Algunos conceptos básicos del Análisis Funcional
Memoria

Mar Jiménez Sevilla

Universidad Complutense de Madrid

Facultad de Ciencias Matemáticas
Departamento de Análisis Matemático

Índice general

Capítulo 1

Espacios Normados. Teorema de Hahn-Banach

Este primer capítulo sobre espacios normados tiene como objetivo presentar los elementos que constituyen la base del estudio del Anlisis Funcional. Se pretende la familiarización con los conceptos de espacio normado, espacio de Banach, subespacio, espacio cociente, espacio producto, suma directa de subespacios, espacios normados separables. Se presentan ejemplos clásicos de espacios normados como c_{00}, c_0, c, ℓ_p, $L_p(\mathbb{R})$ y $C[0,1]$.

Se presentan algunos resultados que establecen ya diferencias topológicas entre espacios finito e infinito dimensionales, así como otros que son generalización del caso finito dimensional.

Se introduce la noción de aplicación lineal continua y de espacios de aplicaciones lineales continuas. Se establecen las dos versiones del Teorema de Hahn-Banach analítica y geométrica, las cuales aparecerán como herramienta básica a lo largo del estudio de los espacios normados.

Las referencias para este capítulo son [**24**], [**11**], [**1**], [**18**], [**8**], [**32**], [**25**]. En estos mismos libros se pueden encontrar ejemplos y ejercicios que ayudaran a asimilar los conceptos mencionados. Un buen libro de problemas de análisis funcional es [**42**].

1. Espacios normados. Definiciones

En esta sección introducimos las nociones de espacio normado y espacio de Banach. Estudiamos los conceptos de subespacio y espacio cociente. Introducimos además los espacios de Banach clásicos de sucesiones c_0 y ℓ_p, $1 \leq p \leq \infty$, y los espacios de Banach clásicos de funciones $C[0,1]$ y L_p, $1 \leq p \leq \infty$.

Si denotamos por X a un espacio vectorial sobre el cuerpo de los números reales ($\mathbb{R}$) ó complejos ($\mathbb{C}$), decimos que una función no negativa $||\cdot|| : X \longrightarrow \mathbb{R}$ es una norma en X si:

1. $||x|| \geq 0$ para todo $x \in X$, y $||x|| = 0$ si y sólo si $||x|| = 0$.
2. $||\lambda x|| = |\lambda|\,||x||$, para todo $x \in X$ y $\lambda \in \mathbb{R}$ (ó $\mathbb{C}$).
3. $||x+y|| \leq ||x|| + ||y||$, para todos $x, y \in X$.

Un espacio vectorial con una norma $(X, ||\cdot||)$ es un espacio vectorial normado. Decimos que $(X, ||\cdot||)$ es un espacio normado real (complejo) si X es un espacio vectorial real (ó complejo) y $||\cdot||$ verifica las anteriores condiciones.

La norma nos permite dotar a un espacio vectorial de una estructura métrica con buenas propiedades respecto a las operaciones de suma y multiplicación que nos dan la estructura de espacio vectorial. En efecto, se comprueba fácilmente que la función $d : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por

$$d(x,y) = ||x-y||, \qquad x, y \in X$$

define una métrica en X. Se hace notar que las operaciones suma y producto por escalares son continuas con respecto a esta métrica. La topología que se considera en X es la inducida por esta métrica.

Seguidamente se da la noción de subespacio normado . Si $(X, ||\cdot||)$ es un espacio normado e $Y \subset X$ es un subespacio vectorial de X, entonces Y es un espacio normado con la norma restricción de la norma $||\cdot||$ a Y. Este espacio se denota usualmente por $(Y, ||\cdot||_Y)$ ó simplemente por $(Y, ||\cdot||)$.

Un espacio de Banach es un espacio normado $(X, ||\cdot||)$ tal que con la métrica asociada a la norma es completo. Se suele decir, de forma abreviada que la norma es completa.

Definimos a continuación espacio cociente. Si $(X, ||\cdot||)$ es un espacio normado e $Y \subset X$ es un subespacio cerrado de X, consideramos el espacio vectorial cociente X/Y, dónde cada elemento $\hat{x} \in X/Y$ es la clase de equivalencia $\hat{x} = x + Y = \{x + y :$

$y \in Y\}$. En el espacio cociente X/Y se considera la norma cociente

$$||\hat{x}|| = \text{ínf}\{||x+y|| : \ y \in Y\},$$

y se demuestra que $(X/Y, ||\cdot||)$ es un espacio normado. Se comprueba que si X es Banach, también lo es X/Y.

2. Ejemplos de espacios clásicos de sucesiones

El ejemplo más sencillo de espacio normado, e incluso de espacio de Banach, es el espacio producto $\mathbb{R}^n$ (ó su versión compleja $\mathbb{C}^n$) dotado con la norma euclidea $||\cdot||_2$, dónde

$$||(x_1,...,x_n)||_2 = \sqrt{|x_1|^2 + ... + |x_n|^2}, \qquad (x_1,...,x_n) \in \mathbb{R}^n \quad (\text{ ó } \mathbb{C}^n).$$

Denotamos por $|\cdot|$ el valor absoluto de un número en el caso real, y el módulo de un número en el caso complejo. Se hace notar que la distancia asociada a la norma euclidea es la distancia euclidea. En general, si $1 \leq p \leq \infty$, la función $||\cdot||_p$ definida sobre $\mathbb{R}^n$ (ó $\mathbb{C}^n$) como

$$||(x_1,...,x_n)||_p = \begin{cases} \sqrt{|x_1|^p + ... + |x_n|^p}, & \text{si } 1 \leq p < \infty \\ \text{máx}\{|x_1|,...,|x_n|\}, & \text{si } p = \infty \end{cases}$$

dónde $(x_1,...,x_n) \in \mathbb{R}^n$ (ó $\mathbb{C}^n$), es una norma completa en $\mathbb{R}^n$ ($\mathbb{C}^n$, respectivamente). Por tanto, $(\mathbb{R}^n, ||\cdot||_p)$ es un espacio de Banach real para todo $1 \leq p \leq \infty$, y $(\mathbb{C}^n, ||\cdot||_p)$ es un espacio de Banach complejo para todo $1 \leq p \leq \infty$. Para demostrar que $||\cdot||_p$ es una norma se hace uso de las desigualdades de Hölder y Minkowski que se dan a continuación.

La desigualdad de Hölder establece que para cualesquiera $a = (a_1,...,a_n)$, $b = (b_1,...,b_n)$ en $\mathbb{R}^n$ (ó $\mathbb{C}^n$) y $1 \leq p \leq \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, dónde convenimos que $q = \infty$ si $p = 1$, se verifica que

$$\sum_{k=1}^{n} |a_k|\,|b_k| \leq ||a||_p\,||b||_q.$$

De la anterior desigualdad se demuestra la llamada desigualdad de Minkowski, es decir, la desigualdad triangular para la norma $||\cdot||_p$: Si $a = (a_1, ..., a_n)$, $b = (b_1, ..., b_n)$ son elementos de $\mathbb{R}^n$ (ó $\mathbb{C}^n$) y $1 \leq p \leq \infty$, entonces

$$||a + b||_p \leq ||a||_p + ||b||_p.$$

Para tener una idea geométrica de estos espacios, es interesante estudiar la forma de su bola unidad, es decir, del conjunto $B_{||\cdot||_p} = \{x \in \mathbb{R}^n : \ ||x||_p \leq 1\}$, dependiendo del parámetro p.

Consideramos ahora la versión infinito dimensional de estos espacios normados. Definimos para $1 \leq p \leq \infty$, los espacios normados $\ell_p(\mathbb{N})$, ó simplemente ℓ_p, como el conjunto de la sucesiones de números reales $(x_i)_{i=1}^{\infty}$ tales que

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p < \infty, &\qquad \text{si } 1 \leq p < \infty \\ \text{máx}\{|x_i| : \ i \in \mathbb{N}\} < \infty, &\qquad \text{si } p = \infty. \end{aligned}$$

Y es precisamente a partir de este valor finito como se define la norma $|| \cdot ||_p$ en cada ℓ_p. Es decir, si $x = (x_i)_{i=1}^{\infty} \in \ell_p$,

$$\begin{aligned} ||x||_p = \sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p < \infty, &\qquad \text{si } 1 \leq p < \infty, \\ ||x||_\infty = \text{máx}\{|x_i| : \ i \in \mathbb{N}\}. & \end{aligned}$$

Si consideramos sucesiones de números complejos obtenemos análogamente los espacios ℓ_p complejos.

Para demostrar que ℓ_p es un espacio vectorial, en particular que si $x, y \in \ell_p$, entonces $x + y \in \ell_p$ usamos de nuevo la desigualdad de Minkowski también cierta para infinitas coordenadas (aplicamos la anterior para las n primeras coordenadas de x e y y pasamos al límite adecuadamente). Este mismo argumento demuestra tambien la desigualdad triangular para $|| \cdot ||_p$. Las demás condiciones para la norma se comprueban de forma elemental.

Seguidamente se demuestra, que los espacios ℓ_p, $1 \leq p \leq \infty$ son espacios de Banach. En efecto, se comprueba que si $\{x^k\}_k$ es una sucesión de Cauchy en ℓ_p, entonces la sucesión de números reales formada por las coordenadas j-ésimas, i.e. $\{x_j^k\}_{k=1}^{\infty}$ es una sucesión de Cauchy en $\mathbb{R}$ (ó $\mathbb{C}$, si estamos en el caso complejo), para cada $j \in \mathbb{N}$, y por tanto, convergente a cierto x_j. Seguidamente se prueba que si definimos $x = (x_i)_{i=1}^{\infty}$, entonces $x \in \ell_p$ y $\lim_{k\to\infty} ||x^k - x||_p = 0$.

A continuación definimos el espacio normado c_0 como el subespacio de ℓ_∞ que está formado por los elementos $x = (x_i)_{i=1}^{\infty}$ tales que $\lim_{i\to\infty} x_i = 0$, con la norma inducida $||\cdot||_\infty$.

Igualmente se define el espacio normado c como el subespacio de ℓ_∞ formado por todas las sucesiones $(x_i)_{i=1}^{\infty}$ tales que existe el $\lim_{i\to\infty} x_i$, con la norma inducida $||\cdot||_\infty$.

Para terminar esta sección, definimos el espacio normado c_{00} como el subespacio de ℓ_∞ formado por los elementos $x = (x_i)_{i=1}^{\infty}$ tales que $x_i \neq 0$ sólo en una cantidad finita de índices, con la norma inducida $||\cdot||_\infty$.

Un hecho sencillo de comprobar establece que si X es un espacio de Banach e Y es un subespacio cerrado de X, entonces Y es un espacio de Banach. Reciprocamente, si X e Y son espacios de Banach e Y es un subespacio de X, entonces Y es cerrado en X. Finalmente, demostramos que c y c_0 son espacios de Banach, y que c_{00} no lo es comprobando que los dos primeros son cerrados en $(\ell_\infty, ||\cdot||_\infty)$ pero no así el tercero (en el caso de c_{00} se puede comprobar directamente que existen sucesiones de Cauchy no convergentes).

3. Ejemplos de espacios clásicos de funciones

Como ejemplo fundamental de espacio de funciones tenemos los llamados espacios $L_p(\mathbb{R})$. En este punto debemos mencionar que sería muy interesante dedicar una sección del curso a introducir los conceptos de *espacio de medida, propiedades básicas de una medida e integración en un espacio de medida.*

Se indicarán así mismo los resultados básicos de integración como son el *Teorema de la convergencia monótona*, *Teorema de Beppo Levi*, el *Lema de Fatou* y el *Teorema* *de la convergencia dominada de Lebesgue*. Se da como ejemplo esencial la *medida de Lebesgue* y la *integral de Lebesgue en* $\mathbb{R}^n$. Se menciona la *relación entre la integral de Riemann y la de Lebesgue*: una función acotada y definida en $[a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \cdots \times [a_n, b_n]$ es integrable Riemann si y sólo si es continua excepto en un conjunto de medida de Lebesgue nula. Si la función es integrable Riemann, entonces es integrable Lebesgue y las dos integrales coinciden.

Un buen libro a consultar para profundizar en esta materia es [**8**]. Igualmente los libros [**7**], [**35**] y [**42**] constituyen una referencia perfecta para estudiar estos conceptos.

En este punto hemos preferido introducir los espacios L_p sólo para la integral de Lebesgue, dejando la definición general de $L_p(X, \Sigma, \mu)$ para un espacio de medida abstracto (X, Σ, μ) para más adelante. Pretendemos con esto que se pueda entender más claramente estos espacios.

Definimos en primer lugar, para $1 \leq p \leq \infty$ el espacio normado $L_p(\mathbb{R})$ como el espacio formado por todas las funciones $f : \mathbb{R} \longrightarrow [-\infty, \infty]$ medibles Lebesgue (dos funciones se consideran la misma si son iguales en casi todo punto de $\mathbb{R}$) tales que

$$\int_0^1 |f(x)|^p \, dx < \infty, \quad \text{si } 1 \leq p < \infty\,,$$

y para $p = \infty$ si f está esencialmente acotada, esto es, si existe $r \geq 0$ tal que

$$\lambda(\{x \in \mathbb{R},\, |f(x)| > r\}) = 0\,.$$

La norma en estos espacios viene dada por

$$||f||_p = \Big(\int_{\mathbb{R}} |f(t)|^p \, dt \Big)^{1/p}, \qquad \text{si } f \in L_p(\mathbb{R}), \text{ y } 1 \leq p < \infty$$
$$||f||_\infty = \text{ess sup} f \equiv \text{ínf}\{r > 0 : \ \lambda(\{x \in \mathbb{R},\, |f(x)| > r\} = 0\}\,, \qquad \text{si } f \in L_\infty(\mathbb{R}).$$

Se comprueba que efectivamente $L_p(\mathbb{R})$ es un espacio vectorial. De forma análoga a los anteriores casos, la desigualdad triangular para la norma $||| \cdot ||_p$ se sigue de la correspondiente versión de la desigualdad de Hölder: si $f \in L_p(\mathbb{R})$, $g \in L_q(\mathbb{R})$, dónde

$1 \leq p \leq \infty$ y $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, entonces el producto $fg \in L_1[0,1]$ y

$$\int_{\mathbb{R}} |fg| \leq ||f||_p \, ||g||_q \, .$$

Se demuestra además que estos espacios normados son completos, es decir, que son espacios de Banach. Se demuestra primero un resultado general que establece que un espacio normado X es de Banach si toda serie absolutamente convergente es convergente, i.e. si $\{x_n\} \subset X$ y $\sum_n ||x_n|| < \infty$, entonces $\sum_n x_n$ converge en X. Seguidamente consideremos una serie $\sum_n f_n$ tal que $f_n \in L_p(\mathbb{R})$ y $\sum_n ||f_n||_p = M < \infty$, donde $1 \leq p < \infty$. Se definen las funciones

$$g,\, g_n : \mathbb{R} \longrightarrow [0, \infty],$$
$$g(x) = \sum_n |f_n(x)|, \;\; g_n(x) = \sum_{k=1}^{n} |f_k(x)|.$$

Se comprueba, por el Teorema de la convergencia monótona, que $\lim_n ||g_n||_p = ||g||_p$. Puesto que $||g_n||_p \leq \sum_{k=1}^{n} ||f_k||_p \leq M$, tenemos que $g \in L_p(\mathbb{R})$. Esto implica que $g(x) = \sum_n |f_n(x)|$ es finito en casi todo punto de $\mathbb{R}$. A continuación se define $f(x) = \sum_n f_n(x)$ si esta suma es finita y $f(x) = \infty$ si no lo es. Se observa que $f \in L_p(\mathbb{R})$ puesto que $|f(x)| \leq g(x)$ en $\mathbb{R}$. Finalmente, si llamamos $s_n = \sum_{k=1}^{n} f_k$ a la sucesión de las sumas parciales de la serie que estamos considerando, entonces $s_n(x)$ converge a $f(x)$ en casi todo punto de $\mathbb{R}$ y $||s_n - f||_p \leq ||s_n||_p + ||f||_p \leq 2||g||_p < \infty$. Aplicando el Teorema de la convergencia dominada de Lebesgue deducimos que $\lim_n ||s_n - f||_p = 0$.

El caso $p = \infty$. Consideremos una sucesión de Cauchy $\{f_n\}$ en $L_\infty(\mathbb{R})$. Se comprueba, usando la definición de la norma del supremo, que para casi todo $x \in \mathbb{R}$,

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leq ||f_n - f_m||_\infty, \qquad \text{para todo } n, m \in \mathbb{N}.$$

Por tanto, para casi todo x en $\mathbb{R}$, la sucesión de números reales $\{f_n(x)\}$ es convergente. Si llamamos $f(x) = \lim_n f_n(x)$ si tal límite existe y 0 en otro caso, se comprueba, usando la desigualdad anterior, que $f \in L_\infty(\mathbb{R})$ y que $\lim_n ||f_n - f||_\infty = 0$.

Se definen de forma análoga los espacios $L_p[0,1]$ y $L_p[0,\infty)$.

En este punto sería interesante volver al concepto de espacio de medida (X,Σ,μ) e integración sobre una medida abstracta, y definir los espacios $L_p(X,\Sigma,\mu)$. Se explicará que los espacios $\ell_p(\mathbb{N})$ son también un caso particular de estos, los cuales se obtienen al considerar el espacio de media $(\mathbb{N},\mathcal{P}(\mathbb{N}),\mu)$, siendo $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ la sigma-álgebra de los subconjuntos de $\mathbb{N}$, y μ la medida de contar.

EL siguiente ejemplo que vamos a considerar es el espacio de funciones $C[0,1]$ definido de la siguiente manera

$$C[0,1]=\{f:[0,1]\longrightarrow\mathbb{R}:\ f \text{ es continua en } [0,1]\},$$

con la norma del supremo $||f||_\infty=\sup\{|f(x)|:\ x\in[0,1]\}$. Se demuestra, igual que para los casos c_0, ℓ_∞ y $L_\infty(\mathbb{R})$, que $C[0,1]$ es un espacio normado. Una sucesión de funciones en este espacio es convergente sii converge unifomemente. Es decir, $\lim_n ||f_n-f||=0$ si y sólo si f_n converge uniformemente a f. Usando las propiedades de la convergencia uniforme se demuestra que $C[0,1]$ es un espacio de Banach.

Finalmente, es interesante presentar un ejemplo de un espacio de funciones que no sea de Banach como el espacio $C[0,1]$ con la norma $||f||=\int_0^1|f(t)|\,dt$.

4. Lema de Riesz

Si X es un espacio normado, definimos S_1, la esfera unidad de X, como el conjunto de puntos de X con norma unitaria, es decir, si $||\cdot||$ es la norma en X, $S_1=\{x\in X:\ ||x||=1\}$. El Lema de Riesz establece que si X es un espacio normado e Y es un subespacio cerrado y propio de X, entonces podemos encontrar elementos en la esfera unidad de X tales que su distancia a Y está tan cerca a uno como se quiera. Enunciamos formalmente este resultado:

Sea X un espacio normado e Y un subespacio cerrado y propio de X. Para todo $0<\varepsilon<1$ existe $z\in S_1$ tal que $\operatorname{dist}(z,Y)\geq 1-\varepsilon$.

La demostración de este resultado es un sencillo argumento geométrico. Consideremos cualquier punto x de X no incluido en Y. La distancia de x a Y debe ser positiva, pues Y es cerrado. Consideramos $y_0 \in Y$ tal que $||x - y_0|| \leq \frac{\mathrm{dist}(x,Y)}{1-\varepsilon}$. Se comprueba que entonces $z = \frac{x-y_0}{||x-y_0||}$ verifica que $\mathrm{dist}(z, Y) \geq 1 - \varepsilon$. Esto finaliza la demostración.

Observese que para cualquier punto $x \in X$, la distancia $\mathrm{dist}(x, Y) = ||\hat{x}||$, considerando $\hat{x}$ la clase correspondiente a x en el espacio cociente X/Y, con la norma cociente asociada. Por tanto, la demostración anterior se puede interpretar en el espacio X/Y de la siguiente forma. Puesto que Y es un subespacio cerrado y propio de X, el espacio cociente X/Y es un espacio normado conteniendo algún elemento no nulo. Sea $\hat{x}$ tal que $||\hat{x}|| = 1$, y consideremos $y_0 \in Y$ tal que $1 \leq ||x - y_0|| \leq \frac{1}{1-\varepsilon}$. Entonces si $z = \frac{x-y_0}{||x-y_0||}$, se comprueba que $||\hat{z}|| = \mathrm{dist}(z, Y) \geq 1 - \varepsilon$.

