Análisis Matemático. Grupo D. Examen 1

Apellidos, Nombre y Firma:

Importante: En la puntuación de los problemas no sólo se tendrá en cuenta la solución obtenida sino la exposición correcta de los razonamientos empleados para obtener la solución. No se puntuará un problema como correcto si se ha obtenido por un razonamiento incorrecto o si no se ha explicado el razonamiento empleado.

1. (0.7 puntos) Encuentra los números reales que verifican la desigualdad $|1+\frac{12}{x^2-16}| > \frac{1}{16}$.

2. (0.7 puntos) Considera el subconjunto de $\mathbb{R}$, $A = \{x \in \mathbb{R} : \frac{x^2-2}{x^2-6} \leq 0 \text{ y } x \text{ es racional}\}$. ¿Es acotado superiormente? ¿Es acotado inferiormente? ¿Tiene supremo? ¿Tiene ínfimo?¿Tiene máximo? ¿Tiene mínimo?

3. (0.7 puntos)

a) Determina los números complejos z que verifican $z^5 = -32\sqrt{3} - 32i$. Representalos en el plano complejo. ¿Qué figura geométrica podemos formar con las raices?

b) Halla $(-\sqrt{3}+i)^{15}$. Representalo en el plano complejo.

c) Considera en $\mathbb{C}$ el polinomio $P(z) = (1-i)z^{24} + iz^{20} + z^{18} + (2+i)z^4 + (3+2i)$. ¿Tiene necesariamente $P(z)$ una raiz?

4. (1 punto) Considera la función definida en $\mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{x^2+4} & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \\ \log(x^2+1) + \sin(\pi x) & \text{si } 0 < x \leq 1 \\ \log(e^{\frac{1}{1-x}} + 2) - \cos(\frac{\pi x}{1+x}) & \text{si } 1 < x \end{cases}$

a) ¿Existen $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ y $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$?

b) ¿Existen $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ y $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$?

c) ¿En qué puntos de $\mathbb{R}$ es f continua?

d) ¿Existe $c \in (-\infty, 0)$ tal que $f(c) = \frac{3}{2}$?

e) ¿Existe $c \in (0, \infty)$ tal que $f(c) = \frac{1}{2} + \log 3$?

f) ¿Existen el máximo y mínimo de f en el intervalo $[-1, 0]$?
(Es decir, ¿Existen $\max\{f(x) : x \in [-1,0]\}$ y $\min\{f(x) : x \in [-1,0]\}$?)

g) ¿Existen el máximo y mínimo de f en el intervalo $[1, 2]$?
(Es decir, ¿Existen $\max\{f(x) : x \in [1,2]\}$ y $\min\{f(x) : x \in [1,2]\}$?)

RESPUESTAS

Análisis Matemático. Grupo D. Examen 2

Apellidos, Nombre y Firma:

---

1. (1 punto) Considera la función $f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$. Definimos $F(t) = \int_0^t f(x)\,dx$, para todo $t \in \mathbb{R}$. Estudia los puntos de derivabilidad de F; en particular, ¿es F derivable en $x = 0$? Estudia los intervalos de crecimiento y decrecimiento, límites en ∞ y en $-\infty$, intervalos de concavidad y convexidad y haz un dibujo aproximado de la función F.

2. (0,7 puntos) ¿Es la siguiente integral impropia convergente o divergente?

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{x}\,(x^4+7)}\,dx.$$

3. (0,7 puntos) Calcula la integral indefinida siguiente

$$\int \frac{1}{(x-2)(x^2+2x+4)}\,dx.$$

4. (0,7 puntos) Considera la función $f(x) = \operatorname{sen}^2 x$ y $g(x) = 1 - \operatorname{sen}^2 x$. Halla el volumen del sólido generado al girar alrededor del eje x la región del plano limitada entre las gráficas de las dos funciones f y g y entre $x = 0$ y $x = \frac{\pi}{2}$.

Importante: En la puntuación de los problemas no sólo se tendrá en cuenta la solución obtenida sino la exposición correcta de los razonamientos empleados para obtener la solución. No se puntuará un problema como correcto si se ha obtenido por un razonamiento incorrecto o si no se ha explicado el razonamiento empleado.

RESPUESTAS

Análisis Matemático. Grupo D. Examen 3

Apellidos, Nombre y Firma:

---

1. (1,3 puntos) (i) Considera la sucesión $\{1+\sin(\frac{n\pi}{4})\}_{n=1}^{\infty}$. ¿Es convergente? ¿Está acotada?
(ii) De una sucesión de números reales $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ sabemos que

$$0 \leq a_n \leq \frac{n^2+n+2}{3^n} \text{ para todo } n \geq 1000.$$

¿Podemos asegurar que es convergente? En caso afirmativo, hallar su límite. En caso negativo, dar un ejemplo de sucesión que cumpla la condición indicada y no sea convergente.
(iii) De una sucesión de números reales $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ sabemos que

$$0 \leq b_n \leq \exp\left(n(-1)^n\right) \text{ para todo } n \geq 1.$$

¿Podemos asegurar que es convergente? En caso afirmativo, hallar su límite. En caso negativo, dar un ejemplo de sucesión que cumpla la condición indicada y no sea convergente.

2. (1,3 puntos) Estudiar si las siguientes series convergen condicionalmente, convergen absolutamente o divergen:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+\sqrt{n}}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n \cos n}{n!}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2-\log n}.$$

3. (1,4 puntos) Considera la función de dos variables $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+2y^2} & (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

(i) ¿En qué puntos de $\mathbb{R}^2$ es f continua? (ii) ¿Es f diferenciable en $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$? (iii) Halla la tasa de crecimiento de la función f en el punto $(2,1)$ en la dirección que marca el vector $(1,2)$. ¿La función f crece o decrece en este punto y con esta dirección? (iv)¿Cuál es la dirección de máximo crecimiento de la función f si estamos en el punto $(2,1)$ y cual sería la tasa de crecimiento en ese caso? (v) Halla el plano tangente a la gráfica de f en el punto $(2,1)$.

Importante: En la puntuación de los problemas no sólo se tendrá en cuenta la solución obtenida sino la exposición correcta de los razonamientos empleados para obtener la solución. No se puntuará un problema como correcto si se ha obtenido por un razonamiento incorrecto o si no se ha explicado el razonamiento empleado.

RESPUESTAS

Análisis Matemático. Grupo D. Examen 3

Apellidos, Nombre y Firma:

---

1. (1,3 puntos) (i) Considera la sucesión $\{1+\frac{(-1)^n)}{n}\}_{n=1}^{\infty}$. ¿Es montona creciente o decreciente? ¿Está acotada? ¿Es convergente? (ii) De una sucesión de números reales $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ sabemos que
$$0 \leq a_n \leq \frac{3^n}{e^{n^2}} \text{ para todo } n \geq 0.$$
¿Podemos asegurar que es convergente? En caso afirmativo, hallar su límite. En caso negativo, dar un ejemplo de sucesión que cumpla la condición indicada y no sea convergente. (iii) De una sucesión de números reales $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ sabemos que
$$-1 \leq b_n \leq e^{-1/n} \text{ para todo } n \geq 1.$$
¿Podemos asegurar que es convergente? En caso afirmativo, hallar su límite. En caso negativo, dar un ejemplo de sucesión que cumpla la condición indicada y no sea convergente.

2. (1,3 puntos) Estudiar si las siguientes series convergen condicionalmente, convergen absolutamente o divergen:
$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}-\sqrt[3]{n}}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n! \cos n}{n^n}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{e^n - n^2}.$$

3. (1,4 puntos) Considera la función de dos variables $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,
$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{y \operatorname{sen} x}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$
(i) ¿En qué puntos de $\mathbb{R}^2$ es f continua? (ii) ¿En qué puntos de $\mathbb{R}^2$ es f diferenciable? (iii) Halla la tasa de crecimiento de la función f en el punto $(-1,3)$ en la dirección que marca el vector $(2,1)$. ¿La función f crece o decrece en este punto y con esta dirección? (iv)¿Cuál es la dirección de máximo crecimiento de la función f si estamos en el punto $(-1,3)$ y cual sería la tasa de crecimiento en ese caso? (v) Halla el plano tangente a la gráfica de f en el punto $(-1,3)$.

Importante: En la puntuación de los problemas no sólo se tendrá en cuenta la solución obtenida sino la exposición correcta de los razonamientos empleados para obtener la solución. No se puntuará un problema como correcto si se ha obtenido por un razonamiento incorrecto o si no se ha explicado el razonamiento empleado.

RESPUESTAS

Análisis Matemático. Grupo D. Febrero 2010

Apellidos, Nombre y Firma:

---

1. (1 punto) Encuentra los números reales que verifican la desigualdad $|x^2 - 1| < 4$.

2. (1 punto) Considera el subconjunto de $\mathbb{R}$, $A = \{x \in \mathbb{R} : \frac{x^2-6}{x^2-2} \leq 0$ y x racional$\}$. ¿Es acotado superiormente? ¿Es acotado inferiormente? ¿Tiene supremo? ¿Tiene ínfimo?¿Tiene máximo? ¿Tiene mínimo?

3. (1 punto) Determina los números complejos z que verifican $z^4 = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$. Representalos en el plano complejo.

4. (1.5 puntos) Considera la función definida en $\mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$. Estudia los puntos de continuidad, puntos de derivabilidad, intervalos de crecimiento y decrecimiento, límites en ∞ y en $-\infty$, intervalos de concavidad y convexidad y haz un dibujo aproximado de la función.

5. (1 punto) ¿Es la integral impropia $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^6 + x}\,dx$ convergente o divergente?

6. (1 punto) Considera la función $f(x) = \sqrt{\operatorname{sen} x}$ y $g(x) = \operatorname{sen} x$. Halla el volumen del sólido generado al girar alrededor del eje x la región del plano limitada por las gráficas de las dos funciones f y g y entre $x = 0$ y $x = \frac{\pi}{2}$.

7. (1.25 puntos) De una sucesión de números reales $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ sabemos que $0 \leq a_n \leq \dfrac{n^2 + n + 2}{3^n}$ para todo $n \geq 1000$. ¿Es $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ convergente?

8. (1 punto) Estudiar si la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n \cos n}{n!}$ converge condicionalmente o absolutamente o diverge.

9. (1.25 puntos) Considera la función de dos variables $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+2y^2} & (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

(i) ¿En qué puntos de $\mathbb{R}^2$ es f continua? (ii) ¿Es f diferenciable en $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$? (iii)¿Cuál es la dirección de máximo crecimiento de la función si estamos en el punto $(2,1)$ y cual sería la tasa de crecimiento en ese caso? (iv) Halla el plano tangente a la gráfica de f en el punto $(2,1)$.

Importante: En la puntuación de los problemas no sólo se tendrá en cuenta la solución obtenida sino la exposición correcta de los razonamientos empleados para obtener la solución. No se puntuará un problema como correcto si se ha obtenido por un razonamiento incorrecto o si no se ha explicado el razonamiento empleado.

RESPUESTAS

Análisis Matemático. Grupo D. Septiembre 2010
Primera parte

1. Halla volumen del sólido generado al girar alrededor del eje y la región limitada por las funciones $f(x) = 10 - x^2$ y $g(x) = x^2$ entre $x = 1$ y $x = 3$.

2. Halla los números complejos z que verifican $z^3 = -1 + i$ y represéntalos en el plano complejo.

3. ¿Es la sucesión $\{\frac{\log n}{\sqrt{n}}\}_{n=1}^{\infty}$ convergente? ¿Y la sucesión $\{(-1)^n + \frac{\log n}{\sqrt{n}}\}_{n=1}^{\infty}$?

