(x),$$

y por inducción

$$\Delta^n f(x; h_1, \dots, h_n) = \Delta^{n-1} f(x + h_1; h_2, \dots, h_n) - \Delta^{n-1} f(x; h_2, \dots, h_n).$$

Por la Observación 1.1.7 (b)

$$\begin{aligned} M(h_1, \dots, h_k) &= \sigma^k(f|_{(x+E) \cap U})(x)(h_1, \dots, h_k) \\ &= \frac{d}{dt_k} \dots \frac{d}{dt_1} f \left(x + \sum_{i=1}^k t_i h_i \right) \Big|_{t_1=\dots=t_n=0} \\ &= \lim_{t_k \rightarrow 0} \left(\dots \left(\lim_{t_1 \rightarrow 0} \frac{1}{t_1 \dots t_k} \Delta^k f(x; t_1 h_1, \dots, t_k h_k) \right) \right). \end{aligned} \tag{2.4}$$

Tomemos $\{t_n\}_{n=1}^\infty$ sucesión de reales tal que $t_n \rightarrow 0$ y $B(x, kt_1) \subset U$. Entonces es posible definir para $h_j \in B_X$, $j = 1, \dots, k$

$$f_{n_1, \dots, n_k}(h_1, \dots, h_k) = \frac{1}{t_{n_1} \dots t_{n_k}} \Delta^k f(x; t_{n_1} h_1, \dots, t_{n_k} h_k).$$

Con ello, podemos expresar (2.4) como

$$M(h_1, \dots, h_k) = \lim_{n_1 \rightarrow \infty} \left(\dots \left(\lim_{n_k \rightarrow \infty} f_{n_1, \dots, n_k}(h_1, \dots, h_k) \right) \right)$$

para $h_j \in B_X$, $j = 1, \dots, k$.

Tomemos cualquier $\phi \in Y^*$. Las funciones $\phi \circ f_{n_1, \dots, n_k} : B_X^k \rightarrow \mathbb{K}$ son Baire medibles separadamente en cada variable. Podemos deducirlo teniendo en cuenta que, por hipótesis, $\phi \circ f$ es Baire medible y además $f_{n_1, \dots, n_k}(h_1, \dots, h_n)$ puede expresarse como una constante multiplicada por una suma de f evaluada en combinaciones lineales de x y $h_1, \dots, h_k$.

Así, como el límite de funciones medibles es medible, $\phi \circ M|_{B_X^k}$ es Baire medible separadamente en cada variable. Análogamente se obtiene que $\phi \circ M|_{nB_X^k}$ es Baire medible en cada variable para cualquier $n \in \mathbb{N}$ y en consecuencia $\phi \circ M$ es Baire medible en cada variable. Por el Teorema B.0.3 podemos concluir que M es continua.

Escojamos ahora $h_1, \dots, h_k \in X$ y tomemos $E = \text{span}\{h_j\}_{j=1}^k$.

Por hipótesis de inducción f es de clase G^{k-1} en U . Se tiene, por la Proposición 2.7.2

$$\sigma^{k-1}f(y)[h_2, \dots, h_k] = \sigma^{k-1}(f|_{(x+E)})(y)[h_2, \dots, h_k]$$

para todo $y \in (x + E) \cap U$.

Por tanto

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sigma^{k-1}f(x + th_1)(h_2, \dots, h_k) - \sigma^{k-1}f(x)(h_2, \dots, h_k)}{t} \\ = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sigma^{k-1}(f|_{(x+E)})(x + th_1)(h_2, \dots, h_k) - \sigma^{k-1}(f|_{(x+E)})(x)(h_2, \dots, h_k)}{t} \\ = \sigma^k(f|_{(x+E) \cap U})(x)[h_1, \dots, h_k] \\ = M(h_1, \dots, h_k), \end{aligned}$$

Como hemos probado que $M \in \mathcal{L}^s({}^kX, Y)$, f es k -veces diferenciable Gâteaux en x , con $\sigma^k f(x) = M$.

□

Corolario 2.7.4. Sea X un espacio de Banach, Y un espacio vectorial normado, $U \subset X$ abierto, y $f : U \rightarrow Y$. Supongamos además que $\phi \circ f$ es medible Baire para cada $\phi \in Y^*$. Entonces f es G^∞ -diferenciable en U si y sólo si para cada subespacio $Z \subset X$ finito-dimensional la aplicación $f|_{Z \cap U}$ es G^∞ -diferenciable.

Demostración. Si X es de dimensión finita, entonces es evidente. En cualquier otro caso basta aplicar el Teorema 2.7.3.

□

2.8. Convergencia uniforme y diferenciabilidad

Teorema 2.8.1. *Sean X , espacio normado, Y espacio de Banach. Sea $A \subset X$ abierto conexo y $f_n : A \rightarrow Y$ sucesión de funciones k veces Fréchet diferenciables. Supongamos que:*

- *existen $x_0, \dots, x_{k-1} \in A$ tales que $\{D^j f_n(x_j)\}_{n=1}^\infty$ es convergente para $j \in \{0, \dots, k-1\}$.*
- *$\{D^k f_n\}_{n=1}^\infty$ converge uniformemente en cada subconjunto acotado y convexo de A .*

Entonces existe una función $f : A \rightarrow Y$ k veces diferenciable tal que $D^j f_n \rightarrow D^j f$ uniformemente en cada subconjunto acotado y convexo para $j \in \{0, \dots, k\}$.

Demostración. Realizaremos la prueba por inducción sobre k . Estudiemos pues el caso $k = 1$.

- Sea $B \subset A$ un subconjunto acotado y convexo. Asumamos que $Df_n \rightarrow g$ uniformemente en B y definamos $R := \text{diam } B$. Veamos que si existe $a \in B$ tal que $\{f_n(a)\}_{n=1}^\infty$ es convergente, entonces f_n es uniformemente convergente en B .

Para ello, como Y es de Banach, bastará probar que f_n es uniformemente de Cauchy en B .

Por hipótesis, dado $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $n, m \geq n_0$

$$\|f_n(a) - f_m(a)\| \leq \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{y} \quad \|Df_n(y) - Df_m(y)\| \leq \frac{\varepsilon}{2R} \quad \text{para cada } y \in B.$$

Por lo segundo, gracias a la Proposición 1.0.9 sabemos que las aplicaciones $f_n - f_m$ son $\frac{\varepsilon}{2R}$ -Lipschitz en B . Entonces para cada $x \in B$ y $n, m \geq n_0$

$$\begin{aligned} \|f_n(x) - f_m(x)\| &\leq \|f_n(x) - f_m(x) - (f_n(a) - f_m(a))\| + \|f_n(a) - f_m(a)\| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2R} \|x - a\| + \frac{\varepsilon}{2} \leq \varepsilon. \end{aligned}$$

de donde se deduce lo enunciado.

- Veamos que podemos definir $f : A \rightarrow Y$ tal que $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$.

Para ello bastará con ver que el conjunto de puntos en los que f_n converge, que denotaremos por C , es abierto y cerrado (como por hipótesis es no vacío y A es conexo, $C = A$).

C es abierto pues por la reflexión anterior, si f_n converge puntualmente en $a \in A$, también lo hará en un entorno convexo.

Comprobemos que C es cerrado. Sea $\{x_m\}_{m=1}^\infty \subset C$, $x_m \rightarrow y$. $x_m \in C$, luego $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x_m) = k_m$.

Teniendo en cuenta que

$$\|k_p - k_q\| \leq \|k_p - f_n(x_p)\| + \|k_q - f_n(x_q)\| + \|f_n(x_p) - f_n(x_q)\|,$$

deducimos que $\{k_m\}_{m=1}^\infty$ es de Cauchy en Y Banach. Por tanto $k_m \rightarrow k \in Y$.

Ahora

$$\|f_n(y) - k\| \leq \|f_n(y) - f_n(x_m)\| + \|f_n(x_m) - k_m\| + \|k_m - k\|,$$

por lo que $f_n(y) \rightarrow k$. En consecuencia C también es cerrado y $\{f_n(x)\}_{n=1}^\infty$ es convergente para todo $x \in A$.

- Por último, dado $B \subset A$ acotado y convexo, veamos que f es Fréchet diferenciable en B y $Df = g$.

Sea $a \in B$. Por el primer apartado, $f_n - f_m$ es $\frac{\varepsilon}{2R}$ -Lipschitz en B . En consecuencia tenemos que para $x \in B$

$$\|f_m(x) - f_n(x) - (f_m(a) - f_n(a))\| \leq \varepsilon \|x - a\|.$$

Por tanto tomando $m \rightarrow \infty$,

$$\|f(x) - f(a) - (f_n(x) - f_n(a))\| \leq \varepsilon \|x - a\|.$$

Por otro lado, f_n es Fréchet diferenciable en a , luego existe $r > 0$ tal que si $\|x - a\| < r$,

$$\|f_n(x) - f_n(a) - Df_n(a)(x - a)\| \leq \varepsilon \|x - a\|.$$

Por tanto si $\|x - a\| < r$

$$\begin{aligned} \|f(x) - f(a) - g(a)(x - a)\| &\leq \|f(x) - f(a) - (f_n(x) - f_n(a))\| \\ &\quad + \|f_n(x) - f_n(a) - Df_n(a)(x - a)\| \\ &\quad + \|Df_n(a)(x - a) - g(a)(x - a)\| \leq \varepsilon \|x - a\|. \end{aligned}$$

Por tanto existe $Df(a) = g(a)$. Como $a \in B$ es arbitrario, el enunciado queda probado.

Sea $k > 1$ y supongamos el enunciado cierto para $k - 1$.

Por hipótesis $D^k f_n = D(D^{k-1} f_n)$ converge uniformemente en cada subconjunto convexo acotado y existe x_{k-1} tal que $\{D^{k-1} f_n(x_{k-1})\}_{n=1}^{\infty}$ es convergente. Por el caso $k = 1$ $\{D^{k-1} f_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge uniformemente en cada subconjunto convexo acotado. Por tanto las hipótesis para $k - 1$ se cumplen y podemos deducir que existe una $f : A \rightarrow Y$ tal que $D^j f_n \rightarrow D^j f$ uniformemente en cada subconjunto acotado y convexo para $j \in \{0, \dots, k - 1\}$. Como para $j = k$ se cumple por hipótesis, la tesis queda verificada.

□

2.9. Concepto de difeomorfismo y solución de ecuaciones

El objetivo de esta sección es generalizar el teorema clásico de la función implícita a funciones entre espacios de Banach. Como corolario también generalizaremos el teorema de la función inversa, para lo que trataremos el concepto de difeomorfismo.

Para tratar el teorema de la función implícita necesitaremos el siguiente lema.

Lema 2.9.1. *Sean X, Y espacios de Banach isomorfos, y sea $\mathcal{U} \subset \mathcal{L}(X, Y)$ el conjunto de todos los isomorfismos. Entonces $\mathcal{U}$ es abierto y $\Phi : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{L}(X, Y)$, $\Phi(T) = T^{-1}$ es una aplicación de clase C^∞ .*

Demostración. Emplearemos la notación TS para referirnos a $T \circ S$ y T^n , $n \in \mathbb{N}_0$, para referirnos a $T \circ \dots \circ T$.

Veamos que $\mathcal{U}$ es abierto. Sea $T \in \mathcal{U}$, y $S \in \mathcal{L}(X, Y)$ con $\|S\| < \|T^{-1}\|^{-1}$. Entonces $T + S$ es invertible y

$$(T + S)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (T^{-1}S)^n T^{-1}. \quad (2.5)$$

que está bien definido, pues $\|T^{-1}S\| < 1$, por lo que la serie es absolutamente convergente y por tanto, como $\mathcal{L}(X, Y)$ es Banach, convergente. Dado que $S \in \mathcal{L}(X, Y)$ es arbitrario, se deduce que $\mathcal{U}$ es abierto.

Para probar (2.5) basta componer $T + S$ con la expresión de $(T + S)^{-1}$ a izquierda y derecha y comprobar que coincide con la identidad. Otra deducción más intuitiva de la expresión de $(T + S)^{-1}$ es la siguiente.

$T + S = T(Id_X + T^{-1}S)$. Si denotamos $v := -T^{-1}S \in \mathcal{L}(X, X)$, basta probar que $Id_X - v$ es invertible si $\|v\| \leq \|T^{-1}\| \|S\| < 1$.

Para $x \in \mathbb{R}, |x| < 1$, se tiene $(1 - x)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$. Esta fórmula sugiere considerar la sucesión $X_n = Id_X + v + \cdots + v^n, n \in \mathbb{N}$. Esta es una sucesión de Cauchy en $\mathcal{L}(X, X)$, pues

$$\|X_{p+q} - X_p\| = \|v^{p+q} + \cdots + v^{p+1}\| \leq \|v\|^{p+q} + \cdots + \|v\|^{p+1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0,$$

pues $\|v\| < 1$.

En consecuencia existe $X = \lim_{n \rightarrow \infty} X_n$ y

$$(Id_X - v)X = \lim_{n \rightarrow \infty} (Id_X - v)X_n = \lim_{n \rightarrow \infty} Id_X - v^{n+1} = Id_X,$$

siendo $X(Id_X - v) = Id_X$ de forma análoga.

Por tanto, como habíamos de probar, $(T + S)$ es invertible y

$$(T + S)^{-1} = (Id_X - v)^{-1}T^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (-T^{-1}S)^n T^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (T^{-1}S)^n T^{-1}.$$

Probemos ahora que Φ es Fréchet diferenciable. Sea $T \in \mathcal{U}$, si $\|S\| < \|T^{-1}\|^{-1}$ entonces se tiene

$$\left\| \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n (T^{-1}S)^n T^{-1} \right\| \leq \|T^{-1}\| \sum_{n=2}^{\infty} \|T^{-1}\|^n \|S\|^n \leq \frac{\|T^{-1}\|^3 \|S\|^2}{1 - \|T^{-1}\| \|S\|} = o(\|S\|).$$

Por tanto

$$(T + S)^{-1} - T^{-1} = -T^{-1}ST^{-1} + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n (T^{-1}S)^n T^{-1} = -T^{-1}ST^{-1} + o(\|S\|),$$

lo que implica que Φ es Fréchet diferenciable en T y

$$D\Phi(T)(S) = -T^{-1}ST^{-1}, D\Phi(T) \in \mathcal{L}(\mathcal{L}(X, Y), \mathcal{L}(Y, X)).$$

Para ver que Φ es de clase C^∞ consideremos la aplicación

$$\begin{aligned} \Psi : \mathcal{L}(Y, X) \oplus \mathcal{L}(Y, X) &\longrightarrow \mathcal{L}(\mathcal{L}(X, Y), \mathcal{L}(Y, X)) \\ (P, Q) &\longmapsto \Psi(P, Q)(S) = -P \circ S \circ Q, \end{aligned}$$

que es bilinear y continua, pues $\|\Psi(P, Q)\| \leq \|P\| \|Q\|$.

Entonces se tiene

$$D\Phi(T) = \Psi(T^{-1}, T^{-1}) = \Psi(\Phi(T), \Phi(T)).$$

Esta fórmula muestra que Φ es de clase C^1 . De hecho por la regla de la cadena, si Φ es de clase C^k también lo es $D\Phi$, luego Φ sería de clase C^{k+1} , lo que prueba por inducción el enunciado. $\square$

Teorema 2.9.2. (Teorema de la función implícita) Sea X un espacio normado, Y y Z espacios de Banach, $G \subset X \oplus Y$ un abierto y $f \in C^1(G, Z)$. Supongamos que existe $(x_0, y_0) \in G$ tal que $D_2f(x_0, y_0)$ es un isomorfismo de Y en Z . Entonces existen entornos abiertos $U \subset X$ de x_0 , $V \subset Y$ de y_0 tales que existe una única aplicación $u : U \rightarrow V$ satisfaciendo $f(x, u(x)) = f(x_0, y_0)$ para todo $x \in U$. Además $u \in C^1(U, Y)$, y

$$Du(x) = -(D_2f(x, u(x)))^{-1} \circ D_1f(x, u(x)) \quad (2.6)$$

para todo $x \in U$. Si además f es de clase C^k para algún $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, entonces $u \in C^k(U, Y)$.

Demostración. Podemos suponer $f(x_0, y_0) = 0$, pues en otro caso basta considerar $\bar{f}(x, y) = f(x, y) - f(x_0, y_0)$.

Transformaremos la búsqueda de la función u en un problema de punto fijo, para así, aplicando el Teorema del punto fijo de Banach (véase el Apéndice F), demostrar la existencia de u .

Denotemos por $S = D_2f(x_0, y_0) \in \mathcal{L}(Y, Z)$ y definamos $g : G \rightarrow Y$ por

$$g(x, y) = y - S^{-1} \circ f(x, y).$$

Obsérvese que $f(x, y) = 0$ si y solo si $g(x, y) = y$, y que $D_2g(x_0, y_0) = 0$.

Dado que f y g son de clase C^1 , existe un entorno U de x_0 y $r > 0$ tales que $U \oplus B(y_0, r) \subset G$ y para $x \in U$, $y \in B(y_0, r)$ se cumple: $\|D_2g(x, y)\| \leq \frac{1}{2}$, $\|g(x, y_0) - y_0\| < \frac{r}{2}$ y $D_2f(x, y)$ es un isomorfismo. Esto último gracias al Lema 2.9.1.

Dado que $\|D_2g(x, y)\| \leq \frac{1}{2}$, por la Proposición 1.0.9, para cada $x \in U$ la aplicación $y \mapsto g(x, y)$ es $\frac{1}{2}$ -Lipschitz en $B(y_0, r)$. Por tanto para $x \in U$, $y \in B(y_0, r)$ se tiene

$$\|g(x, y) - y_0\| \leq \|g(x, y) - g(x, y_0)\| + \|g(x, y_0) - y_0\| < \frac{1}{2} \|y - y_0\| + \frac{r}{2} \leq r.$$

Por tanto dado $x \in U$, si denotamos $V = U(y_0, r)$, la aplicación $y \mapsto g(x, y)$ es una contracción de $B(y_0, r)$ en $V \subset B(y_0, r)$. En consecuencia, por el Teorema del punto fijo de Banach, existe una única aplicación $u : U \rightarrow V$ tal que $g(x, u(x)) = u(x)$ o equivalentemente $f(x, u(x)) = 0$.

Probemos ahora que u es continua. Sea $a \in U$ y $\varepsilon > 0$. Apliquemos de nuevo la parte ya probada del teorema tomando el punto $(a, u(a))$ y la aplicación f restringida a $U \oplus (U(u(a), \varepsilon) \cap V)$. Dado que $f(a, u(a)) = 0$ y $D_2f(a, u(a))$ es un isomorfismo, podemos aplicar el mismo razonamiento. Deducimos que existe un entorno W de a tal que $u(x) \in U(u(a), \varepsilon)$ para todo $x \in W$. Obsérvese que la unicidad de u es esencial en este razonamiento.

Probemos ahora que u es Fréchet diferenciable. Sea $x \in U$ y tomemos $\delta > 0$ tal que $B(x, \delta) \subset U$. Sea $h : B(0, \delta) \rightarrow Y$, $h(z) = u(x + z) - u(x)$, aplicación continua. Se tiene que $f(x + z, u(x) + h(z)) = 0$ y por el Teorema 2.4.2

$$\begin{aligned} & \|D_1f(x, u(x))(z) + D_2f(x, u(x))(h(z))\| \\ &= \|Df(x, u(x))(z, h(z))\| \\ &= \|f(x + z, u(x) + h(z)) - f(x, u(x)) - Df(x, u(x))(z, h(z))\| \\ &= o(\|(z, h(z))\|), z \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Denotemos $T = D_2f(x, u(x))$, isomorfismo, pues $x \in U$. Entonces

$$\begin{aligned} & \|u(x + z) - u(x) + T^{-1} \circ D_1f(x, u(x))(z)\| \\ &= \|h(z) + T^{-1} \circ D_1f(x, u(x))(z)\| \\ &\leq \|T^{-1}\| \|D_2f(x, u(x))(h(z)) + D_1f(x, u(x))(z)\| \\ &= o(\|z\| + \|h(z)\|), z \rightarrow 0. \end{aligned} \tag{2.7}$$

En particular, para z suficientemente pequeño tenemos $\|h(z) + T^{-1} \circ D_1f(x, u(x))(z)\| \leq \frac{1}{2}(\|z\| + \|h(z)\|)$. Por tanto

$$\begin{aligned} \|h(z)\| &\leq \|h(z) + T^{-1} \circ D_1f(x, u(x))(z)\| + \|T^{-1} \circ D_1f(x, u(x))(z)\| \\ &\leq \frac{1}{2}(\|z\| + \|h(z)\|) + \|T^{-1} \circ D_1f(x, u(x))(z)\|, \end{aligned}$$

y despejando $\|h(z)\|$,

$$\|h(z)\| \leq \|z\| + 2\|T^{-1} \circ D_1f(x, u(x))(z)\| \leq (1 + 2\|T^{-1} \circ D_1f(x, u(x))\|)\|z\|.$$

En consecuencia en (2.7) obtenemos

$$\|u(x+z) - u(x) + T^{-1} \circ D_1 f(x, u(x))(z)\| = o(\|z\|), z \rightarrow 0,$$

lo que prueba que u es Fréchet diferenciable y que (2.6) se cumple.

Veamos ahora que si f es de clase C^k , $u \in C^k(U, Y)$. Denotemos por $\Phi : \mathcal{L}(Y, Z) \rightarrow \mathcal{L}(Z, Y)$ la aplicación del Lema 2.9.1, y por $\Psi : \mathcal{L}(Z, Y) \oplus \mathcal{L}(X, Z) \rightarrow \mathcal{L}(X, Y)$ la aplicación composición $\Psi(P, Q) = P \circ Q$. Obsérvese que Φ, Ψ son ambas de clase C^∞ .

Entonces la fórmula (2.6) puede ser reescrita como

$$Du(x) = -\Psi(\Phi(D_2 f(x, u(x))), D_1 f(x, u(x))).$$

Dado que u es continua, esta fórmula inmediatamente implica que $u \in C^1(U, Y)$. Supongamos ahora que f es de clase C^k . Si u es de clase C^j en U para algún $j < k$, entonces por la regla de la cadena y la fórmula superior Du es de clase C^j en U , luego u es de clase C^{j+1} en U . Por tanto, por inducción, $u \in C^k(U, Y)$.

□

Como corolario podemos deducir el Teorema de la función inversa. Para ello definimos primero el concepto de difeomorfismo entre espacios normados.

Definición 2.9.3. Sean X, Y espacios normados, $A \subset X$, $B \subset Y$ abiertos. Decimos que una aplicación $f : A \rightarrow B$ es un difeomorfismo de A en B si f es biyectiva y si tanto f como su inversa f^{-1} son de clase C^1 .

Observaciones 2.9.4.

- (a) Un difeomorfismo es un homeomorfismo, pues f y f^{-1} son continuas. Sin embargo un homeomorfismo, aunque sea de clase C^1 , puede no ser difeomorfismo, ya que f^{-1} puede no ser diferenciable. Como ejemplo $x \mapsto x^3$ es un homeomorfismo de clase C^1 de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$, pero su inversa $y \mapsto y^{1/3}$ no es derivable en el origen.
- (b) Si U es no vacío y $f : U \rightarrow V$ es un difeomorfismo, entonces X e Y son isomorfos. Esto es así ya que $f^{-1} \circ f = Id_X$, y aplicando la regla de la cadena $Df^{-1}(f(u)) \circ Df(u) = Id_X$ para todo $u \in U$. Se deduce que $Df(u) \in \mathcal{L}(X, Y)$ tiene una inversa, $Df^{-1}(f(u)) \in \mathcal{L}(Y, X)$.

El Teorema de la función inversa puede interpretarse como un recíproco de esta última observación.

Teorema 2.9.5. (Teorema de la función inversa) Sean X, Y espacios de Banach sobre $\mathbb{K}$, $A \subset X$ abierto y $f \in C^1(A, Y)$. Supongamos que existe $a \in A$ tal que $Df(a)$ es un isomorfismo de X en Y . Entonces existen entornos abiertos $U \subset X$ de a y $V \subset Y$ de $f(a)$ tales que $f|_U : U \rightarrow V$ es un difeomorfismo. Además la diferencial Fréchet de f^{-1} en $y = f(x) \in V$ viene dada por

$$Df^{-1}(y) = (Df(x))^{-1}.$$

Si además f es de clase C^k para algún $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, entonces f^{-1} también lo es.

Demostración. Tomemos $G = Y \oplus A \subset Y \oplus X$ y definamos $F : G \rightarrow Y$, $F(y, x) = y - f(x)$. $F(f(a), a) = 0$ y $D_2F(f(a), a) = -Df(a)$ es un isomorfismo de X en Y . Aplicando el Teorema de la función implícita sabemos que existen entornos abiertos $U \subset Y$ de $f(a)$ y $V \subset X$ de a tales que existe una única aplicación $u : U \rightarrow V$ satisfaciendo $f(u(y)) = y$ para todo $y \in U$. Por otro lado $F(f(x), u(f(x))) = F(f(x), x) = 0$, luego por la unicidad de u , $u(f(x)) = x$. En consecuencia $f|_V : V \rightarrow U$ tiene inversa u . Además $Du(x) = -(D_2F(y, u(y)))^{-1} = (Df(u(y)))^{-1}$ para todo $y \in U$, y si f es de clase C^k , también lo es u .

□

Capítulo 3

Integración en espacios de Banach

En esta sección introducimos la generalización de la teoría de integración de funciones con imagen en $\mathbb{K}$ a funciones con imagen en un espacio de Banach arbitrario. Esta generalización recibe el nombre de integración de Bochner.

El objetivo último será relacionar la integral de Bochner con el cálculo diferencial mediante el Teorema fundamental del cálculo. Si bien para ello solo es necesario tratar con funciones definidas en un intervalo real, introduciremos la integral de Bochner en su contexto general.

A lo largo de este apartado denotaremos por X a un espacio de Banach y por $\mathcal{B}(X)$ su σ -álgebra de Borel. También denotaremos por $(A, \mathcal{A})$ un espacio medible (es decir, A un conjunto y $\mathcal{A}$ una σ -álgebra sobre A), y por μ una medida σ -finita en A .

Recordemos que una función $f : A \rightarrow X$ se dice $\mathcal{A}$ -medible, o simplemente medible si para cada conjunto de Borel $B \in \mathcal{B}(X)$, $f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$.

Asimismo se dice que una función $f : A \rightarrow X$ es $\mathcal{A}$ -simple, o simplemente simple, si existen $N \in \mathbb{N}$, $A_n \in \mathcal{A}$, $x_n \in X$ para $n \in \{1, \dots, N\}$ tales que

$$f = \sum_{n=1}^N \chi_{A_n} x_n.$$

También diremos que una función f es μ -simple si es simple y además $\mu(A_n) < \infty$ para todo $n \in \{1, \dots, N\}$.

El esquema con el que se introduce usualmente la integral de Lebesgue se generaliza de forma natural para funciones con imagen en un espacio de Banach arbitrario. Comenzaremos así definiendo la integral de Bochner para funciones simples.

