Algunos principios variacionales y aplicaciones a la geometría en espacios de Banach

Proyecto de Fin de Máster en Investigación Matemática
Facultad de Ciencias Matemáticas
Universidad Complutense de Madrid

2011-2012

Directora:
Mar Jiménez Sevilla

Alumno:
Juan Luis Ródenas Pedregosa

Autorización de difusión

Abstract

In 1972, Ivar Ekeland obtained a variational principle (V.P.) which has been a key step to obtain some geometric properties of Banach spaces and several fixed point theorems. Throughout this work, we will review and study this result and other variational principles like the Stegall's V.P., the Deville, Godefroy and Zizler's V.P., the Borwein-Preiss V.P. and some of their many applications. We will also study several parametric variational principles (P.V.P.) by P. Georgiev, L. Veselý, R. Deville, A. Procházka, ... From these results alternative proofs on Nash equilibriums, a parametric version of the Karush-Kuhn-Tucker theorem, several properties of convex sets and convex functions, etc... are obtained. Finally, we will briefly introduce the vector-valued variational principles.

Keywords: variational principle, Dirichlet problem, smooth variational principle, Hamilton-Jacobi equations, parametric variational principle, Nash equilibriums, vector-valued variational principle, perturbed equilibrium principles.

2000 Mathematics Subject Classification: 46B20, 46N10, 46T99, 49J50, 49L25, 58E30.

Resumen

En 1972, Ivar Ekeland obtuvo un principio variacional (P.V.) que ha sido un paso clave para obtener algunas propiedades geométricas de espacios de Banach y algunos teoremas de punto fijo. A través de este trabajo, revisaremos y estudiaremos este resultado y otros principios variacionales como el P.V. de Stegall, el P.V. de Deville, Godefroy y Zizler, el P.V. de Borwein-Preiss y algunas de sus muchas aplicaciones. También estudiaremos varios principios variacionales paramétricos (P.V.P.) de Georgiev, L. Veselý, R. Deville, A. Procházka, ... Se obtienen de estos resultados varias pruebas alternativas sobre equilibrios de Nash, una versión paramétrica del Teorema de Karush-Kuhn-Tucker, varias propiedades de conjuntos convexos y funciones convexas, etc... Por último, introduciremos brevemente los principios variacionales con valores vectoriales.

Palabras clave: principio variacional, problema de Dirichlet, principio variacional suave, ecuaciones de Hamilton-Jacobi, principio variacional paramétrico, equilibrios de Nash, principio variacional con valores vectoriales, principios perturbados para equilibrios.

2000 Mathematics Subject Classification: 46B20, 46N10, 46T99, 49J50, 49L25, 58E30.

Índice general

Capítulo 0

Introducción

0.1. Motivación

Una función semicontinua inferiormente sobre un conjunto no compacto puede no alcanzar un mínimo. En términos generales, lo que se consigue afirmar con un principio variacional es que dada una función semicontinua inferiormente con valores en la recta real extendida y acotada inferiormente, añadiendo una pequeña perturbación, entonces podemos alcanzar un mínimo. Dependiendo de las hipótesis, se puede conseguir que la función de perturbación tenga ciertas propiedades.

En el capítulo 1, analizaremos algunos principios variacionales clásicos. Estudiaremos varias pruebas alternativas de algunos teoremas clásicos mediante el principio variacional de Ekeland y el de Stegall. Támbién veremos algunas caracterizaciones importantes como la completitud de un espacio métrico y otras para puntos soporte y funcionales soporte. Asimismo, expondremos los principios variacionales de Borwein-Preiss y Deville-Godefroy-Zizler, con los que se pueden obtener buenas propiedades de convexidad, resultados para la geometría en espacios de Banach y probar la existencia de soluciones (de viscosidad) para las ecuaciones de Hamilton-Jacobi.

En el capítulo 2, estudiaremos como parametrizar algunos principios variacionales del capítulo anterior y sus consecuencias como varios teoremas sobre la existencia de equilibrios de Nash, ciertas propiedades de análisis convexo o una versión paramétrica del Teorema de Karush-Kuhn-Tucker. En el capítulo 3, haremos una introducción sobre como extender estos resultados para funciones con valores vectoriales y algunas aplicaciones relacionadas con la existencia de puntos de equilibrio vectoriales.

En general, veremos que los principios variacionales tienen aplicaciones en multitud de ramas matemáticas como análisis matemático, matemática aplicada, matemáticas financieras, ...

0.2. Notación

A lo largo del trabajo, denotaremos

- un conjunto de escalares por $\mathbb{K}$, que puede ser real ($\mathbb{R}$) o complejo ($\mathbb{C}$),
- $\mathbb{R}_+ := \{x \in \mathbb{R} \,:\, x > 0\}$,
- si $1 \leq p < \infty$, $\ell_p := \left\{(x_n) \subset \mathbb{K} \,:\, \sum\limits_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < \infty\right\}$ y
- $\ell_\infty := \left\{(x_n) \subset \mathbb{K} \,:\, \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} |x_n| < \infty\right\}$.

Dado un espacio métrico (X, d), denotaremos:

- $B_X := \{x \in X \,:\, d(x, 0) \leq 1\}$ (la bola unidad cerrada de X centrada en el origen),
- $\mathring{B}_X := \{x \in X \,:\, d(x, 0) < 1\}$ (la bola unidad abierta de X centrada en el origen),
- $B_\rho(y) := \{x \in X \,:\, d(x, y) \leq \rho\}$ (la bola cerrada de radio ρ centrada en $y \in X$),
- $\mathring{B}_\rho(y) := \{x \in X \,:\, d(x, y) < \rho\}$ (la bola abierta de radio ρ centrada en $y \in X$),
- $B_\rho(A) := \{x \in X \,:\, d(A, x) \leq \rho\}$ (la ρ-ampliación de A),
- $\mathbb{S}_X := \{x \in X, : d(x, 0) = 1\}$ (la esfera unidad de X centrada en el origen),
- $\mathbb{S}_\rho(y) := \{x \in X, : d(x, y) = \rho\}$ (la esfera de radio ρ centrada en $y \in X$),
- dada una función, $f \colon X \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$, $\mathrm{dom}(f) := \{x \in X \,:\, -\infty < f(x) < +\infty\}$ y
- dada una función, $f \colon X \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$, $\mathrm{cont}(f) := \{x \in \mathrm{dom}(f) \,:\, f \text{ es continua en } x\}$.

En un espacio de Banach $(X, \|\cdot\|)$,

- dado $A \subset X$, denotaremos $\mathrm{core}(A) := \{a \in X \,:\, \bigcup\limits_{\lambda>0} \lambda(A - a) = X\}$,
- si una sucesión $(x_n) \subset X$ converge en la topología débil a $x \in X$, se denotará por $x_n \xrightarrow{w} x$ y
- si una sucesión $(x_n^*) \subset X^*$ converge en la topología débil* a $x^* \in X^*$, se denotará por $x_n^* \xrightarrow{w^*} x^*$.

0.3. Preliminares

En esta sección, se expondrán algunos conceptos y resultados básicos que se utilizarán a lo largo del trabajo. Se supondrá que el lector está familiarizado con éstos y, por tanto, no se ahondará en ellos. Pueden consultarse los libros [Bre], [FHHMZ], [Phe] y [Evans] para verlos con más detalle.

Salvo que se indique lo contrario, supondremos que (X, d) es un espacio métrico en toda la sección y, a lo largo de todo el trabajo, se supondrá que todo espacio topológico es de Hausdorff.

Definición 0.3.1. *Decimos que la función* $f\colon X \to [-\infty, +\infty]$ *es **propia** si* $\mathrm{dom}(f) \neq \emptyset$.

Definición 0.3.2. *Decimos que la función* $f\colon X \to [-\infty, +\infty]$ *es **semicontinua inferiormente (s.c.i.)** en* x_0 *si para cada* $\mathcal{E} > 0$*, existe un entorno* $U_{x_0} \subset X$ *de* x_0 *tal que* $f(x_0) < f(x) + \mathcal{E}$*, para todo* $x \in U_{x_0}$*. Decimos que* f *es **semicontinua superiormente (s.c.s.)** en* x_0 *si* $-f$ *es s.c.i. en* x_0*. Si* f *es s.c.i. (s.c.s.) en todos los puntos de un subconjunto* $A \subset X$*, decimos que* f *es s.c.i. (s.c.s. respectivamente) en* A.

Proposición 0.3.3. *Sea* $f\colon X \to\,]-\infty, +\infty]$*. Son equivalentes:*

1. f *es s.c.i.;*
2. *dado* $x \in X$*,* $\liminf\limits_{y\to x} f(y) \geq f(x)$*;*
3. *dado* $x \in X$ *y* $(x_n) \subset X$ *tal que* $x_n \to x$*,* $\liminf\limits_{n\to\infty} f(x_n) \geq f(x)$*;*
4. $\mathrm{epi}(f)$ *es cerrado en* $X \times \mathbb{R}$*;*
5. *para cada* $\lambda \in \mathbb{R}$*, el conjunto de subnivel* $\{x \in X \,:\, f(x) \leq \lambda\}$ *es cerrado.*

Además,

- *si* f_1 *y* f_2 *son s.c.i., entonces* $f_1 + f_2$ *es s.c.i.;*
- *si* $(f_i)_{i\in I}$ *es una familia de funciones s.c.i., entonces la envolvente superior,* $f(x) := \sup\limits_{i\in I} f_i(x)$*, también es s.c.i.;*
- *si* X *es compacto y* f *es s.c.i., entonces* f *alcanza su cota inferior sobre* X.

Definición 0.3.4. *Sea* X *un espacio de Banach e* $Y \subset X$ *un subconjunto convexo. Decimos que la función* $f\colon Y \to \mathbb{R}$ *es **cuasi-convexa** si para cada* $\alpha \in \mathbb{R}$*, el conjunto de subnivel* $\{x \in Y \,:\, f(x) \leq \lambda\}$ *es convexo.*

Proposición 0.3.5. *Sean* X *un espacio de Banach,* $Y \subset X$ *un subconjunto convexo y* $f\colon Y \to \mathbb{R}$*.*
f *es cuasi-convexa si, y sólo si,* $f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \max\{f(x), f(y)\}$*, para cada* $x, y \in Y, \lambda \in [0,1]$.

Definición 0.3.6. *Sean X, Y espacios de Banach, $U \subset X$ un subconjunto abierto, $f\colon U \to Y$ una aplicación y $x \in U$ un punto. Decimos que f es Gâteaux diferenciable en x si existe una aplicación $L\colon X \to Y$ tal que*

$$\left\| \frac{1}{t}\big(f(x+th) - f(x)\big) - L(h) \right\| \underset{\substack{t\to 0\\ t\neq 0}}{\longrightarrow} 0, \text{ para cada } h \in X$$

Si además este límite es uniforme para $h \in B_X$, decimos que f es Fréchet diferenciable en x. Cuando el operador L existe, se suele denotar por $f'(x)$ y se le llama derivada Gâteaux (respectivamente Fréchet) en x. Si f tiene derivada Gâteaux (Fréchet) en todo punto de U, decimos que f es Gâteaux diferenciable (Fréchet diferenciable) en U. En particular, cuando $Y = \mathbb{R}$, entonces

$$f'(x)(h) = \lim_{t\to 0} \frac{f(x+th) - f(x)}{t},$$

cuando este límite existe.

Definición 0.3.7. *Sea X un espacio de Banach. Definimos la* ***subdiferencial*** *de una función convexa $f\colon X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ en $x \in \operatorname{dom}(f)$ como*

$$\partial f(x) := \{x^* \in X^* \,:\, f(y) - f(x) \geq x^*(y - x), \forall y \in X\}$$

Observación 0.3.8. *Si f es propia, se sigue que x_0 es un mínimo global de f si, y sólo si, $0 \in \partial f(x_0)$. Si además f es continua en un abierto convexo $U \subset X$, entonces $\partial f(x) \neq \emptyset$, para todo $x \in U$.*

Proposición 0.3.9. *Sea X un espacio de Banach y $U \subset X$ un abierto convexo. Si $f\colon U \to \mathbb{R}$ es convexa, continua y Fréchet diferenciable (o Gâteaux diferenciable) en x_0, entonces $\partial f(x_0) = \{f'(x_0)\}$.*

Observación 0.3.10. *Dado $x \in \operatorname{dom}(f+g)$, se tiene que $\partial f(x) + \partial g(x) \subset \partial(f+g)(x)$.*

Si añadimos algunas condiciones más, se puede obtener la igualdad.

Teorema 0.3.11. *Sea X un espacio de Banach. Si las funciones $f, g\colon X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ son propias, convexas, s.c.i. y existe un punto $x \in \operatorname{dom}(f+g)$ y una de ellas es continua, entonces*

$$\partial f(x) + \partial g(x) = \partial(f+g)(x), \text{ para todo } x \in \operatorname{dom}(f+g).$$

Proposición 0.3.12. *Sean X un espacio de Banach y $f\colon X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ una función continua y convexa en un subconjunto abierto y convexo $D \subset X$. Entonces, la aplicación subdiferencial $x \to \partial f(x)$ es s.c.s. tal y como se define para funciones multivaluadas (véase Definición 2.1.1) con la topología de la norma en X y la topología débil* en X^*.*

Definición 0.3.13. *Sea X un espacio de Banach. Dado $\mathcal{E} > 0$, definimos la* ***$\mathcal{E}$-subdiferencial*** *de una función convexa $f\colon X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ en $x \in \operatorname{dom}(f)$ como*

$$\partial_{\mathcal{E}} f(x) := \{x^* \in X^* \,:\, f(y) - f(x) + \mathcal{E} \geq x^*(y - x), \forall y \in X\}.$$

Observación 0.3.14. *Si* $0 < \mathcal{E}_1 < \mathcal{E}_2$, *entonces* $\partial_{\mathcal{E}_1} f(x) \subset \partial_{\mathcal{E}_2} f(x)$. *Si* f *es s.c.i. y convexa en* X, *entonces* $\partial_{\mathcal{E}} f(x) \neq \emptyset$, *para todo* $x \in \mathrm{dom}(f)$.

Proposición 0.3.15. *Sean* f *y* g *dos funciones definidas en un subconjunto abierto* U *de un espacio de Banach* X. *Supongamos que* f *es convexa,* g *es Fréchet diferenciable (Gâteaux diferenciable),* $f(x) \leq g(x)$ *para todo* $x \in U$ *y que* $f(x_0) = g(x_0)$ *en algún* $x_0 \in U$. *Entonces* f *es Fréchet diferenciable (Gâteaux diferenciable respectivamente) en* x_0.

Definición 0.3.16. *Decimos que un subconjunto de un espacio topológico es* G_δ***-denso*** *si es denso e intersección numerable de abiertos.*

Proposición 0.3.17. *Sea* f *una función continua y convexa definida en un abierto convexo de un espacio de Banach* X. *Entonces el conjunto de todos los puntos donde* f *es Fréchet diferenciable (posiblemente vacío) es un conjunto* G_δ*-denso en* X.

Definición 0.3.18. *Un espacio de Banach* X *es* ***Asplund*** *(**débil-Asplund**) si toda función continua y convexa, definida en un abierto convexo* $U \subset X$ *no vacío, es Fréchet diferenciable (Gâteaux diferenciable) en un subconjunto* G_δ*-denso de* U.

Teorema 0.3.19. *Un espacio de Banach* X *es Asplund si, y sólo si, para todo subespacio separable,* $Y \subset X$, *se tiene que* Y^* *también es separable.*

Teorema 0.3.20. *Si* X *un espacio de Banach separable, entonces* X *admite una norma Gâteaux diferenciable.*

Teorema 0.3.21. *Si* X *es un espacio de Banach tal que* X^* *es separable o reflexivo, entonces* X *admite una norma Fréchet diferenciable.*

Definición 0.3.22. *Sea* X *un espacio de Banach. Decimos que* $f\colon X \to \mathbb{R}$, $f \not\equiv 0$, *es una* ***función meseta*** *si* $\mathrm{sop}(f) = \overline{\{x \in X \,:\, f(x) \neq 0\}}$ *es acotado y no vacío.*

Proposición 0.3.23. *Sea* X *un espacio de Banach separable. Entonces* X^* *es separable si, y sólo si,* X *admite una función meseta lipschitziana y tiene derivada Fréchet continua.*

Definición 0.3.24. *Sea* S *es un subconjunto convexo de un espacio normado real* X. *Un funcional no nulo,* $\varphi \in X^*$, *es un* ***funcional soporte*** *para* S *y un punto,* $x \in S$, *es un* ***punto soporte*** *de* S *si* $\varphi(x) = \sup\limits_S \varphi$.

Definición 0.3.25. *Sea* X *un espacio de Banach. Un subconjunto* $K \subset X$ *es un* ***cono convexo*** *si* $\lambda K + \mu K = K$, *para todo* $\lambda, \mu > 0$. *Además, si contiene al origen, diremos que es* ***puntiaguado***.

Lema 0.3.26. *(Lema del hiperplano paralelo) Sean* X *un espacio de Banach real,* $f, g \in \mathbb{S}_{X^*}$ *y* $\mathcal{E} > 0$ *tales que* $|f(x)| < \mathcal{E}$ *para cada* $x \in \ker g \cap B_X$. *Entonces, o bien* $\|f - g\| \leq 2\mathcal{E}$, *o bien* $\|f + g\| \leq 2\mathcal{E}$.

Lema 0.3.27. *Sea $z \in \ell_r$, con $1 \leq r < \infty$, y sea $w_i \xrightarrow{w} 0$ en ℓ_r. Entonces:*

$$\mathop{lim\,sup}_{i\to\infty} \|z + w_i\|_r^r = \|z\|_r^r + \mathop{lim\,sup}_{i\to\infty} \|w_i\|_r^r.$$

Teorema 0.3.28. *(Teorema del punto fijo de Schauder) Sea K un subconjunto compacto, convexo y no vacío de un espacio de Banach. Entonces toda función $f\colon K \to K$ continua tiene un punto fijo.*

Proposición 0.3.29. *Sean f una función convexa en un subconjunto abierto convexo de un espacio de Banach X y $x_0 \in X$. Entonces f es continua en x_0 si, y sólo si, f es localmente lipschtziana en x_0.*

Teorema 0.3.30. *Sean X un espacio de Banach y $f\colon X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ una función s.c.i. y convexa. Entonces* $\operatorname{core}(\operatorname{dom}(f)) = int(\operatorname{dom}(f))$.

Teorema 0.3.31. *Sea $d \in X$ y sea $f\colon X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ una función convexa. Si se verifica alguna de estas dos condiciones:*

- $\bar{x} \in \operatorname{core}(\operatorname{dom}(f))$ *y f es s.c.i.*
- $\bar{x} \in \operatorname{cont}(f)$.

Entonces,

$$f'(\bar{x}, d) = \max\{x^*(d) \,:\, x^* \in \partial f(\bar{x})\}.$$

donde $f'(\bar{x}, d) = \lim\limits_{t\to 0^+} \dfrac{f(x+td) - f(x)}{t}$ *es la derivada direccional de f en $\bar{x}$ según el vector d.*

Definición 0.3.32. *Dado un espacio topológico X, se dice que una familia de subconjuntos $\Phi := \{U_i \subset X \,:\, i \in I\}$ es **localmente finita** si, para todo punto $x \in X$, se tiene que existe un abierto $U \ni x$ de X tal que interseca con sólo un número finito de subconjuntos pertenecientes a Φ.*

Definición 0.3.33. *Un espacio topológico se dice que es **paracompacto** si cualquiera de sus recubrimientos por abiertos tiene un refinamiento localmente finito.*

Proposición 0.3.34. *Todo espacio métrico es paracompacto.*

Proposición 0.3.35. *Todo espacio paracompacto es normal.*

Definición 0.3.36. *Sea X un espacio topológico. Una **partición de la unidad** de clase $\mathcal{C}^k$ en X es una familia de funciones de clase $\mathcal{C}^k$, $\{\varphi_i\colon X \to [0,1] \,:\, i \in I\}$, tales que:*

(i) *φ_i está definida en X y sus valores pertenecen a $[0,1]$, para cada $i \in I$;*

(ii) $\{\operatorname{sop}\varphi_i\}_{i\in I}$ *es una familia localmente finita;*

(iii) $\sum\limits_{i\in I} \varphi_i(x) = 1$, *para cada $x \in X$.*

Definición 0.3.37. *Sea $\mathcal{U} = \{U_i : i \in I\}$ un recubrimiento por abiertos de un espacio de Banach X. Decimos que una partición de la unidad, $\{\varphi_i : i \in I\}$ está **subordinada** a $\mathcal{U}$ si para cada $i \in I$, existe $U_i \in \mathcal{U}$ tal que $\operatorname{sop} \varphi_i \subset U_i$.*

Definición 0.3.38. *Decimos que un espacio de Banach X **admite particiones de la unidad** de clase $\mathcal{C}^k$, si para todo recubrimiento $\mathcal{U}$ de abiertos de X, existe una partición de la unidad de clase $\mathcal{C}^k$ subordinada a $\mathcal{U}$.*

Proposición 0.3.39. *Dado un espacio topológico X, son equivalentes:*

- *X es paracompacto.*
- *Para cada recubrimiento abierto $\mathcal{U}$ de X, existe una partición de la unidad localmente finita subordinada a $\mathcal{U}$.*
- *Para cada recubrimiento abierto $\mathcal{U}$ de X, existe una partición de la unidad subordinada a $\mathcal{U}$.*

Para definir los espacios de Sobolev usaremos la notación multi-índice. Dados $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ y una n-tupla, $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, con $\alpha_i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ para cada $i = 1, \ldots, n$, denotaremos:

- $|\alpha| = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i$,
- $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \ldots x_n^{\alpha_n}$, y
- $\partial^\alpha = \dfrac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}}$.

También se necesitan algunos conceptos previos. Dado un conjunto abierto, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$,

- se denota por $\mathcal{D}(\Omega)$ al conjunto de todas las funciones $f\colon \Omega \to \mathbb{K}$ con soporte compacto e infinitamente diferenciables, y
- decimos que una función $g\colon \Omega \to \mathbb{K}$ es la α-ésima derivada parcial en el sentido de las distribuciones de una función $f\colon \Omega \to \mathbb{K}$, si verifica
$$\int_\Omega g\phi dx = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega f \partial^\alpha \phi dx, \text{ para todo } \phi \in \mathcal{D}(\Omega).$$
  Esta función es única y la denotaremos por $g = D^\alpha f$.

Definición 0.3.40. *Usando la notación anterior, decimos que los conjuntos*
$$W^{k,p}(\Omega) := \{f \in L^p(\Omega) : D^\alpha f \in L^p(\Omega), \text{ para todo } |\alpha| \le k\}$$
*son los **espacios de Sobolev**, para $k = 0, 1, \ldots$ y $1 \le p \le +\infty$. Están dotados de la norma*
$$\|f\|_{W^{k,p}(\Omega)} := \begin{cases} \left(\sum\limits_{|\alpha| \le k} \int_\Omega |D^\alpha f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}, & \text{si } 1 \le p < \infty, \\ \max\limits_{|\alpha| \le k} \operatorname*{essup}\limits_{x \in \Omega} |D^\alpha f(x)|, & \text{si } p = +\infty. \end{cases}$$

También se llaman espacios de Sobolev a los conjuntos $W_0^{k,p}$*, que se definen como la clausura de* $\mathcal{D}(\Omega)$ *con la norma* $\|\cdot\|_{W^{k,p}(\Omega)}$.

Algunas propiedades de los espacios de Sobolev son:

- $W^{k,p}(\Omega)$ es un subespacio vectorial de $L^p(\Omega)$ y $(W^{k,p}(\Omega), \|\cdot\|_{W^{k,p}(\Omega)})$ es un espacio de Banach.
- Si $k = 0$, entonces $W^{0,p}(\Omega) = L^p(\Omega)$.
- Si $1 \leq p < \infty$, $W^{k,p}(\Omega)$ es separable y, si $1 < p < \infty$, $W^{k,p}(\Omega)$ es reflexivo.
- Si $p = 2$, se denota $H^k(\Omega) := W^{k,2}(\Omega)$ y es espacio de Hilbert con el producto interior
$$\langle f, g\rangle_{H^k(\Omega)} := \langle D^\alpha f, D^\alpha g\rangle_{L^2(\Omega)}.$$
Análogamente, se denota $H_0^k(\Omega) := W_0^{k,2}(\Omega)$.

Definición 0.3.41. *Dados un conjunto abierto y acotado* $U \subset \mathbb{R}^n$ *y* $k \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$*, decimos que* U ***tiene frontera*** $\mathcal{C}^k$ *si para todo punto de su frontera,* $x \in \partial U$*, existe* $\rho > 0$ *y una función de clase* $\mathcal{C}^k$, $\gamma\colon \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}$*, tales que (renombrando y reorientando las coordenadas si es necesario)*
$$U \cap B_\rho(x) = \{x \in B_\rho(x) \,:\, x_n > \gamma(x_1, \ldots, x_{n-1})\}.$$
Igualmente, se dice que ∂U *es analítica si en la definición anterior* γ *es analítica.*

Definición 0.3.42. *Sean* $(X, \|\cdot\|_X)$ *y* $(Y, \|\cdot\|_Y)$ *dos espacios normados tales que* $X \subset Y$*. Si la aplicación* $i\colon X \to Y$ *tal que* $i(x) = x$ *es continua diremos que* $X \subset Y$ *es una* ***inclusión continua*** *y se denotará por* $X \hookrightarrow Y$*. Si además* i *es compacta, diremos que* $X \hookrightarrow Y$ *es una* ***inclusión compacta****.*

Teorema 0.3.43. *(Inclusiones de Sobolev) Sea* Ω *un abierto de* $\mathbb{R}^n$ *con frontera* $\mathcal{C}^1$ *y denotemos el conjugado de* p *por* $p^* := \dfrac{np}{n-p}$*. Se verifican las siguientes condiciones:*

- *si* $1 \leq p < n$*, entonces la inclusión* $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ *es continua para todo* $1 \leq q \leq p^*$,
- *si* $p = n$*, entonces la inclusión* $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ *es continua para todo* $1 \leq q < \infty$*, y*
- *si* $p > n$*, entonces la inclusión* $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^\infty(\Omega)$ *es continua.*

Teorema 0.3.44. *(Rellich-Kondrachov) Con las mismas hipótesis del teorema anterior, se verifica también que*

- *si* $1 \leq p < n$*, se tiene además que* $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ *es una inclusión compacta para todo* $1 \leq q < p^*$.

Proposición 0.3.45. *Sean* Ω *un abierto de* $\mathbb{R}^n$ *y* $1 \leq p \leq +\infty$*, entonces la inclusión* $W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$ *es compacta. Además, si* Ω *tiene frontera* $\mathcal{C}^1$*, entonces la inclusión* $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$ *es compacta.*

Lema 0.3.46. *Sea* Ω *un abierto de* $\mathbb{R}^n$ *y sea* $2 < p < +\infty$*. Entonces, la función* $\psi\colon L^p(\Omega) \to \mathbb{R}$ *dada por* $\psi(u) := \displaystyle\int_\Omega |u|^p$*, tiene derivada Fréchet y viene dada por* $\psi'(u)(h) = p\displaystyle\int_\Omega |u|^{p-2}uh$*.*

Capítulo 1

Principios variacionales clásicos

En 1972, Ivar Ekeland publicó en [Eke1] un principio variacional (P.V.) que posteriormente daría lugar a multitud de aplicaciones en muchas ramas de las matemáticas: análisis matemático, matemática aplicada, matemáticas financieras, geometría diferencial, ... La prueba original del P.V. de Ekeland está inspirada en la del Teorema de Bishop-Phelps [BiPh, 1961], en la cual se usa el Lema de Zorn. Estudiaremos pruebas alternativas de algunos teoremas conocidos que se realizan gracias a este resultado como el propio Teorema de Bishop-Phelps (son resultados equivalentes), el Teorema del Paso de la Montaña (1973) o el Teorema del Punto Fijo de Banach (1922) y algunos teoremas que lo generalizan como el Refinamiento de Clarke (1978). Además, M. Fabian probó que el P.V. de Ekeland puede deducirse del Teorema de Bishop-Phelps, probando así la equivalencia de ambos resultados. También cabe mencionar que nos permitirá caracterizar la completitud de los espacios métricos.

Posteriormente a este teorema, en 1978, Charles P. Stegall publicó en [Ste1] otro principio variacional muy usado. Este resultado tiene la ventaja de que la función de perturbación que emplea es lineal, sin embargo, necesita que se verifique la propiedad de Radon-Nikodym para poder usarlo. Nos permitirá caracterizar los puntos fuertemente expuestos y los funcionales que exponen fuertemente a conjuntos que verifican ciertas condiciones. También nos permitirá dar una prueba alternativa del clásico Teorema de Pitt, el cual se suele probar utilizando la teoría de bases de Schauder.

En 1987, J. M. Borwein y D. Preiss probaron un P.V. suave, denominado así porque devuelve una función de perturbación que es diferenciable si la norma del espacio de Banach donde se trabaja también es diferenciable. Este resultado tiene muchas aplicaciones para la diferenciabilidad y subdiferenciabilidad de funciones convexas. En 1993, Robert Deville, Gilles Godefroy y Václav Zizler publicaron otro P.V. suave con muchas aplicaciones. Veremos algunas de éstas y estudiaremos algunos resultados sobre soluciones de viscosidad para las ecuaciones de Hamilton-Jacobi.

1.1. Principio variacional de Ekeland

El Principio variacional (P.V.) de Ekeland lo probó el matemático francés Ivar Ekeland en un artículo publicado en francés por la Academia de Ciencias de París en 1972, [Eke1]. Dos años más tarde, se publicó en inglés por la revista *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, [Eke2]. Lo que afirma es que, dada una función semicontinua inferiormente definida en un espacio métrico completo con valores en $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ y un punto cercano a su ínfimo, entonces admite perturbaciones arbitrariamente pequeñas (por traslaciones de la norma) que hacen que dicho punto funcione como un mínimo. Teniendo en cuenta que estas funciones no alcanzan un mínimo necesariamente, este resultado nos da muchas aplicaciones a distintos campos.

Geométricamente, podemos interpretar este resultado de la siguiente manera: dado $\mathcal{E} > 0$ podemos encontrar un punto x_1 en el cual el valor de la función está cerca del ínfimo y el grafo de f está por encima del cono cerrado $K_{\mathcal{E},x_1} := \{(x,t) \in X \times \mathbb{R} \,:\, t \leq -\mathcal{E}d(x,x_1)\}$.

1.1.1. Resultado principal

<u>Teorema</u> 1.1.1. *(Principio variacional de Ekeland, 1972) [Eke1], [Eke2] (véase también [FHHMZ]). Sea (X,d) un espacio métrico completo y $\varphi\colon X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ una función propia, s.c.i. y acotada inferiormente. Sean $\delta > 0$ y $\mathcal{E} > 0$. Si $x_0 \in X$ verifica $\varphi(x_0) < \inf_X \varphi + \dfrac{\delta}{2}$, entonces existe $x_1 \in X$ tal que*

1. $\varphi(x_1) + \mathcal{E}d(x_0,x_1) \leq \varphi(x_0)$;
2. $d(x_1,x_0) \leq \dfrac{\delta}{\mathcal{E}}$;
3. $\varphi(x_1) - \mathcal{E}d(x,x_1) < \varphi(x)$, *para todo* $x \in X \backslash \{x_1\}$.

<u>Demostración:</u>
Haremos la prueba para el caso en que X sea un espacio de Banach (para espacios métricos completos se prueba de forma similar). Sea $K_{\mathcal{E}} := \{(x,t) \in X \times \mathbb{R} \,:\, t \leq -\mathcal{E}d(x,0)\}$ un cono cerrado. Definiremos por inducción una sucesión $\{y_n\}_{n=0}^{\infty} \subset X$ que converge a x_1. Sean

$$E_0 := \operatorname{epi}(\varphi) \cap \Big(\big(x_0, \varphi(x_0)\big) + K_{\mathcal{E}}\Big),\ y_0 := x_0 \ \text{ y } \ b_0 := \{t \in \mathbb{R} \,:\, (x,t) \in E_0\}.$$

Elegimos $y_1 \in X$ tal que $\big(y_1, \varphi(y_1)\big) \in \big(y_0, \varphi(y_0)\big) + K_{\mathcal{E}}$ y $\varphi(y_1) < b_0 + \dfrac{\delta}{2^2}$. Sea

$$E_n := \operatorname{epi}(\varphi) \cap \Big(\big(y_n, \varphi(y_n)\big) + K_{\mathcal{E}}\Big) \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

En general, definido y_n, elegimos $y_{n+1} \in X$ tal que $\big(y_{n+1}, \varphi(y_{n+1})\big) \in \big(y_n, \varphi(y_n)\big) + K_{\mathcal{E}}$ y $\varphi(y_{n+1}) < b_n + \dfrac{\delta}{2^{n+2}}$, donde $b_n := \text{ínf}\{t \in \mathbb{R} : (x,t) \in E_n\}$.
Por construcción, tenemos que $\big(y_{n+1} - y_n, \varphi(y_{n+1}) - \varphi(y_n)\big) \in K_{\mathcal{E}}$, para todo $n \geq 0$. Entonces $\varphi(y_{n+1}) - \varphi(y_n) \leq -\mathcal{E}d(y_{n+1}, y_n)$ o, equivalentemente

$$\varphi(y_n) - \varphi(y_{n+1}) \geq \mathcal{E}d(y_{n+1}, y_n) \geq 0, \text{ para todo } n \geq 0. \tag{1.1}$$

Luego

$$\varphi(y_n) \geq \varphi(y_{n+1}), \text{ para todo } n \geq 0. \tag{1.2}$$

También tenemos por construcción que $\big(y_{n+1}, \varphi(y_{n+1})\big) \in \big(y_n, \varphi(y_n)\big) + K_{\mathcal{E}}$, para todo $n \geq 0$. Entonces $\big(y_{n+1}, \varphi(y_{n+1})\big) + K_{\mathcal{E}} \subset \big(y_n, \varphi(y_n)\big) + K_{\mathcal{E}} + K_{\mathcal{E}} = \big(y_n, \varphi(y_n)\big) + K_{\mathcal{E}}$, lo que implica que $E_{n+1} \subset E_n$ y, por tanto,

$$b_n \leq b_{n+1}, \text{ para } n \geq 0. \tag{1.3}$$

Luego, como $\varphi(y_n) \in E_n$, se tiene que $b_n \leq \varphi(y_n)$, para todo $n \geq 1$. Entonces

$$b_n \underset{(1.3)}{\leq} b_{n+1} \leq \varphi(y_{n+1}) \underset{(1.2)}{\leq} \varphi(y_n) \leq b_{n-1} + \frac{\delta}{2^{n+1}} \underset{(1.3)}{\leq} b_{n+1} + \frac{\delta}{2^{n+1}}, \text{ para todo } n \geq 1.$$

Por consiguiente, $0 \leq \varphi(y_n) - \varphi(y_{n+1}) \leq b_{n+1} - \varphi(y_{n+1}) + \dfrac{\delta}{2^{n+1}} \leq \dfrac{\delta}{2^{n+1}}$, para todo $n \geq 1$. Como $\mathcal{E}d(y_{n+1}, y_n) \leq \varphi(y_n) - \varphi(y_{n+1}) \leq \dfrac{\delta}{2^{n+1}}$, entonces $d(y_{n+1}, y_n) \leq \dfrac{\delta}{\mathcal{E}2^{n+1}}$, para todo $n \geq 1$. Por tanto, $\{y_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$ es convergente, pues es de Cauchy y X es completo.

Llamemos $x_1 := \lim\limits_{n\to\infty} y_n$ y veamos que este punto verifica las tesis del teorema.
1. Como $\varphi(y_{n+1}) \leq \varphi(y_n)$ y φ es s.c.i., entonces $\varphi(x_1) \leq \lim\limits_{n\to\infty} \varphi(y_n) \leq \varphi(y_0) = \varphi(x_0)$. Además, por (1.1), $\varphi(x_0) - \varphi(y_n) = \varphi(y_0) - \varphi(y_1) + \varphi(y_1) - \varphi(y_2) + \ldots - \varphi(y_{n-1}) + \varphi(y_n) \geq \mathcal{E}(d(y_0, y_1) + d(y_1, y_2) + \ldots + d(y_{n-1}, y_n)) \geq \mathcal{E}d(x_0, y_n)$, para todo $n \geq 0$. Luego si $n \to \infty$, entonces por continuidad, $\varphi(x_0) - \varphi(x_1) \geq \mathcal{E}d(x_1, x_0)$.

2. $d(y_n, y_{n+1}) \leq \dfrac{\varphi(y_n) - \varphi(y_{n+1})}{\mathcal{E}} \leq \dfrac{\delta}{\mathcal{E}2^{n+1}}$, para todo $n \geq 0$. En consecuencia, $d(y_n, x_0) = d(y_0, y_n) \leq d(y_0, y_1) + d(y_1, y_2) + \ldots + d(y_{n-1}, y_n) \leq \frac{\delta}{\mathcal{E}}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^n}\right) = \frac{\delta}{\mathcal{E}}\left(\dfrac{\frac{1}{2} - \frac{1}{2^{n+1}}}{\frac{1}{2}}\right) = \frac{\delta}{\mathcal{E}}\left(1 - \frac{1}{2^n}\right)$. Así, tomando $n \to \infty$, como $y_n \to x_1$, se tiene que $d(x_1, x_0) \leq \dfrac{\delta}{\mathcal{E}}$.

3. De forma análoga que antes, dados $n, k \geq 1$, obtenemos que $\big((y_{n+k}, \varphi(y_{n+k}))\big) \in \big(y_n, \varphi(y_n)\big) + K_{\mathcal{E}}$. Entonces $\varphi(y_{n+k}) - \varphi(y_n) \leq -\mathcal{E}d(y_{n+k}, y_n)$ y como φ es s.c.i., $\varphi(x_1) - \varphi(y_n) \leq \lim\limits_{j\to\infty} \varphi(y_j) - \varphi(y_n) \leq$

$-\mathcal{E}d(x_1,x_n)$. Luego $\big(x_1,\varphi(x_1)\big)\in\big(y_n,\varphi(y_n)\big)+K_{\mathcal{E}},$ para todo $n\geq 0$ y, por tanto,

$$\big(x_1,\varphi(x_1)\big)+K_{\mathcal{E}}\subset\big(y_n,\varphi(y_n)\big)+K_{\mathcal{E}}+K_{\mathcal{E}}=\big(y_n,\varphi(y_n)\big)+K_{\mathcal{E}},\ \text{para todo } n\geq 0.$$

Falta ver que para todo $x\in X, x\neq x_1$, se tiene que $(x,\varphi(x))\notin\big(x_1,\varphi(x_1)\big)+K_{\mathcal{E}}$, lo cual implicaría que $\big(x-x_1,\varphi(x)-\varphi(x_1)\big)\notin K_{\mathcal{E}}$ y, por tanto, $\varphi(x)-\varphi(x_1)>-\mathcal{E}d(x,x_1)$. Si existe $\tilde{x}\in X$ tal que $(\tilde{x},\varphi(\tilde{x}))\in\big(x_1,\varphi(x_1)\big)+K_{\mathcal{E}}$, entonces $\big(\tilde{x},\varphi(\tilde{x})\big)\in\big(y_n,\varphi(y_n)\big)+K_{\mathcal{E}},$ para todo $n\geq 0$.

Luego $\varphi(\tilde{x})-\varphi(y_n)\leq-\mathcal{E}d(\tilde{x},y_n)$, o equivalentemente, $\varphi(y_n)-\varphi(\tilde{x})\geq\mathcal{E}d(\tilde{x},y_n)\geq 0$. Así, $\varphi(y_n)\geq\varphi(\tilde{x}),$ para todo $n\geq 0$. Entonces $b_n\leq\varphi(\tilde{x})\leq\varphi(y_n)\leq b_{n-1}+\dfrac{\delta}{2^{n+1}}\underset{(1.3)}{\leq} b_n+\dfrac{\delta}{2^{n+1}},$ para todo $n\geq 1$. Y haciendo $n\to\infty$, se obtiene que $\varphi(\tilde{x})=\varphi(x_1)$. Por tanto, $0=\varphi(\tilde{x})-\varphi(x_1)\leq-\mathcal{E}d(x_1,\tilde{x})$ y $\tilde{x}=x_1$. $\square$

1.1.2. Aplicaciones geométricas

En esta subsección estudiaremos algunas consecuencias geométricas del P.V. de Ekeland y otros teoremas muy conocidos dentro del análisis funcional.

Corolario 1.1.2. *(Sucesiones minimizantes de Palais-Smale) [FHHMZ].*
Dado X un espacio de Banach y $\varphi\colon X\to\mathbb{R}$ una función continua, Gâteaux diferenciable y acotada inferiormente. Entonces existe $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}\subset X$ tal que $\lim_{n\to\infty}\varphi(x_n)=\inf_{x\in X}\varphi(x)$ y $\lim_{n\to\infty}\|D\varphi(x_n)\|=0$.

Demostración:
Sean $\delta_n=\mathcal{E}_n:=\frac{1}{n}>0$. Para cada $n\in\mathbb{N}$, escogemos $y_n\in X$ tal que $\varphi(y_n)\leq\inf_X\varphi+\dfrac{\delta_n}{2}=\inf_X\varphi+\dfrac{1}{2n}$. Aplicando el P.V. de Ekeland, existe $x_n\in X$ tal que

$$\|y_n-x_n\|\leq\frac{\delta_n}{\mathcal{E}_n}=1,$$

$$\varphi(x_n)\leq\varphi(x)+\mathcal{E}_n\|x-x_n\|=\varphi(x)+\frac{1}{n}\|x-x_n\|,\ x\in X. \tag{1.4}$$

Eligiendo $x=y_n$ en (1.4), tenemos que

$$\varphi(x_n)\leq\varphi(y_n)+\frac{1}{n}\|y_n-x_n\|\leq\varphi(y_n)+\frac{1}{n}\leq\inf_X\varphi+\frac{3}{2n}.$$

Consideremos la sucesión constante (a_n) tal que $a_n:=\inf_X\varphi$ y la sucesión (b_n) tal que $b_n:=\inf_X\varphi+\dfrac{3}{2n}$. Tenemos que $\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}b_n=\inf_X\varphi$ y, como $a_n\leq\varphi(x_n)\leq b_n$, entonces $\lim_{n\to\infty}\varphi(x_n)=\inf_X\varphi$.

Si escogemos $x:=x_n-th$ en (1.4), donde $t>0$ y $\|h\|\leq 1$, tenemos que $\varphi(x_n)\leq\varphi(x_n-th)+\frac{1}{n}\|-th\|$, luego $\varphi(x_n) - \varphi(x_n - th) \leq \frac{t}{n}\|h\|$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Entonces $-\frac{\varphi(x_n-th)-\varphi(x_n)}{t} \leq \frac{\|h\|}{n}$ y, por tanto, $-\lim\limits_{t\to 0^+} \dfrac{\varphi(x_n - th) - \varphi(x_n)}{t} \leq \dfrac{\|h\|}{n}$. Haciendo el cambio de variable $t = -\tilde{t}$, tenemos que:

$$-\lim_{\tilde{t}\to 0^-} \frac{\varphi(x_n + \tilde{t}h) - \varphi(x_n)}{-\tilde{t}} = \lim_{\tilde{t}\to 0^-} \frac{\varphi(x_n + \tilde{t}h) - \varphi(x_n)}{\tilde{t}} \leq \frac{\|h\|}{n}.$$

Como φ es Gâteaux diferenciable, entonces el límite (lateral) anterior coincide con $D\varphi(x_n)(h)$. Por tanto, $D\varphi(x_n)(h) \leq \frac{\|h\|}{n}$ y, como $D\varphi(x_n)$ es lineal, $D\varphi(x_n)\left(\frac{h}{\|h\|}\right) \leq \frac{1}{n}$, para todo $n \in \mathbb{N}$ y para todo $\|h\| \leq 1$. En particular, se verifica la desigualdad anterior cambiando h por $-h$. Así $D\varphi(x_n)\left(\frac{-h}{\|-h\|}\right) = -D\varphi(x_n)\left(\frac{h}{\|h\|}\right) \leq \frac{1}{n}$ o, equivalentemente, $D\varphi(x_n)\left(\frac{h}{\|h\|}\right) \geq -\frac{1}{n}$. Por tanto,

$$-\frac{1}{n} \leq D\varphi(x_n)\left(\frac{h}{\|h\|}\right) \leq \frac{1}{n}.$$

Sea $\tilde{h} := \frac{h}{\|h\|}$. Entonces $\left|D\varphi(x_n)(\tilde{h})\right| \leq \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$, donde $\|\tilde{h}\| = 1$. Luego $\|D\varphi(x_n)\| = \sup\limits_{\|\tilde{h}\|=1} |D\varphi(x_n)(\tilde{h})| \leq \dfrac{1}{n}$. En consecuencia, $\lim\limits_{n\to\infty} \|D\varphi(x_n)\| \leq \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} = 0$ y, por tanto, $\lim\limits_{n\to\infty} \|D\varphi(x_n)\| = 0$. $\square$

En 1958, el norteamericano Victor Klee planteó la siguiente pregunta: ¿todo subconjunto cerrado, convexo y acotado de un espacio de Banach debe tener un punto soporte? En 1961, los americanos Errett Bishop y Robert Ralph Phelps probaron que la conjetura de Klee era cierta en espacios de Banach reales y también para la bola unidad de espacios de Banach complejos (si S es un subconjunto de un espacio de Banach complejo X, diremos que $\varphi \in X^*\backslash\{0\}$ es un funcional soporte para S y $x \in S$ es un punto soporte de S si verifican que $|\varphi(x)| = \sup\limits_{y\in S} |\varphi(y)|$).

Teorema 1.1.3. *(Bishop-Phelps, 1961) [BiPh] (véase también [FHHMZ]).*
Sean X un espacio de Banach real y $\emptyset \neq C \subset X$ cerrado, convexo y acotado. Entonces el conjunto de funciones continuas y lineales que alcanzan su máximo en C es denso en X^*. En particular, el conjunto de funciones continuas y lineales que alcanzan su norma (i.e., un máximo en B_X) es denso en X^*.

Demostración:
Sean $f \in X^*$ y $\mathcal{E} > 0$ arbitrarios. Definimos $\tilde{f}\colon X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ tal que

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} -f(x), & \text{si } x \in C \\ +\infty, & \text{si } x \notin C \end{cases}.$$

Nótese que $\tilde{f}$ está acotada inferiormente, ya que C es acotado y $f \in X^*$. Además, $\tilde{f}$ es s.c.i., porque dado $r \in \mathbb{R}$, $\{x \in X : \tilde{f}(x) \leq r\} = C \cap \{x \in X : -f(x) \leq r\}$ es cerrado por ser intersección de cerrados ($\{x \in X : -f(x) \leq r\}$ es cerrado por ser $-f$ continua). Por el P.V. de Ekeland, existe $x_1 \in X$ tal que $\tilde{f}(x_1) - \mathcal{E}\|x - x_1\| < \tilde{f}(x)$, para todo $x \in X \backslash \{x_1\}$. Por tanto, $x_1 \in C$ por como hemos definido $\tilde{f}$, luego

$$f(x_1) + \mathcal{E}\|x - x_1\| > f(x), \; x \in C \backslash \{x_1\}. \tag{1.5}$$

Definimos los siguientes conjuntos cerrados y convexos:

- $K_1 := \{(x,t) \in X \times \mathbb{R} : x \in C \text{ y } t \leq f(x)\}$.
- $K_2 := \{(x,t) \in X \times \mathbb{R} : x \in X \text{ y } t \geq f(x_1) + \mathcal{E}\|x - x_1\|\}$. Nótese que su interior es $\mathring{K}_2 = \{(x,t) \in X \times \mathbb{R} : x \in X \text{ y } t > f(x_1) + \mathcal{E}\|x - x_1\|\} \neq \emptyset$.

Entonces, $K_1 \cap \mathring{K}_2 = \emptyset$ y $K_1 \cap K_2 = \{(x_1, f(x_1))\}$ (por (1.5)). Aplicando el Teorema de Hahn-Banach, obtenemos que existe $(g,r) \in (E \times \mathbb{R})^* = E^* \times \mathbb{R}$, con $g \not\equiv 0$, de forma que, para $\beta := g(x_1) + rf(x_1)$,

$$g(x) + rt \leq \beta, \text{ si } (x,t) \in K_1, \tag{1.6}$$

$$g(x) + rt \geq \beta, \text{ si } (x,t) \in K_2. \tag{1.7}$$

Se tiene que $r > 0$. En efecto, si $r < 0$, tenemos que $g(x) + rt \geq \beta$ para todo $(x,t) \in K_2$. Pero entonces,

$$g(x) + rt \underset{t \to \infty}{\longrightarrow} -\infty \geq \beta,$$

lo cual es imposible. Si $r = 0$, entonces $g(x) \geq \beta$, para todo $x \in X$. Fijado $x_0 \in X$, tenemos que $g(x_0) \geq \beta$ y $g(-x_0) = -g(x_0) \geq \beta$. Luego $g \equiv 0$ y, por tanto, $(g,r) \equiv 0$, lo cual es imposible. Así, podemos definir $h := \frac{1}{r} g$ y dividiendo las ecuaciones (1.6) y (1.7), obtenemos que

$$h(x) + t \leq \frac{\beta}{r} = h(x_1) + f(x_1), \text{ si } (x,t) \in K_1, \tag{1.8}$$

$$h(x) + t \geq \frac{\beta}{r} = h(x_1) + f(x_1), \text{ si } (x,t) \in K_2. \tag{1.9}$$

Si $x \in C$, entonces $(x, f(x)) \in K_1$ y $h(x) + f(x) \leq h(x_1) + f(x_1)$. Luego $h + f$ tiene un máximo en C. Falta ver que $\|h\| \leq \mathcal{E}$. Dado $x \in X$, entonces $(x, f(x_1) + \mathcal{E}\|x - x_1\|) \in K_2$ y, por (1.9),

$$h(x) + f(x_1) + \mathcal{E}\|x - x_1\| \geq h(x_1) + f(x_1).$$

Luego $h(x_1 - x) \leq \mathcal{E}\|x_1 - x\|$ y, por tanto, $\|h\| \leq \mathcal{E}$. $\square$

En 1977, el belga Jean Bourgain probó que el resultado era válido para espacios de Banach complejos que tuvieran la propiedad de Radon-Nikodym (definición (1.3.3)), considerando que las funciones alcanzan su máximo en módulo. La pregunta natural era si el resultado seguía siendo válido sin esta propiedad, pero, en 2000, el ruso Victor Lomonosov dio un contraejemplo para espacios de Banach complejos en general en [Lo]. Veamos una extensión muy importante del Teorema de Bishop-Phelps, probado en 1970 por el húngaro Béla Bollobás en [Boll].

Teorema 1.1.4. *(Teorema de Bishop-Phelps-Bollobás, 1970) [Boll]*
Sea X un espacio de Banach y sean $x_0 \in \mathbb{S}_X$, $f_0 \in \mathbb{S}_{X^*}$ y $|f_0(x_0) - 1| \leq \delta := \dfrac{\mathcal{E}^2}{4}$ $(0 < \mathcal{E} < 1)$. Entonces existen $x_1 \in \mathbb{S}_X$ y $f_1 \in \mathbb{S}_{X^*}$ tales que $f_1(x_1) = 1$, $\|f_0 - f_1\| \leq \mathcal{E}$ y $\|x_0 - x_1\| < \mathcal{E}$.

Demostración:
Como las funciones lineales están determinadas por sus partes reales y la aplicación $f \to Re\, f$ es una isometría, podemos suponer que X es un espacio de Banach real. Definimos

$$k := \left(1 + \frac{2}{\mathcal{E}}\right) \frac{1}{f_0(x_0)}.$$

Sea la relación binaria $\mathcal{R}$ sobre B_X tal que $x\mathcal{R}y \Leftrightarrow \|x - y\| \leq kf_0(y - x)$. Veamos que es una relación de orden, dados $x, y, z \in B_X$:

- Reflexiva: $x\mathcal{R}x$ ya que $\|x - x\| = 0 \leq kf_0(x - x) = 0$.
- Antisimétrica: Si $x\mathcal{R}y$ e $y\mathcal{R}x$, entonces $kf_0(y - x) \geq \|x - y\| \leq kf_0(x - y)$, luego $x = y$.
- Transitiva: Si $x\mathcal{R}y$ e $y\mathcal{R}z$, entonces $\|x - z\| \leq \|x - y\| + \|y - z\| \leq kf_0(z - x)$, luego $x\mathcal{R}z$.

