Examen de Teoría de la Medida. Grupo A.
Septiembre, 2007

1. *(1.25 puntos)* Enuncia y demuestra el teorema de la convergencia monótona.

1*. *(1.25 puntos)* Explicar si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones:

(a) Si $\varphi(t) := \int_1^\infty \frac{e^{-tx}}{x} dx,\ t > 0$, entonces φ es diferenciable y su derivada es $\varphi'(t) = \frac{-e^{-t}}{t}$.

(b) La función f es integrable Lebesgue en $\mathbb{R}^2$, $f(x) := \begin{cases} 1 & \text{si } x \leq y < x+1 \\ -1 & \text{si } x+1 \leq y < x+2 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$

(c) Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función medible Lebesgue y $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es medible Borel, entonces la composición $g \circ f$ es medible Lebesgue.

2. *(1.25 puntos)* Enuncia y demuestra el teorema de Tonelli.

2*. *(1.25 puntos)* Decidir si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones:

(a) Si una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es integrable Lebesgue en $\mathbb{R}$, entonces

$$\lim_{|x|\to\infty} f(x) = 0 \quad \text{y} \quad \lim_n \int_{|x|>n} f(x) d\lambda(x) = 0.$$

(b) Consideramos el espacio de medida $(\mathbb{R}^2, \mathcal{M}_{\lambda_2}, \lambda_2)$ y $M \subset \mathbb{R}^2$. Si $M \in \mathcal{M}_{\lambda_2}$, sus secciones $M_x := \{y \in \mathbb{R} : (x,y) \in M\}$ y $M^y := \{x \in \mathbb{R} : (x,y) \in M\}$ son medibles Lebesgue en $\mathbb{R}$ para todo $x, y \in \mathbb{R}$.

(c) Consideramos $\{x_n\}$ una sucesión de números reales y definimos μ en $(\mathbb{R}, B(\mathbb{R}))$ por $\mu = \sum_n \delta_{x_n}$. Entonces dos funciones $f,\ g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ son iguales en μ-casi todo punto si y sólo si $f(x_n) = g(x_n)$ para cada $n \in \mathbb{N}$.

3. *(1.5 puntos)* Halla

$$\lim_n \int_0^\infty \frac{n\sqrt{x}}{1+n^2x^2}\, dx \quad \text{y} \quad \lim_n \int_o^n (1 - \frac{x}{n})^n e^{-\alpha x}\, dx, \qquad (\alpha > -1).$$

4. *(1.5 puntos)* Consideramos el espacio de medida $(\mathbb{R}, \mathcal{M}_\lambda, \lambda)$ y las sucesiones de funciones medibles Lebesgue $f_n(x) = \log(1+x^2)\, \chi_{[-n,n]}(x)$ y $g_n(x) = \frac{n}{1+n^2x^2}\chi_{(0,\infty)}(x)$. Decidir si las sucesiones de funciones $\{f_n\}$ y $\{g_n\}$ convergen o no en λ-casi todo punto, medida, media, casi uniformemente, uniformemente y en $||\cdot||_p$ $(1 \leq p \leq \infty)$.

5. *(1.5 puntos)* Demostrar que para todo subconjunto $A \subset \mathbb{R}^n$ existe un boreliano B de $\mathbb{R}^n$ tal que $A \subset B \subset \mathbb{R}^n$ y $\lambda^*(A) = \lambda(B)$. ¿Significa esto que $\lambda^*(B \setminus A) = 0$?

6. *(1.5 puntos)* Consideramos el espacio medible $(\mathbb{R}, \mathcal{M}_\lambda)$, la función medible Lebesgue $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{\sin x}{1+x^2}$ y una sucesión de puntos *distintos* $\{x_n\}$. Dar las descomposiciones de Hahn y Jordan para la medida con signo

$$\nu(A) = \int_A f d\lambda + \sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^n}{2^n}\delta_{x_n}(A), \qquad A \in \mathcal{M}_\lambda.$$

¿Es ν finita? Dar la descomposición de Lebesgue de ν respecto de la medida de Lebesgue.