4. Si $n, m \geq 1$ son números naturales, halla el $\lim_{x \to 0^+} x^n \log(x^m)$.

5. Considera la función de dos variables $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = \sqrt[3]{xy}$. (i) Halla la tasa de crecimiento de la función f en el punto $(1, 3)$ en la dirección que marca el vector $(2, 1)$. ¿La función f crece o decrece en este punto y con esta dirección? (ii)¿Cuál es la dirección de máximo crecimiento de la función f si estamos en el punto $(1, 1)$ y cual sería la tasa de crecimiento en ese caso?

Importante: En la puntuación de los problemas no sólo se tendrá en cuenta la solución obtenida sino la exposición correcta de los razonamientos empleados para obtener la solución. No se puntuará un problema como correcto si se ha obtenido por un razonamiento incorrecto o si no se ha explicado el razonamiento empleado.

Análisis Matemático. Grupo D. Septiembre 2010
Segunda parte

6. Halla el conjunto de números reales que verifican $|x^2 - 13| \geq 4$.

7. ¿Es la integral impropia $\int_0^\infty \frac{2e^{2x}}{e^{4x}+1}\,dx$ convergente o divergente?

8. Considera la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} \log(e+x), & x > 0 \\ e^{\sin x}, & x \leq 0. \end{cases}$$

(Logaritmos neperianos) ¿Existen el $\lim_{x\to 0^+} f(x)$ y $\lim_{x\to 0^-} f(x)$? ¿Es $f(x)$ continua en $x = 0$? ¿Existen el $\lim_{x\to +\infty} f(x)$ y $\lim_{x\to -\infty} f(x)$? Haz un dibujo aproximado de la función.

9. ¿Es la serie $\sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n^2+1}}$ convergente condicionalmente, convergente absolutamente o divergente?

10. Halla el área de la región limitada por las funciones $f(x) = x^2 - 1$, $g(x) = x - 1$ entre $x = 0$ y $x = 2$.

Importante: En la puntuación de los problemas no sólo se tendrá en cuenta la solución obtenida sino la exposición correcta de los razonamientos empleados para obtener la solución. No se puntuará un problema como correcto si se ha obtenido por un razonamiento incorrecto o si no se ha explicado el razonamiento empleado.

Análisis Matemático. Grupo D. Examen 1

Apellidos, Nombre y Firma:

---

1. Encuentra los números reales que verifican la desigualdad $|(x-1)^2 - 2| > 1$.

2. Considera el conjunto $A = \{x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} : \frac{(2-x)(x-1)}{x} \geq 0\}$. ¿Es acotado superiormente? ¿Es acotado inferiormente? ¿Tiene supremo? ¿Tiene ínfimo?¿Tiene máximo? ¿Tiene mínimo?

3. *a*) Determina los números complejos z que verifican $z^3 = -8 + 8i$. Representalos en el plano complejo.

b) Halla $(-1+i)^{21}$. Representalo en el plano complejo.

4. Considera la función definida en $\mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x^2 + \sin\sqrt{x}, & \text{si } x \geq 0 \\ \frac{x^2}{x^2+1}\, e^{1/x}, & \text{si } x < 0 \end{cases}$.

a) ¿Está f acotada superior o inferiormente? (Es decir, el subconjunto $\{f(x) : x \in \mathbb{R}\}$, ¿está acotado superior o inferiormente?)

b) ¿Existe $\lim_{x\to\infty} f(x)$ y $\lim_{x\to-\infty} f(x)$?

c) ¿En qué puntos de $\mathbb{R}$ es f continua?

d) ¿Existe $c \in (-\infty, 0)$ tal que $f(c) = \frac{3}{5}$?

e) ¿Existe $c \in (-\infty, 0)$ tal que $f(c) = \frac{5}{3}$?

f) ¿Existen el máximo y mínimo de f en el intervalo $[-5, 5]$?
(Es decir, ¿Existen $\max\{f(x) : x \in [-5,5]\}$ y $\min\{f(x) : x \in [-5,5]\}$?)

Importante: En la puntuación de los problemas no sólo se tendrá en cuenta la solución obtenida sino la exposición correcta de los razonamientos empleados para obtener la solución. No se puntuará un problema como correcto si se ha obtenido por un razonamiento incorrecto o si no se ha explicado el razonamiento empleado.

RESPUESTAS

Análisis Matemático. Grupo D. Examen 2

Apellidos, Nombre y Firma:

---

1. (1 punto) Considera la función $f(x) = \begin{cases} x + \sin^2 x, & x \geq 0 \\ x + \log(x^2+1), & x < 0 \end{cases}$. Estudia los puntos de derivabilidad de f; en particular, ¿es f derivable en $x = 0$? Estudia los intervalos de crecimiento y decrecimiento, límites en ∞ y en $-\infty$ y haz un dibujo aproximado de la función.

2. (0,5 puntos) ¿Es la siguiente integral impropia convergente o divergente?

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{\sqrt[3]{x^2+3}}\, dx.$$

3. $(0,75$ puntos) Calcula la integral indefinida siguiente

$$\int \frac{2x^2+4x+5}{(x+2)(x^2+2x+5)}\, dx,$$

4. (0,75 puntos) Considera la función $f(x) = \sin^2 x$ y $g(x) = \frac{1}{4}$. Halla el área de la región del plano limitada entre las dos funciones f y g y entre $x = 0$ y $x = \frac{\pi}{2}$.

Importante: En la puntuación de los problemas no sólo se tendrá en cuenta la solución obtenida sino la exposición correcta de los razonamientos empleados para obtener la solución. No se puntuará un problema como correcto si se ha obtenido por un razonamiento incorrecto o si no se ha explicado el razonamiento empleado.

RESPUESTAS

Análisis Matemático. Grupo D. Examen 3

Apellidos, Nombre y Firma:

---

1. (1 punto) De una sucesión de números reales $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ sabemos que

$$n\log(\cos\frac{1}{n}+\sin\frac{1}{n}) \leq a_n \leq n\log(1+\frac{1}{n})$$

para todo $n \geq 200$. ¿Podemos asegurar que $\{a_n\}$ es una sucesión convergente? ¿Podemos saber cuál es su límite?

2. (1,5 puntos) Estudiar si las siguientes series convergen condicionalmente, convergen absolutamente o divergen: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}+1}{\sqrt{n^3}+2}$, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\cos(n\pi)}{n^2+1}$, y $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n(\log n)^2}$.

3. (1,5 puntos) Considera la función de dos variables $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, $f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^2y^2}{x^4+2y^4} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$.

(i) ¿En qué puntos de $\mathbb{R}^2$ es f continua? (ii) ¿En qué puntos de $\mathbb{R}^2$ es f diferenciable? (iii)¿Cuál es la dirección de máximo crecimiento de la función si estamos en el punto $(1,1)$ y cual sería la tasa de crecimiento en ese caso? (iv) Halla el plano tangente a la gráfica de f en el punto $(1,1)$.

Importante: En la puntuación de los problemas no sólo se tendrá en cuenta la solución obtenida sino la exposición correcta de los razonamientos empleados para obtener la solución. No se puntuará un problema como correcto si se ha obtenido por un razonamiento incorrecto o si no se ha explicado el razonamiento empleado.

RESPUESTAS

Análisis Matemático. Grupo D. Septiembre 2009
Primera parte

Apellidos, Nombre y Firma:

---

1. (1 punto) Halla el conjunto de los números reales x que verifican $|x^2 - 3x| > 1$.

2. (1 punto) Halla los números complejos z (si los hay) que verifican $z^3 = -1 + i$.

3. (1 punto) Considera el conjunto $A = \{x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} : \frac{(x-2)((x-1)}{x} \geq 0\}$. Halla (si los tuviera) supremo, ínfimo, máximo y mínimo del conjunto A.

4. (2 puntos) Considera la función definida a trozos $f(x) = \begin{cases} x - e^{1/x} & x < 0 \\ -\frac{x^2}{x^2+1} & x \geq 0 \end{cases}$. ¿Es f continua en $\mathbb{R}$? Estudiar el crecimiento de f. ¿Cuantos puntos x verifican que $f(x) = -0,25$? ¿Cuantos puntos x verifican que $f(x) = -10$? ¿Es f derivable en $\mathbb{R}$?

Importante: En la puntuación de los problemas no sólo se tendrá en cuenta la solución obtenida sino la exposición correcta de los razonamientos empleados para obtener la solución. No se puntuará un problema como correcto si se ha obtenido por un razonamiento incorrecto o si no se ha explicado el razonamiento empleado.

RESPUESTAS

Análisis Matemático. Grupo D. Septiembre 2009
Segunda Parte

Apellidos, Nombre y Firma:

---

1. (1,25 puntos) ¿Es convergente o divergente la integral impropia $\int_1^\infty \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x^3+2}}\,dx$?

2. (1 punto) Halla el volumen del sólido de revolución generado al girar alrededor del eje x la región limitada entre las gráficas de las funciones $y = \cos x$ e $y = \operatorname{sen} x$ entre $x = 0$ y $x = \frac{3\pi}{8}$.

3. (1,25 puntos) Considera la serie $\sum_{n=1}^\infty \frac{n\cos(n\pi)}{n+1}$. ¿Es convergente absolutamente, convergente condicionalmente o divergente?

4. (1,5 puntos) Considera la función de dos variables $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = \begin{cases} \frac{\sin x \sin y}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$.

(i) ¿En qué puntos de $\mathbb{R}^2$ es f continua? (ii) ¿En qué puntos de $\mathbb{R}^2$ es f diferenciable? (iii)¿Cuál es la dirección de máximo crecimiento de la función si estamos en el punto $(\frac{\pi}{4}, \pi)$ y cual sería la tasa de crecimiento en ese caso? (iv) Halla el plano tangente a la gráfica de f en el punto $(\frac{\pi}{4}, \pi)$.

Importante: En la puntuación de los problemas no sólo se tendrá en cuenta la solución obtenida sino la exposición correcta de los razonamientos empleados para obtener la solución. No se puntuará un problema como correcto si se ha obtenido por un razonamiento incorrecto o si no se ha explicado el razonamiento empleado.

RESPUESTAS

Análisis Matemático. Grupo B. Examen 1

Apellidos, Nombre y Firma:

---

1. Encuentra los números reales que verifican la desigualdad $|x^2 - x| > 1$.

2. Considera el conjunto $A = \{x \in \mathbb{R} : \frac{x^2-x}{x-2} > 0\}$. ¿Es acotado superiormente? ¿Es acotado inferiormente? ¿Tiene máximo? ¿Tiene mínimo?

3. Determinar los números complejos z que verifican $z^3 + 8 = 0$.

4. Demostrar, usando la definición, que $\lim_{x\to 0} \sqrt{x^2+1} = 1$.

5. Considera la función definida en $\mathbb{R}$, $f(x) = \cos^4 x + e^{-x}$. ¿Está f acotada? ¿Existe $c \in (0, \infty)$ tal que $f(c) = \frac{5}{3}$? ¿Existe $\lim_{x\to\infty} f(x)$ y $\lim_{x\to-\infty} f(x)$?

RESPUESTAS

Análisis Matemático. Grupo B. Examen 2

Apellidos, Nombre y Firma:

---

1. Considera la función $f : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}, \quad f(x) = |\sin x + \cos x|$.

(i) Hallar los máximos y mínimos absolutos y relativos de f en el intervalo $[0, 2\pi]$.