Sean $B_0 := \{x \in B_X \,:\, x_0\mathcal{R}x\}$ y K una cadena arbitraria de $(B_0, \mathcal{R})$. Como la red $\{f_0(x) \,:\, x \in (K, \mathcal{R})\}$ está acotada y es creciente, por como hemos definido $\mathcal{R}$ converge a su supremo y además es una red de Cauchy. Como X es Banach, la red converge a un punto $y \in B_X$, el cual será una cota superior para K. Como K es arbitrario, aplicando el Lema de Zorn, existe un maximal x_1 de $(B_0, \mathcal{R})$. En particular, como $x_0\mathcal{R}x_1$,

$$\|x_0 - x_1\| \leq kf_0(x_1 - x_0) \leq k(1 - f_0(x_0)) \leq k\delta \leq \left(1 + \frac{2}{\mathcal{E}}\right) \frac{1}{1 - \delta}\delta = \frac{\mathcal{E}}{2 - \mathcal{E}} < \mathcal{E}.$$

Sean los conjuntos

$$C := \frac{2}{\mathcal{E}} B_X \cap \ker f_0$$

y

$$\begin{aligned} D := \operatorname{conv}(B_X \cup C) &= \{ty + (1 - t)z \,:\, y, z \in B_X \cup C,\ 0 \leq t \leq 1\} \\ &= \{ty + (1 - t)z \,:\, y \in B_X, z \in C,\ 0 \leq t \leq 1\}. \end{aligned}$$

Veamos que $x_1 \notin int\, D$. Si no fuera así, existirían $y_1 \in B_X$, $z_1 \in C$, $0 < s < t < 1$ tales que $x_1 = sy_1 + (t - s)z_1$. Como $f_0(x_0) > 0$ y $x_0\mathcal{R}x_1$ entonces $f_0(x_0) \leq f_0(x_1) = sf_0(y_1) + (t - s)f_0(z_1) = sf_0(y_1) < f_0(y_1)$. Por tanto, $f_0(x_0) < f_0(y_1)$, luego

$$f_0(y_1 - x_1) = (1 - s)f_0(y_1) > (1 - s)f_0(x_0) > 0. \tag{1.10}$$

Así,

$$\|y_1 - x_1\| \leq (1-s) + (t-s)\frac{2}{\mathcal{E}} < (1-s)\left(1 + \frac{2}{\mathcal{E}}\right) = k(1-s)f_0(x_0) \underset{(1.10)}{\leq} kf_0(y_1 - x_1).$$

Luego $x_1 \mathcal{R} y_1$ y al ser x_1 un maximal, se tiene que $x_1 = y_1$, lo que contradice (1.10). Por tanto, $x_1 \notin int\, D$. Por otro lado, como $int\, D \neq \emptyset$, por el Teorema de Hahn-Banach existe $f_1 \in \mathbb{S}_{X^*}$ tal que

$$\sup_D f_1 = f_1(x_1).$$

Tenemos que $x_1 \in B_X$, luego $1 = \sup_{B_X} f_1 \leq \sup_D f_1 = f_1(x_1) \leq 1$ y, consecuentemente, $f_1(x_1) = 1 = \|x_1\|$. Como $f_1(x) \leq 1$, para todo $x \in C = \frac{2}{\mathcal{E}} B_X \cap \ker f_0$, podemos aplicar el Lema del hiperplano paralelo (Lema 0.3.26) obteniendo, o bien que $\|f_0 + f_1\| \leq \mathcal{E}$, o bien que $\|f_0 - f_1\| \leq \mathcal{E}$. El primer caso no puede darse ya que al ser $\mathcal{E} < 1$,

$$\|f_0 + f_1\| \geq (f_0 + f_1)(x_1) = 2 + (f_0 - f_1)(x_1) \geq 2 - \|f_0 - f_1\| \geq 2 - \mathcal{E} > \mathcal{E}.$$

En consecuencia, $\|f_0 - f_1\| \leq \mathcal{E}$. $\square$

Observación 1.1.5. *El Teorema anterior es óptimo en el sentido de que no se pueden mejorar las constantes que se usan. Para cada $0 < \mathcal{E} < 1$, existen un espacio de Banach X, un punto $x \in \mathbb{S}_X$ y un funcional $f \in \mathbb{S}_{X^*}$ tales que $f(x) = 1 - \frac{\mathcal{E}^2}{2}$, pero si $y \in \mathbb{S}_X$, $g \in \mathbb{S}_{X^*}$ y $g(y) = 1$, entonces $\|f - g\| \geq \mathcal{E}$ o $\|x - y\| \geq \mathcal{E}$.*

Demostración:
Transformemos $\mathbb{R}^2$ en un espacio de Banach real mediante la siguiente bola unidad,

$$B := \{(x,y) \,:\, -1 \leq x + (1-\mathcal{E})y \leq 1, -1 \leq y \leq 1\}. \tag{1.11}$$

Consideremos la siguiente función f definida en B tal que

$$f(x,y) = \frac{\mathcal{E}}{2}x + \left(1 - \frac{\mathcal{E}^2}{2}\right)y = \frac{\mathcal{E}}{2}(x + (1-\mathcal{E})y) + \left(1 - \frac{\mathcal{E}}{2}\right)y.$$

Por un lado,

$$f(x,y) \underset{(1.11)}{\leq} \frac{\mathcal{E}}{2} + \left(1 - \frac{\mathcal{E}}{2}\right)y \underset{(1.11)}{\leq} \frac{\mathcal{E}}{2} + \left(1 - \frac{\mathcal{E}}{2}\right) = 1.$$

Por otro lado,

$$f(x,y) \underset{(1.11)}{\geq} -\frac{\mathcal{E}}{2} + \left(1 + \frac{\mathcal{E}}{2}\right)y \underset{(1.11)}{\geq} -\frac{\mathcal{E}}{2} - \left(1 - \frac{\mathcal{E}}{2}\right) = -1.$$

Por tanto, $\|f\| \leq 1$. Además, como $f(\mathcal{E}, 1) = 1$, entonces $\|f\| = 1$. Escojamos $x = (0,1)$, así $f(x) = 1 - \frac{\mathcal{E}^2}{2}$. Dada $g \in \mathbb{S}_{X^*}$ tal que $\|f - g\| < \mathcal{E}$, entonces, por el Teorema de Bishop-Phelps-Bollobás,

g debe alcanzar su supremo en el mismo punto que f, en $(\mathcal{E}, 1)$, luego $\|(0,1) - (\mathcal{E}, 1)\| = \mathcal{E}$. Así, para cada $y \in \mathbb{S}_X$ tal que $g(y) = 1$, se tiene que $\|x - y\| \geq \mathcal{E}$. $\square$

A continuación, veremos un teorema importante sobre la subdiferenciabilidad de funciones convexas. Cabe destacar que en 1983, M. Fabian probó en [Fa] que el P.V. de Ekeland y el siguiente teorema pueden deducirse a partir del Teorema de Bishop-Phelps, probando que ambos resultados son equivalentes.

Teorema 1.1.6. *(Teorema de Brϕndsted-Rockafellar, 1965) [BrRo] (véase también [Phe]).*
Sean X un espacio de Banach y $f\colon X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ una función s.c.i. y convexa. Entonces, dado un punto $x_0 \in \operatorname{dom}(f)$, $\mathcal{E} > 0$, $\lambda > 0$ y $x_0^* \in \partial_{\mathcal{E}} f(x_0)$, existen $x \in \operatorname{dom}(f)$ y $x^* \in X^*$ tales que

(a) $x^* \in \partial f(x)$;

(b) $\|x - x_0\| \leq \dfrac{\mathcal{E}}{\lambda}$;

(c) $\|x^* - x_0^*\| \leq \lambda$.

En particular, $\operatorname{dom}(\partial f)$ *es denso en* $\operatorname{dom}(f)$.

Demostración:
Se verifica que $x_0^*(x - x_0) \leq f(x) - f(x_0) + \mathcal{E}$, para todo $x \in X$, ya que $x_0^* \in \partial_{\mathcal{E}} f(x_0)$. Sea $g\colon X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ una función dada por

$$g(x) = f(x) - x_0^*(x), \text{ para todo } x \in X.$$

Tenemos que g es propia, s.c.i. y $\operatorname{dom}(g) = \operatorname{dom}(f)$. Además, como de la desigualdad anterior se tiene que $(f - x_0^*)(x_0) \leq (f - x_0^*)(x) + \mathcal{E}$, para todo $x \in X$, entonces $g(x_0) \leq \inf\limits_X g + \mathcal{E}$. Aplicando el P.V. de Ekeland a g, obtenemos un punto $z \in X$ tal que

(1) $g(z) + \lambda\|x_0 - z\| \leq g(x_0)$;

(2) $\|z - x_0\| \leq \dfrac{\mathcal{E}}{\lambda}$;

(3) $g(x) + \lambda\|x - z\| \geq g(z)$, para todo $x \in X$.

Sea $h\colon X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ una función continua definida por

$$h(x) = \lambda\|x - z\|, \text{ para todo } x \in X.$$

La desigualdad (3) y el Teorema 0.3.11 implican que $0 \in \partial(g + h)(z) = \partial g(z) + \partial h(z)$. Así, existe $z^* \in \partial g(z) = \partial f(z) - x_0^*$ tal que $-z^* \in \partial h(z)$. Nótese que

$$\begin{aligned}\partial h(z) &= \{x^* \in X^* : x^*(x - z) \leq h(x) - h(z), \text{ para todo } x \in X\}\\ &= \{x^* \in X^* : x^*(x - z) \leq \lambda\|x - z\|, \text{ para todo } x \in X\}\\ &= \{x^* \in X^* : \|x^*\| \leq \lambda\}.\end{aligned}$$

Sean $x^* := z^* + x_0^*$ y $x := z$, entonces

(a) $x^* \in \partial f(x)$;

(b) $\|x - x_0\| = \|z - x_0\| \leq \dfrac{\mathcal{E}}{\lambda}$;

(c) $\|x^* - x_0^*\| = \|z^*\| \leq \lambda$;

como queríamos probar. $\square$

Teorema 1.1.7. *Sea X un espacio de Banach. Si φ es una función meseta continua y Gâteaux diferenciable en X, entonces $\overline{span}\{\varphi'(x) : x \in X\} = X^*$.*

Demostración:
Definamos una función $\varphi\colon X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ dada por

$$\varphi(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b^2(x)}, & \text{si } b(x) \neq 0; \\ +\infty, & \text{si } b(x) = 0. \end{cases}$$

Fijemos $f \in X^*$ y $\mathcal{E} > 0$. Comprobemos que $\varphi - f$ verifica las hipótesis del P.V. de Ekeland.

- Claramente, $\varphi(x) \geq 0$ para todo $x \in X$, luego $\varphi - f$ está acotada inferiormente.

- Veamos que φ es s.c.i. Dado $r \in \mathbb{R}$, entonces

$$\{x \in X : \varphi(x) \leq r\} = \begin{cases} \emptyset, & \text{si } r \leq 0. \\ \{x \in X : \dfrac{1}{b^2(x)} \leq r\}, & \text{si } r > 0. \end{cases}$$

  Luego $\{x \in X : \varphi(x) \leq r\}$ es cerrado para todo $r \in \mathbb{R}$, lo que coimplica que φ es s.c.i. y, por tanto, $\varphi - f$ es s.c.i.

Aplicando el P.V. de Ekeland, obtenemos un punto $x_0 \in X$ tal que

$$\varphi(x) - f(x) \geq \varphi(x_0) - f(x_0) - \mathcal{E}\|x - x_0\|, \text{ para todo } x \in X,$$

y equivalentemente,

$$\varphi(x) - \varphi(x_0) \geq f(x) - f(x_0) - \mathcal{E}\|x - x_0\|, \text{ para todo } x \in X,$$

De esta desigualdad se deduce que $\varphi(x_0)$ es finito, ya que existen puntos donde b es no nula. Consideremos $v \in \mathbb{S}_X$ y $t > 0$. Entonces,

$$\frac{\varphi(x_0 + tv) - \varphi(x_0)}{t} \geq \frac{f(tv)}{t} - \frac{\mathcal{E}t\|v\|}{t} = f(v) - \mathcal{E}.$$

Como $\varphi(x_0) \neq +\infty$, tenemos que $b(x_0) \neq 0$ y así φ es Gâteaux diferenciable en x_0. Por tanto,

$$\varphi'(x_0)(v) = \lim_{t\to 0^+} \frac{\varphi(x_0+tv)-\varphi(x_0)}{t} \geq f(v) - \mathcal{E}.$$

Como v es arbitrario, entonces

$$f(v) - \varphi'(x_0)(v) \leq \mathcal{E} \text{ para todo } v \in \mathbb{S}_X.$$

Luego $\|f - \varphi'(x_0)\| \leq \mathcal{E}$. Como $\varphi'(x_0) = \dfrac{-2b'(x_0)}{b^3(x_0)}$, entonces

$$d(f, \overline{span}\{b'(x) \, : \, x \in E\}) \leq \mathcal{E}.$$

Finalmente, como $\mathcal{E} > 0$ es arbitrario, se obtiene el resultado. □

Corolario 1.1.8. *Si X es un espacio de Banach separable y admite una función meseta $b \in \mathcal{C}^1(X,\mathbb{R})$, entonces X^* es separable. En general, si X es un espacio de Banach y admite y admite una función meseta $b \in \mathcal{C}^1(X,\mathbb{R})$, se tiene que $dens(X^*) = dens(X)$, donde $dens(X)$ denota la densidad de X (es decir, la menor cardinalidad de un subconjunto denso en X).*

Demostración:
Para la segunda afirmación, supondremos que X es separable (el caso general es similar). Sea $D = \{x_n \, : \, n \in \mathbb{N}\}$ un conjunto denso en X. Como $b' \colon X \to X^*$ es continua, entonces $b'(X) = b'(\bar{D}) \subset \overline{b'(D)}$. Por el Teorema anterior, $E^* = \overline{span}\, b'(X) \subset \overline{span}\, b'(D)$, luego $dens(E^*) \geq dens(E)$ y como para todo espacio de Banach se tiene que $dens(E^*) \leq dens(E)$, hemos concluido. □

Veamos otras aplicaciones geométricas mediante unos conjuntos llamados *pétalos* y *gotas*. Una aplicación muy interesante de éstos, es que a partir de ellos se obtienen resultados equivalentes al P.V. de Ekeland, como se puede comprobar en [H] y [Gog]. En concreto, veremos que el Teorema del Pétalo de Penot y el Teorema de la Gota de Daneš se pueden obtener mediante el P.V. de Ekeland.

Definición 1.1.9. *Sea X un espacio de Banach y sean $a, b \in X$. Dado $\gamma > 0$, decimos que*

$$P_\gamma(a,b) := \{x \in X \, : \, \gamma\|a-x\| + \|x-b\| \leq \|b-a\|\}$$

*es un **pétalo** asociado a γ, a y b.*

Observación 1.1.10. *Cada pétalo es convexo.*

<u>**Demostración:**</u>
Dados $x, y \in P_\gamma[a,b]$ y $\lambda \in [0,1]$, tenemos que

$$\begin{aligned}\gamma\|a-(\lambda x+(1-\lambda)y)\|+\|(\lambda x+(1-\lambda)y)-b\| &\leq \lambda(\gamma\|a-x\|+\|x-b\|)+(1-\lambda)(\gamma\|a-y\|+\|y-b\|)\\ &\leq \max\{\gamma\|a-x\|+\|x-b\|, \gamma\|a-y\|+\|y-b\|\}\\ &\leq \|b-a\|.\end{aligned}$$

Por tanto, $\lambda x+(1-\lambda)y \in P_\gamma(a,b)$. $\square$

<u>**Teorema**</u> **1.1.11.** *(Teorema del Pétalo de Penot, 1986) [Pen] (véase también [BZ]).*
Sea X un espacio de Banach y sea $S \subset X$ cerrado. Sean $a \in S$, $b \in X \backslash S$, $r \in (0, d(S,b))$ y $t = \|b-a\|$. Entonces, existe $y \in S \cap P_\gamma(a,b)$ con $\|y-a\| \leq \dfrac{2}{\gamma}(t-r)$ tal que $P_\gamma(y,b) \cap S = \{y\}$.

<u>**Demostración:**</u> Consideremos la función $f(x) := \|x-b\| + \bar{1}_S(x)$, donde $\bar{1}_S(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \in S, \\ +\infty, & \text{si } x \notin S, \end{cases}$ es la función indicatriz extendida. Entonces $f(a) = \|a-b\| = t < t + \|x-b\| - r = f(x) + t - r$, para todo $x \in S$. Por tanto,

$$f(a) < \inf_S f + t - r$$

Aplicando el P.V. de Ekeland a $f(x)$ con $\delta = 2(t-r)$ y $\mathcal{E} = \gamma$, obtenemos que existe $y \in S$ verificando

1. $f(y) + \mathcal{E}\|a-y\| \leq f(a)$. Por lo que $\|y-b\| + \gamma\|a-y\| \leq \|a-b\|$ y, por tanto, $y \in P_\gamma(a,b)$.
2. $\|y-a\| \leq \frac{\delta}{\mathcal{E}} = \dfrac{2}{\gamma}(t-r)$.
3. $f(x) + \mathcal{E}\|x-y\| > f(y)$, para todo $x \in S\backslash\{y\}$. Luego $\|x-b\| + \gamma\|x-y\| > \|y-b\|$, para cada $x \in S\backslash\{y\}$. Así, obtenemos que $P_y(a,b) \cap S = \{y\}$. $\square$

<u>**Definición**</u> **1.1.12.** *Sean X un espacio de Banach, $C \subset X$ convexo y $a \in X$.*
*Llamamos **gota** asociada al punto a y C al conjunto:*

$$[a, C] := \operatorname{conv}(\{a\} \cup C) = \{a + t(c-a) \,:\, c \in C, t \in [0,1]\}$$

Obviamente, cada gota es convexa.

Veamos previamente un lema que relaciona los pétalos con las gotas.

<u>**Lema**</u> **1.1.13.** *[BZ] Sean X un espacio de Banach, $a, b \in X$ y $\gamma \in (0,1)$. Llamemos $\eta := \|a-b\|\dfrac{1-\gamma}{1+\gamma}$. Entonces*

$$B_\eta(b) \subset P_\gamma(a,b)$$

y, consecuentemente, $[a, B_\eta(b)] \subset P_\gamma(a,b)$.

<u>**Demostración:**</u>
Sea $x \in B_\eta(b)$, entonces $\|x-b\| \leq \eta = \|a-b\|\dfrac{1-\gamma}{1+\gamma}$ y, equivalentemente, $(1+\gamma)\|x-b\| \leq \|b-a\|(1-\gamma)$. Así,

$$\|b-a\| \geq \gamma(\|x-b\| + \|b-a\|) + \|x-b\| \geq \gamma\|x-a\| + \|x-b\|.$$

Luego $x \in P_\gamma(a,b)$. La consecuencia se sigue de la convexidad de los pétalos y de que $a \in P_\gamma(a,b)$. $\square$

<u>**Teorema**</u> **1.1.14.** *(Teorema de la Gota de Daneš, 1972) [Dan] (véase también [BZ]).*
Sea X un espacio de Banach y sea $S \subset X$ cerrado. Supongamos $b \in X \backslash S$ y $r \in (0, d(S,b))$. Entonces, dado $\mathcal{E} > 0$, existe $y \in \partial S$ satisfaciendo $\|y-b\| \leq d(S,b) + \mathcal{E}$ tal que $[y, B_r(b)] \cap S = \{y\}$.

<u>**Demostración:**</u>
Escogemos $a \in S$ tal que $\|a-b\| < d(S,b) + \mathcal{E}$ y $\gamma := \frac{\|a-b\|-r}{\|a-b\|+r} \in (0,1)$. Se sigue del Teorema del Pétalo que existe $y \in S \cap P_\gamma(a,b)$ tal que $P_\gamma(y,b) \cap S = \{y\}$. Además, $y \in \partial S$, ya que en caso contrario, existe $0 < \rho < \|y-b\|\dfrac{1-\gamma}{1+\gamma}$ suficientemente pequeño tal que $B_\rho(y) \subset S$ y $[y, B_\rho(b)] \subset P_\gamma(y,b)$. Pero, por convexidad, $\{y\} \subsetneq B_\rho(y) \cap [y, B_\rho(b)] \subset S \cap P_\gamma(y,b)$, lo cual no es posible.

Además, como $y \in P_\gamma(a,b)$, entonces $\|y-b\| \leq \|a-b\| < d(S,y) + \mathcal{E}$. Despejando r de la definición de γ, obtenemos que $r = \|a-b\|\dfrac{1-\gamma}{1+\gamma}$ y por el Lema 1.1.13, $[y, B_r(b)] \subset P_\gamma(y,b)$. Por tanto, $[y, B_r(b)] \cap S = \{y\}$. $\square$

1.1.3. Aplicaciones a Teoremas de Punto Fijo

El P.V. de Ekeland puede usarse para probar algunos Teoremas de punto fijo de forma alternativa. Comenzaremos por un teorema clásico, probado por el célebre matemático polaco Stefan Banach en 1922. La *prueba variacional* que veremos a continuación es debida a Ekeland ([Eke3], 1979).

<u>**Teorema**</u> **1.1.15.** *(Teorema del Punto Fijo de Banach, 1922) [Banach]*
Sea (X,d) un espacio métrico completo y sea $f\colon X \to X$ una aplicación contractiva. Entonces, f tiene un único punto fijo.

<u>**Demostración:**</u>
Sea $g(x) := d\big(x, f(x)\big)$ y k la constante de contracción de f. Aplicando el P.V. de Ekeland a g con $0 < \mathcal{E} < 1-k$, obtenemos un $y \in X$ tal que $g(x) + \mathcal{E}d(x,y) \geq g(y)$, para todo $x \in X$, es decir,

$$d\big(x, f(x)\big) + \mathcal{E}d\big(x,y\big) \geq d\big(y, f(y)\big), \text{ para todo } x \in X.$$

En particular, si escogemos $x = f(y)$, entonces

$$d\big(y, f(y)\big) \leq d\big(f(y), f\big(f(y)\big)\big) + \mathcal{E}d\big(y, f(y)\big) \leq kd\big(y, f(y)\big) + \mathcal{E}d\big(y, f(y)\big).$$

Por tanto, $(1-k-\mathcal{E})d\big(y,f(y)\big)\leq 0$. Como $0<\mathcal{E}<1-k$, necesariamente la desigualdad anterior vale 0, luego $y=f(y)$, por lo que y es un punto fijo. Si hubiera otro punto fijo, $z\in X$, entonces $d\big(y,z\big)=d\big(f(y),f(z)\big)\leq kd\big(y,z\big)$ y, despejando, $(1-k)d\big(y,z\big)\leq 0$. Como $0<k<1$, necesariamente $z=y$, por lo que el punto fijo es único. $\square$

Veamos a continuación el Refinamiento de Clarke. Para ello, veremos previamente los conceptos de segmento y el de contracción direccional.

Definición 1.1.16. *Sean (X,d) un espacio métrico y $x,y\in X$. Llamamos **segmento** entre x e y al conjunto*

$$[x,y]:=\{z\in X\ :\ d(x,z)+d(z,y)=d(x,y)\}.$$

Definición 1.1.17. *Sean (X,d) un espacio métrico y $f\colon X\to X$ una aplicación. Diremos que f es una **contracción direccional** si:*

1. *f es continua.*
2. *Existe $k\in(0,1)$ de forma que para cada $x\in X$, con $x\neq f(x)$, se tiene un punto $z\in[x,f(x)]\setminus\{x\}$ tal que $d\big(f(x),f(z)\big)\leq kd(x,z)$.*

A k la llamaremos constante de contracción direccional. Se verifica que toda contracción direccional es una contracción.

El Refinamiento de Clarke generaliza el Teorema del Punto Fijo de Banach al dar condiciones más débiles. Se pueden encontrar ejemplos de contracciones direccionales que tienen un punto fijo y no son aplicaciones contractivas ([BZ], pág. 17).

Teorema 1.1.18. *(Refinamiento de Clarke, 1978) [Cl] (véase también [BZ]).*
Sean (X,d) un espacio métrico completo y $f\colon X\to X$ una contracción direccional. Entonces f admite un punto fijo.

Demostración:
Sea k la constante de contracción direccional de f. Sea $g\colon X\to\mathbb{R}$ una función tal que $g(x):=d\big(x,f(x)\big)$, continua y acotada inferiormente por 0. Aplicando el P.V. de Ekeland, a g con $0<\mathcal{E}<1-k$, obtenemos un $y\in X$ tal que $g(y)\leq g(x)+\mathcal{E}d(x,y),$ para todo $x\in X$, es decir,

$$d\big(y,f(y)\big)\leq d\big(x,f(x)\big)+\mathcal{E}d(x,y),\ \text{para todo } x\in X. \tag{1.12}$$

Si $y=f(y)$, hemos terminado. En otro caso, como f es una contracción direccional, existe $z\in[y,f(y)]\setminus\{y\}$ tal que

$$d\big(f(z),f(y)\big)\leq kd\big(z,y\big). \tag{1.13}$$

Escogiendo $x = z \in [y, f(y)] \setminus \{y\}$, $d\big(y, f(y)\big) = d\big(y, z\big) + d\big(z, f(y)\big) \underset{(1.12)}{\leq} d\big(z, f(z)\big) + \mathcal{E}d\big(z, y\big)$. Por tanto,

$$d\big(y,z\big) \leq d\big(z,f(z)\big) - d\big(z,f(y)\big) + \mathcal{E}d\big(y,z\big) \leq d\big(f(y),f(z)\big) + \mathcal{E}d(y,z) \underset{(1.13)}{\leq} (k+\mathcal{E})d\big(y,z\big).$$

Consecuentemente, $(1-k-\mathcal{E})d(y,z) \leq 0$. Como $0 < \mathcal{E} < 1-k$, necesariamente $z = y$, lo cual es una contradicción. $\square$

Por último, veremos el Teorema de punto fijo de Caristi-Kirk. Para ello, daremos previamente algunos conceptos básicos sobre multifunciones.

- Llamamos multifunción o función multivaluada a una aplicación definida en X que toma valores en 2^Y y la denotaremos por $F\colon X \rightrightarrows Y$.
- El dominio de una multifunción será $\operatorname{dom} F := \{x \in X \,:\, F(x) \neq \emptyset\}$.
- Se dice que x es un punto fijo de F si $x \in F(x)$.
- Se define la gráfica de F como $\mathrm{Gr}(F) := \{(x,y) \in X \times Y \,:\, y \in F(x)\}$.

El Teorema del Punto Fijo de Caristi-Kirk es otro resultado que generaliza el Teorema del Punto Fijo de Banach. Pueden verse algunas aplicaciones en [DoKi] o que es un resultado equivalente a la completitud del espacio ([West], 1977).

Teorema 1.1.19. *(Teorema del Punto Fijo de Caristi-Kirk, 1975) [CaKi] (véase también [BZ]). Sea (X,d) un espacio métrico completo y $f\colon X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ una función propia s.c.i. y acotada inferiormente. Supongamos que $F\colon X \rightrightarrows X$ es una multifunción con gráfica cerrada tal que*

$$f(y) \leq f(x) - d(x,y), \text{ para cada } (x,y) \in \mathrm{Gr}(F).$$

Entonces F tiene un punto fijo, $\tilde{y}$, para el cual se verifica además que $F(\tilde{y}) = \{\tilde{y}\}$.

Demostración:
Definimos una distancia sobre $X \times X$ tal que $\rho\big((x_1,y_1),(x_2,y_2)\big) := d\big(x_1,x_2\big) + d\big(y_1,y_2\big)$. Sea $0 < \mathcal{E} < \dfrac{1}{2}$ y $g\colon X \times X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ tal que $g(x,y) := f(x) - (1-\mathcal{E})d(x,y) + \bar{1}_{\mathrm{Gr}(F)}(x,y)$, donde

$$\bar{1}_{\mathrm{Gr}(F)}(x,y) = \begin{cases} 0, & \text{si } (x,y) \in \mathrm{Gr}(F) \\ +\infty, & \text{si } (x,y) \notin \mathrm{Gr}(F) \end{cases}.$$

Así, g es una función acotada inferiormente ya que, dados $(x,y) \in \mathrm{Gr}(F)$,

$$g(x,y) = f(x) - (1-\mathcal{E})d(x,y) \geq f(x) - d(x,y) \geq f(y)$$

y f está acotada inferiormente. Aplicando el Principio Variacional de Ekeland a g, obtenemos un $(\tilde{x},\tilde{y}) \in X \times X$ tal que

$$g(\tilde{x},\tilde{y}) \leq g(x,y) + \mathcal{E}\rho\big((x,y),(\tilde{x},\tilde{y})\big), \text{ para todo } (x,y) \in X \times X.$$

Por tanto, si $(x,y) \in \mathrm{Gr}(F)$,

$$f(\tilde{x}) - (1-\mathcal{E})d\big(\tilde{x},\tilde{y}\big) \leq f(x) - (1-\mathcal{E})d\big(x,y\big) + \mathcal{E}\Big(d\big(x,\tilde{x}\big) + d\big(y,\tilde{y}\big)\Big). \tag{1.14}$$

Supongamos $\tilde{z} \in F(\tilde{y})$. Escogiendo $(x,y) = (\tilde{y},\tilde{z})$ en (1.14) tenemos que

$$f(\tilde{x}) - (1-\mathcal{E})d\big(\tilde{x},\tilde{y}\big) \leq f(\tilde{y}) - (1-\mathcal{E})d\big(\tilde{y},\tilde{z}\big) + \mathcal{E}\Big(d\big(\tilde{y},\tilde{x}\big) + d\big(\tilde{z},\tilde{y}\big)\Big). \tag{1.15}$$

Por tanto, teniendo en cuenta que por hipótesis $f(\tilde{y}) \leq f(\tilde{x}) - d\big(\tilde{x},\tilde{y}\big)$, obtenemos

$$0 \leq f(\tilde{x}) - f(\tilde{y}) - d\big(\tilde{x},\tilde{y}\big) \underset{(1.15)}{\leq} (2\mathcal{E}-1)d\big(\tilde{y},\tilde{z}\big).$$

Como $0 < 2\mathcal{E} < 1$, se tiene que $\tilde{y} = \tilde{z}$. Luego $F(\tilde{y}) = \{\tilde{y}\}$. $\square$

1.1.4. La equivalencia con la completitud del espacio

Una aplicación muy interesante del Principio Variacional de Ekeland, es que nos permite caracterizar la completitud de un espacio métrico.

Teorema 1.1.20. *[BZ] Sea (X,d) un espacio métrico. Entonces X es completo si, y sólo si, para cada función $f\colon X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ s.c.i., acotada inferiormente y $\mathcal{E} > 0$, existe $y \in X$ satisfaciendo que*

$$f(y) \leq \inf_X f + \mathcal{E}$$

y

$$f(y) \leq f(x) + \mathcal{E}d(x,y), \text{ para todo } x \in X.$$

Demostración:

$\boxed{\Rightarrow}$ Si X es completo, entonces podemos aplicar el P.V. de Ekeland, obteniendo así el resultado.

$\boxed{\Leftarrow}$ Sea (x_i) una sucesión de Cauchy. Entonces la función $f(x) := \lim_{i\to\infty} d(x_i,x)$ está bien definida (porque $(d(x,x_i))_{i\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy) y es no negativa. Como la función distancia es lipschitziana respecto a x, f es continua. Por otro lado, $\inf_X f = 0$, ya que $f(x_j) \to 0$ cuando $j \to \infty$. Dado $0 < \mathcal{E} < 1$, por hipótesis podemos elegir $y \in X$ tal que

$$f(y) \leq \mathcal{E} + \inf_X f = \mathcal{E}$$

y

$$f(y) \leq f(x) + \mathcal{E}d(x,y), \text{ para todo } x \in X.$$

Escogiendo $x = x_j$ cuando $j \to \infty$, obtenemos que $f(y) \leq \mathcal{E}f(y)$ y, necesariamente, $f(y) = 0$ ya que $0 < \mathcal{E} < 1$. Por tanto, $\lim_{i\to\infty} x_i = y$. $\square$

1.2. Teorema del Paso de la montaña

El Teorema del Paso de la montaña es un resultado importante para el estudio de soluciones múltiples de ecuaciones diferenciales parciales no lineales. Su nombre proviene de una interesante interpretación geométrica: supongamos una cuenca rodeada por montañas. Para ir de un punto de la cuenca a otro fuera de las montañas que la rodean, uno debe seguir un camino que atraviese la cresta de la montaña. Cada camino tendrá un punto donde la altura será máxima. Intuitivamente, podemos imaginar que entre todos los caminos posibles, debe haber alguno que tenga la menor altura máxima posible. El punto donde se alcance la menor máxima, debe ser un punto silla. De hecho, a lo largo de este camino, dicho punto tiene la máxima altura y a la vez tiene la menor altura en la cresta de la montaña. Además, bajo ciertas condiciones, será un punto crítico.

Para establecer este resultado, necesitaremos definir lo que llamaremos ***caminos o pasos***. Sea X un espacio de Banach y sea $\mathcal{C}([0,1],X)$ el espacio de Banach de las funciones continuas $x\colon [0,1]\to X$ con la norma del supremo $\|x\|_\infty$. Dados $a,b\in X$, definimos el conjunto de caminos desde a hasta b como

$$\Gamma(a,b) := \{x\in\mathcal{C}([0,1],X)\ :\ x(0)=a \text{ y } x(1)=b\}.$$

Observación 1.2.1. $\Gamma(a,b)$ *es un espacio de Banach ya que es un subespacio vectorial cerrado del espacio de Banach* $(\mathcal{C}([0,1],X),\|\cdot\|_\infty)$.

Demostración:
Si $\{x_n\}_{n=1}^\infty\subset\Gamma(a,b)$ es una sucesión que converge con la norma $\|\cdot\|_\infty$ a $x\in\mathcal{C}([0,1],X)$, entonces $\{x_n\}$ converge uniformemente a x. Por tanto $x_n(0)=x(0)=a$ y $x_n(1)=x(1)=b$ para cada $n\in\mathbb{N}$. Luego $x\in\Gamma(a,b)$. $\square$

La siguiente definición nos ayudará a caracterizar la cresta de la montaña.

Definición 1.2.2. *Sea X un espacio de Banach y sea S un subconjunto cerrado de X. Decimos que S* ***separa*** *dos puntos a y b en X si éstos pertenecen a componentes conexas disjuntas de $X\backslash S$.*

1.2.1. Resultado principal

El Teorema del Paso de la montaña fue probado por Antonio Ambrosetti y Paul H. Rabinowitz en 1973 en [AmRa] mediante otras técnicas diferentes a las que usaremos. La prueba que veremos tiene especial interés ya que obtiene el resultado a partir del P.V. de Ekeland y está basada en un artículo del francés Nassif Ghoussoub y del británico David Preiss de 1989, ([GP]).

<u>**Teorema**</u> **1.2.3.** *(Teorema del Paso de la montaña aproximado, 1989) [GP] (véase también [BZ]) Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio de Banach, sean $a, b \in X$ y sea $f\colon X \to \mathbb{R}$ una función continua y Gâteaux diferenciable cuya derivada Gâteaux, $f' : X \to X^*$ es continua con la topología de la norma en X y la topología débil* en X^*. Definimos*

$$c = \inf_{x\in\Gamma(a,b)} \max_{t\in[0,1]} f(x(t)).$$

Supongamos que S es un subconjunto cerrado de X tal que $S \subset \{x \in X \,:\, f(x) \geq c\}$ y S separa a y b. Entonces existe una sucesión $(x_i) \subset X$ tal que:

1. $\lim_{i\to\infty} d(S, x_i) = 0$.
2. $\lim_{i\to\infty} f(x_i) = c$.
3. $\lim_{i\to\infty} \|f'(x_i)\| = 0$.

<u>**Demostración:**</u>

Como S separa a y b, podemos encontrar dos abiertos disjuntos U y V tales que $X\backslash S = U \cup V$, $a \in U$ y $b \in V$. Fijemos $0 < \mathcal{E} < \frac{1}{2} \min(1, d(S, a), d(S, b))$. Probaremos la existencia de un punto $x_{\mathcal{E}} \in X$ tal que

i) $c < f(x_{\mathcal{E}}) < c + \frac{5}{4}\mathcal{E}^2$.

ii) $d(S, x_{\mathcal{E}}) < \frac{3}{2}\mathcal{E}$.

iii) $\|f'(x_{\mathcal{E}})\| < \frac{3}{2}\mathcal{E}$.

Sea un camino $\bar{x} \in \Gamma(a, b)$ tal que

$$\max\{f(\bar{x}(t)) \,:\, t \in [0, 1]\} < c + \frac{\mathcal{E}^2}{4}. \tag{1.16}$$

Definimos

$$\alpha := \sup\{t \in [0, 1] \,:\, \bar{x}(t) \in U \text{ y } d(S, \bar{x}(t)) \geq \mathcal{E}\},$$

$$\beta := \inf\{t \in [0, 1] \,:\, \bar{x}(t) \in V \text{ y } d(S, \bar{x}(t)) \geq \mathcal{E}\}.$$

De esta forma, se tiene que $d(S, \bar{x}(t)) < \mathcal{E}$ para todo $t \in (\alpha, \beta)$. Sea $h\colon X \to \mathbb{R}$ definida como $h(v) := \mathcal{E} \max(0, \mathcal{E} - d(S, v))$ para todo $v \in X$. Como $\Gamma(\bar{x}(\alpha), \bar{x}(\beta))$ es cerrado en $\mathcal{C}([0, 1], X)$, podemos definir la función $\varphi\colon \Gamma(\bar{x}(\alpha), \bar{x}(\beta)) \to \mathbb{R}$ tal que

$$\varphi(x) := \max\{f(x(t)) + h(x(t)) \,:\, t \in [0, 1]\}.$$

Nótese que $0 \leq h(v) \leq \mathcal{E}^2$, para todo $v \in X$, y que $\operatorname{sop} h \subset \{v \in X \,:\, d(S,v) \leq \mathcal{E}\}$. Además, para cada $x \in \Gamma(\bar{x}(\alpha), \bar{x}(\beta))$ tenemos que $x([0,1]) \cap S \neq \emptyset$, ya que $x(0) = \bar{x}(\alpha) \in U, x(1) = \bar{x}(\beta) \in V$ y $X \backslash S = U \cup V$. Se sigue que para todo $x \in \Gamma(\bar{x}(\alpha), \bar{x}(\beta))$,

$$\varphi(x) \geq \text{máx}\{f(x(t)) + h(x(t)) \,:\, t \in [0,1] \text{ y } x(t) \in S\} \geq c + \mathcal{E}^2,$$

luego

$$\inf_{\Gamma(\bar{x}(\alpha),\bar{x}(\beta))} \varphi \geq c + \mathcal{E}^2. \tag{1.17}$$

Por otra parte, sea $z \in \Gamma(\bar{x}(\alpha), \bar{x}(\beta))$ definida como $z(t) := \bar{x}(\alpha + t(\beta - \alpha))$ para $t \in [0,1]$. Entonces

$$\varphi(z) \leq \text{máx}\{f(\bar{x}(t)) + h(\bar{x}(t)) \,:\, t \in [0,1]\} \leq \left(c + \frac{\mathcal{E}^2}{4}\right) + \mathcal{E}^2 = c + \frac{5\mathcal{E}^2}{4}. \tag{1.18}$$

Por tanto,

$$\varphi(z) \leq \inf_{\Gamma(\bar{x}(\alpha),\bar{x}(\beta))} \varphi + \frac{\mathcal{E}^2}{4}.$$

La función φ cumple las condiciones requeridas para poder aplicar P.V. de Ekeland sobre $\Gamma(\bar{x}(\alpha), \bar{x}(\beta))$. Así, encontramos un camino $y \in \Gamma(\bar{x}(\alpha), \bar{x}(\beta))$ tal que

$$\varphi(y) \leq \varphi(z), \tag{1.19}$$

$$\|y - z\| \leq \frac{\mathcal{E}}{2}, \tag{1.20}$$

$$\varphi(x) \geq \varphi(y) - \frac{\mathcal{E}}{2}\|x - y\|, \text{ para cada } x \in \Gamma(\bar{x}(\alpha), \bar{x}(\beta)). \tag{1.21}$$

Sea $M \subset [0,1]$ formado por todos los puntos donde $(f+h) \circ y$ alcanza su máximo en $[0,1]$. Veamos que existe $\bar{t} \in M$ tal que $\|f'(\bar{t})\| \leq \frac{3}{2}\mathcal{E}$. Definimos

$$\mathcal{I} := \{\nu \in \mathcal{C}([0,1], X) \,:\, \|\nu\| \leq 1 \text{ y } \nu(0) = \nu(1) = 0\}. \tag{1.22}$$

Nótese previamente, que para cada $\nu \in \mathcal{I}$, si $x = \nu s + y$, con $s > 0$, se tiene que $x \in \Gamma(\bar{x}(\alpha), \bar{x}(\beta))$ y, sustituyendo en (1.21), obtenemos que

$$-\frac{\mathcal{E}}{2}\|\nu\| \leq \liminf_{s \to 0^+} \frac{\varphi(y + s\nu) - \varphi(y)}{s} = \liminf_{s \to 0^+} \frac{1}{s}\left[\max_{t\in[0,1]}\{(f+h)\big(y(t) + s\nu(t)\big)\} - \max_{t\in[0,1]}\{(f+h)\big(y(t)\big)\}\right]. \tag{1.23}$$

Por un lado, como $d(S, y(t) + s\nu(t)) \geq d(S, y(t)) - d(y(t), y(t) + s\nu(t)) \geq d(S, y(t)) - s\|\nu\|$ para todo $t \in [0,1]$, entonces $h\big(y(t) + s\nu(t)\big) = \mathcal{E} \max_{t\in[0,1]} \big(0, \mathcal{E} - d(S, y(t) + s\nu(t))\big) \leq \mathcal{E} \max_{t\in[0,1]} \big(0, \mathcal{E} - d(S, y(t))\big) + \mathcal{E}s\|\nu\| = h\big(y(t)\big) + \mathcal{E}s\|\nu\|$. Por tanto,

$$h\big(y(t) + s\nu(t)\big) \leq h\big(y(t)\big) + \mathcal{E}s\|\nu\|, \text{ para todo } t \in [0,1]. \tag{1.24}$$

Por otro lado, aplicando el Teorema del Valor Medio tenemos que $f(y(t)+s\nu(t))-f(y(t)) = f'(c_{s,t})(s\nu(t)) = sf'(c_{s,t})(\nu(t))$, donde $c_{s,t}$ es un punto intermedio entre $y(t)$ e $y(t)+s\nu(t)$. Por tanto,

$$\frac{f(y(t)+s\nu(t))}{s} = f'(c_{s,t})(\nu(t)) + \frac{f(y(t))}{s} = [f'(c_{s,t})-f'(y(t))](\nu(t)) + \frac{f(y(t))+sf'(y(t))(\nu(t))}{s}. \tag{1.25}$$

Por la compacidad de las imágenes de y y ν, y la continuidad $\|\cdot\|-w^*$ de f', se puede comprobar que $\lim\limits_{s\to 0}\max\limits_{t\in[0,1]}|f'(c_{s,t})-f'(y(t))| = 0$. Entonces, podemos dominar la desigualdad (1.23), mediante (1.24) y (1.25), de la siguiente forma:

$$-\frac{\mathcal{E}}{2}\|\nu\| \leq \liminf_{s\to 0^+}\frac{1}{s}\left[\max_{t\in[0,1]}\{(f+h)(y(t))+sf'(y(t))(\nu(t))\} - \max_{t\in[0,1]}\{(f+h)(y(t))\}\right] + \mathcal{E}\|\nu\|. \tag{1.26}$$

Sean $k := (f+h)\circ y$, $l := f'(y)(\nu)$ y m una función continua sobre $\mathcal{C}([0,1])$ definida por $m(x) := \max\limits_{t\in[0,1]} x(t)$. Así, por (1.26),

$$-\frac{3\mathcal{E}}{2}\|\nu\| \leq \liminf_{s\to 0^+}\frac{m(k+sl)-m(k)}{s}. \tag{1.27}$$

La función m es convexa, pues dados $\lambda\in[0,1]$ y $x,y\in\mathcal{C}([0,1])$, tenemos que $m(\lambda x+(1-\lambda)y) = \max\limits_{t\in[0,1]}\{\lambda x(t)+(1-\lambda)y(t)\} \leq \lambda\max\limits_{[0,1]} x + (1-\lambda)\max\limits_{[0,1]} y = \lambda m(x)+(1-\lambda)h(y)$. Entonces, su subdiferencial se puede caracterizar de la siguiente manera ([IL]):

$$\partial m(x) = \{\mu\,:\,\mu \text{ es una medida de probabilidad de Radon con soporte en } M(x)\},$$

donde

$$M(x) := \{t\in[0,1]\,:\,x(t)=m(x)=\max_{t\in[0,1]} x(t)\}.$$

Así, se sigue de (1.27) y del Teorema (0.3.31) que:

$$-\frac{3\mathcal{E}}{2}\|\nu\| \underset{(1.27)}{\leq} \liminf_{s\to 0^+}\frac{m(k+sl)-m(k)}{s} \underset{(0.3.31)}{\leq} \max\{\langle\mu,l\rangle\,:\,\mu\in\partial m(k)\} = \max\left\{\int f'(y)(\nu)d\mu\,:\,\mu\in\partial m(k)\right\}.$$

Por un teorema minimax estándar (ver [BD]), tenemos que:

$$-\frac{3\mathcal{E}}{2} \underset{(1.22)}{=} \inf_{\nu}\max_{\mu}\left\{\int f'(y)(\nu)d\mu\,:\,\mu\in\partial m(k),\nu\in\mathcal{I}\right\} = \max_{\mu}\inf_{\nu}\left\{\int f'(y)(\nu)d\mu\,:\,\mu\in\partial m(k),\nu\in\mathcal{I}\right\} \tag{1.28}$$

Fijado $t\in(0,1)$, definimos $\mathcal{I}(t) := \{\nu(t)\,:\,\nu\in\mathcal{I}\} = B_X$. Entonces,

$$\inf_{\nu\in\mathcal{I}} f'(y(t))(\nu(t)) = \inf_{\nu(t)\in\mathcal{I}(t)} f'(y(t))(\nu(t)) = \inf_{\omega\in B_X} f'(y(t))(\omega) = -\sup_{\omega\in B_X} f'(y(t))(\omega) = -\|f'(y(t))\|$$

Luego $\inf\limits_{\nu\in\mathcal{I}} f'(y(t))(\nu(t)) = -\|f'(y(t))\|$ y por (1.28),

$$-\frac{3\mathcal{E}}{2} = \max_{\mu}\inf_{\nu}\left\{\int f'(y)(\nu)d\mu \,:\, \mu\in\partial m(k), \nu\in\mathcal{I}\right\} \leq \max_{\mu}\left\{\int \inf_{\nu\in\mathcal{I}} f'(y)(\nu)d\mu \,:\, \mu\in\partial m(k)\right\}$$
$$= \max_{\mu}\left\{-\int \|f'(y)\|d\mu \,:\, \mu\in\partial m(k)\right\} \leq \min_{t\in M(k)}\{-\|f'(y(t))\|\}\max_{\mu}\left\{\int d\mu \,:\, \mu\in\partial m(k)\right\}.$$

Puesto que cada μ es una medida de probabilidad,

$$-\frac{3\mathcal{E}}{2} \leq \min_{t\in M(k)}\{-\|f'(y(t))\|\}.$$

Entonces, de la desigualdad anterior obtenemos que $\|f'(y(\bar{t}))\| \leq \dfrac{3\mathcal{E}}{2}$ para todo $\bar{t}\in M(k)$. Sea $x_{\mathcal{E}} = y(\bar{t})$. Entonces $\|f'(x_{\mathcal{E}})\| \leq \dfrac{3\mathcal{E}}{2}$, satisfaciendo iii.). Veamos que $x_{\mathcal{E}}$ satisface i.) y ii.). Para i.), tenemos que

$$c+\mathcal{E}^2 \underset{(1.17)}{\leq} \inf_{\Gamma(\bar{x}(\alpha),\bar{x}(\beta))}\varphi \leq f(y(\bar{t}))+h(y(\bar{t})) = \varphi(y) \underset{(1.19)}{\leq} \varphi(z) \underset{(1.18)}{\leq} c+\frac{5\mathcal{E}^2}{4}.$$

Puesto que $0\leq h\leq \mathcal{E}^2$, entonces $c\leq f(x_{\mathcal{E}})\leq c+\dfrac{5\mathcal{E}^2}{4}$, satisfaciendo así i.). Veamos que $\max\limits_{t\in[0,1]} k(t) > \max\{k(0),k(1)\}$. Por un lado,

$$\max_{t\in[0,1]} k(t) = \varphi(y) \geq \inf_{\Gamma(\bar{x}(\alpha),\bar{x}(\beta))}\varphi \underset{(1.17)}{\geq} c+\mathcal{E}^2 > c+\frac{\mathcal{E}^2}{4}.$$

Por otro lado,

$$k(0) = f(y(0))+h(y(0)) = f(\bar{x}(\alpha))+h(\bar{x}(\alpha)) = f(\bar{x}(\alpha)) \underset{(1.16)}{<} c+\frac{\mathcal{E}^2}{4}$$

y

$$k(1) = f(y(1))+h(y(1)) = f(\bar{x}(\beta))+h(\bar{x}(\beta)) = f(\bar{x}(\beta)) \underset{(1.16)}{<} c+\frac{\mathcal{E}^2}{4}.$$

Así, obtenemos que $M(k)\cap\{0,1\}=\emptyset$. Por tanto, $\bar{t}\in(0,1)$. Como teníamos que $z=\bar{x}(\alpha+\bar{t}(\beta-\alpha))$ y $d(S,x(t))\leq\mathcal{E}$ para todo $t\in(\alpha,\beta)$, entonces $d(S,z(\bar{t})) = d(S,\bar{x}(\alpha+\bar{t}(\beta-\alpha)))\leq\mathcal{E}$. Luego $d(S,x_{\mathcal{E}}) = d(S,y(\bar{t})) \leq d(S,z(\bar{t}))+d(z(\bar{t}),y(\bar{t})) \underset{(1.20)}{\leq} \mathcal{E}+\dfrac{\mathcal{E}}{2} = \dfrac{3\mathcal{E}}{2}$, satisfaciendo ii.). $\square$

Con este teorema podemos afirmar la existencia de una sucesión (x_i) tal que $(f'(x_i))$ converge a 0. Para poder asegurar la existencia de un punto crítico para f, necesitamos adicionalmente la condición de Palais-Smale ([PS]).

Definición 1.2.4. *Sean X un espacio de Banach, $S \subset X$ y $f\colon X \to \mathbb{R}$ una función Gâteaux diferenciable. Decimos que f satisface la* ***condición de Palais-Smale*** *en torno a S en el nivel c si para toda sucesión $(x_i) \subset X$ que verifique las tesis del Teorema del Paso de la montaña (i.e., $\lim_{i\to\infty} d(S, x_i) = 0$, $\lim_{i\to\infty} f(x_i) = c$ y $\lim_{i\to\infty} \|f'(x_i)\| = 0$) tiene una subsucesión convergente.*

Como consecuencia del teorema anterior, obtenemos el Teorema del Paso de la montaña.

Corolario 1.2.5. *(Teorema del Paso de la montaña, 1973)*
Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio de Banach, sean $a, b \in X$ y sea $f\colon X \to \mathbb{R}$ una función continua y Gâteaux diferenciable cuya derivada Gâteaux, $f' : X \to X^*$ es continua con la topología de la norma en X y la topología débil en X^*. Definimos*

$$c = \inf_{x\in\Gamma(a,b)} \max_{t\in[0,1]} f(x(t)).$$

Supongamos que S es un subconjunto cerrado de X tal que $S \subset \{x \in X : f(x) \geq c\}$ y S separa a y b. Entonces existe $\bar{x} \in S$ tal que $f(\bar{x}) = c$ y $f'(\bar{x}) = 0$.

1.2.2. Aplicaciones al Problema de Dirichlet

En las referencias [Am] y [Ra] podemos encontrar numerosas aplicaciones del Teorema del Paso de la montaña. En particular, es una buena herramienta para obtener la existencia y múltiples resultados sobre soluciones de ecuaciones diferenciales parciales no lineales. Consideremos el Problema de Dirichlet para ecuaciones semilineales elípticas de la forma

$$\begin{cases} -\Delta(x(y)) = F'(x(y)), & y \in \Omega, \\ x(y) = 0, & y \in \partial\Omega, \end{cases} \tag{1.29}$$

donde Ω es un abierto de $\mathbb{R}^N$, $x \in \mathcal{C}^2(\bar{\Omega}, \mathbb{R})$, $F\colon \mathcal{C}^2(\bar{\Omega}, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ es una función no lineal y Δ es el operador laplaciano. Consideraremos el espacio de Sobolev $X = H_0^1(\Omega)$ y las soluciones en el sentido de las distribuciones. Entonces las soluciones de (1.29) corresponden a los puntos críticos del funcional $f\colon H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ tal que

$$f(x) := \frac{1}{2}\|x\|_1^2 - \int_\Omega F(x(y))dy, \; x \in H_0^1(\Omega)$$

donde la norma $\|\cdot\|_1$ denota la norma de $H_0^1(\Omega)$. Para ilustrarlo, consideremos el caso en el que

$$F(x(y)) := |x(y)|^p, x \in H_0^1(\Omega)$$

donde $2 < p < 2^* := 2\dfrac{N-1}{N-2}$. Claramente, el Problema de Dirichlet tiene la solución trivial $x \equiv 0$. Usaremos el Teorema del Paso de la montaña para demostrar que al menos tiene una solución no trivial. Gracias a la condición $2 < p < 2^*$, por el Teorema (0.3.44), tenemos que $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$ es una inclusión compacta (Definición (0.3.42)), es decir, que lleva subconjuntos cerrados y acotados de

$H_0^1(\Omega)$ a subconjuntos compactos de $L^p(\Omega)$. Así, por las inclusiones de Sobolev (Teorema (0.3.43)), $f(x) \geq r$ para algún $r > 0$ sobre la esfera unidad $\mathbb{S}_{H_0^1(\Omega)}$. Obviamente, $f(0) = 0$. Además, fijando $x \neq 0$, tenemos que

$$f(tx) = \frac{1}{2}t^2\|x\|_1^2 - t^p \int_\Omega |x(y)|^p dy \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty.$$

Luego existe $b = tx$ tal que $f(b) \leq 0$, lo cual implica que f satisface las condiciones geométricas del Teorema del Paso de la montaña con $a := 0$, $b := tx$ y $S := \mathbb{S}_{H_0^1(\Omega)}$.

Para probar que f tiene un punto crítico sobre S comprobaremos la condición de Palais-Smale. Sea $(x_i) \subset X$ una sucesión tal que

$$f(x_i) \to c \ \text{ y } \ f'(x_i) \to 0. \tag{1.30}$$

Primero, obtendremos una acotación de la sucesión (x_i). Por un lado, para i suficientemente grande se tiene que $f'(x_i)(x_i) \leq \mathcal{E}\|x_i\|_1$, luego por el Lema 0.3.46,

$$p\int_\Omega |x_i(y)|^p dy \leq \|x_i\|_1^2 + \mathcal{E}\|x_i\|_1. \tag{1.31}$$

Por otro lado, como $f(x_i)$ está acotada, existe una constante k tal que, para i suficientemente grande,

$$f(x_i) = \frac{1}{2}\|x_i\|_1^2 - \int_\Omega |x_i(y)|^p dy \leq \frac{k}{2} \tag{1.32}$$

y, por consiguiente,

$$\|x_i\|_1^2 \leq k + 2\int_\Omega |x_i(y)|^p dy. \tag{1.33}$$

Por tanto, de (1.31) y (1.33) se obtiene para i suficientemente grande que

$$\|x_i\|_1^2 \leq k + \frac{2}{p}\|x_i\|_1^2 + \frac{2}{p}\mathcal{E}\|x_i\|_1.$$

Así, para i suficientemente grande,

$$\Big(1 - \frac{2}{p}\Big)\|x_i\|_1^2 - \frac{2}{p}\mathcal{E}\|x_i\|_1 \leq k.$$

Como $p > 2$, se sigue que $\|x_i\|_1$ está acotada. Al ser $H_0^1(\Omega)$ reflexivo, podemos suponer que (x_i) converge a $\bar{x}$ en la topología débil de $H_0^1(\Omega)$ (pasando a una subsucesión si es necesario). Como $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$ es una inclusión compacta, podemos suponer que (x_i) converge en norma en la topología $L^p(\Omega)$. Por otro lado, como $f'(x_i) \to 0$ (por (1.30)), se puede comprobar que (x_i) converge en norma a $\bar{x}$ en la topología de $H_0^1(\Omega)$ y, por tanto, $f'(\bar{x}) = 0$, obteniendo así un punto crítico.

1.3. Principio variacional de Stegall

Este resultado fue probado por Charles Patrick Stegall en 1978, en [Ste1] (véase también [Ste2]). Si añadimos la propiedad de Radon-Nikodym a las condiciones del P.V. de Ekeland, podemos conseguir una función de perturbación $x^* \in X^*$ tal que $f + x^*$ alcance un mínimo fuerte sobre X. Veremos después algunas aplicaciones donde se aprovecha la linealidad de x^*.

Salvo que se indique lo contrario, supondremos que X es un espacio de Banach en toda la sección.

1.3.1. Resultados previos sobre mínimos fuertes y rebanadas

Para desarrollar esta subsección, utilizaremos los libros [BZ], [FHHMZ] y [Phe].

Definición 1.3.1. *Sea $A \subset X$ no vacío. Para $\alpha > 0$ y $x^* \in X^*$, llamamos **rebanada** de A al conjunto*

$$S(x^*, A, \alpha) := \{x \in A \,:\, x^*(x) > \sup_A x^* - \alpha\}.$$

Dada una función $f\colon A \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ acotada superiormente en A, podemos generalizar este concepto considerando

$$S(f, A, \alpha) := \{x \in A \,:\, f(x) > \sup_A f - \alpha\}.$$

Definición 1.3.2. *Sea $A \subset X$ no vacío. Decimos que $\emptyset \neq A \subset$ es **dentable** si dado $\mathcal{E} > 0$, existen $x^* \in X^*$ y $\alpha > 0$ tales que $0 < \operatorname{diam} S(x^*, A, \alpha) < \mathcal{E}$.*

Definición 1.3.3. *Decimos que $A \subset X$ tiene la **propiedad de Radon-Nikodym (o RNP)** si todo subconjunto no vacío y acotado de A es dentable.*

Observación 1.3.4. *Esta no es la definición original de la RNP, pero es equivalente. La original puede verse en [FHHMZ], donde podemos ver otra caracterización:*

X es Asplund si, y sólo si X^* tiene la RNP.

En particular, los espacios reflexivos o espacios duales separables (como ℓ_1) tienen la RNP.