Se hace notar que no siempre existe un punto z en la esfera tal que la distancia de z a Y sea exactamente 1. Por ejemplo, en c_0 consideramos

$$Y = \{x = (x_n) \in c_0 : \sum_n \frac{x_n}{2^n} = 0\},$$

subespacio cerrado y propio de c_0. Se puede comprobar que no existe $x \in S_1$ tal que $\mathrm{dist}(x, Y) = 1$.

Denotamos por B_1 la bola unidad de X, es decir, $B_1 = \{x \in X : \ ||x|| \leq 1\}$. Una aplicación immediata del Lema de Riesz es la siguiente:

La bola unidad B_1 de un espacio normado X de dimensión infinita no es compacta.

Para demostrar este hecho se construye una sucesión de puntos $\{x_n\}$ en la esfera unidad de X tal que $\mathrm{dist}(x_{n+1}, \mathrm{span}(x_1, ..., x_n)) \geq \frac{1}{2}$. En particular $||x_n - x_m|| \geq \frac{1}{2}$, para todo $n, m \in \mathbb{N}$, y $\{x_n\}$ no tiene subsucesiones convergentes.

5. Aplicaciones lineales continuas entre espacios normados. Isomorfismos lineales. Normas equivalentes

A continuación vamos a considerar aplicaciones lineales continuas entre dos espacios normados. El primer resultado que se considera corresponde a las diferentes formas de caracterizar la continuidad de tales aplicaciones, condiciones algunas de ellas aparentemente mas débiles y otras aparentemente más fuertes. En un espacio normado X decimos que un conjunto C está acotado si $\{||x|| : \ x \in C\}$ es un conjunto acotado en $\mathbb{R}$, lo cual es equivalente a decir que C está incluido en MB_1, esto es, la bola en el espacio X centrada en 0 de radio M, para algún $M > 0$.

Sean X e Y dos espacios normados sobre el cuerpo K y $f : X \longrightarrow Y$ una aplicación lineal. Cada una de las siguientes condiciones es equivalente a la continuidad de f en todos los puntos de X:

1. *f es continua en 0.*
2. *f es Lipschitz en X, es decir, existe $C > 0$ tal que $||f(x)-f(y)|| \leq C||x-y||$.*
3. *Existe $K > 0$ tal que $||f(x)|| \leq K||x||$, para todo $x \in X$.*
4. *$f(B_1)$ está acotado en Y. En los casos $Z = \mathbb{R}$ si X es un espacio normado real, ó $Z = \mathbb{C}$ si X es un espacio normado complejo, las anteriores condiciones son equivalentes a*
5. *$\ker f = \{x \in X : \ f(x) = 0\}$ es cerrado en X.*

De lo anterior se deduce que f es continua si y sólo si la imagen de todo acotado en X es acotado en Y. Esto motiva el hecho de que a las aplicaciones lineales continuas entre espacios normados se las denomine también aplicaciones lineales acotadas.

Se hace notar que si H es un hiperplano del espacio normado X y $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ una función lineal tal que $\ker f = H$, entonces f es continua si y sólo si H es cerrado. En general, la condición (5) no es equivalente a las demás. Por ejemplo, consideramos el espacio normado

$$C^1[0,1] = \{f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R} : \ f \text{ es diferenciable con derivada continua en } [0,1]\}$$

con la norma del supremo $||f||_\infty = \sup\{|f(x)| : \; x \in [0,1]\}$, y la aplicación

$$\begin{aligned} F : & C^1[0,1] \longrightarrow C[0,1] \\ & F(f) = f'. \end{aligned}$$

El $\ker(F)$ está formado por el conjunto cerrado de las funciones constantes en $[0,1]$. Sin embargo se puede comprobar que F no es continua: la imagen de la sucesión acotada $\{g_n\}$, dónde $g_n(x) = x^n$, no está acotada.

Se dan también ejemplos de aplicaciones lineales no continuas. Este es el caso de la aplicación lineal

$$\begin{aligned} F : c_0 & \longrightarrow \mathbb{R} \\ F(x) & = \sum_n x_n. \end{aligned}$$

La imagen del conjunto acotado $\{x_n\}$, dónde $x_n = (1, ...,^{(n)}, .., 1, 0, 0, ...)$, no es acotado.

Se observa, que si X es un espacio normado infinito dimensional, existe siempre una aplicación lineal $f : X \longrightarrow K$ no continua. Basta considerar una base algebraica de X, formada por vectores de norma 1 y definir f sobre este conjunto de forma que la imagen no esté acotada en el cuerpo K. En el resto de los puntos se define f por linealidad.

Del resultado que expondremos a continuación, relativo a espacios normados de dimensión finita, se deduce que si $F : X \longrightarrow Y$ es una aplicación lineal y X es de dimensión finita, entonces F es continua.

Definamos el concepto de homeomorfismo lineal (ó isomorfismo lineal). La importancia de este concepto radica en que nos permite establecer una clasificación de los espacios normados. Sean X e Y espacios normados sobre un cuerpo K, se dice que X e Y son homeomorfos linealmente (ó isomorfos linealmente) si existe una biyección lineal $F : X \longrightarrow Y$ tal que F y la inversa F^{-1} son continuas. En este caso, decimos que F es un isomorfismo lineal .

Se observa que F es un isomorfismo lineal si y sólo si existen constantes positivas m y M tales que

$$m||x||_X \leq ||F(x)||_Y \leq M||x||_X,$$

para todo $x \in X$, dónde $||\cdot||_X$ y $||\cdot||_Y$ son las normas que se consideran en X e Y, respectivamente.

Este concepto está íntimamente ligado al de normas equivalentes. Decimos que dos normas $||\cdot||_1$ y $||\cdot||_2$ definidas sobre un mismo espacio vectorial X son equivalentes si existen constantes $m, M > 0$ tales que

$$m||x||_1 \leq ||F(x)||_2 \leq M||x||_1,$$

para todo $x \in X$. Equivalentemente, si la aplicación identidad

$$Id : (X, ||\cdot||_1) \longrightarrow (X, ||\cdot||_2)$$

es un isomorfismo lineal. Se comprueba que dos normas son equivalentes si y sólo si las métricas que definen son equivalentes. De ahi la importancia de considerar este concepto. Se hace notar que, en particular, si una de las normas es completas entonces la otra también lo es.

Enunciamos el siguiente resultado sobre espacios normados de dimensión finita: *Si X e Y son espacios normados de dimensión n sobre el cuerpo K, entonces X e Y son linealmente isomorfos.*

Una demostración de este resultado es la siguiente. Comprobamos primero que la norma considerada en Y, la cual denotaremos simplemente por $||\cdot||$, es una aplicación continua de Y en K. En efecto, por la desigualdad triangular, $|\, ||x|| - ||y||\, | \leq ||x - y||$. Por otra parte, se considera la biyección lineal,

$$R : (K^n, ||\cdot||_1) \longrightarrow (Y, ||\cdot||)$$
$$R(x_1, ..., x_n) = x_1 y_1 + ... + x_n y_n,$$

dónde $y_1, ..., y_n$ es una base de Y. Claramente $||R(x_1, ..., x_n)|| \leq M||(x_1, ..., x_n)||_1$, para todo $(x_1, ..., x_n) \in K^n$, siendo $M = (\sup(||T(1, 0, ..., 0)||, ..., ||T(0, ..., 0, 1)||)$. Por tanto, R es una aplicación lineal continua. En particular, la imagen del compacto $S_1 = \{x = (x_1, ..., x_n) : ||x||_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i| = 1\}$ es otro compacto en $(Y, || \cdot ||)$. Además, $||R(x)|| > 0$ para todo $x \in S_1$. Por tanto, tenemos que $\inf(||R(x)|| : x \in S_1) > 0$. Existe entonces $m > 0$ tal que $||R(x)|| \geq m$, para todo $x \in S_1$. En particular $||R(\frac{x}{||x||_1})|| \geq m$, para todo $x \in K^n$, de dónde deducimos la continuidad de R^{-1}. Esto demuestra que $(Y, || \cdot ||)$ y $(K^n, | \cdot |_1)$ son linealmente isomorfos.

Del anterior resultado deducimos el siguiente corolario:

1. *Todas las normas en un espacio normado finito dimensional son equivalentes. En particular, todos los espacios normados de dimensión finita n sobre el cuerpo K son isomorfos (linealmente) al espacio $(K^n, || \cdot ||_2)$, dónde $|| \cdot ||_2$ es la norma euclidea.*
2. *Todos los espacios normados finito dimensionales son espacios de Banach.*
3. *Si Y es un subespacio vectorial de dimensión finita de un espacio normado X, entonces Y es cerrado en X.*

La siguiente caracterización es consecuencia del Lema de Riesz y del anterior resultado para espacios normados finito dimensionales.

Sea X un espacio normado. La bola unidad de X es compacta si y sólo si X es finito dimensional.

Si X e Y son espacios normados sobre el cuerpo K consideremos $L(X, Y)$ el conjunto formado por todas las aplicaciones lineales (también llamados operadores lineales) y continuos de X en Y. Este conjunto es un espacio vectorial sobre el cuerpo K. El espacio $L(X, K)$ se denota simplemente por X^*, y se le denomina el dual de X. Un elemento $f \in X^*$ se denomina un funcional lineal continuo (ó acotado).

Vamos a definir en $L(X,Y)$ una norma de la siguiente manera. Si $T \in L(X,Y)$,

$$\begin{aligned} ||T|| =& \sup\{||T(x)|| : \ x \in X, ||x|| \leq 1\} \\ =& \sup\{||T(x)|| : \ x \in X, ||x|| = 1\}. \end{aligned}$$

Se comprueba que $|| \cdot ||$ es efectivamente una norma sobre $L(X,Y)$, y que además,

$$||T|| = \inf\{C > 0 : \ ||T(x)|| \leq C||x||, \text{ para todo } x \in X\}.$$

Para dar una idea de estos conceptos se dan algunos ejemplos:

Consideremos $X = (\mathbb{R}^n, || \cdot ||_\infty)$ e $Y = (\mathbb{R}^m, || \cdot ||_\infty)$. Por los anteriores resultados, sabemos que $L(X,Y)$ es el conjunto de aplicaciones lineales de X en Y. En este caso, se comprueba que la norma de $T \in L(X,Y)$ viene dada de la siguiente forma

$$||T|| = \max_{1 \leq i \leq m} \sum_{j=1^n} |a_{ij}|,$$

dónde (a_{ij}) es la matriz $n \times m$ asociada a la aplicación lineal T.

Otro ejemplo es el siguiente. Sea $X = \mathbb{R}^n$ con la norma $|| \cdot ||_p$, $1 \leq p \leq \infty$ y sea $f \in X^*$, es decir, una aplicación lineal $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$. Se demuestra que si $f(1,0,...,0) = a_1, ..., f(0,...,1) = a_n$, entonces la norma del funcional lineal f es

$$||f|| = \big(\sum_{i=1}^n |a_i|^{1/q}\big)^{1/q} = ||(a_1, ...a_n)||_q,$$

dónde $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ si $p > 1$ y

$$||f|| = \max\{|a_i| : \ i = 1, ..., n\} = ||(a_1, ..., a_n)||_\infty,$$

si $p = 1$.

Consideremos también un ejemplo con espacios de dimensión infinita. Sea $X = c_0$ con la norma del supremo $|| \cdot ||_\infty$ y $f : c_0 \longrightarrow \mathbb{R}$ un funcional lineal y continuo. Se comprueba que $||f|| = \sum_n |a_n|$, dónde $f(e_i) = a_i$ para $e_i = (0, ..., 1, 0.....)$, con 1 en la posición i.

En el siguiente capítulo se desarrollará el estudio de los duales de algunos espacios. Se establecerá el concepto de isometria lineal, lo cual permite identifica ciertos duales con espacio que ya conocemos. Por ejemplo, se identifica el dual de $(\mathbb{R}^n, || \cdot ||_p)$ con $(\mathbb{R}^n, || \cdot ||_q)$, y el dual de $(c_0, || \cdot ||_\infty)$ con $(\ell_1, || \cdot ||_1)$.

6. Teorema de Hahn-Banach. Aplicaciones

Uno de los resultados fundamentales en análisis funcional es el Teorema de Hahn-Banach, relativo a la extensión de un funcional lineal continuo $g : Y \longrightarrow K$, dónde Y es un subespacio de un espacio normado X, a otro funcional lineal continuo $f : X \longrightarrow K$ tal que g y f tengan la misma norma. Esto corresponde a la llamada versión analítica del teorema. Estas propiedades implican, en particular, que el dual de un espacio normado tiene una estructura suficientemente rica, la cual nos permite además obtener propiedades de X a través de X^*. Una de las versiónes geométrica del Teorema de Hahn-Banach establece que si un subespacio cerrado de X no interseca a un conjunto abierto y convexo de X, entonces existe un hiperplano cerrado que contiene al anterior subespacio y que no interseca al abierto convexo.

Daremos en primer lugar la versión analítica de la que deduciremos la versión geométrica.

Si X es un espacio vectorial, una aplicación $p : X \longrightarrow \mathbb{R}$ es un funcional sublineal positivamente homogeneo si verifica

$$p(\alpha x) = \alpha p(x), \quad \text{si } x \in X \text{ y } \alpha \geq 0,$$
$$p(x + y) \leq p(x) + p(y), \quad \text{si } x, y \in X.$$

Se observa que si, además, p toma valores no negativos, $p(\alpha x) = |\alpha| p(x)$ para $x \in X$, $\alpha \in K$, entonces p es una seminorma en el espacio vectorial X.

La versión real del Teorema de Hahn-Banach establece :

Sea X un espacio vectorial real e Y un subespacio vectorial de X. Si $p : X \longrightarrow \mathbb{R}$ es un funcional sublineal positivamente homogeneo, y $f : Y \longrightarrow \mathbb{R}$ es una aplicación lineal tal que $f(x) \leq p(x)$, para cada $x \in Y$. Existe entonces una extension lineal de f a todo el espacio, la cual denotaremos por $F : X \longrightarrow \mathbb{R}$, tal que $F(x) \leq p(x)$, para cada $x \in X$.

La demostración de este hecho se basa en el lema de Zorn. Se considera la colección

$$\mathcal{P} = \{(M, g) : \ M \text{ subespacio vectorial de } X, \ Y \text{ incluido}$$
$$\text{en } M, \ \text{y } g : M \longrightarrow \mathbb{R} \text{ extensión lineal de } f\}.$$

En $\mathcal{P}$ se tiene el siguiente órden parcial:

$$(M, g) \leq (H, h) \text{ si } M \subset H \text{ y } h \text{ es una extensión de } g.$$

Se comprueba que cada cadena en $\mathcal{P}$ tiene un conjunto maximal: Si $(M_\alpha, g_\alpha)_{\alpha \in I}$ es una cadena, entonces un elemento maximal de esta cadena en $\mathcal{P}$ es (H, h), siendo $H = \cup_{\alpha \in I} M_\alpha$ y h viene definida como $h(x) = g_\alpha(x)$, si $x \in M_\alpha$. Puesto que $\mathcal{P} \neq \emptyset$, por el lema de Zorn, existe un elemento maximal (M, F) en $\mathcal{P}$. Si $M \neq X$ existe entonces $x_1 \in X \setminus M$. Se puede definir entonces una extension lineal $F_1 : M_1 \longrightarrow \mathbb{R}$, siendo M_1 el espacio vectorial generado por M y x_1 tal que $F_1(x) \leq p(x)$, para cada $x \in M_1$. Esto prueba que (M, F) no es un elemento maximal de $\mathcal{P}$, y por tanto, debe verificarse $M = X$, lo cual finaliza la prueba.

Si X es un espacio normado real y el funcional sublineal positivamente homogeneo considerado es un múltiplo de la norma, tenemos el siguiente enunciado del teorema de Hahn-Banach:

Sea X un subespacio normado real e Y un subespacio de X (no necesariamente cerrado en X). Si $f : Y \longrightarrow \mathbb{R}$ es un funcional lineal continuo, con norma $||f||_{Y^*}$ en Y^*, existe entonces un funcional lineal y continuo $F : X \longrightarrow \mathbb{R}$ extensión de F y tal que $||F|| = ||f||_{Y^*}$.

Basta tomar $p(x) = ||x|| \cdot ||f||_Y$ para deducirlo del resultado general.

Consideremos ahora espacios normados complejos. Obviamente, estos también pueden ser considerados espacios normados reales. En primer lugar, se prueba que si $f : X \longrightarrow \mathbb{C}$ es un funcional lineal continuo y definimos

$$\operatorname{Re} f : X \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$\operatorname{Re} f(x) = \operatorname{Re}(f(x)), \text{ la parte real de } f(x),$$

entonces $\operatorname{Re} f$ es un funcional lineal (real) continuo en X y se verifica que

$$f(x) = \operatorname{Re} f(x) - i \operatorname{Re} f(ix), \quad \text{si } x \in X \quad \text{y}$$
$$||f|| = ||\operatorname{Re} f||.$$

Enunciamos el Teorema de Hahn-Banach complejo:

Sea X un espacio normado complejo e Y un subespacio de X. Si $f : Y \longrightarrow \mathbb{C}$ es un funcional lineal continuo, existe entonces un funcional lineal y continuo $F : X \longrightarrow \mathbb{C}$ extensión de F tal que $||F|| = ||f||_{Y^*}$.

Para demostrarlo, se considera el funcional lineal (real) asociado a f, $\operatorname{Re} f : Y \longrightarrow \mathbb{R}$ definido anteriormente (aquí Y es considerado como espacio normado real). Por el caso real, existe un funcional lineal (real) continuo $G : X \longrightarrow \mathbb{R}$ extensión de $\operatorname{Re} f$ tal que $||G|| = ||f||_{Y^*}$. Se comprueba entonces que

$$F : X \longrightarrow \mathbb{C}$$
$$F(x) = G(x) - iG(ix), \qquad \text{para } x \in X,$$

es un funcional lineal continuo en X, extensión de f y, puesto que $\operatorname{Re} F = G$, tenemos que $||F|| = ||\operatorname{Re} F|| = ||G|| = ||f||_{Y^*}$.

Al igual que en el caso real, el teorema de Hahn-Banach complejo podría obtenerse también como corolario de un resultado más general para seminormas:

Sea X un espacio vectorial complejo e Y un subespacio vectorial de X. Si $p : X \longrightarrow [0, \infty)$ es una seminorma en X, y $f : Y \longrightarrow \mathbb{C}$ es una aplicación lineal tal que $|f(x)| \leq p(x)$, para cada $x \in Y$. Existe entonces una extension lineal de f a todo *el espacio, la cual denotaremos por* $F : X \longrightarrow \mathbb{C}$*, tal que* $|F(x)| \leq p(x)$*, para cada* $x \in X$*.*

Se demuestra con un razonamiento similar al anterior y basándonos en el resultado para espacios vectoriales reales.

Como corolario de estos teoremas, si X es un espacio normado, obtenemos:

1. *Para todo* $x \in X$ *la norma de* x *se puede expresar de la siguiente forma*

$$||x|| = \sup\{f(x) : \ f \in X^*, ||f|| \leq 1\}.$$

2. *Si* x *es un elemento no nulo en* X*, existe un funcional* $f \in X^*$ *tal que* $g(x) = ||x||$ *y* $||g|| = 1$*.*
3. *Si* $x_1, ..., x_n$ *son* n *vectores linealmente independientes en* X*, existen funcionales* $g_1, ..., g_n$ *en* X^* *tales que* $g_i(x_j) = \delta_{ij}$*.*
4. *Si* Y *un subespacio cerrado de* X*, y* $x \in X \setminus Y$*, existe* $g \in X^*$ *de norma* 1 *tal que* $g|_Y = 0$ *y* $g(x) = \mathrm{dist}(y, Y)$*.*

En el segundo caso se considera Y el subespacio generado por el vector x, y f definido en Y como $f(\lambda x) = \lambda||x||$, si $\lambda \in K$. En el tercer caso, se considera el subespacio Y generado por todos los vectores $x_1, ..., x_n$ y, para cada i, definimos f_i como $f_i(x_j) = \delta_{ij}$, y en el resto de los puntos por linealidad. En el último caso, se aplica el teorema de extensión de Hahn-Banach al espacio Z generado por x e Y y al funcional f definido en Z por $f(y + tx) = t\,\mathrm{dist}(x, Y)$. Se comprueba que f es lineal, continua en Z, $||f||_{Z^*} = 1$ y $f(x) = \mathrm{dist}(x, Y)$.