(ii) Hacer una gráfica aproximada de la función en $[0, 2\pi]$.

(iii) ¿Cual es el volumen del sólido generado al girar alrededor del eje x la región limitada por $f(x)$ y $g(x) = 1 - \frac{4}{3\pi}$ entre $x = 0$ y $x = \frac{3\pi}{4}$?

2. Considera la función $F(x) = \begin{cases} x^2 \log x, & x > 0 \\ \int_0^x e^{t^2} \sin t \, dt, & x \leq 0. \end{cases}$

(i) Hallar los puntos de $\mathbb{R}$ donde F es continua.

(ii) Hallar los puntos de $\mathbb{R}$ donde F es derivable.

(iii) Hallar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de F.

(iv) ¿Cuantos números reales $x \in (0, \infty)$ hay tales que $F(x) = -\frac{1}{e}$?

3. Deducir si son convergentes o divergentes las integrales impropias $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x(x+1)} \, dx$ y $\int_0^1 \frac{e^{x^2}}{\sqrt[3]{1-x}} dx$.

RESPUESTAS

Análisis Matemático. Grupo B. Examen 3

Apellidos, Nombre y Firma:

---

1. Resuelve las siguientes integrales.

(i) $\displaystyle\int \frac{2x^2+3x}{(x^2+2x+2)(x-1)}dx.$

(ii) $\displaystyle\int \frac{1}{\sin^3 x}dx.$

2. (i) De una sucesión de números reales $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ sabemos que $\sqrt[n]{n} < a_n < \sqrt[n]{n^2+1}$, para todo $n \geq 1$. ¿Es $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ convergente?

(ii) Considera la sucesión $\{2+\cos(\frac{\pi}{2}n)\}_{n=1}^{\infty}$. ¿Está acotada? ¿Es convergente?

(iii) De una sucesión de números reales $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ sabemos que es creciente y que $b_n < 2 + e^{n(-1)^n}$, para todo $n \geq 1$. ¿Es b_n convergente?

RESPUESTAS

Análisis Matemático. Grupo B. Examen 4

Apellidos, Nombre y Firma:

---

1. (i) Considera la función de dos variables $f(x,y) = 1 - x^2 - y^2$. Haz un dibujo en $\mathbb{R}^2$ de las curvas de nivel de f. Haz un dibujo en $\mathbb{R}^3$ de la gráfica de f.

(ii) Considera la función de dos variables $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^4+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$. Halla el límite de $f(x,y)$ en el origen si nos aproximamos por la recta $y = x$. Halla el límite de $f(x,y)$ en el origen si nos aproximamos por la curva $y = x^2$. ¿En que puntos de $\mathbb{R}^2$ es f continua?

2. (i) De una serie de números reales $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sabemos que $0 \leq a_n \leq \frac{n}{2^n}$, para todo $n \geq 2000$. ¿Es $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ convergente? ¿Es $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + \frac{1}{n})$ convergente?

(ii) Considera las series $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n^2}{n^2+1}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\cos(n\pi)}{n^2+1}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \sin n}{n^3+1}$. ¿Son convergentes? ¿Son absolutamente convergente? ¿Son condicionalmente convergentes?

RESPUESTAS

Análisis Matemático. Grupo B. Examen 1

Apellidos, Nombre y Firma:

---

1. Encuentra los números reales que verifican la desigualdad $|x^2 - 1| > 1$.

2. Considera el conjunto $A = \{x \in \mathbb{R} : \frac{(x+2)(x-1)}{x+1} > 0\}$. ¿Es acotado superiormente? ¿Es acotado inferiormente? ¿Tiene máximo? ¿Tiene mínimo?

3. Determinar los números complejos z que verifican $z^4 + 16 = 0$.

4. Demostrar, usando la definición, que $\lim_{x\to 0} \sqrt{x^2+1} = 1$.

5. Considera la función definida en $\mathbb{R}$, $f(x) = e^{\cos x} \sin x$. ¿Es f continua en todos los puntos de $\mathbb{R}$? ¿Está f acotada? ¿Existe $c \in (0, \frac{\pi}{2})$ tal que $f(c) = \frac{1}{2}$? ¿Existe $\lim_{x\to\infty} f(x)$ y $\lim_{x\to-\infty} f(x)$?

RESPUESTAS

Análisis Matemático. Grupo B. Examen 2

Apellidos, Nombre y Firma:

---

1. Considera la función $f : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$, $\quad f(x) = \sin x \cos x$

(i) Hallar los máximos y mínimos absolutos y relativos de f en el intervalo $[0, 2\pi]$.

(ii) Hacer una gráfica aproximada de la función en $[0, 2\pi]$.

(iii) ¿Cual es el volumen del sólido generado al girar alrededor del eje x la región limitada por $f(x)$ y $g(x) = \frac{\pi}{8}$ entre $x = 0$ y $x = \frac{\pi}{4}$?

2. Considera la función $f(t) = \begin{cases} \frac{\sin t}{t}, & t > 0 \\ 2e^{t^2}, & t \leq 0. \end{cases}$ y definimos $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$ para todo $x\ n\mathbb{R}$.

(i) Hallar los puntos de $\mathbb{R}$ donde F es continua.

(ii) Hallar los puntos de $\mathbb{R}$ donde F es derivable.

(iii) Hallar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de F.

(iv) ¿Cuantos números reales $x \in (-\infty, 0)$ hay tales que $F(x) = -1$?

3. Deducir si son convergentes o divergentes las integrales impropias $\int_2^\infty \frac{\cos x}{x^2-1}\,dx$ y $\int_0^1 \frac{e^{x^2+2}}{\sqrt[3]{x}}dx$.

RESPUESTAS

Análisis Matemático. Grupo B. Examenes 1-2-3

Apellidos, Nombre y Firma:

PARTE 1

1. Encuentra los números reales que verifican la desigualdad $|x^2 - x| > 1$.

2. Considera el conjunto $A = \{x \in \mathbb{R} : \frac{x^2-x}{x-2} > 0\}$. ¿Es acotado superiormente? ¿Es acotado inferiormente? ¿Tiene máximo? ¿Tiene mínimo?

3. Determinar los números complejos z que verifican $z^3 + 8 = 0$.

4. Demostrar, usando la definición, que $\lim_{x\to 0} \sqrt{x^2+1} = 1$.

5. Considera la función definida en $\mathbb{R}$, $f(x) = \cos^4 x + e^{-x}$. ¿Está f acotada? ¿Existe $c \in (0, \infty)$ tal que $f(c) = \frac{5}{3}$? ¿Existe $\lim_{x\to\infty} f(x)$ y $\lim_{x\to-\infty} f(x)$?

PARTE 2

1. Considera la función $f : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}, \quad f(x) = |\sin x + \cos x|$.

(i) Hallar los máximos y mínimos absolutos y relativos de f en el intervalo $[0, 2\pi]$.

(ii) Hacer una gráfica aproximada de la función en $[0, 2\pi]$.

(iii) ¿Cual es el volumen del sólido generado al girar alrededor del eje x la región limitada por $f(x)$ y $g(x) = 1 - \frac{4}{3\pi}$ entre $x = 0$ y $x = \frac{3\pi}{4}$?

2. Considera la función $F(x) = \begin{cases} x^2 \log x, & x > 0 \\ \int_0^x e^{t^2} \sin t\, dt, & x \leq 0. \end{cases}$

(i) Hallar los puntos de $\mathbb{R}$ donde F es continua.

(ii) Hallar los puntos de $\mathbb{R}$ donde F es derivable.

(iii) Hallar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de F.

(iv) ¿Cuantos números reales $x \in (0, \infty)$ hay tales que $F(x) = -\frac{1}{e}$?

3. Deducir si son convergentes o divergentes las integrales impropias $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x(x+1)}\, dx$ y $\int_0^1 \frac{e^{x^2}}{\sqrt[3]{1-x}} dx$.

PARTE 3

1. Resuelve las siguientes integrales: (i) $\displaystyle\int \frac{2x^2+3x}{(x^2+2x+2)(x-1)} dx$; (ii) $\displaystyle\int \frac{1}{\sin^3 x} dx$.

2. (i) De una sucesión de números reales $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ sabemos que $\sqrt[n]{n} < a_n < \sqrt[n]{n^2+1}$, para todo $n \geq 1$. ¿Es $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ convergente?

(ii) Considera la sucesión $\{2 + \cos(\frac{\pi}{2} n)\}_{n=1}^\infty$. ¿Está acotada? ¿Es convergente?

(iii) De una sucesión de números reales $\{b_n\}_{n=1}^\infty$ sabemos que es creciente y que $b_n < 2 + e^{n(-1)^n}$, para todo $n \geq 1$. ¿Es b_n convergente?

RESPUESTAS

Análisis Matemático. Grupo B. Examen/Tests.

Apellidos, Nombre y Firma:

---

1. Halla el conjunto de puntos $x \in \mathbb{R}$ que verifican $|\frac{x-1}{2x-1} - 1| < 1$.

2. Considera la función $f(x) = \begin{cases} x^2+1 & x \leq 0 \\ (1+\frac{1}{x})^{x^2} & x > 0 \end{cases}$. Indica la afirmación correcta. Halla, si existen, $\lim_{x\to 0} f(x)$, $\lim_{x\to 0} f'(x)$. ¿Es f continua en 0? ¿Es f diferenciable en 0?

3. ¿Cuantas soluciones tiene la ecuación $x^3 - \log x = 1$? Justifica tu respuesta.

4. Estudia si las siguientes series convergen condicionalmente, absolutamente o divergen: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^n}{n!}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\cos(n\pi)}{n+1}$.

Examen de Análisis Matemático. Parte I
Grupo B. Septiembre 2008

Apellidos, Nombre y Firma:

---

1. Encuentra los números reales que verifican la desigualdad $|x^2 - x| > 1$.

2. Determinar los números complejos z que verifican $z^3 = i$ y representarlos en el plano complejo.

3. Considera la función $f(x) = \begin{cases} |x-1| & \text{si } x \geq 0 \\ -\frac{1}{2}(x+1)^2 & \text{si } x < 0 \end{cases}$.

¿En qué puntos de $\mathbb{R}$ es f continua? ¿En qué puntos de $\mathbb{R}$ es f derivable?

4. De una sucesión de números reales $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ sabemos que

$$\frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} < a_n < \sqrt[n]{n}\,, \qquad \text{para todo } n \geq 1000.$$

¿Es $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ convergente?

5. Considera la función $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $\quad f(x) = x^3 - \log x$. (Observacion: log representa el logaritmo neperiano). Haz un dibujo aproximado de la función: intervalos de crecimiento y decrecimiento, convexidad, concavidad, asíntotas verticales y horizontales, puntos de máximo y mínimo relativo y absoluto.

Respuestas

Examen de Análisis Matemático. Parte II
Grupo B. Septiembre 2008

Apellidos, Nombre y Firma:

---

6. Calcula las integrales $\displaystyle\int \frac{1}{x^2+4x+7}\,dx$ y $\displaystyle\int \cos^4 x\,dx$.

7. ¿Son convergentes las integrales impropias $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x(x^8+1)}\,dx$ y $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{x^4+1}\,dx$?

8. ¿Son las series $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{n}+1}{\sqrt{n^3}+2}$ y $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$ absolutamente convergentes?

9. Considera la función de dos variables $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$.

¿En que puntos de $\mathbb{R}^2$ es f continua?