Definición 3.0.1. Sea $f = \sum_{n=1}^N \chi_{A_n} x_n$ una función μ -simple. Entonces la integral de Bochner de f respecto a μ se define como

$$\int_A f d\mu := \sum_{n=1}^N \mu(A_n) x_n \in X.$$

Obsérvese que la integral definida también es independiente de la representación de f como función simple. Además la integral de Bochner dada es lineal en el espacio vectorial de las funciones μ -simples y como consecuencia de la desigualdad triangular para cualquier función μ -simple se tiene

$$\left\| \int_A f d\mu \right\| \leq \int_A \|f\| d\mu, \quad (3.1)$$

donde la integral del lado derecho de la desigualdad puede realizarse acudiendo a la teoría de integración usual para funciones con imagen en $\mathbb{K}$.

De forma análoga a la contrucción de la integral de Lebesgue, pretendemos extender la integral de Bochner a un conjunto más amplio de funciones tomando el límite de funciones simples. Sin embargo como veremos la mensurabilidad de f no será suficiente.

Teorema 3.0.2. (Teorema de mensurabilidad de Pettis) Sea $f : A \rightarrow X$ una aplicación. Entonces son equivalentes:

- (i) Existe una sucesión de funciones μ -simples $f_n : A \rightarrow X$ tales que $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$ para todo $x \in A$.
- (ii) f es medible y $f(A) \subset X$ es separable.
- (iii) $x^* \circ f : A \rightarrow \mathbb{K}$ es medible para todo $x^* \in X^*$ y $f(A) \subset X$ es separable.

Demostración. $\boxed{(i) \Rightarrow (ii)}$ f es medible por ser el límite puntual de funciones medibles. Sea $f_n = \sum_{k=1}^{N_n} \chi_{A_{k,n}} x_{k,n}$. Entonces $G := \{x_{k,n} : n \in \mathbb{N}, k = 1, \dots, N_n\} \cup \{0\}$ es un conjunto numerable y denso en $f(A)$, pues dado $\varepsilon > 0$ y $x \in A$ existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\|f_n(x) - f(x)\| < \varepsilon$, luego existe $g \in G$ tal que $\|g - f(x)\| < \varepsilon$.

$\boxed{(ii) \Rightarrow (iii)}$ Basta observar que x^* es continua, y por tanto medible y que la composición de funciones medibles es medible.

$\boxed{(iii) \Rightarrow (i)}$ Sea X_0 el menor subespacio cerrado de X que contiene a $f(A)$, que será separable por serlo $f(A)$, y sea $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ un subconjunto denso de $f(A)$.

Para $n \in \mathbb{N}$ definimos las funciones $s_n : X_0 \rightarrow \{x_1, \dots, x_n\}$ de la siguiente forma. Para cada $y \in X_0$ sea $k(n, y)$ el menor natural $1 \leq k \leq n$ con la propiedad de que

$$\|y - x_k\| = \min_{1 \leq j \leq n} \|y - x_j\|$$

y definamos $s_n(y) := x_{k(n, y)}$. Obsérvese que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|s_n(y) - y\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \min_{1 \leq j \leq n} \|y - x_j\| = 0, \quad (3.2)$$

pues $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ es denso en X_0 .

Ahora definamos $\tilde{f}_n : A \rightarrow X$ por

$$\tilde{f}_n(\xi) := s_n(f(\xi)), \quad \xi \in A.$$

Por (3.2) se tiene que para todo $\xi \in A$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|\tilde{f}_n(\xi) - f(\xi)\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \|s_n(f(\xi)) - f(\xi)\| = 0,$$

por tanto si $\tilde{f}_n$ fuera μ -simple para $n \in \mathbb{N}$ la implicación quedaría probada.

Observemos que $\tilde{f}_n(X_0) \subset \{x_1, \dots, x_n\}$. Además

$$\begin{aligned} & \{\xi \in A : \tilde{f}_n(\xi) = x_k\} \\ &= \{\xi \in A : \|f(\xi) - x_k\| = \min_{1 \leq j \leq n} \|f(\xi) - x_j\|\} \\ &\cap \{\xi \in A : \|f(\xi) - x_l\| > \min_{1 \leq j \leq n} \|f(\xi) - x_j\| \quad \text{para } l = 1, \dots, k-1\}. \end{aligned}$$

Por tanto si probamos que la función $\xi \in A \mapsto \|f(\xi) - x_k\| \in \mathbb{K}$ es medible, $\{\xi \in A : \tilde{f}_n(\xi) = x_k\} \in \mathcal{A}$ y $\tilde{f}_n$ será una función simple.

Tomemos para cada $n \in \mathbb{N}$ $x_n^* \in S_{X^*}$ tales que $\|x_n\| = |x_n^*(x_n)|$. Veamos que

$$\|x\| = \sup_{n \in \mathbb{N}} |x_n^*(x)| \quad \text{para todo } x \in X_0. \quad (3.3)$$

Sea $x \in X_0$. Dado $\sigma > 0$, existe $n_\sigma \in \mathbb{N}$ tal que $\|x - x_{n_\sigma}\| \leq \sigma$. Entonces

$$\begin{aligned} \|x\| &\leq \|x_{n_\sigma}\| + \sigma = |x_{n_\sigma}^*(x_{n_\sigma})| + \sigma \leq |x_{n_\sigma}^*(x)| + \|x_{n_\sigma}^*\| \|x - x_{n_\sigma}\| + \sigma \\ &\leq \sup_{n \in \mathbb{N}} |x_n^*(x)| + 2\sigma. \end{aligned}$$

Como $\sigma > 0$ es arbitrario, concluimos que se cumple (3.3).

Ahora, como por hipótesis $x_n^* \circ f$ es medible, la función

$$\xi \mapsto \|f(\xi) - x\| = \sup_{n \in \mathbb{N}} |x_n^* (f(\xi) - x)|$$

también es medible, por composición de funciones medibles. Concluimos por tanto que $\tilde{f}_n$ es simple para $n \in \mathbb{N}$.

Dado que $(A, \mathcal{A}, \mu)$ es un espacio de medida σ -finito, podemos poner $A = \cup_{n=1}^{\infty} A^{(n)}$, con $A^{(1)} \subset A^{(2)} \subset \dots \in \mathcal{A}$, y $\mu(A^{(n)}) < \infty$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Definimos $f_n := \chi_{A^{(n)}} \tilde{f}_n$ para $n \in \mathbb{N}$. Estas serán por tanto funciones μ -simples, y dado que para todo $\xi \in A$ se tiene que $\xi \in A^{(n_0)}$ para algún $n_0 \geq 1$, $f_n(\xi) = \tilde{f}_n(\xi)$ para $n \geq n_0$. En consecuencia se cumple que

$$f_n(\xi) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f(\xi) \quad \text{para todo } \xi \in A,$$

y $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ es la sucesión de funciones μ -simples buscada. $\square$

Este resultado sugiere la siguiente definición.

Definición 3.0.3. Decimos que una función $f : A \rightarrow X$ es fuertemente $\mathcal{A}$ -medible si existe una sucesión de funciones μ -simples $f_n : A \rightarrow X$ tales que $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$ para todo $x \in A$.

Como corolario del Teorema anterior tenemos el siguiente resultado.

Corolario 3.0.4. Sea $f_n : A \rightarrow X$ una sucesión de funciones fuertemente $\mathcal{A}$ -medibles puntualmente convergentes. Entonces $f : A \rightarrow X$, $f(\xi) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(\xi)$ es fuertemente $\mathcal{A}$ -medible.

Demostración. f tiene su imagen en el menor subespacio cerrado que contiene $f_n(A)$, $n \in \mathbb{N}$ por construcción. Ahora, como cada $f_n(A)$ es separable, el menor subespacio cerrado que las contiene también lo será (basta tomar un subconjunto numerable denso para cada $f_n(A)$ y considerar su unión, que será el subconjunto numerable denso buscado). En consecuencia $f(A)$ será separable.

Por otro lado, para cada $x^* \in X^*$, $x^* \circ f$ es medible por ser el límite puntual de $x^* \circ f_n$, $n \in \mathbb{N}$ medibles. $\square$

Para una función fuertemente medible resulta natural definir su integral de Bochner como el límite de integrales de Bochner de funciones μ -simples. Para ello tenemos el siguiente resultado.

Proposición 3.0.5. Sea $f : A \rightarrow X$ una función fuertemente medible. Entonces son equivalentes:

- (i) Existe una sucesión de funciones μ -simples $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ tales que $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$ para todo $x \in A$ y

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_A \|f_n - f\| d\mu = 0.$$

- (ii) Se cumple que $\int_A \|f(x)\| d\mu < \infty$.

Si una de las dos afirmaciones se cumple, entonces el límite $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_A f_n d\mu$ existe en X , y es independiente de la sucesión de funciones μ -simples $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ tomada en (i).

Demostración. Observemos en primer lugar que $\|f\|, \|f - f_n\| : A \rightarrow \mathbb{K}$ son funciones medibles. Por tanto sus integrales están bien definidas y además podemos emplear la teoría de integración usual para funciones con imagen en $\mathbb{K}$.

$(i) \Rightarrow (ii)$ Tomemos $n \in \mathbb{N}$ suficientemente grande tal que $\int_A \|f - f_n\| d\mu \leq 1$. Se tiene

$$\int_A \|f\| d\mu \leq \int_A \|f - f_n\| d\mu + \int_A \|f_n\| d\mu < \infty,$$

ya que por ser f_n μ -simple, la integral de $\|f_n\|$ es finita.

$(ii) \Rightarrow (i)$ Sea Dado que f es fuertemente medible, existe $\{g_n\}_{n=1}^\infty$ sucesión de funciones μ -simples que convergen puntualmente a f . Para cada $n \in \mathbb{N}$, definamos

$$f_n := \chi_{\|g_n(\xi)\| \leq 2\|f(\xi)\|} g_n.$$

Obsérvese que las funciones f_n definidas son μ -simples por serlo $\{g_n\}_{n=1}^\infty$. Además para todo $\xi \in A$ se tiene que $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(\xi) = f(\xi)$, pues como g_n converge puntualmente a f , si $n > n_\xi$ para cierto $n_\xi \in \mathbb{N}$, $\|g_n(\xi)\| \leq 2\|f(\xi)\|$, y por tanto $g_n(\xi) = f_n(\xi)$.

En consecuencia la sucesión de funciones $\{\|f_n - f\|\}_{n=1}^\infty$ converge puntualmente a 0, y dado que $\|f_n(\xi)\| \leq 2\|f(\xi)\|$ se tiene que $\|f_n - f\|$ está puntualmente acotado por $3\|f\|$. Entonces por el Teorema de la convergencia dominada de Lebesgue se tiene que $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_A \|f_n - f\| d\mu = 0$.

Demostrada la equivalencia probemos la última afirmación del enunciado. Sea $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ una sucesión de funciones μ -simples como en (i) y sean $n, m \in \mathbb{N}$. Usando (3.1) se tiene

$$\begin{aligned} \left\| \int_A f_n d\mu - \int_A f_m d\mu \right\| &\leq \int_A \|f_n - f_m\| d\mu \\ &\leq \int_A \|f_n - f\| d\mu + \int_A \|f_m - f\| d\mu, \end{aligned}$$

que muestra que $\{\int_A f_n d\mu\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy en X , y por tanto convergente.

Sea ahora $\{g_n\}_{n=1}^\infty$ otra sucesión de funciones μ -simples como en (i). Reemplazando f_m por g_n en los cálculos superiores y tomando límite para $n \rightarrow \infty$ concluimos que $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_A f_n d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_A g_n d\mu$. $\square$

Con este resultado estamos en disposición de definir la integral de Bochner.

Definición 3.0.6. Una función $f : A \rightarrow X$ fuertemente medible es μ -Bochner integrable¹ si $\int_A \|f\| d\mu < \infty$. En ese caso se define la integral de Bochner de f como

$$\int_A f d\mu := \lim_{n \rightarrow \infty} \int_A f_n d\mu,$$

donde $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ es cualquier sucesión de funciones μ -simples como en la Proposición 3.0.5.

También en ese caso, si $E \in \mathcal{A}$, se define la integral de Bochner de f en E como

$$\int_E f d\mu := \int_A \chi_E f d\mu.$$

Observación 3.0.7. Si $E \in \mathcal{A}$ y $f : E \rightarrow X$ podemos considerar $\bar{f}$, la extensión trivial de f a A (tomando $f(\xi) = 0$ para $\xi \in A \setminus E$). Diremos que f es μ -Bochner integrable si lo es $\bar{f}$ y en ese caso definiremos la integral de Bochner de f como

$$\int_E f d\mu := \int_A \bar{f} d\mu.$$

Observación 3.0.8. Con esta definición, la teoría de integración de Bochner es en efecto una generalización de la teoría de integración para funciones con imagen en $\mathbb{K}$.

Sea $f : A \rightarrow \mathbb{K}$ una función medible e integrable. Al ser medible y ser $f(A) \subset \mathbb{K}$, por el Teorema 3.0.2 f es fuertemente medible. Además si f es integrable, por definición $\int_A \|f\| d\mu < \infty$, luego f es Bochner integrable. Por último, por el Teorema de la convergencia dominada de Lebesgue, la integral de f coincide con la de la Definición 3.0.6.

3.1. Algunas propiedades de la integral de Bochner

Por la similitud en su construcción, gran parte de las propiedades de la integral definida para funciones con imagen en $\mathbb{K}$ se trasladan a la integral de Bochner. Para ello se

¹O simplemente Bochner integrable, si la medida μ es evidente en el contexto

emplean fundamentalmente dos estrategias: apoyarse en las correspondientes propiedades para funciones μ -simples y emplear un argumento de aproximación y reducir al caso escalar.

Empleando la primera estrategia deducimos que el conjunto de las funciones de A en X fuertemente $\mathcal{A}$ -medibles y μ -Bochner integrables forma un espacio vectorial, que denotaremos por $\mathcal{I}(A, X)$, que la integral de Bochner es lineal en este espacio y que se tiene

$$\left\| \int_A f d\mu \right\| \leq \int_A \|f\| d\mu,$$

si $f : A \rightarrow X$ es Bochner integrable.

También se generalizan, entre otras, las siguientes propiedades, que destacamos para emplearlas más adelante.

Teorema 3.1.1. (Teorema de la convergencia dominada) Sean $f_n \in \mathcal{I}(A, X)$, $n \in \mathbb{N}$. Supongamos que existe una función $f : A \rightarrow X$ fuertemente $\mathcal{A}$ -medible y una función $g \in \mathcal{I}(A, \mathbb{K})$ tales que:

(i) $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(\xi) = f(\xi)$ para casi todo $\xi \in A$.

(ii) $\|f_n(\xi)\| \leq |g(\xi)|$ para casi todo $\xi \in A$.

Entonces $f \in \mathcal{I}(A, X)$ y se tiene

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_A f_n d\mu = \int_A f d\mu.$$

Demostración. Por (i), $\|f_n - f\| \rightarrow 0$ c.t.p. y por (ii) $\|f_n - f\| \leq 2|g|$ c.t.p. . En consecuencia, por el Teorema de la convergencia dominada de Lebesgue $\int_A \|f_n - f\| d\mu \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$. Por otro lado, por (ii) $\|f\| \leq |g|$ c.t.p., luego $f \in \mathcal{I}(A, X)$. La igualdad del enunciado se deduce de

$$\left\| \int_A f_n d\mu - \int_A f d\mu \right\| \leq \int_A \|f_n - f\| d\mu \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

□

Proposición 3.1.2. Sea Y un espacio de Banach y sea $T \in \mathcal{L}(X, Y)$. Si $f \in \mathcal{I}(A, X)$ entonces $T \circ f \in \mathcal{I}(A, Y)$ y se tiene

$$T \left(\int_A f d\mu \right) = \int_A T \circ f d\mu.$$

Demostración. Dado que $f \in \mathcal{I}(A, E)$, existe una sucesión de funciones μ -simples $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ tales que $f_n \rightarrow f$ puntualmente y $\int_A \|f_n - f\| d\mu \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$. Entonces $T \circ f_n$ es μ -simple para cada n , $T \circ f_n \rightarrow T \circ f$ puntualmente y

$$\int_A \|T \circ f - T \circ f_n\| d\mu \leq \|T\| \int_A \|f - f_n\| d\mu \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0,$$

de donde deducimos que $T \circ f \in \mathcal{I}(A, Y)$ por la Proposición 3.0.5.

Por otro lado, dado que la igualdad del enunciado se cumple si f es μ -simple

$$\int_A T \circ f d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_A T \circ f_n d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} T \left(\int_A f_n d\mu \right) = T \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \int_A f_n d\mu \right) = T \left(\int_A f d\mu \right).$$

□

Proposición 3.1.3. Sean $f, g : A \rightarrow X$ dos funciones fuertemente $\mathcal{A}$ -medibles tales que coinciden en casi todo punto. Si f o g son Bochner integrables entonces ambas lo son, y se tiene que

$$\int_A f d\mu = \int_A g d\mu.$$

Demostración. Si $f = g$ c.t.p. en concreto $\|f\| = \|g\|$ c.t.p. y por la teoría de integración usual para funciones con imagen en $\mathbb{K}$, $\int_A \|f\| d\mu = \int_A \|g\| d\mu$, de lo que se deduce la primera parte del enunciado. Por otro lado si f y g son Bochner integrables,

$$\left\| \int_A f d\mu - \int_A g d\mu \right\| \leq \int_A \|f - g\| d\mu = 0,$$

pues $\|f - g\| = 0$ c.t.p.

□

Gracias a este resultado podemos extender el estudio de la integrabilidad a funciones que cumplen la condición de fuertemente medible c.t.p.

Definición 3.1.4. Decimos que una función $f : A \rightarrow X$ es fuertemente μ -medible o Bochner medible si existe una sucesión de funciones μ -simples $f_n : A \rightarrow X$ tales que $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$ para casi todo $x \in A$.

Obsérvese que para toda función fuertemente μ -medible f existe una función fuertemente $\mathcal{A}$ -medible $\hat{f}$ tal que $f = \hat{f}$ c.t.p. En efecto, sea $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ una sucesión de funciones μ -simples tales que $f_n \rightarrow f$ excepto en un conjunto $N \in \mathcal{A}$ de medida nula. Entonces $\chi_{A \setminus N} f_n \rightarrow \chi_{A \setminus N} f$ puntualmente, siendo $\chi_{A \setminus N} f_n$ funciones μ -simples y $f = \chi_{A \setminus N} f$ c.t.p.

Definición 3.1.5. Una función $f : A \rightarrow X$ es μ -Bochner integrable si existe $\hat{f} : A \rightarrow X$ fuertemente $\mathcal{A}$ -medible y μ -Bochner integrable tal que $f = \hat{f}$ c.t.p. En ese caso se define la integral de Bochner de f como

$$\int_A f d\mu := \int_A \hat{f} d\mu.$$

Por la reflexión anterior la integral de Bochner de f está bien definida, es decir, es independiente de $\hat{f}$.

3.2. Integración de funciones definidas en un intervalo real

Concretaremos en este apartado la teoría de integración de Bochner para funciones definidas en un intervalo real abierto (a, b) , no necesariamente acotado. Consideraremos pues el espacio de medida $(\mathbb{R}, \mathcal{L}, \mu)$, siendo $\mathcal{L}$ la σ -álgebra de los conjuntos medibles Lebesgue y μ la medida de Lebesgue, un espacio de Banach X y funciones de $(a, b) \in \mathcal{L}$ a X .

Si $f : (a, b) \rightarrow X$ es Bochner integrable, denotaremos

$$\int_a^b f(t) dt := \int_{(a,b)} f d\mu.$$

Tomaremos además la siguiente convención: si $v < u$

$$\int_u^v f(t) dt = - \int_v^u f(t) dt.$$

Nuestro objetivo último será la prueba del Teorema fundamental del cálculo. Para ello necesitaremos en primer lugar el siguiente resultado.

Proposición 3.2.1. (Fórmula de Chasles) Sea $f : (a, b) \rightarrow X$ Bochner integrable, y sean $u, v, w \in [a, b]$. Entonces

$$\int_u^v f(t) dt = \int_u^w f(t) dt + \int_w^v f(t) dt.$$

Demostración. Si $v < w < u$ $\chi_{(u,v)} f = \chi_{(u,w)} f + \chi_{(w,v)} f$ c.t.p. Aplicando la linealidad de la integral

$$\begin{aligned} \int_u^v f(t) dt &= \int_a^b \chi_{(u,w)}(t) f(t) + \chi_{(w,v)}(t) f(t) dt \\ &= \int_a^b \chi_{(u,w)}(t) f(t) dt + \int_a^b \chi_{(w,v)}(t) f(t) dt = \int_u^w f(t) dt + \int_w^v f(t) dt. \end{aligned}$$

El resto de casos se deducen de este, teniendo en cuenta la convención anterior. $\square$

• Primitiva de una función Bochner integrable

Consideraremos una función $g : (a, b) \rightarrow X$ Bochner integrable.

Definición 3.2.2. Se dice que una función $G : (a, b) \rightarrow X$ es una primitiva de g si es derivable y $G'(x) = g(x)$ para $x \in (a, b)$.

Obsérvese que dos primitivas G_1 y G_2 difieren solo en una constante. En efecto, si $G_1'(x) = G_2'(x) = g(x)$ para $x \in (a, b)$, $D(G_1 - G_2)(x) = 0$ para $x \in (a, b)$ y por el Corolario 1.0.11, $G_1 - G_2$ es constante.

Por otro lado, si g es continua tenemos el siguiente resultado.

Teorema 3.2.3. (Primer Teorema Fundamental del Cálculo) Sea $g : (a, b) \rightarrow X$ una función continua, $x_0 \in (a, b)$ y $G : (a, b) \rightarrow X$ dada por $G(x) := \int_{x_0}^x g(t)dt$ para todo $x \in (a, b)$. Entonces G es una primitiva de g .

Demostración. Sea $x \in (a, b)$. Por la relación de Chasles, para $h \in \mathbb{R}$ tal que $x+h \in (a, b)$

$$G(x+h) - G(x) = \int_x^{x+h} g(t) dt.$$

Ahora $\int_x^{x+h} (g(t) - g(x)) dt = o(|h|)$ cuando $h \rightarrow 0$ pues

$$\frac{\left\| \int_x^{x+h} (g(t) - g(x)) dt \right\|}{|h|} \leq \frac{\int_x^{x+h} \|g(t) - g(x)\| dt}{|h|} \leq \sup_{t \in [x, x+h]} \|g(t) - g(x)\| \xrightarrow{g \rightarrow 0} 0,$$

ya que g es continua.

Como $x \in (a, b)$ es arbitrario, G es derivable y $G' = g$. $\square$

Teorema 3.2.4. (Segundo Teorema Fundamental del Cálculo) Sea $g : (a, b) \rightarrow X$ una función continua c.t.p. y sea $[u, v] \subset (a, b)$ un subintervalo compacto. Supongamos que existe $G : (a, b) \rightarrow X$ primitiva de g . Entonces

$$\int_u^v g(t)dt = G(v) - G(u).$$

.

Demostración. Observemos que si $X = \mathbb{R}$, es decir, si g es una función real de variable real, el enunciado es cierto (g es Riemann integrable si y solo si g es continua c.t.p.), véase [3, Teorema 110].

Consideremos ahora $\phi \in X^*$. Teniendo en cuenta que $\phi \circ G$ es una función real de variable real con derivada $\phi \circ g$, se tiene

$$\phi(G(b) - G(a)) = \phi \circ G(b) - \phi \circ G(a) = \int_a^b \phi \circ g(t) dt = \phi \left(\int_a^b g(t) dt \right),$$

donde hemos empleado la Proposición 3.1.2.

La prueba se concluye teniendo en cuenta que $\phi \in X^*$ es arbitrario y X^* separa puntos de X . $\square$

3.3. Teorema fundamental del cálculo en espacios de Banach

Estableceremos a continuación una versión del Segundo Teorema Fundamental del Cálculo para espacios de Banach arbitrarios, cuya prueba es un corolario inmediato de este Teorema.

Teorema 3.3.1. (*Teorema fundamental del cálculo en espacios de Banach arbitrarios*) Sean X, Y espacios de Banach sobre el cuerpo $\mathbb{K}$, $A \subset X$ un abierto y $f : A \rightarrow Y$ una aplicación de clase C^1 . Si $x + ty \in A$ para $t \in [0, 1]$, entonces

$$f(x + y) = f(x) + \int_0^1 Df(x + ty)y dt.$$

Demostración. Consideremos $g(t) := f(x + ty)$ para $t \in [0, 1]$. Basta observar que por la regla de la cadena $g'(t) = Df(x + ty)y$ y aplicar el Teorema 3.2.4. $\square$

Capítulo 4

Polinomios y propiedades básicas

El desarrollo de Taylor de una función y la teoría de las funciones analíticas se apoyan en el concepto de polinomio entre dos espacios vectoriales arbitrarios.

En esta sección introducimos esta generalización de los polinomios clásicos y estudiamos algunas propiedades que nos serán de utilidad en las próximas secciones.

Definición 4.0.1. Sean X, Y espacios vectoriales sobre $\mathbb{K}$, y sea $n \in \mathbb{N}$. Una aplicación $P : X \rightarrow Y$ se dice que es un polinomio n -homogéneo si existe una aplicación multilineal $M \in L(^nX, Y)$ tal que

$$P(x) = M(x, \dots, x).$$

Emplearemos la notación $P = \widehat{M}$. Por conveniencia, definimos los polinomios 0-homogéneos como las aplicaciones constantes de X en Y .

Denotaremos por $P(^nX, Y)$, $n \in \mathbb{N} \cup 0$, al espacio vectorial de los polinomios n -homogéneos de X en Y .

Observación 4.0.2. Sean X, Y espacios vectoriales, $n \in \mathbb{N}_0$, $P \in P(^nX; Y)$, y sea $Z \subset X$ un subespacio vectorial. Entonces $P|_Z \in P(^nZ; Y)$.

Si X, Y son espacios normados sobre $\mathbb{K}$, puede estudiarse la continuidad de $P \in P(^nX, Y)$, de forma análoga al estudio para funciones multilineales.

Proposición 4.0.3. Sean X, Y espacios normados, y sea $P \in P(^nX, Y)$, $n \in \mathbb{N} \cup 0$. Entonces son equivalentes:

- (i) P es continua en X .
- (ii) P es continua en el origen.

(iii) P está acotada en B_X .

(iv) P está acotada en S_X .

(v) P está acotada en el entorno de algún punto.

(vi) Existe una constante K tal que $\|P(x)\| \leq K \|x\|^n$ para todo $x \in X$.

Demostración. La prueba del Teorema B.0.3 se adapta a esta proposición de forma directa, empleando las mismas técnicas. $\square$

Definición 4.0.4. Sean X, Y espacios normados, $n \in \mathbb{N} \cup 0$. Denotamos por $\mathcal{P}(^n X, Y)$ al subespacio vectorial de $P(^n X, Y)$ formado por los polinomios n -homogéneos de X en Y continuos. Por la Proposición 4.0.3 podemos dotar a este subespacio de la norma

$$\|P\| = \sup_{x \in B_X} \|P(x)\|.$$

Observación 4.0.5. Dado $P \in P(^n X; Y)$, se tiene que

$$\begin{aligned} \|P\| &= \sup_{x \in B_X} \|P(x)\| \\ &= \sup_{x \in S_X} \|P(x)\| \\ &= \inf \{K \in \mathbb{R} : \|P(x)\| \leq K \|x\|^n \quad \forall x \in X\} \end{aligned}$$

Demostración. Al igual que con la proposición anterior, la prueba de esta observación se puede deducir a partir de la Observación B.0.5 para aplicaciones multilineales. $\square$

Observación 4.0.6. Dados X, Y espacios normados sobre $\mathbb{K}$, $n \in \mathbb{N}_0$, $P \in \mathcal{P}(^n X, Y)$ y $Z \subset X$ un subespacio. Entonces $P|_Z \in \mathcal{P}(^n X, Y)$.

