Analisis de Variable Real. Segundo parcial. Grupo E (Primera parte)

1. Enuncia y demuestra el Teorema Fundamental del Calculo.

2. (i) Enunciar el Critero M de Weierstrass para series de funciones.
(ii) Sea $f_n(x) = \operatorname{sen}\left(\frac{1}{n^2+x^2}\right),\ x \in \mathbb{R}$. Es la serie de funciones $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ uniformemente convergente en $\mathbb{R}$?

3. Demostrar que la función $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}\log^2 x}{e^x}$ tiene un máximo en $(0, \infty)$.

4. Es uniformemente continua la función $f(x) = \sqrt[3]{x}$ en $[0, \infty)$?

5. Sea $f(x) = \displaystyle\int_0^{\operatorname{sen} x} \frac{e^{-t^2}}{1 + \operatorname{sen}^2 t}\, dt,\ x \in (-\pi/2, \pi/2)$. Justificar que existe la inversa f^{-1}, y calcular su derivada en el origen, es decir, $(f^{-1})'(0)$.

6. Demostrar que existe un unico $x \in \mathbb{R}$ que cumpla $\log x = -x$.

7. Calcular el volumen del sólido de revolución generado al girar alrededor del eje OX la región limitada por las funciónes $f(x) = \operatorname{arcsen} x$ e $y = 0$ entre $x = 0$ y $x = 1$.

8. Es convergente la integral impropia $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{e^{-x^2}\operatorname{sen} x}{\sqrt[3]{x-1}}\, dx$?

9. Calcular el radio de convergencia de las series de potencias $\displaystyle\sum_n \frac{n}{2^n} x^n$ y $\displaystyle\sum_n 2^n x^{n!}$.

10. Considerese la sucesion de funciones $f_n : [0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$

$$f_n(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0, n] \\ \cos(\pi(x-n)), & x \in (n, n+1) \\ -1, & x \in [n+1, \infty) \end{cases} .$$

(1) Demostrar que (f_n) converge puntualmente a una función f. Hay convergencia uniforme?

(2) Comprobar que f y f_n son derivables y que (f_n') converge puntualmente a f'. Hay convergencia uniforme?

11. Encontrar la expansion de Taylor en 0 de la función $f(x) = \displaystyle\int_0^{x^2} \frac{\operatorname{sen} t}{t}\, dt$.

Analisis de Variable Real. Examen Final. Grupo E (Segundo Parcial)

1. (i) Enuncia y demuestra el Teorema de Rolle y el Teorema del Valor Medio.
(ii) Demostrar que existe un único $x \in (\nvdash, \infty)$ tal que $\cos x = e^x - 1$

2. (i) Demuestra que si una sucesión de funciones *continuas* (f_n) converge uniformemente a una función f en un conjunto $A \subset \mathbb{R}$, entonces f es continua en A.
(ii) Es la suceción de funciones $f_n = \operatorname{arctg}\left(\dfrac{nx}{nx+1}\right)$, $x \in \mathbb{R}$, uniformemente convergente en $\mathbb{R}$?

3. Es uniformemente continua la función $f(t) = \dfrac{t}{e^t - 1}$ en el intervalo $(0,1)$?

4. Es convergente la integral impropia $\displaystyle\int_0^\infty \frac{e^{-x^2}}{\sqrt[3]{x}}$?

5. Calcular el radio de convergencia de la serie de potencias $\displaystyle\sum_n \frac{x^{4n+1}}{4n+1}$.

Analisis de Variable Real. Examen Final. Grupo E

(Segundo Parcial. Examen para subir nota)

1. Es uniformemente continua la función $f(t) = \dfrac{t}{e^t - 1}$ en el intervalo $(0, 1)$?

2. Demostrar que existe un único $x \in (\nvdash, \infty)$ tal que $\cos x = e^x - 1$

3. Es convergente la integral impropia $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-x^2}}{\sqrt[3]{x^2}}$?

4. Es la suceción de funciones $f_n = \operatorname{arctg}\,(\dfrac{nx^2}{nx^2+1})$, $x \in \mathbb{R}$, uniformemente convergente en $\mathbb{R}$?

5. Encontrar la expansion de Taylor en 0 de la función $f(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{\operatorname{sen}\, t^2}{t^2}\, dt$.