Respuestas

Examen de Análisis Matemático
Facultad de Informática. Grupo A
Enero 2005. Primera Parte

1. (0.75 puntos) Encuentra todos los números reales x para los que $\left|\dfrac{2-3x}{1+2x}\right| \leq 4$.

2. (0.75 puntos) Halla y describe geométricamente en el plano complejo el conjunto de números complejos z para los que z^4 es un número real.

3. (i) (0.5 puntos) Deduce razonadamente el número de soluciones *reales* de la ecuación $x^{14} - 28x - 1 = 0$.

   (ii) (0.5 puntos) Halla, justificándolo, los números reales a para los que existe $\displaystyle\lim_{x \to a} \frac{2^{\frac{1}{x-2}} - 1}{2^{\frac{1}{x-2}} + 1}$.

4. (i) (0.75 puntos) Indicar el dominio y estudiar intervalos de crecimiento y decrecimiento, asíntotas verticales y horizontales y dibujar la gráfica de la función $f(x) = e^{\frac{|x|}{x^2-x}}$.

   (ii) (0.75 puntos) Calcula las dimensiones de la lata de refresco (de forma cilíndrica) de 330 cm^3 de volumen cuyo coste de fabricación es (a) más barato (b) más caro, sabiendo que, en ambos casos, la chapa de las bases es el triple de cara que la chapa de la cara lateral, y por cuestiones obvias el radio de la base no puede ser menor de 2 cm mi mayor de 20 cm.

5. (i) (0.5 puntos) Demuestra que la integral impropia $\displaystyle\int_0^\infty \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}\, dx$ es convergente.

   (ii) (0.5 puntos) Si $f : (0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función continua tal que $\displaystyle\int_0^x f(t)\, dt = xe^{2x} + \int_0^x e^{-t} f(t)\, dt$ para todo $x > 0$, deduce una fórmula explícita para $f(x)$.

Examen de Análisis Matemático
Facultad de Informática. Grupo A
Enero 2005. Segunda Parte

6. Calcular las primitivas siguientes $\displaystyle\int \frac{1}{x(4-\log^2 x)}\,dx$ y $\displaystyle\int \frac{\sin x}{2+2\cos x+\cos^2 x}\,dx.$

7. (i) Demostrar que la sucesión $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ definida por $a_1 = 1$, $a_{n+1} = \sqrt{2+a_n}$, para $n \geq 1$, es convergente y calcular su límite. (Indicación: Probar por inducción que (a) la sucesión es monótona, (b) está acotada.)

   (ii) Estudiar si las series siguientes son o no convergentes: $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}$ y $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2-\log n}.$

8. (i) Hallar el volumen del sólido obtenido girando alrededor del eje x la región del plano

$$R = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ 1 \leq \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 4\right\}.$$

   (ii) Hallar el área de la región del plano limitada por la curva $y = x^3 + x^2$ y la recta $y = 2x$.

9. (i) ¿En qué dirección la derivada direccional de la función $f(x,y) = \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ en el punto $(1,1)$ es igual a cero?

   (ii) Demuestra que $(0,0)$ es un punto crítico para $f(x,y) = \sin(x^2+y^2)$, y decide si es máximo relativo, mínimo relativo o ni una cosa ni otra.

10. (i) Hallar los puntos de continuidad de la función $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x\sin y}{x^2+y^2}, & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

   (ii) Calcula el máximo y mínimo de la función $f(x,y) = x^3 + y^3$ en la elipse C:

$$C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ x^2 + 4y^2 = 1\}.$$

Examen de Análisis Matemático
Facultad de Informática. Grupo B
Enero 2005. Primera Parte

1. (i) Encuentra todos los números reales x para los que $\left|\dfrac{2-3x}{1+2x}\right| \leq 4$.

   (ii) Encuentra todos los números reales x e y para los que $|x|+y=3$ y $|x|y+x^3=0$.

2. (i) Halla y describe geométricamente en el plano complejo el conjunto de números complejos z para los que z^4 es un número real.

   (ii) Considera la sucesión de números complejos $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ dada por $z_1=0$, $z_{n+1}=z_n^2+i$, si $n \geq 1$. Calcula el módulo de z_{2005}.

3. (i) Deduce razonadamente el número de soluciones *reales* de la ecuación $x^{14}-28x-1=0$.

   (ii) Halla, justificándolo, los números reales a para los que existe $\displaystyle\lim_{x\to a} \frac{2^{\frac{1}{x-2}}-1}{2^{\frac{1}{x-2}}+1}$

4. (i) Estudiar las asíntotas, puntos con tangente horizontal y dibuja la gráfica de la función $f(x)=e^{\frac{|x|}{x^2-x}}$.

   (ii) Considerar el triángulo *isósceles* ABC del dibujo de altura AA' igual a 1 y de lado BC igual a 4. Hallar la altura $x \in [0,1]$ entre A' y A para que la suma de distancias del punto correspondiente a la altura x a los tres vértices del triángulo ABC sea (a) máxima, (b) mínima.

5. (i) Demuestra que la integral impropia $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}\,dx$ es convergente.

   (ii) Si f es una función continua tal que $\displaystyle\int_0^x f(t)\,dt = xe^{2x} + \int_0^x e^{-t} f(t)\,dt$ para todo $x \in \mathbb{R}$, deduce una fórmula explícita para $f(x)$.

Examen de Análisis Matemático
Facultad de Informática. Grupo B
Enero 2005. Segunda Parte

6. Calcular las primitivas siguientes $\displaystyle\int \frac{1}{x(4-\log^2 x)}\,dx$ y $\displaystyle\int \frac{\sin x}{2+2\cos x+\cos^2 x}\,dx.$

7. (i) Demostrar que la sucesión $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ definida por $a_1=1$, $a_{n+1}=\sqrt{2+a_n}$, para $n\geq 1$, es convergente y calcular su límite.

   (ii) Estudiar si las series siguientes son o no convergentes: $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{n!}$ y $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2-\log n}.$

8. (i) Calcula la longitud del camino dado por $x=\frac{1}{2}\log(t^2-1)$, $y=\sqrt{t^2-1}$, para $t\in[3,7]$.

   (ii) Esboza la gráfica y calcula el área de la región encerrada por la curva cuya ecuación en polares es $r=\cos 2\theta$.

9. (i) ¿En qué dirección la derivada direccional de la función $f(x,y)=\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ en el punto $(1,1)$ es igual a cero?

   (ii) Demuestra que $(0,0)$ es un punto crítico para $f(x,y)=\sin(x^2+y^2)$, y decide si es máximo relativo, mínimo relativo o ni una cosa ni otra.

10. (i) Invierte el orden de integración para calcular $\displaystyle\int_0^1\int_0^{\sqrt{1-x^2}}\sqrt{1-y^2}\,dy\,dx$ y calcula dicha integral.

    (ii) Calcula $\displaystyle\iint_D \log(x^2+y^2)\,dx\,dy$ donde D es la región del plano del primer cuadrante comprendida entre las circunferencias $x^2+y^2=1$, $x^2+y^2=4$.

Problemas de Análisis Matemático. Grupo A

1. (1,3 punto) Hallar el conjunto de números reales que son solución de la inecuación $|4x^2 - 4| > x^2$.

2. (1,3 punto) (i) Si el número complejo $x + iy$ con $x, y \in \mathbb{R}$ verifica que $(x + iy)^2 = 3 + 4i$, indica razonadamente si estas afirmaciones son ciertas o falsas:
   1. $x^2 + y^2 = 3$
   2. $xy = 2$
   3. $(x - iy)^2 = 3 - 4i$.

   (ii) si consideramos los números complejos $a = 1 - i \quad \text{y} \quad b = 1 + \sqrt{3}\, i$, calcula $\left(\frac{a}{b}\right)^{12}$.

3. (1,3 puntos) (i) Definir $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$ y $\lim_{x\to -\infty} f(x) = b$, donde a y b son constantes en $\mathbb{R}$.

   (ii) Calcular los límites (si existen) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{e^{1/x}}{1 + e^{1/x}}$, $\displaystyle\lim_{x\to 0^-} \frac{e^{1/x}}{1 + e^{1/x}}$ y $\displaystyle\lim_{x\to 2} e^{\frac{1}{|x-2|}}$.

4. (1,3 punto) Consideramos la siguiente función real definida a trozos,

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x}\,, & x < 0 \\ 2x^2, & 0 \leq x < 1 \\ 2x - 1, & 1 \leq x \end{cases}$$

   Estudiar en que puntos de $\mathbb{R}$ la función es continua y en que puntos de $\mathbb{R}$ la función es derivable.

5. (1,6 puntos) Estudia si las siguientes series con convergentes o divergentes:

   1. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3k^2 - k + 1}{k(1 - 2k)}$; 2. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sqrt{k+1} - \sqrt{k}}{k^{2/3}}$; 3. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{5 + \cos k}{k^2}$; 4. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} \cos(k\pi)$.

6. (1,6 puntos) Consideremos la función $f(x) = \sin^{1/2}\left(\frac{\pi}{6} \cdot \frac{1 + x + x^2}{1 + x^2}\right)$. Calcula (si existen):

   A. $\displaystyle\lim_{x\to\infty} f(x)$ y $\lim_{x\to -\infty} f(x)$;
   B. $\max\{f(x) : x \in \mathbb{R}\}$ y $\min\{f(x) : x \in \mathbb{R}\}$;
   C. ¿Es f es una función continua y derivable en $\mathbb{R}$?

7. (1,6 puntos) Calcular las dos integrales $\displaystyle\int \frac{u + 2}{u^2 + u + 1}\, du$ y $\displaystyle\int \frac{\cos u}{2 - \sin^2 u}\, du$.

Examen de Análisis Matemático
Facultad de Informática
Septiembre 2005

1. (i) (0.5 puntos) Encuentra todos los números reales x para los que $|2 - x^2| < 2x$.

   (ii) (0.5 puntos) Hallar los números complejos que cumplen la igualdad $z^4 = -16$.

2. (i) (0.5 puntos) Sean x, y dos números cualesquiera en el intervalo $(-\pi/2, \pi/2)$. Usar el teorema del valor medio para demostrar que $|\tan x - \tan y| \geq |x - y|$.

   (ii) (0.5 puntos) ¿Cuantas soluciones *reales* tiene en $(0, \infty)$ la ecuación $\mathrm{e}^{x^7} + \log x = 0$?

3. Indicar el dominio y estudiar intervalos de crecimiento y decrecimiento, asíntotas verticales y horizontales y dibujar la gráfica de la función $f(x) = \frac{\cos x}{1 - 2\sin x}$.

4. Demuestra que la integral impropia $\displaystyle\int_0^\infty \frac{|\log x|}{x^8 + 1}\, dx$ es convergente.

5. Calcular las primitivas siguientes $\displaystyle\int \frac{3}{x^2 + 4x + 5}\, dx$ y $\displaystyle\int \frac{\arctan x}{x^2}\, dx$.

6. Decidir si las siguientes series son convergentes: $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)\cos(n\pi)}{n^2 + 1}$ y $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n \log n}{n^{3/2}}$.

   ¿Cual/cuales son condicionalmente convergentes? ¿Cual/cuales son absolutamente convergentes?

7. Hallar el volumen del sólido de revolución que se obtiene al girar alrededor del eje x la región limitada por las gráficas de $y = \cos x$, $y = \sin x$, entre $x = 0$ y $x = \pi/4$.

8. Hallar los puntos de continuidad de las funciones $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^4}, & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

   y $g(x, y) = \dfrac{\sqrt{|xy|}}{x^2 + y^2 + 1}$.