Por tanto, si X es un espacio normado no trivial su dual ha de ser otro espacio normado no trivial. En otras palabras, en cualquier espacio normado no trivial existen funcionales lineales continuos no nulos. Además, si todos los funcionales lineales continuos se anulan en un vector, entonces este vector es el cero.

A continuación se dan algunos de los resultados correspondientes a la versión geométrica del teorema.

En primer lugar, se define el funcional de Minkowski de un conjunto convexo. Sea C un conjunto convexo en un espacio normado X que contiene al origen como un punto interior. Se define el funcional de Minkowski de C como

$$\mu(x) = \text{ínf}\{\lambda > 0 : \ x \in \lambda C\}.$$

Se comprueba que μ es un funcional sublineal positivamente homogeneo en X y existe $m > 0$ tal que $\mu(x) \leq m||x||$, para todo $x \in X$.

Tenemos el siguiente resultado de separación:

Sea X un espacio de Banach y C un subconjunto no vacio convexo y abierto de X que contiene el origen. Si $x \notin C$, existe un funcional $f \in X^* \setminus \{0\}$ tal que

$$\operatorname{Re} f(x) > \operatorname{Re} f(y), \qquad \textit{para todo } y \in C.$$

Supongamos primero que X es un espacio normado real. La demostración se basa en considerar el funcional sublineal positivamente homogeneo μ y la aplicación lineal f definida en el espacio unidimensional Y generado por el vector x, como $g(\lambda x) = \lambda p(x)$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Puesto que $g(y) \leq p(y)$, para todo $y \in Y$, por el teorema de extensión de Hahn-Banach, existe f extensión lineal y continua de g a X, tal que $f(y) \leq p(y)$, para todo $y \in X$. Se comprueba que $f(y) \leq p(y) < 1$, si $y \in C$ y $f(x) = p(x) \geq 1$, lo que finaliza la demostración. Para el caso complejo, se considera X como un espacio normado real, y una vez obtenida f, se toma $F(y) = f(y) - if(iy)$, $y \in X$.

Supongamos que X es real y x está en la frontera de C. El funcional anterior f verifica que $f(x) = \sup\{f(y) : \ y \in C\}$. A f se le llama funcional soporte y al hiperplano afín $H = \{z \in X : \ f(z) = f(x)\}$, hiperplano soporte. Por ejemplo si consideramos la bola unidad de X, $B_X = \{z \in X : \ ||z|| < 1\}$, y $||x|| = 1$, f es funcional soporte de B_X en x si $||f|| = 1$ y $f(x) = 1$.

Con una ligera modificación en el anterior argumento se puede demostrar que si $\operatorname{dist}(x, C) > 0$, existe entonces $f \in X^* \setminus \{0\}$ y $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que

$$\operatorname{Re} f(x) > \alpha > \sup\{\operatorname{Re} f(y); \ y \in C\}.$$

Supongamos que X es real. Esto significa geométricamente que el hiperplano afín $H = \{x \in X : \ f(x) = \alpha\}$ “separa” C y x, dejándolos en los diferentes semiespacios, $H_- = \{z \in X : \ f(z) < \alpha\}$ y $H_+ = \{z \in X : \ f(z) > \alpha\}$, respectivamente.

De este resultado se deduce una versión mas general del teorema de separación de Hahn-Banach:

Sea X un espacio normado, A, B dos conjuntos no vacios, convexos, disjuntos en X y A abierto. Existe entonces un funcional $f \in X^* \setminus \{0\}$ y $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que

$$\operatorname{Re} f(b) \geq \alpha > \operatorname{Re} f(a), \qquad \textit{para todo } a \in A,\ b \in B.$$

Este resultado se deduce Se deduce del anterior considerando el conjunto $A - B = \{a - b : \ a \in A \text{ y } b \in B\}$. Se comprueba que $A - B$ es no vacio, abierto, convexo y $0 \notin A - B$ (esto último debido a que A y B son disjuntos). Podemos separar 0 de $A - B$ por un funcional f, tal que

$$0 > \operatorname{Re} f(a - b) = \operatorname{Re} f(a) - \operatorname{Re} f(b) \qquad \text{para todo } a \in A,\ b \in B.$$

Llamamos $\alpha = \operatorname{ínf}\{\operatorname{Re} f(b) : \ b \in B\}$, comprobamos que, puesto que A es abierto, $\operatorname{Re} f(a) < \alpha$, lo cual finaliza la demostración.

Con una ligera modificación en la anterior demostración, se puede comprobar que si además de las mencionadas condiciones sobre A y B, se verifica que $\operatorname{dist}(A, B) > 0$, entonces existe $f \in X^* \setminus \{0\}$ y $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que

$$\operatorname{ínf}\{\operatorname{Re} f(b) : \ b \in B\} > \alpha > \sup\{\operatorname{Re} f(a), a \in A\}.$$

Si X es real, esto significa nuevamente que los conjuntos A y B quedan totalmente separados por el hiperplano afín $H = \{x \in X : \ f(x) = \alpha\}$, A y B contenidos en los diferentes semiespacios afines $H_- = \{x \in X : \ f(x) < \alpha\}$ y $H_+ = \{x \in X : \ f(x) > \alpha\}$.

Es interesante mencionar también que en el caso de espacios de Banach reales, el teorema de Hahn-Banach implica que todo convexo cerrado es la intersección de los semiespacios que lo contienen.

Se comenta, aunque sin demostración, el resultado de Taylor-Foguel, el cual establece que todo funcional lineal acotado definido en un subespacio de X tiene una única extensión a todo X preservando la norma si y sólo si la norma dual en X^* es estrictamente convexa, es decir,

$$||\frac{f+g}{2}|| < 1, \qquad \text{para todo } f, g \in S_{X^*} = \{h \in X^* : \ ||h|| = 1\}, \ f \neq g.$$

Finalmente, se dan algunos ejemplos dónde la extensión no es única: Por ejemplo, sea $X = K^2$ con la norma $|| \cdot ||_1$, $Y = \{(x_1, x_2) \in K^2 : \ x_2 = 0\}$ y $f : Y \longrightarrow K$, $f(y) = y_1$. Se comprueba que

$$\begin{aligned} &F_1, F_2 : X \longrightarrow K, \\ &\qquad F_1(x_1, x_2) = x_1 + x_2, \\ &\qquad F_2(x_1, x_2) = x_1 - x_2, \end{aligned}$$

son ambas extensiones lineales que conservan la norma.

Otro ejemplo se puede encontrar en $C[0,1]$ con la norma $|| \cdot ||_\infty$, considerando el subespacio Y de las funciones constantes y la función $f : Y \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(y) = y(0)$. Entonces, para cualquier $a \in [0,1]$, las aplicaciones lineales continuas $F_a : C[0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$, $F_a(x) = x(a)$ son todas distintas y son extensiones que conservan la norma.

7. Separabilidad

En esta sección se introduce la noción de espacio normado separable. Esta noción no es nueva puesto que corresponde al concepto de espacio métrico separable.

Se dan como ejemplos de espacios separables ℓ_p, $1 \leq p < \infty$, c_0, c y $C[0,1]$. La demostración de que $C[0,1]$ es separable se comprueba por el teorema de Stone-weierstrass, teniendo el cuenta que el conjunto de los polinomios definidos en $[0,1]$

es denso en $C[0,1]$, puesto que este conjunto forma un álgebra que separa puntos de $[0,1]$ y contiene una función constante. Por tanto, el conjunto de los polinomios con coeficientes racionales forma un conjunto numerable y denso en $C[0,1]$.

Igualmente se prueba que $L_p(\mathbb{R})$, $1 \le p < \infty$ es separable: Se considera S el espacio de las combinaciones lineales finitas de funciones características en intervalos acotados $\chi_{[a,b]}$, $a, b \in \mathbb{R}$ y se comprueba que este conjunto es denso en $(L_p(\mathbb{R}), \|\cdot\|_p)$. Claramente, el subespacio S tiene un conjunto denso y numerable en $L_p(\mathbb{R})$. Se indica también que el espacio de las funciones continuas con soporte acotado es denso en $L_p(\mathbb{R})$, lo cual se deduce aproximando con $\|\cdot\|_p$ cualquier función característica en un intervalo acotado por una función continua con soporte acotado.

Por otra parte, se da como ejemplo de espacios no separables ℓ_∞ y $L_\infty(\mathbb{R})$. En el primer caso se considera la familia $\mathcal{A} = \{(\varepsilon_i) : \varepsilon_i = \pm 1\} \subset \ell_\infty$ y en el segundo caso la familia $\mathcal{A} = \{\chi_{[0,t]:\, t>0}\} \subset L_\infty(\mathbb{R})$. En ambos casos se comprueba que $\mathcal{A}$ no es numerable y la distancia entre cualesquiera dos elementos de $\mathcal{A}$ es mayor o igual que 1.

Un resultado interesante que podría mencionarse en esta sección es el siguiente:

Un espacio de Banach de dimensión infinita no puede tener una base algebraica numerable.

Este resultado es consecuencia del Teorema de categoria de Baire. Si $\{x_n\}$ es la base algebraica de X, entonces $X = \cup_n Y_n$, donde $Y_n = \text{span}\{x_1, ..., x_n\}$. Puesto que Y_n es de dimensión finita, es cerrado en X. Además, X es un espacio métrico completo, y el teorema de categoría de Baire implica la existencia de un conjunto Y_n con interior no vacío, lo cual es imposible.

Se introduce el concepto de *base de Schauder*. Una sucesión $\{x_n\}$ en un espacio normado X es una base de Shauder si todo punto $x \in X$ se puede expresar de forma única como una suma infinita $\sum_n a_n x_n$ convergente en X. Se indica que si X es un espacio de Banach, el teorema de la aplicación abierta (resultado que se probará más adelante) prueba que los funcionales lineales (f_n) asociados a (x_n), definidos como $f_n(\sum_n a_n x_n) = a_n$, son continuos. Se dan algunos ejemplos como las bases canónicas en c_0 y ℓ_p, $1 \leq p < \infty$, en c la sucesión $\{(1,1,1,....)\} \cup (e_n)$. Se menciona, aunque sin demostración, la base de Schauder construida por Schauder en $C[0,1]$ y la base de Haar en el espacio $L_p[0,1]$, $1 \leq p < \infty$ Si un espacio tiene una base de Schauder, entonces es separable. Se indica que, sin embargo, existen espacios normados separables que no tiene base de Schauder como probó Per Enflo en 1973.

8. Espacios producto. Proyecciones. Subespacios complementados

Se da el concepto de *espacio normado producto* $X \times Y$ de dos espacios de Banach X e Y, con cualquiera de las normas (todas ellas equivalentes)

$$\|(x,y)\|_p = (||x||^p + ||y||^p)^{1/p}, \qquad \text{si } p < \infty$$
$$\|(x,y)\|_\infty = \max ||x||, ||y||, \qquad \text{si } p = \infty$$

donde $(x,y) \in X \times Y$. Se comprueba que $X \times Y$ es un espacio de Banach si y sólo si X e Y son espacios de Banach.

Se introduce el concepto de *subespacio normado complementado.* Un subespacio Y de un espacio normado X está complementado en X si existe otro subespacio Z de X tal que la aplicación $I : Y \times Z \longrightarrow X$, $I(x,y) = x + y$ es un isomorfismo lineal. Se dice entonces que el espacio X es *suma directa* de Y y Z. En particular Y y Z deben ser cerrados. Se comprueba que esto es equivalente a la existencia de una proyección lineal continua, $P : X \longrightarrow Y$ tal que $P(X) = Y$ y $P^2 = P$.

En los siguientes capítulos se comprobará, como consecuencia del teorema de la gráfica cerrada que si Y y Z son cerrados en X y verifican que $Y \cap Z = \{0\}$ e $Y + Z = X$, entonces X es suma directa de Y y Z.

Se comprueba, usando el teorema de Hahn-Banach que cualquier subespacio de dimensión finita está complementado. En efecto, si $\{e_1, ..., e_n\}$ es una base de Y, existen funcionales continuos $\{f_1, ...f_n\}$ en X^* tales que $f_j(e_i) = \delta_{ij}$. El subespacio cerrado $Z = \cap_{j=1}^n \ker f_j$ verifica que $Y + Z = X$ e $Y \cap Z = \emptyset$, y por el resultado mencionado, X es suma directa de Y y Z. Con un argumento similar se prueba que cualquier subespacio cerrado de codimensión finita también está complementado.

Se menciona que c_0 no es un espacio complementado de ℓ_∞. Sin embargo, se indica que si X es un espacio normado separable y c_0 es linealmente isomorfo a un subespacio Y de X, entonces Y está complementado en X, resultado que fue probado por Sobczyk.

Capítulo 2

Espacios dual y bidual. Reflexividad Topologías débil y débil*

En este capítulo se exponen los resultados e ideas básicos referente al dual y bidual de un espacio normado, el concepto de reflexividad y las topologías débil y débil*.

En la primera sección se profundiza en el conceptos de espacio dual, calculando explicitamente los duales en algunos casos, e indicándolo simplemente en otros, de los espacios normados presentados en la sección anterior.

Igualmente se introduce el concepto de espacio reflexivo, así como las propiedades básicas de estabilidad de estos espacios con respecto a sus subespacios, cocientes, dual, etc... Se establece la reflexividad o no reflexividad de los espacios c_{00}, c_0, ℓ_p, Ł$_p(\mathbb{R})$, $1 \leq p \leq \infty$, y $C[0,1]$.

Se introduce el concepto de espacio completado de un espacio normado a través de la inyección canónica de un espacio normado en su bidual.

Para estas dos secciones hemos utilizado en su mayor parte la referencia [**24**].

En la tercera sección se introducen las topologías vectoriales débil y débil*. Se establece la igualdad de estas topologias con la de la norma unicamente en el caso finito dimensional. Se caracteriza la convergencia debil y débil* de una sucesión. Se establece el Lema de Schur, se caracteriza la convergencia débil de sucesiones en ℓ_p, $L_p(\mathbb{R})$, $1 < p < \infty$ y $C[a,b]$, en algunos casos sin dar la demostración.

Se indica que para conjuntos convexos, la adherencia débil coincide con la adherencia en norma. Por tanto, se demuestra que de toda sucesión debilmente convergente se puede conseguir una sucesión de conbinaciones lineales convexas de la anterior convergente en norma al mismo punto.

En la cuarta sección se explican los teoremas de Alaoglu y Goldstine así como algunas de sus consecuencias. Este capítulo puede ser omitido y considerado en un curso posterior de Análisis Funcional. Sin embargo, sería interesante poder exponerlo aunque sea de forma rápida.

Para estas dos últimas secciones hemos utilizado en su mayor parte las referencias [**11**] y [**24**].

1. Espacios de aplicaciones lineales continuas.

En esta sección se vuelve a tratar el concepto de espacio dual y se dan algunos ejemplos de los duales de espacios clásicos conocidos.

Se recuerda que si X e Y son espacios normados, en el espacio de las aplicaciones lineales y continuas de X en Y, se considera la norma $||T|| = \sup\{||T(x)|| : \ x \in X, \, ||x|| = 1\}$. En el caso $Y = K$, es decir, si se considera K un espacio normado sobre K, donde la norma es el valor absoluto o el módulo dependiendo si K es $\mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$, respectivamente, tenemos que $L(X, K)$ se denota por X^* y se llama espacio dual. La norma $||T|| = \sup\{|T(x)| : \ x \in X, \, ||x|| = 1\}$ se suele notar por $|| \cdot ||^*$, y se llama norma dual.

Un argumento sencillo demuestra, que Y es un espacio de Banach si y sólo si $L(X, Y)$ es un espacio de Banach. Tal es el caso si Y es $\mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$. Por tanto, $(X^*, || \cdot ||^*)$ es siempre un espacio de Banach.

Una aplicación del teorema de extensión de Hahn-Banach demuestra que si X^* es un espacio separable, entonces X es también separable. Para demostrarlo, se elige una sucesión $\{f_n\}$ densa incluida en S_{X^*}, la esfera unidad de X^*, y una sucesión de puntos $\{x_n\}$ en S_X tales que $f_n(x_n) > \frac{1}{2}$. Se considera Y la adherancia del espacio generado por los vectores $\{x_n\}$. Si $Y \neq X$, una de las consecuencias del Teorema de extensión de Hahn-Banach nos proporciona un elemento $f \in S_{X^*}$ tal que $f|_Y = 0$. Se comprueba que entonces $||f - f_n|| \geq \frac{1}{2}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, lo que es una contradicción.

Seguidamente se define el concepto de espacios linealmente isométricos, concepto que será de utilidad para identificar a los duales de algunos espacios clásicos como se verá seguidamente.

Dos espacios normados X e Y son *linealmente isométricos* si existe una aplicación lineal $I : X \longrightarrow Y$ tal que $||I(x)|| = ||x||$ para todo $x \in X$.

Se dan a continuación ejemplos de los duales de algunos de los espacios presentados en el capítulo anterior.

Recordemos que en la sección anterior indicabamos que el espacio dual de $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_p)$, donde $1 \leq p \leq \infty$, se puede identificar con el conjunto de las n-tuplas $(a_1, ..., a_n)$ y si $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ es lineal entonces $||f|| = ||(a_1, ..., a_n)||_q$, siendo $f(1, 0, ..., 0) = a_1$, ..., $f(0, ..., 0, 1) = a_n$ y $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. De este modo el dual de $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_p)$ es linealmente isométrico al espacio $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_q)$ y se identifica con este.

Se considera el espacio $(c_0, \|\cdot\|_\infty)$. El dual de este espacio es isométricamente isomorfo a $(\ell_1, \|\cdot\|_1)$: se comprueba que si $f : c_0 \longrightarrow \mathbb{R}$ es una aplicación lineal y continua y $e_i = (0, ..., 1, 0, ...)$ con 1 en la posición i, entonces

$$I : (c_0, \|\cdot\|_\infty)^* \longrightarrow (\ell_1, \|\cdot\|_1)$$
$$I(f) = (f(e_1), f(e_2), ...)$$

es una isometría lineal. Si $f(e_i) = a_i$ y consideramos para cada natural n, $x^n = (\text{sign}(a_1), ..., \text{sign}(a_n), 0, ...)$, entonces $|f(x^n)| = \sum_{i=1}^n |a_i| \leq ||f||$, puesto que $||x^n|| \leq 1$. Por tanto $\sum_{i=1}^\infty |a_i| \leq ||f||$, lo cual implica que I es continua. La inyectividad de I se deduce del hecho de que $f(x) = \sum_{i=1}^\infty f(e_i)x_i$. Por otra parte, si $(b_i)_i$ está en ℓ_1, se comprueba que la aplicación $h(x) = \sum_{i=1}^\infty b_i\, x_i$ es lineal, continua y $||h|| \leq \sum_{i=1}^\infty |b_i|$. Puesto que $(h(e_1), h(e_2), ...) = (b_1, b_2, ...)$ se tiene que I es una biyección e isometría.

De forma similar al anterior caso se comprueba que el dual de $(c_{00}, ||\cdot||_\infty)$ es isométricamente isomorfo a $(\ell_1, ||\cdot||_1)$ y el dual de $(\ell_1, \|\cdot\|_1)$ es isométricamente isomorfo a $(\ell_\infty, \|\cdot\|_\infty)$ y como tales se identifican.

En general, se prueba que si $1 < p < \infty$, el dual de $(\ell_p\,, \|\cdot\|_p)$ es $(\ell_q\,, \|\cdot\|_q)$, donde $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, en el sentido de que la aplicación

$$I : (\ell_p, \|\cdot\|_p)^* \longrightarrow (\ell_q, \|\cdot\|_q)$$
$$I(f) = (f(e_1), f(e_2), ...)$$

es una isometría lineal. Si $f \in (\ell_p, \|\cdot\|_p)^*$ y llamamos $f(e_i) = a_i$, se considera para cada natural n, $x^n = (|a_1|^{q-1}\,\mathrm{sign}(a_1), ..., |a_n|^{q-1}\,\mathrm{sign}(a_n), 0, ...)$. Entonces $\sum_{i=1}^n |a_i|^q = f(x^n) \leq ||f||\,(\sum_{i=1}^n |a_i|^{p(q-1)})^{1/p}$ para cada n natural. De esto se deduce que $||(a_1, a_2, ...)||_q \leq ||f||$ y por tanto I es continua. La inyectividad de I se deduce igualmente del hecho de que $f(x) = \sum_{i=1}^\infty f(e_i)\,x_i$. Por otra parte, si $(b_i)_i$ es un elemento de ℓ_q y consideramos la aplicación lineal $h : \ell_p \longrightarrow \mathbb{R}$, $h(x) = \sum_{n=1}^\infty b_n\,x_n$, está bien definida y la desigualdad de Hölder implica que $||h|| \leq ||(b_1, b_2, ...)||_q$. Puesto que $(h(e_1), h(e_2), ...) = (b_1, b_2, ...)$ de lo anterior se deduce que I es una biyección e isometría.