Definición 1.3.5. *Sean $A \subset X$ un subconjunto no vacío y $f\colon A \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ una función acotada inferiormente. Decimos que $x \in A$ es un **mínimo fuerte** de f sobre A si:*

i) $f(x) = \inf_A f$.

ii) *Dada $(x_n) \subset A$ tal que $f(x_n) \to f(x)$, entonces $\|x - x_n\| \to 0$.*

Veamos algunos resultados que usaremos más adelante para probar el P.V. de Stegall.

Proposición 1.3.6. *Sea $A \subset X$ un subconjunto cerrado. A es dentable si, y sólo si, dado $\mathcal{E} > 0$, existe $x \in A$ tal que $x \notin \overline{\operatorname{conv}(A \backslash B_{\mathcal{E}}(x))}$.*

Demostración:

$\boxed{\Rightarrow}$ Supongamos que A es dentable. Fijemos $\mathcal{E} > 0$, entonces existen $x^* \in X^*$ y $\alpha > 0$ tales que $\operatorname{diam} S(x^*, A, \alpha) < \mathcal{E}$. Sea $x \in S(x^*, A, \alpha)$, entonces $(A \backslash B_{\mathcal{E}}(x)) \cap S(x^*, A, \alpha) = \emptyset$ (si no fuera así, tendríamos que $\operatorname{diam} S(x^*, A, \alpha) \geq \mathcal{E}$). Por tanto, $(A \backslash B_{\mathcal{E}}(x)) \subset (A \backslash S(x^*, A, \alpha))$ y $\overline{\operatorname{conv}(A \backslash B_{\mathcal{E}}(x))} \subset \overline{\operatorname{conv}(A \backslash S(x^*, A, \alpha))} \subset X \backslash S(x^*, A, \alpha)$. Luego $x \notin \overline{\operatorname{conv}(A \backslash B_{\mathcal{E}}(x))}$.

$\boxed{\Leftarrow}$ Supongamos que dado $\mathcal{E} > 0$, existe $x \in A$ tal que $x \notin \overline{\operatorname{conv}(A \backslash B_{\mathcal{E}}(x))}$. Por la primera forma geométrica del Teorema de Hahn-Banach, existe $x^* \in X^*$ y $\alpha \in \mathbb{R}$ tales que

$$\sup_{A \backslash B_{\mathcal{E}}(x)} x^* < \alpha < x^*(x).$$

Entonces $\{y \in A \,:\, x^*(y) \geq \alpha\}$ es una rebanada de A con diámetro menor o igual que $2\mathcal{E}$. $\square$

Proposición 1.3.7. *Sean $A \subset X$ un subconjunto cerrado y no vacío y $f \colon A \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ una función s.c.i. y acotada inferiormente en A. Entonces, f alcanza un mínimo fuerte si, y sólo si, $\lim\limits_{\alpha \to 0^+} \operatorname{diam} S(-f, A, \alpha) = 0$.*

Demostración:

Nótese previamente que,

$$\begin{aligned} S(-f, A, \alpha) &= \{x \in A \,:\, -f(x) > \sup_A(-f) - \alpha\} = \{x \in A \,:\, -f(x) > -\inf_A f - \alpha\} \\ &= \{x \in A \,:\, f(x) < \inf_A f + \alpha\}. \end{aligned}$$

$\boxed{\Rightarrow}$ Supongamos que f alcanza un mínimo fuerte en $x \in A$. Entonces $f(x) = \inf_A f$ y dada $(x_n) \subset A$ tal que $f(x_n) \to f(x)$, se tiene que $\|x_n - x\| \to 0$. Por reducción al absurdo, supongamos que existe una sucesión de números positivos, (α_n) tal que $\alpha_n \to 0^+$ y $\lim\limits_{n\to\infty} \operatorname{diam} S(-f, A, \alpha_n) \geq \mathcal{E} > 0$. Entonces existen dos suciones $(x_n), (y_n) \subset A$ tales que $x_n, y_n \in S(-f, A, \alpha_n)$, para cada $n \in \mathbb{N}$, con $\|x_n - y_n\| \geq \mathcal{E} > 0$, para cada $n \in \mathbb{N}$, y $\big(f(x_n)\big)$ y $\big(f(y_n)\big)$ monótonas decrecientes (si fuera necesario, tomando una subsucesión). Por tanto,

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) \leq \inf_A f + \lim_{n\to\infty} \alpha_n = \inf_A f$$

y

$$\lim_{n\to\infty} f(y_n) \leq \inf_A f + \lim_{n\to\infty} \alpha_n = \inf_A f.$$

Luego $f(x) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} f(y_n)$. Como x es mínimo fuerte, entonces $\|x_n - x\| \to 0$ y $\|y_n - x\| \to 0$. Pero $\|x_n - y_n\| \leq \|x_n - x\| + \|x - y_n\| \to 0$, luego $\|x_n - y_n\| \to \|x - y\|$, lo cual es una contradicción.

$\boxed{\Leftarrow}$ Supongamos que $\lim_{\alpha\to 0^+} \operatorname{diam} S(-f, A, \alpha) = 0$. Sea (α_n) una sucesión decreciente de números positivos tal que $\alpha_n \to 0^+$ y sea $(x_n) \subset A$ una sucesión tal que $x_n \in S(-f, A, \alpha_n)$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Entonces $f(x_n) < \inf_A f + \alpha_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \inf_A f$ y, por consiguiente, $f(x_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \inf_A f$. Como $\lim_{\alpha\to 0^+} \operatorname{diam} S(-f, A, \alpha) = 0$, la sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ es de Cauchy y, por tanto, convergente a $\bar{x} \in A$. Al ser f s.c.i., tenemos que $f(\bar{x}) \leq \liminf_{n\to\infty} f(x_n) = \inf_A f$.

Veamos que $\bar{x}$ es único. Si existe otra sucesión $(y_n) \subset A$ tal que $\lim_{n\to\infty} f(y_n) = \inf_A f$, usando el mismo razonamiento que antes, existe $\bar{y} \in A$ tal que $\lim_{n\to\infty} y_n = \bar{y}$ y, por tanto, $f(\bar{y}) = \inf_A f$. Puesto que $\bar{x}, \bar{y} \in S(-f, A, \alpha)$, para todo $\alpha > 0$, se tiene que $\bar{x} = \bar{y}$. En consecuencia, existe un único $\tilde{x} \in A$ tal que $\tilde{x} \in \bigcap_{n\geq 1} S(-f, A, \alpha_n)$ y, dada una sucesión $(z_n) \subset A$ tal que $f(z_n) \to f(\tilde{x}) = \inf_A f$, entonces $z_n \to \tilde{x}$. Así, f tiene un mínimo fuerte sobre A en $\tilde{x}$. $\square$

Lema 1.3.8. *Sea X un espacio de Banach y sea $A \subset B_X$ no vacío. Supongamos que $f\colon A \to \mathbb{R}\cup\{+\infty\}$ está acotada superiormente en A. Entonces para cada $\alpha > 0$, tenemos que $S(f + x^*, A, \beta) \subset S(f, A, \alpha)$ si $\|x^*\| < \dfrac{\alpha}{2}$ y $0 < \beta < \alpha - 2\|x^*\|$.*

Demostración:

Dado $x \in S(f + x^*, A, \beta)$, entonces $f(x) + x^*(x) > \sup_A (f + x^*) - \beta \underset{A\subset B_X}{\geq} \sup_A f - \|x^*\| - \beta$. Luego

$$f(x) > \sup_A f - \|x^*\| - \beta - x^*(x) \underset{x\in A\subset B_X}{\geq} \sup_A f - 2\|x^*\| - \beta \geq \sup_A f - 2\|x^*\| - \alpha + 2\|x^*\| = \sup_A f - \alpha.$$

Por tanto, $S(f + x^*, A, \beta) \subset S(f, A, \alpha)$. $\square$

Lema 1.3.9. *Sea X un espacio de Banach y sea $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ una sucesión de subconjuntos de X (enventualmente) no vacíos. Supongamos que existen $\mathcal{E} > 0$ y $\lambda > 0$ tales que para cada $i \in \mathbb{N}$, si $x \in \operatorname{conv}(A_i)$ e $y \in X$, se tiene que $d\big(\operatorname{conv}(A_{i+1} \backslash B_{\mathcal{E}}(y)), x\big) < \dfrac{\lambda}{2^i}$. Entonces,*

$$A := \bigcap_{i=1}^{\infty} \overline{\bigcup_{j\geq i} \operatorname{conv}(A_j)} \text{ es no vacío y no dentable.}$$

Demostración:
Veamos que $A \neq \emptyset$ y además que para cada $i \in \mathbb{N}, \mathrm{conv}(A_i) \subset B_{\frac{4\lambda}{2^i}}(A) := \{x \in X : d(A,x) \leq \frac{4\lambda}{2^i}\}$. Por hipótesis, existe $i \in \mathbb{N}$ tal que $A_i \neq \emptyset$, luego tenemos un $x_0 \in \mathrm{conv}(A_i)$. Aplicando nuevamente la hipótesis, existe $x_1 \in \mathrm{conv}(A_{i+1})$ tal que $\|x_0 - x_1\| \leq \frac{2\lambda}{2^i}$. Análogamente, existe $x_2 \in \mathrm{conv}(A_{i+2})$ tal que $\|x_1 - x_2\| \leq \frac{2\lambda}{2^{i+1}}$. Por un razonamiento inductivo, existe $x_k \in \mathrm{conv}(A_{i+k})$ tal que

$$\|x_k - x_{k+1}\| \leq \frac{2\lambda}{2^{i+k}}, \text{ para cada } k = 0, 1, 2, \ldots$$

Entonces $\sum_{k=0}^{\infty} \|x_k - x_{k+1}\| \leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2\lambda}{2^{i+k}} = \frac{4\lambda}{2^i}$. Luego $\sum_{k=0}^{\infty}(x_k - x_{k+1})$ converge a un elemento $y \in X$ y por la desigualdad triangular, $\|y\| \leq \frac{4\lambda}{2^i}$. Por otro lado, $y = \sum_{k=0}^{\infty}(x_k - x_{k+1}) = \lim_{m\to\infty} \sum_{k=0}^{m}(x_k - x_{k+1}) = \lim_{m\to\infty}(x_0 - x_1) + (x_1 - x_2) + \ldots + (x_m - x_{m+1}) = x_0 - z$, donde $z := \lim_{m\to\infty} x_{m+1}$. Por la forma de construir $\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$, se sigue que $z \in A = \bigcap_{i=1}^{\infty} \overline{\bigcup_{j\geq i} \mathrm{conv}(A_j)}$, luego $A \neq \emptyset$. Además, como $\|y\| = \|x_0 - z\| \leq \frac{4\lambda}{2^i}$, se tiene que $x_0 \in B_{\frac{4\lambda}{2^i}}(A)$. Puesto que x_0 es un punto arbitrario de $\mathrm{conv}(A_i)$, se tiene

$$\mathrm{conv}(A_i) \subset B_{\frac{4\lambda}{2^i}}(A), \ i \in \mathbb{N}. \tag{1.34}$$

Veamos ahora que A no es dentable. Por la Proposición 1.3.6, basta ver que para todo $x \in A$, se cumple que $A \subset \overline{\mathrm{conv}(A \backslash B_{\frac{\mathcal{E}}{2}}(x))}$. Sean $x \in A$ arbitrario y $k \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{4\lambda}{2^k} < \frac{\mathcal{E}}{2}$. Como $x \in \overline{\bigcup_{j\geq i} \mathrm{conv}(A_j)}$, para cada $i \in \mathbb{N}$, tenemos que si $i \geq k$, existen $j \geq i$ e $y_i \in \mathrm{conv}(A_j)$ tales que $\|x - y_i\| \leq \frac{\lambda}{2^i}$. Por hipótesis, $d\big(\mathrm{conv}(A_{j+1} \backslash B_{\mathcal{E}}(x)), y_i\big) \leq \frac{\lambda}{2^j} < \frac{2\lambda}{2^i}$. Entonces existe $z_i \in \mathrm{conv}(A_{j+1} \backslash B_{\mathcal{E}}(x))$ tal que $\|y_i - z_i\| < \frac{2\lambda}{2^i}$. Podemos escribir z_i como una combinación convexa finita,

$$z_i = \sum_{n=1}^{p} \lambda_n u_n,$$

donde $p \in \mathbb{N}, \sum_{n=1}^{p} \lambda_n = 1$ y $u_n \in A_{j+1} \backslash B_{\mathcal{E}}(x)$, $n = 1, \ldots, p$. Por otro lado, $A_{j+1} \backslash B_{\mathcal{E}}(x) \subset \mathrm{conv}(A_{j+1}) \underset{(1.34)}{\subset} B_{\frac{4\lambda}{2^{j+1}}}(A) \subset B_{\frac{4\lambda}{2^i}}(A)$. Entonces existe $v_n \in A$ tal que $\|u_n - v_n\| \leq \frac{4\lambda}{2^i}$, $n = 1, \ldots, p$. Sea $w_i := \sum_{n=1}^{p} \lambda_n v_n$. Se tiene que $\|z_i - w_i\| \leq \sum_{n=1}^{p} \lambda_n \|u_n - v_n\| \leq \sum_{n=1}^{p} \lambda_n \frac{4\lambda}{2^i} = \frac{4\lambda}{2^i}$. Así,

$$\|x - w_i\| \leq \|x - y_i\| + \|y_i - z_i\| + \|z_i - w_i\| \leq \frac{\lambda}{2^i} + \frac{2\lambda}{2^i} + \frac{4\lambda}{2^i} = \frac{7\lambda}{2^i}.$$

Como $\|u_n - x\| \geq \mathcal{E},\ n = 1, \ldots, p\ \ (u_n \notin B_{\mathcal{E}}(x))$, entonces

$$\|v_n - x\| \geq \|u_n - x\| - \|u_n - v_n\| \geq \mathcal{E} - \frac{4\lambda}{2^i} \geq \mathcal{E} - \frac{4\lambda}{2^k} > \frac{\mathcal{E}}{2}.$$

Luego $v_n \in A \backslash B_{\frac{\mathcal{E}}{2}}(x),\ n = 1, \ldots, p$ y $w_i \in \operatorname{conv}(A \backslash B_{\frac{\mathcal{E}}{2}}(x))$. Por otro lado, $\lim_{i\to\infty} \|x - w_i\| \leq \lim_{i\to\infty} \frac{7\lambda}{2^i} = 0$, lo que implica que $x \in \overline{\operatorname{conv}(A \backslash B_{\frac{\mathcal{E}}{2}}(x))}$. Por tanto, A no es dentable. $\square$

Lema 1.3.10. *Sean X un espacio de Banach y $A \subset X$ un subconjunto no vacío, cerrado y acotado. Supongamos que para todo $\mathcal{E} > 0$ y para toda función $f\colon A \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ s.c.i. y acotada inferiormente en A, existe $x^* \in X^*$, con $\|x^*\| < \mathcal{E}$, y $\alpha > 0$ tales que* $\operatorname{diam} S(-(f + x^*), A, \alpha) \leq 2\mathcal{E}$. *Entonces, para toda función $f\colon A \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ s.c.i. y acotada inferiormente en A, existe $x^* \in X^*$ tal que $\|x^*\| < \mathcal{E}$ y $f + x^*$ alcanza un mínimo fuerte en A.*

Demostración: Supongamos sin pérdida de generalidad que $A \subset B_X$ y que $0 < \mathcal{E} < 1$. Sea $\alpha_0 := 1$. Por hipótesis, existe $x_1^* \in X$ y $0 < \alpha_1 < 1$ tales que $\|x_1^*\| < \frac{\mathcal{E}}{2}$ y $\operatorname{diam} S_1 < \mathcal{E}$, donde $S_1 := S(-(f + x_1^*), A, \alpha_1)$. Aplicando la hipótesis a $f + x_1^*$ y $\mathcal{E}_1 := \alpha_1 \frac{\mathcal{E}}{2^2}$, existe $x_2^* \in X^*$ y $0 < \alpha_2 < \alpha_1 < 1$ tales que $\|x_2^*\| < \mathcal{E}_1$ y $\operatorname{diam} S_2 < 2\mathcal{E}_1$, donde $S_2 := (-(f + x_1^* + x_2^*), A, \alpha_2)$. Continuando con este proceso por inducción, obtenemos las sucesiones

$$\mathcal{E}_i > 0, \quad 0 < \alpha_i < 1, \quad x_i^* \in X^*, \quad S_i := S\left(-\left(f + \sum_{k=1}^{i} x_k^*\right), A, \alpha_i\right)$$

tales que para cada $i \in \mathbb{N}$,

$$\mathcal{E}_i = \mathcal{E}\frac{\alpha_i}{2^{i+1}}, \quad \|x_i^*\| < \mathcal{E}_{i-1}, \quad \operatorname{diam} S_i \leq 2\mathcal{E}_{i-1}, \quad \alpha_i < \alpha_{i-1}.$$

Por un lado, $\left\|\sum_{i=1}^{\infty} x_i^*\right\| \leq \sum_{i=1}^{\infty} \|x_i^*\| < \sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{E}_{i-1} = \mathcal{E} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\alpha_{i-1}}{2} \leq \mathcal{E} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} = \mathcal{E}$. Luego $\sum_{i=1}^{\infty} x_i^*$ converge a un punto $x^* \in X^*$. Por otro lado, como $\mathcal{E}_i \to 0$, entonces $\operatorname{diam} S_i \to 0$.

Veamos que $f + x^*$ alcanza un mínimo fuerte. Por la Proposición 1.3.7, tenemos que probar que $\lim_{\alpha\to 0^+} \operatorname{diam} S(-(f + x^*), A, \alpha) = 0$. Como $\operatorname{diam} S_i \to 0$, es suficiente con probar que dado $i \in \mathbb{N}$, existe $\alpha > 0$ tal que $S(-(f + x^*), A, \alpha) \subset S_i$. Para ello, definimos $w_i^* := \sum_{k=i+1}^{\infty} x_k^*,\ i \in \mathbb{N}$. Entonces $f + x^* = f + \sum_{k=1}^{i} x_k^* + w_i^*$. Como

$$\|w_i^*\| \leq \sum_{k=i+1}^{\infty} \|x_k^*\| \leq \mathcal{E} \sum_{k=i+1}^{\infty} \frac{\alpha_{k-1}}{2^k} < \mathcal{E}\alpha_i \sum_{k=i+1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \mathcal{E}\alpha_i \frac{1}{2^{i+2}} < \frac{\alpha_i}{2},$$

si escogemos $0 < \alpha < \alpha_i - 2\|w_i^*\|$, por el Lema 1.3.8 obtenemos que

$$S(-(f + x^*), A, \alpha) \subset S(-(f + x^* - w_i^*), A, \alpha_i) = S_i. \quad \square$$

1.3.2. Resultado principal

Teorema 1.3.11. *(Principio variacional de Stegall, 1978) [Ste1] (véase también [Ste2] y [BZ]). Sea X un espacio de Banach. Sea $C \subset X$ no vacío, cerrado, acotado, convexo, con la propiedad de Radon-Nikodym y sea $f\colon C \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ una función s.c.i. y acotada inferiormente. Entonces, dado $\mathcal{E} > 0$, existe $x^* \in X^*$ tal que $\|x^*\| < \mathcal{E}$ y $f + x^*$ alcanza un mínimo fuerte sobre C.*

Demostración:
Por el Lema 1.3.10, basta con probar que dado $\mathcal{E} > 0$ arbitrario, existe $x^* \in X^*$ con $\|x^*\| < \mathcal{E}$ y $\alpha > 0$ tales que $\operatorname{diam} S(-(f + x^*, C, \alpha)) \leq 2\mathcal{E}$. Por reducción al absurdo, supongamos que para todo $x^* \in X^*$ con $\|x^*\| < \mathcal{E}$ y para cada $\alpha > 0$, tenemos que $\operatorname{diam} S(-(f + x^*), C, \alpha) > 2\mathcal{E}$. Para todo $i \in \mathbb{N}$, definimos

$$A_i := \bigcup \left\{ S\left(-(f + x^*), C, \frac{1}{4^i}\right) \;:\; \|x^*\| \leq \mathcal{E} - \frac{1}{2^i} \right\}.$$

Para i suficientemente grande, $\mathcal{E} - \dfrac{1}{2^i} > 0$, por lo que $A_i \neq \emptyset$, luego (A_i) es una sucesión de conjuntos (eventualmente) no vacíos. Sea $\lambda := \dfrac{5}{2}$ y comprobemos que se satisfacen la hipótesis del Lema 1.3.9 con la sucesión (A_i). Veamos que dado $y \in X$, se tiene que

$$\operatorname{conv}(A_i) \subset \operatorname{conv}(A_{i+1} \backslash B_{\mathcal{E}}(y)) + \frac{\lambda}{2^i} B_X.$$

Por reducción al absurdo, si existe $x \in A_i$ tal que para algún $y \in X, x \notin \operatorname{conv}(A_{i+1} \backslash B_{\mathcal{E}}(y)) + \dfrac{\lambda}{2^i} B_X$, por el Teorema de Hahn-Banach, existe $y^* \in X^*$, con $\|y^*\| = 1$, tal que

$$y^*(x) \leq \inf_{A_{i+1} \backslash B_{\mathcal{E}}(y)} y^* - \frac{\lambda}{2^i}. \tag{1.35}$$

Como $x \in A_i$, existe $x^* \in X^*$ con $\|x^*\| < \mathcal{E} - \dfrac{1}{2^i}$ tal que $x \in S\left(-(f + x^*), C, \frac{1}{4^i}\right)$. Sea $z^* := x^* + \dfrac{1}{2^{i+1}} y^*$, entonces $\|z^*\| \leq \|x^*\| + \dfrac{1}{2^{i+1}} \|y^*\| < \mathcal{E} - \dfrac{1}{2^i} + \dfrac{1}{2^{i+1}} = \mathcal{E} - \dfrac{1}{2^{i+1}}$. Por tanto, por la definición de A_{i+1}, tenemos que $S\left(-(f + z^*), C, \frac{1}{4^{i+1}}\right) \subset A_{i+1}$. Teniendo en cuenta la afirmación que hemos obtenido por reducción al absurdo y que $\|z^*\| < \mathcal{E}$ obtenemos que $S\left(-(f + z^*), C, \frac{1}{4^{i+1}}\right) \not\subset B_{\mathcal{E}}(y)$. Luego existe $z \in C \backslash B_{\mathcal{E}}(y)$ tal que $-f(z) - z^*(z) > \sup_C(-f - z^*) - \dfrac{1}{4^{i+1}}$ y, por tanto,

$$f(z) + z^*(z) < \inf_C (f + z^*) + \frac{1}{4^{i+1}}. \tag{1.36}$$

Así, $z \in A_{i+1} \backslash B_{\mathcal{E}}(y)$ y por (1.35), $y^*(x) \leq \inf\limits_{A_{i+1} \backslash B_{\mathcal{E}}(y)} y^* - \dfrac{\lambda}{2^i} \leq y^*(z) - \dfrac{\lambda}{2^i}$, por lo que

$$\frac{\lambda}{2^i} \leq y^*(z-x). \tag{1.37}$$

Como $x \in S\left(-(f+x^*), A, \frac{1}{4^i}\right)$ y $z \in C$, obtenemos que $-f(x) - x^*(x) > \sup\limits_C(-f - x^*) - \dfrac{1}{4^i}$, luego

$$f(x) + x^*(x) < \inf_C (f + x^*) + \frac{1}{4^i} \leq f(z) + x^*(z) + \frac{1}{4^i}. \tag{1.38}$$

Usando (1.36) y (1.38):

$$\begin{aligned} f(z) + x^*(z) + \frac{1}{2^{i+1}} y^*(z) = f(z) + z^*(z) &\underset{(1.36)}{<} \inf_C (f + z^*) + \frac{1}{4^{i+1}} \\ &= \inf_C \left(f + x^* + \frac{1}{2^{i+1}} y^* \right) + \frac{1}{4^{i+1}} \\ &\leq f(x) + x^*(x) + \frac{1}{2^{i+1}} y^*(x) + \frac{1}{4^{i+1}} \\ &\underset{(1.38)}{<} f(z) + x^*(z) + \frac{1}{4^i} + \frac{1}{2^{i+1}} y^*(x) + \frac{1}{4^{i+1}}. \end{aligned}$$

Consecuentemente,

$$\frac{1}{2^{i+1}} y^*(z-x) < \frac{1}{4^i} + \frac{1}{4^{i+1}} = \frac{5}{4^{i+1}}.$$

Por tanto, $y^*(z-x) < \dfrac{5}{2^{i+1}} = \dfrac{\lambda}{2^i}$, lo cual entra en contradicción con (1.37).

Por consiguiente podemos aplicar el Lema 1.3.9, luego $A := \bigcap\limits_{i=1}^{\infty} \overline{\bigcup\limits_{j \geq i} \operatorname{conv}(A_j)}$ es no vacío y no dentable. Pero $A \subset C$ y está acotado, luego C no tiene la propiedad de Radon-Nikodym, lo cual es una contradicción. $\square$

Veamos a continuación una variante de este resultado, muy útil en aplicaciones.

Corolario 1.3.12. *(M. Fabian, 1983) [Fa] Sean X un espacio de Banach con la propiedad de Radon-Nikodym y $f\colon X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ una función s.c.i. Supongamos que existen $a > 0$ y $b \in \mathbb{R}$ tales que $f(x) > a\|x\| + b$, para todo $x \in X$. Entonces, dado $\mathcal{E} > 0$, existe $x^* \in X^*$ tal que $\|x^*\| < \mathcal{E}$ y $f + x^*$ alcanza un mínimo fuerte sobre X.*

Demostración:
Como podemos reemplazar f por $f - b$, podemos suponer que $b = 0$. Nótese que si $x^* \in X^*$ con $\|x^*\| < \dfrac{a}{2}$, entonces para todo $x \in X$,

$$f(x) + x^*(x) \geq a\|x\| + x^*(x) \geq a\|x\| - \|x^*\|\|x\| \geq a\|x\| - \frac{a}{2}\|x\| = \frac{a}{2}\|x\|. \tag{1.39}$$

Sea $r := \dfrac{2}{a}\big(f(0)+1\big)$. Aplicando el P.V. de Stegall a f restringida a la bola rB_X, con $0 < \mathcal{E} < \dfrac{a}{2}$, tenemos que existe $x^* \in X^*$ tal que $\|x^*\| < \mathcal{E}$ y $f + x^*$ alcanza un mínimo fuerte en $\bar{x} \in rB_X$.

Queda ver que $\bar{x}$ es un mínimo fuerte de $f + x^*$ en X. Si $x \in X$ es tal que

$$f(x) + x^*(x) \leq f(\bar{x}) + x^*(\bar{x}) = \inf_{rB_X}(f + x^*) \leq f(0) + x^*(0) = f(0),$$

entonces $\dfrac{a}{2}\|x\| \underset{(1.39)}{\leq} f(x) + x^*(x) \leq f(0)$ y, por tanto,

$$\|x\| \leq \frac{2}{a} f(0) < r.$$

Luego $x \in rB_X$ y $f(x) + x^*(x) = f(\bar{x}) + x^*(\bar{x})$. Por ser $x \in X$ arbitrario, entonces

$$f(\bar{x}) + x^*(\bar{x}) = \inf_X (f + x^*).$$

Dada $(x_i) \subset X$ tal que $f(x_i) + x^*(x_i) \to f(\bar{x}) + x^*(\bar{x})$, tenemos que para todo i suficientemente grande,

$$f(x_i) + x^*(x_i) < f(0) + 1.$$

Así,

$$\frac{a}{2}\|x_i\| \underset{(1.39)}{\leq} f(x_i) + x^*(x_i) < f(0) + 1.$$

Luego $\|x_i\| < \dfrac{2}{a}(f(0)+1) = r$, para i suficientemente grande. Por tanto, $(x_i) \subset rB_X$ (eventualmente). Como $\bar{x}$ es un mínimo fuerte de $f + x^*$ restringido a rB_X y $f(x_i) + x^*(x_i) \to f(\bar{x}) + x^*(\bar{x})$, entonces $\|x_i - \bar{x}\| \to 0$. Luego $\bar{x}$ es un mínimo fuerte de $f + x^* \colon X \to \mathbb{R}$. $\square$

1.3.3. Aplicaciones

Para desarrollar esta subsección, utilizaremos [BZ], [Phe], [Ste1] y [Ste2]. En primer lugar, caracterizaremos los conjuntos que tengan la propiedad de Radon-Nikodym. Previamente veremos algunos resultados sobre puntos fuertemente expuestos.

Definición 1.3.13. *Sea X un espacio de Banach y sea $C \subset X$ cerrado y convexo. Decimos que $x \in C$ está* ***expuesto*** *por $x^* \in X^*$ o que x^** ***expone*** *a C en x si $x^*(x) = \sup_C x^* > x^*(y)$, para todo $y \in C \backslash \{x\}$.*

Definición 1.3.14. *Sea X un espacio de Banach y sea $C \subset X$ cerrado y convexo. Decimos que $x \in C$ está* ***fuertemente expuesto*** *por $x^* \in X^*$ o que x^** ***expone fuertemente*** *a C en x si dada $(x_n) \subset C$ tal que $x^*(x_n) \to \sup_C x^*$, se tiene que $\|x_n - x\| \to 0$.*

Observación 1.3.15. *Si x^* expone fuertemente a C en x, entonces x^* expone a C en x.*

Demostración:
Sea $(x_n) \subset C$ tal que $x^*(x_n) \to \sup_C x^*$. Entonces, por ser x un punto fuertemente expuesto por x^*, se tiene que $x_n \to x$ y, por continuidad, que $x^*(x_n) \to x^*(x)$. Luego $x^*(x) = \lim_{n\to\infty} x^*(x_n) = \sup_C x^*$. Si existe $\tilde{x}$ tal que $x^*(\tilde{x}) = \sup_C x^*$, definimos $(y_n) \subset C$ tal que $y_n = \tilde{x}$ (eventualmente). Entonces $y_n \to \tilde{x}$ y por continuidad $x^*(y_n) \to x^*(\tilde{x}) = \sup_C x^*$. Por tanto, $\|y_n - x\| \to 0$ y por continuidad $\|y_n - x\| \to \|\tilde{x} - x\|$, luego $\tilde{x} = x$, por lo que x es único. $\square$

Proposición 1.3.16. *Sean X un espacio de Banach, $C \subset X$ un subconjunto convexo y cerrado y $x^* \in X^*$ un funcional acotado superiormente en C. El punto $x \in C$ está fuertemente expuesto por x^* si, y sólo si, para todo $\alpha > 0$, se verifica que $x \in S(x^*, C, \alpha)$ y $\lim_{\alpha\to 0^+} \operatorname{diam} S(x^*, C, \alpha) = 0$.*

Demostración:
$\boxed{\Rightarrow}$ Supongamos que $x \in C$ está fuertemente expuesto por $x^* \in C$. Entonces, dada $(x_n) \subset C$ tal que $x^*(x_n) \to \sup_C x^*$, se tiene que $\|x_n - x\| \to 0$. Luego $-x^*(x_n) \to -x^*(x) = \inf_C(-x^*)$ (por continuidad). Así, x es un mínimo fuerte de $-x^*$ en C y por la Proposición 1.3.7, tenemos que $\lim_{\alpha\to 0^+} \operatorname{diam} S(x^*, C, \alpha) = 0$. Por continuidad, $x^*(x_n) \to x^*(x) = \sup_C x^*$. Entonces $x^*(x) > \sup_C x^* - \alpha$ para todo $\alpha > 0$. Por tanto, $x \in S(x^*, C, \alpha)$ para todo $\alpha > 0$.

$\boxed{\Leftarrow}$ Supongamos que existe un punto $x \in C$ tal que para cada $\alpha > 0$ se verifica $x \in S(x^*, C, \alpha)$ y $\lim_{\alpha\to 0^+} \operatorname{diam} S(x^*, C, \alpha) = 0$. Sea $(\alpha_n) \subset \mathbb{R}$ tal que $\alpha_n \to 0^+$. Como $x \in S(x^*, C, \alpha_n)$, para cada $n \in \mathbb{N}$, entonces $x^*(x) > \sup_C x^* - \alpha_n \to \sup_C x^*$. Luego $x^*(x) = \sup_C x^*$, o equivalentemente, $-x^*(x) = \inf_C(-x^*)$.

Dada una sucesión $(x_n) \subset C$ tal que $x^*(x_n) \to \sup_C x^*$, entonces $-x^*(x_n) \to \inf_C(-x^*)$. Como $\lim_{\alpha\to 0^+} \operatorname{diam} S(x^*, C, \alpha) = 0$, por (1.3.7), $-x^*$ alcanza un mínimo fuerte. Además, es único (en caso contrario, $\lim_{\alpha\to 0^+} \operatorname{diam} S(x^*, C, \alpha) > 0$), luego dicho punto es x. Por tanto, $\|x_n - x\| \to 0$. $\square$

Teorema 1.3.17. *Sean X un espacio de Banach y $C \subset X$ convexo, cerrado, acotado, no vacío y con la propiedad de Radon-Nikodym. Entonces C es la envoltura convexa cerrada de sus puntos fuertemente expuestos y los funcionales que exponen fuertemente a C constituyen un subconjunto G_δ-denso de X^*.*

Demostración:
Probaremos primero la segunda afirmación. Para cada $i \in \mathbb{N}$, definimos el conjunto

$$G_i := \left\{ x^* \in X^* \, : \, \operatorname{diam} S(x^*, C, \alpha) < \frac{1}{i}, \text{ para algún } \alpha > 0 \right\}.$$

Sea $G := \bigcap_{i=1}^{\infty} G_i$. Si $y^* \in G_i$, por el Lema 1.3.8, existe un entorno abierto de y^* que está contenido en G_i, por lo que es abierto en X^*. Aplicando el P.V. de Stegall a todo elemento $f \in X^*$, obtenemos que G_i es un conjunto denso en X^*. Así, por el Teorema de Categoría de Baire, entonces G es G_δ-denso en X^*. Si x^* expone fuertemente a C, entonces define rebanadas de diámetro arbitrariamente pequeño, por lo que $x^* \in G$. Recíprocamente, si $x^* \in G$, entonces definirá una sucesión de rebanadas encajadas de C, $(S(x^*, C, \alpha_i))$, cuyos diámetros convergen a 0. Sus clausuras se intersecan en un punto de C que está fuertemente expuesto por x^*.

Probemos la primera afirmación. Sea D la envoltura convexa cerrada de los puntos fuertemente expuestos de C. Por reducción al absurdo, supongamos $D \neq C$. Por el Teorema de Hahn-Banach, existe $x^* \in X^*$ tal que

$$\sup_D x^* < \sup_C x^*.$$

Como los funcionales soporte son continuos en norma sobre X^*, existe un funcional en el conjunto denso de G para el cual se mantiene la desigualdad, contradiciendo la definición de D. $\square$

De aquí obtenemos el resultado que caracteriza los conjuntos con la Propiedad de Radon-Nikodym.

Corolario 1.3.18. *Sea X un espacio de Banach. Entonces, X tiene la propiedad de Radon-Nikodym si, y sólo si, todo subconjunto cerrado convexo y acotado de X es la envoltura convexa cerrada de sus puntos fuertemente expuestos.*

Demostración:

$\boxed{\Rightarrow}$ Supongamos que X tiene la propiedad de Radon-Nikodym. Entonces cada subconjunto cerrado, convexo y acotado de X hereda la propiedad de Radon-Nikodym y aplicando el teorema anterior, obtenemos el resultado que queremos probar.

$\boxed{\Leftarrow}$ Supongamos que todo subconjunto cerrado, convexo y acotado de X es la envoltura convexa cerrada de sus puntos fuertemente expuestos. Para ver que X tiene la propiedad de Radon-Nikodym, tenemos que ver que todo subconjunto no vacío y acotado de X es dentable. Sea $A \subset X$ no vacío y acotado (arbitrario) y denotemos $K := \overline{\mathrm{conv}(A)}$. Entonces $K \neq \emptyset$ y, por hipótesis, existe un punto de K donde algún funcional expone fuertemente a K en dicho punto. Así, dado $\mathcal{E} > 0$, existen $x^* \in X^*$ y $\alpha > 0$ tales que

$$S(x^*, K, \alpha) = \{x \in K \,:\, x^*(x) > \sup_K x^* - \alpha\} \neq \emptyset \text{ y } \operatorname{diam} S(x^*, K, \alpha) < \mathcal{E}.$$

Por un lado, A está contenido en $\{x \in X \,:\, x^*(x) \leq \sup_A x^*\}$, el cual es convexo y cerrado. Entonces,

$$K = \overline{\mathrm{conv}\, A} \subset \overline{\mathrm{conv}\, \{x \in X \,:\, x^*(x) \leq \sup_A x^*\}} = \{x \in X \,:\, x^*(x) \leq \sup_A x^*\}.$$

Luego $x^*(x) \leq \sup\limits_A x^*$, para todo $x \in K$, y, por tanto,

$$\sup_A x^* = \sup_K x^*. \tag{1.40}$$

Finalmente, $S(x^*, A, \alpha) \underset{(1.40)}{=} \{x \in A : x^*(x) > \sup\limits_K x^* - \alpha\} \subset \{x \in K : x^*(x) > \sup\limits_K x^* - \alpha\}$ y, consecuentemente,

$$\operatorname{diam} S(x^*, A, \alpha) \leq \operatorname{diam} S(x^*, K, \alpha) < \mathcal{E}. \tag{1.41}$$

Luego A es dentable y, por tanto, X tiene la propiedad de Radon-Nikodym. $\square$

Probemos a continuación el teorema de Pitt mediante el P.V. de Stegall. Este teorema es un resultado clásico sobre la compacidad de operadores lineales acotados entre espacios ℓ_p y suele probarse utilizando la teoría de bases de Schauder (véase [FHHMZ]). La prueba variacional que daremos está extraída de [FaZi], publicada en 2003, y [BZ].

Teorema 1.3.19. *(Teorema de Pitt)*
Sean $1 \leq p < q < +\infty$. Si $T\colon \ell_q \to \ell_p$ es un operador lineal y acotado, entonces T es compacto.

Demostración: Definimos la función $f\colon \ell_q \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) := \|x\|_q^q - \|Tx\|_p^p$. Si $\|x\|_q$ es suficientemente grande, tenemos que $f(x) > \|x\|_q$, ya que T está acotado y

$$f(x) = \|x\|_q^q - \|Tx\|_p^p \geq \|x\|_q^p(\|x\|_q^{q-p} - \|T\|^p).$$

Luego f está acotada en cualquier bola. Por tanto, podemos aplicar el Corolario 1.3.12 de Fabian y encontrar un punto $x \in \ell_q$ y un funcional $x^* \in \ell_q^*$ tales que

$$f(x+h) - f(x) - x^*(h) \geq 0, \text{ para cada } h \in \ell_q.$$

Así, $x^*(-h) \geq f(x) - f(x+h)$, luego $x^*(h) \geq f(x) - f(x-h)$, para cada $h \in \ell_q$. Por tanto,

$$f(x+h) + f(x-h) - 2f(x) \geq 0, \text{ para cada } h \in \ell_q.$$

Entonces,

$$\|x+h\|_q^q + \|x-h\|_q^q - 2\|x\|_q^q \geq \|T(x+h)\|_p^p + \|T(x-h)\|_p^p - 2\|Tx\|_p^p, \text{ para cada } h \in \ell_q.$$

Sea (x_i) una sucesión acotada en ℓ_q. Por ser ℓ_q reflexivo, escogiendo una subsucesión si es necesario, podemos asumir que (x_i) converge débilmente a algún $y \in \ell_q$. Veamos entonces que $\|Tx_i - Ty\| \xrightarrow{i\to\infty} 0$. En efecto, sustituyendo $h = t(x_i - y)$ en la última desigualdad, obtenemos que

$$\|x + t(x_i - y)\|_q^q + \|x - t(x_i - y)\|_q^q - 2\|x\|_q^q \geq \|Tx + tT(x_i - y)\|_p^p + \|Tx - tT(x_i - y)\|_p^p - 2\|Tx\|_p^p.$$

para todo $i \in \mathbb{N}$ y $t > 0$. Usando el Lema 0.3.27, si $z \in \ell_r$, con $1 \leq r < \infty$, y $w_i \xrightarrow{w} 0$ en ℓ_r, entonces

$$\mathit{lim\,sup}_{i\to\infty} \|z + w_i\|_r^r = \|z\|_r^r + \mathit{lim\,sup}_{i\to\infty} \|w_i\|_r^r,$$

luego tenemos que

$$\mathit{lim\,sup}_{i\to\infty} \|x \pm t(x_i - y)\|_q^q = \|x\|_q^q + t^q \,\mathit{lim\,sup}_{i\to\infty} \|x_i - y\|_q^q$$

y

$$\mathit{lim\,sup}_{i\to\infty} \|Tx \pm tT(x_i - y)\|_p^p = \|Tx\|_p^p + t^p \,\mathit{lim\,sup}_{i\to\infty} \|T(x_i - y)\|_p^p.$$

Así,

$$2t^q \,\mathit{lim\,sup}_{i\to\infty} \|x_i - y\|_q^q \geq 2t^p \,\mathit{lim\,sup}_{i\to\infty} \|T(x_i - y)\|_p^p, \text{ para todo } t > 0.$$

Dividiendo por $2t^p$ en ambos lados de la desigualdad y aplicando la desigualdad triangular,

$$t^{q-p} \limsup_{i\to\infty} (\|x_i\|_q + \|y\|_q)^q \geq \limsup_{i\to\infty} \|T(x_i - y)\|_p^p, \text{ para todo } t > 0.$$

Por tanto, como (x_i) es una sucesión acotada en ℓ_q, haciendo $t \to 0$, obtenemos que

$$\|T(x_i - y)\|_p \xrightarrow{i\to\infty} 0. \quad \square$$

1.4. Principio variacional de Borwein-Preiss

Un problema que surge del P.V. de Ekeland al aplicarlo a una función suave, f, es que la función $f(\cdot)+\|(\cdot)+x_1\|$ puede no ser suave. Los británicos Jonathan Michael Borwein y David Preiss fueron los primeros en dar unas condiciones para solucionar este problema, dando lugar al principio variacional que lleva su nombre y siendo el primero de los llamados *principios variacionales suaves*. En esta sección veremos una prueba adaptada de Li y Shi [LiSh] (la original se puede ver en el artículo original [BP]).

Definición 1.4.1. *Sea (X,d) un espacio métrico. Decimos que una función continua $\rho\colon X\times X\to[0,+\infty]$ es un función de* ***tipo gauge en un espacio métrico completo*** *si verifica*

i) $\rho(x,x)=0$, *para todo* $x\in X$,

ii) Dado $\mathcal{E}>0$, *existe* $\delta>0$ *tal que si* $\rho(x,y)\le\delta$ *para* $x,y\in X$, *entonces* $d(x,y)<\mathcal{E}$.

Teorema 1.4.2. *(Principio Variacional de Borwein-Preiss, 1987) [BP], [LiSh] (véase también [BZ]). Sea (X,d) un espacio métrico completo y sea $f\colon X\to\mathbb{R}\cup\{+\infty\}$ una función s.c.i. y acotada inferiormente. Supongamos que ρ es una función de tipo gauge y que $(\delta_i)_{i=0}^{\infty}$ es una sucesión de números positivos. Si $\mathcal{E}>0$ y $z\in X$ satisfacen que $f(z)<\inf\limits_X f+\mathcal{E}$, entonces existe $y\in X$ y una sucesión $\{x_i\}\subset X$ tales que*

1. $\rho(z,y)\le\dfrac{\mathcal{E}}{\delta_0}$ *y* $\rho(x_i,y)\le\dfrac{\mathcal{E}}{2^i\delta_0}$, *para todo* $i\in\mathbb{N}$.

2. $f(y)+\displaystyle\sum_{i=0}^{\infty}\delta_i\rho(y,x_i)\le f(z)$.

3. $f(x)+\displaystyle\sum_{i=0}^{\infty}\delta_i\rho(x,x_i)>f(y)+\sum_{i=0}^{\infty}\delta_i\rho(y,x_i)$, *para todo* $x\in X\backslash\{y\}$.

Demostración: Definimos las sucesiones (x_i) y (S_i) inductivamente. Sean

$$x_0:=z \text{ y } S_0:=\{x\in X\,:\,f(x)+\delta_0\rho(x,x_0)\le f(x_0)\},$$

el cual es no vacío (ya que $z\in S_0$) y es cerrado porque f y $\rho(\cdot,x_0)$ son s.c.i. Luego tenemos que

$$\delta_0\rho(x,x_0)\le f(x_0)-f(x)\le f(z)-\inf_X f\le\mathcal{E},\ \text{ para todo } x\in S_0. \tag{1.42}$$

De forma similar, escogemos $x_1\in S_0$ tal que $f(x_1)+\delta_0\rho(x_1,x_0)\le\inf\limits_{x\in S_0}\,[f(x)+\delta_0\rho(x,x_0)]+\dfrac{\delta_1\mathcal{E}}{2\delta_0}$ y definimos

$$S_1:=\{x\in S_0\,:\,f(x)+\delta_0\rho(x,x_0)+\delta_1\rho(x,x_1)\le f(x_1)+\delta_0\rho(x_1,x_0)\}\,.$$

En general, supongamos que hemos definido x_j y S_j, para $j = 0, 1, \ldots, i-1$ satisfaciendo

$$f(x_j) + \sum_{k=0}^{j-1} \delta_k \rho(x_j, x_k) \leq \inf_{x \in S_{j-1}} \left[f(x) + \sum_{k=0}^{j-1} \delta_k \rho(x, x_k) \right] + \frac{\mathcal{E}\delta_j}{2^j \delta_0} \tag{1.43}$$

y

$$S_j := \left\{ x \in S_{j-1} \ : \ f(x) + \sum_{k=0}^{j} \delta_k \rho(x, x_k) \leq f(x_j) + \sum_{k=0}^{j-1} \delta_k \rho(x, x_k) \right\}. \tag{1.44}$$

Escogemos $x_i \in S_{i-1}$ tal que $f(x_i) + \sum_{k=0}^{i-1} \delta_k \rho(x_i, x_k) \leq \inf_{x \in S_{i-1}} \left[f(x) + \sum_{k=0}^{i-1} \delta_k \rho(x, x_k) \right] + \frac{\mathcal{E}\delta_i}{2^i \delta_0}$ y definimos

$$S_i := \left\{ x \in S_{i-1} \ : \ f(x) + \sum_{k=0}^{i} \delta_k \rho(x, x_k) \leq f(x_i) + \sum_{k=0}^{i-1} \delta_k \rho(x_i, x_k) \right\}. \tag{1.45}$$

Nótese que para cada $i \in \mathbb{N}$, S_i es cerrado y no vacío. Por tanto, para todo $x \in S_i$,

$$\begin{aligned} \delta_i \rho(x, x_i) &\leq \left[f(x_i) + \sum_{k=0}^{i-1} \delta_k \rho(x_i, x_k) \right] - \left[f(x) + \sum_{k=0}^{i-1} \delta_k \rho(x, x_k) \right] \\ &\leq \left[f(x_i) + \sum_{k=0}^{i-1} \delta_k \rho(x_i, x_k) \right] - \inf_{x \in S_{i-1}} \left[f(x) + \sum_{k=0}^{i-1} \delta_k \rho(x, x_k) \right] \\ &\leq \frac{\mathcal{E}\delta_i}{2^i \delta_0}. \end{aligned}$$

Es decir,

$$\rho(x, x_i) \leq \frac{\mathcal{E}}{2^i \delta_0}, \text{ para todo } x \in S_i. \tag{1.46}$$

Como ρ es una función de tipo gauge, la desigualdad anterior implica que $\operatorname{diam}(S_i) \to 0$. Como además X es completo y (S_i) es una sucesión decreciente de cerrados no vacíos, entonces por (1.42) y (1.46), existe un único $y \in \bigcap_{i=0}^{\infty} S_i$, satisfaciendo la condición *1.* Además, $\lim_{i \to \infty} x_i \to y$. Dado $x \neq y$, tenemos que $x \notin \bigcap_{i=0}^{\infty} S_i$ y, por tanto, para algún $j \in \mathbb{N}$:

$$f(x) + \sum_{k=0}^{\infty} \delta_k \rho(x, x_k) \geq f(x) + \sum_{k=0}^{j} \delta_k \rho(x, x_k) > f(x_j) + \sum_{k=0}^{j-1} \delta_k \rho(x_j, x_k). \tag{1.47}$$

Teniendo en cuenta que $y \in \bigcap_{i=0}^{\infty} S_i$ y la forma de cada conjunto S_i, obtenemos que si $q \geq j \geq 1$, entonces

$$\begin{aligned} f(z) = f(x_0) &\geq f(x_j) + \sum_{k=0}^{j-1} \delta_k \rho(x_j, x_k) \geq f(x_q) + \sum_{k=0}^{q-1} \delta_k \rho(x_q, x_k) \\ &\geq f(y) + \sum_{k=0}^{q} \delta_k \rho(y, x_k) \underset{q \to +\infty}{\longrightarrow} f(y) + \sum_{k=0}^{\infty} \delta_k \rho(y, x_k), \end{aligned} \tag{1.48}$$

verificando así la condición *2.* del enunciado. Combinando (1.47) y (1.48), obtenemos la condición *3.*,

$$f(x) + \sum_{k=0}^{\infty} \delta_k \rho(x, x_k) > f(x_j) + \sum_{k=0}^{j-1} \delta_k \rho(x_j, x_k) \geq f(y) + \sum_{k=0}^{\infty} \delta_k \rho(y, x_k). \quad \square$$

<u>Corolario</u> 1.4.3. *[BP] [LiSh] Sean $(X, \|\cdot\|)$ un espacio de Banach y $f\colon X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ una función s.c.i. y acotada inferiormente. Sean $\lambda > 0$ y $p \geq 1$. Si $\mathcal{E} > 0$ y $z \in X$ satisfacen que $f(z) < \inf_X f + \mathcal{E}$, entonces existe $y \in X$, $(x_i) \subset X$, con $x_1 = z$, y una función $\varphi_p : X \to \mathbb{R}$ de la forma*

$$\varphi_p(x) := \sum_{i=1}^{\infty} \mu_i \|x - x_i\|^p,$$

donde $\mu_i > 0$, para cada $i \in \mathbb{N}$ y $\sum_{i=1}^{\infty} \mu_i = 1$, tales que

1. *$\|x_i - y\| \leq \lambda$, para todo $i \in \mathbb{N}$.*
2. *$f(y) + \dfrac{\mathcal{E}}{\lambda^p} \varphi_p(y) \leq f(z)$.*
3. *$f(x) + \dfrac{\mathcal{E}}{\lambda^p} \varphi_p(x) > f(y) + \dfrac{\mathcal{E}}{\lambda^p} \varphi_p(y)$, para todo $x \in X \backslash \{y\}$.*

Además, si $\|\cdot\|$ es Fréchet diferenciable (Gâteaux diferenciable), entonces φ_p también lo es para $p > 1$.

<u>Demostración:</u> Basta elegir $\rho(x, y) := \|x - y\|^p$, $\delta_0 := \mathcal{E}\lambda^p$ y $\delta_i := \dfrac{\mathcal{E}\mu_i}{\lambda^p}$, para cada $i \in \mathbb{N}$. Aplicando el Principio Variacional de Borwein-Preiss, obtenemos que

(a) $\rho(x_i, y) = \|x_i - y\|^p \leq \dfrac{\mathcal{E}}{2^i \delta_0} \leq \lambda^p$, entonces $\|x_i - y\| \leq \lambda$, para todo $i = 1, 2, \ldots$

(b) $f(y) + \sum_{i=1}^{\infty} \delta_i \rho(y, x_i) = f(y) + \dfrac{\mathcal{E}}{\lambda^p} \sum_{i=1}^{\infty} \mu_i \|y - x_i\|^p = f(y) + \dfrac{\mathcal{E}}{\lambda^p} \varphi_p(y) \leq f(z)$.

(c) $f(x) + \sum_{i=1}^{\infty} \delta_i \rho(x, x_i) = f(x) + \dfrac{\mathcal{E}}{\lambda^p} \sum_{i=1}^{\infty} \mu_i \|x - x_i\|^p = f(x) + \dfrac{\mathcal{E}}{\lambda^p} \varphi_p(x) > f(y) + \sum_{i=1}^{\infty} \delta_i \rho(y, x_i) =$

$$= f(y) + \frac{\mathcal{E}}{\lambda^p} \sum_{i=1}^{\infty} \mu_i \|y - x_i\|^p = f(y) + \frac{\mathcal{E}}{\lambda^p} \varphi_p(y), \text{ para todo } x \in X \backslash \{y\}. \quad \square$$

Gracias a este resultado, el P.V. de Borwein-Preiss se considera un principio variacional suave, pues si la norma del espacio de Banach es diferenciable (salvo en 0), entonces la función φ_p también lo será para $p > 1$. Para $p = 1$ obtenemos una forma equivalente al P.V. de Ekeland, con lo cual vemos claramente que el P.V. de Borwein-Preiss generaliza al de Ekeland.

1.5. Principio variacional de Deville-Godefroy-Zizler

Posteriormente al P.V. de Borwein-Preiss, en 1993, los franceses Robert Deville y Gilles Godefroy junto con el checo Václav Zizler, dieron un resultado equivalente que era sustancialmente más simple. Es interesante ver como en la prueba se aplica el Teorema de Categoría de Baire, el cual nos dice que en un espacio métrico completo toda intersección numerable de conjuntos densos y abiertos es también densa. Durante esta sección seguiremos [FHHMZ], [DGZ2] y [DGZ3]. Veamos un par de lemas previos.