9. Indicar en qué dirección la derivada direccional de la función $f(x, y) = 1 + x^3 + x^2 y + x\cos y$ en el punto $(1, 0)$ es máxima y calcular su valor. Calcula el plano tangente a la superficie que forma la gráfica de f, en el punto $(1, 0, 3)$.

10. Hallar el máximo y mínimo de la función $f(x, y, z) = ax + by + cz$ (con a, b, c constantes tales que $abc \neq 0$) en el subconjunto de $\mathbb{R}^3$, $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + 2z^2 = 1\}$.

Examen de Análisis Matemático
Facultad de Informática. Grupos B y C
Enero 2004. Primera Parte

Nombre y Apellidos:

Grupo:

1. Si a, b, c, d son números reales no nulos y considero las afirmaciones:
   (1) Si $a < b$, entonces $a^2 < b^2$
   (2) Si $|b| > a$, entonces $b > a$
   (3) Si $a < b$ y $c < d$, entonces $ac < bd$
   (4) Si $a < 0 < b$, entonces $\frac{1}{b} < \frac{1}{a}$
   (5) Si $ac < bd$, entonces $\frac{c}{b} < \frac{d}{a}$
   Se verifica:
   A. La única verdadera es (1); B. La única verdadera es (2);
   C. La única verdadera es (3); D. Las únicas verdaderas son (4) y (5);
   <u>E. Son todas falsas.</u>

2. El valor del número real c para el que la integral impropia $\int_0^\infty \left(\frac{x}{x^2+1} - \frac{c}{3x+1} \right) dx$ converge es:
   A. 1; B. 2; <u>C. 3</u> ; D. 3/2; E. Nada de lo anterior.

3. Si la cúbica $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ tiene su punto de inflexión en $(3, -2)$ y un extremo relativo en $(5, 1)$, el otro extremo relativo se alcanza en:
   <u>A. $(1, -5)$</u> ; B. $(-5, 1)$; C. $(-5, -1)$; D. $(7, 4)$; E. $(8, -1)$.

4. El área encerrada por la curva cuya ecuación en polares es $r = 1 + \cos\theta$ es:
   A. π; <u>B.$3\pi/2$</u> ; C. 2π; D. $7\pi/3$; E. Nada de lo anterior

5. El arco de la curva $y = \log \frac{e^x + 1}{e^x - 1}$ comprendido entre los puntos de abscisas $x = 1$ y $x = 2$ tiene por longitud:
   A. $\log \frac{e^2+1}{e^2}$; <u>B. $\log(e^2 + 1) - 1$</u>; C. $\log(e^2 + 1) + 1$;
   D. $\log(e^2 + 1)$; E. Nada de lo anterior
   (Observación: por log denotamos al logaritmo neperiano)

6. El conjunto de los números reales x para los que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n + n^2 x^2}$ converge es:
   A. Todos los reales; B. [0,1); C. $(-1, 1)$; <u>D. $[-1, 1]$</u>; E. $(-2, 2)$.

7. (1 punto) Hallar el volumen máximo de un paralelepípedo rectangular (caja) que se puede inscribir en el elipsoide $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ (donde a, b, c son constantes positivas).

8. (1 punto) Sea $x \in \mathbb{R}$ y $z = \cos x + i \sin x$, $w = \sin(x + \pi/2) + i \cos(x + \pi/2)$. Explica la verdad o falsedad de las siguientes afirmaciones:
   (1) $z = w$,
   (2) $z + w$ es real,
   (3) $z - w$ es imaginario puro,
   (4) $zw = 1$
   (5) $\arg\left(\frac{z}{w}\right) = 2 \arg z$.

Examen de Análisis Matemático
Facultad de Informática. Grupos B y C
Enero 2004. Segunda Parte

Nombre y Apellidos:

Grupo:

1. Sea $f(x,y) = \dfrac{x^2y}{x^4+y^2}$ si $(x,y) \neq (0,0)$ y $f(0,0) = 0$. Entonces:

   A. Si calculamos el $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ por cualquier recta $y = mx$, $(m \in \mathbb{R})$, el límite es 0 para cualquier m, y por tanto, f es continua en $(0,0)$;
   B. f es continua en los puntos de la curva $y = -x^2$;
   C. No existe el $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$;
   D. Existe $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ pero f no es continua en $(0,0)$;
   E. Nada de lo anterior es correcto.

2. Sea I la integral de la función $f(x,y) = \dfrac{1}{x+y}$ sobre $S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x+y \leq 4;\ x \geq 2;\ y \geq 0\}$.
   Considera las tres afirmaciones siguientes:

   (1) $I = \displaystyle\int_0^2 \left(\int_2^{4-y} \frac{1}{x+y}\, dx \right) dy,$

   (2) $I = \displaystyle\int_0^4 \left(\int_0^{4-x} \frac{1}{x+y}\, dy \right) dx,$

   (3) $I = \displaystyle\int_2^4 \left(\int_2^{v} \frac{1}{v}\, du \right) dv,$ con $u = x,\ v = x+y.$

   Entonces:

   A. Las únicas afirmaciones verdaderas son (1) y (2);
   B. Las únicas afirmaciones verdaderas son (1) y (3);
   C. Las únicas afirmaciones verdaderas son (2) y (3);
   D. No hay ninguna afirmación verdadera.
   E. Todas las afirmaciones son verdaderas.

3. Para la función $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$ consideramos las afirmaciones siguientes:

   (1) La derivada direccional de f en el punto $(1,1)$ en la dirección del vector $(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$ es 0;
   (2) $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 1;$
   (3) No existen ninguna derivada direccional de f en $(0,0)$;
   (4) $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},$ si $(x,y) \neq (0,0)$

   A. Todas son verdaderas; B. La única falsa es (2);
   C. Las únicas verdaderas son (3) y (4); D. La única falsa es (3);
   E. Todas son falsas.

4. Una funcion $f(x)$ derivable en $\mathbb{R}$ verifica $3f(x) = f^2(x)f'(x) - 5x$ y además pasa por el punto $(0,1)$. El valor de $f''(0)$ es:

   A. -4; B. -8 ; C. -10; D. 1 ; E. Nada de lo anterior.

5. Sea $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, una función diferenciable en (x_0, y_0) tal que $\nabla f(x_0, y_0) = (-1, 1)$. ¿En qué dirección la derivada direccional de f en el punto (x_0, y_0) es nula ?

   A. En la dirección del vector $(1, 0)$;
   B. En la dirección del vector $(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$;
   C. En ninguna, pues las derivadas parciales de f en el punto (x_0, y_0) son no nulas;
   D. En la dirección del vector $(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$;
   E. En cualquiera, pues las componentes del gradiente en ese punto son opuestas.

6. El conjunto de números reales x para los que se tiene la desigualdad $|x^2 - 4| > 2$ es:

   A. $(6, \infty)$; B. $(-\infty, 2) \cup (6, \infty)$; C. $(-\infty, \sqrt{2}) \cup (\sqrt{6}, \infty)$;
   D. $(\sqrt{6}, \infty)$; E. $(-\infty, -\sqrt{6}) \cup (-\sqrt{2}, \sqrt{2}) \cup (\sqrt{6}, \infty)$.

7. (1 punto) Para cualquier número natural $n = 1, 2, 3, ...$, llamamos $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{t^n}{1+t^2}\, dt$. Indica si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas, justificando tu respuesta razonadamente:
   (1) $I_1 = \log 2$.
   (2)$I_n \geq 0$ para cada $n \in \mathbb{N}$.
   (3) Para cada $n \in \mathbb{N}$, se verifica $\dfrac{1}{2(n+1)} \leq I_n \leq \dfrac{1}{n+1}$.
   (4) La sucesión I_n es creciente.

8. (1 punto) Un cuadrado T tiene dos vértices opuestos en los puntos $(2, 1)$ y $(1, -2)$. Halla razonadamente todos los vértices del cuadrado y calcula la integral sobre T de la función $f(x, y) = (2x + y) \operatorname{arctg}(x - 2y)$. Indicación: Haz el cambio de variables $u = 2x + y$; $v = x - 2y$.

Examen de Análisis Matemático
Facultad de Informática. Grupos B y C
Septiembre 2004. Primera Parte

Nombre y Apellidos:

Grupo:

1. Consideramos la siguiente función real definida a trozos,

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x}, & x < 0 \\ 2x^2, & 0 \leq x < 1 \\ 2x - 1, & 1 \leq x \end{cases}$$

Decidir cual de las siguientes afirmaciones es cierta:

A. f es continua en $x = 1$ pero no lo es en $x = 0$;
B. f no es continua ni en $x = 1$ ni en $x = 0$;
C. f es derivable en $x = 0$ y $x = 1$;
D. f no es derivable ni en $x = 0$ ni en $x = 1$;
E. f es derivable en $x = 0$ pero no lo es en $x = 1$.

2. Considera las siguientes series:

1. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3k^2 - k + 1}{k(1-2k)}$; 2. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^n \sin \frac{1}{\sqrt{n}}$; 3. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\log k}{k^3}$; 4. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sqrt{k!}}{2^k}$.

Las únicas convergentes son:

A. 1, 2 y 3; **B.** 2 y 3; **C.** 3 y 4; **D.** Todas son convergentes; **E.** 1, 3 y 4.

3. ¿Cual de las integrales siguientes corresponde al área comprendida entre los lazos interno y externo del caracol $r = 1 - 2\cos\theta$?

A. $\displaystyle\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (1 - 2\cos\theta)^2\, d\theta$; **B.** $\displaystyle\int_{\pi/3}^{\pi} (1 - 2\cos\theta)^2\, d\theta - \int_0^{\pi/3} (1 - 2\cos\theta)^2\, d\theta$;
C. $\displaystyle\frac{1}{2}\int_0^{\pi} (1 - 2\cos\theta)^2\, d\theta$; **D.** $\displaystyle\int_{\pi/2}^{\pi} (1 - 2\cos\theta)^2\, d\theta - \int_0^{\pi/2} (1 - 2\cos\theta)^2\, d\theta$;
E. $\displaystyle\int_{\pi/2}^{\pi} (1 - 2\cos\theta)^2\, d\theta - \int_{\pi/3}^{\pi/2} (1 - 2\cos\theta)^2\, d\theta$

4. El conjunto de puntos de $\mathbb{R}$ que cumple la desigualdad $|4x^2 - 4| > x^2$ es:

A. $(-\infty, \frac{-2}{\sqrt{3}}) \cup (\frac{2}{\sqrt{3}}, \infty)$; **B.** $(-\infty, \frac{-2}{\sqrt{3}}) \cup (\frac{-2}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}) \cup (\frac{2}{\sqrt{3}}, \infty)$; **C.** $(\frac{-2}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}})$;
D. $(-\infty, \frac{-2}{\sqrt{5}}) \cup (\frac{2}{\sqrt{5}}, \infty)$; **E.** Todos los reales.

5. Consideramos la región de $\mathbb{R}^2$, $R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ 0 \leq x \leq \frac{1}{2},\ \ 0 \leq y,\ \ x^2 + y^2 \leq 1\}$. Si $f(x,y)$ es una función continua, ¿cual de las integrales iteradas siguientes no coincide necesariamente con la integral doble $\iint_R f(x,y)dxdy$?