Para un polinomio n -homogéneo P , la aplicación M tal que $P = \widehat{M}$ no es necesariamente única. De hecho si $P = \widehat{M}$, también la simetrización de M , M^s (véase Definición B.0.10) cumple $P = \widehat{M^s}$. Sin embargo tenemos el siguiente resultado.

Proposición 4.0.7 (Fórmula de polarización). Sean X, Y dos espacios vectoriales sobre $\mathbb{K}$ y $n \in \mathbb{N}$. Para cada $P \in P(^n X; Y)$ existe una única aplicación n -lineal simétrica $\check{P} \in L^s(^n X; Y)$ tal que $P(x) = \check{P}(x, \dots, x)$. Esta aplicación satisface la fórmula

$$\check{P}(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{2^n n!} \sum_{\substack{\varepsilon_j = \pm 1 \\ j=1, \dots, n}} \varepsilon_1 \cdots \varepsilon_n P \left(a + \sum_{j=1}^n \varepsilon_j x_j \right), \quad (4.1)$$

donde $a \in X$ puede ser elegido arbitrariamente. Es más, si X, Y son espacios normados y P es continua, entonces $\check{P}$ es también lo es y se cumple

$$\|P\| \leq \|\check{P}\| \leq \frac{n^n}{n!} \|P\|. \quad (4.2)$$

Por otro lado, para todo $m > n$ y $a, x_1, \dots, x_m \in X$

$$\sum_{\substack{\varepsilon_j = \pm 1 \\ j=1, \dots, m}} \varepsilon_1 \cdots \varepsilon_m P \left(a + \sum_{j=1}^m \varepsilon_j x_j \right) = 0. \quad (4.3)$$

Demostración. Sea $M \in L(nX; Y)$ tal que $P = \widehat{M}$. Pongamos $\check{P} = M^s$. Obviamente, $P = \widehat{M}^s$ y usando la Proposición B.0.11 se tiene que

$$\begin{aligned} \check{P}(x_1, \dots, x_n) &= M^s(x_1, \dots, x_n) \\ &= \frac{1}{2^n n!} \sum_{\substack{\varepsilon_j = \pm 1 \\ j=1, \dots, n}} \varepsilon_1 \cdots \varepsilon_n M^s \left(a + \sum_{j=1}^n \varepsilon_j x_j, \dots, a + \sum_{j=1}^n \varepsilon_j x_j \right) \\ &= \frac{1}{2^n n!} \sum_{\substack{\varepsilon_j = \pm 1 \\ j=1, \dots, n}} \varepsilon_1 \cdots \varepsilon_n P \left(a + \sum_{j=1}^n \varepsilon_j x_j \right). \end{aligned}$$

La unicidad se deduce del hecho de que una aplicación simétrica n -lineal está unívocamente determinada por sus valores a lo largo de la diagonal (Proposición B.0.11).

Veamos ahora que se cumple (4.2).

$$\|P\| = \sup_{x \in B_X} \|M^s(x, \dots, x)\| \leq \sup_{\substack{x \in B_X \\ j \in \{1, \dots, n\}}} \|M^s(x_1, \dots, x_n)\| = \|\check{P}\|$$

Por otro lado, empleando (4.1) con $a = 0$ y $x_j \in B_X$, $j = 1, \dots, n$,

$$\|\check{P}(x_1, \dots, x_n)\| = \frac{1}{2^n n!} \sum_{\substack{\varepsilon_j = \pm 1 \\ j=1, \dots, n}} \left\| P \left(\sum_{j=1}^n \varepsilon_j x_j \right) \right\| \leq \frac{1}{2^n n!} 2^n \|P\| \left(\sum_{j=1}^n \|x_j\| \right)^n \leq \frac{n^n}{n!} \|P\|,$$

de donde se deduce (4.2).

La igualdad en (4.3) es una consecuencia directa de (B.2) en la Proposición B.0.11. $\square$

Como consecuencia inmediata podemos deducir la siguiente proposición.

Proposición 4.0.8. Sean X, Y dos espacios vectoriales normados y $n \in \mathbb{N}$. Entonces $\mathcal{P}(nX; Y)$ es isomorfa a $\mathcal{L}^s(nX; Y)$. En particular, si Y es un espacio de Banach, entonces $\mathcal{P}(nX; Y)$ también lo es.

Demostración. Basta considerar la aplicación $P \in \mathcal{P}(^n X; Y) \mapsto \check{P} \in \mathcal{L}^s(^n X; Y)$ dada por la Proposición 4.0.7. Obsérvese que es sobreyectiva pues si $M \in \mathcal{L}^s(^n X, Y)$, $n \in \mathbb{N}$, claramente $\widehat{M} \in \mathcal{P}(^n X, Y)$. La última afirmación se deduce del Teorema B.0.8. $\square$

Destacamos dos resultados que relacionan las normas de M y $\widehat{M}$.

Teorema 4.0.9. *Sea X un espacio dotado de un producto escalar, Y un espacio normado, $n \in \mathbb{N}$, y $M \in \mathcal{L}^s(^n X; Y)$. Entonces $\|M\| = \|\widehat{M}\|$.*

Demostración. De la definición de $\widehat{M}$ se deduce que $\|\widehat{M}\| \leq \|M\|$. Probemos ahora la desigualdad contraria.

Considerando la versión real de los espacios podemos asumir sin pérdida de generalidad que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, y por tanto considerar como real el producto escalar.

Primero supongamos que $\dim(X) < \infty$. Entonces existen $y_1, \dots, y_n \in B_X$ tal que $\|M\| = \|M(y_1, \dots, y_n)\|$ (pues B_X es compacto). Tomemos $a \in X$ tal que $\langle a, y_j \rangle \neq 0$ para cada $j \in \{1, \dots, n\}$ (basta tomar $a \in X \setminus \text{span}\{y_1\}^\perp \cup \dots \cup \text{span}\{y_n\}^\perp$, conjunto no nulo por ser X espacio vectorial).

En consecuencia existe $\delta > 0$ tal que el conjunto

$$K = \{(x_1, \dots, x_n) \in (B_X)^n; \|M(x_1, \dots, x_n)\| = \|M\|, \langle a, x_j \rangle \geq \delta, j = 1, \dots, n\}$$

es no vacío. Pongamos $\varphi(x_1, \dots, x_n) = \sum_{j=1}^n \langle a, x_j \rangle$. Como $K \subset (B_X)^n$ es cerrado, y por tanto compacto, la función φ alcanza su máximo en K . Llamemos $(z_1, \dots, z_n) \in K$ a este máximo.

Si $z_1 = z_2 = \dots = z_n$, esto significa que $\|M\| = \|M(z_1, \dots, z_n)\| = \|\widehat{M}(z_1)\| \leq \|\widehat{M}\|$ y la prueba en el caso de dimensión finita estaría completada.

Supongamos por reducción al absurdo lo contrario. Entonces por la simetría de M podemos suponer sin pérdida de generalidad que $z_1 \neq z_2$. Como $\langle a, z_1 \rangle \geq \delta$ y $\langle a, z_2 \rangle \geq \delta$, se sigue que $z_1 \neq -z_2$ también. Tomemos $u = \frac{z_1 + z_2}{\|z_1 + z_2\|}$ y $v = \frac{z_1 - z_2}{\|z_1 - z_2\|}$. Veamos que en este caso $(u, u, z_3, \dots, z_n) \in K$.

$\langle a, u \rangle \geq \delta$, pues $\|z_1 + z_2\| \leq 2$. Consideremos la aplicación $T : X^2 \rightarrow Y$ definida como $T(x, y) = M(x, y, z_3, \dots, z_n)$. Entonces T es bilineal y simétrica y por tanto

$$T(z_1, z_2) = \frac{1}{4} (T(z_1 + z_2, z_1 + z_2) - T(z_1 - z_2, z_1 - z_2)).$$

Además aplicando la bilinealidad, $\|T(u, u)\| = \|T(v, v)\|$.

Si $\|T(u, u)\| < \|M\|$, empleando la información anterior y la ley del paralelogramo se tiene

$$\begin{aligned}\|M\| &= \|T(z_1, z_2)\| \leq \frac{1}{4}(\|z_1 + z_2\|^2 \|T(u, u)\| + \|z_1 - z_2\|^2 \|T(v, v)\|) \\ &< \frac{\|M\|}{4}(\|z_1 + z_2\|^2 + \|z_1 - z_2\|^2) = \frac{\|M\|}{2}(\|z_1\|^2 + \|z_2\|^2) \leq \|M\|,\end{aligned}$$

lo cual es una contradicción. Por lo tanto $(u, u, z_3, \dots, z_n) \in K$.

De nuevo por la ley del paralelogramo, como $\|z_1 - z_2\| > 0$ y $z_1, z_2 \in B_X$, necesariamente $\|z_1 + z_2\| < 2$, y así

$$\varphi(u, u, z_3, \dots, z_n) = \frac{2}{\|z_1 + z_2\|}(\langle a, z_1 \rangle + \langle a, z_2 \rangle) + \sum_{j=3}^n \langle a, z_j \rangle > \varphi(z_1, \dots, z_n),$$

lo cual contradice el hecho de que φ alcanza su máximo sobre K en $(z_1, \dots, z_n)$.

Finalmente, estudiemos el caso de dimensión infinita. Fijemos $x_1, \dots, x_n \in B_X$ y denotemos $Z = \text{span}\{x_1, \dots, x_n\}$. Entonces

$$\|M(x_1, \dots, x_n)\| \leq \|M|_Z\| \leq \|\widehat{M}|_Z\| \leq \|\widehat{M}\|$$

por la primera parte de la prueba. Esto significa que $\|M\| \leq \|\widehat{M}\|$. $\square$

Corolario 4.0.10. Sean X, Y dos espacios normados reales y $M \in \mathcal{L}^s({}^n X; Y)$. Entonces

$$\|M({}^{n_1}x_1, \dots, {}^{n_k}x_k)\| \leq \sqrt{\frac{n^n}{n_1^{n_1} \cdots n_k^{n_k}}} \|\widehat{M}\|$$

para todo $x_1, \dots, x_k \in B_X$, $n_1, \dots, n_k \in \mathbb{N}$ con $n_1 + \cdots + n_k = n$, $1 \leq k \leq n$.

Demostración. Sean $1 \leq k \leq n$, $x_1, \dots, x_k \in B_X$, y $n_1, \dots, n_k \in \mathbb{N}$ con $n_1 + \cdots + n_k = n$. Fijemos $r = (r_1, \dots, r_k) \in (\mathbb{R}^+)^k$. Consideremos el espacio de Hilbert conocido ℓ_2^k y definamos $T \in \mathcal{L}(\ell_2^k; X)$ por la fórmula $T((t_1, \dots, t_k)) = \sum_{j=1}^k t_j r_j x_j$. Por la Desigualdad de Cauchy se tiene

$$\|T((t_1, \dots, t_k))\| \leq \sum_{j=1}^k |t_j| r_j \|x_j\| \leq \|(t_1, \dots, t_k)\|_2 \|r\|_2$$

y por tanto $\|T\| \leq \|r\|_2$.

Consideremos ahora $Q(y_1, \dots, y_n) = M(T(y_1), \dots, T(y_n))$ para $y_1, \dots, y_n \in \ell_2^k$. Por construcción, $Q \in \mathcal{L}^s({}^n \ell_2^k; Y)$ y $\widehat{Q} = \widehat{M} \circ T$, luego $\|\widehat{Q}\| \leq \|\widehat{M}\| \|r\|_2^n$.

Denotemos por $e_1, \dots, e_k$ los vectores de la base canónica en ℓ_2^k . Entonces por el Teorema 4.0.9

$$\begin{aligned} r_1^{n_1} \dots r_k^{n_k} \|M({}^{n_1}x_1, \dots, {}^{n_k}x_k)\| &= \|M({}^{n_1}(r_1x_1), \dots, {}^{n_k}(r_kx_k))\| \\ &= \|Q({}^{n_1}e_1, \dots, {}^{n_k}e_k)\| \\ &\leq \|Q\| = \|\widehat{Q}\| \leq \|\widehat{M}\| \|r\|_2^n. \end{aligned}$$

Tomando $r_j = \sqrt{\frac{n_j}{n}}$, $j = 1, \dots, k$, se llega a la desigualdad buscada. $\square$

Esta desigualdad también se cumple cuando tratamos con espacios normados complejos, véase [7], corolarios 1.17 y 2.70.

Lema 4.0.11. Sean X, Y dos espacios vectoriales, $n \in \mathbb{N}$, $P \in P(nX; Y)$, y $x, y \in X$. Entonces

$$\begin{aligned} P(x+y) &= \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} \check{P}({}^jx, {}^{n-j}y) \quad y \\ P(x) - P(y) &= \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n}{j} \check{P}({}^jy, {}^{n-j}(x-y)). \end{aligned}$$

Demostración. Para obtener la primera fórmula es suficiente aplicar la Observación B.0.2, teniendo en cuenta la simetría de $\check{P}$. La segunda fórmula se deduce de la primera, pues $P(x) = P(y + (x - y))$. $\square$

La siguiente definición generaliza el concepto de polinomio real clásico.

Definición 4.0.12. Sean X, Y espacios vectoriales sobre $\mathbb{K}$, y sea $n \in \mathbb{N}_0$. Una aplicación $P : X \rightarrow Y$ se dice que es un polinomio de grado a lo sumo n si existen $P_k \in P({}^kX, Y)$, $k = 0, \dots, n$, tales que $P = \sum_{k=0}^n P_k$. Si $P_n \neq 0$, decimos que P tiene grado n , y emplearemos la notación $\deg P = n$.

Denotamos por $P^n(X, Y)$ el espacio vectorial de todos los polinomios de grado a lo sumo n . Denotamos por $P(X, Y) = \cup_{n=0}^{\infty} P^n(X, Y)$ el espacio vectorial de todos los polinomios.

Veamos que si $P = \sum_{k=0}^n P_k$, los sumandos P_k que determinan P son únicos, y en particular $\deg P$ está bien definido.

Lema 4.0.13. Para cada $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, y cada $\delta > 0$ existen $a_{kj} \in \mathbb{R}$, $k, j = 0, \dots, n$ tales que dados X, Y espacios vectoriales sobre $\mathbb{K}$, $P \in P^n(X, Y)$ y $P_k \in P({}^kX, Y)$ tales que $P = \sum_{k=0}^n P_k$, entonces $P_k(x) = \sum_{j=0}^n a_{kj} P\left((1 - \frac{j}{n}\delta)x\right)$ para cada $x \in X$.

Demostración. Obsérvese que $P\left((1 - \frac{j}{n}\delta)x\right) = \sum_{k=0}^n (1 - \frac{j}{n}\delta)^k P_k(x)$, $j = 0, \dots, n$. Este sistema de ecuaciones puede expresarse de forma matricial, de forma análoga a la demostración de B.0.6. La matriz del sistema será de Vandermonde y en concreto tendrá inversa, por lo que $P_k(x)$ tendrá una expresión como la enunciada. $\square$

Proposición 4.0.14. Sean X, Y espacios vectoriales sobre $\mathbb{K}$, $n \in \mathbb{N}_0$ y $P \in P^n(X, Y)$. Entonces los polinomios homogéneos $P_k \in P(kX, Y)$ tales que $P = \sum_{k=0}^n P_k$ están determinados de forma única.

Demostración. Es una consecuencia directa del lema anterior. $\square$

La siguiente consecuencia de la fórmula polinomial 4.0.7 será de gran utilidad.

Lema 4.0.15. Sean X, Y dos espacios vectoriales sobre $\mathbb{K}$, $n \in \mathbb{N}$, y sea $P \in P^n(X; Y)$ tal que $P = \sum_{k=0}^n P_k$, donde $P_k \in P(kX; Y)$. Entonces

$$\check{P}_n(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{2^n n!} \sum_{\substack{\varepsilon_j = \pm 1 \\ j=1, \dots, n}} \varepsilon_1 \cdots \varepsilon_n P\left(a + \sum_{j=1}^n \varepsilon_j x_j\right)$$

para todo $a, x_1, \dots, x_n \in X$.

Demostración. Por (4.3) en la Proposición 4.0.7

$$\sum_{\substack{\varepsilon_j = \pm 1 \\ j=1, \dots, n}} \varepsilon_1 \cdots \varepsilon_n P_k\left(a + \sum_{j=1}^n \varepsilon_j x_j\right) = 0$$

siempre que $0 < k < n$, y esto por supuesto es cierto también para $k = 0$. Por lo tanto el resultado se deduce de la Fórmula de polarización (4.1). $\square$

Un corolario directo de este resultado es el siguiente.

Corolario 4.0.16. Sean X, Y dos espacios normados sobre $\mathbb{K}$ y sean $P, Q \in P(X, Y)$ tales que P y Q coinciden en una bola. Entonces $P = Q$.

Demostración. Es suficiente probar que si $P \in P(X, Y)$ se anula en alguna bola $B(a, r)$ entonces $P = 0$. Supongamos por reducción al absurdo que $P \neq 0$. Si denotamos por $n = \deg P$ y el n -sumando homogéneo de P por P_n , ha de cumplirse que $P_n \neq 0$. Sin embargo por el Lema 4.0.15 necesariamente $P_n(x) = 0$ para $x \in B(0, \frac{r}{n})$ y por homogeneidad $P_n = 0$, lo que supone una contradicción. $\square$

También puede deducirse fácilmente de la definición la siguiente propiedad.

Proposición 4.0.17. Sean X, Y espacios normados sobre $\mathbb{K}$, $n \in \mathbb{N}_0$ y $P \in P^n(X, Y)$, Supongamos que $P(x) = o(\|x\|^n)$, $x \rightarrow 0$. Entonces $P = 0$.

Demostración. Supongamos que $P = \sum_{j=k}^n P_j$, $P_j \in P^j(X, Y)$ y $P_k \neq 0$. Entonces existe $y \in X$ tal que $P_k(y) \neq 0$. Por tanto

$$0 = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{P(ty)}{\|ty\|^n} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{P_k(y) + tP_{k+1}(y) + \cdots + t^{n-k}P_n(y)}{t^{n-k}\|y\|^n}.$$

Esto supone una contradicción pues

$$\frac{\|P_k(y) + tP_{k+1}(y) + \cdots + t^{n-k}P_n(y)\|}{t^{n-k}\|y\|^n} \geq \frac{\|P_k(y)\| - t\|P_{k+1}(y)\| - \cdots - t^{n-k}\|P_n(y)\|}{t^{n-k}\|y\|^n}$$

y esta última es una función real de variable real que tiende a $+\infty$ cuando $t \rightarrow 0^+$. $\square$

Si X, Y son espacios normados, puede estudiarse la continuidad de $P \in P^n(X, Y)$, y puede caracterizarse de igual forma que los polinomios homogéneos gracias al Lema 4.0.13.

Proposición 4.0.18. Sean X, Y espacios normados y sea $P \in P^n(X, Y)$, $n \in \mathbb{N}_0$, con $P = \sum_{k=0}^n P_k$. Entonces son equivalentes

- (i) P es continua en X .
- (ii) P es continua en el origen.
- (iii) P está acotada en B_X .
- (iv) P está acotada en S_X .
- (v) P está acotada en el entorno de algún punto.
- (vi) Existe una constante K tal que $\|P(x)\| \leq K\|x\|^n$ para todo $x \in X$.

Demostración. Es suficiente probar que si P es acotada en el entorno de algún punto entonces P_k es continua en X , $k = 0, \dots, n$. En efecto, todas las condiciones de la proposición implican que P es acotada, y si las P_k son continuas, podemos aplicar la Proposición 4.0.3, con lo que cualquiera de las condiciones enunciadas se cumple para las P_k , y en consecuencia para P .

Supongamos pues que P está acotada en $B(a, 2r)$ para algún $a \in X$, $r > 0$. Entonces, por el Lema 4.0.13, tomando $\delta = \frac{r}{r+\|a\|}$, $P_k(x) = \sum_{j=0}^n a_{kj} P\left((1 - \frac{j}{n}\delta)x\right)$ para $k = 1, \dots, n$. Por tanto las P_k son acotadas en $B(a, r)$ ya que

$$\|x - a\| \leq r \Rightarrow \left\| \left(1 - \frac{j}{n}\delta\right)x - a \right\| \leq r + \delta \|x\| \leq 2r.$$

Aplicando la Proposición 4.0.3, se concluye que P_k , $k = 0, \dots, n$ son continuas. $\square$

Definición 4.0.19. Sean X, Y espacios normados y $n \in \mathbb{N}_0$. Denotamos por $\mathcal{P}^n(X, Y)$ al subespacio vectorial de $P^n(X, Y)$ formados por los polinomios continuos de grado a lo sumo n . Análogamente denotamos por $\mathcal{P}(X, Y)$ al subespacio vectorial de $P(X, Y)$ formado por los polinomios continuos. Por la Proposición 4.0.18 podemos dotar a estos subespacios de la norma

$$\|P\| = \sup_{x \in B_X} \|P(x)\|.$$

A continuación probaremos un resultado que nos permite estimar la norma de un polinomio continuo usando sus valores en una bola arbitraria.

Proposición 4.0.20. Sean X, Y dos espacios normados, $n \in \mathbb{N}$, sea $P \in \mathcal{P}^n(X; Y)$ tal que $P = \sum_{k=0}^n P_k$, $P_k \in \mathcal{P}({}^k X; Y)$, y sea $a \in X$. Entonces

$$\|P_n(x)\| \leq \frac{n^n}{n!} \sup_{t \in [-1, 1]} \|P(a + tx)\|$$

para todo $x \in X$. En particular, para cada $r > 0$

$$\sup_{x \in B(0, r)} \|P_n(x)\| \leq \frac{n^n}{n!} \sup_{x \in B(a, r)} \|P(x)\|.$$

Demostración. Por el Lema 4.0.15

$$\begin{aligned} \|P_n(x)\| &= n^n \left\| P_n\left(\frac{x}{n}\right) \right\| \leq \frac{n^n}{2^n n!} \sum_{\substack{\varepsilon_j = \pm 1 \\ j=1, \dots, n}} \left\| P\left(a + \frac{x}{n} \sum_{j=1}^n \varepsilon_j\right) \right\| \\ &\leq \frac{n^n}{n!} \sup_{t \in [-1, 1]} \|P(a + tx)\|. \end{aligned}$$

$\square$

El siguiente resultado, el lema polinomial, tiene importantes aplicaciones en la teoría de series de potencias y funciones analíticas, que aprovecharemos en las secciones posteriores. Para su prueba necesitaremos dos resultados previos.

Lema 4.0.21. Sean $0 < \varepsilon < r$ y $E \subset [0, r]$ tales que $\lambda(\bar{E}) \geq r - \frac{\varepsilon}{2}$, siendo λ la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}$. Además, sea $\rho : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ una función no decreciente. Entonces para cada $n \in \mathbb{N}$ existen puntos $x_0, \dots, x_n$ cumpliendo $|x_j - x_k| \geq |\rho(\frac{j}{n}) - \rho(\frac{k}{n})|(r - \varepsilon)$ para todo $j, k \in \{0, \dots, n\}$.

Demostración. Fijemos $n \in \mathbb{N}$. Definamos la función $\eta : [0, r] \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ por $\eta(x) = \lambda(\bar{E} \cap [0, x])$. Encontramos los puntos $x_0, \dots, x_n \in E$ por una construcción inductiva de forma que cumplan las dos siguientes condiciones:

$$x_j \geq x_{j-1} + \left(\rho\left(\frac{j}{n}\right) - \rho\left(\frac{j-1}{n}\right) \right) (r - \varepsilon), \quad j = 1, \dots, n, \quad (4.4)$$

$$\eta(x_j) < \rho\left(\frac{j}{n}\right) (r - \varepsilon) + \frac{j+1}{n+1} \frac{\varepsilon}{4}, \quad j = 0, \dots, n. \quad (4.5)$$

El enunciado del Lema se cumplirá gracias a (4.4).

Para empezar, elijamos $x_0 \in E \cap [\inf E, \inf E + \frac{1}{n+1} \frac{\varepsilon}{4}]$. Como $\bar{E} \cap (0, \inf E) = \emptyset$, tenemos

$$\begin{aligned} \eta(x_0) &= \lambda(\bar{E} \cap [0, \inf E]) + \lambda(\bar{E} \cap [\inf E, \inf E + x_0]) \\ &\leq \lambda\left(\left[\inf E, \inf E + \frac{1}{n+1} \frac{\varepsilon}{4}\right]\right) = \frac{1}{n+1} \frac{\varepsilon}{4}, \end{aligned} \quad (4.6)$$

y la condición (4.5) se cumple para $j = 0$.

Ahora supongamos que los puntos $x_0, \dots, x_{j-1}$ han sido elegidos. Escribamos $a = x_{j-1} + \left(\rho\left(\frac{j}{n}\right) - \rho\left(\frac{j-1}{n}\right) \right) (r - \varepsilon)$.

Razonando de manera similar a (4.6) y aplicando por hipótesis de inducción (4.5) tenemos

$$\begin{aligned} \eta(a) &\leq \eta(x_{j-1}) + \left(\rho\left(\frac{j}{n}\right) - \rho\left(\frac{j-1}{n}\right) \right) (r - \varepsilon) \\ &< \rho\left(\frac{j}{n}\right) (r - \varepsilon) + \frac{j}{n+1} \frac{\varepsilon}{4} < r - \frac{\varepsilon}{2}, \end{aligned} \quad (4.7)$$

Por tanto, como $\lambda(\bar{E}) \geq r - \frac{\varepsilon}{2}$, el conjunto $E \cap [a, r]$ debe ser un conjunto no vacío y podemos tomar $b = \inf(E \cap [a, r])$. Notese que $\eta(b) = \eta(a)$. Finalmente, tomemos $x_j \in E \cap [b, b + \frac{1}{n+1} \frac{\varepsilon}{4}]$. Entonces $\eta(x_j) \leq \eta(b) + \frac{1}{n+1} \frac{\varepsilon}{4} = \eta(a) + \frac{1}{n+1} \frac{\varepsilon}{4}$, lo cual combinado con (4.7) nos da (4.5). (4.4) se cumple por construcción. Obsérvese que la condición (4.5) se emplea en la prueba de forma auxiliar para garantizar que $x_j \in E$. $\square$

Proposición 4.0.22 (Fórmula de interpolación de Lagrange). Sea Y un espacio normado sobre $\mathbb{K}$, sean $x_0, \dots, x_n$ puntos distintos en $\mathbb{K}$, y sean $y_0, \dots, y_n \in Y$. Entonces existe un único polinomio $P \in \mathcal{P}^n(\mathbb{K}; Y)$ cumpliendo $P(x_j) = y_j$, $j = 0, \dots, n$. El

polinomio P puede ser expresado por la fórmula

$$P(x) = \sum_{j=0}^n \frac{w_j(x)}{w_j(x_j)} y_j,$$

donde

$$w_j(x) = \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq j}}^n (x - x_k).$$

Demostración. La fórmula para P implica la existencia de dicho polinomio. Para probar la unicidad nos apoyaremos en que el resultado se cumple para el caso escalar.