6. Sea $h : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función que toma cada uno de sus valores exactamente dos veces. Demostrar que h no es continua. Indicación: Considerar los valores máximo y mínimo de la función.

Análisis de Variable Real. Examen de Septiembre. Grupo E (Segunda Parte)

1. (1) Sean un intervalo $(a, b) \subset \mathbb{R}$ y una función $f : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$. Demostrar que si f tiene en el punto $c \in (a, b)$ un extremo relativo y f es derivable en c, entonces $f'(c) = 0$.

(2) Enunciar y demostrar el Teorema de Rolle.

2. Enunciar y demostrar el Teorema Fundamental del Cálculo (elegir una de las dos versiones).

3. Sea la función $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} \log x, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

(1) Demostrar que f es continua en $[0, \infty)$.

(2) Demostrar que f es uniformemente continua en $[1, \infty)$ (Indicación: Comprobar que f' está acotada en el intervalo $[1, \infty)$).

(3) Deducir que f es uniformemente continua en $[0, \infty)$.

4. (1) Demostrar que la integral impropia $\displaystyle\int_1^\infty \frac{x^3 + 1}{x^5 + x^2 + 1}\, dx$ es convergente.

(2) Razonar por qué la integral $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \frac{\cos x}{x}\, dx$ es impropia y demostrar que es divergente.

5. Sea la sucesión de funciones $f_n(x) = \operatorname{sen} \dfrac{x}{n^2}$, $x \in \mathbb{R}$.

(1) Demostrar que la sucesión (f_n) converge puntualmente en $\mathbb{R}$. Hallar su límite.

(2) Demostrar que la sucesión (f_n) no converge uniformemente en $\mathbb{R}$.

(3) Demostrar que la serie $\sum_n f_n$ converge puntualmente en $\mathbb{R}$. Usar (2) para demostrar que $\sum_n f_n$ no converge uniformemente en $\mathbb{R}$.

EXAMEN DE ANÁLISIS DE VARIABLE REAL. GRUPO F

PRIMER PARCIAL. 26/1/1998

PARTE I (16:00–18:00)

1. (1) Demostrar que toda sucesión en $\mathbb{R}$ tiene una subsucesión creciente ó decreciente.

(2) Enunciar y demostrar el **Teorema de Bolzano-Weierstrass para sucesiones**.

2. Indicar razonadamente si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones:

(1) El conjunto $A = \left\{ \dfrac{x^3 - x + 1}{2 + x} \ : \ x \in [-1, 1] \right\}$ está acotado superiormente por 3.

(2) La sucesión de términos positivos $(x_n)_n$, definida por $x_1 = 1$ y $x_{n+1} = \dfrac{\sqrt{1 + 2x_n}}{3}$ para cada $n \in \mathbb{N}$, es convergente.

(3) Sea la función $f : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{x^4 + 1}{x - a} + \dfrac{x^6 + 2}{x - b}$, dónde $a < b \in \mathbb{R}$. Entonces existe $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = 0$.

(4) El límite $\lim_{x\to\infty} \operatorname{sen}(\sqrt{x} - 1)$ existe.

(5) La función $f(x) = \sqrt{1 + |x|}$ es de Lipschitz en $\mathbb{R}$.

EXAMEN DE ANÁLISIS DE VARIABLE REAL. GRUPO F

PRIMER PARCIAL. 26/1/1998

PARTE II (18:30–20:30)

1. Hallar los límites superior e inferior de la sucesión

$$x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right) \operatorname{sen} \frac{n\pi}{2} + \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cos \frac{n\pi}{2}.$$

2. Estudiar la continuidad de la función f en $\mathbb{R}$, donde

$$f(x) = \begin{cases} x \operatorname{sen} \frac{1}{x-4} \cos \frac{1}{x^2}, & x \neq 0, 4, \\ 0, & \text{si } x = 0 \text{ ó } 4. \end{cases}$$

3. Consideremos la función $f : [1, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen}^2(1/x)}{2 + \cos x}$.

(1) Es f uniformemente continua?

(2) Existe $a \in [1, \infty)$ tal que $f(a) = \max_{[1,\infty)} f$?.

4. Resolver la ecuacion en $\mathbb{C}$,

$$\left(z^4 + i\right) \left[z^3 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2} \right)^2 \right] = 0$$