Lema 1.5.1. *Sea X un espacio de Banach y consideremos el subespacio $Y := \{h\colon X \to \mathbb{R} : h$ es acotada, Lipschitz y Fréchet diferenciable (Gâteaux diferenciable)$\}$. Si $\|h\|_Y := \|h\|_\infty + \|h'\|_\infty$, entonces $(Y, \|\cdot\|_Y)$ es un espacio de Banach.*

Demostración:
$\|\cdot\|_Y$ verifica las propiedades de una norma trivialmente. Probaremos que Y es completo. Sea (h_n) una sucesión de Y tal que $\sum_{n=1}^{\infty} \|h_n\|_Y < \infty$. Por una parte, $\|h_n\|_\infty \leq \|h_n\|_Y, n \in \mathbb{N}$, luego $\sum_{n=1}^{\infty} \|h_n\|_\infty < \infty$. El espacio de las funciones acotadas lipschitzianas es Banach, por lo que existe $h \in Y$ tal que

$$\left\| h - \sum_{n=1}^{N} h_n \right\|_\infty \underset{N\to\infty}{\longrightarrow} 0. \tag{1.49}$$

Por otra parte, $\|h'_n\|_\infty \leq \|h_n\|_Y$, para cada $n \in \mathbb{N}$, por tanto $\sum_{n=1}^{\infty} \|h'_n\|_\infty < \infty$. El espacio de las funciones acotadas que van de X a $L(X, \mathbb{R})$ con la norma $\|\cdot\|_\infty$ también es Banach, luego existe $\tilde{h}\colon X \to L(X, \mathbb{R})$ acotada tal que

$$\left\| \tilde{h} - \sum_{n=1}^{N} h'_n \right\|_\infty \underset{N\to\infty}{\longrightarrow} 0. \tag{1.50}$$

(Nota: h'_n es acotada por la lipschitzianidad de h_n, para todo $n \in \mathbb{N}$). Aplicando el Criterio de convergencia uniforme, por (1.49) y (1.50), entonces h es diferenciable y tenemos que $h' = \tilde{h}$. Por tanto,

$$\left\| h - \sum_{n=1}^{N} h_n \right\|_Y = \left\| h - \sum_{n=1}^{N} h_n \right\|_\infty + \left\| h' - \sum_{n=1}^{N} h'_n \right\|_\infty \underset{N\to\infty}{\longrightarrow} 0 + 0 = 0.$$

Luego Y es completo. $\square$

Lema 1.5.2. *Sea X un espacio de Banach. Si $b\colon X \to \mathbb{R}$ es una meseta Fréchet diferenciable (Gâteaux diferenciable) y Lipschitz entonces para todo $\mathcal{E} > 0$, existe otra meseta $b_\mathcal{E} : X \to \mathbb{R}$ tal que $\|b_\mathcal{E}\|_\infty < \mathcal{E}$, $\|b'_\mathcal{E}\|_\infty < \mathcal{E}$ y $\operatorname{sop} b_\mathcal{E} \subset B_\mathcal{E}(0)$.*

Demostración: Como b es una función meseta, su soporte está acotado, luego existe $\delta > 0$ tal que $\operatorname{sop} b \subset \bar{B}_\delta(0)$. Como b es lipschitziana, entonces b' está acotada y podemos definir $M := 1 + \text{máx}\{\|b\|_\infty, \frac{\delta}{\mathcal{E}}\|b'\|_\infty\}$. Definamos

$$b_\mathcal{E}\colon X \to \mathbb{R} \text{ tal que } b_\mathcal{E}(x) := \frac{\mathcal{E}}{M} b\left(\frac{\delta}{\mathcal{E}} x\right).$$

Tenemos que $b_\mathcal{E} \not\equiv 0$ ya que $b \not\equiv 0$. Además,

(i) $|b_\mathcal{E}(x)| = \frac{\mathcal{E}}{M}\left|b\left(\frac{\delta}{\mathcal{E}}x\right)\right| \leq \dfrac{\mathcal{E}}{M}\|b\|_\infty < \dfrac{\mathcal{E}}{\|b\|_\infty}\|b\|_\infty = \mathcal{E}, x \in X$, luego $\|b_\mathcal{E}\|_\infty < \mathcal{E}$;

(ii) $\|b'_\mathcal{E}(x)\| = \frac{\mathcal{E}}{M}\frac{\delta}{\mathcal{E}}\left\|b'\left(\frac{\delta}{\mathcal{E}}x\right)\right\| \leq \dfrac{\delta}{M}\|b'\|_\infty < \dfrac{\mathcal{E}}{\|b'\|_\infty}\|b'\|_\infty = \mathcal{E}, x \in X$, luego $\|b'_\mathcal{E}\|_\infty < \mathcal{E}$;

(iii) como $\operatorname{sop} b \subset \bar{B}_\delta(0)$, entonces $\operatorname{sop} b_\mathcal{E} = \frac{\mathcal{E}}{\delta}\operatorname{sop} b \subset \frac{\mathcal{E}}{\delta}\bar{B}_\delta(0) = \bar{B}_\mathcal{E}(0)$. $\square$

Teorema 1.5.3. *(Principio variacional de Deville-Godefroy-Zizler, 1993) [DGZ2] ([FHHMZ]). Sea X un espacio de Banach que admite una función meseta lipschitziana y Fréchet diferenciable (Gâteaux diferenciable). Sea $f\colon X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ una función s.c.i. y acotada inferiormente. Entonces, dado $\mathcal{E} > 0$, existe $g\colon X \to \mathbb{R}$ lipschitziana y Fréchet diferenciable (Gâteaux diferenciable respectivamente) tal que*

1.) $\|g\|_\infty \leq \mathcal{E}$, $\|g'\|_\infty \leq \mathcal{E}$;

2.) $f - g$ alcanza un mínimo fuerte sobre X.

Demostración:
La haremos para el caso Fréchet. Sea $Y := \{h\colon X \to \mathbb{R} : h$ es acotada, Lipschitz y Fréchet diferenciable$\}$, dotado de la norma $\|h\|_Y := \|h\|_\infty + \|h'\|_\infty$. Por el Lema 1.5.1, $(Y, \|\cdot\|)$ es espacio de Banach. Definimos para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$U_n := \left\{g \in Y \;:\; \text{existe } x_0 \in X \text{ con } f(x_0) - g(x_0) < \text{ínf}\{(f-g)(x) \;:\; \|x - x_0\| \geq \frac{1}{n}\}\right\}.$$

Veamos que cada U_n es abierto en Y. Dada $g \in U_n$, definimos $\alpha := \text{ínf}\{(f-g)(x) \;:\; \|x - x_0\| \geq \frac{1}{n}\} > f(x_0) - g(x_0)$ y $\mathcal{E} := \frac{1}{3}(\alpha - (f(x_0) - g(x_0)))$. Veamos que $\mathring{B}_\mathcal{E}(g) \subset U_n$. Dada $\tilde{g} \in \mathring{B}_\mathcal{E}(g)$, tenemos que

$$\begin{aligned}\text{ínf}\{(f-\tilde{g})(x) \;:\; \|x - x_0\| \geq \frac{1}{n}\} &\geq \text{ínf}\{(f-g)(x) \;:\; \|x - x_0\| \geq \frac{1}{n}\} + \text{ínf}\{(g-\tilde{g})(x) \;:\; \|x - x_0\| \geq \frac{1}{n}\}\\ &\geq \alpha - \|g - \tilde{g}\|_Y > \alpha - \frac{1}{3}(\alpha - (f(x_0) - g(x_0)))\\ &= \frac{2}{3}\alpha + \frac{1}{3}(f(x_0) - g(x_0)) > f(x_0) - g(x_0).\end{aligned}$$

Luego $\tilde{g} \in U_n$, por lo que éste es abierto.

Sea $b\colon X \to \mathbb{R}$ una meseta Fréchet diferenciable y Lipschitz. Por el Lema 1.5.2, para $\mathcal{E} > 0$ existe otra función meseta $b_{\mathcal{E}}\colon X \to \mathbb{R}$ tal que $\|b_{\mathcal{E}}\|_\infty < \mathcal{E}$, $\|b'_{\mathcal{E}}\| < \mathcal{E}$ y $\operatorname{sop} b_{\mathcal{E}} \subset B_{\mathcal{E}}(0)$. Veamos que cada U_n es denso en Y. Como $b_{\mathcal{E}}(0) > 0$, existe $x_0 \in X$ tal que

$$f(x_0) - g(x_0) < \inf_X (f - g) + b_{\mathcal{E}}(0).$$

Si definimos $v(x) := b_{\mathcal{E}}(x - x_0)$, tenemos que $v(x) = 0$ cuando $\|x - x_0\| \geq \frac{1}{n}$. Luego

$$f(x_0) - g(x_0) - v(x_0) < \inf_X (f - g) \leq \inf\{f(x) - g(x) - v(x) \,:\, \|x - x_0\| \geq \frac{1}{n}\}.$$

Por tanto, $g + v \in U_n$ y $\|v\|_Y = \|b_{\mathcal{E}}\|_Y < 2\mathcal{E}$. Así, U_n es denso en Y. Por el Teorema de Categoría de Baire, $G := \bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n$ es denso en Y.

Veamos que dada $g \in G$, $f - g$ tiene un mínimo. Dado $n \in \mathbb{N}$, como $g \in U_n$, existe $x_n \in X$ tal que

$$f(x_n) - g(x_n) < \inf\{f(x) - g(x) \,:\, \|x - x_n\| \geq \frac{1}{n}\}.$$

Por tanto, si $m \geq n$, entonces $\|x_m - x_n\| < \frac{1}{n}$. En efecto, si $\|x_m - x_n\| \geq \frac{1}{n}$, entonces

$$f(x_n) - g(x_n) < \inf\{f(x) - g(x) \,:\, \|x - x_n\| \geq \frac{1}{n}\} \leq f(x_m) - g(x_m). \tag{1.51}$$

Pero $\frac{1}{n} \geq \frac{1}{m}$, luego $\|x_m - x_n\| \geq \frac{1}{m}$ y así,

$$f(x_m) - g(x_m) < \inf\{f(x) - g(x) \,:\, \|x - x_m\| \geq \frac{1}{m}\} \leq f(x_n) - g(x_n),$$

lo cual entra en contradicción con (1.51). Por tanto, $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ es una sucesión de Cauchy y como X es espacio de Banach, $x_n \to z_0 \in X$. Definimos

$$\alpha_n := \inf\{(f - g)(x) \,:\, \|x - x_n\| \geq \frac{1}{n}\}.$$

Como $f - g$ es semicontinua inferiormente,

$$f(z_0) - g(z_0) \leq \liminf f(x_n) - g(x_n) \leq \liminf \alpha_n.$$

Por tanto, dado $y \in X$, $y \neq z_0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\|x_n - y\| \geq \frac{1}{n}$, para cada $n \geq n_0$. Entonces $\alpha_n \leq f(y) - g(y)$, para cada $n \geq n_0$ y, consecuentemente,

$$f(z_0) - g(z_0) \leq \liminf \alpha_n \leq f(y) - g(y).$$

Así z_0 es un mínimo de $f - g$ sobre X y además es un mínimo fuerte. En efecto, si no fuera cierto, existiría $(z_n) \subset X$ tal que

$$f(z_n) - g(z_n) \to f(z_0) - g(z_0) \ \text{ y } \ \|z_n - z_0\| \geq \mathcal{E} > 0.$$

Por tanto, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\|x_N - z_n\| \geq \frac{1}{N}$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Pero

$$\begin{aligned} f(z_0) - g(z_0) \leq f(x_N) - g(x_N) &< \operatorname{inf}\{f(x) - g(x) \,:\, \|x - x_N\| \geq \frac{1}{N}\} \\ &\leq f(z_n) - g(z_n), \text{para todo } n \in \mathbb{N}, \end{aligned}$$

lo cual es una contradicción (porque $f(z_n) - g(z_n) \to f(x_0) - g(x_0)$). Luego z_0 es un mínimo fuerte de $f - g$ sobre X. □

Teorema 1.5.4. *Sea X un espacio de Banach que admite una función meseta $b \in \mathcal{C}^m(X, \mathbb{R})$ tal que $\|b\|_\infty, \|b'\|_\infty, \ldots, \|b^{(m)}\|_\infty < \infty$. Sea $f\colon X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ una semicontinua inferiormente y acotada inferiormente. Entonces dado $\mathcal{E} > 0$, existe $g \in \mathcal{C}^m(X, \mathbb{R})$ tal que*

1.) $\|g\|_\infty \leq \mathcal{E}, \|g'\|_\infty \leq \mathcal{E}, \ldots, \|g^{(m)}\|_\infty \leq \mathcal{E}$;

2.) $f - g$ alcanza un mínimo fuerte sobre X.

Demostración:
Basta considerar el espacio de Banach $Y := \{g \in \mathcal{C}^m(X, \mathbb{R}) \,:\, g, g', \ldots, g^{(m)} \text{ son acotadas}\}$, dotado de la norma $\|g\|_Y := \|g\|_\infty + \|g'\|_\infty + \ldots + \|g^{(m)}\|_\infty$, y seguir los pasos de la demostración anterior. □

Observación 1.5.5. *Nótese que en ambos teoremas es equivalente escribir la segunda afirmación como*

2.) $f + g$ alcanza su mínimo fuerte sobre X.

Basta con reemplazar $-g$ por g.

Observación 1.5.6. *En la prueba original del P.V. de Deville-Godefroy-Zizler se utiliza un espacio de funciones más general. Sea $(\mathcal{Y}, \|\cdot\|_\mathcal{Y})$ el espacio de Banach de las funciones reales, continuas y acotadas en X tal que*

(i) $\|\cdot\|_\infty \leq \|\cdot\|_\mathcal{Y}$;

(ii) $\mathcal{Y}$ contiene una función meseta;

(iii) si $g \in \mathcal{Y}$, entonces $g(a\cdot) \in \mathcal{Y}$ para todo $a > 0$;

(iv) si $g \in \mathcal{Y}$ e $y \in X$ definimos $\tau_y g\colon X \to \mathbb{R}$ tal que $\tau_y g(x) = g(x - y)$. Entonces $\tau_y g \in \mathcal{Y}$ y $\|\tau_y g\|_\mathcal{Y} = \|g\|_\mathcal{Y}$ para todo $y \in X$.

Observación 1.5.7. *Se desprende de la demostración que*

$$G := \{g \in Y \,:\, f + g \text{ alcanza su mínimo fuerte sobre } X\}$$

es un subconjunto G_δ-denso en Y, ya que es denso en Y e intersección numerable de abiertos de Y.

1.5.1. Aplicaciones a la Geometría en espacios de Banach

Los principios variacionales suaves son herramientas muy eficientes para estudiar la diferenciabilidad en espacios de Banach. Después del siguiente lema, veremos un corolario del P.V. de Deville-Godefroy-Zizler que permite dar una condición suficiente para los espacios de Asplund (Definición 0.3.18).

Lema 1.5.8. *[DGZ3] Sean X un espacio de Banach y $U \subset X$ un abierto convexo. Supongamos que $f\colon U \to \mathbb{R}$ es convexa y continua. Entonces*

(i) f es Fréchet diferenciable en $x \in U$ si, y sólo si,

$$\lim_{\|h\|\to 0} \frac{f(x+h)+f(x-h)-2f(x)}{\|h\|} = 0;$$

(ii) f es Gâteaux diferenciable en $x \in U$ si, y sólo si,

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(x+th)+f(x-th)-2f(x)}{t} = 0, \text{ para todo } h \in X.$$

Demostración:
Probaremos (i) ((ii) se prueba de forma similar a (i)):
$\boxed{\Rightarrow}$ Supongamos que f es Gâteaux diferenciable en $x \in U$. Entonces

$$\frac{f(x+h)+f(x-h)-2f(x)}{\|h\|} = \frac{(f(x+h)-f(x)-f'(x)(h)}{\|h\|} + \frac{f(x-h)-f(x)-f'(x)(-h)}{\|h\|} \overset{\|h\|\to 0}{\longrightarrow} 0.$$

$\boxed{\Leftarrow}$ Supongamos que $\displaystyle\lim_{\|h\|\to 0} \frac{f(x+h)+f(x-h)-2f(x)}{\|h\|} = 0$. Recordemos que $\partial f(x) = \{x^* \in X^* : f(y)-f(x) \geq x^*(y-x)$, para todo $y \in X\}$ y, por ser f convexa y continua, entonces $\partial f(x) \neq \emptyset$. Consideremos $x^* \in \partial f(x)$. Como $f(x+h)-f(x) \geq x^*(h)$ y $f(x-h)-f(x) \geq x^*(-h)$ para todo $h \in X$, entonces

$$0 \geq \frac{f(x+h)-f(x)-x^*(h)}{\|h\|} \leq \frac{f(x+h)-f(x)+f(x-h)-f(x)}{\|h\|} \overset{\|h\|\to 0}{\longrightarrow} \to 0.$$

Luego $f'(x) = x^*$, por lo que f es Fréchet diferenciable en x. $\square$

Definición 1.5.9. *Un espacio de Banach X se dice que es un **espacio de diferenciabilidad Gâteaux** (EDG) si toda función continua y convexa, definida en un abierto convexo $U \subset X$ no vacío, es Fréchet diferenciable en un subconjunto denso de U.*

Corolario 1.5.10. *[FHHMZ] Sea X un espacio de Banach que admite una función meseta lipschitziana Fréchet diferenciable (Gâteaux diferenciable), entonces toda función convexa y continua definida en un subconjunto abierto convexo de X es Fréchet diferenciable (Gâteaux diferenciable respectivamente) en un conjunto denso de su dominio. En particular, X es un espacio de Asplund (EDG respectivamente).*

Demostración:

Sea f una función convexa y continua definida en un abierto convexo $U \subset X$ y sea $x_0 \in U$. Por la continuidad de f, podemos elegir $\delta > 0$ tal que $-f(x) > -f(x_0) - 1$, para todo $x \in \mathring{B}_\delta(x_0) \subset U$. Por el Lema 1.5.2, podemos construir una función meseta lipschitziana y Fréchet diferenciable (Gâteaux diferenciable respectivamente) $b\colon X \to [0,1]$ tal que $\operatorname{sop}(b) \subset \mathring{B}_\delta(x_0)$ y $b(x_0) \neq 0$. Definimos la función $\varphi\colon X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ dada por

$$\varphi(x) = \begin{cases} -f(x) + \dfrac{1}{b(x)}, & \text{si } b(x) \neq 0; \\ +\infty, & \text{si } b(x) = 0. \end{cases}$$

Comprobemos que φ cumple las hipótesis del P.V. de Deville-Godefroy-Zizler.

- Veamos que φ está acotada inferiormente. Si $x \in X \backslash \mathring{B}_\delta(x_0)$, como $\operatorname{sop}(b) \subset \mathring{B}_\delta(x_0)$, entonces $\varphi(x) = +\infty$. Si $x \in \mathring{B}_\delta(x_0)$, como $0 < b(x) < 1$, entonces $\varphi(x) = -f(x) + \dfrac{1}{b(x)} \geq -f(x_0) - 1$. Por tanto, φ está acotada inferiormente.

- Veamos que φ es s.c.i. Dada una sucesión $(z_n) \subset X$ que converge a $z \in X$, probaremos que $\varphi(z) \leq \liminf_{n\to\infty} \varphi(z_n)$. Si $b(z) \neq 0$, entonces existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $b(z_n) \neq 0$ para todo $n \geq N$. Como $z \in \mathring{B}_\delta(x_0)$ y $(z_n)_{n \geq N} \subset \mathring{B}_\delta(x_0)$, entonces

  $$\varphi(z_n) = -f(z_n) + \frac{1}{b(z_n)} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} -f(z) + \frac{1}{b(z)} = \varphi(z)$$

  por la continuidad de f y $\dfrac{1}{b}$ en z. Si $b(z) = 0$, entonces $\varphi(z) = +\infty$. Si existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $b(z_n) = 0$ para todo $n \geq n_0$, entonces $\liminf_{n\to\infty} \varphi(z_n) = +\infty$. En caso contrario, existe una subsucesión $(z_{n_j})_{j=1}^{\infty} \subset (z_n)_{n=1}^{\infty}$ tal que $b(z_{n_j}) \neq 0$ (por lo que $z_{n_j} \in \mathring{B}_\delta(x_0)$) para todo $j \in \mathbb{N}$ y $b(z_n) = 0$ para todo $n \in \mathbb{N} \backslash \{n_j : j \in \mathbb{N}\}$. Entonces $z = \lim j \to \infty z_{n_j} \in B_\delta(x_0)$ y

  $$\varphi(z_{n_j}) = -f(z_{n_j}) + \frac{1}{b(z_{n_j})} \overset{j\to\infty}{\longrightarrow} +\infty$$

  ya que $(f(z_{n_j}))_{j \geq 1}$ converge a $f(z)$ y $(b(z_{n_j}))_{j\geq 1}$ converge a $b(z) = 0$. Por tanto, $\liminf_{n\to\infty} \varphi(z_n) = +\infty$.

Por el Principio variacional de Deville-Godefroy-Zizler, existe $g\colon X \to \mathbb{R}$ lipschitziana y Fréchet diferenciable (Gâteaux diferenciable respectivamente) tal que $\varphi - g$ tiene un mínimo $x_1 \in X$, luego

$$\varphi(x) - g(x) \geq \varphi(x_1) - g(x_1), \text{ para todo } x \in X.$$

Como φ es finita en algún punto, por ejemplo en x_0, entonces $\varphi(x_1)$ es finito, $x_1 \in B_\delta(x_0)$ y $b(x_1) \neq 0$. Por tanto, existe $\rho > 0$ tal que $b(x) \neq 0$ y

$$-f(x) + \frac{1}{b(x)} - g(x) \geq f(x_1) + \frac{1}{b(x_1)} - g(x_1), \text{ para todo } x \in B_\rho(x_1). \tag{1.52}$$

Llamemos $\gamma := \dfrac{1}{b}$. Por (1.52) tenemos que

$$(\gamma(x_1+h)-\gamma(x_1))-(g(x_1+h)-g(x_1)) \geq f(x_1+h)-f(x_1)$$

$$(\gamma(x_1-h)-\gamma(x_1))-(g(x_1-h)-g(x_1)) \geq f(x_1-h)-f(x_1),$$

donde h pertenece a un entorno de 0 de radio suficientemente pequeño. Así,

$$\begin{aligned} 0 &\leq \frac{f(x_1+h)+f(x_1-h)-2f(x_1)}{\|h\|} \\ &\leq \frac{[\gamma(x_1+h)-\gamma(x_1-h)-2\gamma(x_1)]-[g(x_1+h)+g(x_1-h)-2g(x_1)}{\|h\|} \overset{\|h\|\to 0}{\longrightarrow} 0. \end{aligned}$$

Esto prueba el resultado para el caso Fréchet por el Lema 1.5.8 (para el caso Gâteaux, se prueba análogamente escogiendo th en lugar de h y haciendo que $t \to 0$). □

Observación 1.5.11. *También se puede probar que si X es un espacio de Banach que admite una función meseta lipschitziana Gâteaux diferenciable, entonces X es un espacio Asplund débil. [DGZ1]*

Corolario 1.5.12. *[FHHMZ] Sea X un espacio de Banach separable. Si X^* es separable, entonces toda función continua y convexa definida en un subconjunto abierto convexo de X es Fréchet diferenciable en todo punto de un conjunto G_δ-denso en X.*

Demostración:
Sean U un subconjunto abierto convexo de X, $x_0 \in X$ y $f\colon U \to \mathbb{R}$ una función continua y convexa. Por la convexidad de f, existe $\delta > 0$ tal que f es lipschitziana en $\mathring{B}_\delta(x_0)$ (Proposición 0.3.29). Definimos una función $\varphi\colon X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ dada por

$$\varphi(x) = \begin{cases} -f(x), & \text{si } x \in \mathring{B}_\delta(x_0); \\ +\infty, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Por la Proposición 0.3.23, existe una función meseta no negativa definida en X con derivada Fréchet continua tal que $b(x_0) > f(x_0)$ y $b(x) = 0$ si $x \notin \mathring{B}_{\frac{\delta}{2}}(x_0)$. Se puede comprobar que $b + \varphi$ es s.c.i. y acotada inferiormente. Por el P.V. de Deville-Godefroy-Zizler, existe una función $g\colon X \to \mathbb{R}$ Fréchet diferenciable tal que $b + \varphi + g$ alcanza un mínimo z_0. Por tanto, para todo $x \in X$,

$$b(x) + \varphi(x) + g(x) \geq b(z_0) + \varphi(z_0) + g(z_0).$$

Claramente $z_0 \in \mathring{B}_\delta(x_0)$, ya que en caso contrario $\varphi(z_0) = +\infty$. En un entorno U de z_0 tenemos que

$$b(x) - f(x) + g(x) \geq b(z_0) - f(z_0) + g(z_0),$$

luego

$$f(x) \leq b(x) + g(x) - b(z_0) + f(z_0) - g(z_0).$$

Definamos $h\colon U \to \mathbb{R}$ tal que $h(x) = b(x) + g(x) - b(z_0) + f(z_0) - g(z_0)$. Entonces $f(x) \leq h(x)$ para todo $x \in U$ y $f(z_0) = h(z_0)$. Entonces, por la Proposición 0.3.15, f es Fréchet diferenciable en z_0 y, por la Proposición 0.3.17, obtenemos la conclusión deseada. $\square$

Observación 1.5.13. *El recíproco también es cierto. Puede verse en [FHHMZ, Teorema 8.6].*

Veamos otro resultado análogo para la diferenciabilidad Gâteaux.

Corolario 1.5.14. *[FHHMZ] Sea X un espacio de Banach separable, entonces toda función continua y convexa definida en un subconjunto abierto convexo de X es Gâteaux diferenciable en todo punto de un conjunto G_δ-denso en X.*

Demostración:
Haremos un esquema de la demostración. Al igual que en el caso Fréchet, el P.V. de Deville-Godefroy-Zizler implica que para toda función convexa y continua f es Gâteaux diferenciable en un conjunto denso de puntos. De la convexidad de f, obtenemos que el conjunto de todos los puntos de f es Gâteaux diferenciable es $\bigcap\limits_{n,m\in\mathbb{N}}$, donde

$$G_{n,m} := \left\{ x \in X \,:\, \text{existe } \delta > 0 \text{ tal que } f(x+\delta x_m) - f(x-\delta x_m) - 2f(x) < \frac{\delta}{n} \right\}.$$

Cada $G_{n,m}$ es abierto en X y así el conjunto de todos los puntos donde f es Gâteaux diferenciable es un conjunto G_δ-denso. $\square$

1.5.2. Aplicaciones a las ecuaciones de Hamilton-Jacobi en espacios de Banach

Las ecuaciones de primer orden de Hamilton-Jacobi en el caso estacionario son de la forma

$$H(x, u(x), Du(x)) = 0$$

y en el caso de evolución son de la forma

$$H(t, x, u(t, x), Du(t, x)) = 0.$$

Al funcional H lo llamaremos **hamiltoniano** o **función hamiltoniana**. El problema consiste en encontrar la existencia y unicidad de una solución global de estas ecuaciones bajo ciertas condiciones sobre H. A continuación, veremos algunos resultados conocidos que pueden demostrarse mediante principios variacionales suaves ([DG, Sección 4]), mediante los cuales resolveremos el problema bajo ciertas condiciones generales.

Definición 1.5.15. *Sea X un espacio de Banach y $\varphi\colon X \to \mathbb{R}\cup\{+\infty\}$ una función arbitraria. Si $x \in \operatorname{dom}(\varphi)$, definimos la* ***subdiferencial*** *de φ en x al conjunto*

$$D^-\varphi(x) = \{g'(x) \,:\, g \in \mathcal{C}^1(X,\mathbb{R}) \;\; y \;\; \varphi - g \text{ tiene un mínimo local en } x\}$$

y la ***superdiferencial*** *de φ en x al conjunto*

$$D^+\varphi(x) = \{g'(x) \,:\, g \in \mathcal{C}^1(X,\mathbb{R}) \;\; y \;\; \varphi - g \text{ tiene un máximo local en } x\},$$

donde g' denota la derivada Fréchet de g. Si $x \notin \operatorname{dom}(\varphi)$, entonces $D^-\varphi(x) = D^+\varphi(x) = \emptyset$. Decimos que φ es ***subdiferenciable*** *(**superdiferenciable**) en x si $D^-\varphi(x) \neq \emptyset$ ($D^+\varphi(x) \neq \emptyset$ respectivamente).*

Proposición 1.5.16. *Si X es un espacio de Banach, $\varphi\colon X \to \mathbb{R}\cup\{+\infty\}$ es una función arbitraria y $x \in \operatorname{dom}(\varphi)$, se verifica,*

1. *$D^-\varphi(x)$ y $D^+\varphi(x)$ son convexos y cerrados en la topología de la norma;*
2. *si φ es convexa, $D^-\varphi(x) = \partial\varphi(x)$ (Definición 0.3.7);*
3. *si $D^-\varphi(x)$ y $D^+\varphi(x)$ son ambos no vacíos, entonces φ es Fréchet diferenciable en x y $D^-\varphi(x) = D^+\varphi(x) = \{\varphi'(x)\}$.*

Teorema 1.5.17. *Si X es un espacio de Banach que admite una función meseta lipschitziana de clase $\mathcal{C}^1$, $\varphi\colon X \to \mathbb{R}\cup\{+\infty\}$ es una función arbitraria, $x \in \operatorname{dom}(\varphi)$ y $p \in X^*$, se verifica,*

1. *$p \in D^-\varphi(x)$ si, y sólo si, $\displaystyle\liminf_{\|h\|\to 0} \frac{\varphi(x+h) - \varphi(x) - p(h)}{\|h\|} \geq 0$;*
2. *φ es diferenciable en x si, y sólo si, $D^-\varphi(x) = D^+\varphi(x) = \{\varphi'(x)\}$.*

Teorema 1.5.18. *(Minimización de la suma de dos funciones) Sea X es un espacio de Banach que admite una función meseta lipschitziana de clase $\mathcal{C}^1$ y sean $u_1, u_2\colon X \to \mathbb{R}\cup\{+\infty\}$ dos funciones s.c.i. y acotadas inferiormente tales que $\lim_{\eta\to 0} \inf\{u_1(x_1) + u_2(x_2) \,:\, \|x_1 - x_2\| < \eta\} < +\infty$. Entonces, para cada $\mathcal{E} > 0$, existen $x_1, x_2 \in X, p_1 \in D^-u_1(x_1)$ y $p_2 \in D^-u_2(x_2)$ tales que*

(1) $\|x_1 - x_2\|(1 + \|p_1\| + \|p_2\|) < \mathcal{E}$;

(2) $\|p_1 + p_2\| < \mathcal{E}$;

(3) $u_1(x_1) + u_2(x_2) < \lim_{\eta\to 0} \inf\{u_1(y) + u_2(z) \,:\, \|y - z\| < \eta\} + \mathcal{E}$.

Corolario 1.5.19. *Si X es un espacio de Banach que admite una función meseta lipschitziana de clase $\mathcal{C}^1$ y $\varphi\colon X \to \mathbb{R}\cup\{+\infty\}$ es s.c.i., entonces φ es subdiferenciable en un conjunto denso.*

Definición 1.5.20. *Sean $u_1, u_2 \colon X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ dos funciones s.c.i. Decimos que un par (u_1, u_2) es* ***localmente uniformemente semicontinuo inferiormente (l.u.s.c.i.)*** *si, para todo $x \in X$ y para toda función uniformemente continua $\varphi \colon X \times X \to \mathbb{R}$, existe $r > 0$ tal que,*

$$\inf_{y \in B_r(x)} u_1(y) + u_2(y) + \varphi(y, y) = \lim_{\eta \to 0} \inf\{u_1(y) + u_2(z) + \varphi(y, z) \ \|y - z\| < \eta, \, y, z \in B_r(x)\}.$$

Teorema 1.5.21. *Sea X un espacio de Banach que admite una función meseta lipschitziana de clase $\mathcal{C}^1$ y sean $u_1, u_2 \colon X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ dos funciones s.c.i. Supongamos que (u_1, u_2) es l.u.s.c.i. Dados $x_0 \in X$ y $p \in D^-(u_1 + u_2)(x_0)$, se tiene que, para cada $\mathcal{E} > 0$, existen $x_1, x_2 \in X, p_1 \in D^- u_1(x_1)$ y $p_2 \in D^- u_2(x_2)$ tales que*

(1) $\|x_1 - x_0\| < \mathcal{E}, \|x_2 - x_0\| < \mathcal{E}$ *y* $\|x_1 - x_2\|(\|p_1\| + \|p_2\|) < \mathcal{E}$;

(2) $|u_1(x_1) - u_1(x_0)| < \mathcal{E}$ *y* $|u_2(x_2) - u_2(x_0)| < \mathcal{E}$;

(3) $\|p_1 + p_2 - p\| < \mathcal{E}$.

En la Definición 1.5.15, si reemplazamos la derivada Fréchet por la derivada Gâteaux se pueden obtener resultados muy similares.

Teorema 1.5.22. *(Teorema de valor medio para funciones subdiferenciables). Sea U un subconjunto abierto y convexo de un espacio de Banach X y sea $\varphi \colon U \to \mathbb{R}$ una función continua y Gâteaux subdiferenciable. Supongamos que existen $M \geq 0$ tal que para todo $x \in U$, existe $p \in D^-\varphi(x)$ con $\|p\| \leq M$. Entonces φ es lipschitziana.*

Corolario 1.5.23. *(Desigualdad del valor medio). Sea X un espacio de Banach que admite una función meseta lipschitziana de clase $\mathcal{C}^1$ y sea $\varphi \colon [0, T[\times X \to \mathbb{R}$ una función s.c.i. y acotada inferiormente. Supongamos que para todo $x \in X$, $\varphi(0, x) \geq 0$ y fijemos $(t_0, x_0) \in]0, T[\times X$. Entonces, para todo $\mathcal{E} > 0$, existe $(t, x) \in]0, T[\times X$ y $(a, p) \in D^-\varphi(t, x)$ tal que $a < \dfrac{\varphi(t_0, x_0)}{t_0} + \mathcal{E}$ y $\|p\| < \mathcal{E}$.*

Veamos a continuación el *Principio del máximo para ecuaciones estacionarias de primer orden de Hamilton-Jacobi.* Sea Ω un subconjunto abierto y acotado de $\mathbb{R}^n$ y sea $H \colon \overline{\Omega} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función continua arbitraria. Consideremos la siguiente ecuación de Hamilton-Jacobi:

$$\begin{cases} u(x) + H(x, Du(x)) = 0, & \text{para todo } x \in \Omega, \\ u(x) = 0, & \text{para todo } x \in \partial\Omega. \end{cases} \tag{HJ1}$$

Definición 1.5.24. *Una función $u \colon X \to \mathbb{R}$ es una* ***solución clásica*** *de* (HJ1) *si u es continua en $\overline{\Omega}$, diferenciable en Ω y verifica que $u(x) + H(x, Du(x)) = 0$ para todo $x \in \Omega$.*

Analicemos si el principio del máximo tiene soluciones clásicas. Sea $u \in \mathcal{C}(\overline{\Omega}) \cap \mathcal{C}^1(\Omega)$ una subsolución clásica, es decir,

$$\begin{cases} u(x) + H(x, Du(x)) \leq 0, & \text{para todo } x \in \Omega, \\ u(x) \leq 0, & \text{para todo } x \in \partial\Omega, \end{cases}$$

y sea $v \in \mathcal{C}(\overline{\Omega}) \cap \mathcal{C}^1(\Omega)$ una supersolución clásica, es decir,

$$\begin{cases} v(x) + H(x, Dv(x)) \geq 0, & \text{para todo } x \in \Omega, \\ v(x) \geq 0, & \text{para todo } x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

Supongamos que $\sup\limits_{\Omega}(u - v) > 0$. Por el Teorema de Weierstrass, existe $x_0 \in \overline{\Omega}$ tal que $(u - v)(x_0) = \max\limits_{\overline{\Omega}}(u - v) \geq \sup\limits_{\Omega}(u - v) > 0$. Como $(u - v)(x) \leq 0$ para todo $x \in \partial\Omega$, entonces $x_0 \in \Omega$ y

$$(u - v)(x_0) = \max_{\Omega}(u - v).$$

Por tanto, $D(u - v)(x_0) = 0$, lo que implica por linealidad que $Du(x_0) = Dv(x_0)$. Así, como $u(x_0) + H(x_0, Du(x_0)) \leq 0$ y $v(x_0) + H(x, Dv(x_0)) = v(x_0) + H(x, Du(x_0)) \geq 0$, tenemos restando que $u(x_0) - v(x_0) \leq 0$, lo cual es una contradicción. En consecuencia, $\sup\limits_{\Omega}(u - v) \leq 0$ y, por consiguiente, $u(x) \leq v(x)$, para todo $x \in \overline{\Omega}$.

En el caso de que el dominio Ω sea no acotado o de dimensión infinita, si u y v están acotadas, se puede probar análogamente este resultado usando un principio variacional en lugar del Teorema de Weierstrass aunque es necesario establecer algunas hipótesis más restrictivas sobre el hamiltoniano H para calcular $H(x_0, Du(x_0)) - H(x_0, Dv(x_0))$.

En general, estas ecuaciones no tienen soluciones clásicas. Por ello, veremos a continuación otro tipo de soluciones que nos permitirán resolver estas ecuaciones bajo algunas hipótesis generales.

<u>Definición</u> 1.5.25. *Una función $u \colon X \to \mathbb{R}$ es una **subsolución de viscosidad** de* (HJ1) *si u es s.c.s. y, para todo $x \in X$ y todo $p \in D^+u(x)$,*

$$u(x) + H(x, p) \leq 0.$$

*La función u es una **supersolución de viscosidad** de* (HJ1) *si u es s.c.i. y, para todo $x \in X$ y todo $p \in D^-u(x)$,*

$$u(x) + H(x, p) \geq 0.$$

*Diremos que u es una **solución de viscosidad** de* (HJ1) *si u es al mismo tiempo subsolución de viscosidad de* (HJ1)*y supersolución de viscosidad de* (HJ1).

Diremos que un hamiltoniano $H\colon X \times X^* \to \mathbb{R}$ continuo satisface la condición (H1) si verifica que

$$|H(x_1,p) - H(x_2,p)| \to 0 \text{ cuando } \|x_1 - x_2\|(\|p\| + 1) \to 0,$$

$$|H(x,p_1) - H(x,p_2)| \to 0 \text{ cuando } \|p_1 - p_2\| \to 0.$$

Si H es uniformemente continua, entonces H satisface la condición (H1). A continuación probaremos la unicidad de una solución de viscosidad continua y acotada $u\colon X \to \mathbb{R}$ de la ecuación (HJ1).

Teorema 1.5.26. *[DG, Teorema 6.1] Sean X un espacio de Banach que admite una función meseta lipschitziana de clase $\mathcal{C}^1$ y $u, v\colon X \to \mathbb{R}$ dos funciones acotadas. Supongamos que H es un hamiltoniano que satisface (H1). Si u es una subsolución de viscosidad de* (HJ1) *y v es una supersolución de viscosidad de* (HJ1)*, entonces $u(x) \le v(x), \forall x \in X$.*

Demostración:
Fijemos $\mathcal{E} > 0$. Las funciones v y $-u$ son s.c.i. y acotadas, luego por el Teorema 1.5.18, existen $x_1, x_2 \in X$ y $p_1 \in D^+u(x_1), p_2 \in D^-v(x_2)$ tales que

(1) $\|x_1 - x_2\|(1 + \|p_1\| + \|p_2\|) \le \mathcal{E}$;

(2) $\|p_1 - p_2\| < \mathcal{E}$;

(3) $v(x_2) - u(x_1) < \lim_{\eta \to 0} \inf\{v(y) - u(z) \,:\, \|y - z\| < \eta\} + \mathcal{E}$.

La condición (3) implica que $v(x_2) - u(x_1) < \inf\{v(x) - u(x) \,:\, x \in X\} + \mathcal{E}$. Como u es una subsolución de viscosidad de $u + H(x, Du) = 0$, tenemos que $u(x_1) + H(x_1, p_1) \le 0$. Como v es una supersolución de viscosidad de $v + H(x, Dv) = 0$, tenemos que $v(x_2) + H(x_2, p_2) \ge 0$. Consecuentemente,

$$\begin{aligned} \inf_X (v - u) &> v(x_2) - u(x_1) - \mathcal{E} \\ &\ge H(x_1, p_1) - H(x_2, p_2) - \mathcal{E} \\ &= H(x_1, p_1) - H(x_2, p_1) + H(x_2, p_1) - H(x_2, p_2) - \mathcal{E}. \end{aligned} \tag{1.53}$$

De (1) sabemos que $\|x_1 - x_2\|(1 + \|p_1\|) \le \mathcal{E}$, luego $H(x_1, p_1) - H(x_2, p_1) \to 0$ cuando $\mathcal{E} \to 0$ por (H1). De (2) sabemos que $\|p_1 - p_2\| \le \mathcal{E}$, luego $H(x_2, p_1) - H(x_2, p_2) \to 0$ cuando $\mathcal{E} > 0$ por (H1) nuevamente. Teniendo en cuenta esto y (1.53), obtenemos que

$$\inf_X (v - u) \ge 0.$$

Luego $v(x) \ge u(x)$ para todo $x \in X$. $\square$

Estudiemos ahora el *Principio del máximo para ecuaciones de Hamilton-Jacobi parabólicas.* Nuestro objetivo es probar la unicidad de una solución de viscosidad uniformemente continua $u\colon \mathbb{R}_+ \times X \to \mathbb{R}$ de la siguiente ecuación de evolución:

$$\begin{cases} u_t + H(x, u_x) = 0, \\ u(0,x) = u_0(x), \end{cases} \tag{HJ2}$$

donde $u_0\colon X \to \mathbb{R}$ es la condición inicial, para la cual suponemos que está acotada y es uniformemente continua.

Definición 1.5.27. *Decimos que una función $u\colon \mathbb{R}_+ \times X \to \mathbb{R}$ es una subsolución de viscosidad de* (HJ2) *si u es s.c.s. y, para todo $(t,x) \in X$ y todo $(a,p) \in D^+u(t,x)$,*

$$\begin{cases} a + H(x,p) \leq 0, \\ u(0,x) \leq u_0(x). \end{cases}$$

La función u es una supersolución de viscosidad de (HJ2) *si u es s.c.i. y, para todo $(t,x) \in X$ y todo $(a,p) \in D^-u(t,x)$,*

$$\begin{cases} a + H(x,p) \geq 0, \\ u(0,x) \geq u_0(x). \end{cases}$$

Diremos que u es una ***solución de viscosidad*** *de* (HJ2) *si u es al mismo tiempo subsolución de viscosidad de* (HJ2) *y supersolución de viscosidad de* (HJ2).

Veamos un teorema similar al anterior para (HJ2).

Teorema 1.5.28. *[DG, Teorema 6.2] Sean X un espacio de Banach que admite una función meseta lipschitziana de clase $\mathcal{C}^1$ y $u, v\colon \mathbb{R}_+ \times X \to \mathbb{R}$ dos funciones uniformemente continuas. Supongamos que H es un hamiltoniano que satisface (H1). Si u es una subsolución de viscosidad de* (HJ2) *y v es una supersolución de viscosidad de* (HJ2)*, entonces $u(x) \leq v(x), \forall x \in X$.*

Demostración:

Fijemos una constante $T > 0$ finita y supongamos que $\inf\limits_{[0,T[\times X}(v-u) < 0$ para llegar a una contradicción. Como u es subsolución de viscosidad y v es supersolución de viscosidad, entonces $v(0,x) - u(0,x) \geq u_0(x) - u_0(x) = 0$ para todo $x \in X$. Así, como la función $v-u$ es uniformemente continua y no negativa en $\{0\} \times X$, está acotada inferiormente en $[0,T[\times X$. Entonces, existe $(t_0, x_0) \in]0,T[\times X$ tal que

$$(v-u)(t_0,x_0) < \inf_{[0,T[\times X}(v-u) + \mathcal{E}T \quad \text{y} \quad (v-u)(t_0,x_0) < 0. \tag{1.54}$$

Por el Corolario 1.5.23, existen $(t,x) \in]0,T[\times X$ y $(a,p) \in D^-(v-u)(t,x)$ tales que

$$a < \frac{(v-u)(t_0,x_0)}{t_0} + \mathcal{E} \quad \text{y} \quad \|p\| < \mathcal{E}. \tag{1.55}$$

Por el Teorema 1.5.21 aplicado a las funciones $u_1 = v$ y $u_2 = -u$, existen $(t_1, x_1), (t_2, x_2) \in]0, T[\times X$ y $(a_1, p_1) \in D^-(t_1, x_1), (a_2, p_2) \in D^+u(t_2, x_2)$ tales que

(1) $\|x_1 - x_0\| < \mathcal{E}$;

(2) $\|p_1 - p_2 - p\| < \mathcal{E}$ y $|a_1 - a_2 - a| < \mathcal{E}$;

(3) $(\|p_1\| + |a_1| + \|p_2\| + |a_2|)(\|x_1 - x_2\| + |t_1 - t_2|) < \mathcal{E}$.

La función u es una subsolución de viscosidad de $u_t + H(x, u_x) = 0$, luego $a_2 \leq H(x_2, p_2)$ y la función v es una supersolución de viscosidad de $v_t + H(x, v_x) = 0$, luego $a_1 \geq -H(x_1, p_1)$. Consecuentemente,

$$\frac{1}{T} \inf_{[0,T[\times X}(v-u) \underset{(1.54)}{>} \frac{(v-u)(t_0,x_0)}{T} - \mathcal{E} > \frac{(v-u)(t_0,x_0)}{t_0} - \mathcal{E} \tag{1.56}$$

$$\underset{(1.55)}{>} a - 2\mathcal{E} \underset{(2)}{>} a_1 - a_2 - 3\mathcal{E} \geq -H(x_1, p_1) + H(x_2, p_2) - 3\mathcal{E}. \tag{1.57}$$

Obsérvese que (3) implica que $(\|p_1\| + \|p_2\|)\|x_1 - x_2\| < \mathcal{E}$. De forma análoga al caso estacionario, como H satisface (H1), haciendo que $\mathcal{E}$ tienda a 0, tenemos que

$$\frac{1}{T} \inf_{[0,T[\times X}(v-u) \geq 0,$$

lo cual es una contradicción con lo que habíamos supuesto al principio. $\square$

Estudiaremos a continuación la unicidad para las *ecuaciones de Hamilton-Jacobi de segundo orden.*

Definición 1.5.29. *Sea X un espacio de Banach y $\varphi\colon X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ una función. Llamamos* ***subdiferencial de segundo orden*** *de φ en $x \in X$ al conjunto*

$$D^{2,-}\varphi(x) = \{(g'(x), g''(x)) \,:\, g \in \mathcal{C}^2(X, \mathbb{R}) \;\; y \;\; \varphi - g \text{ tiene un mínimo local en } x\}.$$

Llamamos ***superdiferencial de segundo orden*** *de φ en $x \in X$ al conjunto*

$$D^{2,+}\varphi(x) = \{(g'(x), g''(x)) \,:\, g \in \mathcal{C}^2(X, \mathbb{R}) \;\; y \;\; \varphi - g \text{ tiene un máximo local en } x\}.$$

El siguiente teorema nos será de gran utilidad, ya que trabajaremos en dimensión finita.

Teorema 1.5.30. *(Deville-El Haddad) [DG, Teorema 4.5].*
Sean $u_1, u_2\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ dos funciones s.c.i. Supongamos que x_0 y $(p, Q) \in D^{2,-}(u_1 + u_2)(x_0)$ son dados. Entonces, para todo $\mathcal{E} > 0$, existen $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$, $(p_1, Q_1) \in D^{2,-}u_1(x_1)$ y $(p_2, Q_2) \in D^{2,-}u_2(x_2)$ tales que

(i) $\|x_1 - x_0\| < \mathcal{E}$ *y* $\|x_2 - x_0\| < \mathcal{E}$*;*

(ii) $|u_1(x_1) - u_1(x_0)| < \mathcal{E}$ *y* $|u_2(x_2) - u_2(x_0)| < \mathcal{E}$*;*

(iii) $\|p_1 + p_2 - p\| < \mathcal{E}$ *y* $\|Q_1 + Q_2 - Q\| < \mathcal{E}$*.*

Más adelante, veremos como usar este teorema para probar la unicidad de soluciones de viscosidad para ecuaciones de Hamilton-Jacobi de segundo orden. Consideraremos la siguiente ecuación estacionaria:

$$u + H(x, u, Du, D^2u) = 0, \tag{HJ3}$$

donde H es un hamiltoniano uniformemente continuo.

<u>**Definición**</u> **1.5.31.** *Una función* $u\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *es una* ***subsolución de viscosidad*** *de* (HJ3) *si* u *es s.c.s. y, para todo* $x \in \mathbb{R}^n$ *y todo* $(p, Q) \in D^{2,+}u(x)$*,*

$$u(x) + H(x, p, Q) \leq 0.$$

La función u *es una* ***supersolución de viscosidad*** *de* (HJ3) *si* u *es s.c.i. y, para todo* $x \in \mathbb{R}^n$ *y todo* $(p, Q) \in D^{2,-}u(x)$*,*

$$u(x) + H(x, p, Q) \geq 0.$$

Diremos que u *es* ***solución de viscosidad*** *de* (HJ3) *si* u *es al mismo tiempo subsolución de viscosidad de* (HJ3) *y supersolución de viscosidad de* (HJ3)*.*

<u>**Teorema**</u> **1.5.32.** *[DG, Teorema 6.3] Sean* $u, v\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *dos funciones acotadas. Si* u *es una subsolución de viscosidad de* (HJ3) *y* v *es una supersolución de viscosidad de* (HJ3)*, entonces* $u(x) \leq v(x)$ *para todo* $x \in \mathbb{R}^n$*.*

<u>**Demostración:**</u>
Fijemos $\mathcal{E} > 0$. La función $u - v$ es s.c.s. y acotada superiormente, luego por el Teorema 1.5.4, tenemos que existen $x_0 \in \mathbb{R}^n$ y $(p, Q) \in D^{2,+}(u-v)(x_0)$ tales que $\|p\| < \mathcal{E}, \|Q\| < \mathcal{E}$ y $(u-v)(x_0) > \sup(u-v) - \mathcal{E}$. Aplicando el Teorema 1.5.30 con $u_1 = v$ y $u_2 = -u$, existen $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n, (p_1, Q_1) \in D^{2,-}v(x_1)$ y $(p_2, Q_2) \in D^{2,+}u(x_2)$ tales que

(i) $\|x_1 - x_0\| < \mathcal{E}$ y $\|x_2 - x_0\| < \mathcal{E}$;

(ii) $|v(x_1) - v(x_0)| < \mathcal{E}$ y $|u(x_0) - u(x_2)| < \mathcal{E}$;

(iii) $\|p_1 + p_2 - p\| < \mathcal{E}$ y $\|Q_1 + Q_2 - Q\| < \mathcal{E}$.

La función u es una subsolución de viscosidad de $u+H(x,Du,D^2u)=0$, luego $u(x_2)+H(x_2,p_2,Q_2)\leq 0$. La función v es una supersolución de viscosidad de $v+H(x,Dv,D^2v)=0$, luego $v(x_1)+H(x_1,p_1,Q_1)\geq 0$. Consecuentemente,

$$\begin{aligned}\sup(u-v)&<(u-v)(x_0)+\mathcal{E}=u(x_2)-v(x_1)+(u(x_0)-u(x_2)-v(x_0)+v(x_1))+\mathcal{E}\\ &\underset{(ii)}{<}u(x_2)-v(x_1)+3\mathcal{E}<-H(x_2,p_2,Q_2)+H(x_1,p_1,Q_1)+3\mathcal{E}.\end{aligned}$$

Además,

$$\|x_1-x_2\|\leq\|x_1-x_0\|+\|x_0-x_2\|\underset{(i)}{<}2\mathcal{E},$$
$$\|p_2-p_1\|\leq\|p_2-p_1-p\|+\|p\|\underset{(iii)}{<}2\mathcal{E};$$
$$\|Q_2-Q_1\|\leq\|Q_2-Q_1-Q\|+\|Q\|\underset{(iii)}{<}2\mathcal{E}.$$

Usando la continuidad uniforme de H (lo es por definición de (HJ3)) y haciendo que $\mathcal{E}$ tienda a 0, obtenemos entonces que $\sup(u-v)\leq 0$. $\square$

Es posible extender estos resultados para ecuaciones parabólicas de Hamilton-Jacobi de segundo orden o para algunas clases de funciones no acotadas. Para terminar este capítulo, nos centraremos en el estudio de la existencia de soluciones de viscosidad para ecuaciones de Hamilton-Jacobi bajo condiciones más generales. Emulando al método clásico de Perron para funciones armónicas, dadas una subsolución de viscosidad y una supersolución de viscosidad, u_0 y v_0, probaremos bajo ciertas condiciones que existe una función u tal que $u_0\leq u\leq v_0$, verificando características que nos permitirán probar la existencia de una solución de viscosidad.

Definición 1.5.33. *Si Ω es un subconjunto abierto de un espacio de Banach X y $u\colon\Omega\to\mathbb{R}$ es una función, llamamos* ***envoltura semicontinua superiormente*** *de u a la función*

$$u^*:=\text{ínf}\{v\,:\,v\in\mathcal{C}(\Omega,\mathbb{R})\ \ y\ \ v(x)\geq u(x)\ \text{para todo}\ x\in\Omega\}$$

y ***envoltura semicontinua inferiormente*** *de u a la función*

$$u_*:=\sup\{v\,:\,v\in\mathcal{C}(\Omega,\mathbb{R})\ \ y\ \ v(x)\leq u(x)\ \text{para todo}\ x\in\Omega\}.$$

Necesitaremos previamente un teorema preliminar y un lema.

Teorema 1.5.34. *[DG, Teorema 4.7]. Sea X un espacio de Banach que admite una función meseta lipschitziana de clase $\mathcal{C}^1$. Sea $\mathcal{S}$ una familia localmente uniformemente acotada de funciones s.c.s.*

definidas en X que tienen valores reales. Sea u^* la envoltura semicontinua superiormente de la función $u(x) = \inf\{g(x) : g \in \mathcal{S}\}$. Si $x \in X$ y $p \in D^+u^*(x)$, entonces existen unas sucesiones $(x_n) \subset X$, $(\varphi_n) \subset \mathcal{S}$ y (p_n) tal que $p_n \in D^+\varphi_n(x_n)$ que verifican que

(a) (x_n) *converge a* x*;*

(b) $(\varphi_n(x_n))$ *converge a* $u^*(x)$*;*

(c) (p_n) *converge a* p*.*

Lema 1.5.35. *Sean X un espacio de Banach que admite una función meseta lipschitziana de clase $\mathcal{C}^1$, Ω un subconjunto abierto de X y $H\colon \Omega \times \mathbb{R} \times X^* \to \mathbb{R}$ una función continua. Sea $\mathcal{S}$ una familia de funciones localmente uniformemente acotadas superiormente que son subsoluciones de viscosidad de $H(x,u,Du) = 0$ en Ω. Sea $u := \{w : w \in \mathcal{S}\}$. Entonces, u^* es una subsolución de viscosidad de $H(x,u,Du) = 0$ en Ω.*

Demostración:
Sea $x \in \Omega$ y $p \in D^+u^*(x)$. Por el Teorema 1.5.34, existen unas sucesiones $(x_n) \subset \Omega$, $(u_n) \subset \mathcal{S}$ y (p_n) tal que $p_n \in D^+u_n(x_n)$ que verifican que

(a) (x_n) converge a x;

(b) $(u_n(x_n))$ converge a $u^*(x)$;

(c) (p_n) converge a p.

Como u_n es una subsolución de viscosidad de $H(x,u,Du) = 0$ en Ω, entonces $H(x_n, u_n(x_n), p_n) = 0$. Como H es continua, entonces $H(x_n, u_n(x_n), p_n) \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} H(x, u^*(x), p) = 0$. Por tanto, u^* es una subsolución de viscosidad de $H(x,u,Du) = 0$ en Ω. $\square$

Observación 1.5.36. *En particular, cuando $\mathcal{S} = \{u_1, u_2\}$, obtenemos que el supremo de dos subsoluciones viscosidad de $H(x,u,Du) = 0$ en Ω es también una subsolución de viscosidad de $H(x,u,Du) = 0$ en Ω.*

Teorema 1.5.37. *[DG, Teorema 6.4] Sean X un espacio de Banach que admite una función meseta lipschitziana de clase $\mathcal{C}^1$, Ω un subconjunto abierto de X y $H\colon \Omega \times \mathbb{R} \times X^* \to \mathbb{R}$ una función continua. Sean u_0 una subsolución de viscosidad y v_0 supersolución de viscosidad de $H(x,u,Du) = 0$ en Ω tales que $u_0(x) \le v_0(x)$ para todo $x \in \Omega$. Entonces existe una función $u\colon \Omega \to \mathbb{R}$ tal que*

(1) $u_0(x) \le u(x) \le v_0(x)$ *para todo* $x \in \Omega$*;*

(2) u^* *es una subsolución de viscosidad de* $H(x,u,Du)$ *en* Ω*;*

(3) u_* es una supersolución de viscosidad de $H(x,u,Du)$ en Ω.

Demostración:
Definimos el conjunto

$$\mathcal{S} := \{w\colon X \to \mathbb{R} \,:\, u_0 \le w \le v_0 \ \text{ y } \ w \text{ es una subsolución de viscosidad de } H(x,u,Du)=0 \text{ en } \Omega\}$$

y sea $u := \sup\{w \,:\, w \in \mathcal{S}\}$. Por el Lema 1.5.35, u^*, es una subsolución de viscosidad de $H(x,u,Du)=0$ en Ω. Probemos ahora que u_* es una supersolución de $H(x,u,Du)=0$ en Ω. Si no fuera así, existiría $x_0 \in \Omega$ y una función $g \in \mathcal{C}^1(X,\mathbb{R})$ tales que

(i) $u_*(x_0) - g(x_0) = 0$ y $u_*(x) - g(x) \ge 0$ para todo $x \in \Omega$,

(ii) $H(x_0, u_*(x_0), g'(x_0)) < 0$.