7. *(1.5 puntos)* Demuestra que $L_\infty[0,1]$ no es separable y que el subconjunto de las funciones continuas en $[0,1]$ no es denso en $L_\infty[0,1]$.

Examen de Teoría de la Medida. Grupo A
Marzo, 2007

1. *(1 punto)* Enuncia y demuestra el teorema de la convergencia dominada.

2. *(1 punto)* Enuncia y demuestra el teorema de Fubini.

3. *(1.5 puntos)* Demuestra que
$$\int_0^1 (e^x - 1)(\log x + \frac{1}{x})\, dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+n+1}{(n-1)!\,(n^2+n)^2}.$$

4. *(1.5 puntos)* Probar que todo conjunto medible Lebesgue de $\mathbb{R}^n$ es unión de un conjunto boreliano de $\mathbb{R}^n$ y un conjunto de medida exterior de Lebesgue cero de $\mathbb{R}^n$.

5. *(1 punto)* Prueba que si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es diferenciable, entonces f' es medible Borel. Si $f,\, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ son diferenciables, ¿es $h(x) := f'(\frac{g'(x)+1}{2})$, $x \in \mathbb{R}$, medible Borel?

6. *(1.5 puntos)* Considera la sucesión de funciones $f_n(x) = n^2 e^{-n|x|}$, $x \in \mathbb{R}$. Estudia si converge en media, medida, λ-c.t.p., casi uniforme, uniforme y en $||\cdot||_p$ $(1 \leq p \leq \infty)$.

7. *(1.25 puntos)* Consideramos las funciones $f,\ g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x\chi_C(x)$, C el conjunto de Cantor y $g(x) = x\chi_B(x)$, B$=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}([n,\, n+\frac{1}{n^3}] \cup [-n-\frac{1}{n^3}, -n])$. ¿Son integrables Riemann y/o integrables Lebesgue?

8. *(1.25 puntos)* Consideremos $f(x) = \begin{cases} \sqrt{1-x} & x \leq 1 \\ 0 & x \geq 1 \end{cases}$ y $g(x) = \begin{cases} x^2 & x \geq 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$.
Definimos las medidas en $(\mathbb{R}, \mathcal{M}_\lambda)$, $\nu(A) = \int_A f\, d\lambda$ y $\mu(A) = \int_A g\, d\lambda$, para cada $A \in \mathcal{M}_\lambda$. Hallar la descomposición de Lebesgue de ν con respecto a μ.

Examen de Teoría de la Medida. Grupo A
Parte I
Septiembre, 2006

1. *(1.5 puntos)* Enuncia y demuestra el teorema de la convergencia dominada.

2. *(1.25 puntos)* Demuestra que

$$\int_0^1 (e^x - 1)(\log x + \frac{1}{x})\, dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+n+1}{(n-1)!\,(n^2+n)^2}.$$

3. *(1.25 puntos)* Probar que todo conjunto medible Lebesgue de $\mathbb{R}^n$ es unión de un conjunto boreliano de $\mathbb{R}^n$ y un conjunto de medida exterior de Lebesgue cero de $\mathbb{R}^n$.

4. *(1 punto)* Prueba que si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es diferenciable, entonces f' es medible Borel. Si f, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ son diferenciables, ¿es $h(x) := f'(\frac{g'(x)+1}{2})$, $x \in \mathbb{R}$, medible Borel?

Examen de Teoría de la Medida. Grupo A
Parte II
Septiembre, 2006

1. *(1.5 puntos)* Enuncia y demuestra el teorema de Fubini.

2. *(1.20 puntos)* Prueba que la sucesión de funciones $f_n(x) = n^2 e^{-n|x|}$, $x \in \mathbb{R}$, converge a 0 en medida y en casi todo punto, pero no converge en media a 0.

3. *(1.15 puntos)* Consideramos las funciones $f,\ g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x\chi_C(x)$, C el conjunto de Cantor y $g(x) = x\chi_B(x)$, B$=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}([n,\, n+\frac{1}{n^3}] \cup [-n-\frac{1}{n^3}, -n])$. ¿Son integrables Riemann y/o integrables Lebesgue?