Supongamos que existen dos polinomios P_1, P_2 que cumplen la condición del enunciado. Entonces para cada $\phi \in Y^*$, $\phi \circ P_1 = \phi \circ P_2$, por la unicidad para el caso escalar.

Dado que Y^* separa los puntos de Y , concluimos que $P_1 = P_2$. $\square$

Lema 4.0.23 (Lema polinomial). Para cada $N \in \mathbb{N}$, $d > 0$, y para cada $q > 1$ existe un $\delta = \delta(N, d, q)$ tal que si Y es un espacio normado sobre $\mathbb{K}$, $A_j \subset \mathbb{K}$ son conjuntos compactos y conexos con $\text{diam}(A_j) \geq d$, $j = 1, \dots, N$, y $\phi \subset \mathcal{P}(\mathbb{K}^N, Y) \setminus \{0\}$ es una familia de polinomios puntualmente acotados en el conjunto $A = A_1 \times \dots \times A_N \subset \mathbb{K}^N$, entonces existe $M > 0$ tal que para cada $P \in \Phi$ se tiene que

$$\sup_{x \in A^\delta} \|P(x)\| \leq Mq^{\deg(P)},$$

donde $A^\delta = \{x \in \mathbb{K}^N; \text{dist}(x, A) < \delta\}$.

Demostración. La parte crucial de la prueba es el caso unidimensional, ya que el caso general se prueba fácilmente por inducción.

Supongamos que $N = 1$ y sea $d > 0$ y $q > 1$. Pongamos $r = \frac{d}{2}$ y

$$I(\xi) = \exp \int_0^1 \log \left(1 + \frac{3\xi}{rt^2} \right) dt.$$

Obsérvese que $I(\xi)$ está bien definida para $\xi \in [0, 1]$, pues $\int_0^1 \log \left(1 + \frac{3\xi}{rt^2} \right) dt$ es una integral impropia y el integrando tiene primitiva en $(0, 1]$ con límite finito cuando $t \rightarrow 0$. Por el Teorema de la convergencia dominada de Lebesgue tenemos que $\lim_{\xi \rightarrow 0^+} I(\xi) = 1$ y por tanto podemos encontrar $\delta > 0$ tal que $I(2\delta) < \sqrt{q}$.

Ahora supongamos que Y es un espacio normado sobre $\mathbb{K}$, $A \subset \mathbb{K}$ es un conjunto compacto y conexo tal que $\text{diam}(A) \geq d$, y $\Phi \subset (\mathbb{K}; Y)$ es una familia de polinomios puntualmente acotados en A . Fijemos un $u \in A$ arbitrario.

Dado que $\text{diam}(A) \geq d$, existen $a, b \in A$ tales que $d \leq |a - b| \leq |a - u| + |u - b|$. Por tanto sin pérdida de generalidad, podemos suponer $|a - u| \geq \frac{d}{2} = r$. Dado que A es conexo existe una aplicación $\varphi : [0, r) \rightarrow A$ que cumple $|u - \varphi(t)| = t$ para cada $t \in [0, r)$.

Definamos $E_k = \{t \in [0, r) : \|P(\varphi(t))\| \leq k \text{ para cada } P \in \Phi\}$. Como Φ es puntualmente acotado en A , $\bigcup_{k \in \mathbb{N}} E_k = [0, r)$. Tomemos $\varepsilon = \min\{\delta, \frac{r}{2}\}$. Como $E_k \subset E_{k+1}$, se deduce^I que existe $K \in \mathbb{N}$ tal que $\lambda(\overline{E_K}) \geq r - \frac{\varepsilon}{2}$. Denotemos $E = E_K$.

Ahora usaremos la Fórmula de interpolación de Lagrange (Proposición 4.0.22) con nodos contenidos en $\varphi(E)$, aprovechando el hecho de que los polinomios en Φ son uniformemente acotados por la constante K en el conjunto $\varphi(E)$. Eligiendo nodos distribuidos convenientemente obtenemos estimaciones en los polinomios w_j que aparecen en la fórmula de interpolación, y con ellas también en los polinomios en Φ .

Fijemos $n \in \mathbb{N}$. Veamos que la desigualdad del enunciado se satisface para cualquier $P \in \Phi \cap \mathcal{P}^n(X, Y)$.

Por el Lema 4.0.21, tomando $\rho(t) = t^2$, como $\lambda(\overline{E}) \geq r - \frac{\varepsilon}{2}$, existen puntos $t_0, \dots, t_n \in E$ tales que $|t_j - t_k| \geq \frac{|j^2 - k^2|}{n^2}(r - \varepsilon)$. Denotemos $x_j = \varphi(t_j)$, $j = 0, \dots, n$, y observamos que

$$|x_j - x_k| \geq \left| |\varphi(t_j) - u| - |u - \varphi(t_k)| \right| = |t_j - t_k| \geq \frac{|j^2 - k^2|}{n^2}(r - \varepsilon).$$

Por lo tanto

$$|w_j(x_j)| \geq (r - \varepsilon)^n \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq j}}^n \frac{|j^2 - k^2|}{n^2} \geq (r - \varepsilon)^n \frac{1}{2} \prod_{k=1}^n \frac{k^2}{n^2}.$$

Para ver la última desigualdad, obsérvese que

$$\begin{aligned} \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq j}}^n |j^2 - k^2| &= \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq j}}^n |k - j| |j + k| \\ &= ((n - j)(n - j - 1) \cdots 1 \cdot |-1| \cdots |-j|) \\ &\quad \cdot (j(j + 1) \cdots (2j - 1)(2j + 1) \cdots (n + j)) \\ &= \frac{n!}{n(n - 1) \cdots (n - j + 1)} \cdot \frac{n!(n + 1) \cdots (n + j)}{2} \\ &= \frac{1}{2} \left(\prod_{k=1}^n k^2 \right) \frac{(n + 1) \cdots (n + j)}{(n + 1 - j) \cdots n} \geq \frac{1}{2} \prod_{k=1}^n k^2. \end{aligned}$$

Además, para todo $x \in U(u, 2\delta)$ tenemos

$$|x - x_k| \leq |x - u| + |u - x_k| < 2\delta + t_k$$

^IPor ser $\{E_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ una sucesión expansiva, $r = \lambda(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_k) = \lim_{k \rightarrow \infty} \lambda(E_k)$.

$$\begin{aligned}
 &\leq 2\delta + t_n + t_k < 2\delta + r - \frac{n^2 - k^2}{n^2}(r - \varepsilon) \\
 &= 2\delta + \varepsilon + \frac{k^2}{n^2}(r - \varepsilon) = \left(\frac{k^2}{n^2} + \frac{2\delta + \varepsilon}{r - \varepsilon} \right) (r - \varepsilon) \\
 &\leq \left(\frac{k^2}{n^2} + \frac{6\delta}{r} \right) (r - \varepsilon)
 \end{aligned}$$

y consecuentemente

$$|w_j(x)| \leq (r - \varepsilon)^n \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq j}}^n \left(\frac{k^2}{n^2} + \frac{6\delta}{r} \right) \leq (r - \varepsilon)^n \prod_{k=1}^n \left(\frac{k^2}{n^2} + \frac{6\delta}{r} \right) \text{ para } j \in \{0, \dots, n\}.$$

Así

$$\left| \frac{w_j(x)}{w_j(x_j)} \right| \leq 2R_n^n, \text{ donde } R_n = \left(\prod_{k=1}^n \frac{\frac{k^2}{n^2} + \frac{6\delta}{r}}{\frac{k^2}{n^2}} \right)^{\frac{1}{n}}.$$

Ahora bien, la Proposición 4.0.22 implica que para cualquier $P \in \Phi \cap \mathcal{P}^n(X, Y)$ tenemos

$$P(x) = \sum_{j=0}^n \frac{w_j(x)}{w_j(x_j)} P(x_j), \quad x \in \mathbb{K},$$

y por tanto $\sup_{x \in U(u, 2\delta)} \|P(x)\| \leq 2(n+1)KR_n^n$.

Dado que

$$\log R_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \log \left(1 + \frac{6\delta}{r \frac{k^2}{n^2}} \right),$$

es una suma de Riemann de la integral $I(2\delta)$, se tiene que $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n = I(2\delta) < \sqrt{q}$. Por tanto existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $R_n < \sqrt{q}$ y $2(n+1) \leq (\sqrt{q})^n$ para $n \geq n_0$.

Así, tomando $L = \max\{\max_{n < n_0} 2(n+1)KR_n^n, K\}$ obtenemos $\sup_{x \in U(u, \delta)} \|P(x)\| < Lq^n$ donde $P \in \Phi \cap \mathcal{P}^n(X, Y)$. Finalizaremos la prueba del caso $N = 1$ cubriendo A con bolas abiertas de radio δ y usando la compacidad del conjunto A .

A continuación usaremos inducción sobre N para probar el lema para una dimensión finita arbitraria. Sin pérdida de generalidad usaremos la norma del máximo en $\mathbb{K}^N$ (todas son equivalentes).

Supongamos que el enunciado es cierto para todas las dimensiones hasta $N - 1$. Sea $d > 0$ y $q > 1$ y tomemos $\delta = \min\{\delta(1, d, \sqrt{q}), \delta(N - 1, d, \sqrt{q})\}$. Además, supongamos que Y es un espacio normado sobre $\mathbb{K}$, $A_j \subset \mathbb{K}$ son conjuntos conexos y compactos con $\text{diam}(A_j) \geq d$ para $j = 1, \dots, N$, y $\Phi \subset \mathcal{P}(\mathbb{K}^N; Y)$ es una familia de polinomios puntualmente acotados en $A = A_1 \times \dots \times A_N$.

Denotando $B = A_1 \times \cdots \times A_{N-1} \subset \mathbb{K}^{N-1}$ tenemos $A = B \times A_N$. Por conveniencia usaremos la notación para los polinomios en $\mathbb{K}^N$ usando coordenadas. Para cada $x \in A_N$ consideremos la familia $\Phi_x = \{P_x; P \in \Phi\} \subset \mathcal{P}(\mathbb{K}^{N-1}; Y)$, donde $P_x(z) = P(z_1, \dots, z_{N-1}, x)$ para $z = (z_1, \dots, z_{N-1}) \in \mathbb{K}^{N-1}$.

Teniendo en cuenta que, por construcción, $\deg(P_x) \leq \deg(P)$ y aplicando hipótesis de inducción, sabemos que existe $M_x > 0$ tal que

$$\sup_{z \in B^\delta} \|P_x(z)\| \sup_{z \in B^\delta} \|P(z, x)\| \leq M_x (\sqrt{q})^{\deg(P)}$$

para todo $P \in \Phi$.

Tomemos ahora $\Psi = \{x \mapsto (\sqrt{q})^{-\deg(P)} \cdot P(z, x); P \in \Phi, z \in B^\delta\} \subset \mathcal{P}(\mathbb{K}; Y)$. Acabamos de probar que esta familia es puntualmente acotada en A_N . Así, por la primera parte de la demostración, existe $M > 0$ tal que

$$\sup_{x \in A_N^\delta} \|(\sqrt{q})^{-\deg(P)} \cdot P(z, x)\| \leq M (\sqrt{q})^{\deg(P)}$$

para todo $P \in \Phi$ y $z \in B^\delta$, de donde se deduce la afirmación del lema. $\square$

Concluimos esta sección estudiando la diferenciabilidad de los polinomios homogéneos continuos.

Lema 4.0.24. Sean X, Y dos espacios normados y $P \in \mathcal{P}(^n X; Y)$. Entonces $P \in C^\infty(X; Y)$ y

$$DP(x)[h] = n\check{P}(^{n-1}x, h)$$

para todo $x, h \in X$. De forma más general, para cada $k \leq n$ tenemos

$$D^k P(x)(h_1, \dots, h_k) = n(n-1) \cdots (n-k+1) \check{P}(^{n-k}x, h_1, \dots, h_k)$$

En particular $D^n P$ es la aplicación constante, luego para $k > n$ $D^k P = 0$.

Demostración. El polinomio P es de clase C^∞ por la Proposición 2.3.1 y la regla de la cadena.

Por el Lema 4.0.11 tenemos

$$\frac{1}{t}(P(x+th) - P(x)) = \frac{1}{t} \left(\sum_{j=0}^{n-1} \binom{n}{j} t^{n-j} \check{P}(^j x, ^{n-j} h) \right)$$

y tomando el límite $t \rightarrow 0$ obtenemos la fórmula para DP . Obsérvese que en la primera fórmula para una dirección fijada h la aplicación $x \mapsto \frac{\partial P}{\partial h}(x)$ pertenece a $\mathcal{P}(^{n-1} X; Y)$ mientras que en la segunda fórmula $DP \in \mathcal{P}(^{n-1} X; \mathcal{L}(X; Y))$.

Deduciremos la fórmula para la diferencial Fréchet superior por inducción sobre k . Supongamos que la fórmula se cumple para $k < n$. Observando esta fórmula, podemos ver que $D^k P \in \mathcal{P}({}^{n-k}X, \mathcal{L}^s({}^kX, Y))$. Por tanto, por la primera parte de la demostración

$$\begin{aligned} D^{k+1}P(x)(h_1, \dots, h_{k+1}) &= D(D^k P(x))(h_1)(h_2, \dots, h_{k+1}) \\ &= (n-k) \widetilde{D^k P}({}^{n-k-1}x, h_1)(h_2, \dots, h_{k+1}) \end{aligned}$$

Ahora, aplicando la hipótesis de inducción, sabemos que $D^k P(x)(h_1, \dots, h_k) = n(n-1) \cdots (n-k+1) \check{P}({}^{n-k}x, h_1, \dots, h_k)$.

Por la Proposición 4.0.8 $I : \mathcal{P}({}^{n-k}X, Y) \rightarrow \mathcal{L}({}^{n-k}X, Y)$, $I(P) = \check{P}$, es un isomorfismo, luego necesariamente

$$\widetilde{D^k P}({}^{n-k-1}x, h_1)(h_2, \dots, h_{k+1}) = n(n-1) \cdots (n-k+1) \check{P}({}^{n-k-1}x, h_1, \dots, h_{k+1}),$$

de donde se deduce la fórmula para $k+1$.

Obsérvese que, en concreto, para $k = n$ la expresión de $D^n P(x)$ no depende de x (es constante). $\square$

Observación 4.0.25. *En particular, por el 4.0.24, si $P \in \mathcal{P}({}^nX, Y)$ entonces $D^k P \in \mathcal{P}({}^{n-k}X, \mathcal{L}^s({}^kX, Y))$.*

Capítulo 5

Fórmula de Taylor

Sean X, Y espacios normados sobre $\mathbb{K}$, $A \subset X$ abierto, $a \in A$ y $h \in X$ tal que $a + h \in A$.

Si $f : A \rightarrow Y$ es Fréchet diferenciable en a , se tiene que

$$f(a + h) = f(a) + Df(a)(h) + o(\|h\|), \quad h \rightarrow 0,$$

es decir, podemos realizar una aproximación de $f(x)$ en un entorno de a de primer orden (la aproximación es una $o(\|h\|)$) mediante el polinomio de grado 1 dado por $P(h) = f(a) + Df(a)(h)$.

En el análisis de funciones reales de variable real, se puede mejorar esta aproximación mientras la función sea suficientemente derivable, empleando polinomios de Taylor de mayor grado.

En esta sección se extiende este procedimiento al contexto del trabajo, empleando el concepto generalizado de polinomio introducido en la sección anterior.

En lo que sigue mantendremos el supuesto de X, Y espacios normados, $A \subset X$ abierto, $a \in A$, $h \in X$ tal que $a + h \in A$, $f : A \rightarrow Y$ y $k \in \mathbb{N}$.

Emplearemos la siguiente notación.

Notación 5.0.1. Si existe $D^k f(a)$, Denotaremos al polinomio k -homogéneo asociado a $D^k f(a)$, $\widehat{D^k f(a)}$, por $d^k f(a)$. Por conveniencia también emplearemos la notación $d^0 f = f$.

Lema 5.0.2. $d^k f(a)$ existe si y solo si $D(d^{k-1} f)(a)$ existe, y en ese caso coinciden.

Demostración. Denotemos por $I : \mathcal{P}^{(k-1)}X, Y \rightarrow \mathcal{L}^{(k-1)}X, Y$ al isomorfismo $I(P) = \check{P}$ dado en la Proposición 4.0.8. Se tiene entonces que $D^{k-1}f = I \circ d^{k-1}f$ y $d^{k-1}f = I^{-1} \circ D^{k-1}f$, luego la equivalencia se sigue de la regla de la cadena. Además, de nuevo por la regla de la cadena, $D(D^{k-1}f)(a) = I \circ D(d^{k-1}f)(a)$, luego

$$\begin{aligned} d^k f(a)(h) &= D^k f(a)(^k h) = \left(D(D^{k-1}f)(a)(h) \right) (^{k-1} h) \\ &= I \left(D(d^{k-1}f)(a)(h) \right) (k-1^h) = \left(D(d^{k-1}f)(a)(h) \right) (h) \end{aligned}$$

□

Probemos ahora que podemos aproximar f en un entorno de a por un polinomio de forma que el error sea del orden que queramos, si f es suficientemente diferenciable.

Teorema 5.0.3. (*Aproximación de la fórmula de Taylor*) *Supongamos que $D^k f(a)$ existe. Entonces*

$$\left\| f(a+h) - \sum_{j=0}^k \frac{1}{j!} d^j f(a)(h) \right\| = o(\|h\|^k), h \rightarrow 0.$$

Demostración. Realizaremos la prueba por inducción sobre k .

Para $k = 1$ el enunciado se deduce de la definición de Fréchet diferenciable (ya observado en la introducción de la sección).

Supongamos ahora que $k > 1$ y que el teorema es cierto para $k - 1$. Definamos

$$R(h) = f(a+h) - \sum_{j=0}^k \frac{1}{j!} d^j f(a)(h).$$

Dado que f es Fréchet diferenciable en un entorno de a , con Df continua, por las propiedades de la diferencial y por ser los polinomios son de clase C^∞ , R también es diferenciable en un entorno de 0, con DR continua en 0.

Para evaluar DR , denotemos $P_j(h) = \frac{1}{j!} d^j f(a)(h)$. Entonces por el Lema 4.0.24, para todo $h, s \in X$

$$DP_j(h)(s) = \frac{1}{(j-1)!} D^j f(a)(^{j-1}h, s) = \frac{1}{(j-1)!} D^{j-1}(Df)(a)(^{j-1}h)(s),$$

donde en la última igualdad hemos empleado la Observación 1.1.3 (a).

Por tanto $DP_j(h) = \frac{1}{(j-1)!} d^{j-1}(Df)(a)(h) \in \mathcal{L}(X; Y)$, $j = 1, \dots, k$. De aquí se deduce que para cada $h \in V$

$$DR(h) = Df(a+h) - \sum_{j=0}^{k-1} \frac{1}{j!} d^j (Df)(a)(h).$$

Usando la hipótesis de inducción en la aplicación Df concluimos que $\|DR(h)\| = o(\|h\|^{k-1})$, $h \rightarrow 0$.

Así, existe una bola abierta $V = U(0, \delta)$, $\delta > 0$ en la que $\|DR(s)\|$, $s \in V$, está acotado, y por la Proposición 1.0.9, para todo $h \in V$

$$\|R(h)\| = \|R(h) - R(0)\| \leq \|h\| \sup_{s \in V} \|DR(s)\|.$$

Por lo tanto

$$\|R(h)\| \leq \|h\| \sup_{k \in V} \|DR(k)\| = o(\|h\|^k), \quad h \rightarrow 0.$$

□

Proposición 5.0.4. (*Unicidad de la fórmula de Taylor*) Supongamos que existen $P_j \in P(jX, Y)$, $j = 0, \dots, k$, tales que

$$\left\| f(a+h) - \sum_{j=0}^k P_j(h) \right\| = o(\|h\|^k), \quad h \rightarrow 0.$$

Entonces los polinomios P_j están determinados de forma única. En particular, si existe $D^k f(a)$ entonces $P_j = \frac{1}{j!} d^j f(a)$, $j = 0, \dots, k$.

Demostración. Supongamos que existen polinomios $Q_j \in P(jX, Y)$, $j = 0, \dots, k$ tales que $\left\| f(a+h) - \sum_{j=0}^k Q_j(h) \right\| = o(\|h\|^k)$, $h \rightarrow 0$. Entonces,

$$\left\| \sum_{j=0}^k (Q_j - P_j)(h) \right\| = o(\|h\|^k), \quad h \rightarrow 0.$$

Dado que $\sum_{j=0}^k (Q_j - P_j)$ es un polinomio de grado a lo sumo k , por la Proposición 4.0.17 ha de ser idénticamente nulo, de donde se deduce el resultado. □

La siguiente proposición puede interpretarse como un resultado de tipo recíproco al Teorema 5.0.3 y muestra que la propiedad de la fórmula de Taylor de ser un polinomio aproximante casi lo caracteriza.

Veremos que si podemos aproximar una función por polinomios de grado a lo sumo k en un abierto, y se cumplen condiciones adicionales, podemos asegurar que la función será de clase C^k en ese abierto y que la aproximación polinomial, que es única por la Proposición 5.0.4, coincide con la fórmula de Taylor.

Teorema 5.0.5. *Supongamos que existen aplicaciones continuas $b_j : A \rightarrow \mathcal{P}^j(X, Y)$, $j = 0, \dots, k$ tales que si definimos, para $x \in A$ y $h \in X$ tal que $x + h \in A$,*

$$R_k(x, h) := f(x + h) - \sum_{j=0}^k \frac{1}{j!} b_j(x)(h),$$

se cumple que $R_k(x, 0) = 0$ y $R_k(x, h) = o(\|h\|^k)$ cuando $(x, h) \rightarrow (x_0, 0)$ para todo $x_0 \in A$.

Entonces f es de clase C^k y $d^j f = b_j$ para $j = 0, \dots, k$.

Demostración. Obsérvese que en la expresión $(x, h) \rightarrow (x_0, 0)$ consideramos el espacio $X \oplus X$ con la norma producto.

Realizaremos la prueba por inducción sobre k .

Supongamos que $k = 1$. Por hipótesis, dados $x, x_0 \in A$ y $h \in X$ con $x + h \in A$, $f(x + h) = b_0(x) + b_1(x)(h) + R_1(x, h)$, con $\|R_1(x, h)\| = o(\|h\|)$, $(x, h) \rightarrow (x_0, 0)$ y $R_1(x, 0) = 0$.

Por tanto, tomando $h = 0$, $f(x) = b_0(x)$, y en consecuencia $f(x+h) = f(x) + b_1(x)(h) + o(\|h\|)$, $h \rightarrow 0$. Por tanto f es diferenciable en A con $df = Df = b_1$, función continua, por lo que f también es de clase C^1 en A .

Sea $k > 1$ y supongamos que el resultado es cierto para $k - 1$.

$R_{k-1}(x, h) = R_k(x, h) + (1/k!)b_k(x)(h)$. Por tanto $R_{k-1}(x, 0) = 0$ y dado $x_0 \in A$

$$\frac{\|R_{k-1}(x, h)\|}{\|h\|^{k-1}} = \left[(1/k!) \|b_k(x)\| + \frac{\|R_k(x, h)\|}{\|h\|^k} \right] \|h\| \rightarrow 0, \quad (x, h) \rightarrow (x_0, 0).$$

Por tanto se cumplen las hipótesis de enunciado para $k - 1$ y por hipótesis de inducción, $b_0 = f, \dots, b_{k-1} = d^{k-1}f$.

Sea ahora $x \in A$ fijo. Sea $\varepsilon > 0$ tal que $U(x, 2\varepsilon) \subset A$. Para $y, z \in X$ con $\|y\|, \|z\| < \varepsilon$, $f(x + y + z)$ está bien definido, y podemos expresarlo de dos formas diferentes

$$\begin{aligned} f(x + y + z) &= f(x + y) + df(x + y)(z) + \dots + \\ &\quad (1/(k-1)!)d^{k-1}f(x + y)(z) + (1/k!)b_k(x + y)(z) + R_k(x + y, z) \end{aligned} \quad (5.1)$$

y

$$\begin{aligned} f(x + y + z) &= f(x) + df(x)(y + z) + \dots + \\ &\quad (1/(k-1)!)d^{k-1}f(x)(y + z) + (1/k!)b_k(x)(y + z) + R_k(x, y + z). \end{aligned} \quad (5.2)$$

Podemos sustituir $b_k(x)$ por su aplicación multilinear simétrica asociada, que denotaremos por $a_k(x)$, y de manera análoga, sustituir $d^j f(x)$ por $D^j f(x)$ para $j = 1, \dots, k$. Desarrollense $a_k(x)(^k y + z)$ y $D^j f(x)(^j y + z)$ y réstense entonces (5.1) y (5.2), denotando el término que dependa de $(^j z)$ por $g_j(y)$ para $j = 1, \dots, k$, y el término independiente de z por $g_0(y)$. Entonces

$$g_0(y) + g_1(y)(z) + \dots + g_{k-1}(y)(^{k-1}z) + g_k(y)(^k z) + [R_k(x + y, z) - R_k(x, y + z)] = 0.$$

Obsérvese que

$$g_{k-1}(y)(^{k-1}z) = \frac{1}{(k-1)!} \left(D^{k-1} f(x + y) - D^{k-1} f(x) - a_k(x)(y) \right) (^{k-1}z), \quad (5.3)$$

donde hemos denotado por $a_k(x)(y)$ a la aplicación $k - 1$ -multilinear tal que $z \mapsto a_k(x)(y, ^{k-1}z)$, y

$$g_k(y)(^k z) = \frac{1}{k!} (b_k(x + y)g_k(y) + b_k(x)g_k(y)) (^k z).$$

Tomemos ahora $\|z\| < \|y\|$. Entonces

$$\frac{\|g_k(y)(^k z)\|}{\|y\|^k} \leq \frac{1}{n!} \|a_k(x + y) - a_k(x)\| \rightarrow 0, \quad \text{cuando } y \rightarrow 0,$$

y

$$\frac{\|R_k(x + y, z) - R_k(x, y + z)\|}{\|y\|^k} \leq \frac{\|R_k(x + y, z)\|}{\|z\|^k} + \frac{2^k R_k(x, y + z)}{\|y\|^k} \rightarrow 0, \quad y \rightarrow 0,$$

pues si $y \rightarrow 0$, tanto $(x + y, z)$ como $(x, y + z)$ tienden a $(x, 0)$.

En consecuencia

$$g_0(y) + g_1(y)(z) + \dots + g_{k-1}(y)(^{k-1}z) = o(\|y\|^k) \quad (5.4)$$

Si probamos que $g_{k-1}(x)(^{k-1}z) = o(\|y\|^k)$ habremos acabado, pues en ese caso, por (5.3)

$$\begin{aligned} & \frac{\|D^{k-1} f(x + y) - D^{k-1} f(x) - a_k(x)(y)\|}{\|y\|} \\ & \leq \frac{\|D^{k-1} f(x + y) - D^{k-1} f(x) - a_k(x)(y)\| \|z\|^{k-1}}{\|y\|^k} \rightarrow 0, \quad y \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Esto muestra que $D^{k-1}f$ es diferenciable y $D^k f(x) = a_k$. Por tanto $b_k = d^k f$ y dado que a_k es continua, f será de clase C^k .