Obsérvese que necesariamente $g(x_0) < v_0(x_0)$. De hecho, si $g(x_0) \ge v_0(x_0)$, como $g(x) \le u_*(x) \le v_0(x)$ para todo $x \in \Omega$, entonces $g(x_0) = u_*(x_0) = v_0(x_0)$. Por tanto, $(v_0 - g)(x) \ge 0$ para todo $x \in \Omega$ y $(v_0 - g)(x_0) = 0$, lo cual implica que x_0 es un mínimo de $v_0 - g$. Por otro lado, v_0 es una supersolución de viscosidad de $H(x,u,Du)=0$ en Ω, luego $H(x_0, v_0(x_0), g'(x_0)) \ge 0$, lo que contradice (ii).

Por la continuidad de H y g' y el Lema 1.5.2, existe $\delta > 0$ tal que $\mathring{B}_{2\delta}(x_0) \subset \Omega$ y una función meseta $b\colon X \to \mathbb{R}$ tal que $\operatorname{sop}(b) \subset \mathring{B}_\delta(x_0)$, $b(x_0) > 0$ y que satisface que

$$H(x, g(x) + b(x), g'(x) + b'(x)) < 0 \text{ para todo } x \in \mathring{B}_{2\delta}(x_0)$$

y

$$g(x) + b(x) \le v_0(x) \text{ para todo } x \in \Omega.$$

Nótese que esto se verifica si $\delta > 0$ y $\|b\|_\infty$ y $\|b'\|_\infty$ son suficientemente pequeños (porque $g(x_0) < v(x_0)$ y $g(x) \le v(x)$ para todo $x \in \Omega$). Definimos ahora una función $w\colon \Omega \to \mathbb{R}$ tal que

$$w(x) = \begin{cases} \max\{g(x) + b(x), u(x)\}, & \text{si } x \in \mathring{B}_{2\delta}(x_0), \\ u(x), & \text{si } x \in \Omega \backslash \mathring{B}_{2\delta}(x_0). \end{cases}$$

Por el Lema 1.5.35, w es una subsolución de viscosidad de $H(x,u,Du)=0$ en $\Omega_1 := \mathring{B}_{2\delta}(x_0)$. Por otro lado, si $x \in \Omega_2 := \Omega \backslash B_\delta(x_0)$, entonces $w(x) = u(x)$. Por tanto, w es también una subsolución de viscosidad de $H(x,u,Du)=0$ en Ω_2. Como Ω_1 y Ω_2 son abiertos, w es una subsolución de viscosidad de $H(x,u,Du)=0$ en $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$. Además, como $u_0(x) \le w(x) \le v_0(x)$, tenemos que $w(x) \le u(x)$, para todo $x \in \Omega$. Pero $u(x) \ge w(x) \ge g(x) + b(x)$ en $\mathring{B}_\delta(x_0)$, lo cual implica que $u_*(x) \ge g(x) + b(x)$ en $\mathring{B}_\delta(x_0)$, y esto contradice el hecho de que $u_*(x_0) = g(x_0)$. $\square$

Modificando ligeramente esta prueba, también podemos obtener un resultado análogo para ecuaciones de Hamilton-Jacobi en espacios de Banach que admitan una función meseta lipschitziana de clase $\mathcal{C}^2$.

Corolario 1.5.38. *[DG, Corolario 6.1] Sean X un espacio de Banach que admite una función meseta lipschitziana de clase $\mathcal{C}^1$, Ω un subconjunto abierto de X y $H\colon \Omega \times \mathbb{R} \times X^* \to \mathbb{R}$ un hamiltoniano continuo que satisface la condición (H1), es decir, que verifica que*

$$|H(x_1, p) - H(x_2, p)| \to 0 \text{ cuando } \|x_1 - x_2\|(\|p\| + 1) \to 0,$$

$$|H(x, p_1) - H(x, p_2)| \to 0 \text{ cuando } \|p_1 - p_2\| \to 0.$$

Supongamos además que la función $\Phi\colon X \to \mathbb{R}$ tal que $\Phi(x) = H(x, 0)$ está acotada. Entonces existe una única función acotada $u\colon X \to \mathbb{R}$ tal que u es una solución de viscosidad de $u + H(x, Du) = 0$ en Ω.

Demostración:
Por hipótesis, existen unas constantes m y M tales que $m \leq H(x, 0) \leq M$ para todo $x \in \Omega$. Luego tenemos que las funciones constantes iguales a $-m$ y $-M$ son respectivamente supersolución de viscosidad y subsolución de viscosidad de $H(x, u, Du) = 0$ en Ω. Por el Teorema 1.5.37, existe una función $u\colon \Omega \to \mathbb{R}$ tal que $-M \leq u \leq -m$ en Ω y u^* es una subsolución de viscosidad y u_* es una supersolución de viscosidad de $H(x, u, Du) = 0$ respectivamente. Así, u está acotada y, consecuentemente, u_* y u^* también están acotadas. Por el Teorema 1.5.26, tenemos que $u^* \leq u_*$. Pero por definición tenemos que $u_* \leq u \leq u^*$, luego $u = u^* = u_*$ es una solución de viscosidad continua de (HJ1). Si hubiese otra solución de viscosidad acotada de (HJ1), v, entonces sería subsolución y supersolución de viscosidad de (HJ1), al igual que u. Por tanto, por el Teorema 1.5.26 tenemos que $u(x) \leq v(x) \leq u(x)$ para todo $x \in \Omega$, luego $u = v$, probando así la unicidad de u. $\square$

Capítulo 2

Principios variacionales paramétricos

En 2001, Pando G. Georgiev publicó una versión paramétrica del Principio variacional de Ekeland en [G2], probando que bajo ciertas condiciones, el punto mínimo de la función perturbada podía escogerse de forma que dependiera continuamente de un parámetro. De esta forma, como veremos más adelante, se obtienen algunos resultados para obtener equilibrios de Nash en dimensión infinita y para problemas de minimax.

Posteriormente, en 2005, Georgiev dio en [G1] otra versión paramétrica de un principio variacional que también hemos visto, el de Borwein-Preiss. Este principio generaliza el que publicó anteriormente en 2001 y permite obtener un mayor número de resultados. De esta forma, se obtienen también resultados para obtener equilibrios de Nash, así como otras aplicaciones para desigualdades variacionales (véase [G3]). También cabe destacar una versión paramétrica del conocido Teorema de Karush-Kuhn-Tucker, la cual veremos más adelante.

Más adelante, en 2009, Libor Veselý publicó en [Ves] una versión paramétrica ligeramente modificada del principio variacional de Borwein-Preiss. Con esta nueva versión se consigue probar de forma alternativa algunas propiedades de subdiferenciales de funciones convexas y otras propiedades soporte para conjuntos convexos. Ese mismo año, Robert Deville y Antonín Procházka parametrizaron en [DP] el Principio variacional de Deville-Godefroy-Zizler.

Veremos a continuación, que es muy común para las pruebas usar multifunciones y el Teorema de Selección de Michael con algunas modificaciones particulares para cada principio variacional paramétrico.

2.1. Principio variacional paramétrico de Ekeland

El Principio variacional paramétrico (P.V.P.) de Ekeland fue publicado en 2001 por Pando G. Georgiev. El resultado es análogo al P.V. clásico de Ekeland, pero en esta versión la función de perturbación puede elegirse de forma que sólo dependa continuamente de un parámetro.

2.1.1. Resultados previos sobre multifunciones y conos convexos

Previamente, veremos algunos conceptos sobre multifunciones que nos serán muy útiles más adelante (ya vimos algunas definiciones básicas para el Teorema de Caristi-Kirk en la página 29).

Definición 2.1.1. *Dada una multifunción $F\colon X \rightrightarrows M$, donde X es un espacio topológico y (M,d) es un espacio métrico, se dice que*

- *F es* ***semicontinua superiormente (s.c.s.)*** *en $x_0 \in X$ si para cada abierto $V \supset F(x_0)$, existe un abierto $U \ni x_0$ tal que $F(x) \subset V$ para cada $x \in U$;*
- *F es* ***semicontinua inferiormente (s.c.i.)*** *en $x_0 \in X$ si para cada abierto V tal que $V \cap F(x_0) \neq \emptyset$, existe un abierto $U \ni x_0$ tal que $F(x) \cap V \neq \emptyset$ para cada $x \in U$;*
- *F es* ***continua*** *en $x_0 \in X$ si es s.c.s. y s.c.i. en x_0;*
- *F es* ***Hausdorff semicontinua superiormente (H.-s.c.s.)*** *en $x_0 \in X$ si para todo $\mathcal{E} > 0$, existe un abierto $U \ni x_0$ tal que $F(x) \subset \{z \in M \,:\, d\big(z, F(x_0)\big) < \mathcal{E}\}$, para cada $x \in U$;*
- *F es* ***Hausdorff semicontinua inferiormente (H.-s.c.i.)*** *en $x_0 \in X$ si para todo $\mathcal{E} > 0$, existe un abierto $U \ni x_0$ tal que $F(x_0) \subset \{z \in M \,:\, d\big(z, F(x)\big) < \mathcal{E}\}$, para cada $x \in U$;*
- *F es* ***Hausdorff continua*** *en x_0 si es H.-s.c.s. y H.-s.c.i. en x_0.*

Observación 2.1.2. *Dado Y un espacio de Banach real, denotamos por $\mathcal{BCC}(Y)$ el espacio métrico de los subconjuntos convexos, cerrados, acotados y no vacíos de Y dotado de la métrica de Hausdorff,*

$$h(A,B) := \text{máx}\left\{\sup_{a\in A} d(a,B), \sup_{b\in B} d(b,A)\right\}.$$

Entonces, la multifunción $F\colon X \to \mathcal{BCC}(Y)$ es Hausdorff continua si, y sólo si, es una aplicación continua entre los espacios X y $(\mathcal{BCC}(Y), h)$. Además, se verifican también las siguientes implicaciones:

- *si F es H.-s.c.i., entonces F es s.c.i.;*
- *si F es s.c.s., entonces F es H.-s.c.s.*

Definición 2.1.3. *Sean X, Y espacios topológicos. Decimos que la multifunción $F\colon X \rightrightarrows Y$ tiene una* ***selección*** *$f : X \to Y$ si $f(x) \in F(x)$, para cada $x \in X$.*

La prueba del siguiente teorema puede verse en [Mich] o en [FHHMZ, Teorema 7.53].

Teorema 2.1.4. *(Teorema de selección de Michael, 1956)*
Sean X un espacio topológico paracompacto e Y un espacio de Banach. Sea $F\colon X \rightrightarrows Y$ una multifunción s.c.i. con valores cerrados, convexos y no vacíos. Entonces F tiene una selección continua.

La prueba del siguiente resultado puede verse en [BlPi, Proposición 2.3].

Lema 2.1.5. *Sean X un espacio topológico paracompacto, Y un espacio de Banach y $F\colon X \rightrightarrows Y$, $G\colon X \rightrightarrows Y$ multifunciones Hausdorff continuas con valores cerrados y convexos. Definimos $H\colon X \rightrightarrows Y$ tal que $H(x) := F(x) \cap G(x)$. Si $int\, H(x) \neq \emptyset$ para todo $x \in X$, entonces H es Hausdorff continua.*

Veamos ahora otros conceptos sobre conos convexos en espacios de Banach.

Definición 2.1.6. *Sea X un espacio de Banach. Un subconjunto $K \subset X$ es un* ***cono convexo*** *si $\lambda K + \mu K = K$, para todo $\lambda, \mu > 0$. Además, si contiene al origen, diremos que es* ***puntiaguado****.*

Definición 2.1.7. *Sea C un cono convexo y cerrado en un espacio de Banach $(X, \|\cdot\|)$. Diremos que C es un* ***cono fuertemente puntiaguado*** *si existe $l \in B_{X^*}$ tal que:*

(i) $\sup_C l = 0$.

(ii) Para cada sucesión $\{c_n\} \subset C$ tal que $l(c_n) \to 0$, se tiene que $c_n \to 0$.

Definición 2.1.8. *Sean X un espacio de Banach y $Z \subset X$ un subconjunto, llamamos*

(i) el conjunto de los ***puntos débilmente eficientes*** *de Z con respecto a C a*

$$\mathrm{WEP}_C(Z) := \big\{z \in Z \,:\, int(z + C) \cap Z = \emptyset\big\};$$

(ii) el conjunto de los ***puntos eficientes*** *de Z con respecto a C a*

$$\mathrm{EP}_C(Z) := \big\{z \in Z \,:\, (z + C) \cap Z = \{z\}\big\};$$

(iii) el conjunto de los ***puntos fuertemente eficientes de Z con respecto a*** *C a*

$$\begin{aligned}\mathrm{SEP}_C(Z) := \big\{y \in Z \,:\, & (y + C) \cap Z = \{y\}, \\ & y \text{ para cada } \{x_n\} \subset (y + C) \text{ tal que } d(x_n, Z) \to 0, \text{ se tiene que } x_n \to y\big\}.\end{aligned}$$

Definición 2.1.9. *Sea X un espacio de Banach y $Z \subset X$. Diremos que Z está* ***fuertemente acotado*** *respecto a C si existen $z \in Z$ y $\mathcal{E} > 0$ tales que el conjunto $(z + C) \cap (Z + \mathcal{E} B_X)$ está acotado.*

Proposición 2.1.10. *[G2] Sean X un espacio de Banach, $C \subset X$ un cono convexo, fuertemente puntiagudo, cuyo interior es no vacío y $Z \subset X$ un subconjunto convexo y fuertemente acotado respecto a C. Entonces, para cada $y \in Z$ y para cada $\mathcal{E} > 0$, el conjunto $(y + C) \cap (Z + \mathcal{E}B_X)$ está acotado.*

Veamos un resultado importante sobre selecciones continuas extremales.

Teorema 2.1.11. *[G2] Sean X un espacio topológico paracompacto, Y un espacio de Banach y $F \colon X \rightrightarrows Y$ una multifunción Hausdorff continua con valores cerrados, convexos y no vacíos. Sea C un cono convexo, cerrado, fuertemente puntiagudo cuyo interior es no vacío. Supongamos que para cada $x \in X, F(x)$ está fuertemente acotado respecto a C. Entonces se verifica que*

(i) la multifunción $\mathrm{WEP}_C(F(\cdot))$ tiene una selección continua;

(ii) si $y' \colon X \to Y$ es una selección continua de F, entonces $(y'(\cdot) + C) \cap \mathrm{WEP}_C(F(\cdot))$ tiene una selección continua;

(iii) si para cada $x \in X$, $F(x)$ está fuertemente acotado respecto a $C_{\mathcal{E}} := \bigcup_{\lambda \geq 0} (\lambda \overline{C \cap \mathbb{S}_X + \mathcal{E}B_X})$, entonces $(y'(\cdot) + C_{\mathcal{E}}) \cap \mathrm{SEP}_C\, F(\cdot)$ tiene una selección continua.

Demostración:

Denotemos $D := C \cap \mathbb{S}_X$ y $H := \ker l$. Veamos que $d(H, D) > 0$. Por reducción al absurdo, supongamos que existe $(b_n) \subset D$ tal que $d(b_n, H) \to 0$. Dado $x \in H$ arbitrario, $-l(b_n) = |l(b_n)| = |l(b_n - x)| \leq \|b_n - x\|$. Luego $0 \leq -l(b_n) \leq d(b_n, H)$, de donde deducimos que $l(b_n) \to 0$ y como $(b_n) \subset C$, entonces $b_n \to 0$. Pero entonces $(b_n) \not\subset \mathbb{S}_X$, lo que es una contradicción. Por tanto, sea $\mathcal{E} > 0$ tal que $\mathcal{E} < \frac{1}{2} d(H, D)$ y consideremos el conjunto cerrado $C_{\mathcal{E}} := \bigcup_{\lambda \geq 0} \{\lambda \overline{D + \mathcal{E}B_X}\}$. Se comprueba fácilmente que $C_{\mathcal{E}}$ es un cono fuertemente puntiagudo.

Sean $\{\mathcal{E}_n\}_{n=1}^{\infty}, \{\mathcal{E}'_n\}_{n=1}^{\infty}, \{\mathcal{E}''_n\}_{n=1}^{\infty}$ sucesiones de números positivos que convergen a 0 tales que $\sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{E}_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{E}'_n$ convergen y $\mathcal{E}_{n-1} < \mathcal{E}_n + \mathcal{E}\mathcal{E}'_n$, para cada $n \geq 2$.

Dados un escalar α, un subconjunto $A \subset X$ y $x \in X$, denotaremos $\alpha A := \{\alpha a \,:\, a \in A\}$ y $A - x := \{a - x \,:\, a \in A\}$. Dado $e \in D$, por como $0 < \mathcal{E} < \frac{1}{2} d(H, D)$, tenemos que $B_{\mathcal{E}}(e) = e + \mathcal{E}B_X \subset C$. Por las propiedades de los conos, para todo $\delta > 0$, tenemos que $\delta(e + \mathcal{E}B_X) \subset \delta C = C$. Por tanto, para todo $\delta > 0$,

$$\delta \mathcal{E} B_X \subset C - \delta e. \tag{2.1}$$

A continuación, definiremos por inducción las multifunciones: $H_n, F_n : X \rightrightarrows Y$ tales que

$$H_n(x) = (F(x) + \mathcal{E}_n B_X) \cap \{y_{n-1}(x) - \mathcal{E}'_n e + C\},$$

$$F_n(x) = \{y \in H_n(x) \,:\, l(y) \leq \inf l(H_n(x)) + \mathcal{E}''_n\},$$

donde $y_{n-1} : X \to Y$ es una selección continua de F_{n-1}. En efecto, en primer lugar definimos $F_0 := F$, que verifica por hipótesis que es semicontinua inferiormente y que sus imágenes son convexas, cerradas y no vacías. Supongamos que F_{n-1} es semicontinua inferiormente y que sus imágenes son convexas, cerradas y no vacías para $n \geq 1$. Por el Teorema de Selección de Michael, existe una selección continua de F_{n-1}, y_{n-1} (si $n = 1$, $y_0 = y'$). Por la Proposición 2.1.10, H_n está acotada. Es inmediato, por definición, que F_n tiene imágenes cerradas y convexas.

Veamos que F_n es semicontinua inferiormente. Dados x_0 y $\alpha > 0$, se tiene que $int\, H_n(x_0) \neq \emptyset$. En efecto, si $int\, H_n(x_0) = \emptyset$, entonces por (2.1) tenemos que $y_{n-1}(x) + \mathcal{E}'_n \mathcal{E} B_X \subset y_{n-1}(x) - \mathcal{E}'_n e + C$, luego $int\big((F(x_0) + \mathcal{E}_n B_X) \cap (y_{n-1}(x_0) + \mathcal{E}'_n \mathcal{E} B_X)\big) = \emptyset$, luego $\mathcal{E}_n + \mathcal{E}\mathcal{E}'_n \leq \mathcal{E}_{n-1}$, lo cual contradice nuestra elección anterior de $\mathcal{E}_n$ y $\mathcal{E}'_n$. De la Proposición 2.1.10 se sigue, en particular, que $H_n(x_0)$ está acotado y, como $int\, H_n(x_0) \neq \emptyset$, se tiene que $int\, F_n(x_0) \neq \emptyset$. Dado $z_0 \in F_n(x_0)$, existe $z_1 \in int\, f_n(x_0)$ tal que

$$\|z_0 - z_1\| < \alpha.$$

Entonces, $l(z_1) < \inf l(H_n(x_0)) + \mathcal{E}''_n$. Sea $\gamma \in (0, \inf l(H_n(x_0)) + \mathcal{E}''_n - l(z_1))$. Por la continuidad de y_{n-1} y F se sigue por el Lema 2.1.5 que H_n es Hausdorff continua. Luego existe $\delta > 0$ tal que

$$H_n(x) \subset \{z \,:\, l(z) > \inf l(H_n(x_0)) - \gamma\}$$

y $z_1 \in H_n(x)$ para cada $x \in B_\delta(x_0)$. Por consiguiente,

$$\inf l(H_n(x)) \geq \inf l(H_n(x_0)) - \gamma$$

y

$$l(z_1) < \inf l(H_n(x_0)) + \mathcal{E}''_n - \gamma < \inf l(H_n(x)) + \mathcal{E}''_n,$$

para cada $x \in B_\delta(x_0)$. Consecuentemente, $z_1 \in F_n(x)$ para cada $x \in B_\delta(x_0)$, lo cual prueba la semicontinuidad inferior de F_n en x_0, por lo que F_n está bien definido para todo $n \in \mathbb{N}$.

Para todo $x \in X$ y todo $z \in H_n(x)$, tenemos que $z = y_{n-1}(x) + \mathcal{E}'_n e + c$, para algún $c \in C$. Así,

$$l(y_{n-1}(x) - z) = \mathcal{E}'_n l(e) - l(c) \geq \mathcal{E}'_n l(e). \tag{2.2}$$

Si $z \in \ker l$ y $x \in \mathbb{S}_X$, $-l\,(x) = |l\,(x)| = |l\,(x - z)| \leq \|x - z\|$, luego $-l(x) \leq d(x, \ker l)$. Por otro lado, si escogemos $(x_n) \subset \mathbb{S}_X$ tal que $\frac{n}{n+1}\|l\| = \frac{n}{n+1} < |l(x_n)|$ y un punto $y = x - \frac{l(x)}{l(x_n)} x_n \in \ker l$, entonces

$$\|x - y\| \leq \left|\frac{l(x)}{l(x_n)}\right| \|x_n\| \leq \frac{n+1}{n} |l(x)| = -\frac{n+1}{n} l(x).$$

Haciendo $n \to \infty$ y escogiendo el ínfimo sobre $y \in \ker l$, se tiene que $-l(x) \geq d(x, \ker l)$. Por tanto, $d(x, \ker l) = -l(x)$. Sea $s := \inf\{\|x - y\| \,:\, x \in D, y \in l^{-1}(0)\}$, dados $x \in C$ y $r > 0$ tales que $l(x) \geq -r$, entonces $\dfrac{x}{\|x\|} \in D$ y $s \leq d\left(\dfrac{x}{\|x\|}, \ker l\right) = -\dfrac{1}{\|x\|} l(x) \leq \dfrac{r}{\|x\|}$, por lo cual $\|x\| \leq \dfrac{r}{s}$. Por consiguiente, dados $x \in X$ y $z \in H_n(x)$, de (2.2) obtenemos que

$$\|y_{n-1}(x) - z\| \leq -\frac{\mathcal{E}_n' l(e)}{s} \quad \text{y} \quad \operatorname{diam} H_n(x) \leq -\frac{2\mathcal{E}_n' l(e)}{s}. \tag{2.3}$$

De (2.3), para $z = y_n(x)$, obtenemos que $(y_n(x))_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de Cauchy. Si $v(x)$ es su límite, tenemos que es uniforme con respecto de x, es decir, y_n converge uniformenete sobre X a v, luego v es una aplicación continua. Como $y_n(x) \in F(x) + \mathcal{E}_n B_X$, entonces $v(x) \in F(x)$, para $x \in X$.

Veamos que $(v(x) + \mathit{int}\, C) \cap F(x) = \emptyset$ para cada $x \in X$. Si no fuera así, existiría $z \in (v(x) + \mathit{int}\, C) \cap F(x)$ para algún $x \in X$. Entonces para $n \in \mathbb{N}$ suficientemente grande, el segmento de extremos z y $\frac{1}{2}(v(x) + z)$ está contenido en $H_n(x)$ y, por consiguiente, $\operatorname{diam} H_n(x)$ no converge a 0, lo cual entra en contradicción con (2.3). Así, $v(x)$ es un punto débilmente eficiente de $(y'(x) + C) \cap F(x)$.

Si para cada $x \in X$, $F(x)$ está fuertemente acotado con respecto a $C_{\mathcal{E}}$ para algún $\mathcal{E} > 0$, entonces reemplazando C por $C_{\mathcal{E}}$ en la prueba realizada se concluye que la multifunción $(y'(\cdot) + C_{\mathcal{E}}) \cap \mathrm{WEP}_{C_{\mathcal{E}}}(F(\cdot))$ tiene una selección continua. Por último, se comprueba fácilmente que $\mathrm{WEP}_{C_{\mathcal{E}}}(F(\cdot)) \subset \mathrm{SEP}_C(F(\cdot))$, lo cual completa la prueba. $\square$

A partir de este resultado, se prueba la existencia de una selección continua que toma valores en los puntos soporte de un conjunto convexo cerrado, los cuales existen por el Teorema de Bishop-Phelps.

Corolario 2.1.12. *[G2] Sean X un espacio topológico paracompacto, Y un espacio de Banach y $F\colon X \rightrightarrows Y$ una multifunción Hausdorff continua con valores cerrados, convexos, acotados y no vacíos. Entonces para todo $\mathcal{E} > 0$ y para todo $l \in Y^*$, existe una selección continua de la multifunción $F_{l,\mathcal{E}}\colon X \rightrightarrows Y$ definida por*

$$F_{l,\mathcal{E}}(x) = \{y \in F(x) \,:\, \exists x^* \in B_{\mathcal{E}}(l) \,:\, x^*(y) = \max_{F(x)} x^*\}.$$

En particular, las multifunciones que asignan a cada $x \in X$ los puntos soporte y los puntos de la frontera de $F(x)$ tienen selecciones continuas.

2.1.2. Resultado principal

Ahora ya tenemos todas las herramientas necesarias para ver el resultado principal de esta sección.

Teorema 2.1.13. *(Principio variacional paramétrico de Ekeland; Georgiev, 2001) [G2]*
Sean E un espacio de Banach, X un espacio topológico paracompacto e $Y \subset E$ un subconjunto cerrado y convexo. Sea $f\colon X \times Y \to \mathbb{R}$ una función tal que

(a) la familia de funciones $\Phi(\cdot) := \{f(\cdot, y) \,:\, y \in Y\}$ es equicontinua, es decir, dado $\mathcal{E} > 0$, existe $\delta > 0$ tal que si $d(x_1, x_2) < \delta$, entonces $\sup_{y \in Y} |f(x_1, y) - f(x_2, y)| < \mathcal{E}$.

(b) $f(x, \cdot)$ es convexa y s.c.i. para cada $x \in X$.

(c) $\inf_{y \in Y} f(x, y) > -\infty$, para cada $x \in X$.

Entonces,

(1) dado $\mathcal{E} > 0$, existe una aplicación continua $y_0\colon X \to Y$ tal que

$$f(x, y_0(x)) = \min_{y \in Y} [f(x, y) + \mathcal{E}\|y - y_0(x)\|], \ x \in X.$$

Si, además f es continua, entonces tenemos la siguiente propiedad de localización:

(1') Para toda aplicación continua $y' : X \to Y$, para todo $\mathcal{E}, \lambda > 0$ y $0 < \delta < \mathcal{E}$, existe una aplicación continua $y_0\colon X \to Y$ tal que $f(x, y_0(x)) = \min_{y \in Y} \left[f(x, y) + \dfrac{\mathcal{E}}{\lambda}\|y - y_0(x)\| \right]$, para todo $x \in X$, y

(2) si $f(x, y'(x)) < \inf_{z \in X} f(x, z) + \mathcal{E} - \delta$, entonces $\|y'(x) - y_0(x)\| < \lambda$,

(3) $y_0(x)$ es el mínimo fuerte en (1') para cada $x \in X$ (i.e., toda sucesión minimizante en (1') es convergente).

Demostración:
Consideremos el cono

$$C := \{(x, -t) \,:\, t \geq 0, t\lambda \geq (\mathcal{E} - \delta)\|x\|\} \subset E \times \mathbb{R}.$$

La multifunción $F\colon X \rightrightarrows Y \times \mathbb{R}$ definida por

$$F(x) = \operatorname{epi} f(x, \cdot) := \{(y, t) \in E \times \mathbb{R} \,:\, t \geq f(x, y)\}$$

es H-s.c.i. y H-s.c.s. por la hipótesis (a), luego es Hausdorff continua. Además, por la hipótesis (b), F tiene valores cerrados y convexos. En el caso de que f sea continua, la aplicación $s\colon X \to Y \times \mathbb{R}$ dada por

$$s(x) = (y'(x), f(x, y'(x))) \in F(x)$$

es una selección continua de F. Entonces, podemos aplicar el Teorema 2.1.11 (ii), obteniendo así una selección continua (y_0, r_0) de la aplicación $(s(\cdot)+C)\cap \mathrm{WEP}_C(F(\cdot))$. Luego, para todo $x \in X$, tenemos por la definición de $\mathrm{WEP}_C(F(\cdot))$ que $int\Big(\big(y_0(x), r_0(x)\big) + C\Big) \cap \operatorname{epi} f(x,\cdot) = \emptyset$ y $r_0(x) = f(x, y_0(x))$. Así, verificamos (1),

$$f(x, y_0(x)) = r_0(x) = \min_{y\in Y}\left[f(x,y) + \frac{\mathcal{E}-\delta}{\lambda}\|y - y_0(x)\|\right].$$

Como $(y_0(x), r_0(x)) \in (s(x) + C)$, para cada $x \in X$, si $f(x, y'(x)) < \inf_{z\in X} f(x,z) + \mathcal{E} - \delta$, entonces necesariamente $\|y'(x) - y_0(x)\| < \lambda$ (verificándose (2)).

Sea (y_n) sucesión minimizante para la función $g_2(x,\cdot)$, donde $g_2(x,y) = f(x,y) + \dfrac{\mathcal{E}}{\lambda}\|y - y_0(x)\|$. Si $g_1(x,y) = f(x,y) + \dfrac{\mathcal{E}-\delta}{\lambda}\|y - y_0(x)\|$, tenemos que

$$f(x, y_0(x)) \leq g_1(x, y_n) < g_2(x, y_n) \to f(x, y_0(x)).$$

Así, $g_2(x, y_n) - g_1(x, y_n) = \dfrac{\delta}{\lambda}\|y_n - y_0(x)\| \to 0$, por lo que (3) queda probado. $\square$

2.1.3. Aplicaciones

En el siguiente teorema, estableceremos la existencia de un equilibrio de Nash mediante perturbaciones, cuando uno de los conjuntos que forman el dominio de las funciones convexas no es compacto. Puede considerarse una generalización del Teorema minimax de Sion ([Sion]).

Notación: Dados $X_1, \ldots, X_n$ subconjuntos de los espacios de Banach $E_1, \ldots, E_n$ respectivamente, denotaremos

- $X = X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n$ y $x = (x_1, \ldots, x_n)$,
- $E = E_1 \times E_2 \times \ldots \times E_n$,
- $X_{-i} = X_1 \times X_{i-1} \times X_{i+1} \times X_n$ y $x_{-i} = (x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n)$, para cada $i = 1, \ldots, n$.

Teorema 2.1.14. *[G2] Sea X_1 un subconjunto cerrado, acotado, convexo y no vacío de un espacio de Banach E_1 y sean $X_2, \ldots, X_n$ subconjuntos compactos, convexos y no vacíos de los espacios de Banach $E_2, \ldots E_n$ respectivamente. Supongamos que las funciones $f_i \colon X \to \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, n$ verifican que,*

(a) fijado $x_{-i} \in X_{-i}$, $f_i(x_1, \ldots, x_{i-1}, \cdot, x_{i+1}, \ldots, x_n)$ es convexa y s.c.i. en X_i, $i = 1, \ldots, n$;

(b) la familia de funciones $\{f_i(\ldots, x_i, \ldots) : x_i \in X_i\}$ es equicontinua en $X_{-i}, i = 1, \ldots, n$.

Entonces, para cada $\mathcal{E} > 0$*, existe un punto* $\bar{x} = (\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n)$ *que es un equilibrio de Nash para las funciones* $f_i(x) + \mathcal{E}\|x_i - \bar{x}_i\|, i = 1, \ldots, n$*, es decir,*

$$f_i(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_i, \ldots, \bar{x}_n) \leq f_i(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_{i-1}x_i, \bar{x}_{i+1}, \ldots, \bar{x}_n) + \mathcal{E}\|x_i - \bar{x}_i\|, \text{ para todo } x_i \in X_i,\ i = 1, \ldots, n.$$

Demostración:
Por el Teorema 2.1.13, existe una aplicación continua $y_i \colon X_{-i} \to X_i$ tal que

$$f_i(x_1, \ldots, y_i(x_{-i}), \ldots, x_n) \leq f_i(x) + \mathcal{E}\|x_i - \bar{x}_i\|,$$

para todo $x \in X$ y para cada $i = 1, \ldots, n$. Sean las aplicaciones continuas $\varphi_i \colon X_{-1} \to X_{-1}$ tales que

$$\varphi_i(x_{-1}) = (y_1(x_{-1}), x_2, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n),$$

para cada $i = 2, 3, \ldots, n$. Consideremos la aplicación $\Phi \colon X_{-1} \to X_{-1}$ definida por $\Phi(x_{-1}) = (y_2(\varphi_2(x_{-1})), \ldots, y_n(\varphi_n(x_{-1})))$, la cual es continua por ser composición de aplicaciones continuas. Por el Teorema del punto fijo de Schauder, Φ tiene un punto fijo $\bar{x}_{-1} = (\bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n)$, es decir $\Phi(\bar{x}_{-1}) = (y_2(\varphi_2(\bar{x}_{-1})), \ldots, y_n(\varphi_n(\bar{x}_{-1}))) = \bar{x}_{-1} = (\bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n)$. Si definimos $\bar{x}_1 := y_1(\bar{x}_{-1})$, obtenemos que

$$\bar{x}_i = y_i(\varphi(\bar{x}_{-1})) = y_i(y_1(\bar{x}_{-1}), \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_{i-1}, \bar{x}_{i+1}, \ldots, \bar{x}_n) = y_i(\bar{x}_{-i}),$$

para todo $i = 2, \ldots, n$. Por tanto, $f_i(\bar{x}_1, \ldots, y_i(\bar{x}_{-i}), \bar{x}_n) = f_i(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_i, \bar{x}_n) \leq f_i(\bar{x}_1, \ldots, x_i, \ldots, \bar{x}_n) + \mathcal{E}\|x_i - \bar{x}_i\|$, para todo $x_i \in X_i$, $i = 1, \ldots, n$. $\square$

El siguiente teorema es una extensión del P.V. de Ekeland para problemas de minimax.

Teorema 2.1.15. *[G2] Sean* E_1 *y* E_2 *espacios de Banach,* $X \subset E_1$ *e* $Y \subset E_2$ *subconjuntos cerrados no vacíos e* Y *convexo y acotado. Sea* $f \colon X \times Y \to \mathbb{R}$ *una función que verifica las siguientes propiedades:*

(a) *la familia de funciones* $\varphi(\cdot) := \{f(\cdot, y) : y \in Y\}$ *es equicontinua;*

(b) $f(x, \cdot)$ *es continua y cóncava para cada* $x \in X$*;*

(c) $\sup_{y \in Y} f(x, y) < +\infty$*, para todo* $x \in X$*;*

(d) $\inf_{z \in X} \sup_{y \in Y} f(x, y) > -\infty$.

Sean $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \lambda_1, \lambda_2 > 0$ *y* $x' \in X, y' \in Y$ *tales que*

(e) $\sup_{y \in Y} f(x', y) < \inf_{x \in X} \sup_{y \in Y} f(x, y) + \mathcal{E}_1$*;*

(f) $f(x', y') > \sup_{y \in Y} f(x', y) - \mathcal{E}_2$.

Entonces existe una aplicación continua $\tilde{y}\colon X \to Y$ *y un punto* $x_0 \in X$ *tales que para* $y_0 := \tilde{y}(x_0)$,

(g) si $\bar{\mathcal{E}}_1 := \mathcal{E}_1 + \dfrac{\mathcal{E}_2}{\lambda_2}\operatorname{diam} Y$ *y* $f_2(x,y) := f(x,y) + \dfrac{\bar{\mathcal{E}}_1}{\lambda_1}\|x - x_0\| - \dfrac{\mathcal{E}_2}{\lambda_2}\|y - \tilde{y}(x)\|$ *se tiene que*

$$f_2(x_0,y_0) = \max_{y\in Y} f_2(x_0,y) = \min_{x\in X}\sup_{y\in Y} f_2(x,y);$$

(h) x_0 *es el mínimo fuerte de la función* $\sup\limits_{y\in Y} f_2(\cdot,y)$ *e* y_0 *es el máximo fuerte de la función* $f_2(x_0,\cdot)$;

(i) $\|x_0 - x'\| < \lambda_1$ *y* $\|y' - y_0\| \le \lambda_2 + \|\tilde{y}(x') - \tilde{y}(x_0)\|$.

Demostración:

Sea $\delta > 0$ tal que $f(x',y') > \sup\limits_{y\in Y} f(x',y) - \mathcal{E}_2 + \delta$. Por el P.V.P. de Ekeland aplicado a la función $-f$ con $y'(x) = y'$ para todo $x \in X$, existe una aplicación continua $\tilde{y}\colon X \to Y$ tal que:

1. $f(x,\tilde{y}(x)) = \max\limits_{y\in Y}\left\{f(x,y) - \dfrac{\mathcal{E}_2}{\lambda_2}\|y - \tilde{y}(x)\|\right\}$ para cada $x \in X$,
2. si $f(x,y') > \sup\limits_{y\in Y} f(x,y) - \mathcal{E}_2 + \delta$, entonces $\|y' - \tilde{y}(x)\| < \lambda_2$,
3. $\tilde{y}(x)$ es el máximo fuerte de la función $f_1(x,\cdot) = f(x,\cdot) - \dfrac{\mathcal{E}_2}{\lambda_2}\|\cdot - \tilde{y}(x)\|$ sobre Y para cada $x \in X$.

Por (e), podemos encontrar $\mathcal{E}_1' < \mathcal{E}_1$ tal que $\sup\limits_{y\in Y} f(x',y) < \inf\limits_{x\in X}\sup\limits_{y\in Y} f(x,y) + \mathcal{E}_1'$. Entonces,

$$\sup_{y\in Y} f_1(x',y) \le \sup_{y\in Y} f(x',y) \le \inf_{x\in X}\sup_{y\in Y}\left\{f_1(x,y) + \frac{\mathcal{E}_2}{\lambda_2}\|y - \tilde{y}(x)\|\right\} + \mathcal{E}_1' \le \inf_{x\in X}\sup_{y\in Y} f_1(x,y) + \frac{\mathcal{E}_2}{\lambda_2}\operatorname{diam} Y + \mathcal{E}_1'.$$

Sean

$$\bar{\mathcal{E}}_1 := \frac{\mathcal{E}_2}{\lambda_2}\operatorname{diam} Y + \mathcal{E}_1 \quad \text{y} \quad \bar{\mathcal{E}}_1' := \frac{\mathcal{E}_2}{\lambda_2}\operatorname{diam} Y + \mathcal{E}_1'.$$

Por el P.V.P. de Ekeland, existe $x_0 \in B_{\lambda_1}(x')$ tal que

$$\min_{x\in X}\left\{\sup_{y\in Y} f_1(x,y) + \frac{\bar{\mathcal{E}}_1'}{\lambda_1}\|x - x_0\|\right\} = \sup_{y\in Y} f_1(x_0,y),$$

lo cual prueba (g). Además, si $f(x,y') > \sup\limits_{y\in Y} f(x,y) - \mathcal{E}_2 + \delta$, teníamos por 2. que $\|y' - \tilde{y}(x)\| < \lambda_2$, con lo cual, hemos verificado también (i). Sea (x_n) una sucesión minimizante de la función $\varphi\colon X \to \mathbb{R}$ definida por

$$\varphi(x) := \max_{y\in Y} f_2(x,y).$$

Consideremos las funciones $\varphi_1, \varphi_2\colon X \to \mathbb{R}$, definidas por

$$\varphi_1(x) := \varphi(x) + \frac{\bar{\mathcal{E}}_1'}{\lambda_1}\|x - x_0\|,\ \varphi_2(x) := \varphi(x) + \frac{\bar{\mathcal{E}}_1}{\lambda_1}\|x - x_0\|.$$

Entonces, $\varphi(x_0) \le \varphi_1(x_n) < \varphi_2(x_n) \to \varphi(x_0)$, luego $\varphi_2(x_n) - \varphi_1(x_n) = \dfrac{\bar{\mathcal{E}}_1 - \bar{\mathcal{E}}_1'}{\lambda_1}\|x_n - x_0\| \to 0$, lo que prueba (h) y completa la prueba del teorema. $\square$

2.2. Principio variacional paramétrico de Borwein-Preiss I

En 2005, Pando G. Georgiev publicó un artículo donde ofrecía una versión paramétrica de otro P.V. que hemos estudiado anteriormente, el de Borwein-Preiss. Este P.V.P. establece que, dada una función convexa que depende de un parámetro y que cumple ciertas hipótesis, entonces tiene una perturbación convexa y diferenciable tal que su punto mínimo depende continuamente de un parámetro. Ello da lugar a múltiples aplicaciones, entre las cuales veremos otro teorema que nos da la existencia de un equilibrio de Nash y una versión paramétrica de un teorema muy usado en Investigación Operativa, el de Karush-Kuhn-Tucker. Ésta última aplicación da lugar a un P.V.P. sujeto a restricciones.

2.2.1. Preliminares

El siguiente lema es muy utilizado dentro del análisis variacional.

Lema 2.2.1. *[G1] Sean X un espacio topológico paracompacto, E un espacio de Banach e $Y \subset E$ un subconjunto cerrado, convexo y no vacío. Supongamos que $F\colon X \rightrightarrows Y$ es una multifunción s.c.i. con valores convexos y no vacíos, que $\mathcal{E}\colon X \to \mathbb{R}_+$ es una función continua y que $f\colon X \times Y \to \mathbb{R}$, $g\colon X \to \mathbb{R}$ satisfacen que*

(i) la función $f(x,\cdot)$ es cuasi-convexa para cada $x \in X$;

(ii) la función $f(\cdot,y)$ es s.c.s. para cada $y \in Y$;

(iii) g es s.c.i. y, si $F_{\mathcal{E}}\colon X \rightrightarrows Y$ es una multifunción tal que $F_{\mathcal{E}}(x) = (F(x) + \mathcal{E}(x)\mathring{B}_E) \cap Y$, entonces $g(x) \geq \inf\{f(x,y) \,:\, y \in F_{\mathcal{E}}(x)\} > -\infty$, para cada $x \in X$.

Entonces:

(a) $F_{\mathcal{E}}$ tiene una selección $\varphi_{\mathcal{E}}\colon X \to Y$ tal que $f(x,\varphi_{\mathcal{E}}(x)) < g(x) + \mathcal{E}(x)$, para todo $x \in X$.

(b) Si $F(x)$ es abierto para todo $x \in X$, entonces F tiene una selección $\varphi_{\mathcal{E}}\colon X \to Y$ tal que $f(x,\varphi_{\mathcal{E}}(x)) < g(x) + \mathcal{E}(x)$, para todo $x \in X$.

Demostración:
(a) y (b) se prueban de forma similar, por lo que sólo probaremos (a). Para ello, dado $y \in Y$, definimos

$$S_y := \{x \in X \,:\, y \in F_{\mathcal{E}}(x), f(x,y) < g(x) + \mathcal{E}(x)\}.$$

Por la semicontinuidad inferior de F, la continuidad de $\mathcal{E}$ y las hipótesis (ii) y (iii), obtenemos que S_y es abierto. Por (iii) se obtiene que $\bigcup_{y \in Y} S_y = X$. Al ser X es paracompacto, existe un refinamiento localmente finito $\{U_i\}_{i \in I}$ del recubrimiento $\{S_y\}_{y \in Y}$. Sea $\{\phi_i\}_{i \in I}$ una partición continua de la unidad, subordinada a este recubrimiento. Así, para cada $i \in I$, podemos escoger $y_i \in Y$ tal que $\operatorname{sop} \phi_i \subset S_{y_i}$. Definiendo la función continua $\varphi_{\mathcal{E}} \colon X \to Y$ tal que

$$\varphi_{\mathcal{E}}(x) = \sum_{i \in I} \phi_i(x) y_i \in F_{\mathcal{E}}(x), \text{ para todo } x \in X,$$

obtenemos la selección continua de $F_{\mathcal{E}}$ que buscábamos. $\square$

A la función $\varphi_{\mathcal{E}}$ del lema anterior, se le llama **selección continua $\mathcal{E}$-aproximada de** F. Este lema es una potente herramienta para probar algunos teoremas minimax como el de Ky Fan (Teorema 2.3, [G1]). Lo usaremos en esta sección para probar el P.V.P. de Borwein-Preiss y algunas de sus aplicaciones.

2.2.2. Resultado principal

Teorema 2.2.2. *(Principio variacional paramétrico de Borwein-Preiss, 2005) [G1]*
Supongamos que X es un espacio topológico paracompacto, que Y es un subconjunto convexo, cerrado y no vacío de un espacio de Banach y que $f \colon X \times Y \to \mathbb{R}$ es una función que satisface las condiciones:

(1) para cada $x \in X$, la función $f(x, \cdot)$ es convexa, s.c.i. y,

(1.1) si Y está acotado, entonces $\inf f(x, Y) > -\infty$;

(1.2) si Y no está acotado, entonces, para algún entorno abierto U de x, $\inf f(U, Y) > -\infty$;

(2) para todo $y \in Y$, la función $f(\cdot, y)$ es s.c.s.;

(3) la familia de funciones $\{f(\cdot, y) : y \in Y_0\}$ es equi-s.c.i. para cada subconjunto acotado $Y_0 \subset Y$, es decir, para cada $x_0 \in X$ y $\gamma > 0$, existe un conjunto abierto $U \ni x_0$ tal que $f(x_0, y) - f(x, y) < \gamma$ para todo $x \in U$ e $y \in Y_0$.

Sean $\mathcal{E} \colon X \to \mathbb{R}_+$ e $y_0 \colon X \to Y$ aplicaciones continuas tales que

$$f(x, y_0(x)) \leq \inf f(x, Y) + \mathcal{E}(x), \text{ para todo } x \in X.$$

Entonces para todo $p \geq 1, \alpha > 0$ y toda función continua $\lambda \colon X \to \mathbb{R}_+$, existen una aplicación continua $v \colon X \to Y$, una sucesión de aplicaciones continuas $y_n \colon X \to Y$ y una sucesión de aplicaciones continuas con valores reales $\nu_n \colon X \to \mathbb{R}_+$ tales que $y_n(x)$ converge uniformemente sobre $x \in X$ a $v(x)$ y

$$\|v(x) - y_0(x)\| < \lambda(x), \text{ para todo } x \in X, \tag{2.4}$$

$$f(x, v(x)) + \Delta(x, v(x)) \leq f(x, y) + \Delta(x, y), \text{ para todo } x \in X, y \in Y, \tag{2.5}$$

donde $\Delta(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} \mu_n(x) \|y - y_n(x)\|^p$, $\mu_n(x) = \dfrac{\mathcal{E}(x) + \alpha}{\lambda(x)^p} \nu_n(x)$ para $n \geq 0$, y $\sum_{n=0}^{\infty} \nu_n(x) = 1$.

<u>**Demostración:**</u>

Sean $\mathcal{E}_0$, μ_0 y ν_0 funciones definidas en X con imágenes en $\mathbb{R}_+$ tales que $\mathcal{E}_0(x) = \mathcal{E}(x)$, $\mu_0(x) = \dfrac{\mathcal{E}(x)+\frac{\alpha}{2}}{\lambda(x)^p}$ y $\nu_0 = \dfrac{\mu_0(x)\lambda(x)^p}{\mathcal{E}(x)+\alpha}$. Consideramos las sucesiones de funciones $\{\nu_n\}_{n\geq 1}$, $\{\mu_n\}_{n\geq 1}$, $\{\lambda_n\}_{n\geq 0}$ y $\{\mathcal{E}_n\}_{n\geq 1}$ definidas en X y con imágenes en $\mathbb{R}_+$ tales que $\nu_n(x) = \dfrac{1-\nu_0(x)}{2^n}$, $\mu_n(x) = \dfrac{\mathcal{E}(x)+\alpha}{\lambda(x)^p}\nu_n(x)$, $\lambda_n(x) = \left(\dfrac{\mathcal{E}_n(x)+\mathcal{E}_{n+1}(x)}{\mu_n(x)}\right)^{\frac{1}{p}}$, $\mathcal{E}_n(x) = \beta(x)2^{-2n}$, donde $\beta\colon X \to \mathbb{R}_+$ es una función continua tal que

$$\left(\frac{5\beta(x)}{2\alpha}\right)^{\frac{1}{p}} \frac{1}{2^{1/p}-1} + \left(\frac{\mathcal{E}(x)+\beta(x)/4}{\mathcal{E}(x)+\alpha/2}\right)^{\frac{1}{p}} < 1. \tag{2.6}$$

Esta función existe ya que basta con escoger $\beta(x)$ con valores suficientemente pequeños para verificar la desigualdad. Entonces, para cada $x \in X$ se verifica que

- $\nu_0(x) = \dfrac{\mathcal{E}(x)+\frac{\alpha}{2}}{\lambda(x)^p}\dfrac{\lambda(x)^p}{\mathcal{E}+\alpha} = \dfrac{\mathcal{E}(x)+\frac{\alpha}{2}}{\mathcal{E}(x)+\alpha} \in (0,1)$,
- $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \nu_n(x) = v_0(x) + (1-v_0(x)) \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{2^n} = 1$,
- $\lambda_0(x) = \left(\dfrac{\mathcal{E}_0(x)+\mathcal{E}_1(x)}{\mu_0(x)}\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\dfrac{\mathcal{E}(x)+\frac{\beta}{4}}{\mathcal{E}+\frac{\alpha}{2}}\right)^{\frac{1}{p}} \lambda(x)$, y
- para cada $n \geq 1$,

$$\begin{aligned}
\lambda_n(x) &= \left(\frac{\mathcal{E}_n(x)+\mathcal{E}_{n+1}(x)}{\mu_n(x)}\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\frac{\frac{\beta(x)}{2^{2n}}+\frac{\beta(x)}{2^{2n+2}}}{(\mathcal{E}(x)+\alpha)\nu_n(x)}\right)^{\frac{1}{p}} \lambda(x) \\
&= \left(\frac{5\beta(x)}{2^{n+2}(\mathcal{E}(x)+\alpha)(1-\nu_0(x))}\right)^{\frac{1}{p}} \lambda(x) = \left(\frac{5\beta(x)}{2^{n+2}(\mathcal{E}(x)+\alpha-\mu_0(x)\lambda(x)^p)}\right)^{\frac{1}{p}} \lambda(x) \\
&= \left(\frac{5\beta(x)}{2^{n+1}\alpha}\right)^{\frac{1}{p}} \lambda(x).
\end{aligned}$$

De esta forma, se tiene que

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n(x) &= \left[\left(\frac{\mathcal{E}(x)+\frac{\beta}{4}}{\mathcal{E}+\frac{\alpha}{2}}\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\frac{5\beta(x)}{\alpha}\right)^{\frac{1}{p}} \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2^{n+1}}\right)^{\frac{1}{p}}\right] \lambda(x) \\
&= \left[\left(\frac{\mathcal{E}(x)+\frac{\beta}{4}}{\mathcal{E}+\frac{\alpha}{2}}\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\frac{5\beta(x)}{\alpha}\right)^{\frac{1}{p}} \frac{1}{2^{2/p}(1-2^{-1/p})}\right] \lambda(x) \\
&= \left[\left(\frac{\mathcal{E}(x)+\frac{\beta}{4}}{\mathcal{E}+\frac{\alpha}{2}}\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\frac{5\beta(x)}{2\alpha}\right)^{\frac{1}{p}} \frac{1}{2^{1/p}-1}\right] \lambda(x).
\end{aligned}$$

Y haciendo uso de la desigualdad (2.6),

$$\sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n(x) < \lambda(x), \text{ para todo } x \in X. \tag{2.7}$$

Consideremos las funciones $f_0 \equiv f$, $f_1 \colon X \times Y \to \mathbb{R}$ tal que $f_1(x, y) = f_0(x, y) + \mu_0(x)\|y - y_0\|^p$ y la multifunción $F \colon X \rightrightarrows Y$ tal que $F(x) = Y$, para todo $x \in X$. Aplicando el Lema 2.2.1 a $g_1 \colon X \to \mathbb{R}$ tal que $g_1(x) = \operatorname{ínf} f_1(x, Y)$, obtenemos una aplicación continua $y_1 \colon X \to Y$ tal que $f_1(x, y_1(x)) \leq \operatorname{ínf} f_1(x, Y) + \mathcal{E}_1(x)$, para todo $x \in X$. A continuación, aplicando el Lema 2.2.1 a $g_n \colon X \to \mathbb{R}$ tal que $g_n(x) = \operatorname{ínf} f_n(x, Y)$ para $n = 2, 3, \ldots$, podemos definir inductivamente una sucesión de funciones $f_n \colon X \times Y \to \mathbb{R}$ y una sucesión de aplicaciones continuas $y_n \colon X \to Y$ tales que para cada $n \geq 0$, verifican

$$f_{n+1}(x, y) = f_n(x, y) + \mu_n(x)\|y - y_n(x)\|^p, \tag{2.8}$$

$$f_n\big(x, y_n(x)\big) \leq \operatorname{ínf} f_n(x, Y) + \mathcal{E}_n(x), \text{ para cada } x \in X. \tag{2.9}$$

Veamos que podemos utilizar el Lema 2.2.1. Las condiciones (i) y (ii) se cumplen por las hipótesis (1) y (2) y para comprobar (iii), basta por (1) con comprobar que g_n es s.c.i. para cada $n \geq 0$. Supongamos que Y no está acotado. Dados $x_0 \in X$ y $\gamma > 0$, fijamos $z_0 \in Y$. Como $f_n(\cdot, z_0)$ es s.c.s. e y_n es continua en x_0, existe un entorno abierto U de x_0 tal que $f_n(x, z_0) < f_n(x_0, z_0) + \gamma$, para cada $x \in U$, e $y_n(U)$ está acotado. Definimos

$$Y_n := \bigcup_{x \in U} L_n(x), \text{ donde } L_n(x) = \{y \in Y \,:\, f_n(x, y) < \operatorname*{ínf}_{z \in Y} f_n(x, z) + \gamma\}. \tag{2.10}$$

Fijado $n \geq 1$, probaremos que Y_n está acotado por reducción al absurdo. Supongamos que existen dos sucesiones $\{x_m\}_{m=1}^{\infty} \subset U$ y $\{z_m\}_{m=1}^{\infty}$ tal que $z_m \in L_n(x_m) \subset Y$ y $\|z_m\| \to \infty$. Entonces

$$\begin{aligned} -\infty \underset{(1)}{<} f_n(x_m, z_m) &\underset{(2.8)}{=} f_{n-1}(x_m, z_m) + \mu_{n-1}(x_m)\|z_m - y_{n-1}(x_m)\|^p \\ &\underset{(2.10)}{<} \operatorname*{ínf}_{z \in Y} f_n(x_m, z) + \gamma < f_n(x_m, z_0) + \gamma < f_n(x_0, z_0) + 2\gamma. \end{aligned}$$

Por tanto,

$$f_n(x_m, z_m) < f_n(x_0, z_0) + 2\gamma. \tag{2.11}$$

Pero $\{\mu_{n-1}(x_m)\}_{m \geq 1} \subset \mathbb{R}_+$, $\{f_{n-1}(x_m, z_m)\}_{m \geq 1}$ está acotada inferiormente por (1.2) y, como $y_{n-1}(U)$ está acotado, entonces $\|z_m - y_{n-1}(x_m)\| \geq \|z_m\| - \|y_{n-1}(x_m)\| \overset{m \to \infty}{\longrightarrow} +\infty$. Por consiguiente,

$$f_n(x_m, z_m) = f_{n-1}(x_m, z_m) + \mu_{n-1}(x_m)\|z_m - y_{n-1}(x_m)\|^p \overset{m \to \infty}{\longrightarrow} +\infty,$$

lo que contradice (2.11). Luego Y_n está acotado, lo cual garantiza que la familia de funciones $\Phi(\cdot) := \{\|y - (\cdot)\|^p \,:\, y \in Y_n\}$ es equi-Lipschitz, es decir, existe $M > 0$ tal que

$$\big|\|y - x_1\|^p - \|y - x_2\|^p\big| \leq M\|x_1 - x_2\| \text{ para todo } x_1, x_2 \in X, y \in Y_n.$$

Gracias a la equi-lipschitzianidad y la hipótesis (3), existe un entorno abierto $U_1 \subset U$ de x_0 tal que

$$f_n(x_0, y) - f_n(x, y) < \gamma, \text{ para todo } y \in Y_n, x \in U_1. \tag{2.12}$$

Dado $x \in U_1$, escogemos $y_x \in L_n(x)$. Entonces tenemos que

$$g_n(x_0) - g_n(x) = \inf_{y \in Y} f_n(x_0, y) - \inf_{y \in Y} f_n(x, y) \underset{(2.10)}{\leq} f_n(x_0, y_x) - f_n(x, y_x) + \gamma \underset{(2.12)}{\leq} 2\gamma,$$

lo cual prueba que g es s.c.i. cuando Y no está acotado (si Y está acotado, se puede escoger U_1 como antes para Y en lugar de Y_n y repetir el razonamiento para probar que g es s.c.i.). Por tanto, el uso del Lema 2.2.1 era correcto. Así, obtenemos que

$$\begin{aligned}\mu_n(x)\|y_{n+1}(x) - y_n(x)\|^p &\underset{(2.8)}{=} f_{n+1}(x, y_{n+1}(x)) - f_n(x, y_{n+1}(x)) \\ &\underset{(2.8)}{=} \big(f_{n+1}(x, y_{n+1}(x)) - f_{n+1}(x, y_n(x))\big) + \big(f_n(x, y_n(x)) - f_n(x, y_{n+1}(x))\big) \\ &\leq \mathcal{E}_{n+1}(x) + \mathcal{E}_n(x).\end{aligned}$$

Por tanto, $\|y_{n+1}(x) - y_n(x)\| \leq \left(\dfrac{\mathcal{E}_{n+1}(x) + \mathcal{E}_n(x)}{\mu_n(x)}\right)^{\frac{1}{p}} = \lambda_n(x)$, luego

$$\|y_{n+m}(x) - y_n(x)\| \leq \sum_{i=0}^{m-1} \|y_{n+1+i} - y_{n+i}(x)\| \leq \sum_{i=0}^{m-1} \lambda_{n+i}(x). \tag{2.13}$$

Entonces, por (2.7) y la continuidad de las funciones $\lambda_i, i \geq 0$, se sigue que $\{y_n(x)\}_{n \geq 0}$ es una sucesión de Cauchy que converge uniformemente en un entorno U_x de x a $v(x)$, para cada $x \in X$, lo cual implica que la aplicación $v \colon X \to Y$ es continua. Si $m \to \infty$ y $n = 0$ en (2.13), se tiene por (2.7) que

$$\|v(x) - y_0(x)\| \leq \sum_{i=0}^{\infty} < \lambda(x),$$

lo cual prueba (2.4). Veamos ahora que, para cada $x \in X$, $v(x)$ es un punto mínimo de la función

$$\tilde{f}(x, \cdot) = f(x, \cdot) + \sum_{k=0}^{\infty} \mu_k(x)\|(\cdot) - y_k(x)\|^p.$$

Nótese que

$$\tilde{f}(x, \cdot) = f_1(x, \cdot) + \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k(x)\|(\cdot) - y_k(x)\|^p = \ldots = f_n(x, \cdot) + \sum_{k=n}^{\infty} \mu_k(x)\|(\cdot) - y_k(x)\|^p. \tag{2.14}$$

Dado $\gamma > 0$ y $x \in X$, entonces $f(x, \cdot)$ es s.c.i. por la hipótesis (1), luego $\tilde{f}(x, \cdot)$ es s.c.i. Por tanto, existe $\delta > 0$ tal que

$$\tilde{f}(x, v(x)) < \tilde{f}(x, y) + \frac{\gamma}{3}, \text{ para todo } y \in \mathring{B}_\delta(v(x)). \tag{2.15}$$

Sea n suficientemente grande tal que para cada $x \in X$,

- $\mathcal{E}_n(x) = \beta(x) 2^{-2n} < \dfrac{\gamma}{3}$,
- $\|y_n(x) - v(x)\| < \delta$ ($\{y_n(x)\}$ converge uniformemente a $v(x)$), y
- $\sum\limits_{k=n+1}^{\infty} \mu_k(x) \|y_n(x) - y_k(x)\|^p = \tilde{f}(x, y_n(x)) - f_n(x, y_n(x)) < \dfrac{\gamma}{3}$.