4. *(1.15 puntos)* Consideramos la función $f(x) = x \sin\frac{1}{x}$, $x \in (0,1]$, $f(0) = 0$. ¿Es f de variación acotada? ¿Es absolutamente continua? ¿Y la función $g(x) = x^2 \sin\frac{1}{x}$, $x \in (0,1]$, $g(0) = 0$?

Examen de Teoría de la Medida. Grupo A
Parte I
Febrero, 2007

1. *(1 punto)* Enuncia y demuestra el teorema de la convergencia dominada.

1*. *(1 punto)* Decidir si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones:

(a) Consideremos $(X, \mathcal{A})$ un espacio medible y $M \subset \mathcal{P}(X)$ tal que $\sigma(M) = \mathcal{A}$. Dos medidas μ y ν definidas en $(X, \mathcal{A})$ son iguales si y sólo si coinciden en M.

(b) $A \subset \mathbb{R}$ es medible Lebesgue si y sólo si existe un G_δ $B \subset \mathbb{R}$ tal que $\lambda^*(A) = \lambda(B)$.

(c) Consideremos el espacio de medida $(\mathbb{R}^2, \mathcal{M}_{\lambda_2}, \lambda_2)$ y $M \subset \mathbb{R}^2$. Si $M \in \mathcal{M}_{\lambda_2}$, sus secciones $M_x := \{y \in \mathbb{R} : (x, y) \in M\}$ y $M^y := \{x \in \mathbb{R} : (x, y) \in M\}$ son medibles Lebesgue en $\mathbb{R}$.

2. *(1.35 puntos)* Demuestra que para todo $a \in [-1, 1]$

$$\int_{(0,\infty)} \frac{\sin t}{e^t - a}\, d\lambda(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^{n-1}}{n^2 + 1}.$$

3. *(1.35 puntos)*

(i) Consideramos F la función singular de Cantor (definida como 0 en $(-\infty, 0)$ y como 1 en $(1, \infty)$, y la medida μ_F de Lebesgue-Stieltjes definida en $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ y asociada a F. Dar las descomposiciones de Hahn y Jordan para la medida con signo $\nu = \mu_F - \sum_{n=1}^{\infty} \delta_{1/3^n}$ definida en $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$.

(ii) Consideramos una función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ integrable Lebesgue y la medida definida en $(\mathbb{R}, \mathcal{M}_\lambda)$, $\gamma(A) = \int_A f\, d\lambda$. Dar la descomposición de Lebesgue de la medida con signo $\nu + \gamma$ (ν la definida en el apartado anterior) respecto de la medida de Lebesgue.

4. *(1.30 puntos)* Consideremos un espacio de medida $(X, \mathcal{A}, \mu)$ y $1 \leq p, q \leq \infty$ conjugados. Probar que si $\{f_n\}$ converge a f en $L_p(X, \mathcal{A}, \mu, \mathbb{R})$ y $\{g_n\}$ converge a g en $L_q(X, \mathcal{A}, \mu, \mathbb{R})$, entonces $\{f_n g_n\}$ converge a fg en $L_1(X, \mathcal{A}, \mu, \mathbb{R})$. Indicación: Utiliza la desigualdad de Hölder.

Examen de Teoría de la Medida. Grupo A
Parte II
Febrero, 2007

1. *(1 punto)* Enuncia el teorema de descomposición de Lebesgue y demuestralo para el caso que la medida a descomponer sea finita.

1*. *(1 punto)* Decidir si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones:

(a) Una función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ es medible Lebesgue si y sólo si para toda función continua $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ la composición $g \circ f$ es medible Lebesgue.

(b) Si $C \in \mathcal{M}_{[0,1]}$ (subconjuntos medibles Lebesgue de $[0,1]$), la función característica χ_C es integrable Riemann si y sólo si $\lambda(C) = 0$.

(c) Consideremos en un espacio de medida $(X, \mathcal{A}, \mu)$ una sucesión de funciones $f_n : X \longrightarrow [0, \infty)$. Si $\liminf_n \int_X f_n \, d\mu = 0$, existe una subsucesión $\{f_{n_k}\}_k$ convergente a 0 en μ-casi todo punto.

