Examen Final. Análisis Matemático para Estadística

1. Enuncia y demuestra el teorema de existencia de primitivas en abiertos convexos. Igualmente, enuncia y demuestra el teorema integral de Cauchy (versión local).

2. ¿Es la función $f(z) = \cos \overline{z}$ entera? Si no lo es, determina los puntos en los que la función es derivable y los puntos en los que no lo es.
   (Recuerda que si $z = x + yi$, con $x, y \in \mathbb{R}$, $\cos z = \cos x \cosh y - i \sin x \sinh y$. Recuerda también que $\cosh y = \frac{e^y + e^{-y}}{2}$ y $\operatorname{senh} y = \frac{e^y - e^{-y}}{2}$).

3. ¿Define la expresión
$$\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{(7i)^{n+2}}{2^n \sqrt[n]{n}} (z-i)^{4n}$$
   una funcion holomorfa en algún abierto del plano complejo? En caso afirmativo, halla este abierto.

4. Considera la función $f(z) = \dfrac{\cos(\pi z)}{z \sin(\pi z)}$.
   (i) Halla sus singularidades. Determina de qué tipo son. En el caso de los polos, determina su orden.
   (ii) Calcula la integral $\displaystyle\int_\gamma f(z)\, dz$, donde γ es el camino cerrado $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$, $\gamma(t) = \frac{3}{2} + 2e^{it}$.

5. Considera $L^2[-\pi, \pi]$ con su producto escalar usual y la base ortonormal $\left\{ \dfrac{e^{inx}}{\sqrt{2\pi}} : n \in \mathbb{Z} \right\}$. Expresa la función $\cosh x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$, $x \in [-\pi, \pi]$ en función de esta base ortonormal. A partir de ahí, deduce su expresión en función de la base ortonormal $\left\{ \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}, \dfrac{\cos(nx)}{\sqrt{\pi}}, \dfrac{\sin(nx)}{\sqrt{\pi}} : n \in \mathbb{N} \right\}$ ¿Qué tipo de convergencia de estas series se puede asegurar ($||\cdot||_2$, puntual, uniforme)? Finalmente, ¿cuál es la proyección ortogonal de la función $\cosh x$ sobre el subespacios bidimensional generado por $\{e^{i2x}, e^{i4x}\}$ en $L^2[-\pi, \pi]$?

Examen Parcial. Análisis Matemático para Estadística

1. (3 puntos) Enuncia y demuestra el teorema de existencia de primitivas en abiertos convexos. Igualmente, enuncia y demuestra el teorema integral de Cauchy (versión local).

2. (3 puntos) Halla los posible valores de la integral
$$\int_\gamma \frac{\cos z}{z^4 + z^2}\, dz,$$
donde γ es una curva cerrada continua C^1 a trozos (como habitualmente, suponemos que ningún punto de su traza verifica $z^4 + z^2 = 0$).

3. (4 puntos) Contesta a las siguientes preguntas:

   (a) ¿Es la función $f(z) = \cos \overline{z}$ entera? Si no lo es, determina los puntos en los que la función es derivable y los puntos en los que no lo es.
   (Recuerda que si $z = x+yi$, con $x, y \in \mathbb{R}$, $\cos z = \cos x \cosh y - i \sin x \sinh y$. Recuerda también que $\cosh y = \frac{e^y+e^{-y}}{2}$ y $\operatorname{senh} y = \frac{e^y-e^{-y}}{2}$).

   (b) ¿Existe algún $z \in \mathbb{C}$ que verifique $z^3 = \overline{z}$? En caso afirmativo, halla todos los puntos que verifican la igualdad.

   (c) ¿Define la expresión
   $$\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{(7i)^{n+2}}{2^n \sqrt[n]{n}} (z-i)^{4n}$$
   una funcion holomorfa en algún abierto del plano complejo? En caso afirmativo, halla este abierto.

1. (4 puntos) Considera la función $f(z) = \dfrac{\cos(\pi z)}{z^2 \sin(\pi z)}$.

   (i) Halla sus singularidades. Determina de qué tipo son. En el caso de los polos, determina su orden.

   (ii) Calcula la integral $\displaystyle\int_\gamma f(z)\,dz$, donde γ es el camino cerrado $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$, $\gamma(t) = \frac{3}{2} + e^{it}$.

2. (3 puntos) Calcula $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{1+x^2}\,dx$, utilizando el teorema de los residuos.

3. (3 puntos) (i) Define el concepto de base ortonormal en un espacio de Hilbert (separable). ¿Cómo se puede escribir un vector v del espacio de Hilbert en función de una base ortonormal? ¿Cómo se calcula la norma de v en función de los coeficientes de v con respecto a la base ortonormal (igualdad de Parseval)?

   (ii) Considera $L^2[-\pi, \pi]$ con su producto escalar usual y la base ortonormal $\left\{ \dfrac{e^{inx}}{\sqrt{2\pi}} : n \in \mathbb{Z} \right\}$. Expresa la función $\cosh x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$, $x \in [-\pi, \pi]$ en función de esta base ortonormal. A partir de ahí, deduce su expresión en función de la base ortonormal $\left\{ \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}, \dfrac{\cos(nx)}{\sqrt{\pi}}, \dfrac{\sin(nx)}{\sqrt{\pi}} : n \in \mathbb{N} \right\}$ ¿Qué tipo de convergencia de estas series se puede asegurar ($||\cdot||_2$, puntual, uniforme)? Finalmente, ¿cuál es la proyección ortogonal de la función $\cosh x$ sobre el subespacios bidimensional generado por $\{e^{ix}, e^{i2x}\}$ en $L^2[-\pi, \pi]$?