Entonces, dado $y \in Y$,

$$\begin{aligned}
\tilde{f}(x, v(x)) &\underset{(2.15)}{<} \tilde{f}(x, y_n(x)) + \frac{\gamma}{3} = f(x, y_n(x)) + \sum_{k=0}^{\infty} \mu_k(x) \|y_n(x) - y_k(x)\| + \frac{\gamma}{3} \\
&\underset{(2.14)}{=} f_n(x, y_n(x)) + \sum_{k=n+1}^{\infty} \mu_k(x) \|y_n(x) - y_k(x)\|^p + \frac{\gamma}{3} \\
&\underset{(2.9)}{\leq} f_n(x, y) + \mathcal{E}_n(x) + \frac{\gamma}{3} + \frac{\gamma}{3} < f_n(x, y) + \gamma \underset{(2.14)}{<} \tilde{f}(x, y) + \gamma.
\end{aligned}$$

Con lo cual, $\tilde{f}(x, v(x)) < \tilde{f}(x, y) + \gamma$, probando así (2.5) y el teorema. $\square$

<u>Observación</u> 2.2.3. *Dado $\mathcal{E} > 0$, si reemplazamos en el teorema la función $\Delta(x, y)$ por $\Delta(x, y) + \mathcal{E}\|y - v(x)\|^p$, se obtiene que $v(x)$ es un mínimo fuerte de la función de perturbación, es decir, toda sucesión minimizante converge a $v(x)$.*

<u>Demostración:</u>
Si no fuera así, existiría una sucesión $\{y_n\} \subset Y$ tal que $\Delta(x, y_n) + \mathcal{E}\|y_n - v(x)\| \to \Delta(x, v(x))$ y $\|y_n - v(x)\| \geq \mathcal{E} > 0$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Pero entonces $\Delta(x, y_n) + \mathcal{E}\|y_n - v(x)\| \geq \Delta(x, y_n) + \mathcal{E}^2 \geq \Delta(x, v(x)) + \mathcal{E}^2 > \Delta(x, v(x))$ para cada $n \in \mathbb{N}$, lo cual es una contradicción. $\square$

<u>Observación</u> 2.2.4. *Si $p = 1$, obtenemos una versión paramétrica del P.V. de Ekeland en la cual las sucesiones minimizantes son convergentes.*

2.2.3. Aplicaciones

De forma similar al P.V.P. de Ekeland, podemos establecer la existencia de un equilibrio de Nash para funciones convexas mediante perturbarciones arbitrariamente pequeñas, convexas y diferenciables, cuando el dominio de una de las variables no es compacto. Además, también podemos probar la existencia de soluciones para una desigualdad variacional relacionada.

Notación: Dados $X_1, \ldots, X_n$ subconjuntos de los espacios de Banach $E_1, \ldots, E_n$ respectivamente, denotaremos

- $X = X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n$ y $x = (x_1, \ldots, x_n)$.
- $E = E_1 \times E_2 \times \ldots \times E_n$.
- $X_{-i} = X_1 \times X_{i-1} \times X_{i+1} \times X_n$ y $x_{-i} = (x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n)$, para cada $i = 1, \ldots, n$.

Teorema 2.2.5. *[G1] Sea X_1 un subconjunto cerrado, convexo y no vacío de un espacio de Banach E_1 y sean $X_2, \ldots, X_n$ subespacios compactos, convexos y no vacíos de los espacios de Banach $E_2, \ldots E_n$ respectivamente. Supongamos que las funciones $f_i \colon E \to \mathbb{R}, i = 1, \ldots, n$ verifican que*

(a) f_i está acotada inferiormente, $i = 1, \ldots, n$;

(b) fijado $x_{-i} \in X_{-i}$, $f_i(x_1, \ldots x_{i-1}, \cdot, x_{i+1}, \ldots, x_n)$ es convexa en X_i, $i = 1, \ldots, n$;

(c) fijado $x_i \in X_i$, $f_i(\ldots, x_i, \ldots)$ es s.c.s. en X_{-i}, $i = 2, \ldots, n$;

(d) la familia de funciones $\{f_i(\ldots, x_i, \ldots) \, : \, x_i \in X_i\}$ es equi-s.c.i. en X_{-i}.

Dado un subconjunto $Y \subset X_1$ arbitrario,

(e) fijado $x_1 \in X_1$, $f_1(x_1, \ldots)$ es s.c.s. en X_{-1};

(f) la familia de funciones $\{f_1(x_1, \ldots), \, : \, x_1 \in X_1\}$ es equi-s.c.i. en X_{-1}.

Entonces, dado $\mathcal{E} > 0$, existen puntos $\bar{x}_i \in X_i$ y funciones convexas $b_i \colon X_i \to \mathbb{R}, i = 1, \ldots, n$ tales que

(1) b_i es lipschitziana y $\mathrm{Lip}(b_i) < \mathcal{E}$, $i = 2, \ldots, n$;

(2) b_1 es lipschitziana en todos los subconjuntos acotados de X_1 y, en un entorno de $\bar{x}_1$, $\mathrm{Lip}(b_1) < \mathcal{E}$;

(3) b_i es diferenciable si la norma de E_i es diferenciable en $E_i \backslash \{0\}$, $i = 1, \ldots, n$;

(4) el punto $\bar{x} = (\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n)$ es un equilibrio de Nash para las funciones $f_i(x) + b_i(x_i), i = 1, \ldots n$, es decir, para todo $x_i \in X_i$ y para cada $i = 1, \ldots, n$,

$$f_i(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_{i-1}, \bar{x}_i, \bar{x}_{i+1}, \ldots, \bar{x}_n) + b_i(\bar{x}_i) \leq f_i(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_{i-1}, x_i, \bar{x}_{i+1}, \ldots, \bar{x}_n) + b_i(x_i); \tag{2.16}$$

(5) si todas las funciones f_i son idénticas, $f_i = f$, para cada $i = 1, \ldots, n$; f es Fréchet diferenciable en X. Si además todas las normas de E_i son Fréchet diferenciables en $E_i \backslash \{0\}$, entonces

$$\big(f'(\bar{x}) + b'(\bar{x})\big)(x - \bar{x}) \geq 0, \text{ para todo } x \in X, \tag{2.17}$$

donde $b'(\bar{x}) = (b'_1(\bar{x}_1), \ldots b'_n(\bar{x}_n))$.

<u>**Demostración:**</u>
Aplicando el P.V.P. de Borwein-Preiss para cada función f_i, $i = 1, \ldots, n$, existe una aplicación continua $y_i \colon X_{-i} \to X_i$ y una función continua $\Delta_i \colon X \to \mathbb{R}$ tales que

$$(f_i + \Delta_i)(x_1, \ldots, x_{i-1}, y_i(\bar{x}_{-i}), x_{i+1}, \ldots, x_n) \leq (f_i + \Delta_i)(x_1, \ldots, x_n), \text{ para todo } x_i \in X_i, i = 1, \ldots, n. \tag{2.18}$$

Además, se desprende del P.V.P. de Borwein-Preiss que Δ_i es de la forma (2.5). Si las funciones escogidas que hacen el papel de λ en este P.V.P. tienen valores suficientementes grandes, entonces

- Δ_i es lipschitziana respecto a la variable x_i en X_i con $\mathrm{Lip}(\Delta_i) < \mathcal{E}$, $i = 2, \ldots, n$;
- Δ_1 es lipschitziana en los subconjuntos acotados de X_1 y, en un entorno de $\bar{x}_1$, $\mathrm{Lip}(\Delta_1) < \mathcal{E}$;
- Δ_i es diferenciable si la norma es diferenciable en $E_i \backslash \{0\}$, $i = 1, \ldots, n$.

Definimos las aplicaciones $\varphi_i \colon X_{-1} \to X_{-i}$ tales que

$$\varphi_i(x_{-1}) = (y_1(x_{-1}), x_2, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n), \ i = 2, \ldots, n.$$

Como X_{-1} es un conjunto compacto y convexo y la aplicación composición $\Phi \colon X_{-1} \to X_{-1}$ tal que

$$\Phi(x_{-1}) = \Big(y_2\big(\varphi_2(x_{-1})\big), \ldots, y_n\big(\varphi_n(x_{-1})\big) \Big)$$

es continua, por el Teorema del punto fijo de Schauder, Φ tiene un punto fijo $\bar{x}_{-1} = (\bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n)$. Así, $\Phi(\bar{x}_{-1}) = \Big(y_2\big(\varphi_2(\bar{x}_{-1})\big), \ldots, \big(\varphi_n(\bar{x}_{-1})\big) \Big) = \bar{x}_{-1} = (\bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n)$, luego

$$\bar{x}_i = y_i\big(\varphi_i(\bar{x}_{-1})\big) = y_i\big(y_1(\bar{x}_{-1}), \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_{i-1}, \bar{x}_{i+1}, \ldots, \bar{x}_n\big), \text{ para cada } i = 2, \ldots, n.$$

Por tanto, si definimos $\bar{x}_1 := y_1(\bar{x}_{-1})$, obtenemos

$$\bar{x}_i = y_i(\bar{x}_{-i}), \text{ para cada } i = 2, \ldots, n. \tag{2.19}$$

Si definimos $b_i \colon X_i \to \mathbb{R}$ tal que $b_i(x_i) = \Delta(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_{i-1}, x_i, \bar{x}_{i+1}, \ldots, \bar{x}_n)$, entonces, a partir de (2.18) y (2.19), obtenemos para todo $x_i \in X_i$ y para cada $i = 1, \ldots, n$,

$$f_i(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_{i-1}, \bar{x}_i, \bar{x}_{i+1}, \ldots, \bar{x}_n) + b_i(\bar{x}_i) \leq f_i(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_{i-1}, x_i, \bar{x}_{i+1}, \ldots, \bar{x}_n) + b_i(x_i).$$

Hemos probado (1), (2), (3) y (4). Falta por ver (5). Supongamos que $f = f_i, i = 1, \ldots, n$. Como f y b_i son Fréchet diferenciables y convexas en X_i, $i = 1, \ldots, n$, entonces por la Proposición (0.3.9),

$$\begin{aligned}(f'_{x_i}(\bar{x}) + b'_i(x_i))(x_i - \bar{x}_i) \geq & f(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_{i-1}, x_i, \bar{x}_{i+1}, \ldots \bar{x}_n) + b_i(x_i) \\ & - f(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_{i-1}, \bar{x}_i, \bar{x}_{i+1}, \ldots \bar{x}_n) - b_i(\bar{x}_i) \underset{(4)}{\geq} 0,\end{aligned}$$

por tanto,

$$(f'_{x_i}(\bar{x}) + b'_i(x_i))(x_i - \bar{x}_i) \geq 0, \text{ para cada } i = 1, 2, \ldots, n. \tag{2.20}$$

Y sumando en (2.20) para $i = 1, \ldots, n$, obtenemos (5),

$$\big(f'(\bar{x}) + b'(\bar{x})\big)(x - \bar{x}) \geq 0, \text{ para todo } x \in X,$$

donde $b'(\bar{x}) = (b'_1(\bar{x}_1), \ldots b'_n(\bar{x}_n))$. $\square$

A continuación veremos una versión paramétrica del Teorema de Karush-Kuhn-Tucker, en el que estableceremos una dependencia continua de los multiplicadores de Lagrange de un problema de minimización con restricciones respecto de un parámetro. Previamente, daremos unas condiciones:

(H_a) P y X son espacios topólogicos paracompactos.

(H_b) E es un espacio de Banach y $C \subset E$ es un conjunto cerrado, convexo y no vacío; dado $\mathcal{E}_0 > 0$, $C_0 := C + \mathcal{E}_0 \mathring{B}_E$.

(H_c) Las funciones $f, g_i \colon P \times C_0 \to \mathbb{R}, i = 1, \ldots, n$ son continuas y convexas respecto a la segunda variable, definida en C_0. Denotaremos $g(p, x) := (g_1(p, x), \ldots, g_n(p, x))$.

(H_d) Las familias de funciones $\{f(\cdot, x) : x \in C_0\}, \{g_i(\cdot, x) : x \in C_0\}, i = 1, \ldots, n$, son equicontinuas.

(H_e) La multifunción $\mathcal{C} \colon P \to 2^C$ tiene valores cerrados, convexo y no vacíos, es s.c.i. y es H-s.c.s.

(H_f) El conjunto $X(p) = \{x \in \mathcal{C}(p) : g_i(p, x) \leq 0, i = 1, \ldots, n\}$ es no vacío para todo $p \in P$.

Cuando se satisfagan estas condiciones, diremos que se satisface la hipótesis (H).
Consideraremos el siguiente problema de minimización parametrizado, $(\mathcal{P})$:

$$\begin{aligned} (\mathcal{P}) \ \ & \min_{x \in C_0} f(p, x), \text{ para cada } p \in P \\ & s.a \ \ x \in X(p). \end{aligned}$$

donde s.a denota *sujeto a*.

<u>Teorema</u> 2.2.6. *(Teorema paramétrico de Karush-Kuhn-Tucker, 2005) [G1] Asumamos que la hipótesis (H) se satisface y que la norma del espacio de Banach E es diferenciable en $E \backslash \{0\}$. Supongamos que las funciones $\mathcal{E}, \lambda \colon X \to \mathbb{R}_+$ y $\gamma \colon X \to \mathbb{R}$ son continuas y que dados $\alpha > 0$ y $q \geq 1$, entonces se verifica*

$$0 \leq \gamma(p) < \frac{\lambda(p)}{2q5^{q-1}}. \tag{2.21}$$

Sean $f(p, \cdot), g_i(p, \cdot), i = 1, \ldots, n$ funciones acotadas en $u(p) + 3\lambda(p)\mathring{B}_E$ para todo $p \in P$ y toda aplicación continua $u \colon P \to C$ que satisfaga

- *$u(p) \in X_\gamma(p) := \{x \in \mathcal{C}(p) + \gamma(p)\mathring{B}_E \,:\, g_i(p,x) \leq 0, i = 1,\ldots,n\}$ y*
- *$f(p,u(p)) < \inf_{x \in X_\gamma(p)} f(p,x) + \mathcal{E}(p)$, para todo $p \in P$.*

Entonces, existe una selección v de $\mathcal{C}$, unas aplicaciones continuas $\mu\colon P \to \mathbb{R}_+$ y $r\colon P \to \mathbb{R}^n_+$ (denotaremos $r(p) := (r_1(p),\ldots,r_n(p))$) y una función continua $K\colon P \to \mathbb{R}_+$ tales que
(A) para todo $p \in P$ se satisfacen

(i) $\|(\mu(p), r(p))\| = 1, \mu(p) \geq 0, r_i(p) \geq 0, i = 1,\ldots,n$;

(ii) $r_i(p)g_i(p,u(p)) = 0, i = 1,\ldots,n$;

(iii) $\|v(p) - u(p)\| < \lambda(p)$;

(iv) La función $\mu(p)f(p,x) + \sum_{i=1}^n r_i(p)g_i(p,x) + \Delta(p,x)$ alcanza su mínimo sobre $\mathcal{C}(p)$ en $v(p)$;

(v) $-\Delta'_x(p,v(p)) \in \partial_x L\big(p, v(p), \mu(p), r(p), K(p)\big)$, donde L es una función tal que

$$L(p,x,\mu,r,K) = \mu f(p,x) + \sum_{i=1}^n r_i(p)g_i(p,x) + Kd\big(\mathcal{C}(p),x\big),$$

$\partial_x L$ es la subdiferencial de L con respecto a la segunda variable, Δ es una función tal que

$$\Delta(p,x) = \sum_{i=0}^\infty \mu_i(p)\|x_i(p) - x\|^q,$$

$\Delta(p,\cdot)$ es una función convexa y Fréchet diferenciable y $\Delta(\cdot,x)$ es una función continua; $\mu_i\colon P \to \mathbb{R}_+$ son funciones tales que

$$\mu_i(p) = \frac{\mathcal{E}(p) + \alpha + K(p)\gamma(p)}{\lambda(p)^q}\nu_i(p), \text{ para } i \geq 0,$$

y $\nu_i, x_i\colon P \to C_0$ son aplicaciones continuas tales que $\sum_{i=0}^\infty \nu_i(p) = 1$ y $x_i(p)$ converge uniformemente en $p \in P$ a $v(p)$.

(B) Si $\mu(p) \neq 0$ para $p \in P_0 \subset P$, entonces $v(p)$ es una solución del siguiente problema de minimización:

$$\begin{aligned}&\min_{x \in C_0} f(p,x) + \sum_{i=0}^\infty \mu_i(p)\|x_i(p) - x\|^q, \text{ para todo } p \in P_0\\ &\text{s.a } \; x \in X(p).\end{aligned}$$

A la selección v de $\mathcal{C}$ la llamaremos **aplicación solución**, a la función L la llamaremos **función de Lagrange** y a las aplicaciones continuas μ y r las llamaremos **multiplicadores de Lagrange**.

Observación 2.2.7. *La afirmación (B) da lugar a un P.V.P. de Borwein-Preiss con restriciones.*

La prueba de este teorema puede verse en [G1], así como algunas condiciones suficientes para que se cumplan algunas de sus hipótesis.

2.3. Principio variacional paramétrico de Borwein-Preiss II

En esta sección veremos otra versión del P.V.P. de Borwein-Preiss que dio el italiano Libor Veselý en 2009 y que está basada en una pequeña modificación del resultado que vimos de Georgiev. Dadas las condiciones del Teorema (2.2.2), el nuevo elemento principal será que tendremos la posibilidad de tener que $y_0(x) = y_n(x) = v(x)$, para todo x que pertenezca a un subconjunto $X_0 \subset X$ cerrado y discreto, en el cual $y_0(x)$ minimiza la función $f(x, \cdot)$. Posteriormente, obtendremos algunas propiedades soporte para conjuntos convexos y varios resultados para las subdiferenciales de funciones convexas. Estas propiedades soporte para conjuntos convexos fueron probadas mediante otras técnicas por el propio Veselý junto con Di Bernardi el mismo año 2009 en [BV].

2.3.1. Preliminares

Veamos previamente un lema similar al Lema 2.2.1 que es el que nos permitirá modificar el P.V.P. visto en la sección anterior. La principal diferencia es la posibilidad de fijar los valores de la función que extendemos, $\tilde{\varphi}$, en un subconjunto cerrado y discreto de X.

Lema 2.3.1. *[Ves] Sean X un espacio topológico paracompacto, Y un espacio de Banach, $X_0 \subset X$ un subconjunto cerrado y discreto en X y $D \subset Y$ un subconjunto convexo y no vacío. Supongamos que las funciones $f\colon X \times Y \to (-\infty, +\infty]$, $\mathcal{E}\colon X \to (0, +\infty)$, $g\colon X \to \mathbb{R}$ y $\varphi\colon X_0 \to D$ verifican que*

(1.) para cada $x \in X$, la función $f(x, \cdot)$ es convexa y s.c.i. con $\operatorname{dom}(f(x, \cdot)) = D$;

(2.) para cada $y \in D$, la función $f(\cdot, y)$ es continua en X;

(3.) $\mathcal{E}$ es continua;

(4.) g es s.c.i. y $g(x) \geq \inf f(x, D) > -\infty$ para todo $x \in X$;

(5.) $f(x, \varphi(x)) < g(x) + \mathcal{E}(x)$ para todo $x \in X_0$.

Entonces, φ admite una extensión continua, $\tilde{\varphi}\colon X \to D$ tal que

$$f(x, \tilde{\varphi}(x)) < g(x) + \mathcal{E}(x) \text{ para todo } x \in X. \tag{2.22}$$

Demostración:
Si $x \in X_0$, entonces definimos $y_x := \varphi(x)$; si $x \in X \backslash X_0$, podemos fijar por (4.) un punto $y_x \in D$ tal que $f(x, y_x) < g(x) + \mathcal{E}(x)$. Así, para cada $x \in X$, podemos escoger un entorno abierto de x, U_x tal que $U_x \cap X_0 \subset \{x\}$ (por ser X_0 discreto) y, por (4.) y por continuidad,

$$f(t, y_x) < g(t) + \mathcal{E}(t), \text{ para todo } t \in U_x.$$

Como X es paracompacto, existe un refinamiento localmente finito, $\{V_j\}_{j\in J}$ de un recubrimiento $\{U_x\}_{x\in X}$, y una partición de la unidad continua $\{p_j\}_{j\in J}$ subordinada a este refinamiento. Para cada $j \in J$, fijemos $x_j \in X$ tal que $V_j \subset U_{x_j}$. Entonces la aplicación $\tilde{\varphi}\colon X \to D$, dada por

$$\tilde{\varphi}(x) = \sum_{j\in J} p_j(x) y_{x_j},$$

es continua y satisface por (1.) que $f(x, \tilde{\varphi}(x)) \leq \sum_{j\in J} p_j(x) f(x, y_{x_j}) < g(x) + \mathcal{E}(x)$ (de hecho, $p_j(x) > 0$ implica que $x \in U_{x_j}$, lo cual significa que $f(x, y_{x_j}) < g(x) + \mathcal{E}(x)$). Además, si $u \in X_0$ y $p_j(u) > 0$, entonces $u \in U_{x_j} \cap X_0 \subset \{x_j\}$, así $y_{x_j} = y_u = \varphi(u)$. Por tanto, $\tilde{\varphi}(u) = \varphi(u)$ para todo $u \in X_0$, por lo que $\tilde{\varphi}$ es una extensión continua de φ. $\square$

Observación 2.3.2. *Si D es cerrado y $X_0 = \emptyset$, tenemos un caso particular del Lema 2.2.1.*

Observación 2.3.3. *Se puede suprimir la hipótesis de que X_0 sea discreto si suponemos que X es metrizable, $f\big|_{X\times D}$ es continua para todo punto de $X_0 \times D$ y φ es continua en X_0.*

La prueba de esta observación puede verse en [Ves, Apéndice A]

2.3.2. Resultado principal

Teorema 2.3.4. *(Principio variacional paramétrico de Borwein-Preiss; Veselý, 2009) [Ves]*
Sean X un espacio topológico paracompacto, Y un espacio de Banach, $X_0 \subset X$ un subconjunto cerrado y discreto en X y $D \subset Y$ un subconjunto convexo y no vacío. Supongamos que las funciones $f\colon X \times Y \to (-\infty, +\infty]$, $\mathcal{E}\colon X \to (0, +\infty)$, $y_0\colon X \to D$ y $\varphi\colon X_0 \to D$ verifican que

(1.) para cada $x \in X$, la función $f(x, \cdot)$ es convexa y s.c.i. con $\operatorname{dom}(f(x,\cdot)) = D$;

(2.) para cada $y \in D$, la función $f(\cdot, y)$ es continua en X;

(3.) $\mathcal{E}$ es continua;

(4.) y_0 es continua y satisface que $y_0\big|_{X_0} = \varphi$;

(5.) $f(x, y_0(x)) \leq \inf f(x, D) + \mathcal{E}(x)$, para todo $x \in X$;

(6.) o bien D es acotado e $\inf f(x, D) > -\infty$ para cada $x \in X$, o bien cada punto $x \in X$ tiene un entorno abierto $\mathcal{O}$ tal que $\inf f(\mathcal{O} \times D) > -\infty$;

(7.) para cada subconjunto acotado $D_0 \subset D$, la familia de funciones $\Phi := \{f(\cdot, y) : y \in D_0\}$ es equicontinua en X.

Entonces, dadas dos funciones $\lambda, \alpha\colon X \to (0, +\infty)$, existen dos aplicaciones $v\colon X \to D$ y $\Delta\colon X \times Y \to \mathbb{R}$ tales que *(a)* v *es continua y* $v\big|_{X_0} = \varphi$*;*

(b) para cada $x \in X$*, la función* $f(x,\cdot) + \Delta(x,\cdot)$ *alcanza su mínimo (sobre* Y*) en* $v(x)$*;*

(c) $\Delta(x,y) = \dfrac{\mathcal{E}(x)+\alpha(x)}{\lambda(x)^2} \cdot \sum\limits_{n=0}^{\infty} v_n(x)\|y - y_n(x)\|^2$*, donde* $y_n\colon X \to D$ *y* $v_n\colon X \to (0,+\infty)$ *son continuas,* $y_n\big|_{X_0} = \varphi$*,* y_n *converge localmente uniformemente a* v *y* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} v_n(x) = 1$*;*

(d) $\|v(x) - y_n(x)\| < \lambda(x)$ *para todo* $x \in X$ *y* $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$*.*

Además, si $\mathcal{E}$*,* λ *y* α *son constantes, la convergencia en (c) es uniforme en* X *y las funciones* v_n *podemos escogerlas de forma que sean constantes.*

La prueba es casi idéntica a la del Teorema 2.2.2, utilizando el Lema (2.3.1) en lugar del Lema (2.2.1). Por ello, la omitiremos (puede verse en [Ves, Teorema 1.3.]).

Observación 2.3.5. *Análogamente al lema anterior, se puede suprimir la hipótesis de que* X_0 *sea discreto si suponemos que* X *es metrizable,* $f\big|_{X\times D}$ *es continua para todo punto de* $X_0 \times D$ *y* φ *es continua en* X_0*.*

2.3.3. Resultados para las subdiferenciales de funciones convexas

Previamente, recordemos algunas cosas que usaremos en esta sección. Dados Y un espacio de Banach y $h\colon Y \to (-\infty,+\infty]$ una función propia, convexa y s.c.i., denotaremos:

- $\mathcal{D}(\partial h) := \{x \in \mathrm{dom}(h) \,:\, \partial h(x) \neq \emptyset\}$ (dominio efectivo de ∂h), y
- $\mathcal{R}(\partial h) := \bigcup\limits_{x\in \mathrm{dom}(h)} \{\partial h(x)\}$ (rango de ∂h).

La **conjungada de Fenchel** de h es la función $h^*\colon Y^* \to (-\infty,\infty]$ propia, convexa y w^*-s.c.i. dada por $h^*(y^*) = \sup\limits_{Y}(y^* - h)$. Así, $\mathrm{dom}(h^*) = \{y^* \in Y^* \,:\, h - y^* \text{ está acotada inferiormente}\}$. Por el teorema de Br$\phi$ndsted-Rockafellar, se tiene que $\mathcal{R}(\partial h)$ es un subconjunto denso del conjunto convexo $\mathrm{dom}(h^*)$. Se puede comprobar que las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- $\mathcal{R}(\partial h)$ es un conjunto finito.
- $\mathrm{dom}(h^*)$ es un conjunto unitario.
- $\mathcal{R}(\partial h)$ es un conjunto unitario.
- $\mathrm{dom}(h) = Y$ y $h \in Y^*$.

Recordemos también el siguiente lema conocido.

Lema 2.3.6. *Sea* h *una función con valores finitos, convexa y s.c.i. en un intervalo compacto* $[\alpha,\beta] \subset \mathbb{R}$*. Entonces* h *es continua en* $[\alpha,\beta]$*.*

Proposición 2.3.7. *[Ves] Sean Y un espacio de Banach, $h\colon Y \to (-\infty, +\infty]$ una función propia, convexa y s.c.i. y $\mathcal{E} > 0$ una constante. Sean (x_0, x_0^*) y (x_1, x_1^*) dos puntos de $\mathrm{Gr}(\partial h)$. Entonces existe una función continua $y_0\colon [0,1] \to \mathrm{dom}(h)$ tal que $y_0(i) = x_i$ para $i = 0, 1$ y*

$$[h - (1-t)x_0^* - tx_1^*]\big(y_0(t)\big) \leq \inf[h - (1-t)x_0^* - tx_1^*](Y) + \mathcal{E} \text{ para todo } t \in [0,1]. \tag{2.23}$$

Además, para cada una de tales y_0 y cada $\lambda > 0$, existe $v\colon [0,1] \to \mathrm{dom}(h)$ y $v^*\colon [0,1] \to Y^*$ tales que

(i) $v(i) = x_i$ *y* $v^*(i) = x_i^*$ *para* $i = 0, 1$;

(ii) $v^*(t) \in \partial h(v(t))$ *para todo* $t \in [0,1]$;

(iii) $\|v(t) - y_0(t)\| < \lambda$ *y* $\|v^*(t) - (1-t)x_0^* - tx_1^*\| \leq \dfrac{6\mathcal{E}}{\lambda}$, *para todo* $t \in [0,1]$;

(iv) *v es continua;*

(v) *si Y admite una norma Gâteux diferenciable (Fréchet diferenciable), entonces v^* es w^*-continua (respectivamente, continua).*

Demostración:

Usaremos el Lema 2.3.1 y el Teorema 2.3.4. Para ello, definimos los conjuntos

$$X = [0,1],\ X_0 = \{0,1\},\ D = \mathrm{dom}(h),$$

y las funciones $\varphi\colon X_0 \to D$ y $f\colon [0,1] \times Y \to (-\infty, +\infty]$ definidas por

$$\varphi(i) = x_i \text{ para } i = 0, 1;$$

$$f(t, y) = [h - (1-t)x_0^* - tx_1^*](y).$$

Consideremos la función $g\colon [0,1] \to (-\infty, +\infty]$ definida por

$$\begin{aligned} g(t) &= \inf f(t, D) \\ &= \inf f(t, Y) = -\sup(-f(t,Y)) = -\sup_Y[(1-t)x_0^* + tx_1^* - h](y) = -h^*\big((1-t)x_0^* + tx_1^*\big), \end{aligned}$$

donde h^* es la conjugada de Fenchel, la cual es convexa y propia. Como h es s.c.i. por hipótesis, entonces h^* es s.c.i. y, por el Lema 2.3.6, g es continua. Además, como $(x_0, x_0^*) \in \mathrm{Gr}(\partial h)$, entonces $x_0 \in \partial h(x_0)$. Se tiene que

$$[h - x_0^*](y) \geq (h - x_0^*)(x_0), \forall y \in Y. \tag{2.24}$$

Luego

$$f(0, \varphi(0)) = f(0, x_0) = [h - x_0^*](x_0) \underset{(2.24)}{=} \inf f(0, Y) = g(0).$$

Análogamente, como $(x_1, x_1^*) \in \mathrm{Gr}(\partial h)$, se tiene que

$$f(1, \varphi(1)) = [h - x_1^*](x_1) = \inf f(1, Y) = g(1).$$

Así podemos aplicar el Lema 2.3.1, obteniendo una función $y_0\colon [0,1] \to D$ que extiende a la función φ de $X_0 = \{0,1\}$ a $X = [0,1]$. Por tanto,

$$[h - (1-t)x_0^* - tx_1^*]\big(y_0(t)\big) \leq \inf[h - (1-t)x_0^* - tx_1^*](Y) + \mathcal{E} \text{ para todo } t \in [0,1].$$

Además, dado $\lambda > 0$, aplicamos el P.V.P. (2.3.4) con $\mathcal{E}(t) \equiv \mathcal{E} = \alpha > 0$ para obtener las aplicaciones $v\colon [0,1] \to D$ y $\Delta\colon [0,1] \times Y \to \mathbb{R}$ definidas por

$$v(i) = x_i, \text{ para } i = 0,1;$$

$$\Delta(t,y) = \frac{2\mathcal{E}}{\lambda^2} \sum_{n=0}^{\infty} v_n \|y - y_n(t)\|^2, \tag{2.25}$$

donde v es continua (satisfaciendo (iv)), $\sum\limits_{n=0}^{\infty} v_n = 1$; $y_n(i) = x_i$, para $i = 0,1$ y $n \geq 0$; y_n converge uniformente a v en $X = [0,1]$; $\|v(t) - y_n(t)\| < \lambda$, para $n \geq 0$; y $f(t,\cdot) + \Delta(t,\cdot)$ alcanza su mínimo en $v(t)$. Por esto último y el Teorema (0.3.11), como $f(t,v(t)) = [h - (1-t)x_0^* - tx_1^*](v(t))$, tenemos que $0 \in \partial h(v(t)) - (1-t)x_0^* - tx_1^* + \partial[\Delta(t,\cdot)](v(t))$. Así, para todo $t \in [0,1]$, existe $d_t^* \in \partial[\Delta(t,\cdot)](v(t))$ tal que

$$v^*(t) := (1-t)x_0^* + tx_1^* - d_t^* \in \partial h(v(t)), \tag{2.26}$$

lo cual satisface (ii). Dado $y \in Y$, observamos que si $\|y - v(t)\| < \lambda$, entonces

$$\begin{aligned} \big|\, \|y - y_n(t)\|^2 - \|y_n(t) - v(t)\|^2 \,\big| &= (\|y - y_n(t)\| + \|y_n(t) - v(t)\|) \cdot \big|\, \|y - y_n(t)\| - \|y_n(t) - v(t)\| \,\big| \\ &\leq (\|y - y_n(t)\| + \|y_n(t) - v(t)\|)\|y - v(t)\| \\ &\leq (\|y - v(t)\| + 2\|v(t) - y_n(t)\|)\|y - v(t)\| \\ &\leq 3\lambda\|y - v(t)\|. \end{aligned} \tag{2.27}$$

Así, como $\sum\limits_{n=0}^{\infty} v_n = 1$, aplicando (2.27) obtenemos que

$$|\Delta(t,y) - \Delta(t,v(t))| \underset{(2.25)}{=} \frac{2\mathcal{E}}{\lambda^2} \left| \sum_{n=0}^{\infty} v_n \Big(\|y - y_n(t)\|^2 - \|v(t) - y_n(t)\|^2 \Big) \right| \underset{(2.27)}{\leq} \frac{6\mathcal{E}}{\lambda} \|y - v(t)\|.$$

Como $d_t^* \in \partial[\Delta(t,\cdot)](v(t))$, se tiene que $|d_t^*(y - v(t))| \leq |\Delta(t,y) - \Delta(t,v(t))| \leq \dfrac{6\mathcal{E}}{\lambda}\|y - v(t)\|$ y, por tanto,

$$\|v^*(t) - (1-t)x_0^* - tx_1^*\| \underset{(2.26)}{=} \|d_t^*\| \leq \frac{6\mathcal{E}}{\lambda},$$

satisfaciendo así (iii).

Ahora supongamos que Y admite una norma Gâteaux diferenciable (Fréchet diferenciable). Entonces los términos de las serie (2.25) son Gâteaux diferenciables (respectivamente, Fréchet diferenciables) en todos los puntos de Y. Derivando la norma, obtenemos la correspondiente serie de derivadas

$$\frac{4\mathcal{E}}{\lambda^2}\sum_{n=0}^{\infty} v_n\|y-y_n(t)\|\cdot\|\cdot\|'(y-y_n(t)) \tag{2.28}$$

que converge uniformemente para $(t,y)\in[0,1]\times Y_0$, donde Y_0 es un subconjunto acotado arbitrario de Y. Además, la suma (2.28) coincide con la derivada Gâteaux $[\Delta(t,\cdot)]'(y)$ y, como los términos de (2.28) son w^*-continuos (respectivamente, continuos), la aplicación $(t,y)\to[\Delta(t,\cdot)]'(y)$ también es w^*-continua (respectivamente, continua). En consecuencia, la aplicación $v^*(t)=(1-t)x_0^*-tx_1^*-[\Delta(t,\cdot)]'(v(t))$ también lo es, satisfaciendo (v).

Nótese que para $i=0,1$, se tiene que $\Delta(i,v(i))=\dfrac{2\mathcal{E}}{\lambda^2}\sum\limits_{n=0}^{\infty} v_n\|v(i)-y_n(i)\|^2=0$. Así, incluso si Y no admite una norma Gâteaux diferenciable, $\Delta(i,\cdot)$ es Fréchet diferenciable en $v(i)$ con $[\Delta(i,\cdot)]'(v(i))=0$. Consecuentemente, $v^*(i)=(1-i)x_0^*+ix_1^*-0=x_i^*$, para $i=0,1$, probando (i). $\square$

Observación 2.3.8. *Nótese que la desigualdad* (2.23) *es equivalente a decir que* $(1-t)x_0^*+tx_1^*\in\partial_{\mathcal{E}}h(y_0(t))$. *Así, la segunda parte de la proposición anterior puede verse como un teorema paramétrico del Teorema de Brϕnsted-Rockafellar (Teorema* (1.1.6)*).*

Observación 2.3.9. *Dados T y S espacios topológicos y $F\colon T\rightrightarrows S$ una función multivaluada con valores no vacíos, es conocido que F es s.c.s. en T si, y sólo si, para todo $C\subset S$ conjunto cerrado, la imagen inversa $F^{-1}(C):=\{x\in T\,:\,F(x)\cap C\neq\emptyset\}$ es cerrada. Supongamos que los valores de F son además conexos. Entonces, si T es conexo, se tiene que $F(T)$ también lo es. De hecho, si C_1 y C_2 son conjuntos cerrados tales que $F(T)\cap C_1\cap C_2=\emptyset$, como las imágenes de F son conexas, esto implica que para todo $t\in T$, $F(t)$ está contenido, o bien en C_1, o bien en C_2. Así los conjuntos $F^{-1}(C_1)$ y $F^{-1}(C_2)$ son cerrados, disjuntos y cubren T.*

Proposición 2.3.10. *Sea Y un espacio vectorial normado, $h\colon Y\to(-\infty,+\infty]$ una función convexa y $B\subset X^*$ un subconjunto w^*-compacto. Entonces la función multivaluada $y\to B\cap\partial h(y)$ es s.c.s. en la topología de la norma en $\mathcal{D}(\partial h)$ y en la topología débil* en X^*.*

Demostración:
Primero, observemos que h es lipschitziana en su dominio efectivo, es decir, en $A:=(\partial h)^{-1}(B)$. En efecto, si $u,v\in A$, $u^*\in B\cap\partial h(u)$, $v^*\in B\cap\partial h(v)$ y $L:=\sup\limits_{b^*\in B}\|b^*\|$, tenemos por la definición de subdiferencial que $h(u)-h(v)\leq u^*(u-v)$ y que $h(v)-h(u)\leq v^*(v-u)$ y, consecuentemente $|h(u)-h(v)|\leq L\|u-v\|$.

Por la semicontinuidad superior de la función multivaluada $y \to B \cap \partial h(y)$ en $a \in A$, existe un conjunto w^*-abierto, W, que contiene a $B \cap \partial h(a)$, una sucesión $\{a_n\}$ de A convergente a a y una sucesión de funcionales $\{x_n^*\}$ tal que $x_n^* \in [B \cap \partial h(a_n)] \backslash W$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Sea $\{x_{n_\gamma}^*\}$ una subred de $\{x_n^*\}$ tal que $x_{n_\gamma}^* \xrightarrow{w^*} x^* \in B \backslash W$. Como $h\big|_A$ es lispchitziana, en particular es continua y podemos utilizar límites en la definición de $\partial h(a_{n_\gamma})$ para obtener $x^* \in \partial h(a) \subset W$, lo que es una contradicción (ya que $x^* \notin W$). $\square$

<u>Teorema</u> 2.3.11. *[Ves] Sean Y un espacio de Banach y $h\colon Y \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ una función convexa, propia, s.c.i. que no es una función afín y no todos sus valores son finitos. Entonces,*

(a) la intersección de $\mathcal{D}(\partial h)$ con cualquier conjunto abierto convexo es arcoconexo;

(b) $\mathcal{R}(\partial h)$ es $\mathbf{c}$-denso en $\operatorname{dom}(h^*)$, es decir, todo conjunto abierto que interseque con $\operatorname{dom}(h^*)$ contiene al menos una cantidad $\mathbf{c}$ de elementos de $\mathcal{R}(\partial h)$, donde $\mathbf{c}$ es el cardinal del continuo;

(c) si Y admite una norma Fréchet diferenciable, entonces $\operatorname{Gr}(\partial h)$ es arcoconexo en $(Y, \|\cdot\|) \times (Y^*, \|\cdot\|)$ y $\mathcal{R}(\partial h)$ es localmente arcoconexo;

(d) si Y admite una norma Gâteaux diferenciable, entonces $\operatorname{Gr}(\partial h)$ es arcoconexo en $(Y^*, \|\cdot\|) \times (Y^*, w^*)$ y $\mathcal{R}(\partial h)$ es localmente w^*-arcoconexo.

<u>Demostración:</u>
Sean (x_0, x_0^*) y (x_1, x_1^*) dos elementos distintos de $\operatorname{Gr}(\partial h)$, lo cual implica que

$$(h - x_0^*)(x_0) \leq (h - x_0^*)(y), \text{ para todo } y \in \operatorname{dom}(h);$$

$$(h - x_1^*)(x_1) \leq (h - x_1^*)(y), \text{ para todo } y \in \operatorname{dom}(h).$$

Por tanto, dado $t \in [0,1]$, haciendo una combinación convexa de ambas desigualdades, obtenemos que

$$(1-t)(h - x_0^*)(x_0) + t(h - x_1^*)(x_1) \leq (h - (1-t)x_0^* - tx_1^*)(y), \text{ para todo } y \in \operatorname{dom}(h).$$

Como t es arbitrario y h es convexa,

$$h\big((1-t)x_0 + tx_1\big) - (1-t)x_0^*(x_0) - tx_1^*(x_1) \leq (h - (1-t)x_0^* - tx_1^*)(Y), \text{ para todo } t \in [0,1].$$

Luego existe $p \in \mathbb{R}$ tal que

$$\text{ínf}[h - (1-t)x_0^* - tx_1^*](Y) \geq p, \text{ para todo } t \in [0,1].$$

Definimos $y_0\colon [0,1] \to \operatorname{dom}(h)$ una función dada por $y_0(t) = (1-t)x_0 + tx_1$. Como $y_0(0) = x_0$ e $y_0(1) = x_1$, utilizando el Lema 2.3.6, se tiene que

$$h(y_0(t)) - (1-t)x_0^*(y_0(t)) - tx_1^*(y_0(t)) \leq \text{máx}\, h\big([x_0, x_1]\big) + \text{máx}\{\|x_0^*\|, \|x_1^*\|\} \cdot \text{máx}\{\|x_0\|, \|x_1\|\} < +\infty.$$

Definimos
$$q := h\big([x_0, x_1]\big) + \text{máx}\{\|x_0^*\|, \|x_1^*\|\} \cdot \text{máx}\{\|x_0\|, \|x_1\|\} < +\infty.$$

Dado $\mathcal{E} > 0$ tal que $q < p + \mathcal{E}$, la función y_0 satisface la desigualdad (2.23) de la Proposición 2.3.7. Sea $V \subset Y$ un conjunto abierto convexo al cual pertenecen x_0 y x_1. Sea $\lambda > 0$ tal que $[x_0, x_1] + \lambda B_Y \subset V$. Aplicando la segunda parte de la Proposición 2.3.7, obtenemos una función continua $v\colon [0,1] \to \text{dom}(h)$ tal que $v(t) \in V \cap \mathcal{D}(\partial h)$ para todo $t \in [0,1]$, lo cual prueba (a).

Si Y admite una norma Gâteaux diferenciable (Fréchet diferenciable), entonces la aplicación $\Phi\colon [0,1] \to \text{dom}(h) \times Y^*$ definida por $\Phi(t) = (v(t), v^*(t))$, para todo $t \in [0,1]$, define una curva $(\|\cdot\| \times w^*)$-continua (continua respectivamente) en $\text{Gr}(\partial h)$ con extremos en $(x_i, x_i^*), i = 0, 1$, lo cual prueba la primera parte de (c) y (d).

Sea $U \subset Y^*$ un subconjunto abierto convexo que interseca con $\text{dom}(h^*)$. Por el Teorema de Brϕnsted-Rockafellar (Teorema 1.1.6) podemos elegir (x_0, x_0^*) y (x_1, x_1^*) de forma que x_0^* y x_1^* son distintos y pertenecen a U. Sea $\rho > 0$ tal que $B := [x_0^*, x_1^*] + \rho B_{Y^*} \subset U$. Aplicando la segunda parte de la Proposición 2.3.7 con $\lambda > \dfrac{6\mathcal{E}}{\rho}$, tenemos que $v^*(t) \in B \cap \partial h(v(t))$, para todo $t \in [0,1]$. Como B es w^*-compacto y h es convexa, entonces por la Proposición 2.3.10 la función multivaluada $y \to B \cap \partial h(y)$ es s.c.s. en la topología de la norma en $\mathcal{D}(\partial h)$ y en la topología débil* en X^*. Por la Observación 2.3.9, entonces el conjunto
$$W := \bigcup_{t \in [0,1]} [B \cap \partial h(v(t))]$$
es w^*-conexo, está contenido en U (ya que $W \subset B \subset U$) y contiene dos puntos distintos x_0^* y x_1^*. Consecuentemente, el cardinal de W es al menos continuo (de hecho, para un $y \in Y$ adecuado, se puede obtener que $y(W)$ es un intervalo no degenerado en $\mathbb{R}$). Como $v^*(t) \in U$ para todo $t \in [0,1]$, se verifica también la segunda parte de (c) y (d). $\square$

Es conocido (Teoremas 0.3.20 y 0.3.21) que un espacio de Banach Y admite una norma Fréchet diferenciable (Gâteaux diferenciable) si Y^* es separable o reflexivo (si Y es separable respectivamente). Como consecuencia obtenemos el siguiente corolario.

Corolario 2.3.12. *Sean Y un espacio de Banach y $h\colon Y \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ una función convexa, propia y s.c.i. Entonces,*

(a) $\mathcal{D}(\partial h)$ es arcoconexo y localmente arcoconexo;

(b) $\mathcal{R}(\partial h)$ o bien es unitario, o bien tiene al menos el cardinal del continuo;

(c) si Y^* es separable o reflexivo, entonces $\mathcal{R}(\partial h)$ es arcoconexo y localmente arcoconexo;

(d) si Y es separable, entonces $\mathcal{R}(\partial h)$ es w^*-arcoconexo y $\|\cdot\|$-localmente w^*-arcoconexo.

2.3.4. Algunas propiedades soporte de conjuntos convexos

Veamos previamente la notación que vamos a usar. Dado C un subconjunto cerrado, convexo, propio y no vacío de un espacio de Banach Y, denotaremos

- $\Omega(C) := \left\{y^* \in Y^* \,:\, \sup\limits_C y^* < +\infty\right\}$ y $\Omega_1(C) := \Omega(C) \cap \mathbb{S}_{Y^*}$;
- $\Sigma(C) := \left\{y^* \in Y^*\backslash\{0\} \,:\, y^*(c) = \sup\limits_C y^* \text{ para algún } c \in C\right\}$ y $\Sigma_1(C) := \Sigma(C) \cap \mathbb{S}_{Y^*}$;
- $\text{sop}(C) := \left\{c \in C \,:\, y^*(c) = \sup\limits_C y^* \text{ para algún } y^* \in Y^*\backslash\{0\}\right\}$;

donde $\sum(C)$ y $\text{sop}(C)$ son los conjuntos de los funcionales soporte de C y los puntos soporte de C respectivamente. Recordemos que por el Teorema de Bishop-Phelps, $\text{sop}(C)$ es denso en ∂C, la frontera de C, y $\sum_1(C)$ es denso en $\Omega_1(C)$.

Observamos que $\Omega(C)$ es un cono convexo y $\lambda \cdot \Sigma(C) = \Sigma(C)$ para todo $\lambda > 0$. Además, se tiene que las siguientes condiciones son equivalentes:

- $\Omega_1(C)$ es finito;
- $\dim \Omega(C) = 1$;
- $\Sigma_1(C)$ es finito;
- C contiene un hiperplano.

Si se cumple una de las condiciones anteriores, el conjunto $\Omega_1(C) = \Sigma_1(C)$ contiene a lo sumo dos elementos (uno si C es un semiespacio cerrado y dos si C es un hiperplano cerrado o una banda entre dos hiperplanos cerrados paralelos) y $\text{sop}(C) = \partial C$.

Lema 2.3.13. *[Ves] Sea $W \subset Y^*$ un subconjunto w^*-conexo tal que $\dim \text{span}(W) > 1$ y $0 \notin \overline{\text{conv}}^{w^*}(W)$. Entonces, el conjunto*

$$W_1 := \left\{\frac{u^*}{\|u^*\|} \,:\, u^* \in W\right\}$$

tiene al menos la cardinalidad del continuo.

Demostración:
Si $u^* \in W$, podemos elegir $x \in Y\backslash\{0\}$ tal que $u^*(x) > 0$ (si $u^*(x) < 0$, basta con escoger $-x$ en lugar de x). Además, dado $\lambda > 0$ tal que $u^*(x) > \dfrac{1}{\lambda}$, tenemos que $u^*(\lambda x) = \lambda u^*(x) > 1$. Luego si $u^* \in W$, existe $z \in Y\backslash\{0\}$ tal que $u^*(z) \geq 1$. Consideremos la aplicación $\phi\colon Y^* \to Y^*$ dada por

$$\phi(u^*) = \frac{u^*}{u^*(z)}, u^* \in Y^*,$$

la cual es continua (en la topología débil* en Y^*). Así, $\phi(W)$ es un subconjunto w^*-conexo de $z^{-1}(1)$. El conjunto $\phi(W)$ contiene al menos dos puntos ya que W contiene al menos dos elementos linealmente independientes y, consecuentemente, $\phi(W)$ tiene al menos la cardinalidad del continuo. Consideremos la aplicación $\psi\colon z^{-1}(1) \to W_1$ dada por

$$\psi(y^*) = \frac{y^*}{\|y^*\|},$$

que es inyectiva en $z^{-1}(1)$. De esta forma, el conjunto $W_1 = \psi(\phi(W))$ tiene al menos la cardinalidad del continuo. $\square$

Para estudiar la siguiente aplicación, introduciremos previamente algo de notación. Dados dos elementos x, y de un espacio normado, denotaremos por $[x, y]$ el segmento cerrado $\operatorname{conv}\{x, y\}$. Recordemos una función utilizada en el Teorema del Pétalo de Penot (Teorema 1.1.11). Dado un conjunto convexo cerrado en un espacio de Banach, $C \subset Y$, la función $\bar{1}_C\colon Y \to \{0, +\infty\}$ que viene definida por

$$\bar{1}_C(y) := \begin{cases} 0, & \text{si } y \in C, \\ +\infty, & \text{si } y \notin C, \end{cases}$$

se llama función indicatriz y es s.c.i. y convexa. Nótese que $\partial\bar{1}_C(y) = \{x^* \in Y^* : x^*(z-y) \leq \bar{1}_C(z) - \bar{1}_C(y), \forall z \in Y\}$. Dado $(y, y^*) \in Y \times Y^*$, se tiene que $y^* \in \partial\bar{1}_C(y)$ si, y sólo si, $y^*(y) = \sup_C y^*$. Por tanto, si además $y^* \neq 0$, tenemos que $y \in \operatorname{sop}(C)$ y $\dfrac{y^*}{\|y^*\|} \in \Sigma_1(C)$.