2. *(1.40 puntos)* Consideremos el espacio de medida $(\mathbb{R}, \mathcal{M}_\lambda, \lambda)$ y las sucesiones de funciones medibles Lebesgue $f_n(x) = ne^{-n^2 x} \chi_{[0,\infty)}(x)$ y $g_n(x) = \sin x \, \chi_{[-n,n]}(x)$. Decidir si las sucesiones de funciones $\{f_n\}$ y $\{g_n\}$ convergen o no en λ-casi todo punto, medida, media, casi uniformemente, uniformemente y en $||\cdot||_p$ $(1 \leq p \leq \infty)$.

3. *(1.40 puntos)* Consideremos $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida σ-finita y una función $f : X \longrightarrow [0, \infty)$ $\mathcal{A}$-medible.

(i) Prueba que el conjunto $E = \{(x,t) : x \in X, t \in [0,\infty), f(x) \geq t\} \in \mathcal{A} \times B(\mathbb{R})$.

(ii) Demuestra que

$$\mu \times \lambda(E) = \int_X f \, d\mu = \int_0^\infty \mu(\{x \in X : f(x) \geq t\}) \, d\lambda(t).$$

4. *(1.20 puntos)* Considerar $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua con derivada continua en $(0,1)$. Para cualquier $\varepsilon > 0$ definimos el conjunto $A_\varepsilon := \{x \in (0,1) : |f'(x)| < \varepsilon\}$ (abierto por ser f' continua en $(0,1)$). Probar que $\lambda^*(f(A_\varepsilon)) \leq \varepsilon$.

Examen de Teoría de la Medida. Grupo A
Parte I
Febrero, 2006

1. (1.30 puntos) Enuncia y demuestra el teorema de la convergencia dominada.

2. Contestar razonadamente a las siguientes cuestiones:

(a) (0.80 puntos) Si $f : \mathbb{R} \longrightarrow [-\infty, +\infty]$ es una función medible Lebesgue, ¿es $g(x) = f(2x+1)$ medible Lebesgue?

(b) (0.90 puntos) Sea $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida, $f : X \longrightarrow [0, +\infty]$ una función $\mathcal{A}$-medible y una sucesión $\{A_n\}_n \subset \mathcal{A}$ tal que $A_n \subset A_{n+1}$, para todo $n \in \mathbb{N}$. ¿Es cierta la igualdad siguiente?

$$\int_{\cup_n A_n} f \, d\mu = \lim_n \int_{A_n} f \, d\mu.$$

Y en el caso $\{A_n\}_n \subset \mathcal{A}$ y $A_n \supset A_{n+1}$, para todo $n \in \mathbb{N}$, ¿es cierta la igualdad siguiente?

$$\int_{\cap_n A_n} f \, d\mu = \lim_n \int_{A_n} f \, d\mu.$$

(c) (0.80 puntos) ¿Qué condición debe cumplir $C \subset [0,1]$ para que la función característica χ_C sea integrable Riemann en $[0,1]$?

3. (1.25 puntos) Consideremos la función $f : [0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = e^{-x} \cos \sqrt{x}$. Justifica, utilizando los resultados de convergencia para la integral, la igualdad siguiente:

$$\int_{[0,\infty)} f \, d\lambda = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{n!}{(2n)!}.$$

Indicación: Utiliza la serie de Taylor de la función coseno en 0.

****

NOTA. Se puede usar (sin probar) que para todo $A \subset \mathbb{R}$ medible Lebesgue y $r, s \in \mathbb{R}$, el conjunto $rA + s = \{ra + s : \; a \in A\}$ es medible Lebesgue.

Examen de Teoría de la Medida. Grupo A
Parte II
Febrero, 2006

1. (1.30 puntos) Si $f \in L_1([a,b], \mathcal{M}_\lambda, \mathbb{R})$ y definimos $F(x) := \int_{[a,x]} f \, d\lambda$, para $x \in [a,b]$, sabemos que $F'(x) = f(x)$ en λ-c.t.p. $x \in [a,b]$. Dar la demostración de este resultado para el caso f acotada.

2. Contestar razonadamente a las siguientes cuestiones:

(a) (0.80 puntos) Sea $(\mathbb{R}, B(\mathbb{R}), \mu)$ siendo μ la medida de Lebesgue-Stieltjes asociada a la función $F(x) = [x]$ (parte entera de x). ¿Qué funciones $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ son μ-integrables?

(b) (0.80 puntos) Consideremos una sucesión de funciones $\{f_n\} \subset L_1(\mathbb{R}) \cap L_2(\mathbb{R})$ y $f \in L_1(\mathbb{R}) \cap L_2(\mathbb{R})$ tales que $\lim_n ||f_n - f||_1 = 0$. ¿Es cierto que $\lim_n ||f_n - f||_2 = 0$?

(c) (0.80 puntos) Sean $1 < p < \infty$ y $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida. Si $\{f_n\}_n \subset L_p(X, \mathcal{A}, \mu)$ y $f \in L_p(X, \mathcal{A}, \mu)$ son tales que $\lim_n ||f_n - f||_p = 0$, ¿converge $\{f_n\}$ a f en medida?

3. (1.25) Consideramos $f(x,y) = \frac{1}{(1+y)(1+x^2 y)}$ en el conjunto $A = (0,\infty) \times (0,\infty)$. Calcula $\int_A f \, d\lambda_2$, y deduce que

$$\int_0^\infty \frac{\log x}{x^2 - 1} \, dx = \frac{\pi^2}{4}.$$

Ejercicio de Teoría de la Medida. Grupo A
Diciembre, 2005

1. Contesta razonadamente a las siguientes cuestiones:

(a) Si $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ es medible Lebesgue y $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ es continua, ¿ Es $g \circ f$ medible Lebesgue?

(b) Sea $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida y $f : X \longrightarrow [0, \infty)$ una función $\mathcal{A}$-medible e integrable. ¿Es

$$\begin{aligned} \nu : \mathcal{A} &\longrightarrow [0, \infty) \\ A &\longrightarrow \nu(A) = \int_A f d\mu \end{aligned}$$

es una medida en $(X, \mathcal{A})$?

(c) Sean $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tales que f es medible Borel y $f = g$ en λ-casi todo punto. ¿Es g medible Borel?

(d) Demuestra que para cualquier subconjunto $A \subset \mathbb{R}^n$ existe un boreliano B de $\mathbb{R}^n$ tal que $A \subset B$ y $\lambda^*(B) = \lambda^*(A)$. ¿Significa esto que $\lambda^*(B \setminus A) = 0$?

2. Demostrar la igualdad

$$\int_0^\infty \frac{\sin(ax)}{e^x - 1}\, dx = \sum_{n=1}^\infty \frac{a}{n^2 + a^2}, \qquad a \in \mathbb{R}.$$

Indicación: $\frac{1}{e^x - 1} = e^{-x} \frac{1}{1 - e^{-x}}$. Desarrollar $\frac{1}{1-e^{-x}}$ como una serie geométrica para $x \in (0, \infty)$ y utilizar que $|\sin y| \leq |y|$ para todo $y \in \mathbb{R}$.

3. Estudiar si las siguientes funciones $f : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ y $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ son integrables Lebesgue o Riemann.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{q} & \text{si } x = \frac{p}{q} \;\; p, q \in \mathbb{N}, \text{ (fracción irreducible)}, \; x \in [0,1] \\ 0 & \text{si } x \text{ es un irracional en } [0,1] \text{ ó } x = 0 \end{cases}$$

$$g(x) = \sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^n}{n} \chi_{[n, n+1)}(x)$$

5. Demuestra que:

$$\lim_n \int_0^\infty \frac{nx}{1 + n^3 x^3}\, dx = 0.$$

Indicación: Puede serte útil la siguiente desigualdad $ab \leq \frac{a^2+b^2}{2}$, para $a = 1$ y $b = \sqrt{n^3 x^3}$.