Seguidamente se indica que el dual de $(L_p(\mathbb{R}), \|\cdot\|_p)$, $1 \leq p < \infty$, es isométricamente isomorfo a $(L_q(\mathbb{R}), \|\cdot\|_q)$, donde $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ (si $p = 1$ se entiende que $q = \infty$). Si definimos para cada $f \in L_q(\mathbb{R})$,

$$I : (L_q(\mathbb{R}), \|\cdot\|_q) \longrightarrow (L_p(\mathbb{R}), \|\cdot\|_p)^*$$
$$I(f)(g) = \int_{\mathbb{R}} f\,g\,,$$

la desigualdad de Hölder implica que I es lineal, continua e $||I(f)|| \leq ||f||_1$.

La demostración de que I es sobreyectiva e isometría requiere tener conocimientos previos de teoría de la medida como los teoremas de convergencia para la integral de Lebesgue y funciones absolutamente continuas. Los teoremas de convergencia ya se han mencionado anteriormente. Con respecto a *funciones absolutamente continuas*, se menciona la caracterización siguiente: Una función $F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ es absolutamente continua si y sólo si es derivable en casi todo punto (respecto a la medida de Lebesgue) y se puede recuperar a través de su derivada, es decir, $F(x) = F(a) + \int_a^x F'(u)\,du$.

Una referencia interesante para este resultado es [**35**], la cual puede seguirse sin más que algunos conocimientos previos de la medida de Lebesgue.

Se indica sin demostración lo siguientes resultados, los cuales serán materia de un curso más avanzado de Análisis Funcional:

- Si (X, Σ, μ) es un espacio de medida abstracto, y la medida es σ-finita si $p = 1$ ó arbitraria si $1 < p < \infty$, entonces $L_p(X\mathcal{A}, \mu)^*$ es isométricamente isomorfo a $L_q(X\mathcal{A}, \mu)$ ([**8**]).
- El dual de $C[a, b]$ se puede identificar con el espacio de las funciones definidas en $[a, b]$ de variación acotada y normalizadas (normalizada significa continua por la derecha y con imagen 0 en a), espacio que se denota por $NBV([a, b])$. La norma de una función $f \in NBV([a, b])$ es la variación total de f en $[a, b]$. Una referencia para este resultado es [**24**].
- En general, el dual del espacio de las funciones continuas sobre un compacto con la norma infinito, el cual se denota por $(C(K), \|\cdot\|_\infty)$ se identifica con el espacio de las medidas de Borel regulares de variación acotada definidas sobre K ([**8**]).

2. Espacio bidual. Reflexividad.

Si X es un espacio normado, consideremos el espacio dual de X^*, que usualmente se denota por X^{**} y se llama espacio *bidual* de X. Veamos que el espacio X se considera un subespacio normado de su bidual X^{**}.

Sea X un espacio normado y

$$J : X \longrightarrow X^{**}$$
$$J(x)(f) = f(x), \qquad \text{para cada } f \in X^*.$$

La aplicación J es lineal. Además, $||J(x)|| \leq ||x||$ para todo $x \in X$, y por tanto J es continua. Más aún, J es una isometría sobre su imagen. Esto es debido a la propiedades que se deducen del Teorema de Hahn-Banach, puesto que vimos en el capítulo anterior que para cualquier $x \in X$ la norma de x se puede calcular como

$$||x|| = \sup\{|f(x)| : f \in X^*, \ ||f|| \leq 1\} = ||J(x)||.$$

La aplicación J es llamada la *ïnyección canónica"* de X en su bidual X^{**}.

La inyección J no es en general sobreyectiva. Se introduce el concepto de espacio *reflexivo* como aquel espacio X tal que la aplicación J es una biyección de X en X^{**}, es decir, para todo $T \in X^{**}$, existe $x \in X$ tal que $T(f) = f(x)$ para todo f en X^*.

Se indica que este es un concepto *isomorfo*, esto es, si X e Y son dos espacios normados linealmente isomorfos, entonces X es reflexivo si y sólo Y es reflexivo. Convendría aclarar en este sentido que si X e Y son linealmente isomorfos, esto quiere decir que X e Y son el mismo espacio con dos normas equivalentes. Igualmente los duales son el mismo espacio y la normas duales son también normas equivalentes.

Si X es de dimensión finita n, claramente X^* y X^{**} son tambien espacios normados de dimensión n, y por tanto, J es sobreyectiva. Es decir, todo espacio de dimensión finita es reflexivo.

De los resultados hasta ahora expuestos se deduce que el bidual de c_0 es ℓ_∞. En este caso J no es sobreyectiva y por tanto c_0 no es reflexivo.

Seguidamente se menciona que ℓ_1 no es reflexivo pues su dual ℓ_∞ no es separable, y por tanto el bidual de ℓ_1 tampoco lo es. Si J fuese sobreyectiva, el bidual de ℓ_1 sería separable, lo que es una contradicción.

Se comprueba que para $1 < p < \infty$, el espacio ℓ_p y $L_p(\mathbb{R})$ es reflexivo.

Se hace notar que si J es sobreyectiva entonces X y X^{**} son linealmente isométricos. Sin embargo, esto último no es suficiente para que un espacio sea reflexivo. Se menciona el espacio de James (contruido en 1951) el cual es linealmente isométrico a su bidual pero no es reflexivo, es decir, la aplicación J no es sobreyectiva.

Se establecen las siguientes propiedades de estabilidad con respecto a los espacios reflexivos:

Si X es un espacio reflexivo, entonces

1. *todo subespacio cerrado de X es reflexivo,*
2. *X^* es reflexivo,*
3. *X es separable si y sólo si X^* es separable.*
4. *si Y es un subespacio cerrado de X, entonces el espacio cociente X/Y es reflexivo.*

En particular X es reflexivo si y sólo si X^* es reflexivo.

Para demostrar la primera afirmación se considera $J_Y : Y \longrightarrow Y^{**}$ y un funcional $y^{**} \in Y^{**}$. Se define $x^{**} \in X^{**}$ de la siguiente forma:

$$x^{**}(x^*) = y^{**}(x^*|_Y), \qquad \text{para todo } x^* \in X^*,$$

donde $x^*|_Y$ significa la restricción de x^* a Y, y por tanto, $x^*|_Y$ es un elemento de Y^*. Puesto que X es reflexivo existe $x \in X$ tal que $x^{**}(x^*) = x^*(x)$ para todo $x^* \in X^*$. Se comprueba finalmente que $x \in Y$. Si x no está en Y, por una de las consecuencias del teorema de extensión Hahn-Banach, existe $x_0 \in X^*$ tal que $x_0^*|_Y \equiv 0$ y $x_0^*(x) = 1$. Así, $1 = x_0^*(x) = x^{**}(x^*) = y^{**}(0) = 0$, lo cual es una contradicción. Por tanto $J_Y(x) = y^{**}$, y J_Y es sobreyectiva.

Para probar la segunda afirmación, se considera $J : X^* \longrightarrow X^{***}$ la inyección canónica y $x^{***} \in X^{***}$. Se comprueba que la composición $x^* = x^{***}\ J_X \in X^*$, donde J_X es la inyección canónica de X en X^{**}, verifica que $J(x^*) = x^{***}$. En efecto, por ser X reflexivo $x^{**} = J(x)$, para cierto $x \in X$. Entonces, $x^{***}(x^{**}) = x^{***}(J_X(x)) = x^*(x) = J_X(x)(x^*) = x^{**}(x^*) = J(x^*)(x^{**})$, es decir $x^{***} = J(x^*)$, y J es sobreyectiva.

Para demostrar la tercera afirmación, se observa que ya se demostró que si X^* es separable entonces X lo es. Además por las hipótesis, X y X^{**} son linealmente isométricos, por lo que si X es separable X^{**} es separable, y por tanto X^* también es separable, con lo que se obtiene la implicación contraria.

Para demostrar la cuarta afirmación se utiliza que el dual del espacio X/Y es isométricamente isomorfo al subespacio de X^*, $F^\perp \equiv \{f \in X^* : \ f|_Y = 0\}$ con la siguiente aplicación

$$I : (X/Y)^* \longrightarrow Y^\perp, \quad I(g) = g \circ \pi$$

dónde $\pi : X \longrightarrow X/Y$ es la proyección canónica $\pi(x) = \hat{x}$.

Finalmente, si X^* es reflexivo también lo es X^{**} y por tanto X por ser un subespacio de X^{**}.

De los anteriores resultados se deduce en particular que c no es reflexivo pues contiene a c_0 como subespacio y este no es reflexivo. Igualmente, ℓ_∞ no es reflexivo puesto que es el dual del espacio no reflexivo ℓ_1. El espacio separable $L_1(\mathbb{R})$ no es reflexivo pues su dual $L_\infty(\mathbb{R})$ no es separable. Además de esto se deduce que $L_\infty(\mathbb{R})$ no es reflexivo. Finalmente se comprueba que el espacio separable $C[a,b]$ no es reflexivo o bien demostrando que su dual no puede ser separable, considerando la familia de evaluaciones en puntos $(\delta_t)_{t\in[a,b]} \subset C[a,b]^*$, o bien comprobando que por ejemplo c_0 es isométricamente isomorfo a un subespacio de $C[a,b]$.

Definimos a continuación el completado de un espacio normado. La inyección canónica J de todo espacio normado X en su bidual nos proporciona el siguiente resultado: *Todo espacio normado X es isométricamente isomorfo a un subespacio denso de un espacio de Banach.* Este espacio de Banach es único salvo isometrías lineales y es el llamado el *completado de* X. El espacio completado de X es $\overline{J(X)} \subset X^{**}$, subespacio cerrado del espacio de Banach X^{**}. Se dan algunos ejemplos básicos: la complección de $(c_{00}, \|\cdot\|_\infty)$ es c_0 y la complección de $(C[0,1], \|\cdot\|_p)$ $(1 \leq p < \infty)$ es el espacio $L_p[0,1]$. Se indica que el dual de un espacio normado es isométricamente isomorfo al dual de su completado.

Finalizamos esta sección con el *teorema de Helly ó principio de reflexión local*, el cual nos asegura que si X es un espacio normado, $x^{**} \in X^{**}$ y F es un subespacio de dimensión finita de X^*, existe $x \in X$ tal que

$$x^{**}(x^*) = x^*(x), \qquad \text{para todo } x^* \in F.$$

La demostración se basa en considerar el espacio ortogonal $F_\perp = \{x \in X : x^*(x) = 0, \quad \text{para todo } x^* \in X^*\}$, y el espacio de dimensión finita $X/F_\perp$. Entonces $(X/F_\perp)^* =$

F y $x^{**}|_F \in (X/F_\perp)^{**} = F^*$. El resultado se obtiene teniendo en cuenta que $X/F_\perp$ es reflexivo.

3. Topologías débil y débil*

En esta sección se introducen nuevas topologías en un espacio normado X y su dual X^* más débiles que las topologías asociadas a las normas y que se llaman topologías débil y débil*. Estas nociones son interesantes por muchos motivos. Uno de ellos es debido a que las propiedades de los espacios normados, tales como la reflexividad, quedan caracterizadas a través de estas topologías. Otro muy importante es porque constituyen las topologías más débiles en X (X^*, respectivamente) para las que cada funcional de X^* ("funcional" $x \in X$ visto como elemento de X^{**}, repectivamente) es continuo.

Se define en un espacio normado real X la *topología débil* y se denota por ω de la siguiente forma. La topología ω está generada por la siguiente familia de conjuntos

$$W_{f_1,\ldots,f_n,\varepsilon}(x) = \{y \in X : \ |f_i(y) - f_i(x)| < \varepsilon, \quad \text{para todo } i = 1, ..., n\},$$

donde $f_1, .., f_n$ varían en X^*, x en X, n en $\mathbb{N}$ y ε en $(0, \infty)$. Para cada $x \in X$ fijo, la familia $\{W_{f_1,\ldots,f_n,\varepsilon}(x)\}$ constituye una base de entornos de x para la topología w^*.

De igual forma la *topología* w^* en un espacio dual X^* es la generada por la familia de conjuntos

$$W_{x_1,\ldots,x_n,\varepsilon}(g) = \{f \in X^* : \ |x_i(f) - x_i(g)| < \varepsilon, \quad \text{para todo } i = 1, ..., n\},$$

donde $x_1, .., x_n$ varían en X, g en X^*, n en $\mathbb{N}$ y ε en $(0, \infty)$. Y para cada $g \in X^*$ fijo la familia $\{W_{x_1,\ldots,x_n,\varepsilon}(g)\}$ es una base de entornos de g para la topología w^*.

Se hace notar que si X es un espacio de Banach real una base para la topología w está formada por intersecciones finitas de semiespacios. Recordemos que un semiespacio está definido como $H = \{x \in X : \ f(x) < \alpha\}$ donde $f \in X^*$ y $\alpha \in \mathbb{R}$.

Se hace también observar que las topologías w y w^* son Hausdorff. Efectivamente, si $f \neq g$ son dos elementos de X^*, existe entonces $x \in X$ tal que $f(x) \neq g(x)$. En particular existe un número $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) > \alpha > g(x)$. Los conjuntos w^*-abiertos $\{h \in X^* : \ h(x) > \alpha\}$ y $\{h \in X^* : \ h(x) < \alpha\}$ separan f de g. La demostración para la topología débil es similar utilizando el Teorema de Hahn-Banach dado que si $x \neq y$ existe entonces un funcional no nulo $f \in X^*$ con $f(x-y) \neq 0$.

Se hace notar que los abiertos en estas topologías son abiertos en norma y por tanto son topologías más débiles que las topologías de las normas. Se indica que de la definición de topologías w y w^* se deduce que, de hecho, w es la topologia inicial en X para la familia de funciones X^*, es decir es la topología menos fina en X para la cual las las funciones de X^* son continuas. Igualmente, la topología w^* es la topología inicial en X^* para la familia de funciones X, considerado X como subconjunto de X^{**}.

Se demuestra lo siguiente:

Las topologías w y w^* coinciden con las topologías de las normas si y solo si los espacios considerados son de dimensión finita.

Efectivamente, si X es de dimensión finita, $\{e_1, ..., e_n\}$ una base en X y $\{e_1^*, ..., e_n^*\}$ los funcionales lineales asociados tales que $e_i^*(e_j) = \delta_{ij}$, entonces la expresión $|x| = \sup\{|e_i^*(x)| : \ i = 1, ..., n\}$ es una norma. Puesto que X es finito dimensional, todas las normas en X son equivalentes, y por tanto, si denotamos por $B_{|\cdot|}$ a la bola unidad de la norma $|\cdot|$, para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $\{y \in X : \ |e_i^*(y) - e_i^*(x)| < \delta\} \subset x + \delta\, B_{|\cdot|} \subset x + \varepsilon\, B_X$. De igual forma se comprueba para la topología w^*.

Supongamos ahora que X es infinito dimensional. Se demuestra que cualquier abierto U en la topología w (no vacío) no es acotado en norma. Efectivamente, podemos considerar por traslación que $0 \in U$ y que $W_{f_1,...,f_n,\varepsilon}(0) \subset U$. Entonces el conjunto $N = \{x \in X : \ f_i(x) = 0 \text{ para todo } i = 1, ..., n\} = \cap_{i=1}^n f_i^{-1}(0) \subset U$. Si $N = \cap_{i=1}^n f_i^{-1}(0) = \emptyset$, entonces para todo $f \in X^*$ se tiene que $N \subset \ker f$ y esto significa que f es combinación lineal de $f_1, .., f_n$. Puesto que X y por tanto X^* son infinito dimensionales N es un subespacio de dimensión al menos uno y por tanto no está acotado. (De hecho, N es un subespacio de X^* de dimensión infinita).

Además las topologías w y w^* son vectoriales: las aplicaciones suma y producto por escalares son continuas para la topología débil y débil*.

Para describir estas topologías en términos de convergencia en la mayoría de los casos no nos podemos limitar sólo a convergencia de sucesiones sino a convergencia de redes pues no son siempre topologías metrizables.

Si X es un espacio normado,

1. *una red $(f_\alpha) \subset X^*$ converge a $f \in X^*$ en la topología w^* y se denota por $f_\alpha \xrightarrow{w^*} f$ si y sólo si $\lim_\alpha f_\alpha(x) = f(x)$, para todo $x \in X$.*
2. *Una sucesión $(x_\alpha) \subset X$ converge a $x \in X$ en la topología w y se denota por $x_\alpha \xrightarrow{w} x$ si y sólo si $\lim_\alpha f(x_\alpha) = f(x)$, para todo $f \in X^*$.*

En el próximo capítulo se comprobará como consecuencia del Teorema de Banach-Steinhaus (principio de acotación uniforme) que, en el caso de *sucesiones*, $(f_n) \xrightarrow{w^*} f$ si y sólo si la sucesión (f_n) está acotada y existe un conjunto denso M en X tal que $\lim_n f_n(x) = f(x)$, para todo $x \in M$. Igualmente, $(x_n) \xrightarrow{w} x$ si y sólo si la sucesión (x_n) está acotada y existe un conjunto denso M en X^* tal que $\lim_n f(x_n) = f(x)$, para todo $f \in M$.

Aunque el concepto de convergencia de redes no resulta nuevo, puesto que en la asignatura previa de *Elementos de Geometría Diferencial y Topología* se ha estudiado, hemos preferido centrarnos en la convergencia de sucesiones.

Se observa que, por ser la topología de la norma mas fuerte que las topologías w y w^*, si $f_n \xrightarrow{\|\cdot\|} f$ en norma entonces $f_n \xrightarrow{w^*} f$. Pero el recíproco no es cierto. Por ejemplo en ℓ_1 consideramos la sucesión $e_n = (0, ..., 0, 1, 0, ...)$ con 1 en la posición n, entonces $e_n \xrightarrow{w^*} 0$ y sin embargo (e_n) no es convergente en norma. Igualmente, si $x_n \xrightarrow{\|\cdot\|} x$ en norma entonces $x_n \xrightarrow{w} x$. Pero el recíproco no es cierto. Por ejemplo en c_0 consideramos la sucesión $e_n = (0, ..., 0, 1, 0, ...)$ con 1 en la posición n, entonces $e_n \xrightarrow{w} 0$ y sin embargo (e_n) no es convergente en norma.

Seguidamente se dan algunos ejemplos de convergencia w en los espacios clásicos descritos anteriormente.

En ℓ_1 se demuestra el *Lema de Schur* : $x_n \xrightarrow{w} x$ *en* ℓ_1 *si y solo si* $x_n \xrightarrow{\|\cdot\|} x$.

En ℓ_p, $1 < p < \infty$, se demuestra que $x_n \xrightarrow{w} x$ si y solo si (x_n) está acotada y $\lim_n x_n(i) = x(i)$, es decir, la sucesión de las coordenadas i-ésimas de x_n converge a la coordenada i-ésima de x para todo $i \in \mathbb{N}$. Este resultado es consecuencia de la mencionada caracterización para la convergencia w de sucesiones y del hecho de que $\lim_n f(x_n) = f(x)$ para todo $f \in c_{00}$, subespacio denso en ℓ_p^*. Además, se hace observar que en estos espacios el hecho de que $x_n \xrightarrow{w} x$ no implica que $x_n \xrightarrow{\|\cdot\|} x$. Por ejemplo, los elementos de la mencionada base canónica (e_n) convergen débilmente a 0, pero obviamente, no convergen en norma.

En $L_p(\mathbb{R})$, $1 < p < \infty$, puesto que su dual es linealmente isométrico a $L_q(\mathbb{R})$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, y puesto que las funciones simples con soporte acotado son densas en $L_q(\mathbb{R})$, se sigue que una sucesión $(f_n) \subset L_p(\mathbb{R})$ verifica que $f_n \xrightarrow{w} f$ si y solo si la sucesión (f_n) está acotada en norma y

$$\lim_n \int_E f_n = \int_E f$$

para cada conjunto medible Lebesgue acotado E.

Se indica, aunque sin demostración que, en el espacio de las funciones continuas $C[a, b]$, una sucesión de funciones $f_n \xrightarrow{w} f$ si y sólo si la sucesión (f_n) está acotada en norma y converge puntualmente, es decir, $\lim_n f_n(t) = f(t)$, para todo $t \in [a, b]$. Se hace observar que sin embargo, el espacio generados por las evaluaciones $\{\delta_t : t \in [a, b]\}$ no es denso en el dual de $C[a, b]$.

Un resultado interesante de mencionar, y que puede ayudar a asimilar el concepto de topología débil es el siguiente:

Cualquier convexo cerrado C en un espacio normado X es w-cerrado. Por tanto, para conjuntos convexos, la w-adherencia y la $|| \cdot ||$-adherencia coinciden.

Una demostración de este resultado es mediante el teorema de separación de Hahn-Banach. Si $x \notin C$, existe un funcional $f \in X^*$ no nulo tal que $\sup\{\text{Re } f(y) : y \in C\} < \text{Re } f(x)$. Así, pues existe $r > 0$ tal que $C \cap W_{f,r}(x) = \emptyset$, es decir $C \cap \{y \in X : |f(y) - f(x)| < r\} = \emptyset$. Puesto que $W_{f,r}(x)$ es w-abierto, deducimos que $X \setminus C$ es w-abierto.

En particular se tiene que la w-adherencia de la bola abierta $U_X = \{x \in X : ||x|| < 1\}$ es la bola cerrada B_X.

Se comentó anteriormente que $x_n \xrightarrow{w} x$ no implica en general $x_n \xrightarrow{\|\cdot\|} x$. Sin embargo, del anterior resultado se puede obtener que:

Si X es un espacio normado y $x_n \xrightarrow{w} x$ en X, existen entonces combinaciones convexas y_k de (x_n) tales que $y_k \xrightarrow{\|\cdot\|} x$. Es decir, para todo $\varepsilon > 0$ existen $\lambda_1, ...\lambda_n \geq 0$ tales que $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$ y $||x - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i|| < \varepsilon$.

En efecto, se considera C la envoltura convexa y cerrada del conjunto $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$. Puesto que C es convexo $\overline{C}^w = C$ y deducimos que $x \in C$.

Se menciona que, por el contrario, en espacios duales la w^*-adherencia de un convexo, puede incluir extrictamente a la $\| \cdot \|$-adherencia de un convexo.

Otro resultado interesante relativo a la topología débil* es el siguiente teorema de separacion en espacios duales:

Sea X un espacio de Banach. Si C es un conjunto débil cerrado convexo en X^* y $f \in X^* \setminus C$, existe entonces $x \in X$ tal que* $\text{Re } f(x) > \sup\{\text{Re } g(x) : g \in C\}$.

Un prueba geométrica y sencilla de este hecho se puede consultar en [**11**].

4. Los resultados de Alaoglu y Goldstine

A continuación se exponen los resultados de *Alaoglu* y *Goldstine*, los cuales nos proporcionan propiedades esenciales de la estructura de los espacios normados. Se podría pensar en incluir esta materia en un curso más avanzado de Análisis Funcional, y quizás las limitaciones de tiempo así lo hagan necesario. En cualquier caso, creo interesante familiarizarse con estas propiedades básicas aunque sea de forma somera.

El primero de ellos establece que (B_{X^*}, w^*) *es compacto.* La demostración de este hecho se basa en comprobar que B_{X^*} es un conjunto cerrado del espacio $[-1,1]^{B_X}$, el cual por el teorema de Tychonoff, es compacto con la topología de la convergencia puntual.

Otro importante resultado sobre la estructura de la bola dual de X^* es el siguiente:

X es separable si y sólo si (B_{X^*}, w^*) es metrizable. En particular, si X es separable, entonces X^* es w^*-separable.

Si X es separable y (x_n) es una sucesión densa en la esfera S_X, se define la métrica

$$\varrho(f,g) = \sum_{i=1}^{\infty} 2^{-i}|(f-g)(x_i)|, \qquad f,g \in B_{X^*}.$$

Se comprueba que la aplicación identidad de (B_{X^*}, w^*) a (B_{X^*}, ϱ) es continua. Puesto que es una biyección y, por el teorema de Alaoglu, el primer espacio es compacto deducimos que la identidad es un homeomorfismo. Para demostrar el recíproco, si (B_{X^*}, w^*) es metrizable, la separabilidad de X se deduce del resultado siguiente, considerando X como un subespacio de $(C(B_{X^*}, w^*), \|\cdot\|_\infty)$, el espacio de las funciones continuas sobre el compacto (B_{X^*}, w^*).

Consideremos $C(K)$ el espacio de las funciones continuas sobre un compacto K con la norma $\|\cdot\|_\infty$. Entonces $C(K)$ es separable si y sólo si K es metrizable.

El teorema de Goldstine establece para todo espacio normado X que la w^*-adherencia de B_X en X^{**} es $B_{X^{**}}$.

Puesto que $(B_{X^{**}}, w^*)$ es w^*-compacto, es claro que la w^*-adherencia de B_X en X^{**} está incluida en $B_{X^{**}}$. Si $B_{X^{**}} \neq \overline{B_X}^{w^*}$, por el teorema de separación en espacios duales mencionado al final de la sección anterior, encontramos $f \in S_{X^*}$ tal que

$$\sup\{\text{Re } x^{**}(f) : x^{**} \in B_{X^{**}}\} > \sup\{\text{Re } f(x) : x \in B_X\} = 1,$$

lo que es imposible pues si $x^{**} \in B_{X^{**}}$ y $f \in B_{X^*}$, entonces $|x^{**}(f)| \leq 1$.

Los resultados de Alaoglu y Goldstine nos proporcionan una demostración a la siguiente caracterización de espacios reflexivos:

Un espacio normado X es reflexivo si y sólo si B_X es debilmente compacto.

Si X es reflexivo, se tiene que $J : (B_X, w) \longrightarrow (B_{X^{**}}, w^*)$ es un homeomorfismo y por el teorema de Alaoglu (B_X, w) es compacto. Reciprocamente, si (B_X, w) es compacto, entonces es w^*-cerrado en X^{**}. Por el teorema de Goldstine se tiene que $J(B_X) = B_{X^{**}}$.

Las demostraciones que seguimos en los resultados de esta sección se encuentran en la referencia [**11**].

Capítulo 3

El Teorema de Banach-Steinhaus. El Teorema de la aplicación abierta. Aplicaciones

En este capítulo se introducen resultados esenciales como el Principio de acotación uniforme, el teorema de la aplicación abierta y el teorema de la gráfica cerrada. Se prentende la familiarización con estos resultados así como con algunas de sus aplicaciones. Las referencias que hemos seguido han sido [**11**], [**1**], [**25**]. La referencia para gran parte de las aplicaciones es [**24**].

1. El Teorema de Banach-Steinhaus.

En esta sección se introduce un resultado esencial este curso como es el Teorema de Banach-Steinhaus o principio de acotación uniforme y uno de los más importantes en espacios de Banach.

Antes de enunciar el principio de acotación uniforme, sería interesante mencionar el *Teorema de Ascoli-Arzela*, el cual establece que si tenemos una familia $\mathcal{A}$ de aplicaciones continuas de un espacio métrico compacto K con valores en $\mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$ tal que $\mathcal{A}$ está puntualmente acotada y es equicontinua para todo $x \in K$, entonces $\mathcal{A}$ está uniformemente acotada. El resultado anterior para el caso de operadores lineales continuos es el conocido pincipio de acotación uniforme, el cual establece lo siguiente:

Consideremos X un espacio de Banach, Y un espacio normado y una familia $\mathcal{A} \subset L(X,Y)$ puntualmente acotada, es decir, para todo $x \in X$, $\sup_{A\in\mathcal{A}} ||A(x)|| < \infty$. Entonces $\sup_{A\in\mathcal{A}} ||A|| < \infty$.

Seguidamente pasamos a exponer la demostración de este resultado que resulta ser una sencilla consecuencia del Teorema de * (B_{X^*}, w^*) metrizable sii X separable.

(y por tanto, X separable, entonces (X^*, w^*) separable). * (B_{X^*}, w^*) metrizable sii X separable. (y por tanto, X separable, entonces (X^*, w^*) separable). categoria de Baire. En efecto, para cada $n \in \mathbb{N}$, se define el conjunto

$$N_n = \{x \in X : \sup_{A \in \mathcal{A}} ||A(x)|| \leq n\}.$$

El conjunto N_n es cerrado, lo cual se puede deducir de la continuidad de cada elemento $A \in \mathcal{A}$. Además, se comprueba que cada N_n es simétrico y convexo. Puesto que para todo $x \in X$, $\sup_{A \in \mathcal{A}} ||A(x)|| < \infty$, se tiene que $X = \cup_n N_n$. El Teorema de categoría de Baire implica que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que N_{n_0} tiene interior no vacío. Por tanto, existe $\delta > 0$ y $x_0 \in X$ tal que $x_0 + \delta\, B_X \subset N_{n_0}$. Por la simetría de N_{n_0} se tiene que $-x_0 + \delta B_X \subset N_{n_0}$. Por convexidad, $\delta\, B_X \subset N_{n_0}$. Consecuentemente, para cada $x \in B_X$, $\sup_{A \in \mathcal{A}} ||A(\delta\, x)|| \leq n_0$. Es decir $||A|| \leq \frac{n_0}{\delta}$, para todo $A \in \mathcal{A}$.

Se ilustra con un ejemplo que la completitud de X es esencial. En efecto, si $X = c_{00}$ con lo norma del supremo y $f_n \in X^*$ definida como

$$f_n(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Puesto que cada $x \in c_{00}$ tiene unicamente un número finito de coordenadas no nulas, es claro que $\sup_{n \in \mathbb{N}} |f_n(x)| < \infty$. Sin embargo $||f_n|| = n$, para cada n y por tanto el conjunto $\{||f_n|| : n \in \mathbb{N}\}$ no está acotado.

Seguidamente se dan algunas consecuencias del Teorema de Banach-Steinhaus.

Sean X espacio de Banach, Y espacio normado y una sucesión de operadores continuos $A_n \subset L(X, Y)$. Supongamos que para cada $x \in X$ existe el límite $A(x) = \lim_n A_n(x)$. Entonces $A \in L(X, Y)$ y $||A|| \leq \liminf_n ||A_n||$.

La linealidad de A es sencilla de comprobar. Puesto que la sucesion $(A_n(x))_n$ está acotada para cada $x \in X$, el Teorema de Banach-Steinhaus nos asegura que A es continua. Además, si $x \in B_X$, $||A(x)|| = \lim_n ||A_n(x)|| = \liminf ||A_n(x)|| \leq \liminf(||A_n||)$.

El anterior resultado nos proporciona un prueba de que cualquier sucesión (f_n) en un espacio dual X^* convergente en la topología w^* es acotada. En efecto, si f_n converge w^*, en particular $(f_n(x))_n$ es una sucesión acotada para todo $x \in X$. Por lo anterior el conjunto $\{||f_n|| : n \in \mathbb{N}\}$ está acotado. Igualmente, se demuestra que toda sucesión (x_n) en un espacio normado (no necesariamente de Banach) convergente en la topología w está acotada. Para poder aplicar el Teorema de Banach-Steinhaus, se considera por ejemplo, la sucesión $(J(x_n))_n \subset X^{**}$. La sucesión $(J(x_n))_n$ es w^* convergente en X^{**}, y por lo anterior el conjunto $\{||J(x_n)|| : n \in \mathbb{N}\}$ está acotado. Puesto que J es una isometría sobre su imagen se tiene que $||J(x_n)|| = ||x_n||$ y se concluye que el conjunto $\{||x_n|| : n \in \mathbb{N}\}$ está acotado.

De esto se deduce el resultado que se indicaba en la anterior sección:

1. *una sucesión* $(f_n) \subset X^*$ *converge a* $f \in X^*$ *en la topología* w^* *si y sólo si* (f_n) *está acotada y existe un subconjunto denso* M *en* X *tal que* $\lim_n f_n(x) = f(x)$*, para todo* $x \in M$*.*
2. *Una sucesión* $(x_n) \subset X$ *converge a* $x \in X$ *en la topología* w *si y solo si* (x_n) *está acotada y existe un subconjunto denso* M *en* X^* *tal que* $\lim_n f(x_n) = f(x)$*, para todo* $f \in M$*.*

La implicación a la derecha es consecuencia del principio de acotación uniforme. La implicación a la izquierda se obtiene facilmente del resultado visto en el capítulo anterior: Sean $A_n \subset L(X, Y)$, $\sup_{n\in\mathbb{N}} ||A_n|| < \infty$, X espacio normado e Y espacio de Banach. Si $\lim_n A_n(x) = A(x)$ para todo $x \in M$, y M es denso en X. Entonces, $\lim_n A_n(x) = A(x)$ para todo $x \in X$.

En un espacio normado X, un subconjunto $M \subset X$ está w-acotado si $\sup\{|f(x)| : x \in M\} < \infty$ para todo $f \in X^*$. En un espacio dual X^*, un subconjunto $M \subset X^*$ está w^*-acotado si $\sup\{|f(x)| : f \in M\} < \infty$ para todo $x \in X$. El principio de acotación uniforme implica que si $M \subset X$ está w-acotado, entonces M está acotado en norma. Igualmente si $M \subset X^*$ está w^*-acotado, entonces M está acotado en norma.

En particular, si X e Y son espacios normados y $A : X \longrightarrow Y$ es una aplicación lineal, entonces A es continua si y solo si $f \circ A \in X^*$ para todo $f \in Y^*$. Se hace observar que si $f \circ A$ es continua, entonces $f \circ A(B_X)$ es un conjunto acotado en el cuerpo K para todo $f \in Y^*$. Es decir, $A(B_X)$ está w-acotado en Y. Por lo anterior $A(B_X)$ está acotado en norma.

Una aplicación del principio de acotación uniforme es el llamado *teorema de Dunford*:

Si X es un espacio de Banach complejo, y D es un abierto de $\mathbb{C}$, consideremos una función $F : D \longrightarrow X$ derivable en D, es decir, existe $\lim_{z \to z_0} \frac{F(z)-F(z_0)}{z-z_0}$ para todo $z_0 \in D$. Entonces F es derivable en D si y sólo si $x^* \circ F : D \longrightarrow \mathbb{C}$ es derivable en D para cada $x^* \in X^*$.

Otra importante aplicación del principio de acotación uniforme es la existencia de *series de Fourier* divergentes para funciones continuas:

Existe un subconjunto denso D del espacio de Banach $X = \{f \in C[-\pi, \pi] : f(\pi) = f(-\pi)\}$ con la norma $\| \cdot \|_\infty$ tal que la serie de Fourier asociada a cada $f \in D$ es divergente.

Una referencia para estos resultados es [**24**], donde se pueden encontrar más aplicaciones del principio de acotación uniforme, como por ejemplo un criterio para aproximar la integral de cualquier función continua en un intervalo $[a, b]$ por las llamadas *fórmulas de cuadratura*. Igualmente, el principio de acotación uniforme proporciona una caracterización de las *matrices infinitas* (a_{ij}) que están asociadas a funciones continuas del espacio de Banach c en c.

2. El Teorema de la aplicación abierta.

En primer lugar se define una aplicación abierta f entre dos espacios topológicos X e Y: la imagen $f(U)$ de todo abierto $U \subset X$ es abierta en Y. Se comprueba que si X e Y son espacios normados y $T \in L(X, Y)$, entonces T es una aplicación abierta sii $T(B_X)$ es un entorno de 0.

El Teorema de la aplicación abierta establece lo siguiente:

Sean X e Y espacios de Banach y $T \in L(X,Y)$ sobreyectiva. Entonces $T(B_X)$ es un entorno de 0, es decir, T es abierta.

La demostración de este resultado hace uso, al igual que el principio de acotación uniforme del teorema de categoría de Baire. Se considera $V = T(B_X)$ y se comprueba que es convexo y simétrico. Su adherencia $\overline{V}$ es también convexo y simétrico. Además

$$Y = T(X) = \cup_n nV.$$

Por el teorema de categoría Baire, existe $x_0 + rB_Y \subset V$, y por simetría y convexidad, $rB_Y \subset V$.

Seguidamente, se demuestra que $\overline{V} \subset 2V$. Si $y \in \overline{V}$, existe $x_1 \in B_X$ tal que $||y - T(x_1)|| \leq \frac{r}{2}$. Por tanto, $y - T(x_1) \in \frac{r}{2}\,B_Y \subset \frac{1}{2}V = \overline{T(\frac{1}{2}\,B_X)}$. Entonces existe $x_2 \in \frac{1}{2}B_X$ tal que $||y - T(x_1) - T(x_2)|| \leq \frac{r}{4}$, es decir

$$y - T(x_1) - T(x_2) \in \frac{r}{4}\,B_Y \subset \frac{1}{4}\overline{V} = \overline{T(\frac{1}{4}B_X)}.$$

Continuando de esta manera se obtiene una sucesión de puntos $(x_n) \subset X$ tal que $||x_n|| \leq \frac{1}{2^{n-1}}$ e $||y - T(x_1) + ... + T(x_n)|| \leq \frac{r}{2^n}$. Se comprueba que puesto que X es completo y la serie $\sum_n \|x_n\|$ converge, entonces $T(x_0) = y$, siendo $x_0 = \sum_n x_n \in 2\,B_X$.

Del teorema de la aplicación abierta se deducen interesantes consecuencias. Dos normas $\|\cdot\|_1$ y $\|\cdot\|_2$ en un espacio vectorial X son *comparables* si $\|\cdot\|_1 \leq m\|\cdot\|_2$ ó $\|\cdot\|_2 \leq m\|\cdot\|_1$, para alguna constante $m > 0$.

Si X e Y son espacios de Banach,

1. *$T \in L(X,Y)$ es biyectiva, entonces la aplicación inversa $T^{-1} \in L(Y,X)$.*
2. *Dos normas comparables en un espacio vectorial X, con las que X es un espacio de Banach, son equivalentes.*
3. *Si M, N son dos subespacios cerrados de un espacio de Banach X tal que $M + N = X$ y $M \cap N = \{0\}$, entonces $X = M \oplus N$, donde $\oplus$ representa la suma directa de M y N.*

4. *Si* $T \in L(X,Y)$ *es sobreyectiva, entonces* $X/\ker T$ *e* Y *son linealmente isomorfos.*

La primer afirmación se deduce de que si $rB_Y \subset T(B_X)$, entonces $rT^{-1}(B_Y) \subset B_X$, y por tanto $||T^{-1}|| \leq \frac{1}{r}$.

La segunda, es consecuencia de que la aplicación identidad, por ejemplo si $\|\cdot\|_1 \leq m\|\cdot\|_2$,

$$I : (X, \|\cdot\|_2) \longrightarrow (X, \|\cdot\|_1)$$

es una biyección lineal continua.

la tercera afirmación se deduce del hecho de que $F : M \times N \longrightarrow X, \;\; F(x,y) = x+y$, es siempre continua y biyectiva. Puesto que el espacio producto $M \times N$ y X son espacios de Banach el Teorema de la aplicación abierta implica que F es un isomorfismo lineal.

La cuarta afirmación se demuestra observando que la aplicación lineal $\widehat{T} : X/\ker T \longrightarrow Y$, definida como $\widehat{T}(\hat{x}) = T(x)$, es continua y biyectiva.

Es interesante dar algún ejemplo donde la conclusion del teorema de la aplicación abierta no se tiene si la condición X e Y espacio de Banach se omite. En efecto, si consideramos los espacios normados $(C[0,1], \|\cdot\|_\infty)$ y $(C[0,1], \|\cdot\|_1)$, donde $\|f\|_1 = \int_0^1 |f|$. El primero es espacio de Banach, pero no así el segundo. La aplicación identidad $I : (C[0,1], \|\cdot\|_\infty) \longrightarrow (C[0,1], \|\cdot\|_1)$ es continua y biyectiva. Sin embargo I no es un isomorfismo lineal.