Teorema 2.3.14. *[Ves] Sea C un subconjunto no vacío, propio, cerrado y convexo de un espacio de Banach Y. Si C no contiene ningún hiperplano, entonces*

(a) $\operatorname{sop}(C)$ *es arcoconexo;*

(b) $\Sigma_1(C)$ *es* $\boldsymbol{c}$*-denso, es decir, todo conjunto abierto que interseque con* $\Sigma_1(C)$ *contiene al menos una cantidad* $\boldsymbol{c}$ *de elementos de* $\Sigma_1(C)$*, donde* $\boldsymbol{c}$ *es el cardinal del continuo;*

(c) si Y admite una norma Fréchet diferenciable, entonces $\Sigma_1(C)$ es arcoconexo y localmente arcoconexo.

Demostración:

Sean x_0, $x_1 \in \operatorname{sop}(C)$ y x_0^*, $x_1^* \in \Sigma_1(C)$ tales que $x_0^*(x_0) = \sup_C x_0^*$ y $x_1^*(x_1) = \sup_C x_1^*$. Supongamos que $x_0^* \neq -x_1^*$. Entonces $0 \notin [x_0^*, x_1^*]$ y existe $\lambda > 0$ tal que $0 \notin B := [x_0^*, x_1^*] + \dfrac{6}{\lambda} B_{Y^*}$. Aplicando la

Proposición 2.3.7 con $\mathcal{E} = 1$ y $h = \bar{1}_C$, obtenemos dos funciones $v\colon [0,1] \to C$ y $v^*\colon [0,1] \to Y^*$ tales que

$$v^*(t) \in B \text{ y } v^*(t)(v(t)) = \sup_C v^*(t)(\cdot), \text{ para todo } t \in [0,1],$$

v es continua, $v_0 = x_0, v_1 = x_1, v^*(0) = x_0^*$ y $v^*(1) = x_1$. Además, si Y admite una norma Fréchet diferenciable, entonces v^* también es continua y podemos definir una curva $\Phi\colon [0,1] \to Y^*$ dada por

$$\Phi(t) = \frac{v^*(t)}{\|v^*(t)\|},$$

que es continua y conecta x_0^* y x_1^* en $\Sigma_1(C)$ ya que $\Phi(i) = \dfrac{v^*(i)}{\|v^*(i)\|} = x_i^*$, para $i = 0,1$ (Nótese que $\|x_i^*\| = 1$ ya que $x_i^* \in \Sigma_1(C)$).

Supongamos ahora que $x_0^* = -x_1^*$. Fijemos $z^* \in \Sigma_1(C)$ tal que $z^* \neq \pm x_0^*$. Si elegimos un elemento $z \in \mathrm{sop}(C)$ tal que $z^*(z) = \sup_C z^*$ y aplicamos la primera parte de esta prueba para (z, z^*) y (x_i, x_i^*), $i = 0,1$, obtenemos (a) y que $\Sigma_1(C)$ es arcoconexo.

Probemos (b). Sea U un conjunto relativamente abierto en $\mathbb{S}_{Y^*}$ que interseca con $\Omega_1(C)$. Podemos suponer que el conjunto abierto $\tilde{U} := \mathbb{R}_+ U = \{\lambda u^* : \lambda > 0,\ u^* \in U\}$ es convexo (si no fuera así, sustuimos U por un subconjunto apropiado que sí verifica esta propiedad). Supongamos que x_0^* y x_1^* han sido escogidos de forma que $x_0^* \neq -x_1^*$. Podemos elegir $\lambda > 0$ tal que $0 \notin B := [x_0^*, x_1^*] + \dfrac{6}{\lambda} B_{Y^*} \subset \tilde{U}$. Entonces, de la prueba del Teorema 2.3.11 se desprende que el conjunto

$$W := \bigcup_{t\in[0,1]} [B \cap \partial \bar{1}_C\big(v(t)\big)]$$

es w^*-conexo. El conjunto $W_1 := \left\{ \dfrac{u^*}{\|u^*\|} : u^* \in W \right\}$ está contenido en $\Sigma_1(C) \cap U$ y, por el Lema 2.3.13, W_1 tiene al menos la cardinalidad del continuo, probando (b). Además, como $\dfrac{v^*(t)}{\|v^*(t)\|} \in U$ para todo $t \in [0,1]$, obtenemos también que $\Sigma_1(C)$ es localmente arcoconexo. $\square$

<u>Observación</u> 2.3.15. *De la prueba del apartado (c) de este teorema, se desprende que el conjunto*

$$\mathrm{sop}_1(C) := \{(y, y^*) \in \mathrm{sop}(C) \times \Sigma_1(C) : y^*(y) = \sup_C y^*\}$$

es arcoconexo siempre y cuando Y admita una norma Fréchet diferenciable.

El Teorema 2.3.14 no afirma que $\mathrm{sop}(C)$ sea localmente arcoconexo. Para probar este resultado, necesitaremos el siguiente lema y la siguiente observación.

Lema 2.3.16. *[Ves] Sean E un espacio vectorial normado, $x_0 \in \mathbb{S}_E$ y $\delta > 0$. Entonces, existe $\theta = \theta(E, x_0, \delta) > 0$ tal que*

$$d(0, [x_0, y]) \geq \theta, \text{ para todo } y \in \mathbb{S}_E \text{ tal que } \|y + x_0\| \geq \delta.$$

Demostración:
Consideremos una aplicación $F\colon \mathring{B}_E \to \mathbb{S}_E$ tal que para cada $z \in \mathring{B}_E$ asigna el único $F(z) \in \mathbb{S}_E$ tal que $z \in [x_0, F(z)]$. Como $-x_0 \in \mathbb{S}_E$ y $0 \in [-x_0, x_0]$, entonces $F(0) = -x_0$ por unicidad. Si escogemos $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in \mathring{B}_E$ tal que $x_n \to 0$, tenemos que $x_n \in [x_0, F(x_n)]$ y $F(x_n) \in \mathbb{S}_E$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Entonces, existe $\{\lambda_n\} \subset (0,1)$ tales que

$$x_n = \lambda_n x_0 + (1 - \lambda_n) F(x_n), \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Como $x_n \to 0$, entonces

$$\lambda_n x_0 + (1 - \lambda_n) F(x_n) \to 0. \tag{2.29}$$

Por la continuidad de $\|\cdot\|$, entonces $\|\lambda_n x_0 + (1 - \lambda_n) F(x_n)\| \to 0$. Aplicando la desigualdad triangular, como $\|x_0\| = \|F(x_n)\| = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces $\Big|\lambda_n \|x_0\| - (1-\lambda_n)\|F(x_n)\|\Big| = \Big|2\lambda_n - 1\Big| \leq \|\lambda_n x_0 + (1-\lambda_n)F(x_n)\| \to 0$. Por tanto $\lambda_n \to \dfrac{1}{2}$ y sustituyendo en (2.29), obtenemos que $F(x_n) \to -x_0 = F(0)$. Por tanto, F es continua en 0.

Al ser F continua en 0 y $F(0) = -x_0$, existe $\theta > 0$ tal que $\|F(z) + x_0\| < \delta$ si $\|z\| < \theta$. O equivalentemente, $\|z\| \geq \theta$, si $\|F(z) + x_0\| \geq \delta$. Como $F(\mathring{B}_E)$ contiene un entorno de $-x_0$ en $\mathbb{S}_E$, entonces podemos concluir que $d(0, [x_0, y]) \geq \theta$ si $y \in \mathbb{S}_E$ y $\|y + x_0\| \geq \delta$. $\square$

Observación 2.3.17. *Sea M un espacio métrico tal que para cada $x \in M$, existe $a > 0$ de forma que, para todo $\mathcal{E} > 0$ suficientemente pequeño, cualquier punto de $\mathring{B}_{\mathcal{E}}(x)$ puede ser conectado con x por una curva continua contenida en $\mathring{B}_{a\cdot\mathcal{E}}(x)$. Entonces M es localmente arcoconexo. De hecho, dado $x \in M$, los conjuntos*

$$\{y \in M \text{ tal que existe } \gamma\colon [0,1] \to \mathring{B}_{\mathcal{E}}(x) \text{ continua con } \gamma(0) = x,\, \gamma(1) = y\},\ \mathcal{E} > 0,$$

son abiertos, arcoconexos y forman una base de entornos de x.

Teorema 2.3.18. *[Ves] Sean Y un espacio de Banach y $C \subset Y$ un subconjunto no vacío, cerrado y convexo. Entonces,* $\operatorname{sop}(C)$ *es localmente arcoconexo.*

Demostración:
Supongamos que C no contiene un hiperplano (si lo contiene, la afirmación del teorema es obvia). Fijamos $x_0 \in \operatorname{sop}(C)$ y $x_0^* \in \mathbb{S}_{Y^*}$ tales que $x_0^*(x_0) = \sup_C x_0^*$. Si $x_0^*(x_0) = \inf_C x_0^*$, entonces x_0^* es constante

en C y, consecuentemente, $\operatorname{sop}(C) = C$ es localmente arcoconexo. Supongamos que $x_0^*(x_0) > \inf_C x_0^*$. Por continuidad, existe $\delta > 0$ tal que

$$x^*(x) > \inf_C x^* \text{ si } \|x - x_0\| < \delta,\ \|x^* - x_0^*\| < \delta \ \text{ y } \ x^* \in \mathbb{S}_{Y^*}.$$

Sea $0 < \mathcal{E} < \delta$. Supongamos que $x_1 \in \operatorname{sop}(C) \cap \mathring{B}_{\mathcal{E}}(x_0)$ y $x_1^* \in \mathbb{S}_{Y^*}$ tales que $x_1^*(x_1) = \sup_C x_1^*$. Como $(-x_1^*)(x_1) = \inf_C(-x_1^*)$, tenemos que $\|x_1^* + x_0^*\| = \|(-x_1^*) - x_0^*\| \geq \delta$ por como hemos definido δ. Entonces

$$d(0, [x_0^*, x_1^*]) \geq \theta \text{ para } \theta = \theta(Y^*, x_0^*, \delta) > 0 \tag{2.30}$$

por el Lema 2.3.16.

Sea la función $y_0\colon [0,1] \to C$ definida por $y_0(t) = (1-t)x_0 + tx_1$. Dado $t \in [0,1]$, como $x_1 \in \mathring{B}_{\mathcal{E}}(x_0)$, se tiene que $\|y_0(t) - x_0\| = t\|x_1 - x_0\| < t\mathcal{E} < \mathcal{E}$ y $\|y_0(t) - x_1\| = (1-t)\|x_0 - x_1\| < (1-t)\mathcal{E} < \mathcal{E}$. Consecuentemente,

$$\begin{aligned}
[(1-t)x_0^* + tx_1^*]\big(y_0(t)\big) &= (1-t)x_0^*(x_0) + tx_1^*(x_1) + (1-t)x_0^*(y_0(t) - x_0) + tx_1^*\big(y_0(t) - x_1\big)\\
&= (1-t)\sup_C x_0^* + t\sup_C x_1^* + (1-t)x_0^*\big(y_0(t) - x_0\big) + tx_1^*\big(y_0(t) - x_1\big)\\
&> (1-t)\sup_C x_0^* + t\sup_C x_1^* - (1-t)\mathcal{E} - t\mathcal{E}\\
&\geq \sup_C[(1-t)x_0^* + tx_1^*] - \mathcal{E}, \text{ para todo } t \in [0,1].
\end{aligned}$$

Por tanto,

$$-[(1-t)x_0^* + tx_1^*]\big(y_0(t)\big) \leq \inf_C -[(1-t)x_0^* + tx_1^*] + \mathcal{E}, \text{ para todo } t \in [0,1]. \tag{2.31}$$

Consideremos la función indicatriz $\bar{1}_C$, la cual, como $y(t) \in C$, verifica por (2.31) que

$$[\bar{1}_C - (1-t)x_0^* - tx_1^*]\big(y_0(t)\big) \leq \inf_Y [\bar{1}_C - (1-t)x_0^* - tx_1^*] + \mathcal{E}, \text{ para todo } t \in [0,1].$$

Aplicando la Proposición 2.3.7 con $\lambda = \dfrac{12\mathcal{E}}{\theta}$, obtenemos las aplicaciones $v\colon [0,1] \to C$ y $v^*\colon [0,1] \to Y^*$ tales que v es continua, $v(0) = x_0, v(1) = x_1, v^*(t)\big(v(t)\big) = \sup_C v^*(t)(\,\cdot\,), \|v(t) - y_0(t)\| < \lambda = \dfrac{12\mathcal{E}}{\theta}$ y $\|v^*(t) - (1-t)x_0^* - tx_1^*\| \leq \dfrac{6\mathcal{E}}{\lambda} = \dfrac{\theta}{2}$, para todo $t \in [0,1]$. Entonces aplicando la desigualdad triangular,

$$\|v^*(t)\| \geq \|(1-t)x_0^* + tx_1^*\| - \|v^*(t) - (1-t)x_0^* - tx_1^*\| \underset{(2.30)}{\geq} \theta - \frac{\theta}{2} > 0, \text{ para todo } t \in [0,1].$$

Por tanto, $v([0,1])$ está contenido en el conjunto de los puntos soporte de C. Además,

$$\|v(t) - x_0\| \leq \|v(t) - y_0(t)\| + \|y_0(t) - x_0\| < \frac{12\mathcal{E}}{\theta} + \mathcal{E} = \frac{12+\theta}{\theta}\mathcal{E} =: \rho.$$

Hemos probado que, para todo $x_0 \in \text{sop}(C)$, existen $\delta > 0$ y $\theta > 0$ tales que si $0 < \mathcal{E} < \delta$, cualquier punto $x_1 \in \text{sop}(C) \cap \mathring{B}_{\mathcal{E}}(x_0)$ puede ser conectado con x_0 por una curva continua contenida completamente en $\text{sop}(C) \cap \mathring{B}_{\rho}(x_0)$. De esta forma, por la Observación 2.3.17, $\text{sop}(C)$ es localmente arcoconexo. $\square$

2.4. Principio variacional paramétrico de Deville-Godefroy-Zizler

En la sección anterior vimos como L. Veselý modificó el P.V.P. de Borwein-Preiss para conseguir un P.V.P. con restricciones. En particular, vimos que el minimizador después de la perturbación mantenía sus valores de antes de la perturbación para un conjunto prescrito de parámetros. En esta sección, veremos como Robert Deville y Antonín Procházka parametrizaron (con restricciones) el P.V. de Deville-Godefroy-Zizler ([DP], 2009).

En la primera subsección, describiremos las condiciones generales del espacio de perturbaciones (un espacio de funciones continuas con valores reales al que llamaremos $\mathcal{Y}$) y estudiaremos la topología fina en el espacio $\mathcal{C}(X,\mathcal{Y})$. En la siguiente subsección, veremos una variante del Teorema de selección de Michael y otros lemas preliminares sobre funciones equi-s.c.i. Posteriormente, veremos el resultado principal de esta sección y algunos corolarios.

2.4.1. El espacio de perturbaciones $\mathcal{Y}$ y la topología fina en $\mathcal{C}(X,\mathcal{Y})$

Definición 2.4.1. *Sea Y un espacio de Banach. Una función convexa no negativa $b\colon Y \to \mathbb{R}$ se dice que es una* ***función de separación convexa*** *si, para algún $\mathcal{E} > 0$, el conjunto $\{y \in Y \,:\, b(y) < \mathcal{E}\}$ es acotado y no vacío.*

Veamos una de las propiedades más importantes sobre funciones convexas de separación.

Lema 2.4.2. *[DP] Sean Y un espacio de Banach y $b\colon Y \to \mathbb{R}$ una función de separación convexa. Entonces para cada $y_0 \in Y$ existe dos constantes c_{y_0} y C_{y_0} tales que*

$$b(y) - b(y_0) \geq c_{y_0}\|y - y_0\|_Y$$

para todo $y \in Y \backslash B_{C_{y_0}}(y_0)$.

Demostración:
Como b es una función de separación convexa, existe $\mathcal{E} > 0$ tal que el conjunto $L := \{x \in Y \,:\, b(x) < \mathcal{E}\}$ es acotado y no vacío. Entonces, podemos fijar $z \in L$ tal que $b(z) < \mathcal{E}$ y definir $\delta := \mathcal{E} - b(z) > 0$. Así, tenemos que

$$b(y) \geq b(z) + \delta \text{ para todo } y \in Y \backslash L. \tag{2.32}$$

Como L está acotado, existe $C > 0$ tal que $L \subset B_C(z)$. Dado $y \in Y \backslash B_C(z)$, definimos

$$\tilde{y} := \frac{2C}{\|y-z\|_Y}(y-z) + z.$$

Como $\|\tilde{y} - z\|_Y = 2C > C$, entonces $\tilde{y} \in Y \backslash B_C(z) \subset Y \backslash L$. Por la convexidad de b tenemos que

$$\frac{2C}{\|y-z\|_Y}(b(y) - b(z)) + b(z) = \frac{2C}{\|y-z\|_Y} b(y) + \left(1 - \frac{2C}{\|y-z\|_Y}\right) b(z) \geq b(\tilde{y}) \underset{(2.32)}{\geq} b(z) + \delta.$$

Si definimos $c := \dfrac{\delta}{2C}$, entonces

$$b(y) - b(z) \geq \frac{\delta}{2C}\|y-z\|_Y = c\|y-z\|_Y.$$

Como y es arbitrario, hemos probado que existen $z \in Y, C > 0$ y $c > 0$ tales que $b(y) - b(z) \geq c\|y-z\|_Y$ para todo $y \in Y \backslash B_C(z)$. Hemos probado el lema para un $z \in Y$ fijo. Veamos que se verifica para cualquier $y_0 \in Y$ arbitrario. Fijado $y_0 \in Y$, calculemos

$$\begin{aligned} b(y) - b(y_0) &= (b(y) - b(z)) + b(z) - b(y_0) \geq c\|y-z\|_Y + b(z) - b(y_0) \\ &\geq c\|y-y_0\|_Y - c\|y_0 - z\|_Y + b(z) - b(y_0) \\ &= \frac{c}{2}\|y-y_0\|_Y + \Big(\frac{c}{2}\|y-y_0\|_Y - c\|y_0-z\|_Y + b(z) - b(y_0)\Big) \end{aligned}$$

donde $y \in Y \backslash B_Y(z, C)$. Observamos que $\Big(\frac{c}{2}\|y-y_0\|_Y - c\|y_0-z\|_Y + b(z) - b(y_0)\Big)$ es positivo si $\|y-y_0\|_Y$ es mayor que algún $D > 0$ suficientemente grande. Por tanto, si definimos $c_{y_0} := \dfrac{c}{2}$ y escogemos $C_{y_0} > D$ suficientemente grande tal que $B_C(z) \subset B_{C_{y_0}}(y_0)$, entonces

$$b(y) - b(y_0) \geq \frac{c}{2}\|y-y_0\|_Y + \Big(\frac{c}{2}\|y-y_0\|_Y - c\|y_0-z\|_Y + b(z) - b(y_0)\Big) \geq c_{y_0}\|y-y_0\|_Y,$$

para todo $y \in Y \backslash B_{C_{y_0}}(y_0)$. $\square$

Dado un espacio de Banach, Y, en adelante denotaremos por $\mathcal{Y}$ un conjunto de funciones convexas y lipschitzianas $g\colon Y \to [0, +\infty)$ tales que

(i) $\mathcal{Y}$ es un cono positivo completo dotado de la norma

$$\|g\|_{\mathcal{Y}} = g(0) + \sup_{\substack{x,y \in Y \\ x \neq y}} \left\{ \frac{|g(x) - g(y)|}{\|x-y\|_Y} \right\},$$

(ii) $\mathcal{Y}$ contiene alguna función de separación convexa b,

(iii) si $g \in \mathcal{Y}$, entonces

(iii.a) $g(a\cdot) \in \mathcal{Y}$ para todo $a > 0$,

(iii.b) $g - \inf_Y g \in \mathcal{Y}$,

(iii.c) para cada $y \in \mathcal{Y}$, la función $\tau_y g\colon Y \to [0, +\infty)$, dada por $\tau_y g(x) = g(x - y)$, pertenece a $\mathcal{Y}$.

Generalmente, dada una norma $\|\cdot\|$ en Y, con cierto tipo de diferenciabilidad, se tiene que $\sqrt{1 + \|\cdot\|^2}$ es una función de separación convexa lipschitziana y con el mismo tipo de diferenciabilidad. Por tanto, podemos suponer que si $\|\cdot\|$ es Gâteaux diferenciable (Fréchet diferenciable), entonces los elementos de $\mathcal{Y}$ también son Gâteaux diferenciables (Fréchet diferenciables respectivamente).

Definición 2.4.3. *Sea X un espacio topológico. Denotamos por $\mathcal{C}(X, \mathcal{Y})$ el cono positivo de todas las funciones continuas de X a $\mathcal{Y}$ con la* ***topología fina****, que es la topología generada por los entornos de la forma*

$$\mathscr{B}(f, \delta) := \{g \in \mathcal{C}(X, \mathcal{Y}) \,:\, \|f(x) - g(x)\|_{\mathcal{Y}} < \delta(x), \text{ para todo } x \in X\},$$

donde $f \in \mathcal{C}(X, \mathcal{Y})$ y $\delta \in \mathcal{C}(X, (0, +\infty))$.

Lema 2.4.4. *[DP] $\mathcal{C}(X, \mathcal{Y})$ con la topología fina es un espacio de Baire.*

Demostración:
Sea (G_n) una sucesión de conjuntos densos abiertos en $\mathcal{C}(X, \mathcal{Y})$ y sea V un conjunto abierto arbitrario en $\mathcal{C}(X, \mathcal{Y})$. Afirmamos que existen sucesiones $(f_n) \subset \mathcal{C}(X, \mathcal{Y})$ y $(\delta_n) \subset \mathcal{C}(X, (0, +\infty))$ tales que

$$\overline{\mathscr{B}(f_{n+1}, \delta_{n+1})} \subset \mathscr{B}(f_n, \delta_n), \ \sup_X \delta_n \leq \frac{1}{n}, \ \mathscr{B}(f_n, \delta_n) \subset V \cap \bigcap_{i=1}^{n} G_i. \tag{2.33}$$

En efecto, supongamos que hemos construido $f_1, \ldots, f_n$ y $\delta_1, \ldots, \delta_n$ verificando (2.33). Como G_{n+1} es denso y abierto, para algún $f \in \mathcal{C}(X, \mathcal{Y})$ y algún $\delta \in \mathcal{C}(X, (0, +\infty))$, tenemos que

$$\mathscr{B}(f_n, \delta_n) \cap G_{n+1} \supset \mathscr{B}(f, 2\delta) \supset \overline{\mathscr{B}(f, \delta)} \supset \mathscr{B}(f, \delta).$$

Podemos suponer sin pérdida de generalidad que $\sup_X \delta \leq \dfrac{1}{n+1}$, por lo que las condiciones de (2.33) se satisfacen para $f_{n+1} := f$ y $\delta_{n+1} := \delta$. Como $\mathcal{Y}$ es completo, entonces $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ existe para todo $x \in X$. Tenemos que f es continua ya que es el límite uniforme de las funciones continuas f_n. Además, $f \in \overline{\mathscr{B}(f_n, \delta_n)} \subset \bigcap_{i=1}^{n} G_i \cap V$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Por tanto, $\bigcap_{i=1}^{\infty} G_i$ es denso en $\mathcal{C}(X, \mathcal{Y})$. □

2.4.2. Resultados previos sobre el Teorema de Michael y equisemicontinuidad inferior

Un paso muy común para probar los P.V.P. es usar alguna variante del Teorema de selección de Michael.

Lema 2.4.5. *(Lema de Selección) [DP]*
Sean X un espacio topológico paracompacto y $\mathcal{E} \in \mathcal{C}(X,(0,+\infty))$. Sea $f\colon X \times Y \to (-\infty,+\infty]$ una función satisfaciendo que

(a) para todo $x \in X$, la función $f(x,\cdot)$ es propia, acotada inferiormente y convexa;

(b) para todo $y \in Y$, la función $f(\cdot,y)$ es s.c.s. de X a $(-\infty,+\infty]$;

(c) la función $\inf f(\cdot,Y)$ es s.c.i. de X a $\mathbb{R}$.

Entonces, existe una función $\varphi \in \mathcal{C}(X,Y)$ tal que $f(x,\varphi(x)) < \inf f(x,Y) + \mathcal{E}(x)$.

Demostración:
Para cada $y \in Y$, definimos

$$U_y := \{x \in X \,:\, f(x,y) < \inf f(x,Y) + \mathcal{E}(x)\}.$$

Por las hipótesis (b) y (c), U_y es abierto. Por la semicontinuidad inferior de $f(x,\cdot)$, tenemos que $\{U_y\}_{y\in Y}$ recubre X. Como X es paracompacto, existe $\{\psi_s\}_{s\in S}$ un partición localmente finita subordinada a $\{U_y\}_{y\in Y}$. Por tanto, para cada $s \in S$, podemos encontrar algún U_y tal que $\mathrm{sop}(\psi_s) \subset U_y$ y definimos $y_s := y$. Así, obtenemos la función que buscamos si definimos $\varphi\colon X \to Y$ tal que $\varphi(x) := \sum\limits_{s\in S} \psi_s(x) y_s$, que es continua y satisface $f(x,\varphi(x)) < \inf(x,Y) + \mathcal{E}(x)$. $\square$

Observación 2.4.6. *En la prueba anterior, como f es convexa, $\sum\limits_{s\in S} \psi(x) = 1$ y $x \in U_{y_s}$ si $\psi_s(x) \neq 0$, se desprende la siguiente desigualdad:*

$$f(x,\varphi(x)) = f\left(x, \sum_{s\in S} \psi_s(x) y_s\right) \leq \sum_{s\in S} \psi_s(x) f(x,y_s) < \sum_{s\in S} \psi_s(x)(\inf f(x,Y) + \mathcal{E}(x)).$$

Para verificar la condición (c) del lema anterior, estudiaremos a continuación algunas condiciones suficientes. Una de ellas es la equisemicontinuidad inferior, la cual la hemos usado anteriormente para algunos casos particulares. Es conveniente que recordemos su definición y la extendamos para funciones con valores en $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.

Definición 2.4.7. *Dado un espacio topológico X, decimos que una familia de funciones $\{f_s\colon X \to (-\infty,+\infty] \,:\, s \in S\}$ es **equisemicontinua inferiomente (equi-s.c.i.)** en $x_0 \in X$ si para todo $a > 0$ y $K > 0$ existe un entorno abierto U_{x_0} de x_0 tal que para todo $x \in U_{x_0}$,*

- *si $s \in S$ es tal que $f_s(x_0) < +\infty$, entonces $f_s(x_0) - a < f_s(x)$,*
- *si $s \in S$ es tal que $f_s(x_0) = +\infty$, entonces $K < f_s(x)$.*

Si dicha familia de funciones es equi-s.c.i. en todo punto de X, se dice que es equi-s.c.i.

Observamos que cuando las familias $\{f_s : s \in S\}$ y $\{g_s : s \in S\}$ son equi-s.c.i. en x_0 y $\operatorname{mín}\left\{\operatorname*{ínf}_{s\in S} f_s(x_0), \operatorname*{ínf}_{s\in S} g_s(x_0)\right\} > -\infty$, entonces $\{f_s + g_s : s \in S\}$ es equi-s.c.i. en x_0. La parte positiva de una función con valores reales, f, la denotaremos por f^+, esto es,

$$f^+(x) = \begin{cases} f(x), & \text{si } f(x) > 0, \\ 0, & \text{si } f(x) \leq 0. \end{cases}$$

Cuando todas las funciones f_s tienen valores reales, tenemos además que $\{f_s : s \in S\}$ es equi-s.c.i. si, y sólo si, para todo punto $x_0 \in X$, $(f_s(x_0) - f_s(x))^+ \to 0$ uniformemente con respecto a $s \in S$ cuando $x \to x_0$.

Lema 2.4.8. *[DP] Sean X un espacio topológico y $\{f_s : X \to (-\infty, +\infty] : s \in S\}$ una familia de funciones equi-s.c.i. Entonces $\operatorname*{ínf}_{s\in S} f_s$ es s.c.i.*

Demostración: Fijemos $x_0 \in X$. Si $\operatorname*{ínf}_{s\in S} f_s(x_0) = +\infty$, dado $K > 0$ arbitrario, es obvio que $K < f_s(x)$ para todo $s \in S$, luego $\operatorname*{ínf}_{s\in S} f_s$ es s.c.i. Supongamos que $\operatorname*{ínf}_{s\in S} f_s(x_0) < +\infty$ y escojamos $K > \operatorname*{ínf}_{s\in S} f_s(x_0)$ y $\mathcal{E} > 0$ arbitrariamente. Por la equisemicontinuidad inferior, existe un entorno abierto U_{x_0} tal que, para todo $x \in U_{x_0}$, $f_s(x_0) - \mathcal{E} \leq f_s(x)$ si $s \in S$ tal que $f_s(x_0) < +\infty$ y $\operatorname*{ínf}_{t\in S} f_t(x_0) < K < f_s(x)$ si $f_s(x_0) = +\infty$. Consecuentemente,

$$\operatorname*{ínf}_{s\in S} f_s(x_0) - \mathcal{E} \leq \operatorname*{ínf}_{s\in S} f_s(x). \quad \square$$

Supondremos en adelante que X es un espacio topológico, Y es un espacio de Banach y $f : X \times Y \to (-\infty, +\infty]$ es una función. Denotaremos por (M1), (M2), (A1) y (A2) las siguientes condiciones:

(M1) para todo $x \in X$, la función $f(x, \cdot)$ es propia, s.c.i. y acotada inferiormente,

(M2) para todo $y \in Y$, la función $f(\cdot, y)$ es continua con la topología usual,

(A1) para todo $x \in X$, la función $f(x, \cdot)$ es convexa,

(A2) si $D \subset Y$ es acotado, la familia $\{f(\cdot, y) : y \in D\}$ es equi-s.c.i.

A continuación, obtendremos algunos resultados relacionados con la equisemicontinuidad inferior imponiendo estas condiciones, las cuales las usaremos más adelante en el P.V.P. de Deville-Godefroy-Zizler.

Lema 2.4.9. *[DP] Si $f : X \times Y \to (-\infty, +\infty]$ satisface (M1), (M2), (A1) y (A2), entonces para todo $x_0 \in X, y_0 \in \operatorname{dom}(f(x_0, \cdot))$ y $\mathcal{E} > 0$, existen un entorno abierto $V_{\mathcal{E}}^{y_0}(x_0)$ de x_0 y $r_{\mathcal{E}}^{y_0}(x_0) > 0$ tales que*

$$f(x, y) - f(x, y_0) \geq -\mathcal{E}\|y - y_0\|_Y$$

para todo $x \in V_{\mathcal{E}}^{y_0}(x_0)$ e $y \in Y$ tal que $\|y - y_0\|_Y > r_{\mathcal{E}}^{y_0}(x_0)$.

Demostración:

Fijemos $x_0 \in X, y_0 \in \operatorname{dom}(f(x_0,\cdot))$ y $\mathcal{E} > 0$. Por (M2), $f(\cdot, y_0)$ es continua, luego existe un entorno abierto U de x_0 tal que

$$p := f(x_0, y_0) + 1 > f(x, y_0), \text{ para todo } x \in U.$$

Sea $q := \inf f(x_0, Y) - 1$ y escojamos $R > 0$ tal que $\dfrac{p-q}{R} < \mathcal{E}$. Por la hipótesis (A2), existe un entorno abierto V de x_0 contenido en U tal que $f(x, y) > q$ para todo $x \in V$ y para todo $y \in B_R(y_0)$.

Sea $z \in Y$ tal que $\|z - y_0\|_Y > R$. Si fijamos $y := y_0 + R\dfrac{z - y_0}{\|z - y_0\|_Y} = \dfrac{R}{\|z - y_0\|_Y}z + \left(1 - \dfrac{R}{\|z - y_0\|_Y}\right) y_0$, entonces $\|y - y_0\|_Y = R < \|z - y_0\|_Y$. Así, para $x \in V$, tenemos que

$$\begin{aligned}\frac{f(x,z) - f(x,y_0)}{\|z - y_0\|_Y} &= \frac{\dfrac{R}{\|z - y_0\|_Y} f(x,z) + \left(1 - \dfrac{R}{\|z - y_0\|_Y}\right) f(x,y_0) - f(x,y_0)}{R} \\ &\underset{(A1)}{\geq} \frac{f(x,y) - f(x,y_0)}{R} \geq \frac{q-p}{R} > -\mathcal{E}.\end{aligned}$$

Así, escribiendo $V_{\mathcal{E}}^{y_0}(x_0) := V$ y $r_{\mathcal{E}}^{y_0}(x_0) := R = \|y - y_0\|_Y$, obtenemos que

$$f(x,z) - f(x,y_0) \geq -\mathcal{E}\|z - y_0\|_Y$$

para todo $x \in V_{\mathcal{E}}^{y_0}(x_0)$ y $z \in Y$ tal que $\|z - y_0\|_Y > r_{\mathcal{E}}^{y_0}(x_0)$. $\square$

Lema 2.4.10. *[DP] Sea $\Delta \in \mathcal{C}(X, \mathcal{Y})$ y D un subconjunto acotado de Y. Entonces la familia de funciones $\{\Delta(\cdot)(y) \colon X \to \mathbb{R} : y \in D\}$ es equicontinua.*

Demostración:

Fijemos $x_0 \in X$ y $\mathcal{E} > 0$. Como $\Delta \in \mathcal{C}(X, \mathcal{Y})$, existe un entorno abierto U de x_0 tal que

$$\|\Delta(x_0) - \Delta(x)\|_{\mathcal{Y}} < \mathcal{E} \text{ para todo } x \in U.$$

Dado $y \in Y$, se sigue que

$$\begin{aligned}|\Delta(x_0)(y) - \Delta(x)(y)| &\leq |\Delta(x_0)(0) - \Delta(x)(0)| + |\Delta(x_0)(y) - \Delta(x)(y)| \\ &\leq |\Delta(x_0)(0) - \Delta(x)(0)| + \|\Delta(x_0) - \Delta(x)\|_{\mathcal{Y}}\|y\|_Y \\ &\leq |\Delta(x_0)(0) - \Delta(x)(0)| + \mathcal{E}\|y\|_Y \\ &\leq \Big(1 + \|y\|_Y\Big)\mathcal{E}.\end{aligned}$$

Por tanto, $\{\Delta(\cdot)(y) \colon X \to \mathbb{R} : y \in D\}$ es equicontinua en x_0. $\square$

En adelante, dadas las funciones $f\colon X\times Y\to(-\infty,+\infty]$ y $\Delta\in\mathcal{C}(X,\mathcal{Y})$, para simplificar la notación definiremos la función $f_\Delta\colon X\times Y\to(-\infty,+\infty]$ tal que $f_\Delta(x,y)=f(x,y)+\Delta(x)(y)$ para todo $x\in X$ e $y\in Y$. Veamos a continuación un resultado que será necesario para probar el P.V.P. de Deville-Godefroy-Zizler, en cuya prueba usaremos los dos lemas anteriores.

Proposición 2.4.11. *[DP] Supongamos que la función $f\colon X\times Y\to(-\infty,+\infty]$ satisface las condiciones (M1), (M2), (A1) y (A2). Dado $\Delta\in\mathcal{C}(X,\mathcal{Y})$, asumiremos que*

(i) la función multivaluada $D_\Delta\colon X\rightrightarrows Y$ definida por

$$D_\Delta(x)=\{y\in Y\ :\ f_\Delta(x,y)<\inf f_\Delta(x,Y)+1\}$$

está localmente acotada,

(ii) la aplicación $\Phi\colon X\to\mathbb{R}$ definida por $\Phi(x)=\inf f_\Delta(x,Y)$ es continua.

Entonces, (i) implica (ii) y existe un subconjunto denso $A\subset\mathcal{C}(X,\mathcal{Y})$ tal que (i) se verifica para todo $\Delta\in A$.

Demostración:
Probaremos en primer lugar que (i) implica (ii). Fijemos $x_0\in X$. Entonces como la multifunción D_Δ está localmente acotada, existe un entorno U de x_0 y un conjunto acotado $E\subset Y$ tales que $D_\Delta(x)\subset E$ para todo $x\in U$. Por como hemos definido D_Δ, tenemos que

$$\inf\{f_\Delta(x,y)\ :\ y\in Y\}=\inf\{f_\Delta(x,y)\ :\ y\in E\},\ \text{para todo } x\in U. \tag{2.34}$$

Por el Lema 2.4.10, $\{\Delta(\cdot)(y)\ :\ y\in E\}$ es equicontinua y, por la hipótesis (A2), $\{f(\cdot,y)\ :\ y\in E\}$ es equi-s.c.i., luego la familia de funciones $\{f_\Delta(\cdot,y)\ :\ y\in E\}$ también es equi-s.c.i. Usando el Lema 2.4.8, obtenemos que $\inf f_\Delta(\cdot,E)$ es s.c.i. y, por la igualdad (2.34), entonces $\inf f_\Delta(\cdot,Y)$ es s.c.i. Además, $\inf f_\Delta(\cdot,Y)$ es s.c.s. ya que es un ínfimo de funciones continuas (Proposición 0.3.3). Por tanto, la aplicación $\Phi(x)=\inf f_\Delta(x,Y)$ es continua.

Probaremos ahora que las funciones $\Delta\in\mathcal{C}(X,\mathcal{Y})$ que satisfacen (i) constituyen un subconjunto denso en $\mathcal{C}(X,\mathcal{Y})$. Dados $\Delta\in\mathcal{C}(X,\mathcal{Y})$ y $\mathcal{E}\in\mathcal{C}(X,(0,+\infty))$, definimos las funciones $h,\Delta'\in\mathcal{C}(X,\mathcal{Y})$ tales que $h(x)(y):=\mathcal{E}(x)\cdot b(y)$ y $\Delta':=\Delta+h$, donde $b\in\mathcal{Y}$ es una función de separación convexa tal que $\|b\|_{\mathcal{Y}}<1$. Nótese que $\|h(x)\|_{\mathcal{Y}}=\mathcal{E}(x)\|b\|_{\mathcal{Y}}<\mathcal{E}(x)$ para todo $x\in X$, por lo que $\Delta'\in\mathscr{B}(\Delta,\mathcal{E})$ $=\{g\in\mathcal{C}(X,\mathcal{Y})\ :\ \|\Delta(x)-g(x)\|_{\mathcal{Y}}<\mathcal{E}(x),\text{ para todo } x\in X\}$. Por el Lema 2.4.2 podemos asegurar que para cada $y_0\in Y$, existen dos constantes positivas c_{y_0} y C_{y_0} que satisfacen que $b(y)-b(y_0)\geq c_{y_0}\|y-y_0\|_{\mathcal{Y}}$ para todo $y\in Y\backslash B_{C_{y_0}}(y_0)$. Por consiguiente, tenemos que

$$h(x)(y)-h(x)(y_0)=\mathcal{E}(x)\cdot\Big(b(y)-b(y_0)\Big)\geq c_{y_0}\|y-y_0\|_Y, \tag{2.35}$$

para todo $x \in X$ e $y \in Y \backslash B_{C_{y_0}}(y_0)$.

Ahora podemos afirmar que $D_{\Delta'}$ está localmente acotada. En efecto, fijemos $x_0 \in X$ e $y_0 \in \operatorname{dom} f(x_0, \cdot)$. Entonces existen $\nu > 0$ suficientemente pequeño y un entorno abierto U de x_0 tales que $\inf \mathcal{E}(U) > \dfrac{2\nu}{c_{y_0}}$. Como f_Δ satisface (M1), (M2), (A1) y (A2), podemos aplicar el Lema 2.4.9 a f_Δ para obtener un entorno abierto $V_\eta^{y_0}(x_0)$ de x_0 y $r_\eta^{y_0}(x_0) > 0$ tales que

$$f_\Delta(x, y) - f_\Delta(x, y_0) \geq -\eta \|y - y_0\|_Y \tag{2.36}$$

para todo $x \in V_\eta^{y_0}(x_0)$ e $y \in Y$ tal que $\|y - y_0\|_Y > r_\eta^{y_0}(x_0)$. Podemos suponer sin pérdida de generalidad que $V_\eta^{y_0}(x_0) \subset V$ y que $r_\eta^{y_0}(x_0) > C_{y_0}$ ya que la desigualdad anterior se sigue verificando para entornos que están contenidos en $V_\eta^{y_0}(x_0)$ y para constantes positivas que sean mayores que $r_\eta^{y_0}(x_0)$ (en estos casos, lo único que hacemos es restringir los conjuntos de los elementos que verifican la desigualdad). Así, por (2.35) y (2.36), tenemos la estimación

$$\begin{aligned} f_{\Delta'}(x, y) - f_{\Delta'}(x, y_0) &= \Big(h(x)(y) - h(x)(y_0)\Big) + \Big(f(x, y) - f(x, y_0)\Big) \\ &\geq \mathcal{E}(x) c_{y_0} \|y - y_0\|_Y - \eta \|y - y_0\|_Y \geq 2\eta \|y - y_0\|_Y - \eta \|y - y_0\|_Y \\ &= \eta \|y - y_0\|_Y \end{aligned}$$

para todo $x \in V_\eta^{y_0}(x_0)$ e $y \in Y$ tal que $\|y - y_0\|_Y > r_\eta^{y_0}(x_0)$. Por tanto, si $\rho := \max \left\{ r_\eta^{y_0}(x_0), \dfrac{1}{\eta} \right\}$, entonces $D_{\Delta'}(x) \subset B_\rho(y_0)$ cuando $x \in V_\eta^{y_0}(x_0)$. $\square$

Sobre las condiciones (M1), (M2), (A1) y (A2), se pueden establecer algunas observaciones interesantes.

Observación 2.4.12. *[DP, Corolario 3.7] Supongamos que la función $f\colon X \times Y \to (-\infty, +\infty]$ satisface las condiciones (M1), (M2), (A1) y (A2) y que $\dim Y < \infty$. Si $x_0 \in X$ verifica que $\{y \in Y \,:\, f(x_0, y) = \inf f(x_0, Y)\}$ es acotado, entonces la función $\inf f(\cdot, Y)$ es continua en x_0.*

Observación 2.4.13. *[DP, Indicación 3.8] Si X es un espacio métrico y $f\colon X \times Y \to \mathbb{R}$ (nótese que f no tiene valores infinitos) satisface (M1), (M2) y (A1), entonces $\{f(\cdot, y) \,:\, y \in K\}$ es equi-s.c.i. para cada compacto $K \subset Y$. En particular, si $\dim Y < \infty$, entonces f satisface (A2) automáticamente.*

Veamos un último lema.

Lema 2.4.14. *[DP] Sean X un espacio topológico paracompacto y $\phi\colon X \to \mathbb{R}$ una función localmente acotada. Entonces existe una función continua $\varphi\colon X \to (0, +\infty)$ tal que $|\phi(x)| < \varphi(x)$ para todo $x \in X$.*

Demostración: Dado $x \in X$, podemos encontrar un conjunto abierto $U_x \ni x$ y una constante $c_x > 0$ tal que $\phi(U_x) \subset (-c_x, c_x)$. Como X es paracompacto, existe una partición de la unidad finita $\{\psi_s\}_{s\in S}$ subordinada a un recubrimiento por abiertos $\{U_x\}$ de X. Para cada $s \in S$ definimos $c_s := c_x$ para algún $x \in X$ tal que $\operatorname{sop}\psi_s \subset U_x$. Entonces la función $\varphi\colon X \to (0, +\infty)$ tal que $\varphi(x) := \sum_{s\in S} \psi_s(x)c_s$ satisface que

$$\varphi(x) = \sum_{s\in S} \psi_s(x)c_s > |\phi(x)| \sum_{s\in S} \psi_s(x) = |\phi(x)|. \quad \square$$

2.4.3. Resultado principal

Ahora ya disponemos de todas las herramientas necesarias para probar el P.V.P. de esta sección. Recordemos que un conjunto es residual si su complementario es de primera categoría (i.e., unión numerable de conjuntos diseminados, que son conjuntos cuya clausura tiene interior vacío) y que una función $h\colon Y \to (-\infty, +\infty]$ alcanza un mínimo fuerte en un punto $z \in Y$ si alcanza un mínimo en el punto z y toda sucesión minimizante converge a z.

Teorema 2.4.15. *(P.V.P. de Deville-Godefroy-Zizler; Deville-Procházka, 2009) [DP].*
Sea X un espacio topológico paracompacto y sea $f\colon X \times Y \to (-\infty, +\infty]$ una función que satisface las condiciones

(M1) para todo $x \in X$, la función $f(x, \cdot)$ es propia, s.c.i. y acotada inferiormente,

(M2) para todo $y \in Y$, la función $f(\cdot, y)$ es continua con la topología usual,

(A1) para todo $x \in X$, la función $f(x, \cdot)$ es convexa,

(A2) si $D \subset Y$ es acotado, la familia $\{f(\cdot, y) : y \in D\}$ es equi-s.c.i.

Entonces el conjunto

$$\begin{aligned}\mathcal{M} :=\{\Delta \in \mathcal{C}(X, \mathcal{Y}) \,:\, &\text{existe } v \in \mathcal{C}(X, Y) \text{ tal que} \\ &f(x, \cdot) + \Delta(x) \text{ alcanza su mínimo fuerte en } v(x) \text{ para todo } x \in X\}\end{aligned}$$

es residual en $\mathcal{C}(X, \mathcal{Y})$. Además, si $\Delta \in \mathcal{M}$, entonces la aplicación $\Phi\colon X \to (-\infty, +\infty]$ tal que $\Phi(x) = \inf f_\Delta(x, Y)$ es continua, donde recordemos que $f_\Delta\colon X \times Y \to (-\infty, +\infty]$ es tal que $f_\Delta(x, y) = f(x, y) + \Delta(x)(y)$ para todo $x \in X$ e $y \in Y$. En particular, para todo $\mathcal{E} \in \mathcal{C}(X, (0, +\infty))$, existen $\Delta \in \mathcal{C}(X, \mathcal{Y})$ y $v \in \mathcal{C}(X, Y)$ tales que $\|\Delta(x)\|_{\mathcal{Y}} < \mathcal{E}(x)$ y $f_\Delta(x, \cdot)$ alcanza su mínimo fuerte en $v(x)$ para todo $x \in X$.

<u>**Demostración:**</u>
Consideremos para cada $n \in \mathbb{N}$, el conjunto

$$U_n := \Bigg\{ \Delta \in \mathcal{C}(X, \mathcal{Y}) \ : \text{ existen } v_n \in \mathcal{C}(X,Y) \text{ y } \delta \in \mathcal{C}\big(X,(0,+\infty)\big) \text{ tales que}$$

$$f_\Delta\big(x, v_n(x)\big) + \delta(x) < \inf \left\{ f_\Delta(x,y) \ : \ \|y - v_n(x)\|_Y \geq \frac{1}{n} \right\} \text{ para todo } x \in X \Bigg\}.$$

Para hacer la lectura de la prueba más cómoda, la dividiremos en varios pasos.

Paso 1: veamos que U_n es abierto en $\mathcal{C}(X, \mathcal{Y})$. Fijemos $x \in X$. Sea $g_1 \in \mathcal{Y}$ tal que

$$f(x, v_n) + g_1(v_n) + \delta < \inf \left\{ f(x,y) + g_1(y) \ : \ \|y - v_n\|_Y \geq \frac{1}{n} \right\} \tag{2.37}$$

para $v_n \in Y$ y $\delta > 0$. Sea $g_2 \in \mathcal{Y}$ tal que $\|g_1 - g_2\|_\mathcal{Y} \leq \dfrac{n\delta}{2}$. Entonces, por la definición de $\|\cdot\|_\mathcal{Y}$, para cada $z \in \mathbb{S}_{\frac{1}{n}}(v_n)$ tenemos que

$$\frac{n\delta}{2} \geq g_1(0) - g_2(0) + n \cdot |g_1(v_n) - g_2(v_n) - g_1(z) + g_2(z)| \quad \text{y}$$
$$\frac{n\delta}{2} \geq g_2(0) - g_1(0) + n \cdot |g_1(v_n) - g_2(v_n) - g_1(z) + g_2(z)|.$$

Sumando ambas desigualdades obtenemos que $g_1(v_n) - g_2(v_n) - g_1(z) + g_2(z) \geq -\dfrac{\delta}{2}$. Así

$$\begin{aligned} f(x,z) + g_2(z) &\geq f(x,z) + g_1(z) + g_2(v_n) - g_1(v_n) - \frac{\delta}{2} \\ &\underset{(2.37)}{\geq} f(x,v_n) + g_1(v_n) + \delta + g_2(v_n) - g_1(v_n) - \frac{\delta}{2} = f(x,v_n) + g_2(v_n) + \frac{\delta}{2}. \end{aligned}$$

Como $f(x,\cdot) + g_2(\cdot)$ es convexa, se sigue que, para cada $z \in Y$ tal que $\|z - v_n\|_Y \geq \dfrac{1}{n}$, se verifica que

$$f(x,z) + g_2(z) \geq f(x,v_n) + g_2(v_n) + \frac{\delta}{2}.$$

En efecto, dado $\tilde{z} \in Y$ tal que $\|\tilde{z} - v_n\|_Y \geq \dfrac{1}{n}$, podemos definir

$$z := \lambda \tilde{z} + (1-\lambda) v_n \in \mathbb{S}_{\frac{1}{n}}(v_n),$$

donde $\lambda \in (0,1)$. Si $f(x,\tilde{z}) + g_2(\tilde{z}) \geq f(x,z) + g_2(z)$, el resultado es trivial ya que como $z \in \mathbb{S}_{\frac{1}{n}}(v_n)$, entonces $f(x,z) + g_2(z) \geq f(v_n) + g_2(v_n) + \dfrac{\delta}{2}$. Si $f(x,\tilde{z}) + g_2(\tilde{z}) < f(x,z) + g_2(\tilde{z})$ tenemos que

$$\begin{aligned} f(x,z) + g_2(z) &\leq \lambda[f(x,\tilde{z}) + g_2(\tilde{z})] + (1-\lambda)[f(x,v_n) + g_2(v_n)] \\ &< \lambda[f(x,z) + g_2(z)] + (1-\lambda)[f(x,v_n) + g_2(v_n)] \end{aligned}$$

y, por tanto, $f(x,z)+g_2(z) < f(x,v_n)+g_2(v_n)$, lo cual es contradictorio ya que $f(x,z)+g_2(z) \geq f(x,v_n)+g_2(v_n)+\dfrac{\delta}{2}$.

Por tanto, tenemos ahora que si $\Delta_1 \in U_n$, con $v_n \in \mathcal{C}(X,Y)$ y $\delta \in \mathcal{C}\big(X,(0,+\infty)\big)$, y $\Delta_2 \in \mathscr{B}(\Delta_1, \frac{n}{2}\delta) = \{g \in \mathcal{C}(X,\mathcal{Y}) \,:\, \|\Delta_1(x)-g(x)\|_{\mathcal{Y}} < \frac{n}{2}\delta(x)$, para todo $x \in X\}$, entonces $\Delta_2 \in U_n$ (con el mismo v_n y con $\frac{\delta}{2}$), con lo cual U_n es abierto.

Paso 2: veamos que U_n es denso en $\mathcal{C}(X,\mathcal{Y})$. Sean $\Delta \in \mathcal{C}(X,\mathcal{Y})$ y $\mathcal{E} \in \mathcal{C}\big(X,(0,+\infty)\big)$. Necesitamos encontrar $\Lambda \in \mathscr{B}(\Delta,\mathcal{E}), \delta \in \mathcal{C}(X,(0,+\infty))$ y $v_n \in \mathcal{C}(X,Y)$ tales que

$$f_\Lambda\big(x,v_n(x)\big)+\delta(x) < \operatorname{ínf}\left\{ f_\Lambda(x,y) \,:\, \|y-v_n(x)\|_Y \geq \frac{1}{n}\right\}$$

para todo $x \in X$. Gracias a la Proposición 2.4.11, para probar la densidad es suficiente con considerar tal Δ de modo que la función $\Phi(x) = \operatorname{ínf} f_\Delta(x,Y)$ sea s.c.i. y la multifunción

$$D_\Delta(x) = \{y \in Y \,:\, f_\Delta(x,y) < \operatorname{ínf} f_\Delta(x,Y)+1\}$$

esté localmente acotada (así $\Phi(x) = \operatorname{ínf} f_\Delta(x,Y)$ es continua). Sea $b \in \mathcal{Y}$ una función de separación convexa tal que

(B1) $\|b\|_{\mathcal{Y}} < 2$ y $\|\tau_y b\|_{\mathcal{Y}} \geq 1$, para todo $y \in Y$.

(B2) $b(0)+\frac{1}{n} \leq \operatorname{ínf}\big\{b(y) \,:\, \|y\|_Y \geq \frac{1}{n}\big\}$.

Sea $T\colon X \to (0,+\infty)$ una función definida por $T(x) := \sup\{\|\tau_y b\|_{\mathcal{Y}} \,:\, y \in D_\Delta(x)\}$. Por como hemos considerado Δ, D_Δ está localmente acotada, lo que implica que T también lo está. Sea φ la función continua que se obtiene del Lema 2.4.14 tal que $T(x) \leq \varphi(x)$. Podemos asumir que $\varphi(x) \geq 1$, para todo $x \in X$ y usar el Lema 2.4.5 para encontrar $v_n \in \mathcal{C}(X,Y)$ tal que

$$f_\Delta(x,v_n(x)) < \operatorname{ínf}\{f_\Delta(x,y) \,:\, y \in Y\} + \frac{\mathcal{E}(x)}{4n\varphi(x)},$$

donde $\mathcal{E}(x) < \varphi(x)$ para todo $x \in X$. Como $T(x) = \sup\{\|\tau_y b\|_{\mathcal{Y}} \,:\, y \in D_\Delta(x)\} \leq \varphi(x)$ y $v_n(x) \in D_\Delta$ por la desigualdad anterior, entonces $\|\tau_{v_n(x)} b\|_{\mathcal{Y}} \leq \varphi(x)$. Definimos $h \in \mathcal{C}(X,\mathcal{Y})$ tal que

$$h(x)(y) := \frac{b(y-v_n(x))\mathcal{E}(x)}{2\|\tau_{v_n(x)}b\|_{\mathcal{Y}}}.$$

Nótese que $\|h(x)\|_{\mathcal{Y}} < \mathcal{E}(x)$, para todo $x \in X$. Así, si definimos $\Lambda := \Delta + h \in \mathcal{C}(X,\mathcal{Y})$, tenemos que $\Lambda \in \mathscr{B}(\Delta,\mathcal{E})$. Entonces, para cada $x \in X$ tenemos la desigualdad

$$\begin{aligned} f(x,v_n(x)) + \Lambda(x)\big(v_n(x)\big) &= f_\Delta\big(x,v_n(x)\big) + h(x)\big(v_n(x)\big) \\ &< \operatorname{ínf} f_\Delta(x,Y) + h(x)\big(v_n(x)\big) + \frac{\mathcal{E}(x)}{4n\varphi(x)}. \end{aligned} \tag{2.38}$$

Si $x \in X, y \in Y$ y $\|y - v_n(x)\|_Y \geq \frac{1}{n}$, entonces por $(B2)$ tenemos que $b(0) + \frac{1}{n} \leq b(y - v_n(x))$ y por la definición de h

$$h(x)(y) \geq \frac{\big(b(0) + \frac{1}{n}\big)\,\mathcal{E}(x)}{2\|\tau_{v_n(x)}b\|_{\mathcal{Y}}} = h(x)\big(v_n(x)\big) + \frac{\mathcal{E}(x)}{2n\|\tau_{v_n(x)}b\|_{\mathcal{Y}}}.$$

Esta última desigualdad nos permite dar la siguiente estimación

$$\begin{aligned} f(x,y) + \Lambda(x)(y) &= f_\Delta(x,y) + h(x)(y) \\ &\geq \inf f_\Delta(x,Y) + h(x)(y) \\ &\geq \inf f_\Delta(x,Y) + h(x)\big(v_n(x)\big) + \frac{\mathcal{E}(x)}{2n\|\tau_{v_n(x)}b\|_{\mathcal{Y}}} \\ &= \inf f_\Delta(x,Y) + h(x)\big(v_n(x)\big) + \frac{\mathcal{E}(x)}{4n\varphi(x)} + \delta(x) \end{aligned} \tag{2.39}$$

donde $\delta(x) = \dfrac{\mathcal{E}(x)}{2n}\left(\dfrac{1}{\|\tau_{v_n(x)}b\|_{\mathcal{Y}}} - \dfrac{1}{2\varphi(x)}\right) > 0$. Combinando la desigualdades (2.38) y (2.39), obtenemos que

$$f(x,y) + \Lambda(x)\big(y\big) \geq f(x, v_n(x)) + \Lambda(x)\big(v_n(x)\big) + \delta(x).$$

Luego $\Lambda \in U_n$, lo cual prueba que U_n es un subconjunto denso en $\mathcal{C}(X,\mathcal{Y})$. Consecuentemente, por el Lema 2.4.4, $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n$ es un subconjunto G_δ-denso de $\mathcal{C}(X,\mathcal{Y})$.