Veamos pues este último paso. Sean $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ k escalares distintos y apliquemos (5.4) sustituyendo z por $\lambda_j z$ para $j = 1, \dots, k$. Tenemos así un sistema de k ecuaciones que podemos expresar de forma matricial:

$$\begin{bmatrix} 1 & \lambda_1 & \dots & \lambda_1^{k-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \lambda_k & \dots & \lambda_k^{k-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g_0(y)(z) \\ \vdots \\ g_k(y)(\lambda_k^{k-1} z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} o(\|y\|^k) \\ \vdots \\ o(\|y\|^k) \end{bmatrix}.$$

Dado que los λ_j son diferentes, la matriz de escalares es invertible (es una matriz de Vandermonde), de donde se deduce que $g_{k-1}(x)(\lambda_k^{k-1} z) = o(\|y\|^k)$.

□

Obsérvese que si f es de clase C^k y tomamos en el enunciado anterior $d^j f = b_j$ para $j = 0, \dots, k$, sabemos que dado $x \in A$ fijo, $R_k(x, h) = o(\|h\|^k)$ cuando $h \rightarrow 0$, pero no necesariamente se cumple $R_k(x, h) = o(\|h\|^k)$ cuando $(x, h) \rightarrow (x_0, 0)$, para todo $x_0 \in A$.

Hemos visto anteriormente que si existe $D^k f(a)$, podemos aproximar $f(a+h)$ por un polinomio de grado k único en un entorno de a , y el error o el resto es de la forma $o(\|h\|^k)$. A continuación veremos que si además f es de clase C^{k+1} e Y es un espacio de Banach, podemos dar una expresión para ese resto. Para ello utilizaremos dos lemas previos

Lema 5.0.6. Sea $A \subset \mathbb{K}$, Y un espacio de Banach y $u : A \rightarrow Y$ una aplicación $k+1$ -veces Fréchet diferenciable en A . Definamos

$$f(t) := \sum_{j=0}^k \frac{1}{j!} (1-t)^j D^j u(t).$$

Entonces para cada $t \in A$

$$Df(t) = \frac{(1-t)^k}{k!} D^{k+1} u(t).$$

Demostración. Obsérvese que si definimos $g(t) := (1-t)^j$, $f(t) := D^j u(t)$ y $h : \mathbb{K} \oplus Y \rightarrow Y$, $h(x, y) := xy$, siendo h es una aplicación bilineal continua, se tiene que $\frac{1}{j!} (1-t)^j D^j u(t) = h(f(t), g(t))$. Empleando las reglas de cálculo de la diferencial Fréchet se concluye la fórmula del enunciado. □

Lema 5.0.7. Con la notación del lema anterior. Si $[0, 1] \subset A$ y u es una aplicación de clase C^{k+1} en A , entonces

$$u(1) - \sum_{j=0}^k \frac{1}{j!} u^{(j)}(0) = \int_0^1 \frac{(1-t)^k}{k!} u^{(k+1)}(t) dt,$$

donde hemos empleado la integral de Bochner.

Demostración. Basta aplicar el Teorema 3.2.4 a la función f definida en el lema anterior. $\square$

Teorema 5.0.8. Supongamos que f es de clase C^{k+1} en A , y que el segmento $[a, a+h] := \{a+th : t \in [0, 1]\}$ está contenido en A . Entonces

$$f(a+h) = \sum_{j=0}^k \frac{1}{j!} d^j f(a)(h) + \left(\int_0^1 \frac{(1-t)^k}{k!} d^{k+1} f(a+th) \right) (h)$$

Demostración. Definamos $u(t) := f(a+th)$, para $t \in [0, 1]$. Por la regla de la cadena, u es de clase C^{k+1} . Además, aplicando la Observación 1.1.5,

$$u^{(j)}(t) = D^j u(t)(1) = D^j f(a+th)(^j h) = d^j f(a+th)(h).$$

Aplicando el Lema 5.0.7, llegamos a que

$$f(a+h) = \sum_{j=0}^k \frac{1}{j!} d^j f(a)(h) + \int_0^1 \frac{(1-t)^k}{k!} d^{k+1} f(a+th)(h).$$

Para finalizar, para cada $h \in X$ consideremos la aplicación $\varepsilon_h : \mathcal{P}({}^k X, Y) \rightarrow Y$, $\varepsilon_h(P) = P(h)$, que evalúa cada polinomio k -homogéneo en h . Claramente $\varepsilon_h \in \mathcal{L}(\mathcal{P}({}^k X, Y), Y)$ y aplicando la Proposición 3.1.2, se concluye la prueba. $\square$

Capítulo 6

Series de potencias

El estudio de las series de potencias resulta esencial para el posterior análisis de las funciones analíticas. Recogemos en este apartado los conceptos y resultados que serán necesarios para la próxima sección.

Definido el concepto de polinomio para espacios de vectoriales arbitrarios, el concepto de serie de potencias se extiende fácilmente.

Definición 6.0.1. Sean X, Y espacios normados sobre $\mathbb{K}$. Una serie de potencias es una serie de funciones de la forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n, \quad (6.1)$$

donde $P_n \in \mathcal{P}(^n X, Y)$ (polinomios n -homogéneos continuos).

El interior del conjunto de puntos donde la serie está bien definida, es decir, $\text{Int}\{x \in X : \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) \text{ converge}\}$, se denomina dominio de convergencia.

El radio de convergencia de la serie de potencias real

$$\sum_{n=0}^{\infty} \|P_n\| \lambda^n \quad (6.2)$$

se denomina radio de convergencia en norma de la serie de potencias (6.1).

Observaciones 6.0.2.

- (a) Si la serie de potencias (6.1) converge en $x \in X$ (o simplemente si $\{P_n(x)\}$ está acotada), entonces converge absolutamente en λx para cada $\lambda \in \mathbb{K}$, $|\lambda| < 1$, pues $\sum_{n=0}^{\infty} \|P_n(\lambda x)\| = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n \|P_n(x)\|$.

En consecuencia, si Y es un espacio de Banach, el dominio de convergencia de (6.1) es un conjunto balanceado, y la serie converge absolutamente en este dominio.

Para esta última afirmación obsérvese que, si denotamos por G el dominio de convergencia, dado $x \in G$ existirá $\mu > 1$ tal que $\mu x \in G$ (hemos tomado G como un conjunto abierto).

- (b) Por la fórmula de Cauchy-Hadamard para series de potencias reales, el radio R de convergencia en norma de la serie (6.1) satisface

$$R = \frac{1}{\limsup_{n \rightarrow \infty} \|P_n\|^{\frac{1}{n}}}.$$

- (c) Si $R > 0$ es el radio de convergencia en norma de (6.1), entonces la serie converge absoluta y uniformemente en $B(0, r)$ para todo $r < R$, es decir, $\sum_{n=0}^{\infty} \|P_n\|$ converge uniformemente en $B(0, r)$. Por tanto si Y es un espacio de Banach, $\sum_{n=0}^{\infty} P_n$ convergerá uniformemente en $B(0, r)$.

Demostración. Basta observar que para todo $x \in B(0, r)$ $\|P_n(x)\| \leq \|P_n\| r^n$ con $\sum_{n=0}^{\infty} \|P_n\| r^n < \infty$. $\square$

Por otro lado, si la serie (6.1) converge uniformemente en $U(0, r)$ entonces su radio de convergencia en norma es al menos r .

Demostración. Podemos considerar $N \in \mathbb{N}$ tal que $\|\sum_{n=m}^{\infty} P_n(x)\| \leq 1$ para $x \in U(0, r)$ y $m \geq N$. Por tanto para $x \in U(0, r)$ y $m \geq N$ se tiene que $\|P_n(x)\| \leq \|\sum_{n=m}^{\infty} P_n(x) - \sum_{n=m+1}^{\infty} P_n(x)\| \leq 2$ y con ello $\|P_n\| r^m \leq 2$. Aplicando la fórmula de Cauchy-Hadamard para el radio de convergencia en norma, concluimos lo enunciado. $\square$

Teorema 6.0.3. Sean X, Y espacios normados sobre $\mathbb{K}$. Si existe un conjunto absorbente $A \subset X$ tal que la serie de potencias (6.1) converge en $a + A$ para cierto $a \in X$, entonces el radio de convergencia en norma (6.1) es positivo.

Demostración. Por ser A un conjunto absorbente, para cada $x \in S_X$ existe $\delta_x > 0$ tal que la serie $\sum_{n=0}^{\infty} P_n(a + tx)$, converge para $t \in [-\delta_x, \delta_x]$. Se deduce que la sucesión de polinomios^I $\{t \mapsto P_n(a + tx)\}_{n=0}^{\infty}$ es puntualmente acotada en $[-\delta_x, \delta_x]$. Por

^ICada $t \mapsto P_n(a + tx)$ es un polinomio de grado a lo sumo n . En efecto, aplicando la propiedad de multilinealidad de $\widetilde{P}_n$ (véase Observación B.0.2) podemos descomponer $P_n(a + tx)$ en sumandos de la forma $\widetilde{P}_n(a, \overset{(n-j)}{\cdot}, a, tx, \overset{(j)}{\cdot}, tx)$, $j = 0, \dots, n$, polinomios j -homogéneos si los consideramos como funciones de variable t .

el Lema polinomial (Lema 4.0.23) existen $M_x \geq 1$ tal que para cada $n \in \mathbb{N}$ tenemos $\sup_{t \in [-\delta_x, \delta_x]} \|P_n(a + tx)\| < M_x^n 2^n$. Así, por el Lema 4.0.20, para $t \in [-\delta_x, \delta_x]$

$$\|P_n(tx)\| < \frac{n^n}{n!} M_x^n 2^n < e^n M_x^n 2^n \Rightarrow \|P_n\left(\frac{t}{2eM_x}x\right)\| < 1.$$

Por tanto, tomando $\lambda_x = \frac{\delta_x}{2eM_x}$ obtenemos

$$\|P_n(tx)\| < 1 \text{ cuando } 0 \leq t \leq \lambda_x, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Tomemos $C = \{tx; x \in S_X, 0 \leq t \leq \lambda_x\}$, conjunto absorbente en X . Dado que los polinomios P_n son continuos,

$$\|P_n(y)\| \leq 1 \text{ cuando } y \in \bar{C}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Por el Lema A.0.6 el conjunto absorbente $\bar{C}$ contiene una bola $B(z, r)$ para cierto $r > 0$. Ahora por el Lema 4.0.20

$$\|P_n\| = \frac{1}{r^n} \sup_{x \in B(0, r)} \|P_n(x)\| \leq \frac{1}{r^n} \frac{n^n}{n!} \sup_{x \in B(z, r)} \|P_n(x)\| < \frac{e^n}{r^n}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Por lo tanto por la fórmula de Cauchy-Hadamard (Observaciones 6.0.2) el radio de convergencia en norma de (6.1) es al menos $\frac{r}{e}$. $\square$

Si trabajamos con espacios de Banach de dimensión finita, podemos probar con los conocimientos previos que la serie de potencias (6.1) converge, en su dominio de convergencia, de forma localmente uniforme (además de converger absolutamente). Generalizaremos este resultado en la sección 7.2, empleando esta demostración del caso finito.

Para esta prueba necesitaremos el siguiente lema.

Lema 6.0.4. *Sea Y un espacio normado sobre $\mathbb{K}$, $X = \mathbb{K}^N$, y sea G el dominio de convergencia de la serie de potencias (6.1). Entonces para cada $a \in G$ existe un entorno V de a , $0 < \lambda < 1$, y $M > 0$ tal que $\sup_{x \in V} \|P_n(x)\| \leq M\lambda^n$ para cada $n \in \mathbb{N}$.*

Demostración. Dado $a \in G$ sean $D_1, \dots, D_N \subset \mathbb{K}$ discos cerrados con un radio positivo tales que $V = D_1 \times \dots \times D_N \subset G$ es un entorno de a (posible por ser G abierto no vacío).

Dado que V es compacto (X tiene dimensión finita) y $X \setminus G$ cerrado, existe $\mu > 1$ tal que $\mu^2 V \subset G$ (aplíquese el Teorema de separación de Hahn-Banach). Escribamos $\lambda = \frac{1}{\mu}$. Como $\{P_n\}_{n=0}^\infty$ es puntualmente acotado en $\mu^2 V$, por el Lema polinomial (Lema 4.0.23) existe un $M > 0$ tal que $\sup_{x \in \mu^2 V} \|P_n(x)\| \leq M\mu^n$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Así pues

$$\|P_n(x)\| = \mu^{-2n} \|P_n(\mu^2 x)\| \leq M\lambda^n$$

para cada $x \in V$, $n \in \mathbb{N}$. $\square$

De forma inmediata se deduce el siguiente corolario.

Corolario 6.0.5. *Sean X e Y espacios normados sobre $\mathbb{K}$, $\dim X < \infty$. Entonces la serie de potencias (6.1) converge absolutamente de forma localmente uniforme en su dominio de convergencia.*

Incluimos ahora dos resultados sobre la convergencia de series de complejificaciones de polinomios, que serán de utilidad en la sección 7.2. Para más información sobre complejificaciones véase Apéndice D

Proposición 6.0.6. *Sean X, Y un espacios normados reales. Sean $P_n \in \mathcal{P}(^n X, Y)$ para $n \in \mathbb{N}_0$, y sean $\tilde{P}_n \in \mathcal{P}(^n \tilde{X}, \tilde{Y})$. Si $R > 0$ es el radio de convergencia en norma de la serie de potencias (6.1), entonces el radio de convergencia en norma de la serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} \tilde{P}_n$ es al menos $\frac{R}{2}$.*

Demostración. Basta tener en cuenta la Observación 6.0.2 (b) y que por el Teorema D.0.7 para $n \in \mathbb{N}$ $\|\tilde{P}_n\|_{\mathbb{C}} \leq 2^n \|P_n\|$. $\square$

Proposición 6.0.7. *Sean X espacio normado e Y espacio de Banach reales. Sean $P_n \in \mathcal{P}(^n X, Y)$ para $n \in \mathbb{N}_0$, y sean $\tilde{P}_n \in \mathcal{P}(^n \tilde{X}, \tilde{Y})$. Si $G \subset X$ es el dominio de convergencia de la serie de potencias (6.1), entonces la serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} \tilde{P}_n$ converge en un abierto $\tilde{G} \subset \tilde{X}$ conteniendo G .*

Demostración. Sea $a \in G$. Tomemos $r > 0$, y $\mu > 1$ tales que $\mu^2 U(a, 2r) \subset G$ (posible por ser G abierto).

Si $x \in U_X(a, r)$, $y \in B_X(0, r)$, entonces $\mu^2(x + ty) \in G$ para cada $t \in [-1, 1]$. De forma análoga al Teorema 6.0.3 deducimos que la sucesión de polinomios $\{t \mapsto \tilde{P}_n(\mu^2(x + ty))\}_{n=1}^{\infty}$ es puntualmente acotada para cada $t \in [-1, 1]$.

Podemos aplicar entonces el Lema polinomial (Lema 4.0.23) y deducir que existe $M > 0$ tal que $\|\tilde{P}_n(\mu^2(x + ty))\| \leq M\mu^n$ para todo^{II} $t \in \mathbb{C}$ tal que $\text{dist}(t, [-1, 1]) < \delta$, con $\delta = \delta(1, 2, \mu)$ constante del Lema polinomial.

En particular $\|\tilde{P}_n(x + ity)\| \leq M\mu^{-m}$ para $t \in (-\delta, \delta)$. Por tanto la serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} \tilde{P}_n$ converge en $V_a = U_X(a, r) + iU_X(0, \delta r)$. Basta tomar $\tilde{G} = \cup_{a \in G} V_a$. $\square$

Concluimos esta sección con un resultado preliminar sobre la diferenciabilidad de las

^{II}Podemos considerar $t \mapsto \tilde{P}_n(\mu^2(x + ty))$ definidas para $t \in \mathbb{C}$, y puntualmente acotadas en $[-1, 1] \subset \mathbb{C}$, con $\text{diam}[-1, 1] = 2$.

series de potencias, que será tratado en más profundidad al estudiar las funciones analíticas.

Teorema 6.0.8. Sean X espacio normado, e Y espacio de Banach sobre $\mathbb{K}$. Supongamos que la serie de potencias (6.1) tiene un radio de convergencia en norma positivo R . Consideremos la aplicación $f : U(0, R) \rightarrow Y$ definida como $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)$. Entonces la serie de potencias $\sum_{n=k}^{\infty} d^k P_n$ tiene radio de convergencia en norma R , $f \in C^\infty(U(0, R); Y)$ y

$$d^k f(x) = \sum_{n=k}^{\infty} d^k P_n(x) \quad (6.3)$$

para cada $x \in U(0, R)$ y $k \in \mathbb{N}$, siendo $P_n = \frac{1}{n!} d^n f(0)$.

Demostración. Nótese que por la Observación ?? $\sum_{n=k}^{\infty} d^k P_n$ es en efecto una serie de potencias.

Comenzaremos probando la afirmación acerca del radio de convergencia en norma y supondremos en primer lugar $k = 1$.

Usando el Lema 4.0.24 y Corolario 4.0.10 obtenemos

$$\|DP_n\| = \sup_{x, h \in B_X} \|n\check{P}_n^{(n-1)}(x, h)\| \leq n \sqrt{\frac{n^n}{(n-1)^{n-1}}} \|P_n\|.$$

Por otro lado, $\|DP_n\| = \sup_{x, h \in B_X} \|n\check{P}_n^{(n-1)}(x, h)\| \geq n \sup_{x \in B_X} \|P_n(x)\| = n\|P_n\|$.

Empleando estas desigualdades junto con la fórmula de Cauchy-Hadamard para el radio de convergencia en norma (Observaciones 6.0.2), la serie de potencias (6.3) para $k = 1$ tiene un radio^{III} de convergencia en norma R .

Para derivadas superiores se deduce inmediatamente por inducción, teniendo en cuenta que $d^k P_n(x) = D(d^{k-1} P_n(x))$.

Para probar la igualdad en (6.3), emplearemos el Teorema 2.8.1 aplicado a la sucesión de funciones $\{\sum_{n=0}^m P_n\}_{m=0}^{\infty}$ definida en el abierto convexo $U(0, R)$. Para verificar que se cumplen las hipótesis del Teorema únicamente hemos de comprobar que $\sum_{n=0}^{\infty} D^k P_n$ converge uniformemente en $U(0, R)$, lo cual se deduce fácilmente teniendo en cuenta:

- Dado que Y es un espacio de Banach, convergencia y convergencia absoluta de las series de potencias son conceptos equivalentes, y siguiendo la Observación 6.0.2 (c), $\sum_{n=0}^{\infty} d^k P_n$ converge uniformemente en $U(0, R)$.

^{III}Para comprobarlo obsérvese que $n^{\frac{1}{n}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$ y que $\frac{n}{(n-1)^{1-\frac{1}{n}}} = \left(\frac{n}{n-1}\right)^{1-\frac{1}{n}} n^{\frac{1}{n}} = \left(\frac{n}{n-1}\right)^{\frac{1}{n-1}} n^{\frac{1}{n}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$

- Aplicando la Fórmula de polarización (Proposición 4.0.7)

$$\|d^k P_n(x)\| \leq \|D^k P_n(x)\| \leq \frac{k^k}{k!} \|d^k P_n(x)\|.$$

En consecuencia podemos concluir que $f \in C^\infty(U(0, R); Y)$, y que

$$d^k f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} d^k P_n(x), \quad k \in \mathbb{N}.$$

Por el Lema 4.0.24 sabemos que

$$d^k P_n(x)(h) = n(n-1) \cdots (n-k+1) \widetilde{P}_n({}^{n-k}x, {}^k h).$$

luego en particular para $k > n$ $d^k P_n = 0$ y podemos deducir la igualdad en 6.3.

Por último, aplicando de nuevo la fórmula anterior vemos que $d^k f(0)(h) = n! P_n(h)$, lo que concluye la prueba. $\square$

Capítulo 7

Funciones analíticas

Analizaremos en esta sección el concepto de función analítica entre espacios normados arbitrarios y estudiaremos la teoría de funciones holomorfas.

Definición 7.0.1. Sean X, Y espacios normados sobre $\mathbb{K}$, $A \subset X$ abierto y $f : A \rightarrow Y$. Decimos que f es analítica si para cada $a \in A$ existen polinomios $P_n \in \mathcal{P}(^n X, Y)$ y $\delta > 0$ tal que

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x - a) \quad (7.1)$$

para $x \in U(a, \delta)$. Denotamos por $C^\omega(A, Y)$ al espacio vectorial de todas las aplicaciones analíticas de A en Y .

Observaciones 7.0.2. (a) La representación de f mediante la fórmula en (7.1) recibe el nombre de expansión en serie de potencias de f en a .

(b) Por el Teorema 6.0.3 la serie de potencias en (7.1) tiene un radio de convergencia en norma positivo. Por tanto, si Y es un espacio de Banach, por la Observación 6.0.2 (c), la serie de potencias converge uniformemente a f en un entorno de a .

(c) Con las hipótesis de la definición, si $f \in C^\omega(A, Y)$ y $Z \subset X$ es un subespacio, entonces $f|_{A \cap Z} \in C^\omega(Z, Y)$.

Demostración. Basta tener en cuenta las Observaciones 4.0.2 y 4.0.6. Así, la fórmula (7.1) es igualmente válida para $f|_{A \cap Z}$. $\square$

Si X, Y son espacios normados reales, $A \subset \tilde{X}$ abierto y $f \in C^\omega(A, \tilde{Y})$ tal que $f(A \cap X) \subset Y$, entonces $f|_{A \cap X} \in C^\omega(A \cap X, Y)$.

Demostración. Recordemos que denotamos por $\tilde{X}$ la complejificación de X , y que X, Y son espacios normados reales tales que $X \subset \tilde{X}$, (con la notación introducida en el Apéndice D).

Nótese además que las Observaciones 4.0.2 y 4.0.6 son igualmente válidas si consideramos, un espacio normado real incluido en un espacio normado complejo, en lugar de un subespacio.

Por último, nótese que si restringimos el espacio de llegada de una aplicación continua a un subespacio que contenga su imagen, esta aplicación sigue siendo continua.

Teniendo en cuenta lo anterior, se deduce fácilmente que la fórmula (7.1) es igualmente válida para $f|_{A \cap X}$. $\square$

Como aplicación directa de Teorema 6.0.8 tenemos el siguiente resultado.

Teorema 7.0.3. *Sean X un espacio normado e Y un espacio de Banach sobre $\mathbb{K}$, $A \subset X$ abierto y $f \in C^\omega(A, Y)$. Entonces $f \in C^\infty(A, Y)$ y para cada $a \in A$, la expansión en serie de potencias de f en a es única y viene dada por la serie de Taylor*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} d^n f(a)(x - a) \quad (7.2)$$

para x en algún entorno de a . También $d^k f \in C^\omega(A, \mathcal{P}^k(X, Y))$ para cada $k \in \mathbb{N}$.

Destacamos también el siguiente teorema, que muestra cómo la analiticidad tiene fuertes implicaciones en el comportamiento global de una función.

Teorema 7.0.4. *Sea X un espacio normado e Y un espacio de Banach sobre $\mathbb{K}$, $A \subset X$ un abierto conexo e $f, g \in C^\omega(A, Y)$. Si $f = g$ en algún subconjunto abierto de A , entonces $f = g$ en A .*

Demostración. Sea $G = \text{Int } x \in A : f(x) = g(x)$. Entonces por hipótesis G es un subconjunto abierto no vacío de A . Veamos que G es relativamente cerrado, lo que implicará, por ser A conexo, que $f = g$ en A .

Sea $z \in G$ un punto de acumulación. Dado que $f - g = 0$ en el conjunto abierto G , concluimos que $d^n f = d^n g$ para todo $n \in \mathbb{N}_+$. Por la continuidad de las diferenciales obtenemos que $d^n f(z) = d^n g(z)$, $n \in \mathbb{N}_+$, por lo que aplicando el Teorema 7.0.3 $f = g$ en un entorno de z . Así $z \in G$, lo que prueba que G es relativamente cerrado. $\square$

Corolario 7.0.5. *Sea X un espacio de Banach real, Y un espacio de Banach complejo, $U \subset \tilde{X}$ un abierto conexo y $f, g \in C^\omega(U, Y)$. Si $f = g$ en algún subconjunto no vacío de $U \cap X$ que es relativamente abierto en X , entonces $f = g$ en U .*

Demostración. Sea $h := f - g$ y sea $a \in U \cap X$ tal que $h = 0$ en un entorno de a en X .

Denotemos por $P_n = \frac{1}{n!}d^n h(a)$ y sea V un entorno de a en $\tilde{X}$ tal que $h(x) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x - a)$ para $x \in V$. Por el párrafo anterior, $d^n h(a)|_X = d^n(h|_{U \cap X})(a) = 0$, y por la Proposición D.0.6 $P_n = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}_0$. Por tanto $h = 0$ en V , y por el Teorema 7.0.4 $f = g$ en U . $\square$

7.1. Funciones analíticas en espacios de Banach complejos

En este apartado caracterizaremos las funciones analíticas entre espacios de Banach complejos, viendo que en este caso las nociones de función analítica y función diferenciable Fréchet coinciden, tal y como sucede con las funciones complejas de variable compleja.

Observación 7.1.1. *Dados X, Y espacios normados complejos, $A \subset X$ abierto y $f : A \rightarrow Y$. Si f es Fréchet diferenciable en A decimos que f es holomorfa. Denotamos por $H(A, Y)$ al espacio vectorial de todas las funciones holomorfas de A a Y . Para funciones con imagen en $\mathbb{C}$ emplearemos la notación simplificada $H(A)$.*

Para abordar la equivalencia entre función holomorfa y analítica necesitaremos una serie de resultados previos de análisis complejo, comenzando con el siguiente Teorema de Hartogs, que adjuntamos sin demostración por su longitud y complejidad, véase [8].

Teorema 7.1.2. *Sea Y un espacio de Banach complejo, $n \in \mathbb{N}$, $A \subset \mathbb{C}^n$ y $f : A \rightarrow Y$. Si f es holomorfa en cada variable, entonces f es holomorfa.*

Teorema 7.1.3. *Sea Y un espacio de Banach complejo, $U \subset \mathbb{C}$, y $f : U \rightarrow Y$. Entonces f es holomorfa si y sólo si $\phi \circ f$ es holomorfa para todo $\phi \in Y^*$.*

Demostración. $\boxed{\implies}$ La composición de funciones holomorfas es holomorfa.