Considerese un espacio de Banach Y cualquiera de dimensión infinita y $(x_\alpha)_{\alpha\in\Delta}$ una base algebraica de Y. Consideremos el espacio $X = c_{00}(\Delta)$ con la siguiente norma

$$|x| = \sum_\alpha |x(\alpha)|, \qquad x \in c_{00}(\Delta).$$

$(X, |\cdot|)$ no es completo y la aplicación $F : X \longrightarrow Y$, $F(x) = \sum_\alpha x(\alpha)\, x_\alpha$ es biyectiva y continua. Sin embargo, F^{-1} no es continua pues entonces X sería completo.

A continuación exponemos algunas aplicaciones clásicas del teorema de la aplicacion abierta que aparecen en la referencia [**24**].

Una aplicación que ya mencionamos al hablar de bases de Schauder es el hecho de que las proyecciones $p_n : X \longrightarrow X$,

$$p_n(\sum_i a_i\, e_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i\, e_i,$$

asociadas a la base de Schauder (e_n) en el espacio de Banach X son continuas. Esto se demuestra considerando la nueva norma $|x| = \sup_n ||p_n(x)||$, $x \in X$. Se prueba que esta nueva norma es completa. Puesto que la identidad de $(X, |\cdot|)$ en $(X, \|\cdot\|)$ es continua, por el teorema de la aplicación abierta se obtiene que la identidad es un isomorfismo lineal .

Otra aplicación es el hecho de que un recíproco del lema de Riemann-Lebesgue no es cierto. El *lema de Riemann-Lebesgue* establece que si $f \in L_1[-\pi, \pi]$, entonces sus coeficientes de Fourier que denotamos por $\widehat{f}(n)$ tienden a 0 cuando $|n|$ tiende a infinito. Sin embargo se demuestra que existen sucesiones de números $\{a_n :\ n \in \mathbb{Z}\}$ tales que $a_n \to 0$ cuando $|n|$ tiende a infinito que no son los coeficientes de Fourier de una funcion de $L_1[-\pi, \pi]$.

Otra aplicación se obtiene en las *soluciones aproximadas de ecuaciones diferenciales.* Consideremos un sistema de orden n, lineal y no homogeneo de ecuaciones diferenciales ordinarias con coeficientes variables

$$a_n(t)\, x^{(n)}(t) + \cdots + a_0(t)\, x(t) = y(t), \qquad t \in [a, b],$$

con $a_j \in C[a, b]$ y con unas determinadas condiciones iniciales, por ejemplo, $x(a) = x'(a) = \cdots = x^{(n)}(a) = 0$, tal que para cada $y \in C[a, b]$ existe una única solución $x \in C[a, b]$. Se puede demostrar con el teorema de la aplicación abierta que las soluciones x dependen de forma continua de y.

3. El teorema de la gráfica cerrada

A continuación, pasamos a exponer el Teorema de la gráfica cerrada.
Si $F : X \longrightarrow Y$ es una función, la *gráfica* de F es el conjunto

$$G = \{(x, F(x)) : x \in X\} \subset X \times Y.$$

Si X e Y son espacios métricos y F es continua, entonces F tiene gráfica cerrada en $X \times Y$, es decir G es un conjunto cerrado en $X \times Y$. El teorema de la gráfica cerrada establece lo siguiente:

Sean X e Y espacios de Banach y $T \in L(X, Y)$. Entonces T es continua si y sólo si la gráfica de T es cerrada.

En el espacio $X \times Y$ se considera la norma $\|(x, y)\| = \text{máx}\{\|x\|, \|y\|\}$. Por hipótesis, se tiene que $G = \{(x, T(x)) : x \in X\}$ es un conjunto cerrado en $X \times Y$. Puesto que T es lineal, G es un subespacio cerrado de $X \times Y$, y por tanto un espacio de Banach con la norma producto restringida. Se considera la proyección

$$p : G \longrightarrow X, \quad p(x, T(x)) = x.$$

Se comprueba que p es continua y biyectiva. Por el teorema de la aplicación abierta $p^{-1} : x \to (x, T(x))$ es una aplicación continua de X en G. Puesto que la proyección $q : X \times Y \longrightarrow Y$, $q(x, y) = y$ es continua y $T = q \circ p^{-1}$, se concluye que T es continua.

Se ilustra con algunos ejemplos que la condición X e Y completos no se puede omitir. Consideremos $(C^1[0, 1], \|\cdot\|_\infty)$, el espacio de la funciones con derivada continua en $[0, 1]$ con la norma infinito, y $(C[0, 1], \|\cdot\|_\infty)$. La aplicación lineal

$$F : C^1[0, 1] \longrightarrow C[0, 1], \qquad F(f) = f'$$

no es continua, y sin embargo la gráfica de F es cerrada: Si $f_n \xrightarrow{\|\cdot\|_\infty} f$ y $F(f_n) = f_n' \xrightarrow{\|\cdot\|_\infty} g$, por resultados de análisis clásico elemental $f' = g$.

Es interesante mencionar la siguiente consecuencia del Teorema de la gráfica cerrada:

Consideremos en $C[0,1]$ una norma $|\cdot|$ tal que $(C[0,1],|\cdot|)$ es de Banach y tal que las evaluaciones $\{\delta_t : \ t \in [0,1]\}$ son funcionales lineales continuos en $[0,1]$. Entonces $|\cdot|$ y $\|\cdot\|_\infty$ son equivalentes. Se deduce del hecho de que la aplicación identidad

$$I : (C[0,1], \|\cdot\|) \longrightarrow (C[0,1], |\cdot|)$$

tiene la gráfica cerrada y por tanto es continua. En efecto, si $f_n \xrightarrow{\|\cdot\|_\infty} f$ y $f_n \xrightarrow{|\cdot|} g$, puesto que δ_t es continua con la norma $|\cdot|$, se tiene que $\lim_n f_n(t) = g(t)$ para todo $t \in [0,1]$ y por tanto $g = f = I(f)$.

Otra aplicación es la siguiente: consideremos una norma completa en $L^1[-\pi,\pi]$ que hace a los funcionales correspondientes a los coeficientes de Fourier continuos entonces esta norma es equivalente a la usual $\|\cdot\|_1$. En efecto, se comprueba que la aplicaciín identidad $I : (L^1[-\pi,\pi], \|\cdot\|_1) \longrightarrow L^1[-\pi,\pi], \|\cdot\|)$ tiene gráfica cerrada pues los coeficientes de Fourier determinan a las funciones. Por tanto, I es continua y puesto que es una biyección el teorema de la aplicación abierta implica que I es un isomorfismo lineal.

Igualmente se puede demostrar por el teorema de la gráfica cerrada que una aplicación lineal $F : X \longrightarrow X$, siendo X el espacio ℓ_p, c_0 ó c con la norma usual correspondiente, es continua si F conmuta con el operador $S : X \longrightarrow X$, $S(x_1, x_2, ...) = (0, x_1, x_2, ...)$.

Capítulo 4

Espacios de Hilbert

En este capítulo se proporciona el concepto de producto escalar, así como sus propiedades más importantes y el concepto de norma asociada a un producto escalar. Se definen los espacios de Hilbert. Se establecen el teorema de la proyección sobre un subconjunto convexo cerrado y acotado de un espacio de Hilbert, siendo el teorema de la proyección ortogonal un caso particular de este para un subespacio cerrado de un espacio de Hilbert. Del anterior deduciremos el teorema de descomposición de Riesz, el cual establece que un espacio de Hilbert es suma directa de cualquier subspacio cerrado del mismo con el subespacio ortogonal correspondiente. Para estos resultados, hemos seguido la referencia [**11**].

Seguidamente se demuestra el teorema de Representación de Fréchet-Riesz, el cual establece que, en cierta forma, un espacio de Hilbert es su propio dual para el que hemos consultado la referencia [**24**].

En la última sección se consideran familias ortonormales, se recuerda el proceso de ortogonalización de Gram-Schmidt conocido para el caso finito dimensional y válido también una sucesión de vectores linealmente independientes. Se define el concepto de base ortonormal y se establecen las propiedades más importantes de las bases ortonormales, como es la representación de cualquier punto del espacio como una serie convergente $\sum \lambda_i e_i$, llamada serie de Fourier con respecto a la base ortogonal (e_i). De la representación anterior se prueba que todo espacio de Hilbert es linealmente isométrico a $\ell_2(I)$ para algún conjunto de índices I. Finalmente se presentan los ejemplos más importantes de bases canónicas, como $\{e^{int} : , n \in \mathbb{N}\}$ en $L_2[-\pi, \pi]$. Hemos seguido en esta sección la referencia [**24**].

Se presentarán ejemplos y problemas de aproximación en espacios de Hilbert. En [**24**] aparece una selección muy interesante de este tipo de problemas: mejor aproximación de una función de $f \in L_2[a,b]$ por un polinomio de grado prefijado ó en general por una función de un espacio cerrado prefijado, calcular el punto dentro de un subespacio "afin" cerrado con menor norma, etc... También se podría plantear como ejercicio algo más teórico y con las consiguientes indicaciones el *teorema de Müntz*: Dada una sucesión de números naturales $1 \leq n_1 < n_2 < \cdots$, el espacio generado por $\{t^{n_1}, t^{n_2}, ...\}$ es denso en $L_2[0,1]$ si y sólo si $\sum_j \frac{1}{n_j} = \infty$.

1. Definición y propiedades básicas

En primer lugar se introduce el concepto de *producto escalar* . Si X es un espacio vectorial sobre el cuerpo K ($\mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$), un producto escalar en X es una función $\langle \cdot, \cdot \rangle : X \times X \to K$ tales que para cualesquiera $x, y, z \in X$ y $\lambda \in K$,

1. $\langle x, x \rangle \geq 0$
   $\langle x, x \rangle = 0$ si y solo si $x = 0$ (definida positiva)
2. $\langle x + z, y \rangle = \langle x, y \rangle + \langle z, y \rangle$
   y $\langle \lambda\, x, y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle$, (lineal en la primera variable),
3. $\langle y, x \rangle = \overline{\langle x, y \rangle}$ (simétrica conjugado).

Las condiciones (2) y (3) implican que si $x, y, z \in X$ y $\lambda \in K$, entonces

$$\langle x, y + z \rangle = \langle x, y \rangle + \langle x, z \rangle \qquad \text{y} \qquad \langle x, \lambda\, y \rangle = \overline{\lambda} \langle x, y \rangle.$$

Si X es un espacio vectorial real, entonces (2) y (3) implican que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ es también lineal en la segunda variable.

El ejemplo más sencillo se puede encontrar en los espacios vectoriales de dimensión finita $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{C}^n$, donde se define

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{n} x(i)\, \overline{y(i)}, \qquad x, y \in K^n.$$

Una generalización de este producto escalar aparece en ℓ_2 (real o complejo). Para $x, y \in \ell_2$ se define el producto escalar

$$\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{\infty} x(i)\,\overline{y(i)}.$$

Igualmente, en $L_2(\mathbb{R})$ real o complejo se considera el producto escalar

$$\langle f, g\rangle = \int_{\mathbb{R}} f\,\overline{g}\,, \qquad \text{para todo } f, g \in L_2(\mathbb{R}).$$

En todos los anteriores casos, la desigualdad de Minkowski implica que $|\langle x, y\rangle| \leq \|x\|_2\,\|y\|_2$, para todos x, y en el espacio correspondiente.

A continuación se dan algunas de las propiedades básicas de un producto escalar:

1. *Identidad de Polarización:* para todos $x, y \in X$ espacio vectorial complejo,

$$\langle x, y\rangle = \frac{1}{4}\left[\langle x+y, x+y\rangle - \langle x-y, x-y\rangle + i\,\langle x+iy, x+iy\rangle - i\langle x-iy, x-iy\rangle\right].$$

Si X es espacio vectorial real la identidad de polarización es la siguiente,

$$\langle x, y\rangle = \frac{1}{4}\left[\langle x+y, x+y\rangle - \langle x-y, x-y\rangle\right], \qquad x, y \in X.$$

2. $x = 0$ si y solo si $\langle x, y\rangle = 0$, para todo $y \in X$.
3. *Desigualdad de Cauchy-Schwarz:* Para todos $x, y \in X$,

$$|\langle x, y\rangle| \leq \sqrt{\langle x, x\rangle}\,\sqrt{\langle y, y\rangle}.$$

Para demostrar la desigualdad de Cauchy-Schwarz, se supone $y \neq 0$ (si $y = 0$ la desigualdad es trivialemente cierta). Las propiedades del producto escalar implican que

$$0 \leq \left\langle x - \frac{\langle x, y\rangle}{\langle y, y\rangle}\,y,\; x - \frac{\langle x, y\rangle}{\langle y, y\rangle}\,y\right\rangle = \langle x, x\rangle - \frac{|\langle x, y\rangle|^2}{\langle y, y\rangle}.$$

El producto escalar induce una norma en el espacio vectorial X definida de la siguiente forma

$$||x|| = \sqrt{\langle x, x\rangle}, \qquad x \in X.$$

Las condiciones (1) y (2) correspondientes a las definición de norma se comprueban de forma sencilla. La desigualdad triangular se deduce de la desigualdad de Cauchy-Schwarz, puesto que

$$\begin{aligned} ||x+y||^2 &= ||x||^2 + ||y||^2 + 2\ \mathrm{Re}\,\langle x, y\rangle \leq ||x||^2 + ||y||^2 + 2\,|\langle x, y\rangle| \\ &\leq ||x||^2 + ||y||^2 + 2||x||\,||y|| = (||x|| + ||y||)^2. \end{aligned}$$

Se comprueba que en $(X, \|\cdot\|)$, el producto interior es una aplicación continua de $X \times X$ en K.

Así mismo se comprueba que esta norma, definida a través de un producto escalar, verifica la denominada *igualdad del paralelogramo*

$$||x+y||^2 + ||x-y||^2 = 2(||x||^2 + ||y||^2).$$

Lo más sorprendente es que el recíproco también es cierto, y es el llamado teorema de Jordan-von Neumann:

Si X un espacio normado, existe un producto escalar $\langle\cdot,\cdot\rangle$ en X tal que $\langle x, x\rangle = ||x||^2$ si y solo si la norma satisface la igualdad del paralelogramo.

Para demostrar este hecho, si la norma $\|\cdot\|$ verifica la igualdad del paralelogramo, se define en el caso complejo el producto escalar asociado (recuerdese la identidad de polarización):

$$\langle x, y\rangle = \frac{1}{4}(||x+y||^2 + ||x-y||^2 + i||x+iy||^2 - i||x-iy||^2,$$

y en el caso real,

$$\langle x, y\rangle = \frac{1}{4}(||x+y||^2 - ||x-y||^2).$$

Se comprueba que la función $\langle\cdot,\cdot\rangle$ definida de la anterior forma es un producto escalar.

Un espacio *pre-Hilbert* H es un espacio normado H con una norma que deriva de un producto escalar. Si además la norma es completa, es decir, si X es Banach, entonces H es un espacio de *Hilbert*. En las siguientes secciones se obtienen importantes resultados relativos a espacios de Hilbert que darán idea de la rica y fructifera estructura de estos espacios.

Se indicará que los ejemplos anteriormente mencionados $(K^n, \|\cdot\|_2)$, $(\ell_2, \|\cdot\|_2)$ y $(L_2(\mathbb{R}), \|\cdot\|_2)$ son espacios de Hilbert. En efecto, en los tres casos las normas derivan de los productos escalares considerados anteriormente. Se indica así mismo que si consideramos un conjunto de índices cualesquiera I, el espacio

$$\ell_2(I) = \{(x_i)_{i\in I} : \sum_i |x_i|^2 < \infty\}$$

con el producto escalar

$$\langle x, y\rangle = \sum_{i\in I} x(i)\overline{y(i)}, \qquad x, y \in \ell_2(I),$$

es un espacio de Hilbert, el cual es separable si sólo si I es numerable.

Se indica que cualquier subespacio cerrado de un espacio de Hilbert es también de Hilbert.

Se comprueba que si $p \neq 2$, los espacios $(K^n, \|\cdot\|_p)$ $n \geq 2$, $(\ell_p, \|\cdot\|_p)$ y $L_p(\mathbb{R})$ no son Hilbert. Igualmente $C[0,1]$ no es un espacio de Hilbert. En efecto, se comprueba que la norma $\|\cdot\|_p$ no verifica la igualdad del paralelogramo.

Se indica que el espacio $(C[0,1], \|\cdot\|_2)$ es un espacio pre-Hilbert cuyo completado es el espacio de Hilbert $(L_2[0,1], \|\cdot\|_2)$.

2. Ortogonalidad. Teorema de la proyección ortogonal

En un espacio de Hilbert (ó pre-Hilbert) se puede definir el concepto de ángulo que forman dos vectores, y por tanto el concepto de ortogonalidad. Si $x, y \in X \setminus \{0\}$, se define el ángulo $\theta \in [0, \pi]$ entre x e y:

$$\theta = \arccos\left(\mathrm{Re}\ \frac{\langle x, y\rangle}{||x||\,||y||}\right).$$

Dos vectores x e y son ortogonales y se denota por $x \perp y$ si $\langle x, y\rangle = 0$. Si además ambos vectores tienen norma 1, entonces se llaman vectores ortonormales. Por ejemplo, en ℓ_2 los vectores de la base canónica son ortonormales. En $L_2[-\pi, \pi]$ complejo, los vectores de la familia $\{\frac{e^{int}}{\sqrt{2\pi}} : n \in \mathbb{Z}\}$ son ortonormales. En $L_2[\pi, \pi]$ real o complejo, los vectores de la familia $\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos t}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos 2t}{\sqrt{2\pi}}, ..., \frac{\sin t}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\sin 2t}{\sqrt{2\pi}}, ...\}$ son ortonormales.

Se consideran subespacios ortogonales M y N de un espacio de Hilbert H si cualesquiera dos elementos $x \in M$ e $y \in N$ son ortogonales.

Si F es un subespacio del espacio de Hilbert H, se define el subespacio ortogonal de F como

$$F^{\perp} = \{x \in H : \ \langle x, y\rangle = 0, \quad \text{para todo } y \in F\}.$$

Se comprueba que $F^{\perp}$ es siempre cerrado.

Si F es un subconjunto de un espacio normado X, se define la distancia de un punto x a F como $\operatorname{dist}(x, F) = \inf\{||x - y|| : \ y \in F\}$. Se indica que en general, no existe un punto $y \in F$ tal que $\operatorname{dist}(x, F) = ||x - y||$.

Sin embargo, uno de los resultados más importante relativos a los espacios de Hilbert es el *teorema de la proyección* el cual nos proporciona una mejor aproximación ó punto más cercano de cualquier subconjunto cerrado y convexo $F \subset H$ a un punto x:

Sea F un subconjunto cerrado y convexo de un espacio de Hilbert H. Para todo $x \in X$ existe un único $y \in F$ tal que $\operatorname{dist}(x, F) = ||x - y||$. *Además el punto y queda caracterizado por la condición* $\operatorname{Re}\langle x - y, u - y\rangle \leq 0$ *para todo $u \in F$.*

Para demostrar este resultado se considera una *sucesión minimizante* (x_n), es decir una sucesión $(x_n) \subset F$ tal que $||x - x_n|| \xrightarrow{n} \operatorname{dist}(x, F)$, la cual se prueba que es de Cauchy. La condición sobre y y el hecho de que es único se deducen de las propiedades de una norma que viene definida por un producto escalar.

El teorema de la proyección para subespacios cerrados se llama *teorema de la proyección ortogonal*:

Sea F un subespacio cerrado de un espacio de Hilbert H. Para todo $x \in X$ existe un único $y \in F$ tal que $\operatorname{dist}(x, F) = ||x - y||$. *Además el punto y queda caracterizado por la condición $x - y \in F^{\perp}$.*

El teorema de la proyección ortogonal nos proporciona la siguiente descomposición de H resultado conocido como *Teorema de Riesz:*

Si H es un espacio de Hilbert y F es un subespacio cerrado de H, entonces $H = F \oplus F^{\perp}$, es decir H es suma directa de F y $F^{\perp}$.

Claramente la aplicación $T : F \times F^{\perp} \longrightarrow H, \quad F(x, y) = x + y$ es un isomorfismo lineal entre $F \times F^{\perp}$ y la imagen de T pues $||T(x, y)||^2 = ||x||^2 + ||y||^2$. La sobreyectividad de T se deduce del hecho de que dado $x \in H$ existe $y \in F$ *mejor aproximación de F a x* y de que $x - y$ es ortogonal a F.

La aplicación lineal y continua (de hecho de norma 1) $P : H \longrightarrow F$, definida como $P(z) = y$, donde y es el punto de F más cercano a z, es la llamada *proyección ortogonal de H en F*. El subespacio $F^{\perp}$ es el llamado *complementario ortogonal de F.*

De lo anterior se deducirá, en particular que el cociente de un espacio de Hilbert H/F, donde F es un subespacio cerrado de H, es también un espacio de Hilbert y H/F es linealmente isométrico a $F^{\perp}$. Se hace observar que de los anteriores resultados se deduce que todo espacio cerrado en un espacio de Hilbert está complementado.

El siguiente importante resultado en espacios de Hilbert es el llamado *Teorema de Representación de Fréchet-Riesz* el cual establece que en cierta forma un espacio de Hilbert es su propio dual:

Si H es un espacio de Hilbert y $f \in H^*$, existe un único $x \in H$ tal que

$$f(y) = \langle y, x \rangle, \quad \textit{para todo } y \in H \qquad y \qquad ||f|| = ||x||.$$

Una demostración de este resultado se basa en el teorema de Riesz. Si $f \neq 0$, se considera el subespacio cerrado $F = \ker f$. Puesto que $H = F \oplus F^{\perp}$, y $F \neq H$, existe $z \in F^{\perp}$ de norma 1. Se comprueba que $f(y) = \langle y, \overline{f(z)}\, z \rangle$.

El teorema de representación de Fréchet-Riesz determina una aplicación

$$T : H \longrightarrow H^*$$

$$T(x)(y) = \langle y, x \rangle,$$

la cual es una isometría *antilineal* de H en H^*. Además, el dual de H es otro espacio de Hilbert con el producto escalar

$$\langle f, g \rangle = \langle T(g), T(f) \rangle.$$

Finalmente, la inyección canónica $J : H \longrightarrow H^{**}$ es sobreyectiva. Esto se demuestra por el teorema de representación de Fréchet-Riesz aplicado al espacio de Hilbert H^*. Por tanto, todo espacio de Hilbert es reflexivo.

3. Bases ortonormales. El sistema trigonométrico

En primer lugar se define *conjunto ortonormal* $S \subset H$ si los vectores de S son de norma 1 y son ortogonales entre si.

La base canónica de ℓ_2 es una familia ortonormal. El ejemplo considerado en la sección anterior en el espacio $L_2[-\pi, \pi]$ complejo, $S = \{\frac{e^{int}}{\sqrt{2\pi}} : n \in \mathbb{Z}\}$ es una familia ortonormal. En $L_2[-\pi, \pi]$ real o complejo, la familia $S = \{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos t}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos 2t}{\sqrt{2\pi}}, ..., \frac{\sin t}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\sin 2t}{\sqrt{2\pi}}, ...\}$ es ortonormal.

Seguidamente se indica que un sistema ortonormal está formado por vectores linealmente independientes, se recuerda el método de ortogonalización Gram-Schmidt para una sucesión $(x_n) \subset H$ de vectores linealmente independientes. Se da como ejemplo del proceso de ortogonalización de Gram-Schmidt en $L_2[-1, 1]$ para la sucesión de vectores linealmente independientes $\{x_n(t) = t^n : n \in \mathbb{N}\}$, la cual nos proporciona los llamados polinomios de Legendre normalizados. Seguidamente se enuncia y demuestra la desigualdad de Bessel: si $\{x_1, ..., x_n\}$ es una familia de vectores ortonormales en H, entonces

$$\sum_{n=1}^{m} |\langle x, x_n\rangle|^2 \leq ||x||^2, \qquad \text{para todo } x \in H.$$

Seguidamente se prueba el *Teorema de Riesz-Fischer*:

Sea (x_n) una sucesión ortonormal en un espacio de Hilbert H y $(\lambda_n) \subset K$. Son equivalentes:

1. *Existe $x \in H$ tal que $\langle x, x_n\rangle = \lambda_n$ para todo n,*
2. $\sum_n |\lambda_n|^2 < \infty$,
3. $\sum_n \lambda_n x_n$ *converge en H.*

La importancia de las familias ortonormales aparece de forma clara en las llamadas bases ortonormales, las cuales nos dan una representación de cualquier vector del espacio H como una suma infinita de vectores de esta familia.

En todo espacio de Hilbert H el lema de Zorn proporciona una familia ortonormal maximal $(e_i)_{i\in I}$ para algún conjunto de índices I que llamamos *base ortonormal*. Se comprueba que el espacio generado por las combinaciones lineales finitas de $(e_i)_{i\in I}$ es denso en H. En el siguiente resultado se observa de forma clara la importancia y utilidad de las bases ortonormales:

Consideremos un espacio de Hilbert H y $(e_i)_{i\in I}$ una familia ortonormal en H. Son equivalentes:

1. *$(e_i)_{i\in I}$ es una base ortonormal de H.*
2. *Cada $x \in H$ se puede expresar de la forma $x = \sum_{i\in I}\langle x, e_i\rangle\, x_i$, donde el conjunto de los índices $\{i \in I : \langle x, e_i\rangle \neq 0\}$ es contable. Esta es la llamada serie de Fourier de x relativo a la base $(e_i)_{i\in I}$.*
3. *Para cada $x \in H$, se verifica la igualdad $||x||^2 = \sum_{i\in I} |\langle x, e_i\rangle|^2$, llamada igualdad de Parseval (igualmente, el conjunto de los índices $i \in I$ tales que $\langle x, e_i\rangle \neq 0$ es contable).*
4. *Si $x \in H$ verifica que $\langle x, e_i\rangle = 0$ para todo e_i, entonces $x = 0$.*

Se menciona que en el resultado anterior I es numerable si y sólo si H es separable. Se prueba igualmente el siguiente resultado que, en particular determina que los espacios de Hilbert separables son linealmente isométricos a ℓ_2:

Si $(e_i)_{i\in I}$ es una base ortonormal de un espacio de Hilbert H, entonces H (real o complejo) es linealmente isométrico a $\ell_2(I)$ (real ó complejo, respectivamente) mediante la aplicación

$$T : H \longrightarrow \ell_2(I), \qquad T(x) = (\langle x, e_i\rangle)_{i\in I}.$$

Además T conserva el producto escalar, es decir, $\langle T(x), T(y)\rangle = \langle x, y\rangle$ para todos $x, y \in H$.

Se indica que, por tanto, los espacios ℓ_2, $L_2(\mathbb{R})$, $L_2[-\pi, \pi]$, y en general $L_2[a, b]$, con $a < b$ son todos espacios linealmente isométricos.

Finalmente se indica que la llamada "base cańnonica" del ℓ_2 es una base ortonormal, se demuestra que el conjunto $(e^{int} : \ n \in \mathbb{Z})$ es una base ortonormal en $L_2[-\pi, \pi]$ (complejo) y constituye uno de los ejemplos clásicos de bases ortonormales hasta el punto que gran parte de la teoría de espacios de Hilbert se ha desarrollado a través de ella. En el caso real ó complejo el conjunto

$$S = \{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos t}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos 2t}{\sqrt{2\pi}}, ..., \frac{\sin t}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\sin 2t}{\sqrt{2\pi}}, ...\}$$

forma una base ortonormal de $L_2[-\pi, \pi]$. En ambos casos se indica la serie de Fourier y la igualdad de Parseval de cada función de $L_2[-\pi, \pi]$ asociada a estas bases.

Un ejemplo de base ortonormal en $L_2[-1, 1]$ es la sucesión de los polinomios de Legendre obtenida por el proceso de ortonormalización de Gram-Schmidt.

Capítulo 5

Teoría espectral

Seguiremos como textos de referencia [**11**], [**24**], [**16**] y [**4**]. Este capítulo tiene como pretensión hacer una breve introducción de un tema tan amplio como es la teoría espectral. Se esbozarán algunas de las muchas aplicaciones de la teoría espectral, las cuales se tratarán con más profundidad en cursos posteriores.

En la primera sección se prueba que el subconjunto de los operadores invertibles del espacio $L(X)$ (operadores acotados de un espacio de Banach X en X) es un conjunto abierto. Se presenta el Teorema de Gelfand-Mazur, que prueba que si X es un espacio de Banach complejo, entonces el espectro de T es no vacío. Se demuestra además la fórmula del radio espectral.

En la segunda sección se presentan algunas de las propiedades de los operadores compactos: Si T es un operador compacto $\ker(I-T)$ es de dimensión finita, $\mathrm{Im}\,(I-T)$ es un subespacio cerrado de X y de codimensión finita, $I-T$ es invertible si y sólo si es inyectivo, 0 está en el espectro de T si X es de dimensión infinita, todo elemento no nulo del espectro de T es un autovalor de T, el espectro de T está formado, además del 0, de un conjunto finito o una sucesión que tiende a 0.

En la sección tercera se presentan algunas de las propiedades de operadores autoadjuntos en espacios de Hilbert, las cuales permitirán junto con los resultados de las anteriores secciones las siguiente propiedades para un operador T compacto autoadjunto definido en un espacios de Hilbert: El operador T induce en el espacio $\overline{\mathrm{Im}\,(T)}$ una base ortonormal formada por autovectores de T asociados a autovalores no nulos, y por tanto un espacio de Hilbert H tiene una base ortonormal formada por autovectores de T. Finaliza esta sección mencionando la llamada alternativa de Fredholm.

En la referencia [**24**] aparecen numerosos ejemplos que ayudarán a asimilar los resultados de este capítulo.

1. Nociones de Teoría espectral

Se considera $L(X)$, el espacio de los *operadores lineales acotados* de un espacio de Banach X en X. Se indica que, además de tener estructura de espacio de Banach, tiene estructura del *álgebra de Banach no conmutativa* con la composición como la operación producto entre dos operadores, en el que el operador identidad de X en X es la unidad de este álgebra de Banach.

Se definen en primer lugar los *operadores invertibles* en $L(X)$. Se define *valor espectral* $\lambda \in K$ (K es el cuerpo $\mathbb{C}$ ó $\mathbb{R}$) de un operador $T \in L(X)$ si $\lambda I - T$ no es un operador invertible, donde I es el operador identidad. El conjunto de todos los valores espectrales de un operador T se denota por $\sigma(T)$ y se llama *espectro de* T. La *resolvente* $\varrho(T)$ es el conjunto $K \setminus \sigma(T)$ y los puntos de $\varrho(T)$ son llamados *valores regulares de* T . Finalmente, si $\lambda \in \varrho(T)$, el operador $R(\lambda) = (\lambda I - T)^{-1}$ se llama la *resolvente de* T *para* λ.

Se definen los *autovalores de un operator* $T \in L(X)$ como aquellos escalares $\lambda \in K$ que verifican que $\lambda I - T$ no es inyectivo. Por tanto, el conjunto de los autovalores está incluido en el espectro $\sigma(T)$. Se hace notar que si el espacio X es finito dimensional ambos conjuntos son iguales, pero esto no es cierto en general. El subespacio de X, $\ker(\lambda I - T)$ es llamado *autoespacio* correspondiente al autovalor λ, y cualquier $x \in \ker(\lambda I - T)$, $x \neq 0$, es un *autovector* correspondiente al autovalor λ.

El primer resultado que se expondrá vemos corresponde a la estructura de los operadores invertibles dentro de $L(X)$. Se probará que *si* $||T|| < 1$*, entonces* $I - T$ *es invertible y el operador* $(I - T)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} T^k$*, donde la serie converge absolutamente en* $L(X)$. A partir de lo anterior se prueba que *el conjunto* $\mathcal{C}$ *de los operadores invertibles es un subconjunto abierto de* $L(X)$*. En particular si* T *es invertible y*

$||T - S|| < ||T^{-1}||^{-1}$, *entonces* S *es invertible y*

$$||S^{-1} - T^{-1}|| \leq \frac{||T^{-1}||^2 ||S - T||}{1 - ||T^{-1}|| \, ||S - T||}.$$

Por tanto, *la aplicación* $T \to T^{-1}$ *es un homeomorfismo de* $\mathcal{C}$ *en* $\mathcal{C}$. Esto implica que el espectro $\sigma(T)$ de un operador es cerrado en K. Más aún, $\sigma(T)$ está acotado por $||T||$, porque si $|\lambda| > ||T||$, entonces $(\lambda I - T)^{-1} = \lambda^{-1}(I - \frac{T}{\lambda})^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{T^n}{\lambda^{n+1}}$. Por tanto, $\sigma(T)$ *es compacto.*

A continuación se expone como ejemplo el caso donde $\dim X$, en el que encontrar el espectro de un operador T se convierte en averiguar cuando la matriz asociada a $\lambda I - T$ tiene determinante 0. Este determinante es un polinomio en λ y es llamado *polinomio característico.*

Se expondrán seguidamente el *teorema de Gelfand-Mazur* (1941) y la *fórmula del radio espectral* (obtenida por Gelfand en 1941), ambos resultados sólo ciertos para el cuerpo $\mathbb{C}$.

EL teorema de Gelfand-Mazur dice lo siguiente: *Si* X *es un espacio de Banach complejo y* $T \in L(X)$, *el espectro* $\sigma(T)$ *no es vacío.*

Para demostrar este resultado, se considera un funcional cualquiera $f \in (L(X))^*$ (se observa que $L(X)$ es un espacio de Banach complejo), y se define la aplicación

$$F : \varrho(T) \longrightarrow \mathbb{C}$$
$$F(\lambda) = f((\lambda I - T)^{-1})$$

Se comprueba que F es una función holomorfa en el abierto $\varrho(T)$, puesto que existe el límite $\lim_{\lambda' \to \lambda} \frac{F(\lambda) - F(\lambda')}{\lambda - \lambda'} = f((\lambda I - T)^{-2})$. Si $\sigma(T) = \emptyset$, entonces $\varrho(T) = \mathbb{C}$ y F es una función entera. Además F está acotada, puesto que $\lim_{|\lambda| \to \infty} F(\lambda) = 0$. Por el Teorema de Liouville, F es constante en $\mathbb{C}$, y por tanto, $F \equiv 0$. Sin embargo si se elige, por el teorema de Hahn-Banach, $f \in L(X)^*$ tal que $f(T^{-1}) = ||T^{-1}||$, entonces $F(0) = f(T^{-1}) = ||T^{-1}|| \neq 0$, se llega a una contradicción.

Seguidamente, se define el *radio espectral* de un operador T y se denota por $r(T)$ a $r(T) = \sup\{|\lambda| : \ \lambda \in \sigma(T)\}$. Si X es un espacio de Banach complejo y $T \in L(X)$, la *fórmula del radio espectral* permite calcular $r(T)$ de la siguiente manera:

$$r(T) = \text{lím}\, ||T^n||^{1/n}.$$

Para demostrar este resultado se comprueba primero que $\sigma(T^n) = \{\lambda^n : \ \lambda \in \sigma(T)\}$. Por tanto, $||T^n|| \geq |\lambda|^n$ si $\lambda \in \sigma(T)$ y $\text{lím inf}\, ||T^n||^{1/n} \geq r(T)$. Para demostrar que $\text{lím sup}\, ||T^n||^{1/n} \leq r(T)$, se usa el hecho de que la anterior función F es holomorfa en $\varrho(T)$, y por tanto, analítica en $\varrho(T)$. Si $\lambda > ||T||$, entonces $F(\lambda) = f((\lambda I - T)^{-1}) = \lambda^{-1} f((I - \frac{T}{\lambda})^{-1}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(T^n)}{\lambda^{n+1}}$. Por las propiedades de las series de Laurent esta serie converge para $\{|\lambda| > r(T)\}$. En particular $\{f(\frac{T^n}{\lambda^{n+1}})\}$ es una sucesión acotada para todo $f \in L(X)^*$. El principio de acotación uniforme implica que la sucesión $\{\frac{T^n}{\lambda^{n+1}}\}$ está acotada para $|\lambda| > r(T)$.

Las demostraciones que hemos esbozado se pueden encontrar en [**24**]. En [**11**] y [**16**] se dan demostraciones similares, aunque sin hacer uso de los funcionales auxiliares f y trabajando directamente con funciones holomorfas definidas en $\varrho(T)$ con valores en $L(X)$.

Se da algunos ejemplos en el caso real donde los anteriores resultados no sirven, por ejemplo el operador rotación $\frac{\pi}{2}$ en $\mathbb{R}^2$, $T(x_1, x_2) = (-x_2, x_1)$. Se menciona así mismo que el caso de los autovalores es diferente. Incluso para $K = \mathbb{C}$, existe ejemplos de operadores que no tienen autovalores.

2. Operadores compactos. Espectro de un operador compacto

Si X e Y son espacios de Banach, un operador $T \in L(X, Y)$ es *compacto* si $\overline{T(B_X)}$ es compacto. Se comprueban las siguientes propiedades de los operadores compactos: T es compacto si y sólo si la sucesión imagen de toda sucesión acotada en X tiene una subsucesión convergente en Y; si T es compacto, entonces transforma sucesiones débilmente convergentes en sucesiones convergentes en norma. Se comprueba que el conjunto de los operadores compactos de X en Y, que denotaremos por $\mathcal{K}(X, Y)$, es un subespacio normado de $L(X, Y)$. El espacio $\mathcal{K}(X, Y)$ es completo si y sólo si Y es completo.

Un caso particular de operadores compactos son los operadores de rango finito. Un operador $T \in L(X, Y)$ tiene *rango finito* si $T(X)$ es un espacio de dimensión finita. El conjunto de estos operadores se denota por $\mathcal{F}(X, Y)$ y forma tambien un subespacio normado de $L(X, Y)$. Puesto que X e Y son espacios de Banach se prueba por el teorema de la aplicación abierta que si T es compacto y la imagen de T es cerrada, entonces T tiene rango finito. Se prueba también que $\overline{\mathcal{F}(X, Y)} \subset \mathcal{K}(X, Y)$. Sin embargo, no siempre esta inclusión es una igualdad. Se menciona que un espacio de Banach Y tiene la *propiedad de aproximación* si para todo espacio de Banach X, todo operador compacto de X en Y se puede aproximar por operadores de rango finito. En particular si X es un espacio de Banach con una base de Schauder, como es el caso de c_0, ℓ_p $(1 \leq p < \infty)$ entonces el subespacio $\mathcal{F}(X)$ de los operadores de X en X de rango finito es denso en el subespacio $\mathcal{K}(X)$ de los operadores compactos de X en X.

Se comprueba que si $R \in L(X, Y)$ es un operador compacto, y $S \in L(X_1, X)$, $T \in L(Y, Y_1)$, siendo X_1 y Y_1 espacios de Banach, entonces la composición TRS es un operador compacto de X_1 en Y_1.

Como ejemplo importante de operadores compactos se presenta los llamados *operadores integrales*. Se considera el espacio $C[0, 1]$ y $k(s, t) \in C([0, 1] \times [0, 1])$. Para cada $f \in C[0, 1]$ se define

$$A(f)(s) = \int_0^1 k(s, t) f(t)\, dt, \qquad t \in [0, 1].$$

A es lineal, continua y $||A(f)||_\infty \leq ||k||_\infty$. Si ahora consideramos el espacio $L_2([0, 1])$ y $k(s, t) \in L_2([0, 1] \times [0, 1])$, y se define de la misma forma un operador $A : L_2[0, 1] \longrightarrow L_2[0, 1]$, entonces $||A|| \leq ||k||_2$. Se prueba que son compactos. Tales operadores en $L_2[0, 1]$ se conocen con el nombre de *Hilbert-Schmidt*.

A continuación se presentan los resultados básicos de la teoría espectral en operadores compactos.

En primer lugar se prueba que si X es un espacio de Banach, y $T \in \mathcal{K}(X)$, entonces

1. $\ker(I - T)$ *tiene dimensión finita,*
2. $\mathrm{Im}\,(I - T)$ *es un subespacio cerrado de* X *de codimensión finita.*
3. *El operador* $I - T$ *es invertible si y sólo si es inyectivo.*

Los resultados (1) y (2) significan que $I - T$ es un *operador de Fredholm*. Un operador $G \in L(X; Y)$ es de Fredholm si $\ker G$ es de dimensión finita y $G(X)$ es de co-dimensión finita.