A. $\displaystyle\int_0^{1/2} \int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)\, dy\, dx$;
B. $\displaystyle\int_0^{\sqrt{3}/2} \int_0^{1/2} f(x,y)\, dx\, dy + \int_{\sqrt{3}/2}^{1} \int_0^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y)\, dx\, dy$;
C. $\displaystyle\int_0^{\pi/3} \int_0^{\frac{1}{2\cos\theta}} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\, r\, dr\, d\theta + \int_{\pi/3}^{\pi/2} \int_0^{1} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\, r\, dr\, d\theta$;
D. $\displaystyle\int_0^{1} \int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)\, dy\, dx - 2\int_{1/2}^{1} \int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)\, dy\, dx$;

E. Todas coinciden con la integral doble.

(continua en la siguiente página)

6. Si $f(x,y) = \dfrac{xy^3}{x^2+y^6}$ si $(x,y) \neq (0,0)$ y $f(0,0)=0$, entonces se verifica:

A. $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$; **B.** El límite de $f(x,y)$ en $(0,0)$ sobre cualquier recta que pase por el origen es 0; **C.** f es continua en $(0,0)$; **D.** f no tiene derivadas parciales en el origen; **E.** Nada de lo anterior.

7. (1 punto) Hallar el punto más cercano al origen (si existe) del subconjunto de $\mathbb{R}^3$,

$$M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z(x^2+2y^2) = 1\}$$

8. (1 punto) Explica la verdad o falsedad de las siguientes afirmaciones:

(1) La función $f(x) = e^{x^2} + x^2 - 2$ no se anula en ningún punto del intervalo $[-2,2]$.

(2) La función $f(x) = e^{\sin(\log(10+x^3-x^5))}$ tiene máximo y mínimo absolutos en el intervalo $[-1,1]$. (Observación: por log denotamos al logaritmo neperiano)

(3) La función $g(x) = \dfrac{8}{\sin x} + \dfrac{27}{\cos x}$ tiene mínimo absoluto en el intervalo abierto $(0, \frac{\pi}{2})$.

Examen de Análisis Matemático
Facultad de Informática. Grupos B y C
Septiembre 2004. Segunda Parte

Nombre y Apellidos:

Grupo:

1. Las raices sextas de -64 son:

   A. $2,\ -2,\ 2i,\ -2i,\ \sqrt{3}+2i,\ -\sqrt{3}+2i$; **B.** $i,\ \frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{i}{2},\ -\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{i}{2}$;
   C. $\sqrt{3}+i,\ -\sqrt{3}+i,\ \sqrt{3}-i,\ -\sqrt{3}-i,\ 2i,\ -2i$; **D.** No tiene raices sextas;
   E. $\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{i}{2},\ -\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{i}{2},\ \frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{i}{2},\ -\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{i}{2},\ i,\ -i$

2. Considera las siguientes integrales impropias:

   $$1. \int_0^\infty \frac{1}{2+x+x^2}\,dx; \quad 2. \int_0^1 \frac{1+x}{\sqrt{x}}\,dx; \quad 3. \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}\,(1-x)}\,dx; \quad 4. \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{x}+x^2}\,dx;$$

   Las únicas convergentes son:

   A. 1, 3 y 4; **B.** 2 y 3; **C.** 1, 2 y 4 ; **D.** 1 y 4 **E.** Todas son convergentes

3. El plano tangente a la superficie de $\mathbb{R}^3$ definida por la igualdad $z = \cos x + \sin y$ en el punto $(\pi, \frac{\pi}{2}, 0)$,

   A. Es $z = x + y$; **B.** $z = \pi\, x + \frac{\pi}{2}\, y$; **C.** $z = 0$; **D.** $z = (x-\pi) + (y - \frac{\pi}{2})$
   E. No tiene plano tangente en ese punto.

4. Consideremos una función diferenciable $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que el $\lim_{x\to\infty} f'(x) = r$, $(r \in \mathbb{R})$ y la sucesión $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, siendo $a_n = f(n+1) - f(n)$. ¿Que podemos afirmar de la sucesión $\{a_n\}$?

   A. Si $r > 0$, $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$, y por tanto $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$;
   B. $\lim_{n\to\infty} a_n = r$;
   C. $\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{r}$;
   D. Para $r = 0$ la sucesión $\{a_n\}_n$ converge y para $r \neq 0$ diverge;
   E. Para $|r| < 1$ la sucesión $\{a_n\}_n$ converge y para $|r| > 1$ diverge.

5. El volumen del sólido de revolución que se obtiene girando la región limitada por la curva $y = x^2 + 2$ y las rectas $x = 0$, $x = 1$, $y = 1$ alrededor del eje x es

   A. $\frac{68}{15}\,\pi$; **B.** $\frac{83}{15}\,\pi$; **C.** $4.5\,\pi$; **D.** $5.5\,\pi$ **E.** $\frac{28}{15}\,\pi$

6. Consideremos la función $f(x) = \sin^{1/2}\left(\dfrac{\pi}{6} \cdot \dfrac{1+x+x^2}{1+x^2}\right)$. ¿Cual de las afirmaciones siguientes es FALSA?

   A. $\displaystyle\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} f(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}$;
   B. $\max\{f(x) : x \in \mathbb{R}\} = f(1) = \sqrt{\sin\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{\sqrt[4]{2}}$ y $\min\{f(x) : x \in \mathbb{R}\} = f(-1) = \sqrt{\sin\frac{\pi}{12}} =$
   $= \frac{\sqrt[4]{2-\sqrt{3}}}{\sqrt{2}}$;
   C. f' no está acotada en $\mathbb{R}$;
   D. f' es una función continua en $\mathbb{R}$
   E. f es una función continua y derivable en $\mathbb{R}$.

7. (1 punto) Calcular las dos integrales $\displaystyle\int \frac{u+2}{u^2+u+1}\,du$ y $\displaystyle\int \frac{\cos u}{2-\sin^2 u}\,du.$

8. (1 punto) Hallar el volumen del sólido bajo la superficie $z = (x^2 + 4y^2)^4$, entre los planos $z = 0$ y $z = 4$.

SOLUCIONES AL TEST

PARTE 1:

1. **E**
2. **C**
3. **B**
4. **B**
5. **D**
6. **B**

PARTE 2:

1. **C**
2. **C**
3. **C**
4. **B**
5. **A**
6. **C**

Examen de Análisis Matemático
Facultad de Informática. Grupos A y B
Enero 2003. Primera Parte

Nombre y Apellidos: ______________________________

1. Si $x \in \mathbb{R}$ y consideras las afirmaciones (1):$(x-2)(3-x) < 0$, (2): $x > 3$, indica cuál de las siguientes proposiciones es cierta:

   A. (1) $\Longrightarrow$ (2) pero (2) $\not\Longrightarrow$ (1) B. (2) $\Longrightarrow$ (1) pero (1) $\not\Longrightarrow$ (2) C. (1) $\Longleftrightarrow$ (2)
   D. (1) $\not\Longrightarrow$ (2) y (2) $\not\Longrightarrow$ (1) E. Nada de lo anterior

2. Si $S = \{\frac{1}{n} - \frac{1}{m} : \ n, m \in \mathbb{N}\}$, podemos afirmar que:

   A. $1 \in S$ B. Existe algún $x \in S$ tal que $|x| = 1$ C. $\sup S \cdot \inf S = -1$
   D. Si $x \in S$, entonces $-x \notin S$ E. Nada de lo anterior

3. Si el número complejo $x + iy$ con $x, y \in \mathbb{R}$ verifica que $(x+iy)^2 = 3 + 4i$ y consideramos las afirmaciones:
   1. $x^2 + y^2 = 3$
   2. $xy = 2$
   3. $(x - iy)^2 = 3 - 4i$, se verifica que:

   A. Son correctas las tres afirmaciones B. Son correctas solamente 2 y 3
   C. Es correcta solamente 2 D. Es correcta solamente 3 E. No hay ninguna correcta

4. Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$. Una de las siguientes afirmaciones es necesariamente verdadera:

   A. $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$ B. Si $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x} = 1$, entonces $f(0) = 0$
   C. Si $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x} = 3$, entonces $f'(0) = 3$
   D. Si $\lim_{x\to 1^-} f(x) = 1$ y $\lim_{x\to 1^+} f(x) = 3$, entonces $\lim_{x\to 1} f(x) = 2$
   E. Si f es derivable en $[0,2]$, entonces $\frac{f(2)-f(0)}{2-0} = f'(1)$

5. Sean f y g funciones derivables tal que $f'(x) = g'(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Indicar qué condición de las siguientes debemos añadir para concluir que $f(x) = g(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$:

   A. $f''(x) = g''(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$.
   B. $f(0) = g(0)$
   C. f y g son funciones continuas
   D. Ninguna condición adicional nos permite que $f(x) = g(x)$
   E. No hace falta ninguna condición adicional

6. Sea $f(x) = x - \frac{1}{2}\sin x$. Indicar cuantos de los siguientes enunciados son ciertos:
   (1) La función f está acotada inferiormente en $\mathbb{R}$
   (2) La función f está acotada superiormente en $\mathbb{R}$
   (3) La función f es decreciente en $\mathbb{R}$
   (4) La función f tiene al menos un cero en $\mathbb{R}$
   (5) La función f tiene un único cero en $\mathbb{R}$

   A. 1 B. 2 C. 3 D. 4 E. 5

7. (1 punto) Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función derivable en $\mathbb{R}$; sean a y b dos raices de la derivada $f'(x)$ tales que entre ellas no hay ninguna otra raíz de $f'(x)$. Razonar debidamente si pueden ocurrir cada una de las siguientes posibilidades:

   (1) Entre a y b no existe ninguna raíz de $f(x)$
   (2) Entre a y b existe una sola raíz de $f(x)$
   (3) Entre a y b existen dos o más raices de $f(x)$

8. (1 punto) Calcula el valor de la integral $\displaystyle\int_{-\pi}^{2\pi} |x| \sin x \, dx$

Examen de Análisis Matemático
Facultad de Informática. Grupos A y B
Enero 2003. Segunda Parte

Nombre y Apellidos: ____

1. Sea f la primitiva en $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ de la función $g(x) = \dfrac{1+\tan x}{\cos^2 x}$ que toma el valor $-\frac{3}{2}$ en $x = 0$. El valor de $f(\frac{\pi}{4})$ es:

   A. 0 B. $\frac{\pi}{2}$ C. 1 D. $\frac{\pi}{4}$ E. Distinto de los anteriores

2. El conjunto de puntos (θ, r) (coordenadas polares) de la circunferencia $r = 2\sin\theta$ en los que la tangente es paralela a la semirecta $\theta = \frac{\pi}{4}$ es:

   A. $\{(0,\, 0), (\pi/4,\, \sqrt{2})\}$ B. $\{(\frac{\pi}{8},\, 2\sin\frac{\pi}{8}),\ (\frac{\pi}{2}, 2)\}$
   C. $\{(\frac{\pi}{8},\ 2\sin\frac{\pi}{8}),\ (\frac{5\pi}{8},\ 2\sin\frac{5\pi}{8})\}$ D. $\{(\frac{\pi}{4},\, \sqrt{2}),\, (\frac{\pi}{2},\, 2)\}$ E. Nada de lo anterior

3. Indicar cuantas de las siguientes series son convergentes:

   (i) $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n^2}$ (ii) $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{5+\cos(n\theta)}{n^2}$ (iii) $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{3^n\, n!}{n^n}$ (iv) $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{1000\log(n+7)}$
   (v) $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \cos\frac{\pi}{n}$