$\boxed{\impliedby}$ Sea $x \in U$ arbitrario. Probaremos que la diferencial $f'(x)$ existe mostrando que la aplicación $z \mapsto \frac{1}{z}(f(x + z) - f(x))$ es de Lipschitz. Para ello fijemos un $r > 0$ tal que $B(x, r) \subset U$ y sea $\gamma(t) = x + re^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$. Para cualquier $y, z \in U(0, r) \setminus \{0\}$, $y \neq z$, y

cualquier $\phi \in Y^*$ se tiene que

$$\begin{aligned} & \phi \left(\frac{1}{z-y} \left(\frac{f(x+z) - f(x)}{z} - \frac{f(x+y) - f(x)}{y} \right) \right) \\ &= \frac{1}{z-y} \left(\frac{\phi \circ f(x+z) - \phi \circ f(x)}{z} - \frac{\phi \circ f(x+y) - \phi \circ f(x)}{y} \right) \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\phi \circ f(w)}{(w-x)(w-x-z)(w-x-y)} dw, \end{aligned}$$

donde en la última igualdad hemos usado la fórmula de Cauchy^I para funciones de variable compleja sobre la función holomorfa $\phi \circ f$. Denotemos por $M_{\phi} = \max |\phi \circ f|$. Entonces para cualquier $y, z \in B(0, \frac{r}{2}) \setminus \{0\}$ tal que $y \neq z$ se tiene que

$$\left| \phi \left(\frac{1}{z-y} \left(\frac{f(x+z) - f(x)}{z} - \frac{f(x+y) - f(x)}{y} \right) \right) \right| \leq \frac{1}{2\pi} M_{\phi} \frac{4}{r^3} \int_{\gamma} dw = \frac{4M_{\phi}}{r^2}. \quad (7.3)$$

Ahora podemos considerar la familia de funciones de Y^{**}

$$\left\{ \phi \mapsto \phi \left(\frac{1}{z-y} \left(\frac{f(x+z) - f(x)}{z} - \frac{f(x+y) - f(x)}{y} \right) \right) \right\},$$

puntualmente acotada por (7.3). Aplicando el principio de acotación uniforme de Banach-Steinhaus deducimos que existe $M \in \mathbb{R}$ tal que

$$\left\| \frac{f(x+z) - f(x)}{z} - \frac{f(x+y) - f(x)}{y} \right\| \leq M|z-y|$$

cuando $y, z \in B(0, \frac{r}{2}) \setminus \{0\}$, lo cual concluye la prueba. $\square$

Este resultado nos permite generalizar resultados sobre funciones complejas de variable compleja tales como el siguiente teorema.

Teorema 7.1.4. *Sea $n \in \mathbb{N}$, $A \subset \mathbb{C}^n$ y $f \in H(A)$. Entonces $f \in C^{\infty}(A)$.*

Demostración. Véase [6] Teoremas 9.10.1, 9.3.6. $\square$

Analizaremos por último dos teoremas que recuerdan y generalizan resultados del análisis complejo clásico. En ellos emplearemos el concepto de integral de Bochner a lo largo de una curva diferenciable con continuidad $\gamma : [\alpha, \beta] \mapsto \mathbb{C}$, definida por

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_{\alpha}^{\beta} \gamma'(t) f(\gamma(t)) dt \quad (7.4)$$

$$\begin{aligned} \text{I} \frac{\phi \circ f(w)}{(w-x)(w-x-z)(w-x-y)} &= \phi \circ f(w) \left(\frac{1}{zy} \frac{1}{w-x} + \frac{1}{z(z-y)} \frac{1}{w-x-z} + \frac{1}{y(y-z)} \frac{1}{w-x-y} \right), \quad \text{luego} \\ \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\phi \circ f(w)}{(w-x)(w-x-z)(w-x-y)} dw &= \frac{1}{zy} \phi \circ f(x) + \frac{1}{z(z-y)} \phi \circ f(x+z) + \frac{1}{y(y-z)} \phi \circ f(x+y). \end{aligned}$$

para cualquier f continua definida en $\gamma([\alpha, \beta])$ con imagen en un espacio de Banach.

Teorema 7.1.5 (Fórmula de Cauchy). *Sea X un espacio normado e Y un espacio de Banach complejos, $A \subset X$ abierto, y $f : A \rightarrow Y$ n veces Fréchet diferenciable en A . Sea $a \in A$, $h \in X$, y $r > 0$ tal que $a + \zeta h \in A$ para cada $|\zeta| \leq r$. Escribamos $\gamma(t) = re^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$. Entonces*

$$d^k f(a + \tau h)(h) = \frac{k!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(a + \zeta h)}{(\zeta - \tau)^{k+1}} d\zeta \quad (7.5)$$

para todo $|\tau| < r$ y $k \in \{0, \dots, n\}$.

Demostración. Sea $\phi \in Y^*$ y pongamos $g(\zeta) = \phi \circ f(a + \zeta h)$. Entonces g es una función holomorfa en un entorno del disco $\{\zeta \in \mathbb{C}; |\zeta| \leq r\}$ y por la fórmula de Cauchy para funciones de una variable compleja

$$g^{(k)}(\tau) = \frac{k!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{g(\zeta)}{(\zeta - \tau)^{k+1}} d\zeta.$$

Como ϕ , por ser lineal y continua, conmuta con la diferenciación y la integración (Proposición 3.1.2), obtenemos

$$\phi(d^k f(a + \tau h)(h)) = d^k(\phi \circ f)(a + \tau h)(h) = g^{(k)}(\tau) = \phi \left(\frac{k!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(a + \zeta h)}{(\zeta - \tau)^{k+1}} d\zeta \right).$$

La fórmula que buscamos se deduce del hecho de que Y^* separa los puntos de Y . □

Corolario 7.1.6. *Sea X un espacio normado e Y un espacio de Banach complejos, $A \subset X$ abierto, y $f : A \rightarrow Y$ n veces Fréchet diferenciable en A . Sea $a \in A$ y $R > 0$ tal que f está acotada por M en $B(a, R) \subset A$, $R > 0$. Entonces para cada $k \in \{0, \dots, n\}$*

$$\|d^k f(a)\| \leq \frac{Mk!}{R^k}. \quad (7.6)$$

Demostración. Obsérvese que si $h \in B_X$ y $|\zeta| \leq R$, $a + \zeta h \in B(a, R)$. Sea $\gamma(t) = Re^{it}$, por el Teorema 7.1.5 se tiene

$$\|d^k f(a)\| = \sup_{h \in B_X} \|d^k f(a)(h)\| \leq \frac{k!}{2\pi} \int_{\gamma} \frac{\|f(a + \zeta h)\|}{|\zeta|^{k+1}} d\zeta \leq \frac{k!}{2\pi R^{k+1}} M \int_{\gamma} d\zeta = \frac{Mk!}{R^k}.$$

□

Observación 7.1.7. *Como anticipamos al inicio de la sección, veremos que si f es una aplicación entre espacios de Banach complejos holomorfa, es analítica (y por tanto de clase C^∞), por lo que las fórmulas (7.5) y (7.6) son válidas para $k \in \mathbb{N}_0$.*

Teorema 7.1.8. *Sea Y un espacio de Banach complejo y $f \in H(U(a, r), Y)$ para algún $a \in \mathbb{C}$, $r > 0$. Entonces $f \in \mathbb{C}^\infty(U(a, r), Y)$ y*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} d^n f(a)(x - a)$$

para cada $x \in U(a, r)$.

Demostración. Consideremos el Teorema 7.1.5 tomando $X = Y = \mathbb{C}$, $A = U(a, r)$, $h = 1$. Se tiene que para $|\tau| < r$

$$f(a + \tau) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(a + \eta)}{\zeta - \tau} d\zeta.$$

Es decir, si consideramos $z = a + \tau \in U(a, r)$ y $\varphi(t) = a + re^{it}$,

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\varphi} \frac{f(w)}{w - z} dw,$$

que coincide formalmente con la conocida fórmula de Cauchy del análisis complejo de una variable.

Teniendo esto en cuenta, así como las propiedades de la integral de Bochner, podemos trasladar formalmente la prueba del resultado análogo para funciones complejas de variable compleja a este caso. Véase [1] Teorema 2.2.16. $\square$

Obsérvese que por esta última proposición, para funciones entre $\mathbb{C}$ y un espacio de Banach complejo, los conceptos de función holomorfa y analítica coinciden. Emplearemos a continuación este resultado para generalizar esta equivalencia a funciones entre espacios de Banach complejos.

Teorema 7.1.9. *Sea X, Y dos espacios de Banach complejos, $A \subset X$ abierto, y $f : A \rightarrow Y$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

- i) f es analítica.
- ii) $f \in C^\infty(A; Y)$.
- iii) f es holomorfa.
- iv) $\phi \circ f$ es holomorfa para todo $\phi \in Y^*$.
- v) f es diferenciable Gâteaux y $\phi \circ f$ es Baire medible para todo $\phi \in Y^*$.

vi) $f|_{E \cap A}$ es holomorfa para cada subespacio afín $E \subset X$ de dimensión 1 y $\phi \circ f$ es Baire medible para todo $\phi \in Y^*$.

vii) f es de clase G^∞ en A .

Demostración.

$i) \Rightarrow ii)$ Se deduce del Teorema 7.0.3.

$ii) \Rightarrow iii) \Rightarrow iv)$ y $iii) \Rightarrow v)$ son evidentes.

$iv) \Rightarrow vi)$ Se deduce del Teorema 7.1.3 (obsérvese que este teorema también es válido para funciones definidas sobre cualquier espacio normado complejo unidimensional).

$v) \Rightarrow vi)$ Se deduce del hecho de que diferenciabilidad Gâteaux y diferenciabilidad Fréchet son equivalentes en espacios unidimensionales.

$vi) \Rightarrow vii)$ Por el Teorema 7.1.2 $f|_{Z \cap U}$ es holomorfa para todo subespacio $Z \subset X$ de dimensión finita. Así f es de clase G^∞ por el Corolario 2.7.4 y el Teorema 7.1.2.

$vii) \Rightarrow i)$ Fijemos $a \in U$, sea $\eta > 0$ tal que $U(a, 2\eta) \subset U$, y escribamos $P_n = \frac{1}{n!} \widehat{\sigma^n f(a)}$. Dado $x \in U(a, \eta)$, $x \neq a$, y sea $g(\zeta) = f(a + \zeta(x - a))$ para $\zeta \in \mathbb{C}$, $|\zeta| < 2$. Por construcción g es holomorfa y usando el Teorema 7.1.8, obtenemos

$$f(x) = g(1) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} d^n g(0)(1).$$

Ahora, por las Observaciones 1.1.5 y 1.1.7 (b) se tiene que

$$d^n g(0)(1) = g^{(n)}(0) = \frac{d}{dt_n} \cdots \frac{d}{dt_1} g\left(\sum_{i=1}^n t_i\right) = \sigma^n f(a)(x - a, \dots, x - a) = P_n(x - a)$$

lo cual implica que f es analítica. $\square$

La última parte de la demostración anterior, nos da de forma directa la prueba del siguiente resultado.

Teorema 7.1.10. Sean X, Y espacios de Banach complejos, $A \subset X$ abierto, $f \in H(A, Y)$ y $a \in A$. Entonces la fórmula (7.2) es válida para cualquier $x \in A$ tal que $a + \lambda(x - a) \in U$.

De esta caracterización de las funciones holomorfas también podemos extraer dos resultados que serán fundamentales en la próxima sección.

Teorema 7.1.11. Sean X, Y espacios de Banach complejos, $A \subset X$ un abierto, y sea $f_n \in H(A, Y)$, $n \in \mathbb{N}$, una sucesión de funciones puntualmente convergente de forma débil a una función $f : A \rightarrow Y$. Si las restricciones de f_n a cada subespacio afín unidimensional de X convergen de forma débil localmente uniforme, entonces f es holomorfa.

Demostración. Sea $\phi \in Y^*$. Por hipótesis $\phi \circ f_n$ converge uniformemente a $\phi \circ f$, por lo que $\phi \circ f$ es de Borel.

Por otro lado, dado $E \subset X$ subespacio afín unidimensional, $\phi \circ (f_n|_{E \cap A}) \rightarrow \phi \circ (f|_{E \cap A})$ localmente uniforme en $A \cap E$. Entonces la función $\phi \circ (f|_{E \cap A})$ es holomorfa por la versión clásica del teorema para funciones de una variable compleja (que por tanto es válida para funciones definidas en un espacio normado complejo unidimensional arbitrario), véase [1] Teorema 2.2.17. Ahora es suficiente aplicar el Teorema 7.1.9. $\square$

Corolario 7.1.12. *Sean X, Y dos espacios de Banach complejos, $A \subset X$ abierto, y $f_n \in H(A; Y)$, $n \in \mathbb{N}$. Si la sucesión $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge de forma localmente uniforme en A a una aplicación $f : A \rightarrow Y$, entonces f es holomorfa y $d^k f_n \rightarrow d^k f$ de forma localmente uniforme en A para cada $k \in \mathbb{N}$.*

Demostración. El hecho de que f es holomorfa se deduce del Teorema 7.1.11. Fijemos $a \in A$ y sea $r > 0$ tal que $f_n \rightarrow f$ uniformemente en $B(a, 2r)$. Para todo $k \in \mathbb{N}$ y $x \in B(a, r)$ obtenemos, empleando el Corolario 7.1.6

$$\|d^k f_n(x) - d^k f(x)\| = \|d^k (f_n - f)(x)\| \leq \frac{k!}{r^k} \sup_{y \in B(x, r)} \|(f_n - f)(y)\| \leq \frac{k!}{r^k} \sup_{y \in B(a, 2r)} \|(f_n - f)(y)\|,$$

lo cual implica que $d^k f_n \rightarrow d^k f$ uniformemente en $B(a, r)$. $\square$

7.2. Analiticidad de series de potencias

Por definición, las funciones analíticas pueden representarse localmente como series de potencias. Probaremos a continuación un enunciado recíproco, que toda serie de potencias es analítica en su dominio de convergencia.

Teorema 7.2.1. *Sean X, Y dos espacios de Banach sobre $\mathbb{K}$ y $P_n \in \mathcal{P}(^n X; Y)$ para $n \in \mathbb{N}_0$. Sea $A \subset X$ el dominio de convergencia de la serie de potencias*

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n. \quad (7.7)$$

Pongamos $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)$ para $x \in A$. Entonces f es analítica en A . Es más, para cada $a \in A$ existe un entorno abierto y balanceado de cero, V , que contiene a a y es tal que

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sup_{x \in V} \|P_n(x)\| < +\infty. \quad (7.8)$$

En particular, la serie (7.7) converge absolutamente de forma localmente uniforme en U . Además,

$$d^k f(x) = \sum_{n=k}^{\infty} d^k P_n(x) \text{ para cada } x \in A, k \in \mathbb{N}. \quad (7.9)$$

Demostración. Trataremos el caso real y el caso complejo por separado.

- Supongamos que $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Por el Corolario 6.0.5 la serie de potencias (7.7) converge de forma localmente uniforme en $A \cap Z$ para todo subespacio afín unidimensional $Z \subset X$. Así f es analítica por el Teorema 7.1.11.

Pongamos $\varphi(x) = \max_{t \in \mathbb{C}, |t| < 1} \|f(tx)\|$ para $x \in A$. Obsérvese que el disco unitario en $\mathbb{C}$ es compacto y por la Observación 6.0.2 (a) A es un conjunto balanceado, por lo que φ está bien definida.

Veamos que φ es continua en A . Sea $x_0 \in A$. Dado $\varepsilon > 0$, por ser $x \mapsto \|f(tx)\|$ una función continua en A , existe $\delta > 0$ tal que si $\|x - x_0\| < \delta$ se tiene $|\|f(tx)\| - \|f(tx_0)\|| < \varepsilon$. Por tanto $\|f(tx_0)\| - \varepsilon < \|f(tx)\| < \|f(tx_0)\| + \varepsilon$, luego $\varphi(x_0) - \varepsilon < \varphi(x) < \varphi(x_0) + \varepsilon$.

Tomemos ahora $a \in A$ y definamos $W = \{x \in A; \varphi(x) < \varphi(a) + 1\}$. Nótese que W es un entorno balanceado de cero que contiene a a (W es abierto por la continuidad de φ , contiene al cero y, por construcción, $\varphi(\lambda x) \leq \varphi(x)$ si $|\lambda| < 1$). Sea $0 < \lambda < 1$ tal que $a \in \lambda W$ y denotemos $V = \lambda W$.

Por el Teorema 7.0.3 tenemos que $P_n = \frac{1}{n!} d^n f(0)$. Entonces, para $y \in W$, $n \in \mathbb{N}_0$ usando la fórmula de Cauchy (Teorema 7.1.5) con $\gamma(t) = re^{it}$, $r > 0$ suficientemente pequeño, obtenemos que

$$\|P_n(y)\| = \frac{1}{n!} \|d^n f(0)(y)\| \leq \frac{1}{2\pi} \left\| \int_{\gamma} \frac{f(\zeta y)}{\zeta^{n+1}} d\zeta \right\| \leq \varphi(y) \leq \varphi(a) + 1.$$

Por lo tanto $\|P_n(x)\| = \lambda^n \|P_n(x/\lambda)\| < (\varphi(a) + 1)\lambda^n$ para $x \in V$, $n \in \mathbb{N}_0$, de donde se deduce la segunda afirmación del enunciado.

Para finalizar, la fórmula (7.9) se deduce del Corolario 7.1.12.

- En el caso $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, por el Lema 6.0.7 existe un abierto $\tilde{A} \subset \tilde{X}$ que contiene a A tal que el complejificado de la serie, $\sum_{n=0}^{\infty} \tilde{P}_n$, converge en $\tilde{A}$, y por tanto el teorema le es aplicable.

Dado que $\tilde{f}$ es analítica en $\tilde{A}$, por la Observación 7.0.2 (b) tenemos que f es analítica en U .

Para cada $a \in \tilde{A}$ existe un entorno abierto y balanceado de cero, $\tilde{V}$, que contiene a y es tal que se cumple (7.8). Tomando $V = \tilde{V} \cap X \subset \tilde{V}$ se deduce la misma propiedad para f .

La fórmula (7.9) se deduce de forma directa teniendo en cuenta la Proposición 2.7.2 y el hecho que si $Q_n \rightarrow Q$ para $Q_n, Q \in \mathcal{P}(^k \tilde{X}; \tilde{Y})$, entonces $Q_n|_X \rightarrow Q|_X$ en $\mathcal{P}(^k X; Y)$.

□

7.3. Funciones analíticas en espacios de Banach reales

Ejemplificaremos en este último apartado cómo las principales propiedades en el estudio de la diferenciabilidad Fréchet de una función también son válidas en el estudio de la analiticidad. Será esencial en esta extensión que para funciones entre espacios de Banach complejos diferenciabilidad Fréchet y analiticidad son equivalentes.

Teorema 7.3.1. *Sean X, Y espacios de Banach reales, $A \subset X$ abierto y $f \in C^\omega(A, Y)$. Entonces existe un abierto $\tilde{A} \subset \tilde{X}$ tal que $\tilde{A} \cap X = A$ y una única aplicación $\tilde{f} \in H(\tilde{U}, \tilde{Y})$ tal que $\tilde{f}|_A = f$. En concreto, si denotamos el radio de convergencia del desarrollo en serie de f en a por R_a , entonces podemos tomar $\tilde{A} = \cup_{a \in A} U_{\tilde{X}}(a, r_a)$, donde $r_a = \min \left\{ \frac{R_a}{2}, \text{dist}(a, X \setminus A) \right\}$. La extensión viene entonces dada por*

$$\tilde{f}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{P}_n(x - a) \quad (7.10)$$

para $x \in U_{\tilde{X}}(a, r_a)$, donde $\tilde{P}_n = \frac{1}{n!} d^n f(a)$.

Demostración. Definamos la aplicación $\tilde{f}_a : U_{\tilde{X}}(a, r_a) \rightarrow \tilde{Y}$ por la fórmula 7.10. $\tilde{f}_a$ está bien definida por el Lema 6.0.6 y es analítica por el Teorema 7.2.1.

Definamos ahora $\tilde{f}$ como $\tilde{f}(x) = \tilde{f}_a(x)$ si $x \in U_{\tilde{X}}(a, r_a)$. Veamos que $\tilde{f}$ está bien definida. Si $U_{\tilde{X}}(a, r_a) \cap U_{\tilde{X}}(b, r_b) \neq \emptyset$ para dos puntos se tiene que $\|a - b\| \leq \|a - b\|_{\mathbb{C}} < r_a + r_b$, de donde se deduce que $U_X(a, r_a) \cap U_X(b, r_b)$ es un subconjunto de A relativamente abierto en X . Por tanto, por el Corolario 7.0.5 $\tilde{f}_a = \tilde{f}_b$ en $U_{\tilde{X}}(a, r_a) \cap U_{\tilde{X}}(b, r_b)$.

Así, $\tilde{f}$ es una extensión holomorfa de f . De nuevo por el Corolario 7.0.5, esta extensión es única. □

A continuación veremos dos ejemplos de versiones analíticas de resultados ya conocidos sobre diferenciabilidad Fréchet. De ellos se infiere un método más general para obtener

estas versiones a partir de los resultados ya conocidos. Será esencial el Teorema 7.3.1, la equivalencia entre analiticidad y diferenciabilidad Fréchet para funciones entre espacios de Banach complejos y la Observación 7.0.2 (c).

Teorema 7.3.2. (Regla de la cadena-versión analítica) Sean X, Y, Z espacios de Banach reales y $U \subset X$, $V \subset Y$ abiertos. Supongamos además que tenemos $g : U \rightarrow Y$ con $g(U) \subset V$ tal que $g \in C^\omega(U, Y)$, y $f : V \rightarrow Z$ tal que $f \in C^\omega(V, Z)$. Entonces $f \circ g$ es una función analítica sobre U .

Demostración. Consideremos la extensiones de g y f a aplicaciones $\tilde{g}$ y $\tilde{f}$ definidas en los entornos $\tilde{U}$ de U y $\tilde{V}$ de V respectivamente. Por la continuidad de $\tilde{g}$ podemos suponer que $\tilde{g}(\tilde{U}) \subset \tilde{V}$, reduciendo el entorno $\tilde{U}$ si es necesario. Por la Proposición 2.6.1 $\tilde{f} \circ \tilde{g}$ es holomorfa en $\tilde{U}$, luego su restricción a U es analítica por la Observación 7.0.2 (c). $\square$

Teorema 7.3.3 (Teorema de la función implícita - versión analítica). Sean X, Y , y Z tres espacios de Banach sobre $\mathbb{K}$, $G \subset X \oplus Y$ un conjunto abierto, y $f \in C^\omega(G; Z)$. Sean $(x_0, y_0) \in G$ y $D_2f(x_0, y_0)$ un isomorfismo de Y en Z . Entonces existen entornos abiertos U de x_0 en X y V de y_0 en Y tales que existe una única aplicación $u : U \rightarrow V$ cumpliendo que $f(x, u(x)) = f(x_0, y_0)$ para todo $x \in U$ y tal que esta aplicación u es analítica en U .

Demostración. El Teorema 2.9.2 cubre el caso complejo, luego supongamos que X, Y, Z son reales. Por Teorema 2.9.2 existen entornos W de x_0 y V de y_0 en Y , y una única aplicación $u : W \rightarrow V$ cumpliendo que $f(x, u(x)) = f(x_0, y_0)$ para todo $x \in W$.

Tomemos ahora $G_1 = W \times V$ y consideremos la extensión holomorfa $\tilde{f} : \tilde{G}_1 \rightarrow \tilde{Z}$. Como $\widetilde{X \oplus Y}$ es isomorfo a $\tilde{X} \oplus \tilde{Y}$, podemos ver $\tilde{f}$ como una aplicación sobre $\tilde{G}_1 \subset \tilde{X} \oplus \tilde{Y}$, lo que nos permite considerar las derivadas parciales de $\tilde{f}$ (recuérdese Sección 2.4). Ahora, teniendo en cuenta que la extensión holomorfa de una función es única, podemos deducir

$$D_2\tilde{f}(x_0, y_0) = D(\tilde{f} \circ \tilde{I}_2)(y_0) = D(\widetilde{f \circ I_2})(y_0) = \overline{D(f \circ I_2)(y_0)} = \overline{D_2f(x_0, y_0)}$$

Así $D_2\tilde{f}(x_0, y_0)$ es un isomorfismo de $\tilde{Y}$ en $\tilde{Z}$, pues si $D_2f(x_0, y_0)$ es isomorfismo, su complejificación también lo será por construcción (véase Definición D.0.3).

Por tanto podemos aplicar la versión holomorfa del Teorema de la función implícita, Teorema 2.9.2. Obtenemos dos entornos abiertos $\tilde{U}$ de x_0 en $\tilde{X}$ y $\tilde{V}$ de y_0 en $\tilde{Y}$, y una única aplicación $\tilde{u} : \tilde{U} \rightarrow \tilde{V}$ cumpliendo $\tilde{f}(x, \tilde{u}(x)) = f(x_0, y_0)$ cuando $x \in \tilde{U}$, y tal

que $\tilde{u}$ es holomorfa en $\tilde{U}$. Debido a la unicidad podemos inferir que $u(x) = \tilde{u}(x)$ para $x \in U = \tilde{U} \cap W$, luego u es analítica en U por la Observación 7.0.2 (c). $\square$

Apéndice A

Varios conceptos necesarios

Definición A.0.1. (*propiedad de Baire*) Sea X un espacio topológico. Se dice que $A \subset X$ tiene la propiedad de Baire si A es la diferencia simétrica de un conjunto abierto y un conjunto de primera categoría. Es decir,

$$A = F \triangle E = F \setminus E \cup E \setminus F,$$

Con F abierto y E conjunto incluido en la unión numerable de cerrados con interior vacío.

Se puede probar que la familia de subconjuntos de X con la propiedad de Baire forman una σ -álgebra, que será por tanto la menor que contiene los conjuntos abiertos y los conjuntos de primera categoría. En particular, todo conjunto de Borel tiene la propiedad de Baire.

Definición A.0.2. (*función Baire medible*) Una aplicación $f : X \rightarrow Y$ entre dos espacios topológicos se dice Baire medible si $f^{-1}(G) \subset X$ tiene la propiedad de Baire para cada $G \subset Y$ abierto.

Es decir, f es Baire medible si es medible cuando consideramos en X la σ -álgebra de todos los subconjuntos de X con la propiedad de Baire, y en Y la σ -álgebra de Borel.

Definición A.0.3. (*Conjunto residual*) Sea X un espacio topológico y sea $G \subset X$ un abierto. Un conjunto $A \subset G$ se dice que es residual en G si $G \setminus A$ es un conjunto de primera categoría, es decir, está contenido en la unión numerable de cerrados con interior vacío.

Definición A.0.4. (*Conjunto balanceado*) Sea X un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$. Un subconjunto $A \subset X$ se dice balanceado si $\lambda A \subset A$ para cada $\lambda \in \mathbb{K}, |\lambda| \leq 1$.

Definición A.0.5. (*Conjunto absorbente*) Sea X un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$. Un subconjunto $A \subset X$ se dice absorbente si para cada $x \in X$ existe $r_x > 0$ tal que $r_x A$ contiene el segmento que une x y 0 , es decir, el conjunto $\{tx : t \in [0, 1]\}$.

Incluimos el siguiente lema, que se deduce fácilmente de la definición anterior.

Lema A.0.6. Un conjunto F_δ absorbente A en un espacio de Banach X tiene interior no vacío.