Finalmente, el siguiente resultado proporciona la estructura del espectro de un operador compacto. Si $T \in \mathcal{K}(X)$, entonces,

1. *Si* X *es de dimensión infinita,* $0 \in \sigma(T)$.
2. *Si* $\lambda \in \sigma(T) \setminus \{0\}$, *entonces* λ *es un autovalor de* T.
3. $\sigma(T) = \{0, \lambda_1, \lambda_2, ...\}$, *donde* $\{\lambda_i\}$ *es o bien un conjunto finito (y posiblemente vacío) o bien una sucesión que tiende a cero formada por autovalores no nulos. Cada uno de los* λ_i *tiene un autoespacio asociado de dimensión finita.*

En los anteriores ejemplos de operadores integrales en $C[0,1]$ y $L_2[0,1]$, se consideran los llamados *kernels de Volterra*, aquellas funciones $k(s,t) \in C([0,1] \times [0,1])$ ó $L_2([0,1] \times [0,1])$ tales que $k(s,t) = 0$ para $s < t$, el correspondiente operador integral es llamado *operador de Volterra*. Una de las propiedades más importantes de estos operadores es que su espectro consta sólo del cero.

Finalmente se establece una de las llamadas *alternativa de Fredholm* para un operador compacto T definido en un espacio de Banach X: Exactamente una de las dos alternativas ocurre,

(1) Para cada $y \in X$, la ecuación $T(x) - x = y$ tiene una única solución $x \in X$.

(2) Existe una solución no nula $x \in X$ de la ecuación homogenea asociada $T(x) - x = 0$.

Si la alternativa (2) se cumple, entonces el máximo número de soluciones linealmente independientes de la ecuación homogenea es finita.

En particular la anterior alternativa se aplica a las llamadas *ecuaciones integrales*, estas son ecuaciones del siguiente tipo

$$f(s) - \lambda \int_0^1 k(s,t) f(t)\, dt = g(s), \qquad 0 \leq s \leq 1,$$

donde $a \neq 0$ es un escalar. Se trata de encontrar una solución $f(t)$ de la anterior ecuación integral, donde $g(t)$ es una función dada. Los espacios que se consideran son, bien $f, g \in C[0,1]$ y $k \in C[0,1] \times C[0,1]$ ó bien $f, g \in L_2[0,1]$ y $k \in L_2[0,1] \times L_2[0,1]$.

Se comprueba que la anterior ecuación integral tiene solución en $L_2[0,1]$ precisamente para aquellos g tales que $\int_0^1 g(t)h(t)\, dt = 0$ y h verifica

$$h(s) - \lambda \int_0^1 k(t,s) h(t)\, dt = 0, \qquad \text{en casi todo punto } s \in [0,1].$$

En el caso de las funciones continuas ocurre lo mismo.

Se dan como ejemplos los operadores de Volterra, en los que al no tener más valor espectral que el 0, se sigue por la alternativa de Fredholm que para cada $\lambda \neq 0$ y para cada g continua (ó en $L_2[0,1]$) existe una única solución f que cumpla anterior ecuación integral.

Resolver una ecuación integral es un problema en general muy complicado. Se menciona que se pueden obtener aproximaciones a la solución considerando nucleos degenerados que aproximen al nucleo k tanto en $L_2[0,1]$, como en $C[0,1]$. Un nucleo k_1 se dice degenerado si $k_1(s,t) = \sum_{i=1}^n u_i(s) v_i(t)$, para ciertas funciones en $L_2[0,1]$ (ó $C[0,1]$, respectivamente).

3. Operadores autoadjuntos en espacios de Hilbert.

Consideremos H un espacio de Hilbert. Empezamos definiendo el *operador adjunto* T^* de un operador $T \in L(H)$: El teorema de Representación de Riesz proporciona la existencia de un único operador $T^* \in L(H)$ tal que

$$\langle T(x), y \rangle = \langle x, T^*(y) \rangle, \qquad \text{para todo } x, y \in H. \tag{3.1}$$

En efecto, si se considera para cada $y \in H$ la aplicación lineal continua $\phi_y \circ T : x \to \langle T(x), y \rangle$. Por el teorema de Representación de Riesz, existe un único elemento en H que denotamos por $T^*(y)$ verificando la igualdad (3.1). Se comprueba, que por la misma unicidad de $T^*(y)$, el operador T^* es lineal. Se comprueba también que $\|T^*\| = \|T\|$.

Por las propiedades de los operadores adjuntos se demuestra que la aplicación $\mathcal{A} : L(H) \to L(H),\ \ T \to T^*$ es isometría, lineal si $K = \mathbb{R}$ y antilineal (ó conjugado-lineal) si $K = \mathbb{C}$. Se comprueba que $||TT^*|| = ||T^*T|| = ||T||^2$, $T^{**} = T$, $I^* = I$ y $(ST)^* = T^*S^*$, para todos $S, T \in L(H)$. Se comprueba así mismo que $\lambda \in \sigma(T)$ si y sólo si $\overline{\lambda} \in \sigma(T^*)$. Se indica con un ejemplo, que sin embargo, esta relación no existe para los autovalores de T y T^*.

Se da como ejemplo el caso finito dimensional en el que si $\dim H = n$ y $L(H)$ se identifica con las matrices $n \times n$, entonces la matriz de T^* es la traspuesta la matriz correspondiente a T en el caso real, y es la conjugada de la traspuesta en el caso complejo.

En el caso de operadores integrales en $L_2[0, 1]$, si $k(s, t)$ es el nucleo del operador T, entonces $\overline{k(t, s)}$ es el nucleo del operador adjunto T^*.

Se prueban las relaciones más importantes entre T y su adjunto T^*, como por ejemplo: $\ker T = (\mathrm{Im}\ T^*)^{\perp}$, $\overline{\mathrm{Im}\ T} = (\ker T^*)^{\perp}$, T es invertible si solo si T^* es invertible y en este caso $(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$.

Un operador $T \in L(H)$ se llama *autoadjunto* si $T = T^*$.

Si H es un espacio de Hilbert *complejo,* se prueba que *para todo* $T \in L(H)$ *existen operadores autoadjuntos* T_1, T_2 *en* H *tales que* $T = T_1 + iT_2$*, siendo esta descomposición única.*

Seguidamente se prueba, que si $T \in L(H)$ es autoadjunto, entonces

1. $||T|| = \sup_{||x|| \leq 1} |\langle T(x), x \rangle|$,
2. $r(T) = ||T||$,
3. $\langle T(x), x \rangle$ es un número real para todo $x \in H$,

4. Los autovalores de T son reales,
5. Los autovectores asociados a diferentes autovalores son ortogonales. Por tanto los autoespacios correpondientes a diferentes autovectores son ortogonales.

Para un operador autoadjunto $T \in L(H)$, se definen los números

$$m_T = \inf_{||x||=1} \{\langle T(x), x\rangle\} \qquad \text{y} \qquad M_T = \sup_{||x||=1} \{\langle T(x), x\rangle\}.$$

Se prueba que $\sigma(T) \subset [m_T, M_T]$ *y que* $m_T, M_T \in \sigma(T)$.

En el caso finito dimensional, si H es un espacio de Hilbert *real ó complejo* de dimensión n, entonces el espectro de cada operador autoadjunto está formado por n autovalores reales contando su multiplicidad.

4. Operadores compacto autoadjuntos en espacios de Hilbert

Denotamos por $\text{ev}(T)$ al conjunto de los autovalores de un operator T, y H_λ el autoespacio de T asociado a λ. Si T es un operador autoadjunto en $L(H)$ con rango finito (donde H es un espacio de Hilbert), y puesto que $(\text{Im } T)^\perp = \ker T$, se observa que $H = \ker T \oplus \text{Im } T$. Además, T induce en el espacio finito dimensional $\text{Im } T$ un operador autoadjunto e invertible cuyos autovalores son los autovalores no nulos de T. Usando la "diagonalización" estandar en el caso finito dimensional para operadores autoadjuntos, se deduce que $\text{Im } T$ es la suma directa y ortogonal de los autoespacios de T asociados a los autovalores no nulos, y finalmente se tiene que $H = \oplus_{\lambda \in \text{ev}(T)} H_\lambda$.

La pretensión de esta sección consiste en establecer un resultado de descomposición análogo para operadores compactos autoadjuntos en un espacio de Hilbert H. En lo siguiente se supone que $\text{Im } T$ *no es un subespacio de dimensión finita.*

A partir de las anteriores secciones se prueba lo siguiente para un operador T compacto autoadjunto en un espacio de Hilbert H:

1. T *tiene al menos un autovalor y* $\max\{|\lambda| : \lambda \in \text{ev}(T)\} = ||T||$.

2. $\mathrm{ev}(T)$ *es contable, infinito, acotado, incluido en* $\mathbb{R}$*, cuyo único punto de acumulación es* 0.
3. *El autoespacio asociado a cualquier autovalor no nulo de* T *tiene dimensión finita.*
4. *Los autoespacios de* T *asociados a diferentes autovalores son ortogonales.*
5. *Para cada autovalor* $\lambda \neq 0$ *de* T*, si se considera la proyección ortogonal* $P_\lambda : H \to H_\lambda$*,* H_λ *es el autoespacio correspondiente a* λ*, entonces*

$$T = \sum_{\lambda \in \mathrm{ev}(T)\setminus\{0\}} \lambda\, P_\lambda,$$

(familia sumable en $L(H)$*).*
6. $\overline{\mathrm{Im}\, T} = \oplus_{\lambda \in \mathrm{ev}(T)\setminus\{0\}} H_\lambda$.

Para demostrar el apartado (2) evidentemente es imprescindible que $\mathrm{Im}\, T$ sea de dimensión infinita. Además, se usa el hecho de que si $H = G \oplus G^\perp$ y G es un subespacio invariante, es decir $T(G) \subset G$, entonces $T(G^\perp) \subset G^\perp$.

De lo anterior obtendremos que:

1. *El espacio* $\overline{\mathrm{Im}\, T}$ *tiene una base ortonormal* $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *formada de autovectores de* T *asociados a autovalores no nulos, es decir,*

$$x = \sum_{n\in\mathbb{N}} \langle x, e_n\rangle e_n, \qquad \textit{para todo } x \in \overline{\mathrm{Im}\, T}.$$

Esta base se obtiene considerando la unión de bases ortonormales en los diferentes autoespacios de T asociados a autovalores no nulos, los cuales tiene dimensión finita.
2. Si λ_n es el autovector asociado a e_n, la sucesión (λ_n) tiende a 0 y

$$T(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda_n \,\langle x, e_n\rangle\, e_n, \qquad \text{para todo } x \in H.$$

3. Si P_0 es la proyección ortogonal de H en $H_0 = \ker T$, entonces

$$x = \sum_{\lambda \in \mathrm{ev}(T)} P_\lambda(x), \qquad \text{para todo } x \in H$$
$$\text{y} \qquad H = \oplus_{\lambda \in \mathrm{ev}(T)} H_\lambda$$

4. El espacio de Hilbert H tiene una base ortonormal formada por autovectores de T.

Para finalizar, se considera la *ecuación de Fredholm* $(\mu I - T)(y) = x$, con $\mu \in K \setminus \{0\}$ y $x \in H$. Se prueba a partir de los anteriores resultados que hay dos posibles casos, lo cuales establecen el llamado *teorema de la aternativa de Fredholm* :

- *μ no es un autovalor de T.* Entonces la ecuación anterior tiene única solución dada por $y = \sum_{\lambda \in \mathrm{ev}(T)} (\mu - \lambda)^{-1} P_\lambda(x)$.

- *μ es un autovalor de T.* Entonces la ecuación anterior tiene infinitas soluciones si $x \in (\ker(\mu I - T))^\perp$, y ninguna solución en otro caso. En el primer caso, las soluciones están dadas por $y = z + \sum_{\lambda \in \mathrm{ev}(T),\, \lambda \neq \mu} (\mu - \lambda)^{-1} P_\lambda(x)$, con $z \in \ker(\mu I - T)$.

Se da como ejemplo las soluciones en el caso de ecuaciones integrales en $L_2[0,1]$. Si T es un operador integral (por tanto compacto) y autoadjunto (i.e. $k(s,t) = \overline{k(t,s)}$ para todo $s,t \in [0,1]$). Consideremos $\lambda_1, \lambda_2, ...$ los autovalores de T (con repeticiones) y $u_1, u_2, ...$ una sucesión ortonormal de los autovalores correspondientes, tales que $T(u_n) = \lambda_n\, u_n$ para $n = 1, 2, ...$ Entonces para cada $f \in L_2[0,1]$,

$$T(f) = \sum_n \left(\lambda_n \int_0^1 f(t) \overline{u_n(t)}\, dt \right) u_n,$$

(convergencia en $L_2[0,1]$). Además se prueba que $\sum_n \lambda_n^2 < \infty$ y si $k(s,t)$ es continua entonces la anterior serie converge unifomemente y absolutamente a $T(f)$ en $[0,1]$.

Finalmente, consideremos $\mu \neq 0$ y la ecuación integral para $f, g \in L_2[0,1]$

$$f(s) - \mu \int_0^1 k(s,t)\, f(t)\, dt = g(s), \qquad s \in [a,b].$$

(a) Si $\frac{1}{\mu} \neq \lambda_n$, para todo n, entonces para cada $g \in L_2[0,1]$ existe una única solución $f \in L_2[0,1]$ dada por

$$f(s) = g(s) + \mu \sum_n \left(\frac{\lambda_n}{1 - \mu\, \lambda_n} \int_0^1 g(t)\, \overline{u_n(t)}\, dt \right) u_n(s).$$

(b) Si $\frac{1}{\mu} = \lambda_{j_1}, ..., \lambda_{j_m}$ y distinto de los otros autovalores, entonces existe solución a la anterior ecuación integral sii $g \in L_2[0,1]$ es ortogonal a $u_{j_1}, ..., u_{j_m}$. Las soluciones f son de la forma

$$f = g + r_1\, u_{j_1} + ... + r_m\, u_{j_m} + \mu \sum_{n \neq j_1, ..., j_m} \left(\frac{\lambda_n}{1 - \mu\lambda_n} \int_0^1 g(t)\overline{u_n(t)}\, dt \right) u_n,$$

donde $r_1, ..., r_m$ son escalares arbitrarios.

Las series anteriores convergen en $L_2[0,1]$. Si, además k es continua, entonces estas series convergen uniforme y absolutamente en $[0,1]$.

Bibliografía básica

Textos base

• M. Fabian, P. Habala, P. Hajek,V. Montesinos Santalucia, J. Pelant, V. Zizler, *Functional Analysis and Infinite dimensional geometry*, Springer, 2001.

• F. Hirsch y G. Lacombe, *Elements of Functional Analysis*, Graduated Text in Mathematics 192, Springer, 1999.

• B. V. Limaye, *Functional Analysis*, Wiley Eastern Ltd., 1981.

• J. D. Pryce, *Basic methods of linear functional analysis*, Hutchinson University Library, 1973.

Textos de referencia

• G. Bachman y L. Narichi, *Functional Analysis*, Academic Press, 1966

• H. Brézis, *Análisis Funcional*, Alianza Universidad, 1984.

• N. L. Carothers, *A short course on Classical Banach spaces*, prepublicación.

• G. J. O. Jameson, *Topology and normed spaces*, Edt. Chapman and Hall, 1974.

• R. Meise y D. Vogt, *Introduction to Functional Analysis*, Oxford Science Publications, 1997.

• W. Rudin, *Functional Analysis.* Tata McGraw-Hill Publishing Company, 1979.

Textos de ejercicios recomendados

• V.A. Trenoguin, B.M. Pisarievski, T.S. Sóboleva, *Problemas y ejercicios de Análisis Funcional*, Editorial Mir 1987.

Bibliografía

[1] G. Bachman y L. Narichi, *Functional Analysis*, Academic Press, 1966.

[2] S. Banach, *Theorie des opérations linéaires*, Warszawa, 1932.

[3] N. Bourbaki, *Elementos de historia de las matemáticas*, Alianza Universidad, Madrid 1972.

[4] H. Brezis, *Análisis Funcional*, Alianza Universidad, 1984.

[5] B. Carl y I. Stephani *Entropy, compactness and the approximation of operators*, Cambridge Univ. Press, Cambridge 1990.

[6] N. L. Carothers, *A short course on Classical Banach spaces*, prepublicación.

[7] J. Cerdà, *Análisis Real*, Ediciones Universitat de Barcelona.

[8] Donald L. Cohn *Measure theory*, Birkhäuser 1980.

[9] J. Diestel, *Sucesiones y series en espacios de Banach*, Springer-Verlag.

[10] M.I. Dyachenko y P.L. Ulyánov *Análisis Real. Medida e Integración*, UAM Ediciones, Addison-Wesley/Universidad Autónoma de Madrid.

[11] M. Fabian, P. Habala, P. Hajek, V. Montesinos Santalucia, J. Pelant, V. Zizler, *Functional Analysis and infinite dimensional geometry*, Springer, 2001.

[12] A. Friedman, *Generalized functions and partial differential equations*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs 1963.

[13] A. Grothendieck, *Produits tensoriels topologiques et espaces nucléaires*, Memoirs AMS 16, Providence 1955.

[14] A. Grothendieck, *Résumé de la Théorie métrique des produits tensoriels topologiques*, Bol. Soc. Mat. Sao Paulo 8 (1956), 1-79.

[15] D. Hilbert *Grundzüge einer allgemainen theorie der linearen integralgleichungen*, Teubner, Leipzig 1912.

[16] F. Hirsch y G. Lacombe, *Elements of Functional Analysis*, Graduated Text in Mathematics 192, Springer, 1999.

[17] L. Hörmander, *Linear partial differential operators*, Springer, New York, 1963.

[18] G. J. O. Jameson, *Topology and normed spaces*, Edt. Chapman and Hall, 1974.

[19] K. Knopp, *Theory and applications of Infinite Series.* Dover Publications. New York, 1989.

[20] K. Knopp, *Problem book in the Theory of Functions.* Dover Publications. New York, 1948 (vol. I) y 1953 (vol. II).

[21] H. König *Eigenvalue distribution of compact operators*, Birkhäuser, Basel 1986.

[22] S. Lang, *Complex Analysis.* Springer Verlag, GTM 103, 1999.

[23] J. Lindenstrauss y L. Tzafriri, *Classical Banach Spaces I and II*, Springer-Verlag, 1977.

[24] B. V. Limaye, *Functional Analysis*, Wiley Eastern Ltd., 1981.

[25] R. Meise y D. Vogt, *Introduction to Functional Analysis*, Oxford Science Publications, 1997.

[26] V.D. Milman y G. Schechtman *Asymptotic Theory of finite dimensional normed spaces*, Springer LNM 1200, Berlin 1986.

[27] A. Pietsch, *Operator ideals*, North-Holland, Amsterdam 1980.

[28] A. Pietsch, *Eigenvalues and s-numbers*, University Press, Cambridge 1987.

[29] G. Pisier, *Factorization of linear operators and geometry of Banach spaces*, CBMS AMS 60, Providence 1986.

[30] G. Pisier *Volume Inequalities in the geometry of Banach spaces*, University Press, Cambrigde 1990.

[31] G. Pólya and G. Szego, *Problems and Theorems in Analysis.* Springer Verlag, Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Band 193 (vol I), 216 (vol II), New York, 1972, 1976.

[32] J. D. Pryce, *Basic methods of linear functional analysis*, Hutchinson University Library, 1973.

[33] M. Reed y B. Simon, *Methods of modern mathematical Physics I: Functional Analisis*, Academic Press, New York 1980

[34] F. Riesz *Über lineare Funktionalgleichungen*, Acta Mathematica 14 (1918), 71-98.

[35] Royden H.L., *Real Analysis*, MacMillan Publishing Co., 1963.

[36] W. Rudin, *Real and Complex Analysis.* Tercera Edición. McGraw-Hill. Madrid, 1987.

[37] W. Rudin *Functional Análisis*, Tata McGraw-Hill Publishing Company, 1979.

[38] R. Schatten, *A theory of cross-spaces*, Annals of Math. Studies 26, Princeton University Press, Princeton 1950.

[39] L. Schwartz, *Théorie des distributions*, I-II Hermann, Paris 1957, 1965.

[40] E. C. Tichmarsh, *The Theory of Functions.* Oxford University Press, Second Ed., Oxford, 1939.

[41] N. Tomczak-Jaegermann, *Banach-Mazur distances and finite dimensional operator ideals*, Longman, Essex, 1989.

[42] V.A. Trenoguin, B.M. Pisarievski, T.S. Sóboleva, *Problemas y ejercicios de Análisis funcional*, Editorial Mir 1987.

Índice alfabético