   A. 1 B. 2 C. 3 D. 4 E. 5

4. Dada la función $f(x,y) = \dfrac{x+y}{x^2-y}$, una de las siguientes afirmaciones es falsa:

   A. No existe $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ B. El límite de f en $(0,0)$ si nos aproximamos por la recta $y = x$ vale -2 C. El límite de f en $(0,0)$ si nos aproximamos por la recta $x = 0$ vale -1 D. El límite de f en $(0,0)$ si nos aproximamos por la recta $y = 0$ vale 1
   E. El límite de f en $(1,2)$ es -3

5. Sea $f(x,y) = x\sin\frac{y}{x}$, si $x \neq 0$ y $f(0,y) = 3$. Consideramos las siguientes afirmaciones:

   (i) f es continua en $(0,0)$;
   (ii) $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$;
   (iii) $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$;
   (iv) Si $x \neq 0$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x\cos\frac{y}{x}$;

   Se verifica que:

   A. Son verdaderas solamente (ii), (iii) y (iv) B. Son verdaderas solamente (iii) y (iv)
   C. La única verdadera es (iii) D. La única verdadera es (iv)
   E. Nada de lo anterior es correcto

6. Si I es la integral de $f(x,y)=\frac{1}{x+y}$ en el conjunto $S=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ x+y\leq 4,\ x\geq 2,\ y\geq 0\}$ y consideramos las siguientes afirmaciones:

   (i)$I=\displaystyle\int_0^2\int_2^{4-y}\frac{1}{x+y}\,dx\,dy$; (ii) $I=\displaystyle\int_2^4\int_0^{4-x}\frac{1}{x+y}\,dy\,dx$;

   (iii) $I=\displaystyle\int_0^{\pi/2}\int_0^{\frac{4}{\sin\theta+\cos\theta}}\frac{1}{\sin\theta+\cos\theta}\,dr\,d\theta$; (iv) $\displaystyle\int_2^4\int_2^v\frac{1}{v}\,du\,dv$ con $u=x,\quad v=x+y$;

   Se verifica que

   A. Es falsa (i) B. Es falsa (ii) C. Es falsa (iii) D. Es falsa (iv)
   E. Son ciertas todas

7. (1 punto) Halla el área del triangulo de área mínima formado por la tangente a la parábola $y=6-x^2$ y los semiejes positivos.

8. (1 punto) Calcula la integral de la función $f(x,y)=2x$ en la región D limitada por las curvas $x^2y=1,\quad y=x,\quad x=2$ e $y=0$.

Examen de Análisis Matemático
Facultad de Informática. Grupos A y B
Septiembre 2003. Primera Parte

Nombre y Apellidos:

Grupo:

1. Considera las afirmaciones siguientes:
   (1) Para todo número real x se verifica que $x^2 + 2x + 5 \geq 0$,
   (2) $3 - 2x - x^2 \geq 0$ si y solamente si $x \in [-3, 1]$,
   (3) Si $|x| \geq 1$, entonces $3 - 2x - x^2 \leq 0$.

   Entonces se verifica:

   A. (1) Las únicas verdaderas son (1) y (2); B. Las únicas verdaderas son (2) y (3);
   C. las únicas verdaderas son (1) y (3); D. Son verdaderas las tres; E. Son falsas las tres.

2. Una de las cinco funciones siguientes no está acotada en el intervalo en el que se indica. Señala cuál es:

   A. $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ en $[0, 5]$; B. $f(x) = \dfrac{3}{x+2}$ en $[-3, 2]$; C. $f(x) = x + [x]$ en [-2,2]
   D. $f(x) = \dfrac{e^x}{1 + \tan^2(\sin\sqrt{x})}$ en $[0, 10\pi]$; E. $f(x) = \frac{1}{1+|x|}$ en $(-\infty, \infty)$.

3. Si $I = \displaystyle\int_0^1 t\cos^2(\pi t)\,dt$ y $J = \displaystyle\int_0^1 t\sin^2(\pi t)\,dt$, considerar las afirmaciones siguientes:
   1. $I > 0$ y $J > 0$;
   2. $I - J = \frac{1}{4\pi^2}$.
   3. $I + J = 1$.

   Entonces se verifica que:

   A. Las únicas verdaderas son 1 y 2; B. Las únicas verdaderas son 2 y 3;
   C. Las únicas verdaderas son 1 y 3; D. Todas son verdaderas; E. Todas son falsas.

4. Sea $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesion de números reales no nulos. Considera las tres afirmaciones siguientes:
   1. $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ converge a $1/2$ $\Longrightarrow$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq n_0$ se verifica que $|x_n - \frac{1}{2}| \leq \frac{1}{4}$.
   2. $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ converge $\Longleftrightarrow$ es monótona acotada.
   3. $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ converge a 0 $\Longleftrightarrow$ $\lim \frac{1}{x_n} = +\infty$.

   Entonces se verifica:

   A. la única verdadera es 1; B. La única verdadera es 2; C. La única verdadera es 3;
   D. Las únicas verdaderas son 1 y 2
   E. Las únicas verdaderas son 2 y 3

5. La ecuación del plano tangente a la superficie $z = \sin x + e^{xy} + 2y$ en el punto $(0, 1, 3)$ es:

   A. $x + y - z + 2 = 0$; B. $2x + y - z + 2 = 0$; C. $2x + 2y - z + 1 = 0$;
   D. $2x + 2y - z + 3 = 0$; E. Nada de lo anterior

6. Considera la curva en $\mathbb{R}^2$ dada por las ecuaciones paramétricas $x = t^2 - 4t + 5, \quad y = t^3 + 1$. El punto de la curva donde la recta tangente es paralela al eje $x = 0$ es:

   A. $(5,1)$; B. $(1,9)$; C. $(2,2)$; D. $(10,0)$; E. $(7,2)$.

7. (1 punto) Calcula la integral de la función definida en $\mathbb{R}^2$, $f(x,y) = x$, sobre la región limitada por la parábola $y = x^2 + 4x + 4$, y la recta $y = 9$.

8. (1 punto) Calcula el valor máximo de $f(x,y) = 4xy$ con $x \geq 0$, $y \geq 0$ sujeta a la restricción $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{16} = 1$.

Examen de Análisis Matemático
Facultad de Informática. Grupos A y B
Septiembre 2003. Segunda Parte

Nombre y Apellidos:

Grupo:

1. Considera las siguientes funciones:
   1. $f(x) = x|x|$;
   2. $f(x) = \begin{cases} x^2+2 & \text{si } x \geq 0 \\ x^3 - x^2 + 2 & \text{si } x < 0 \end{cases}$
   3. $f(x) = \begin{cases} x+2 & \text{si } x \geq 0 \\ x-2 & \text{si } x < 0 \end{cases}$

   Al estudiar la derivabilidad en $x = 0$ podemos afirmar:

   A. Las tres son derivables en $x = 0$; B. Solamente 2 y 3 son derivables en $x = 0$;
   C. Solamente 1 y 3 son derivables en $x = 0$; D. Solamente 1 y 2 son derivables en $x = 0$;
   E. Ninguna de las tres es derivable en $x = 0$.

2. La integral impropia $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\arctan x}{x^2}\,dx$ verifica:

   A. Su valor es $\frac{\pi}{4}$; B. Su valor es $\log 2 - \frac{\pi}{4}$; C. Su valor es $\log 2 + \frac{\pi}{4}$;
   D. Su valor es $\log\sqrt{2} + \frac{\pi}{4}$ E. Es divergente

   (Observación: $\log x$ representa el logaritmo neperiano de x.)

3. Sobre la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{2^n(1+\frac{1}{2})\cdots(1+\frac{n}{2})}$ podemos decir:

   A. Su suma vale 4; B. Su suma vale 2; C. Su suma vale 1;
   D. Su suma vale $\frac{1}{(n+2)(n+1)}$; E. Es divergente

4. Si $f(x,y) = \dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2}$ si $(x,y) \neq (0,0)$ y $f(0,0) = 3$, entonces $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ verifica:

   A. Es 0; B. No existe; C. Es 3; D. Es 1; E. Es 2.

5. Sea f una función definida en el intervalo abierto $(0,4)$ con derivada segunda f'' continua. Si f tiene extremos locales en los puntos 1 y 2, de la integral $I = \displaystyle\int_1^2 x f''(x)\,dx$, podemos asegurar que:

   A. $I = f(2) - f(1)$; B. $I = f(1) - f(2)$; C. $I = 2f'(2) - f'(1)$; D. $I = f'(1) - f'(2)$;
   E. $I = f''(2) - f''(1)$.

6. Considera los siguientes números complejos $a = 1 - i, \quad b = 1 + i\sqrt{3}$; y las tres afirmaciones siguientes:
1. a^{20} y b^{30} son números reales;
2. a^{10} y b^{5} son imaginarios puros (es decir, su parte real vale 0);
3. $\left(\frac{a}{b}\right)^{12} = -2^{-6}$.

Entonces se verifica:

A. Las únicas verdaderas son 1 y 2; B. Las únicas verdaderas son 1 y 3; C. Las únicas verdaderas son 2 y 3; D. Todas son verdaderas ; E. Todas son falsas.

7. (1 punto) La suma de tres números reales no negativos es 14, siendo uno de ellos doble que otro.
(a) Calcularlos para que la suma de sus cuadrados sea mínima
(b) Calcularlos para que la suma de sus cuadrados sea máxima.

8. (1 punto) Obtener el ÁREA encerrada por la gráfica de la función $f(x) = \sqrt{x}\log\dfrac{x+1}{2}$, el eje horizontal y las rectas $x = 0$, $x = 3$. (Observación: $\log x$ representa el logaritmo neperiano de x)

Examen de Análisis Matemático
Facultad de Informática. Grupos A y B
31 de enero 2002. Primera Parte

Nombre y Apellidos: ____________________

1. El conjunto de soluciones de la inecuación $|x-5| \geq |x+2|$ es:

   A. $(-2, \frac{3}{2}]$ B. $(-\infty, \frac{3}{2})$ C. $(\frac{3}{2}, \infty)$ D. $(-\infty, \frac{3}{2}]$ E. $[-2, -\frac{3}{2}]$

2. Si i es el número complejo que verifica $i^2 = -1$, el valor de $(1+i)^{20} - (1-i)^{20}$ es:

   A. 1 B. 0 C. i D. $-i$ E. -1

3. Si $f(x) = 3x + 2$, podemos asegurar que la afirmación: " $|f(x)+4| < \varepsilon$ si $|x+2| < \delta$ con $\varepsilon > 0$ y $\delta > 0$ " es cierta si:

   A. $\varepsilon \leq \dfrac{\delta}{3}$ B. $\varepsilon > \dfrac{\delta}{3}$ C. $\delta \leq \dfrac{\varepsilon}{3}$ D. $\delta > \dfrac{\varepsilon}{3}$ E. La afirmación nunca es verdadera.