Demostración. Sea $A = \cup_{k \in \mathbb{N}} A_k$, donde cada A_k es cerrado. Por ser A absorbente, $X = \cup_{n \in \mathbb{N}} nA = \cup_{k, n \in \mathbb{N}} nA_k$ (donde cada nA_k es cerrado). Por el teorema de categoría de Baire, algún nA_k tiene interior no vacío, luego también lo tendrá A . $\square$

Apéndice B

Aplicaciones multilineales

Definición B.0.1. Sean $X_1, \dots, X_n$ e Y espacios vectoriales sobre el mismo cuerpo. Una aplicación $M : X_1 \oplus \dots \oplus X_n \rightarrow Y$ se dice que es multilineal si es lineal separadamente en cada coordenada, es decir, si $x \rightarrow M(x_1, \dots, x_{k-1}, x, x_{k+1}, \dots, x_n)$ es una aplicación lineal de X_k en Y para cada $x_1 \in X_1, \dots, x_n \in X_n$ y cada $k \in \{1, \dots, n\}$.

Denotamos por $L(X_1, \dots, X_n, Y)$ el espacio vectorial de las funciones multilineales de $X_1 \oplus \dots \oplus X_n$ en Y . Cuando $X_i = X$, $1 \leq i \leq n$ usamos la notación $L(^n X, Y)$.

Decimos que $M \in L(^n X, Y)$ es simétrica si $M(x_1, \dots, x_n) = M(x_{\pi(1)}, \dots, x_{\pi(n)})$ para cada permutación π de $\{1, \dots, n\}$ y cada $x_1, \dots, x_n \in X$. Denotamos por $L^s(^n X, Y)$ el espacio vectorial de las aplicaciones multilineales simétricas de X^n en Y .

Observación B.0.2. Aplicando repetidamente la definición, se tiene que una aplicación $M \in L(X_1, \dots, X_n, Y)$ cumple

$$M \left(\sum_{k_1=1}^{m_1} a_{k_1}^1 x_{k_1}^1, \dots, \sum_{k_n=1}^{m_n} a_{k_n}^n x_{k_n}^n \right) = \sum_{\substack{1 \leq k_j \leq m_j \\ j=1, \dots, n}} \left(\prod_{j=1}^n a_{k_j}^j \right) M(x_{k_1}^1, \dots, x_{k_n}^n) \quad (\text{B.1})$$

para $m_j \in \mathbb{N}$, $a_{k_j}^j \in \mathbb{K}$ y $x_{k_j}^j \in X_j$, donde $k_j = 1, \dots, m_j$ y $j = 1, \dots, n$.

En concreto, dados $x_1 = (x_1^1, \dots, x_1^n)$, $x_2 = (x_2^1, \dots, x_2^n)$,

$$M(x_1 + x_2) = \sum_{A \subseteq \{1, \dots, n\}} M \left(\left(\chi_A(j) x_1^j + (1 - \chi_A(j)) x_2^j \right)_{j=1}^n \right)$$

Demostración. Para la primera parte, basta observar que si aplicamos la linealidad en cada componente

$$M \left(\sum_{k_1=1}^{m_1} a_{k_1}^1 x_{k_1}^1, \dots, \sum_{k_n=1}^{m_n} a_{k_n}^n x_{k_n}^n \right) = \sum_{k_1=1}^{m_1} a_{k_1}^1 \left(\dots \left(\sum_{k_n=1}^{m_n} a_{k_n}^n M(x_{k_1}^1, \dots, x_{k_n}^n) \right) \dots \right)$$

Para la segunda afirmación basta observar que dados $x_1 = (x_1^1, \dots, x_1^n)$, $x_2 = (x_2^1, \dots, x_2^n)$, por la fórmula anterior

$$\begin{aligned} M(x_1 + x_2) &= M(x_1^1 + x_2^1, \dots, x_1^n + x_2^n) = \sum_{\substack{1 \leq k_j \leq 2 \\ j=1, \dots, n}} M(x_{k_1}^1, \dots, x_{k_n}^n) \\ &= \sum_{A \subseteq \{1, \dots, n\}} M\left(\left(\chi_A(j)x_1^j + (1 - \chi_A(j))x_2^j\right)_{j=1}^n\right) \end{aligned}$$

□

Sean $X_1, \dots, X_n$ e Y espacios normados, entonces, si dotamos a $X_1 \oplus \dots \oplus X_n$ de su estructura natural de espacio normado como suma directa de espacios normados, podemos estudiar la continuidad de $M \in L(X_1, \dots, X_n, Y)$.

Teorema B.0.3. *Sean $X_1, \dots, X_n$ e Y espacios normados y sea $M \in L(X_1, \dots, X_n, Y)$. Entonces son equivalentes:*

- (i) M es continua en $X_1 \oplus \dots \oplus X_n$.
- (ii) M es continua en el origen $(0, \dots, 0)$ de $X_1 \oplus \dots \oplus X_n$.
- (iii) M está acotada en $B_{X_1} \oplus \dots \oplus B_{X_n}$.
- (iv) M está acotada en $S_{X_1} \oplus \dots \oplus S_{X_n}$.
- (v) M está acotada en el entorno de algún punto.
- (vi) Existe una constante K tal que $\|M(x_1, \dots, x_n)\| \leq K \|x_1\| \dots \|x_n\|$ para todo $x_1 \in X_1, \dots, x_n \in X_n$.

Demostración. $\boxed{(i) \Rightarrow (ii)}$ Es trivial.

$\boxed{(ii) \Rightarrow (iii)}$ Por hipótesis existe $\delta > 0$ tal que si $\|x_1\| + \dots + \|x_n\| \leq \delta$ entonces $\|M(x_1, \dots, x_n)\| \leq 1$.

Ahora, dado $(x_1, \dots, x_n) \in B_{X_1} \oplus \dots \oplus B_{X_n}$, se tiene que $\|\delta x_1/n\| + \dots + \|\delta x_n/n\| \leq \delta$ y por tanto $M(\delta x_1/n, \dots, \delta x_n/n) \leq 1$. Por ser M multilinear $\|M(x_1, \dots, x_n)\| \leq (n/\delta)^n$.

$\boxed{(iii) \Rightarrow (iv)}$ Es trivial.

$\boxed{(iv) \Rightarrow (vi)}$ Sea K una cota superior de M en $S_{X_1} \oplus \dots \oplus S_{X_n}$ y sea $(x_1, \dots, x_n) \in X_1 \oplus \dots \oplus X_n$. Si $x_i \neq 0$ para todo i , entonces $x_i/\|x_i\| \in S_{X_i}$ y $\|M(x_1/\|x_1\|, \dots, x_n/\|x_n\|)\| \leq K$, luego se da la desigualdad en (v). Si algún $x_i = 0$, la desigualdad también se da trivialmente.

$\boxed{(vi) \Rightarrow (i)}$ Dados $x = (x_1, \dots, x_n)$, $y = (y_1, \dots, y_n)$

$$\begin{aligned} \|M(x_1, \dots, x_n) - M(y_1, \dots, y_n)\| &= \|M(x_1 - y_1, x_2, \dots, x_n) + M(y_1, x_2 - y_2, x_3, \dots, x_n) \\ &\quad + \dots + M(y_1, \dots, y_{n-1}, x_n - y_n)\| \\ &\leq K (\|x_1 - y_1\| \|x_2\| \dots \|x_n\| \\ &\quad + \dots + \|y_1\| \|y_{n-1}\| \|x_n - y_n\|). \end{aligned}$$

La implicación se deduce de la anterior observación.

$\boxed{(v) \Leftrightarrow (iii)}$ Por las implicaciones probadas (v) implica que M es continua, y por tanto se cumple (iii) . Para probar la implicación contraria observemos que para cualquier $x, h \in X_1 \oplus \dots \oplus X_n$, por la Observación B.0.2 se tiene

$$\begin{aligned} M(h) &= M(x + h - x) = \sum_{A \subset \{1, \dots, n\}} M\left((\chi_A(j)(x_j + h_j) + (1 - \chi_A(j))(-x_j))_{j=1}^n\right) \\ &= \sum_{A \subset \{1, \dots, n\}} (-1)^{n-|A|} M\left((\chi_A(j)(x_j + h_j) + (1 - \chi_A(j))x_j)_{j=1}^n\right). \end{aligned}$$

Por tanto, si M está acotada en un entorno de x , por la expresión anterior también lo estará en un entorno del 0. Por la homogeneidad de M ($M(\lambda x) = \lambda M(x)$ para cualquier $\lambda \in \mathbb{K}$), tomando $|\lambda|$ suficiente grande podemos concluir que M está acotada en $B_{X_1} \oplus \dots \oplus B_{X_n}$. $\square$

Definición B.0.4. Sean $X_1, \dots, X_n$ e Y espacios normados. Denotamos por $\mathcal{L}(X_1, \dots, X_n, Y)$ al subespacio vectorial de $L(X_1, \dots, X_n, Y)$ formado por las aplicaciones multilineales continuas. Por el Teorema B.0.3 podemos dotar a este subespacio de la norma

$$\|M\| = \sup_{x_1 \in B_{X_1}, \dots, x_n \in B_{X_n}} \|M(x_1, \dots, x_n)\|, \quad \forall M \in \mathcal{L}(X_1, \dots, X_n, Y).$$

También denotamos por $\mathcal{L}({}^n X, Y)$ y $\mathcal{L}^s({}^n X, Y)$ los respectivos subespacios de $L({}^n X, Y)$ y $L^s({}^n X, Y)$, que dotaremos de la misma norma.

Observación B.0.5. Dado $M \in \mathcal{L}(X_1, \dots, X_n, Y)$, se tiene que

$$\begin{aligned} \|M\| &= \sup_{x_1 \in B_{X_1}, \dots, x_n \in B_{X_n}} \|M(x_1, \dots, x_n)\| \\ &= \sup_{x_1 \in S_{X_1}, \dots, x_n \in S_{X_n}} \|M(x_1, \dots, x_n)\| \\ &= \inf\{K \in \mathbb{R} : \|M(x_1, \dots, x_n)\| \leq K \|x_1\| \dots \|x_n\| \quad \forall x_1 \in X_1, \dots, x_n \in X_n\} \end{aligned}$$

Demostración. Trivialmente

$$\sup_{x_1 \in S_{X_1}, \dots, x_n \in S_{X_n}} \|M(x_1, \dots, x_n)\| \leq \sup_{x_1 \in B_{X_1}, \dots, x_n \in B_{X_n}} \|M(x_1, \dots, x_n)\|.$$

De la demostración (iv) $\Rightarrow$ (v) del Teorema B.0.3 se deduce

$$\sup_{x_1 \in B_{X_1}, \dots, x_n \in B_{X_n}} \|M(x_1, \dots, x_n)\| \leq \inf\{K \in \mathbb{R} : \|M(x_1, \dots, x_n)\| \leq K \|x_1\| \dots \|x_n\|\}$$

Por último, por la definición de supremo

$$\begin{aligned} \inf\{K \in \mathbb{R} : \|M(x_1, \dots, x_n)\| &\leq K \|x_1\| \dots \|x_n\|\} \\ &= \inf\{K \in \mathbb{R} : \|M(x_1/\|x_1\|, \dots, x_n/\|x_n\|)\| \leq K\} \\ &= \sup_{x_1 \in S_{X_1}, \dots, x_n \in S_{X_n}} \|M(x_1, \dots, x_n)\|. \end{aligned}$$

□

También se puede caracterizar una aplicación multilineal continua como aplicación Baire medible.

Teorema B.0.6. Sean $X_1, \dots, X_n$ espacios de Banach e Y espacio normado y sea $M \in L(X_1, \dots, X_n, Y)$. Entonces son equivalentes:

- (i) M es continua en $X_1 \oplus \dots \oplus X_n$.
- (ii) M es Baire medible.
- (iii) $\phi \circ M$ es Baire medible para cada $\phi \in Y^*$.
- (iv) $\phi \circ M$ es Baire medible separadamente en cada coordenada para cada $\phi \in Y^*$.

Para la demostración necesitaremos el siguiente lema.

Lema B.0.7. Sea X un espacio de Banach, $G \subset X$ abierto, y $A \subset G$ residual en G . Entonces para cada $y \in G$ y $n \in \mathbb{N}$ existe un entorno abierto V de y tal que para cada $x \in V$ existe un $h \in X$ satisfaciendo $x + jh \in A$, $j = 1, \dots, n$, $n \in \mathbb{N}$ arbitrario.

Demostración. A es residual en G , luego $G \setminus A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} C_n$ con C_n cerrado con interior vacío para todo $n \geq 1$.

Podemos suponer sin pérdida de generalidad que $y = 0$. En otro caso basta considerar $G - y$. $A - y$ es residual en $G - y$, pues $(G - y) \setminus (A - y) \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} C_n - y$, con $C_n - y$ cerrados con interior vacío. Además si V es un entorno de 0, $V + y$ es un entorno de y .

Sea W un entorno balanceado de 0 tal que $W + W \subset G$ (por ejemplo $W = \delta B_X$, con $\delta > 0$ suficientemente pequeño), y definamos $V = \frac{1}{n}W$. Obsérvese que $V \subset \frac{1}{j}W$ para $j = 1, \dots, n$.

Fijemos $x \in V$. Dado que $W + W \subset G$, $W \subset G - x$, y por tanto $V \subset \bigcap_{j=1}^n \frac{1}{j}W \subset \frac{1}{j}(G - x)$.

Cada conjunto $\frac{1}{j}(A - x)$ es residual de $\frac{1}{j}(G - x)$ pues $\frac{1}{j}(G - x) \setminus \frac{1}{j}(A - x) \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} \frac{1}{j}(C_n - x)$, con $\frac{1}{j}(C_n - x)$ cerrados con interior vacío. Por consiguiente $V \cap \frac{1}{j}(A - x)$ es residual de $V \cap \frac{1}{j}(G - x) = V$, pues $V \setminus V \cap \frac{1}{j}(A - x) \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} \frac{1}{j}(C_n - x)$.

En consecuencia $V \cap \bigcap_{j=1}^n \frac{1}{j}(A - x)$ es residual en V , pues $V \setminus \bigcap_{j=1}^n V \cap \frac{1}{j}(A - x) = \bigcup_{j=1}^n V \setminus V \cap \frac{1}{j}(A - x) \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{j=1}^n \frac{1}{j}(C_n - x)$. En particular, por el Teorema de Baire $V \cap \bigcap_{j=1}^n \frac{1}{j}(A - x)$ ha de ser no vacío (X es completo) y basta tomar cualquier h en este conjunto. $\square$

Demostración del Teorema B.0.6. $\boxed{(i) \Rightarrow (ii) \Rightarrow (iii)}$ Son inmediatos.

$\boxed{(iii) \Rightarrow (i)}$ Denotemos $X = X_1 \oplus \dots \oplus X_n$, y fijemos $\phi \in Y^*$. Definamos $A_k = \{x \in X : |\phi \circ M(x)| < k|\}$, $k \in \mathbb{N}$. Entonces $X = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \overline{A_k}$, luego por el Teorema de Baire existe $m \in \mathbb{N}$ tal que A_m tiene interior no vacío.

Por construcción y por hipótesis A_m cumple la propiedad de Baire, es decir $A_m = F \triangle E$ con F abierto y E conjunto de primera categoría. $A_m \cap F = F \setminus E$ es por tanto un conjunto residual en F . Aplicando el Lema B.0.7 sabemos que existe un abierto no vacío $V \subset X$ tal que para cada $x \in V$ existe un $h \in X$ satisfaciendo $x + jh \in A_m$, $j = 1, \dots, n + 1$. Veamos que M está acotado en V .

Para cada $x \in V$ y $h \in X$ satisfaciendo $x + jh \in A_m$, $j = 1, \dots, n + 1$ se tiene

$$M(x + jh) = M(x) + \sum_{k=1}^n j^k \sum_{\substack{C \subset \{1, \dots, n\} \\ |C|=k}} M(((1 - \chi_C(l))x_l + \chi_C(l)h_l)_{l=1}^n)$$

para $j = 1, \dots, n + 1$. Podemos expresar estas n ecuaciones de forma matricial

$$\begin{bmatrix} M(x + h) \\ \vdots \\ M(x + (n + 1)h) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \\ 1 & n + 1 & \dots & (n + 1)^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_0 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix},$$

donde hemos tomado $y_k := \sum_{\substack{C \subset \{1, \dots, n\} \\ |C|=k}} M(((1 - \chi_C(l))x_l + \chi_C(l)h_l)_{l=1}^n)$, $k = 0, \dots, n$.

La matriz de coeficientes del sistema matricial es una matriz de Vandermonde, en concreto regular, y por tanto tiene matriz inversa $(a_{ij})_{i,j=1}^n$. Así podemos expresar $y_0 = M(x)$ como

$$M(x) = \sum_{j=0}^n a_{0j} M(x + (j+1)h)$$

Por tanto

$$|\phi \circ M(x)| \leq \sum_{j=0}^n |a_{0j}| |\phi \circ M(x + (j+1)h)| \leq m \sum_{j=0}^n |a_{0j}|.$$

En consecuencia $\phi \circ M(V)$ está acotado, y por (v) del Teorema B.0.3 $\phi \circ M(B_X)$ también está acotado. Por tanto $M(B_X) \subset Y$ está débilmente acotado, y por el principio de acotación uniforme de Banach-Steinhaus es acotado, lo que equivale a la continuidad de M por el Teorema B.0.3. $\square$

Teorema B.0.8. Sean $X_1, \dots, X_n$ y X espacios normados, y sea Y espacio de Banach. Entonces $\mathcal{L}(X_1, \dots, X_n, Y)$ es un espacio de Banach. Además $\mathcal{L}^s({}^n X, Y)$ es un subespacio 1-complementado (y por tanto cerrado) de $\mathcal{L}(X, Y)$.

Demostración. Sea $\{M_k\}_{k=1}^\infty \subset \mathcal{L}(X_1, \dots, X_n, Y)$ una sucesión de Cauchy. Entonces $\{M_k(x_1, \dots, x_n)\}_{k=1}^\infty$ es una sucesión de Cauchy en Y para cada $x_1 \in X_1, \dots, x_n \in X_n$. Por tanto podemos definir la aplicación $M(x_1, \dots, x_n) = \lim_{k \rightarrow \infty} M_k(x_1, \dots, x_n)$.

Por ser M_k multilineales, M será multilineal. Por otro lado, $\{M_k\}_{k=1}^\infty$ es acotada por ser de Cauchy, por lo que también lo es M .

Veamos ahora que $M_k \rightarrow M$ cuando $k \rightarrow \infty$.

Sea $\varepsilon > 0$. Entonces existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $k, m \geq k_0$

$$\|M_k - M_m\| = \sup_{x_1 \in B_{X_1}, \dots, x_n \in B_{X_n}} \|M_k(x_1, \dots, x_n) - M_m(x_1, \dots, x_n)\| < \varepsilon.$$

Tomando límite cuando $m \rightarrow \infty$ se tiene

$$\sup_{x_1 \in B_{X_1}, \dots, x_n \in B_{X_n}} \|M_k(x_1, \dots, x_n) - M(x_1, \dots, x_n)\| < \varepsilon$$

para todo $k \geq k_0$. Es decir $\|M_k - M\| \leq \varepsilon$. Se deduce que $\lim_{k \rightarrow \infty} M_k = M$ en $\mathcal{L}(X_1, \dots, X_n, Y)$, lo que finaliza la primera parte de la prueba.

Para la segunda afirmación, basta observar que la proyección $Q : \mathcal{L}({}^n X, Y) \rightarrow \mathcal{L}^s({}^n X, Y)$ con

$$Q(M) = \frac{1}{n!} \sum_{\pi \in S_n} M(x_{\pi(1)}, \dots, x_{\pi(n)})$$

es continua con $\|Q\| \leq 1$ ($\|Q(M)\| \leq \|M\|$). $\square$

Teorema B.0.9 (Principio de acotación uniforme). *Sean $X_1, \dots, X_n$ espacios de Banach e Y un espacio normado sobre $\mathbb{K}$. Sea $\{M_\alpha\}_{\alpha \in \Gamma} \subset \mathcal{L}(X_1, \dots, X_n, Y)$ una familia tal que $\sup_{\alpha \in \Gamma} \|M_\alpha(x_1, \dots, x_n)\| < \infty$ para cada $(x_1, \dots, x_n) \in X_1 \oplus \dots \oplus X_n$. Entonces $\sup_{\alpha \in \Gamma} \|M_\alpha\| < \infty$.*

Demostración. Realizaremos la prueba por inducción sobre n . Para $n = 1$, el Teorema coincide con el principio de acotación uniforme de Banach-Steinhaus.

Sea $n > 1$ y supongamos que el enunciado es cierto para $n - 1$. Sea $\{M_\alpha\}_{\alpha \in \Gamma} \subset \mathcal{L}(X_1, \dots, X_n, Y)$ satisfaciendo las suposiciones. Por hipótesis de inducción, para cada $z \in X_n$ la familia $\{(x_1, \dots, x_{n-1}) \mapsto M_\alpha(x_1, \dots, x_{n-1}, z)\}_{\alpha \in \Gamma} \subset \mathcal{L}(X_1, \dots, X_{n-1}, Y)$ está uniformemente acotada.

Por tanto, para cada $z \in X_n$ existe $C_z > 0$ tal que

$$\|M_\alpha(x_1, \dots, x_{n-1}, z)\| \leq C_z \|x_1\| \dots \|x_{n-1}\|$$

para cada $x_1 \in X_1, \dots, x_{n-1} \in X_{n-1}$ y $\alpha \in \Gamma$.

Ahora, $X_n = \bigcup_{n=1}^\infty \{z \in X_n : C_z \leq n\}$ y por el Teorema de categoría de Baire, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $\{z \in X_n : C_z \leq m\}$ tiene interior no vacío. En concreto contiene una bola cerrada $B(w, r)$ para cierto $w \in X_n$, $r > 0$.

Sea $(x_1, \dots, x_n) \in B_{X_1} \oplus \dots \oplus B_{X_n}$. Obsérvese que $B(w, r) = w + rB_{X_n}$, luego $x_n = \frac{1}{r}(y - w)$ para cierto $y \in B(w, r)$. Así, como $M_\alpha(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{r}(M_\alpha(x_1, \dots, y) - M_\alpha(x_1, \dots, w))$

$$\|M_\alpha(x_1, \dots, x_n)\| \leq \frac{1}{r} (\|M_\alpha(x_1, \dots, y)\| + \|M_\alpha(x_1, \dots, w)\|) \leq \frac{2m}{r},$$

lo que concluye la prueba. $\square$

Trataremos a continuación la simetrización de una aplicación multilineal, que será de aplicación en el estudio de polinomios.

Definición B.0.10. Sean X, Y espacios vectoriales sobre $\mathbb{K}$ y sea $M \in L(^nX, Y)$. Definimos la simetrización de M como

$$M^s(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{n!} \sum_{\pi \in S_n} M(x_{\pi(1)}, \dots, x_{\pi(n)}),$$

donde S_n es el conjunto de las permutaciones de $\{1, \dots, n\}$.

Claramente $M^s \in L(^nX, Y)$. Además, si X e Y son espacios normados y M es acotada (o equivalentemente continua), también lo es M^s y $\|M^s\| \leq \|M\|$. Si M es simétrica, $M^s = M$.

Proposición B.0.11 (Fórmula de polarización). Sean X, Y dos espacios vectoriales y $M \in L(^nX; Y)$. Entonces para todo $a, x_1, \dots, x_n \in X$

$$M^s(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{2^n n!} \sum_{\substack{\varepsilon_j = \pm 1 \\ j=1, \dots, n}} \varepsilon_1 \cdots \varepsilon_n M \left(a + \sum_{j=1}^n \varepsilon_j x_j, \dots, a + \sum_{j=1}^n \varepsilon_j x_j \right).$$

En particular, si M es simétrica, entonces está unívocamente determinada por sus valores $M(x, \dots, x)$, $x \in X$, a lo largo de la diagonal.

Por otro lado, para todo $m > n$ se cumple

$$\sum_{\substack{\varepsilon_j = \pm 1 \\ j=1, \dots, m}} \varepsilon_1 \cdots \varepsilon_m M \left(a + \sum_{j=1}^m \varepsilon_j x_j, \dots, a + \sum_{j=1}^m \varepsilon_j x_j \right) = 0. \quad (\text{B.2})$$

Demostración. Por conveniencia tomamos $x_0 = a$ y $\varepsilon_0 = 1$. Usando la Observación B.0.2 obtenemos

$$\frac{1}{2^n n!} \sum_{\substack{\varepsilon_j = \pm 1 \\ j=1, \dots, n}} \varepsilon_1 \cdots \varepsilon_n M \left(\sum_{j_1=0}^n \varepsilon_{j_1} x_{j_1}, \dots, \sum_{j_n=0}^n \varepsilon_{j_n} x_{j_n} \right) \quad (\text{B.3})$$

$$= \frac{1}{2^n n!} \sum_{\substack{\varepsilon_j = \pm 1 \\ j=1, \dots, n}} \varepsilon_1 \cdots \varepsilon_n \sum_{j_1, \dots, j_n \in \{0, \dots, n\}} \varepsilon_{j_1} \cdots \varepsilon_{j_n} M(x_{j_1}, \dots, x_{j_n}) \quad (\text{B.4})$$

$$= \frac{1}{2^n n!} \sum_{j_1, \dots, j_n \in \{0, \dots, n\}} \left(\sum_{\substack{\varepsilon_j = \pm 1 \\ j=1, \dots, n}} \varepsilon_1 \cdots \varepsilon_n \varepsilon_{j_1} \cdots \varepsilon_{j_n} \right) M(x_{j_1}, \dots, x_{j_n}). \quad (\text{B.5})$$

Si existe $k \in \{1, \dots, n\} \setminus \{j_1, \dots, j_n\}$, entonces

$$\begin{aligned} & \sum_{\substack{\varepsilon_j = \pm 1 \\ j=1, \dots, n}} \varepsilon_1 \cdots \varepsilon_n \varepsilon_{j_1} \cdots \varepsilon_{j_n} \\ &= \sum_{\substack{\varepsilon_j = \pm 1 \\ j \neq k}} \varepsilon_{j_1} \cdots \varepsilon_{j_n} \prod_{j \neq k} \varepsilon_j + (-1) \cdot \sum_{\substack{\varepsilon_j = \pm 1 \\ j \neq k}} \varepsilon_{j_1} \cdots \varepsilon_{j_n} \prod_{j \neq k} \varepsilon_j = 0. \end{aligned} \quad (\text{B.6})$$

Se sigue que

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2^n n!} \sum_{j_1, \dots, j_n \in \{0, \dots, n\}} \left(\sum_{\substack{\varepsilon_j = \pm 1 \\ j=1, \dots, n}} \varepsilon_1 \cdots \varepsilon_n \varepsilon_{j_1} \cdots \varepsilon_{j_n} \right) M(x_{j_1}, \dots, x_{j_n}) \\
&= \frac{1}{2^n n!} \sum_{j_1, \dots, j_n \in \{1, \dots, n\}} \left(\sum_{\varepsilon_j = \pm 1} \varepsilon_1^2 \cdots \varepsilon_n^2 \right) M(x_{\pi(1)}, \dots, x_{\pi(n)}) \\
&= \frac{1}{n!} \sum_{\pi \in S_n} M(x_{\pi(1)}, \dots, x_{\pi(n)}) = M^s(x_1, \dots, x_n),
\end{aligned}$$

donde S_n es el conjunto de todas las permutaciones de $\{1, \dots, n\}$.

Para comprobar la última observación basta fijarse en que si $m > n$, puede obtenerse de nuevo (B.3) pero en cualquier sumando (es decir, con $j_1, \dots, j_n \in \{0, \dots, m\}$ fijados) siempre existe $k \in \{1, \dots, m\} \setminus \{j_1, \dots, j_n\}$. Por tanto todos los sumandos en (B.3) se anulan. $\square$

Apéndice C

Isomorfismos canónicos

Teorema C.0.1. *Sea X un espacio normado sobre el cuerpo $\mathbb{K}$. Entonces $\mathcal{L}(\mathbb{K}, X)$ es isomorfo a X .*

Demostración. Definamos la aplicación $e : \mathcal{L}(\mathbb{K}, X) \rightarrow X$ dada por $e(f) = f(1)$. Claramente e es lineal. Es inyectiva, pues si $e(f) = f(1) = 0$, entonces $f(t) = tf(1) = 0$, luego $f = 0$. Es sobreyectiva, pues si $x \in X$, podemos tomar la aplicación $f(t) = tx$, que cumple $f \in \mathcal{L}(\mathbb{K}, X)$ y $e(f) = x$. Por último es continua pues $e(f) = \|f(1)\| = \|f\|$. □

Teorema C.0.2. *Sean X, Y espacios normados sobre el mismo cuerpo. Entonces $\mathcal{L}(X, \mathcal{L}({}^k X, Y))$ es isomorfo a $\mathcal{L}({}^{k+1} X, Y)$*

Demostración. Definamos la aplicación $e : \mathcal{L}(X, \mathcal{L}({}^k X, Y)) \rightarrow \mathcal{L}({}^{k+1} X, Y)$ dado por $e(f)$ por $e(f)(x_1, \dots, x_{k+1}) = f(x_{k+1})(x_1, \dots, x_k)$. Claramente e es lineal. Es inyectiva, pues si $e(f) = 0$, entonces $f(x_{k+1})(x_1, \dots, x_k) = 0$ para todo $x_1, \dots, x_{k+1}$, luego $f(x_{k+1}) = 0$ para todo x_{k+1} , y por tanto $f = 0$. Es sobreyectiva, pues si $g \in \mathcal{L}({}^{k+1} X, Y)$, podemos tomar $f : X \rightarrow \mathcal{L}({}^k X, Y)$ tal que $x \mapsto g(x, \dots)$. Claramente $f \in \mathcal{L}(X, \mathcal{L}({}^k X, Y))$ y $e(f) = g$. Por último e es continua, pues

$$\begin{aligned} \|e(f)(x_1, \dots, x_{k+1})\| &= \|f(x_{k+1})(x_1, \dots, x_k)\| \leq \|f(x_{k+1})\| \|x_1\| \dots \|x_k\| \\ &\leq \|f\| \|x_{k+1}\| \|x_1\| \dots \|x_k\|. \end{aligned}$$

□

Apéndice D

Complejificaciones

En el estudio de las funciones analíticas, será de gran utilidad poder identificar un espacio normado real X con un subespacio de un espacio normado complejo $\tilde{X}$. Con esta motivación surge el concepto de complejificación de un espacio normado real.

Definición D.0.1. *Por complejificación de un espacio normado real $(X, \|\cdot\|)$ nos referimos al espacio normado complejo $\tilde{X} := \{(x, y) : x, y \in X\}$ con operaciones dadas por*

$$\begin{aligned}(x, y) + (u, v) &:= (x + u, y + v) \quad \forall x, y, u, v \in X, \\ (\alpha + i\beta)(x, y) &:= (\alpha x - \beta y, \beta x + \alpha y) \quad \forall x, y \in X \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R},\end{aligned}$$

y norma $\|\cdot\|_{\mathbb{C}}$ definida como

$$\|(x, y)\|_{\mathbb{C}} := \sup_{t \in [0, 2\pi]} \|x \cos(t) + y \sin(t)\|.$$

Observaciones D.0.2.

(a) $(\tilde{X}, \|\cdot\|_{\mathbb{C}})$ es, en efecto, un espacio normado complejo.

Demostración. Es inmediato comprobar que $\tilde{X}$ dotado de las operaciones definidas es un espacio vectorial complejo, y que $\|\cdot\|_{\mathbb{C}}$ es no negativa, satisface la desigualdad triangular y homogénea en los reales. Por tanto, para comprobar que $\|\cdot\|_{\mathbb{C}}$ es una norma basta observar que dado $\alpha \in \mathbb{R}$ y $z := (x, y) \in X_{\mathbb{C}}$,

$$\begin{aligned}\|e^{-i\alpha}z\|_{\mathbb{C}} &= \|(\cos(\alpha)x + \sin(\alpha)y, -\sin(\alpha)x + \cos(\alpha)y)\|_{\mathbb{C}} \\ &= \sup \{ \|\cos(\theta)[\cos(\alpha)x + \sin(\alpha)y] + \sin(\theta)[- \sin(\alpha)x + \cos(\alpha)y]\| : 0 \leq \theta \leq 2\pi \} \\ &= \sup \{ \|\cos(\theta + \alpha)x + \sin(\theta + \alpha)y\| : 0 \leq \theta \leq 2\pi \}\end{aligned}$$

$$= \sup \{ \|\cos(\eta)x + \sin(\eta)y\| : 0 \leq \eta \leq 2\pi \} = \|z\|_{\mathbb{C}}$$

□

(b) Podemos expresar de forma equivalente

$$\|(x, y)\|_{\mathbb{C}} = \sup_{\phi \in B_{X^*}} \sqrt{\phi(x)^2 + \phi(y)^2}.$$

Demostración. Observemos en primer lugar que dados $a, b \in \mathbb{R}$,

$$\sqrt{a^2 + b^2} = \sup_{t \in [0, 2\pi]} a \cos(t) + b \sin(t).$$

En efecto,

$$\begin{aligned} a \cos(t) + b \sin(t) &= \sqrt{a^2 + b^2} \left\{ \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cos(t) + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \sin(t) \right\} \\ &= \sqrt{a^2 + b^2} \sin(\theta + t) \leq \sqrt{a^2 + b^2}, \end{aligned}$$

donde hemos tomado $\theta = \arccos(a/\sqrt{a^2 + b^2})$. Como además es posible tomar $t \in [0, 2\pi]$ tal que $\sin(\theta + t) = 1$, se puede concluir la igualdad mencionada.

Entonces

$$\begin{aligned} \sup_{\phi \in B_{X^*}} \sqrt{\phi(x)^2 + \phi(y)^2} &= \sup_{\phi \in B_{X^*}} \sup_{t \in [0, 2\pi]} (\cos(t)x + \sin(t)\phi(y)) \\ &= \sup_{t \in [0, 2\pi]} \|\cos(t)x + \sin(t)y\| = \|(x, y)\|_{\mathbb{C}} \end{aligned}$$

□

(c) El espacio $(\tilde{X}, \|\cdot\|_{\mathbb{C}})$ es isomorfo a $X \oplus X$ dotado de la norma natural de la suma directa, ya que $\max\{\|x\|, \|y\|\} \leq \|(x, y)\|_{\mathbb{C}} \leq \|x\| + \|y\|$. El conjunto $X \oplus \{0\} := \{(x, 0) : x \in X\}$ es un subespacio cerrado de $\tilde{X}$ que es, como espacio real, isométrico a X bajo la aplicación $(x, 0) \mapsto x$. También se prueba de forma estándar que si X es un espacio de Banach, entonces $\tilde{X}$ también lo es.

(d) $\widetilde{X \oplus Y}$ es isométrico a $\tilde{X} \oplus \tilde{Y}$ empleando la norma del máximo en ambas sumas directas.

Demostración. Consideremos la aplicación lineal $((x_1, y_1), (x_2, y_2)) \mapsto ((x_1, x_2), (y_1, y_2))$. Se tiene

$$\begin{aligned} \|((x_1, y_1), (x_2, y_2))\|_{\mathbb{C}} &= \sup_{t \in [0, 2\pi]} \max\{\|\cos(t)x_1 + \sin(t)x_2\|, \|\cos(t)y_1 + \sin(t)y_2\|\} \\ &= \max \left\{ \sup_{t \in [0, 2\pi]} \|\cos(t)x_1 + \sin(t)x_2\|, \sup_{t \in [0, 2\pi]} \|\cos(t)y_1 + \sin(t)y_2\| \right\} \\ &= \|((x_1, x_2), (y_1, y_2))\| \end{aligned}$$

□

- (e) Existe otra aproximación al concepto de complejificación de un espacio normado. Dado un espacio normado real X , se dice que un espacio vectorial complejo $\tilde{X}$ es una complejificación de X si podemos identificar X con un subespacio de $\tilde{X}$ mediante una inyección lineal en $\mathbb{R}$ y se cumplen ciertas propiedades naturales. Puede probarse que suponiendo estas propiedades naturales, la complejificación de X será única salvo isomorfismo. Así, mediante esta aproximación, la definición anterior no es más que una de las posibles construcciones isomorfas posibles de una complejificación. Consúltese [11] para más información.
- (f) Podría resultar más natural haber definido $\|(x, y)\|_{\mathbb{C}} := \sqrt{\|x\|^2 + \|y\|^2}$. Sin embargo esta norma es razonable (cumple ciertas propiedades naturales) para $\tilde{X}$ si y solo si X es un espacio de Hilbert. La norma $\|\cdot\|_{\mathbb{C}}$ empleada fue propuesta por Angus Ellis Taylor, y tiene la propiedad de que es la norma razonable más pequeña de $\tilde{X}$. Véanse [11] y [4] para una prueba de estas afirmaciones.

Sean dos espacios normados reales X, Y , y $T \in \mathcal{L}(X, Y)$, lineal en $\mathbb{R}$. Podemos identificar X e Y con $X \oplus \{0\}$ y $Y \oplus \{0\}$ respectivamente, y plantearnos la posibilidad de una extensión lineal en $\mathbb{C}$ de T , definida en $\tilde{X}$ y con imagen en $\tilde{Y}$.

Tal extensión, $\tilde{T}$, ha de cumplir por tanto que $\tilde{T}(x, 0) = (T(x), 0)$. Además por ser lineal en $\mathbb{C}$, necesariamente $i\tilde{T}(x, 0) = \tilde{T}(i(x, 0)) = \tilde{T}(0, x)$, y por otro lado $i\tilde{T}(x, 0) = i(T(x), 0) = (0, T(x))$. Así surge de forma natural la siguiente definición.

Definición D.0.3. Sean X, Y espacios normados reales, y sea $T \in \mathcal{L}(X, Y)$. Definimos la complejificación de T , $\tilde{T} : \tilde{X} \rightarrow \tilde{Y}$ como $\tilde{T}(x, y) = (T(x), T(y))$.

Nótese que por la observación anterior $\tilde{T}$ es la única extensión lineal de T .

Por simplificación, en adelante emplearemos la notación $X + iX$ para hacer referencia a $\tilde{X}$, identificando (x, y) con $x + iy$. Dado que X es isométrico a $X \oplus \{0\} \subset \tilde{X}$, si $G \subset X$ notaremos también por G a su imagen en $X \oplus \{0\}$, $G \oplus \{0\}$, y de igual forma si $x \in X$ denotaremos también por x a su imagen, $(x, 0)$.

También adaptaremos de los números complejos la notación $\operatorname{Re}(x + iy) = x$ y $\operatorname{Im}(x + iy) = y$. Para $z = x + iy \in \tilde{X}$, denotaremos $\bar{z} = x - iy$. De la expresión equivalente de la norma $\|\cdot\|_{\mathbb{C}}$ estudiada se deduce que $\|\bar{z}\|_{\mathbb{C}} = \|z\|_{\mathbb{C}}$.

Proposición D.0.4. Sean X, Y espacios normados reales y $T \in \mathcal{L}(X, Y)$. Entonces $\|\tilde{T}\|_{\mathbb{C}} = \|T\|$.

Demostración. Por ser $\tilde{T}$ extensión de T , se tiene $\|T\| \leq \|\tilde{T}\|_{\mathbb{C}}$. Por tanto solo hemos de verificar que $\|\tilde{T}\|_{\mathbb{C}} \leq \|T\|$:

$$\begin{aligned} \|\tilde{T}(x + iy)\|_{\mathbb{C}} &= \|(T(x) + iT(y))\| = \sup_{t \in [0, 2\pi]} \|\cos(t)T(x) + \sin(t)T(y)\| \\ &= \sup_{t \in [0, 2\pi]} \|T(\cos(t)x + \sin(t)y)\| \\ &\leq \|T\| \sup_{t \in [0, 2\pi]} \|\cos(t)x + \sin(t)y\| = \|T\| \|(x + iy)\|_{\mathbb{C}}. \end{aligned}$$

□

Nos centraremos a continuación en la extensión de funciones multilineales y polinomios entre espacios normados reales.

Proposición D.0.5. Sean X, Y dos espacios normados reales, $n \in \mathbb{N}$, y sea $M \in L(nX; Y)$. Entonces existe una única extensión $\tilde{M} \in L(n\tilde{X}, \tilde{Y})$ tal que $\tilde{M}|_{X^n} = M$, que recibe el nombre de complejificación de M . Está dada por la fórmula

$$\tilde{M}(x_1^0 + ix_1^1, \dots, x_n^0 + ix_n^1) = \sum_{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n \in \{0, 1\}} i^{\sum_{j=1}^n \varepsilon_j} M(x_1^{\varepsilon_1}, \dots, x_n^{\varepsilon_n}). \quad (\text{D.1})$$

Más aun, $\tilde{M}$ es acotada si y sólo si M es acotada.

Demostración. Está claro que $\tilde{M}$ es aditiva, homogénea sobre $\mathbb{R}$ y también que toda extensión compleja debe cumplir (D.1). Queda por demostrar que es homogénea para los números complejos en cada coordenada. Sea $a = \alpha + i\beta \in \mathbb{C}$. De (D.1) obtenemos que para todo $u_2, \dots, u_n \in \tilde{X}$, $x_0, x_1 \in X$,

$$\tilde{M}(x_0 + ix_1, u_2, \dots, u_n) = \tilde{M}(x_0, u_2, \dots, u_n) + i\tilde{M}(x_1, u_2, \dots, u_n).$$

Así pues

$$\begin{aligned} \tilde{M}(a(x_0 + ix_1), u_2, \dots, u_n) &= \tilde{M}((\alpha x_0 - \beta x_1) + i(\beta x_0 + \alpha x_1), u_2, \dots, u_n) \\ &= \alpha \tilde{M}(x_0, u_2, \dots, u_n) - \beta \tilde{M}(x_1, u_2, \dots, u_n) \\ &\quad + i\beta \tilde{M}(x_0, u_2, \dots, u_n) + i\alpha \tilde{M}(x_1, u_2, \dots, u_n) \\ &= (\alpha + i\beta) \tilde{M}(x_0, u_2, \dots, u_n) \\ &\quad + (i\alpha - \beta) \tilde{M}(x_1, u_2, \dots, u_n) \\ &= a \tilde{M}(x_0 + ix_1, u_2, \dots, u_n). \end{aligned}$$

La afirmación sobre la acotación se cumple por construcción.

□

Proposición D.0.6. Sean X, Y dos espacios normados reales, $n \in \mathbb{N}$, y sea $P \in P({}^n X; Y)$. Entonces existe una única extensión $\tilde{P} \in P({}^n \tilde{X}; \tilde{Y})$ tal que $\tilde{P} \upharpoonright_X = P$, que recibe el nombre de complejificación de P . Está dada por la fórmula

$$\begin{aligned} \tilde{P}(x + iy) = & \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} (-1)^k \binom{n}{2k} \check{P}({}^{n-2k} x, {}^{2k} y) \\ & + i \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} (-1)^k \binom{n}{2k+1} \check{P}({}^{n-(2k+1)} x, {}^{2k+1} y). \end{aligned}$$

Más aun, $\tilde{P}$ es acotada si y sólo si P es acotada.

Demostración. Usando el Lema 4.0.11 combinado con la Proposición D.0.5. $\square$

Para $P \in \mathcal{P}({}^0 X, Y)$ la extensión es trivial. De forma natural, si $P(x) = \sum_{k=0}^n P_k(x)$, $P_k \in P({}^k X, Y)$, entonces denotamos $\tilde{P}(x) = \sum_{k=0}^n \tilde{P}_k(x)$. Obsérvese que como consecuencia directa de la Proposición D.0.6 también podemos deducir que $\tilde{P}(\bar{z}) = \overline{\tilde{P}(z)}$.

Teorema D.0.7. Sean X, Y dos espacios normados reales, $n \in \mathbb{N}$, y sea $P \in \mathcal{P}^n(X; Y)$, $P = \sum_{k=0}^n P_k$, donde $P_k \in \mathcal{P}({}^k X; Y)$. Entonces

$$\|\tilde{P}_n\|_{\mathbb{C}} \leq 2^{n-1} \|P\|,$$

Demostración. Sea $z = x + iy \in \tilde{X}$, $\|z\| = 1$ (por lo tanto $\|\bar{z}\| = 1$). Para $t \in \mathbb{R}$ definimos

$$f(t) = \tilde{P} \left(\frac{e^{-it}}{2} z + \frac{e^{it}}{2} \bar{z} \right) = P(\cos(t)x + \sin(t)y).$$

De la definición de la norma $\|\cdot\|_{\mathbb{C}}$ se deduce que

$$\|f(t)\|_{\mathbb{C}} \leq \|P\|, \quad t \in \mathbb{R}. \quad (\text{D.2})$$

Usando el Lema 4.0.11 obtenemos

$$f(t) = P_0(0) + \sum_{k=1}^n \sum_{l=0}^k \binom{k}{l} \frac{e^{(k-2l)it}}{2^k} \check{P}_k({}^l z, {}^{k-l} \bar{z}) = \sum_{k=-n}^n e^{ikt} a_k$$

para un $a_k \in \tilde{Y}$ adecuado. Podemos ver fácilmente que $a_{-n} = \frac{1}{2^n} \tilde{P}_n(z)$ y $a_n = \frac{1}{2^n} \tilde{P}_n(\bar{z})$ (sumandos cuando $k = n$ y $l = n$, $l = 0$ respectivamente). Además, aprovechando el hecho de que la suma interior para $k = n$ no contiene sumandos con los factores $e^{(n-1)it}$, $e^{-(n-1)it}$, obtenemos también $a_{-(n-1)} = \frac{1}{2^{n-1}} \tilde{P}_{n-1}(z)$ y $a_{n-1} = \frac{1}{2^{n-1}} \tilde{P}_{n-1}(\bar{z})$ (sumandos cuando $k = n-1$ y $l = n-1$, $l = 0$ respectivamente).

A continuación, usaremos la siguiente fórmula (la suma de una serie geométrica finita):

$$\frac{1}{2n} \sum_{p=0}^{2n-1} (-1)^p e^{\frac{ikp\pi}{n}} = \begin{cases} 1 & \text{para } k \equiv n \pmod{2n}, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases} \quad (\text{D.3})$$

Así

$$\begin{aligned} \frac{1}{2n} \sum_{p=0}^{2n-1} (-1)^p f\left(t + p\frac{\pi}{n}\right) &= \frac{1}{2n} \sum_{p=0}^{2n-1} (-1)^p \sum_{k=-n}^n e^{ik(t + \frac{p\pi}{n})} a_k \\ &= \sum_{k=-n}^n e^{ikt} \left(\frac{1}{2n} \sum_{p=0}^{2n-1} (-1)^p e^{\frac{ikp\pi}{n}} \right) a_k \\ &= e^{-int} a_{-n} + e^{int} a_n = \frac{e^{-int}}{2^n} \tilde{P}_n(z) + \frac{e^{int}}{2^n} \tilde{P}_n(\bar{z}). \end{aligned}$$

Combinando esto con (D.2) obtenemos

$$\sup_{t \in [0, 2\pi]} \|e^{-int} \tilde{P}_n(z) + e^{int} \tilde{P}_n(\bar{z})\|_{\mathbb{C}} \leq 2^n \|P\|.$$

Tomemos ahora $\tilde{P}_n(z) = u + iv$. Por la observación posterior a la Proposición D.0.6 tenemos que $\tilde{P}_n(\bar{z}) = u - iv$ y así por la definición de $\|\cdot\|_{\mathbb{C}}$

$$\begin{aligned} \sup_{t \in [0, 2\pi]} \|e^{-int} \tilde{P}_n(z) + e^{int} \tilde{P}_n(\bar{z})\|_{\mathbb{C}} &= \sup_{t \in [0, 2\pi]} \|2 \cos(nt)u + 2 \sin(nt)v\|_{\mathbb{C}} \\ &= 2 \|\tilde{P}_n(z)\|_{\mathbb{C}}, \end{aligned}$$

los cual finaliza la prueba. □

Apéndice E

Diferenciabilidad de aplicaciones entre espacios afines

En esta sección reflexionamos sobre la extensión de la diferenciabilidad a aplicaciones entre espacios afines, y sobre como este estudio se reduce realmente al caso estudiado.

Sean X, Y espacios afines con espacios vectoriales asociados $\vec{X}, \vec{Y}$ que son normados. Sea $A \subset X$ abierto, es decir, que para cada $a \in A$, existe $h \in \mathbb{R}$ tal que $a + hB_{\vec{X}} \subset A$, y sea $f : A \longrightarrow Y$.

Decimos que f es Fréchet diferenciable en $a \in A$ si existe $L \in \mathcal{L}(\vec{X}, \vec{Y})$ tal que

$$f(a + \vec{h}) = f(a) + L(\vec{h}) + o(\|\vec{h}\|). \quad (\text{E.1})$$

Obsérvese que $f(a + \vec{h})$ está bien definido para $\|\vec{h}\|$ suficientemente pequeño por ser A abierto. La ecuación (E.1) es equivalente a $\overrightarrow{f(a)f(a + \vec{h})} = L(\vec{h}) + o(\|\vec{h}\|)$. Por tanto tomando orígenes arbitrarios o_X, o_Y en X, Y , (E.1) se puede expresar como

$$\overrightarrow{o_Y f(o_X + \overrightarrow{o_X a} + \vec{h})} - \overrightarrow{o_Y f(o_X + \overrightarrow{o_X a})} - L(\vec{h}) = o(\|\vec{h}\|).$$

Podemos definir $g : A - o_X \longrightarrow \vec{Y}$, con $A - o_X := \{\vec{x} \in \vec{X} : o_X + \vec{x} \in A\}$, tal que $g(\vec{x}) = \overrightarrow{o_Y f(o_X + \vec{x})}$, con lo que el estudio de la diferenciabilidad Fréchet de f en a es equivalente al de g en $\overrightarrow{o_X a}$. Por tanto el estudio de la diferenciabilidad Fréchet para aplicaciones entre espacios afines se reduce al caso estudiado.

Análogamente, decimos que f es Gâteaux diferenciable en $a \in A$ si existe $L \in \mathcal{L}(\vec{X}, \vec{Y})$ tal que

$$f(a + t\vec{h}) = f(a) + L(t\vec{h}) + o(t)$$

.

Empleando un razonamiento idéntico al anterior, deducimos que el estudio de la diferenciabilidad Gâteaux también se reduce al caso de aplicaciones entre espacios normados.

Apéndice F

Teorema del punto fijo de Banach

Definición F.0.1. Sea (X, d) un espacio métrico. Una aplicación $T : X \rightarrow X$ se dice que es una contracción en X si existe $k \in [0, 1)$ tal que

$$d(T(x), T(y)) \leq kd(x, y) \quad \text{para todo } x, y \in X.$$

Llamamos a k el ratio de contracción.

Teorema F.0.2. (*Teorema del punto fijo de Banach*) Sea (X, d) un espacio métrico completo, y sea $T : X \rightarrow X$ una contracción. Entonces T admite un único punto fijo $a \in X$, (es decir $T(a) = a$).

Demostración. Sea k el ratio de contracción de T . Por la desigualdad triangular, para todo $x, y \in X$,

$$\begin{aligned} d(x, y) &\leq d(x, T(x)) + d(T(x), T(y)) + d(T(y), y) \\ &\leq d(x, T(x)) + k(d(x, y)) + d(T(y), y), \end{aligned}$$

por tanto,

$$d(x, y) \leq \frac{d(T(x), x) + d(T(y), y)}{1 - k}. \quad (\text{F.1})$$

Obsérvese que si x, y son puntos fijos, esto implica que $d(x, y) = 0$, luego $x = y$. Por tanto T tiene a lo sumo un punto fijo.

Notaremos $T^n = T \circ \dots \circ T$, $n \in \mathbb{N}$, que por inducción es una contracción con ratio

k^n . Dado $x_0 \in X$, si en (F.1) reemplazamos x, y por $T^n(x_0), T^m(x_0)$ tenemos

$$\begin{aligned}
 d(T^n(x_0), T^m(x_0)) &\leq \frac{d(T(T^n(x_0), T^n(x_0))) + d(T(T^m(x_0)), T^m(x_0))}{1 - k} \\
 &= \frac{d(T^n(T(x_0), T^n(x_0))) + d(T^m(T(x_0)), T^m(x_0))}{1 - k} \\
 &\leq \frac{k^n d(T(x_0), x_0) + k^m d(T(x_0), x_0)}{1 - k} \\
 &= \frac{k^n + k^m}{1 - k} d(T(x_0), x_0) \xrightarrow{n, m \rightarrow \infty} 0
 \end{aligned}$$

pues $k < 1$.

En consecuencia $\{T^n(x_0)\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de Cauchy en X , espacio completo, y por tanto convergente a cierto $a \in X$.

Ahora como T en particular es continua,

$$a = \lim_{n \rightarrow \infty} T^n(x_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} T(T^{n-1}(x_0)) = T(\lim_{n \rightarrow \infty} T^{n-1}(x_0)) = T(a),$$

lo que concluye la prueba. □

Bibliografía

- [1] Ash R.B., Novinger W.P. *Complex Variables*, Dover Publications, Boston, 2004.
- [2] Avez, A. *Differential Calculus*, Wiley, París, 1983.
- [3] Burgos, Juan . *Cálculo Infinitesimal de una Variable*. McGraw-Hill. Madrid, 1994.
- [4] Conrad, Keith. *Complexification*. <https://eprints.ucm.es/3561/1/T23827.pdf>, 1999.
- [5] Cohn, D. *Measure Theory*, Birkhäuser, New York, 2013.
- [6] Dieudonné J., *Foundations of modern analysis*, Pure and Applied Mathematics 10-I, Academic Press, New York and London, 1969.
- [7] Hájek, P. y Johanis, M. *Smooth analysis in Banach Spaces*. De Gruyter.,Alemania, 2014.
- [8] Leja F., *Teoria funkcji analitycznych* (polaco), Biblioteka matematyczna 14, Warszawa, 1957.
- [9] Mikusiński, J. *The Bochner Integral*, Springer, Munich, 1978.
- [10] Mujica, J. *Complex Analysis in Banach Spaces*, Holanda, 1985.
- [11] Muñoz, Adolfo. *Dos Problemas en Espacios de Banach reales: Complejificaciones y Desigualdades de Bernstein-Markov*, 1999. <https://eprints.ucm.es/3561/1/T23827.pdf>.