Paso 3: veamos que $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n \subset \mathcal{M}$, es decir, si $\Delta \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n$, entonces existe $v \in \mathcal{C}(X,Y)$ tal que $f_\Delta(x,\cdot)$ alcanza su mínimo fuerte en $v(x)$ para todo $x \in X$. En efecto, para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $v_n \in \mathcal{C}(X,Y)$ tal que

$$f_\Delta\big(x, v_n(x)\big) < \inf\left\{f_\Delta(x,y) \,:\, \|y - v_n(x)\|_Y \geq \frac{1}{n}\right\}.$$

Si $p \geq n$, entonces $\|v_p(x) - v_n(x)\|_Y < \frac{1}{n}$ para todo $x \in X$ (si $\|v_p(x) - v_n(x)\|_Y \geq \frac{1}{n} \geq \frac{1}{p}$ para algún $x \in X$, por como hemos elegido v_n, tendríamos que $f_\Delta(x, v_p(x)) > f_\Delta(x, v_n(x))$ y, simultáneamente, como $\|v_n(x) - v_p(x)\|_Y \geq \frac{1}{p}$, entonces por la elección de v_p tendríamos que $f_\Delta(x, v_n(x)) > f_\Delta(x, v_p(x))$, lo cual es contradictorio ya que ambas desigualdades son estrictas). Por tanto, (v_n) es una sucesión de Cauchy en $\mathcal{C}(X,Y)$ (con la norma $\|\cdot\|_\infty$ del espacio de las funciones continuas y acotadas de X a Y, $\mathcal{C}_b(X,Y)$) y converge a algún $v \in \mathcal{C}(X,Y)$. Fijemos $x \in X$. Por la semicontinuidad inferior de $f(x,\cdot)$,

$$\begin{aligned} f_\Delta\big(x, v(x)\big) &\leq \liminf_{n\to\infty} f_\Delta\big(x, v_n(x)\big) \\ &\leq \liminf_{n\to\infty}\left[\inf\left\{f_\Delta(x,y) \,:\, \|y - v_n(x)\|_Y \geq \frac{1}{n}\right\}\right] \\ &\leq \inf\left\{f_\Delta(x,y) \,:\, y \in Y\backslash\{v(x)\}\right\}. \end{aligned}$$

Por consiguiente, $v(x)$ es un mínimo para $f_\Delta(x,\cdot)$. Para ver que el mínimo que se alcanza en $v(x)$ es un mínimo fuerte, supongamos por reducción al absurdo que existe una sucesión $(z_n) \subset Y$ tal que $f_\Delta(x,z_n) \to f_\Delta(x,v(x))$ y $z_n \not\to v(x)$. Para alguna subsucesión de (z_n) (la cual la llamaremos también (z_n)) y para algún $p \in \mathbb{N}$ tenemos que $\|z_n - v_p(x)\|_Y \geq \dfrac{1}{p}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Consecuentemente,

$$f_\Delta\big(x,v(x)\big) \leq f_\Delta\big(x,v_p(x)\big) < \text{ínf}\left\{f_\Delta(x,y) \,:\, \|y - v_p(x)\|_Y \geq \frac{1}{p}\right\} \leq f_\Delta(x,z_n)$$

para todo $n \in \mathbb{N}$, lo cual contradice que $f_\Delta(x,z_n) \to f_\Delta(x,v(x))$. De esta forma se prueba que $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} U_n \subset \mathcal{M}$.

Por último, dados $\Delta \in \mathcal{M}$ y $x_0 \in X$, veremos que $\Phi\colon X \to (-\infty,+\infty]$ tal que $\Phi(x) = \text{ínf}\, f_\Delta(x,Y)$ es continua en x_0. Por lo que hemos probado anteriormente, existe $v \in \mathcal{C}(X,Y)$ tal que $f_\Delta(x,v(x)) = \text{ínf}\, f_\Delta(x,Y)$. Tenemos que existen un entorno abierto U de x_0 y $k > 0$ tales que $v(x) \in kB_Y$ para todo $x \in U$. Por la hipótesis (A2), $\{f_\Delta(\cdot,y) \,:\, y \in kB_Y\}$ es equi-s.c.i. y por el Lema 2.4.8, $\text{ínf}\, f_\Delta(\cdot,kB_y) = \text{ínf}\, f_\Delta(\cdot,Y)$ es s.c.i. en x_0. Como es s.c.s. por ser el ínfimo de funciones s.c.s. (Proposición 0.3.3), tenemos que Φ es continua. $\square$

El siguiente corolario muestra que es posible localizar los puntos donde se alcance un mínimo. También se muestra la posibilidad de no perturbar la función $f(x,\cdot)$ para $x \in X_0$, donde X_0 es algún subespacio cerrado de X. Por tanto, el corolario generalizará el P.V.P. probado por Veselý (Teorema 2.3.4). Este hecho lo detallaremos posteriormente después de la demostración.

Corolario 2.4.16. *[DP] Sea X un espacio topológico paracompacto y X_0 un subespacio cerrado de X tal que $X\backslash X_0$ es paracompacto. Sea $f\colon X \times Y \to (-\infty,+\infty]$ una función que satisface (M1), (M2), (A1) y (A2). Entonces, para cada aplicación continua $\mathcal{E}\colon X \to [0,1)$ tal que $\ker \mathcal{E} = X_0$ y para cada aplicación continua $v_0\colon X \to Y$ que verifica que*

$$f\big(x,v_0(x)\big) \leq \text{ínf}\, f(x,Y) + \mathcal{E}(x)^2 \;\textit{cuando}\; x \in X, \tag{2.40}$$

existen

$$v \in \mathcal{C}(X,Y) \;\textit{y}\; \Delta \in \mathcal{C}(X,\mathcal{Y})$$

tales que

(i) $f(x,\cdot) + \Delta(x)$ *alcanza su mínimo en* $v(x)$ *para todo* $x \in X$*,*

(ii) $\|v(x) - v_0(x)\|_Y \leq \mathcal{E}(x)$ *para todo* $x \in X$*,*

(iii) $\|\Delta(x)\|_{\mathcal{Y}} \leq \dfrac{2\mathcal{E}(x)}{c}(\|v_0(x)\|_Y + 1) + \mathcal{E}(x)^2$ *para una constante* $c > 0$ *que depende solamente de* $\mathcal{Y}$*.*

Demostración:

Aplicando el Teorema 2.4.15 con $X = \{x\}$ a la función $f(x, \cdot)$, obtenemos como consecuencia inmediata la existencia de una función de separación convexa $b \in \mathcal{Y}$ tal que $b(0) = 0$, $\|b\|_{\mathcal{Y}} = 1$ y $b(x) \geq c$ para todo $x \in X \backslash B_Y$, donde c es una constante positiva. Como $\|b\|_{\mathcal{Y}} = 1$ y b es no negativa, se tiene que $c \leq 1$ y $\|b_r\|_{\mathcal{Y}} = \frac{1}{r}$ para todo $r > 0$, donde b_r está definida por $b_r(z) = b\left(\frac{z}{r}\right)$. En particular, $\|b_{\mathcal{E}(x)}\|_{\mathcal{Y}} = \dfrac{1}{\mathcal{E}(x)}$, para todo $x \in X$.

Trabajaremos sólo en el espacio paracompacto $X \backslash X_0$. Definimos $h \in \mathcal{C}(X, \mathcal{Y})$ tal que

$$h(x)(y) = \frac{2\mathcal{E}(x)^2}{c} b_{\mathcal{E}(x)}\big(y - v_0(x)\big).$$

Nótese que $\|h(x)\|_{\mathcal{Y}} \leq \dfrac{2\mathcal{E}(x)}{c}(\|v_0(x)\|_Y + 1)$. Por el Teorema 2.4.15 (más concretamente, su última afirmación), existen $k \in \mathcal{C}(X \backslash X_0, \mathcal{Y})$ y $v \in \mathcal{C}(X \backslash X_0, Y)$ tales que $\|k(x)\|_{\mathcal{Y}} < \mathcal{E}(x)^2$ y $f(x, \cdot) + h(x) + k(x)$ alcanza su mínimo en $v(x)$. Definiendo $\Delta := h + k$, se satisface la afirmación (i). Además, tenemos que $\|\delta(x)\|_{\mathcal{Y}} \leq \|h(x)\|_{\mathcal{Y}} + \|k(x)\|_{\mathcal{Y}} \leq \dfrac{2\mathcal{E}(x)}{c}(\|v_0(x)\|_{\mathcal{Y}} + 1) + \mathcal{E}(x)^2$. Más aún, como $h(x, v_0(x)) = 0$ (recordemos que $b(0) = 0$), entonces

$$\begin{aligned} f\big(x, v_0(x)\big) + \Delta(x)\big(v_0(x)\big) &= f\big(x, v_0(x)\big) + k(x)\big(v_0(x)\big) \\ &\underset{(2.40)}{\leq} \inf f(x, Y) + \mathcal{E}(x)^2 + k(x)\big(v_0(x)\big); \end{aligned}$$

mientras que por otro lado,

$$\begin{aligned} f(x, y) + \Delta(x)(y) &\geq \inf f(x, Y) + h(x)(y) + k(x)(y) \\ &\geq \inf f(x, Y) + \frac{2\mathcal{E}(x)^2}{c} c + k(x)\big(v_0(x) + y - v_0(x)\big) \\ &\geq \inf f(x, Y) + 2\mathcal{E}(x)^2 + k(x)\big(v_0(x)\big) - \mathcal{E}(x)\mathcal{E}(x)^2 \\ &> \inf f(x, Y) + \mathcal{E}(x)^2 + k(x)\big(v_0(x)\big), \end{aligned}$$

para todo $x \in X \backslash X_0$ e $y \in Y$ tales que $\|y - v_0(x)\| = \mathcal{E}(x)$. Por tanto,

$$f(x, v(x)) + \Delta(x)\big(v(x)\big) \leq f(x, v_0(x)) + \Delta(x)\big(v_0(x)\big) < f(x, y) + \Delta(x)(y),$$

para todo $x \in X \backslash X_0$ e $y \in Y$ tales que $\|y - v_0(x)\| = \mathcal{E}(x)$. De la convexidad de $f(x, \cdot) + \Delta(x)$, se sigue que $\|v(x) - v_0(x)\|_Y < \mathcal{E}(x)$. En efecto, si no fuera así, existiría $\lambda \in [0, 1]$ tal que $y = \lambda v(x) + (1 - \lambda)v_0(x) \in \mathbb{S}_{\mathcal{E}(x)}(v_0(x))$ y, consecuentemente,

$$\begin{aligned} f(x, y) + \Delta(x)(y) &\leq \lambda[f(x, v(x)) + \Delta(x)\big(v(x)\big)] + (1 - \lambda)[f(x, v_0(x)) + \Delta(x)\big(v_0(x)\big)] \\ &\leq \inf f(x, Y) + \mathcal{E}(x)^2 + k(x)\big(v_0(x)\big), \end{aligned}$$

lo cual es contradictorio. Por último, definiendo $\Delta\big|_{X_0} = 0$ y $v\big|_{X_0} = v_0$, podemos concluir la prueba. $\square$

Tenemos algunas diferencias importantes con los principios variacionales paramétricos de Borwein-Preiss que hemos visto anteriormente (Teorema 2.2.2 y Teorema 2.3.4).

- En los teoremas 2.2.2 y 2.3.4, la condición

$$\inf f(\cdot, Y) \textit{ está localmente inferiormente acotada},$$

es necesaria, pero en el Teorema 2.4.15 no lo es.

- Si $\operatorname{dom} f(x, \cdot) = D$ para todo $x \in X$, estamos en las mismas condiciones que en el Teorema de Veselý.
- Usamos funciones lipschitzianas como perturbaciones mientras que Georgiev usaba funciones de la forma $\sum v_n(x)\|y - y_n(x)\|_Y^2$, con lo cual conseguimos perturbar menos la función original f.
- Existen casos como $X = [0, \omega_1]$, $X_0 = \{\omega_1\}$ que no los podemos cubrir con el corolario anterior pero sí con el Teorema de Veselý. Se puede solucionar este problema dando una nueva versión del anterior corolario, que consistiría en reemplazar la condición "$X \backslash X_0$ es paracompacto" por "X_0 es discreto". Para ello debemos probar el Teorema 2.4.15 con el Lema 2.3.1 en el espacio $C_{X_0} := \{\Delta \in \mathcal{C}(X, \mathcal{Y}) \,:\, \Delta(x)$ tiene un mínimo en $v_0(x)$ para todo $x \in X_0\}$ en lugar de usar el Lema 2.4.5 en el espacio $\mathcal{C}(X, \mathcal{Y})$.

Definición 2.4.17. *Decimos que $f\colon X \times Y \to (-\infty, +\infty]$ alcanza un mínimo localmente uniformemente fuerte (m.l.u.f.) en $v \in \mathcal{C}(X, Y)$ si*

a) $f(x, v(x)) = \inf f(x, Y)$ para todo $x \in X$, y

b) para cada $x_0 \in X$ y cada $\mathcal{E} > 0$, existen $\delta > 0$ y un entorno abierto U de x_0 tal que para todo $x \in U$ y todo $y \in Y$ se verifica que

$$\textit{si } f(x, y) - \inf f(x, Y) < \delta, \textit{ entonces } \|y - v(x_0)\| < \mathcal{E}.$$

Observación 2.4.18. *Se desprende de la prueba del Teorema 2.4.15 que el conjunto G_δ-denso, $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n$ coincide con $\{\Delta \in \mathcal{C}(X, Y) \,:\,$ existe $v \in \mathcal{C}(X, Y)$ tal que f_Δ alcanza un m.l.u.f. en $v\}$.*

Nota: Se pueden encontrar en [DP, sección 5] algunos ejemplos donde se aplica el Teorema 2.4.15. Recientemente, Luis Sánchez González y Antonín Procházka han adaptado en [PS-G] la prueba para espacios métricos y han refinado algunos detalles, en especial del espacio de perturbaciones $\mathcal{Y}$ y de la topología fina $\mathcal{C}(X, \mathcal{Y})$.

Capítulo 3

Principios variacionales con valores vectoriales

Hasta ahora hemos visto principios variacionales solamente para funciones con valores escalares. En este capítulo haremos una breve introducción de los principios variacionales con valores vectoriales, que abordan el caso de las funciones con valores vectoriales. Para ello trabajaremos en espacios de Banach parcialmente ordenados por un cono convexo puntiagudo y cerrado y extenderemos algunos de los principios ya vistos al caso vectorial. En particular, veremos la versión vectorial de los principios variacionales de Deville-Godefroy-Zizler, Ekeland y Stegall.

Estudiaremos algunas nociones sobre semicontinuidad para funciones con valores vectoriales, extendiendo la definición clásica y definiendo otros tipos de semicontinuidad más débiles que serán claves para obtener los principios variacionales con valores vectoriales optimizando las hipótesis. También estudiaremos las relaciones que hay entre los distintos tipos de semicontinuidad, donde será importante la dimensión del espacio, si el interior del cono con el que trabajemos es o no vacío o si verifican la Propiedad de la monotonía de los límites, la cual definiremos más adelante.

Posteriormente, utilizaremos un caso particular de las multifunciones: las bifunciones. Éstas nos servirán para poder abordar problemas vectoriales de equilibrio. Obtendremos otro tipo de principios variacionales que llamaremos principios perturbados para equilibrios (P.P.Eq.) y nos permitirán obtener resultados sobre la existencia de equilibrios bajo ciertas condiciones. En particular, estudiaremos los P.P. Eq. de Deville-Godefroy-Zizler y Ekeland.

Algunos de los artículos que seguiremos en este capítulo son [Fi] (2000), [FiQuTr] (2003) y [FiQu] (2007).

3.1. Preliminares y otras nociones sobre semicontinuidad

Durante este capítulo, supondremos que X e Y son espacios de Banach y que Y está parcialmente ordenado por un cono convexo puntiaguado K (es decir, dados $y, z \in Y$ arbitrarios, $y \leq z$ si, y sólo si, $z - y \in K$). Recordemos que un subconjunto $K \subset X$ es un **cono convexo** si $\lambda K + \mu K = K$, para todo $\lambda, \mu > 0$. Además, si contiene al origen, diremos que es **puntiaguado**.
Análogamente al caso del orden usual en $\mathbb{R}$, diremos que

- dados $y, z \in Y$, el conjunto $[y, z] := \{x \in Y \,:\, y \leq x \leq z\}$ es un intervalo;
- una sucesión $(y_n) \subset Y$ es decreciente (y lo denotaremos por $y_n \searrow$) si $y_{n+1} \leq y_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$;
- una función $f\colon X \to Y$ está acotada inferiormente (superiormente) si existe algún $\xi \in Y$ tal que $\xi \leq f(x)$ ($f(x) \leq \xi$ respectivamente) para todo $x \in X$. Si f está acotada inferiormente y superiormente, diremos que está acotada.

Extenderemos la noción de semicontinuidad para una función con valores vectoriales $f\colon X \to Y$ de la siguiente forma:

- f es **semicontinua inferiormente** (**s.c.i.**) en $x_0 \in X$ si, y sólo si, para cada entorno $V \subset Y$ de $f(x_0)$, existe un entorno $U \subset X$ de x_0 tal que $f(U) \subset V + K$. Si $-f$ es s.c.i., entonces es **semicontinua superiormente** (**s.c.s.**).
- f es **cuasi-semicontinua inferiormente** (**c.-s.c.i.**) en $x_0 \in X$ si, y sólo si, para cada $\xi \in Y$ tal que $\xi \not\geq f(x_0)$, existe un entorno U de x_0 tal que $\xi \not\geq f(x)$ para cada $x \in U$. Si $-f$ es c-s.c.i., entonces es **cuasi-semicontinua superiormente** (**c.-s.c.s.**).
- f es **orden-semicontinua inferiormente** (**o.-s.c.i.**) en $x_0 \in X$ si, y sólo si, para cada sucesión $(x_n) \subset X$ convergente a x_0 para la cual existe una sucesión $(\mathcal{E}_n) \subset Y$ convergente a 0 tal que la sucesión $(f(x_n) + \mathcal{E}_n)$ es decreciente, existe una sucesión $(g_n) \subset Y$ convergente a 0 tal que $f(x_0) \leq f(x_n) + g_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Más brevemente, si $x_n \to x_0$ y $f(x_n) + o(1) \searrow$, entonces $f(x_0) \leq f(x_n) + o(1)$. f es **orden-semicontinua superiormente** (**o.-s.c.s.**) si $-f$ es o.-s.c.i.

Una función f se dice que es s.c.i. (c.-s.c.i., o-s.c.i.) si es s.c.i. (c.-s.c.i., o-s.c.i. respectivamente) en todos los puntos de X. Veamos algunos resultados para la semicontinuidad (véase [BPT],[FiQuTr]).

- f es s.c.i. en x_0 si, y sólo si, $\lim\limits_{x \to x_0} d(f(x), f(x_0) + K) = 0$.
- f es c.-s.c.i. si, y sólo si, para cada $\xi \in Y$, el conjunto $\{f \leq \xi\} := \{x \in X \,:\, f(x) \leq \xi\}$ es cerrado en X.
- Si f es s.c.i. en x_0, entonces f es c.-s.c.i. en x_0 y o.-s.c.i. en x_0.
- Las tres nociones de semicontinuidad vistas son equivalentes para funciones con valores reales.

A continuación veremos algunas propiedades sobre estas nociones de semicontinuidad, las cuales son muy usadas en las pruebas de principios variacionales con valores vectoriales.

Definición 3.1.1. *(Propiedad de la monotonía de los límites o P.M.L.) Decimos que (Y, K) satisface la P.M.L. si, y sólo si, toda sucesión $(y_n) \subset Y$ convergente a 0 tiene una subsucesión $(y'_n) \subset (y_n)$ para la cual existe una sucesión decreciente $(\bar{y}_n) \subset Y$ convergente a 0 tal que $y'_n \leq \bar{y}_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$.*

Observación 3.1.2. *Algunas condiciones suficientes para que (Y, K) satisfaga la P.M.L. son que K tenga interior no vacío o que (Y, K) sea un retículo de Banach.*

Un cono natural de ordenación es $\bar{K} := \{f \in L^p(\Omega, \mu) \,:\, f \geq 0 \ \mu\text{-c.t.p.}\}$. Algunos ejemplos de espacios con la P.M.L. son

- $(L^p(\Omega, \mu), \bar{K})$, donde (Ω, μ) es un espacio de medida y $p \in [1, +\infty[$;
- $(\mathcal{C}_0(\Omega), \bar{K})$, donde Ω es un subconjunto no vacío de $\mathbb{R}^n$.

Esta propiedad es una buena herramienta para caracterizar los distintos tipos de semicontinuidad en dimensión infinita. Es conocido que

- si (Y, K) satisface la P.M.L. y $f\colon X \to Y$ es c.-s.c.i., entonces f es o.-s.c.i.
- si (Y, K) satisface la P.M.L. y todos sus intervalos son compactos y $f\colon X \to Y$ está acotada, entonces las tres nociones de semicontinuidad vistas son equivalentes.
- si todos los intervalos de (Y, K) son compactos, entonces $f\colon X \to Y$ es continua si, y sólo si, f es o.-s.c.i. y o.-s.c.s.

Si Y tiene dimensión finita, entonces

- si $f\colon X \to Y$ está acotada inferiormente, entonces f es c.-s.c.i. si, y sólo si, f es o.-s.c.i.
- si $f\colon X \to Y$ está acotada, entonces las tres nociones de semicontinuidad vistas son equivalentes.

Es conocido que la suma de dos funciones s.c.i. es s.c.i. Veamos que condiciones necesitamos para ello con otros tipos de semicontinuidad. Dadas dos funciones $f\colon X \to Y$ y $g\colon X \to Y$,

- si f continua y g es o.-s.c.i., entonces $f + g$ es o.-s.c.i.;
- si todos los intervalos de (Y, K) son compactos (o Y tiene dimensión finita) y f y g son funciones o-.s.c.i., entonces $f + g$ es c.-s.c.i.;
- si (Y, K) verifica la P.M.L., f es c.-s.c.i. y g es s.c.i., entonces $f + g$ es c.-s.c.i.

Sea G un espacio vectorial topológico ordenado. Diremos que una función $g\colon Y \to G$ es monótona si dados $y_1, y_2 \in Y$ tales que $y_1 \geq y_2$, se tiene que $g(y_1) \geq g(y_2)$. Otro resultado destacable es el siguiente:

(D1) Sea $f\colon X \to Y$ una función s.c.i. y sea $g\colon Y \to G$ una función s.c.i. monótona, entonces $g \circ f$ también es s.c.i.

3.2. Extensión de algunos principios variacionales

3.2.1. P.V. de Deville-Godefroy-Zizler con valores vectoriales

Sea $f\colon X \to Y$ una función. El problema de minimización vectorial que consideraremos es

$$(P) \quad \text{Encontrar } \bar{x} \in X \text{ tal que } (f(\bar{x}) - K\backslash\{0\}) \cap f(X) = \emptyset.$$

Los puntos $\bar{x}$ que verifiquen (P) se llamarán **soluciones eficientes** de (P) y denotaremos por $E(f)$ el conjunto que forman.

En lo que sigue, fijaremos $e \in K\backslash\{0\}$ y $e^* \in K^* = \{y^* \in Y^* \,:\, y^*(y) \geq 0, \text{ para todo } y \in K\}$ tal que $e^*(e) = 1$ (podemos asegurar su existencia por el Teorema de Hahn-Banach). Asumamos que $e^*(+\infty) := +\infty$ y sea $f\colon X \to Y \cup \{+\infty\}$. Indiquemos algunas propiedades de e^*.

(1) Si f está acotada inferiormente, por la monotonía de e^* se sigue que $e^* \circ f\colon X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ está también acotada inferiormente.

(2) Si f es s.c.i., entonces $e^* \circ f$ es s.c.i. (por (D1)).

(3) Si $e^* \circ f$ alcanza su mínimo fuerte en $x_0 \in X$, entonces por la monotonía de e^* tenemos que $x_0 \in E(f)$.

En el siguiente teorema, denotaremos $\|f\|_\infty := \sup_{x \in X} \|f(x)\|_Y$.

Teorema 3.2.1. *(P.V. de Deville-Godefroy-Zizler con valores vectoriales) [Fi].*
Sea $(\mathcal{Y}, \|\cdot\|_{\mathcal{Y}})$ un cono convexo completo de funciones s.c.i., inferiormente acotadas con norma acotada y definidas en X con valores en Y que verifican que

(i) para todo $g \in \mathcal{Y}$, $\|g\|_\infty \leq \|g\|_{\mathcal{Y}}$;

(ii) si $g \in \mathcal{Y}$ y $x \in X$, entonces $\tau_x g\colon X \to Y$, dada por $\tau_x g(t) = g(x+t)$, pertenece a $\mathcal{Y}$ y $\|\tau_x g\| = \|g\|_{\mathcal{Y}}$;

(iii) si $g \in \mathcal{Y}$ y $\alpha \in \mathbb{R}$, entonces $g^\alpha\colon X \to Y$, dada por $g^\alpha(t) = g(\alpha t)$, pertenece a $\mathcal{Y}$;

(iv) existe una función meseta $b\colon X \to \mathbb{R}$ tal que $b(0) > 0$ y $\tilde{b} = -be$ pertenece a $\mathcal{Y}$.

Sea $f\colon X \to Y \cup \{+\infty\}$ una función propia, s.c.i. y acotada inferiormente. Entonces el conjunto de las funciones $g \in \mathcal{Y}$ tal que $e^* \circ (f+g)$ alcanza su mínimo fuerte en X es un conjunto G_δ-denso en $\mathcal{Y}$.

Observación 3.2.2. *Si $\mathring{K} \neq \emptyset$ y f tiene norma acotada, entonces f está acotada inferiormente (de esta forma cuando, $\mathring{K} \neq \emptyset$, podemos eliminar esta última hipótesis).*

Observación 3.2.3. *En [FiQuTr, Teorema 27], podemos ver otra versión similar de este Teorema donde se pide una condición más restrictiva, la continuidad de las funciones de $\mathcal{Y}$, además de que verifiquen las mismas condiciones (i), (ii), (iii) y (iv). De esta forma se obtiene una conclusión similar para funciones o.-s.c.i.*

Veamos algunas consecuencias. Previamente, necesitaremos el concepto de *porosidad.*

Definición 3.2.4. *Sea (X,d) un espacio métrico. Decimos que un subconjunto $A \subset X$ es* ***poroso*** *en X si existe $\lambda_0 \in]0,1]$ y $r_0 > 0$ tal que para cada $x \in X$ y $r \in]0,r_0]$ existe $y \in X$ tal que $\mathring{B}_{\lambda_0 r}(y) \subset \mathring{B}_r(x) \cap (X \backslash A)$. Decimos que $A \subset X$ es* ***σ-poroso*** *en X si puede escribirse como una unión numerable de conjuntos porosos en X.*

Corolario 3.2.5. *[Fi] Sea $\mathcal{Y}$ un espacio de Banach de funciones $g\colon X \to Y$ acotadas inferiormente, con norma acotada y lipschitzianas que está dotado de la norma*

$$\|g\|_{\mathcal{Y}} := \|g\|_\infty + \sup\left\{\frac{\|g(x)-g(y)\|}{\|x-y\|} \,:\, x \neq y\right\}.$$

Sea $f\colon X \to Y \cup \{+\infty\}$ una función propia, s.c.i., acotada inferiormente y con norma acotada. Entonces el conjunto

$$\tilde{G} := \{g \in \mathcal{Y} \,:\, e^* \circ (f+g) \text{ alcanza un mínimo fuerte en } X\}$$

es G_δ-denso en $\mathcal{Y}$ e $\mathcal{Y}\backslash\tilde{G}$ es σ-poroso en Y. En particular, se tiene que el conjunto $\mathcal{Y}\backslash\{g \in \mathcal{Y} \,:\, Min(f+g) := (f+g)(E(f+g)) \neq \emptyset\}$ es σ-poroso.

Corolario 3.2.6. *[Fi] Sea $f\colon X \to Y$ s.c.i. y acotada inferiormente. Entonces, para todo $\mathcal{E} > 0$, existe una función $g\colon X \to Y$ lipschitziana, acotada inferiormente con norma acotada tal que*

(i) $\|g\|_{\mathcal{Y}} < \mathcal{E}$;

(ii) $Min(f+g) := (f+g)(E(f+g)) \neq \emptyset$.

Corolario 3.2.7. *[Fi] Sea $\mathcal{Y}$ el espacio de Banach formado por el conjunto de las funciones $g\colon X \to Y$ acotadas inferiormente, con norma acotada, lipschitzianas y Fréchet diferenciables (Gâteux diferenciables) que está dotado de la norma*

$$\|g\|_{\mathcal{Y}} := \max(\|g\|_\infty, \|g'\|_\infty).$$

Supongamos además que X admite una función meseta lipschitziana que es Fréchet diferenciable (Gâteaux diferenciable respectivamente). Entonces, para toda función $f\colon X \to Y$ s.c.i., acotada inferiormente y para todo $\mathcal{E} > 0$, existe una función $g\colon X \to Y$ lipschitziana y Fréchet diferenciable (Gâteaux diferenciable respectivamente) tal que

(i) $\|g\|_{\mathcal{Y}} < \mathcal{E}$, $\|g'\|_{\mathcal{Y}} < \mathcal{E}$;

(ii) $Min(f+g) := (f+g)(E(f+g)) \neq \emptyset$.

Aprovechando la notación y los comentarios dados, podemos obtener la extensión de algunos principios variacionales para valores vectoriales.

3.2.2. Otros principios variacionales con valores vectoriales

Teorema 3.2.8. *(P.V. de Ekeland con valores vectoriales) [Fi].*
Sea $f\colon X \to Y \cup \{+\infty\}$ una función c.-s.c.i., propia y acotada inferiormente. Sean $\mathcal{E} > 0$ y $\lambda > 0$. Si $x_0 \in X$ verifica que $(e^* \circ f)(x_0) \leq \inf_X (e^* \circ f) + \mathcal{E}$, entonces existe $x_1 \in X$ tal que

1. $f(x_1) < f(x_0)$;
2. $\|x_0 - x_1\| \leq \lambda$;
3. $x_1 \in E(f_\lambda)$, *donde* $f_\lambda(x) := f(x) + \dfrac{\mathcal{E}}{\lambda}\|x_0 - x_1\| e$.

Teorema 3.2.9. *(P.V. de Stegall con valores vectoriales) [Fi].*
Sea C un subconjunto no vacío, cerrado y acotado de X con la propiedad de Radon-Nikodym. Sea $f\colon C \to Y$ una función s.c.i. acotada inferiormente. Entonces, para todo $\mathcal{E} > 0$, existe un operador lineal continuo $L\colon X \to Y$ con $\|L\| \leq \mathcal{E}$ tal que $e^* \circ (f + L)$ alcanza su mínimo fuerte en C. En particular, $Min(f + L) = (f + L)(E(f + L)) \neq \emptyset$.

3.3. Principios perturbados para equilibrios

En el caso escalar, un problema de equilibrios se define como

$$\text{hallar } \bar{x} \in X \text{ tal que } f(\bar{x}, y) \geq 0, \text{ para todo } y \in X, \tag{EP}$$

donde $f\colon X \times X \to \mathbb{R}$ es una bifunción dada. Cada punto $\bar{x}$ que satisfaga (EP) recibe el nombre de **punto de equilibrio**. Varios ejemplos de este tipo de problemas son algunos problemas de minimización (donde $f(x, y) := h(y) - h(x)$ y $h\colon X \to \mathbb{R}$), desigualdades variacionales, problemas de punto fijo, hallar equilibrios de Nash en juegos no cooperativos o problemas de complementariedad. En aras de hacer una extensión de (EP) para valores vectoriales, consideraremos los dos siguientes problemas:

$$\text{hallar } \bar{x} \in X \text{ tal que } f(\bar{x}, y) \notin -K\backslash\{0\}, \text{ para todo } y \in X, \tag{VEP}$$

o, de una manera más débil,

$$\text{hallar } \bar{x} \in X \text{ tal que } f(\bar{x}, y) \notin -\mathring{K}, \text{ para todo } y \in X, \tag{WVEP}$$

donde $f\colon X \times X \to Y$ es una bifunción dada.

Al igual que en el caso escalar, los problemas de equilibrio para valores vectoriales tienen muchas aplicaciones, sobre todo en optimización vectorial, teoría de juegos y matemáticas financieras. Los principios perturbados para equilibrios (P.P.Eq.) son resultados que afirman la existencia de una perturbación g, tan pequeña como sea posible, de forma que $f+g$ admite un punto de equilibrio vectorial. A continuación estudiaremos una nueva noción de semicontinuidad para bifunciones que nos permitirá rebajar las condiciones de los P.P.Eq. y la noción de punto de equilibrio aproximado.

3.3.1. Semicontinuidad inferior para bifunciones

Definición 3.3.1. *Una función $f\colon X\times X\to Y$ es **semicontinua inferiormente libre de coordenadas (s.c.i.-l.c.)** en $x_0\in X$ si, y sólo si, para cada sucesión $(x_n)\subset X$ convergente a x_0 para la cual existe una sucesión $(\rho_n)\subset\mathbb{R}_+\cup\{0\}$ convergente a 0 tal que para todo $n,l\in\mathbb{N}$,*

$$f(x_n,x_{n+l})\in -K+\rho_n B_Y,$$

existe una sucesión $(\omega_n)\subset\mathbb{R}_+\cup\{0\}$ convergente a 0 tal que para todo $n\in\mathbb{N}$,

$$f(x_n,x_0)\in -K+\omega_n B_Y.$$

*La bifunción f es **débilmente s.c.i.-l.c.** si esta condición se satisface para cada sucesión $(x_n)\subset X$ que converja débilmente a x_0.*

Una hipótesis clásica para bifunciones que necesitaremos es la siguiente.

Definición 3.3.2. *Una bifunción $f\colon X\times X\to Y$ se dice que tiene **diagonal nula** si, y sólo si, $f(x,x)=0$, para todo $x\in X$.*

Mostremos algunos resultados importantes que caracterizan esta definición (para verlos con más detalle, puede consultarse [FiQu]). Dada una función $f\colon X\times X\to Y$ y $x_0\in X$,

- si $f(x,y):=h(y)-h(x)$, donde $h\colon X\to Y$, entonces f es s.c.i.-l.c. en x_0 si, y sólo si, h es o-s.c.i. en x_0;
- si $f(x,\cdot)$ es s.c.i. en x_0 para todo $x\in X$, entonces f es s.c.i.-l.c. en x_0;
- si $\mathring{K}\neq\emptyset$ y $f(x,\cdot)$ es c.-s.c.i. en x_0 para todo $x\in X$, entonces f es s.c.i.-l.c. en x_0;
- si Y tiene dimensión finita, f está acotada inferiormente y $f(x,\cdot)$ es c.-s.c.i. en x_0 para todo $x\in X$, entonces f es s.c.i.-l.c. en x_0;
- si f tiene diagonal nula y $f(\cdot,x_0)$ es s.c.s. en $x_0\in X$, entonces f es s.c.i.-l.c. en x_0;
- si f es s.c.i.-l.c. y $g\colon X\times X\to Y$ es una bifunción continua que tiene diagonal nula, entonces $f+g$ es s.c.i.-l.c.

3.3.2. Puntos de equilibrio aproximados

Veamos algunas definiciones que nos servirán para ver las aplicaciones de los principios perturbados para equilibrios.

Definición 3.3.3. *Un punto $x_0 \in X$ se dice que es un **$\mathcal{E}$-punto de equilibrio vectorial** de f en la dirección de $e \in K\backslash\{0\}$ si*

$$f(x_0, y) + \mathcal{E}\|x_0 - y\|e \notin -K, \text{ para todo } y \in X\backslash\{x_0\}.$$

Definición 3.3.4. *Una bifunción $f\colon X \times X \to Y$ es **transitiva inferiormente** si, y sólo si, $f(x,z) \leq f(x,y) + f(y,z)$, para todo $x, y, z \in X$.*

Definición 3.3.5. *Sea $f\colon X \times X \to Y$ una bifunción. Un punto x_0 se dice que es un **$\mathcal{E}$-punto de equilibrio aproximado** de f en la dirección de $e \in K\backslash\{0\}$ si, y sólo si, existe $\rho \in \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$ tal que*

$$f(x_0, x) + \mathcal{E}e + \xi \notin -K, \text{ para todo } x \in X,\ \xi \in \rho B_Y.$$

La siguiente proposición sirve para probar la existencia y localizar puntos de equilibrio aproximados.

Proposición 3.3.6. *[FiQu] Sea $f\colon X \times X \to Y$ una bifunción transitiva inferiormente que tiene diagonal nula. Asumamos que $f(x,\cdot)$ está acotada inferiormente para todo $x \in X$. Entonces, para todo $\mathcal{E} \geq 0$ y todo $e \in K\backslash\{0\}$, existe $x_0 \in X$ un $\mathcal{E}$-punto de equilibrio aproximado de f en la dirección de e. Además, dados $\bar{x} \in X$ y $\delta \geq 0$, entonces $f(\bar{x}, x_0) \in \delta B_Y - K$.*

3.3.3. Resultados

Ahora ya tenemos las herramientas necesarias para introducir los principios perturbados para equilibrios (P.P.Eq.).

Teorema 3.3.7. *(P.P.Eq. de Deville-Godefroy-Zizler) [FiQu].*
Sea $(Z, \|\cdot\|_Z)$ un espacio de Banach de bifunciones $g\colon X \times X \to Y$ continuas con norma acotada y acotadas inferiormente tales que

1. $\|g\|_Z \geq \|g\|_\infty := \sup_{x,y \in X} \|g(x,y)\|_Y$;
2. *si $g \in Z$ y $x, y \in X$, entonces $\tau_t g\colon X \times X \to Y$, dada por $\tau_t g(t) := g(x-t, y-t)$, pertenece a Z y $\|\tau_t g\|_Z = \|g\|_Z$;*
3. *si $g \in Z$ y $\alpha \in \mathbb{R}$, entonces $g^\alpha\colon X \times X \to Y$, dada por $g^\alpha(x,y) := g(\alpha x, \alpha y)$, pertenece a Z;*
4. *existe una función meseta continua y con norma acotada, $b\colon X \to \mathbb{R}$, y un elemento $e \in K\backslash\{0\}$ tal que $b(0) > 0$ y $\hat{b}\colon X \times X \to Y$, dada por $\hat{b}(x,y) = (b(y) - b(z))e$, pertenece a Z.*

Sea $f\colon X \times X \to Y$ una bifunción s.c.i.-l.c., transitiva inferiormente con diagonal nula tal que $f(x,\cdot)$ está acotada inferiormente para todo $x \in X$. Entonces el conjunto de todas las funciones $g \in Z$ tales que $f + g$ admite un punto de equilibrio es denso en Z.

Observación 3.3.8.

(a) Es posible localizar los puntos de equilibrio de la bifunción $f + g$. Más concretamente, para todo $\mathcal{E} \geq 0$, existe $\mathcal{E}_1 \geq 0$ tal que si x_1 es un $\mathcal{E}_1$-punto de equilibrio aproximado de f en la dirección de e, entonces existen $g \in Z$ y $\bar{x} \in X$ tales que $\|g\|_Z \leq \mathcal{E}, \|\bar{x} - x_1\| \leq \mathcal{E}$ y $\bar{x}$ es un punto de equilibrio de $f + g$.

(b) Como $(f+g)(\bar{x},\bar{x}) = 0$, tenemos que $\bar{x}$ es una solución eficiente de la función $(f+g)(\bar{x},\cdot)\colon X \to Y$. Además, se puede probar que $\bar{x}$ es fuertemente eficiente, es decir, si $(w_m) \subset \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$ y $(u_m) \subset X$ verifican que $(f + g)(\bar{x}, u_m) \leq \omega_m$ para todo $m \in \mathbb{N}$, entonces $u_m \to \bar{x}$.

(c) Si f está definida por $f(x,y) = h(y) - h(x)$, donde $h\colon X \to Y$ es una función o.-s.c.i. y acotada inferiormente, entonces existe una perturbación continua, $\tilde{g}$, tan pequeña como queramos, tal que $h + \tilde{g}$ admite un solución (fuertemente) eficiente en X.

Si consideramos el espacio de Banach $\tilde{Z}$ de las funciones acotadas y lipschitzianas, $g\colon X \to \mathbb{R}$, dotado de la norma $\|g\|_{\tilde{Z}} := \|g\|_\infty + \|g\|_L$ donde $\|g\|_L := \sup\left\{\dfrac{|g(x)-g(y)|}{\|x-y\|} : x,y \in X, x \neq y\right\}$, obtenemos aplicando el Teorema 3.3.7 el siguiente resultado.

Corolario 3.3.9. *(P.P.Eq. de Ekeland) [FiQu]. Sea $f\colon X \times X \to Y$ una bifunción s.c.i.-l.c., transitiva inferiormente, con diagonal nula tal que $f(x,\cdot)$ está acotada inferiormente para todo $x \in X$. Entonces, para todo $\mathcal{E} \geq 0$ y $e \in K\backslash\{0\}$, existe $\mathcal{E}_1 \geq 0$ tal que si x_1 es un $\mathcal{E}_1$-punto de equilibrio aproximado de f en la dirección de e, se tiene que existe $\bar{x} \in X$ tal que*

(a) $f(\bar{x}, y) + \mathcal{E}e \notin -K$, para todo $y \in X$;

(b) $\|\bar{x} - x_1\| \leq \mathcal{E}$;

(c) $\bar{x}$ es un punto de equilibrio de equilibrio de $f + \mathcal{E}\|\cdot - \cdot\|e$, i.e.,

$$f(\bar{x}, y) + \mathcal{E}\|\bar{x} - y\|e \notin -K, \text{ para todo } y \in X\backslash\{\bar{x}\}.$$

Si consideramos el espacio de Banach $\tilde{Z}$ de las funciones acotadas, lipschitzianas y Gâteaux diferenciables (Fréchet diferenciables), $g\colon X \to \mathbb{R}$, dotado de la norma $\|g\|_D := \|g\|_\infty + \|g'\|_\infty$, obtenemos aplicando el Teorema 3.3.7 anterior el siguiente resultado.

Corolario 3.3.10. *[FiQu] Sea X un espacio de Banach que admite una función meseta lipschitziana y Gâteaux diferenciable (Fréchet diferenciable). Entonces, para toda bifunción $f\colon X \times X \to Y$ s.c.i.-l.c., transitiva inferiormente, con diagonal nula tal que $f(x,\cdot)$ está acotada inferiormente para todo $x \in X$*

y para todo $\mathcal{E} \geq 0$, existe una bifunción $g\colon X \times X \to Y$ lipschitziana y Gâteaux diferenciable (Fréchet diferenciable respectivamente) tal que

(i) $\|g\|_\infty \leq \mathcal{E}$;

(ii) $\|g'\|_\infty \leq \mathcal{E}$;

(iii) $f + g$ *admite un punto de equilibrio.*

3.3.4. Aplicaciones para la existencia de equilibrios vectoriales

Estas nuevas herramientas nos permiten obtener algunos resultados de existencia (véase [BKP]) con condiciones más débiles.

Teorema 3.3.11. *[FiQu] Sean C un subconjunto compacto de X y $f\colon C \times C \to Y$ una bifunción s.c.i.-l.c., transitiva inferiormente, con diagonal nula tal que $f(x,\cdot)$ está acotada inferiormente para todo $x \in C$. Entonces, el conjunto de soluciones para el problema (WVEP) para f en $C \times C$ es no vacío.*

Teorema 3.3.12. *[FiQu] Sean X un espacio de Banach reflexivo y $f\colon X \times X \to Y$ una bifunción s.c.i.-l.c., transitiva inferiormente, con diagonal nula tal que*

1. *$f(x,\cdot)$ está acotada inferiormente para todo $x \in X$;*
2. *el conjunto de nivel $L(x) := \{y \in X \,:\, f(x,y) \in -K\}$ es débilmente cerrado para todo $x \in X$;*
3. *(condición de coercividad) existe un conjunto compacto $C \subset X$ tal que existe $x_0 \in X$ de forma que para todo $x \in X \backslash C$, existe $y \in \mathring{B}_{\|x-x_0\|}(x_0)$ verificando que $f(x,y) \in -K$.*

Entonces, el conjunto de soluciones del problema (WVEP) es no vacío.

Teorema 3.3.13. *[FiQu] Sean X un espacio de Banach reflexivo y $f\colon X \times X \to Y$ una bifunción débilmente s.c.i.-l.c., transitiva inferiormente, con diagonal nula tal que*

1. *$f(x,\cdot)$ está acotada inferiormente para todo $x \in X$;*
2. *(condición de coercividad) para toda sucesión $(x_n)_{n\geq 1} \subset X$ tal que $\|x_n\| \to +\infty$, existen $\delta \geq 0$ y una subsucesión $(x_{n_k})_{k\geq 1} \subset (x_n)_{n\geq 1}$ tal que para todo $k \in \mathbb{N}$, existe $l \in \mathbb{N}$ de forma que $f(x_{n_k}, x_{n_{k+1}}) \notin -K + \delta B_Y$.*

Entonces, el conjunto de soluciones del problema (WVEP) es no vacío.

Observación 3.3.14. *La condición 2. puede reemplazarse por esta otra: existen un conjunto acotado $C \subset X$ y $k_0 \in K \backslash \{0\}$ tales que para todo $x \in X \backslash C$, existe $y \in X$ de forma que $f(x,y) \in -k_0 - K$.*

Bibliografía

[Am] A. Ambrosetti, *Variational methods and nonlinear problems: classical results and recent advances.* In M. Matzeu and A. Vignoli, editors, Topological nonlinear analysis, volume 15 of Progr. Nonlinear Differential Equations Appl., Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1-36 (1995).

[AmRa] A. Ambrosetti and P. H. Rabinowitz, *Dual variational methods in critical point theory and applications.* J. Functional Analysis, 14:349-381, (1973).

[B] C. Di Bernardi, *On support points and continuous extensions*, Arch. Math. 93:369-378 (2009).

[Banach] Banach, S. *Sur les opérations dans les ensembles abstraits et leur application aux équations intégrales.* Fund. Math. 3:133-181, (1922).

[BD] H. Ben-El-Mechaiekh & R. W. Dimand, *A simpler proof of the Von Neumann Minimax Theorem*, The American Mathematical Monthly, Vol. 118, No. 7:636-641 (2011).

[BenLin] Y. Benyamini & J. Lindenstrauss, *Geometric nonlinear functional analysis*, American Mathematical Society, Colloquium Publications, V. 48 (2000).

[BiPh] E. Bishop & R. R. Phelps, *A proof that every Banach space is subreflexive*, Amer. Math. Soc. Bull., 67:97-98 (1961).

[BKP] M. Bianchi, G. Kassay & R. Pini, *Ekeland's principle for vector equilibrium problems*, Nonlinear anal. 66:1459-1464, (2007).

[BlPi] F. S. De Blasi & G. Pianigiani, *Remarks on Hausdorff continuous multifunctions and sections*, Commentationes Math. Univ. Carolinae 24 (3), (1983).

[Boll] B. Bollobás *An extension to the theorem of Bishop and Phelps*, Bull. London Math. Soc., 181-2 (1970).

[Boll2] B. Bollobás, *Linear analysis, an introductory course*, Cambridge Mathematical Textbooks, (1990).

[BP] J. M. Borwein & D. Preiss, *A smooth variational principle with applications to subdifferentiability and to differentiability of convex functions*, Trans. Amer. Math. Soc. 303:517-527, (1987).

[BPT] J.M. Borwein, J. Penot & M. Théra, *Conjugate convex operators*, J. Math. Anal. Appl. 102:399-414, (1984).

[Bre] H. Brézis, *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*, Springer (2010).

[BrRo] A. Brϕndsted & R. T. Rockafellar, *On the subdifferentiability of convex functions*, Proc. Amer. Math. Soc., 16:605-611, (1965).

[BV] C. Di Bernardi & L. Veselý, *On support points and support functionals of convex sets*, Israel Jorunal of Mathematics, 171:15-27, (2009).

[BZ] J. M. Borwein & Q. J. Zhu, *Techniques of Variational Analysis*, Canadian Mathematical Society Books in Mathematics, Springer (2005).

[CaKi] J. Caristi & W. A. Kirk, *Mappings theorems in metric and Banach spaces*, Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. Sci. Math. Astronom. Phys., 23:891-894, (1975).

[Cl] F. H. Clarke, *Pointwise contraction criteria for the existence of fixed points*, Can Math Bull. 21(1):7-11, (1978).

[Dan] J. Daneš, *A geometric theorem useful in nonlinear functional analysis*, Boll. Un. Mat. Ital. (4), 6:369-375, (1972).

[D] R. Deville, *Smooth variational principles and non-smooth analysis in Banach spaces*, F. H Clarke et al. (ed.), Nonlinear analysis, differential equations and control. Proceedings of the NATO Advanced Study Institute and séminaire de mathématiques supérieures. Kluwer Academic Publishers. NATO ASI Ser., Ser. C, Math. Phys. Sci. 528:369-405, (1999).

[DG] R. Deville & N. Ghoussoub, *Perturbed Minimization Principles and Applications*, Handbook of Banach spaces Vol.1, Chapter 10, Editors W. B. Johnson and J. Lindenstrauss, Elsevier (2003).

[DGZ1] R. Deville, G. Godefroy, & V. Zizler, *Un principle variationnel utilisant des functions bosses*, C.R. Acad. Sci. Paris 312 Serie I (1991), 281-286.

[DGZ2] R. Deville, G. Godefroy & V. Zizler, *A smooth variational principle with applications to Hamilton-Jacobi equations in infinite dimensions*, J. Funct. Anal., 111:197-212, (1993).

[DGZ3] R. Deville, G. Godefroy & V. Zizler, *Smoothness and renormings in Banach spaces with applications to Hamilton-Jacobi equations in infinite dimensions*, Pitman Monographs Surveys Pure Appl. Math. 64, (1994).

[DoKi] D. Downing & W. A. Kirk, *A generalization of Caristi's theorem with applications to nonlinear mapping theory*, Pacific J. Math., 69:339-346, (1977).

[DP] R. Deville & A. Procházka, *A parametric variational principle and residuality*, J. Func. Anal., 256:3568-3587, (2009).

[Eke1] I. Ekeland, *Sur les problèmes variationnels*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B 275:1057-059, (1972).

[Eke2] I. Ekeland, *On the variational principle*, J. Math. Anal.Appl. 47:324-353, (1974).

[Eke3] I. Ekeland, *Nonconvex minimization problems*, Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.), 1:443-474, (1979).

[Evans] L. C. Evans, *Partial differential equations*, American Mathematical Society, (1998).

[Fa] M. Fabian, *On minimum principles*, Acta Polytechnica, 20:109-118, (1983).

[FaZi] M. Fabian & V. Zizler, *A 'nonlinear proof of Pitt's compactness theorem'*, Proc. Amer. Math. Soc., 131:3693-3694, (2003).

[FHHMZ] M. Fabian, P. Habala, P. Hájek, V. Montesinos & V. Zizler, *Banach Space Theory: The Basis for Linear and Nonlinear Analysis*, Canadian Mathematical Society Books in Mathematics, Springer, (2010).

[Fi] C. Finet, *Perturbed minimization principles in partially ordered Banach spaces*, Prepint #2, Institut de Mathématique et d'Informatique (Université de Mons-Hainaut), (2000).

[FiQu] C. Finet & L. Quarta, *Vector-valued perturbed equilibrium problems*, J. Math. Anal. Appl. 343:531-545, (2008).

[FiQuTr] C. Finet, L. Quarta & C. Troestler, *Vector-valued variational principles*, Nonlinear Analysis 52:197-218, (2003).

[G1] P. G. Georgiev, *Parametric Borwein-Preiss variational principle and applications*, American Mathematical Society, 3211-3225, (2005).

[G2] P. G. Georgiev, *Parametric Ekeland's variational principle*, Applied Mathematics Letters 14:691-696, (2001).

[G3] P. G. Georgiev, *Parameterized variational inequalities*, J. Glob. Optim. 47:457-462, (2010).

[Gog] G. Goga, *Some equivalent geometrical results with Ekeland's variational principle*, An. St. Univ. Ovidius Constanta Vol. 13(1):79-88, (2005).

[GP] N. Ghoussoub & D. Preiss, *A general mountain pass principle for locating and classifying critical points*, Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire, 6:321-330, (1989).

[H] A. H. Hamel. *Phelps' lemma, Daneš drop theorem and Ekeland's principle in locally convex spaces*, Proc. Amer. Math. Soc., 131:3025-3038, (2003).

[IL] A. D. Ioffe & V. L. Levin, *Subdifferentials of convex functions*, Trudy Moskov. Mat Obšč, (1972).

[LiSh] Y. X. Li and S. Z. Shi. *A generalization of Ekeland's $\mathcal{E}$-variational principle and of its Borwein-Preiss smooth version*, Preprint (1991).

[Lo] V. Lomonosov, *A counterexample to the Bishop-Phelps theorem in complex spaces*, Israel Journal of Mathematics 115:25-28, (2000).

[Mich] E. Michael, *Continous selections I*, Annals fo Mathematics 63:361-382, (1956).

[PS] R. S. Palais & S. Smale, *A generalized Morse theory*, Bull. Amer. Math. Soc., 70:165-172, (1964).

[PS-G] A. Procházka & L. Sánchez-González, *A parametric variational principle*, Preprint, (2010).

[Pen] J.P. Penot, *The drop theorem, the petal theorem and Ekeland's variational principle*, Nonlinear Anal., 10:813-822 (1986).

[Phe] R. R. Phelps, *Convex Functions, Monotone Operators and Differentiability*, Lectures Notes in Mathematics, Springer-Verlag (1989).

[Ra] P. H. Rabinowitz, *Critical point theory and applications to differential equations: a survey*, In M. Matzeu and A. Vignoli, editors, Topological nonlinear analysis, volume 15 of Progr. Nonlinear Differential Equations Appl., 464-513. Birkhäuser Boston, Boston, MA, (1995).

[Sion] M. Sion, *On general minimax theorems*, Pacific J. Math. 8:171-176, (1958).

[Ste1] C. Stegall, *Optimization of Functions on Certain Subsets of Banach Spaces*, Math. Ann. 236:171-176, (1978).

[Ste2] C. Stegall, *Optimization and Differentiation in Banach Spaces*, Linear algebra and its applications, 84:191-211, (1996).

[Ves] L. Veselý, *A parametric smooth variational principle and support properties of convex sets and functions*, J. Math. anal. Appl. 350:550-561, (2009).

[West] J. D. Weston, *A characterization of metric completeness*, Proc. Amer. Math. Soc. 64(1):186-188 (1977).