4. Una recta que pasa por el punto $P = (-1, 0)$ es tangente a la curva $y = x - x^3$ en otro punto Q distinto de P. La suma de las coordenadas de Q es:

   A. $\dfrac{9}{8}$ B. 1 C. $\dfrac{7}{8}$ D. $\dfrac{3}{4}$ E. Nada de lo anterior

5. Dos hermanos heredan una parcela que han de repartirse en partes iguales. La parcela es la región plana encerrada entre la parábola $y = x^2$ y la recta $y = 1$. Deciden dividir la parcela mediante una recta $y = a$ paralela a la recta $y = 1$. El valor de a es:

   A. $\dfrac{2}{3}$ B. $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ C. $\dfrac{\sqrt[3]{2}}{2}$ D. $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ E. $\dfrac{\sqrt[3]{3}}{3}$

6. Una de las siguientes afirmaciones no es correcta. Señalala:

   A. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}}$ es condicionalmente convergente

   B. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n^2}$ es absolutamente covnergente

   C. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$ es condicionalmente convergente

   D. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sin(\frac{1}{n})$ es absolutamente convergente

   E. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$ es convergente

7. El area de la región del plano encerrada por la curva en polares $r = \sqrt{\sin\theta}$ es:

   A. $\dfrac{1}{2}$ B. $\dfrac{\pi}{4}$ C. 1 D. $\dfrac{\pi}{2}$ E. π

8. Las curvas de nivel de la función $f(x,y) = x^2 + y^2 - 2x - 4y + 5$ verifican que:

   A. En el punto $(0,0)$, el vector $\nabla f(0,0)$ es tangente a la curva de nivel $f(x,y) = 5$ B. Son circunferencias C. Son elipses D. Son hipérbolas E. Son rectas

9. Calcula las integrales $\displaystyle\int \frac{x-1}{(x^2+1)(x+1)}\,dx$ y $\displaystyle\int \frac{\cos x}{\sin^2 x + 2\sin x + 2}\,dx$.

Examen de Análisis Matemático
Facultad de Informática. Grupos A y B
31 de enero 2002. Segunda Parte

Nombre y Apellidos: ______________________________

1. Los números reales x para los que $\dfrac{|x-|x||}{x}$ es un entero positivo son:

   A. Solamente los x negativos B. Solamente los x positivos C. Solamente si x es un entero par D. Todos los x excepto el 0 E. Para ningún x real.

2. Si f es una función para la que $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{f(x)-f(2)}{x-2} = 0$, una de la afirmaciones siguientes es necesariamente cierta:

   A. $f'(2) = 2$ B. $f(2) = 0$ C. $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = f(2)$ D. f es continua en $x = 0$ E. f presenta un máximo en $x = 2$.

3. Consideremos la función $f(x) = \sqrt[3]{(x-1)^2}$. Indicar cual de las siguientes afirmaciones es cierta:

   A. f es derivable en $\mathbb{R}$ B. f tiene un mínimo absoluto en $\mathbb{R}$ C. f no es continua en $x = 1$ D. $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$ E. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$

4. Si $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de números reales con límite 1 y consideramos el conjunto $A = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$, ¿cuantas de las siguientes afirmaciones son ciertas? 1. El supremo del conjunto A es 1; 2. A es un conjunto infinito; 3. A es un conjunto acotado; 4. A es un intervalo

   A. Todas B. Tres C. Dos D. Una E. Ninguna

5. La longitud del arco de curva $\begin{cases} x(t) = 2(4t+5)^{3/2} \\ y(t) = 3(2t+2)^2 \end{cases}$ para $-1 \le t \le 1$ es:

   A. 48 B. 60 C. 72 D. 84 E. 56

6. Si $f(x,y) = \begin{cases} \frac{y\sin x}{x^2+y^2}, & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$, indica cual de estas afirmaciones es cierta:

   A. Los límites iterados no coinciden en $(0,0)$ B. Los límites en $(0,0)$ según las rectas $y = mx$ $(m \in \mathbb{R})$ valen todos 0 C. La función no es continua en el punto $(1,0)$ D. La función es continua en $(0,0)$ E. $|f(x,y)| \le \frac{1}{2}$ para todo (x,y)

7. El plano tangente a la superficie $z = x^2 + y^2 + \sin(xy)$ en el punto $P = (0,2,4)$ verifica:

   A. Es perpendicular a la recta de ecuaciones paramétricas $\begin{cases} x = -3t \\ y = -4t \\ z = t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$.

   B. Contiene al origen C. Pasa por el punto $(2,0,0)$

   D. Corta al plano $x + 2y - \dfrac{z}{2} = 1$ E. Es paralelo a cualquier recta de vector direccional $\overrightarrow{v} = (4,2,1)$

8. La integral de la función $f(x,y) = x^2y$ sobre la región del plano limitada por la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$ y la recta $x + y = 1$ en el primer cuadrante es:

   A. $0'117$ B. $\dfrac{1}{20}$ C. 0 D. $\dfrac{\pi}{2}$ E. $\dfrac{7}{60}$

9. Indica razonadamente cuales son el máximo y el mínimo absolutos de la función $f(x, y, z) = x + 2y + 2z$ en el conjunto $R = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ x^2 + y^2 + z^2 \leq 9\}$

Examen de Análisis Matemático
Facultad de Informática. Grupos A y B
Septiembre 2002. Primera Parte

Nombre y Apellidos: ______________________________________

1. El conjunto de soluciones de la inecuación $|x^2 - 4x| > 1$ es:

   A. $\mathbb{R}$ B. $(2-\sqrt{3}, 2+\sqrt{3})$ C. $(-\infty,\, 2-\sqrt{5}) \cup (2-\sqrt{3},\, 2+\sqrt{3}) \cup (2+\sqrt{5},\, \infty)$
   D. $[2-\sqrt{5},\, 2+\sqrt{5}]$ E. $(-\infty,\, 2-\sqrt{5}) \cup (2+\sqrt{5},\, \infty)$.

2. Si i es el número complejo que verifica $i^2 = -1$, hallar los números complejos z que verifican $z^3 = -8i$:

   A. $3i,\, -3i,\, 3$ B. $2i,\, -\sqrt{3}-i,\, \sqrt{3}-i$ C. $i,\, \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2},\, \frac{-\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}$ D. $i,\, -i,\, 1$
   E. $-2i,\, \sqrt{3}+i, -\sqrt{3}+i$.

3. Dada la función $f(x) = x^3 + 3x - 5$ y las tres afirmaciones siguientes: 1. $f(x) = 0$ tiene una única raiz real; 2. La ecuación $f(x) = 0$ tiene una raiz en el intervalo $[1, 2]$; 3. f está acotada. Podemos afirmar:

   A. Es verdadera solamente la afirmación 2 B. Son verdaderas las tres afirmaciones C. Las únicas verdaderas son 1 y 2 D. Las únicas verdaderas son 2 y 3 E. Todas son falsas

4. La tangente más vertical a la curva $y = \dfrac{8}{1+3e^{-x}}$ tiene de pendiente:

   A. $\dfrac{e}{2}$ B. e C. 2 D. $\dfrac{e^2}{3}$ E. 3

5. Sobre $\displaystyle\int_0^{2\pi} |\sin x|\, dx$ podemos afirmar

   A. Vale 0 B. No existe pues $|\sin x|$ no es integrable C. Vale 4
   D. Es $|-\cos(2\pi)| + |\cos 0|$ E. Vale -1

6. Consideremos las siguientes series: $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt{2k^2-1}}$ y $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k!}{k^k}$. Indicar la respuesta correcta:

   A. La primera serie es condicionalmente convergente y la segunda es divergente.
   B. Las dos series son condicionalmente convergentes
   C. Las dos series son absolutamente convergentes
   D. La primera serie es condicionalmente convergente y la segunda es absolutamente convergente
   E. La primera serie es divergente y la segunda es convergente.

7. El area de la región del plano encerrada por la lemniscata cuya ecuación en polares es $r = \cos(2\theta)$ es:

   A. $\dfrac{1}{2}$ B. $\dfrac{\pi}{2}$ C. π D. $\dfrac{\pi}{4}$ E. 1

8. Consideremos la función $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y) = \sin(x^2 + y^2)$. Indicar la respuesta correcta:

   A. f no es continua en $(0, 0)$ B. f es continua pero no es diferenciable en $(0, 0)$
   C. La imagen (o rango) de f es $[-1, 1]$ D. Todas las curvas de nivel de f son hipérbolas
   E. f tiene en el punto $(0, 0)$ un máximo relativo.

9. Dice la experiencia que el área encerrada por un segmento parabólico como el de la figura es dos tercios del producto de su altura h por la longitud de su base b. Confirma que esta fórmula es correcta utilizando la integral para obtener el área en cuestión.

Examen de Análisis Matemático
Facultad de Informática. Grupos A y B
Septiembre 2002. Segunda Parte

Nombre y Apellidos: ______________________________

1. El conjunto de los puntos x de $\mathbb{R}$ que verifican la desigualdad $\dfrac{x+1}{x-2} \leq 1$ es:

   A. $(-\infty, 3)$ B. Nigún x real C. $(2, \infty)$ D. $(-\infty, 2)$
   E. Todos los números reales

2. Si $f(g(x)) = x$, $g(0) = 1$ y $g'(0) = 2$, el valor de $f'(1)$ es:

   A. $f(0)g'(0)$ B. 1 C. 2 D. $\frac{1}{2}$ E. $\frac{3}{2}$

3. Consideremos la función definida en $\mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{x}{e^x}$. Indicar cual de las siguientes afirmaciones es cierta:

   A. La imagen (o rango) de f es un conjunto acotado B. f tiene un máximo absoluto en $\mathbb{R}$
   C. f no es derivable en $x = 0$ D. $\displaystyle\lim_{x\to\infty} f(x) = 1$ E. $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} f(x) = 1$

4. Consideremos la sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ definida de la siguiente forma: $x_n = \dfrac{2^{n+1}+3^{n+1}}{2^n+3^n}$, para $n \geq 1$. Entonces $\displaystyle\lim_{n\to\infty} x_n$ es:

   A. 3 B. 5 C. $\frac{3}{2}$ D. $\frac{2}{3}$ E. 1

5. Consideremos $f(x) = \dfrac{\log x}{1+(\log x)^2}$, para $x > 0$, y $F(t) = \displaystyle\int_1^{t^2} f(x)\,dx$, para $t \geq 1$. Sobre $F'(e)$ podemos asegurar:

   A. No existe, pues f no es continua B. $F'(e) = \dfrac{4e}{5}$ C. $F'(e) = \dfrac{1}{2}$
   D. $\lim_{t\to e^-} F'(t) \neq \lim_{t\to e^+} F'(t)$ E. Nada de lo anterior

6. Si $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$, indica cual de estas afirmaciones es FALSA:

   A. f es continua en $(0,0)$ B. Existen las derivadas parciales de f en $(0,0)$ C. La función es diferenciable en el punto $(1,0)$ D. f no está acotada E. f tiene un mínimo absoluto

7. El plano tangente a la superficie $x^2+y^2+2z^2 = 5$ en el punto $P = (2,1,0)$ verifica:

   A. Pasa por el punto $(0,5,0)$ B. Es $2x+2y+4z = 1$ C. Es paralelo al plano $x+y+z = 1$

   D. Es perpendicular a la recta de ecuaciones paramétricas $\begin{cases} x = t+1 \\ y = 2t+2 \\ z = 3t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$

   E. No existe

8. Al cambiar el orden de integración para calcular $\displaystyle\int_1^4 \int_1^{\sqrt{x}} f(x,y)\,dy\,dx$ obtenemos:

   A. $\displaystyle\int_1^{\sqrt{x}} \int_1^4 f(x,y)\,dx\,dy$ B. $\displaystyle\int_1^2 \int_{\sqrt{x}}^4 f(x,y)\,dx\,dy$ C. $\displaystyle\int_1^2 \int_{y^2}^4 f(x,y)\,dx\,dy$

   D. $\displaystyle\int_1^4 \int_{y^2}^2 f(x,y)\,dx\,dy$ E. Nada de lo anterior

9. Calcula la integral de $f(x,y) = xy$ sobre la región unión del semicírculo y el triángulo: