Análisis matemático.

Hoja de Problemas nº 1 (Tema 1)

1. Prueba por inducción:

   i) $1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + n^3 = \left(\dfrac{n(n+1)}{2}\right)^2$

   ii) Desigualdad de Bernouilli: Si $a \geq -1$, entonces $(1 + a)^n \geq 1 + na$.

   iii) Todos los números de la forma $3^{2n} - 1$ son múltiplos de 8.

   iv) $2n^3 - 3n^2 + n + 31$ es siempre un número positivo.

   v) $1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+...+\dfrac{1}{2^n} \geq 1+\dfrac{n}{2}$.

   vi) $\cos x \cos 2x \cos 2^2x ... \cos 2^{n-1}x = \dfrac{\operatorname{sen} 2^n x}{2^n \operatorname{sen} x}$.

   vii) $11^{n+2} + 12^{2n+1}$ es divisible por 133 sea cual fuere n.

2. a) Prueba que $\sqrt{3}$ es un número irracional.

   b) Prueba que $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ es un número irracional.

   c) Decimos que un número real es algebraico si es raíz de un polinomio (no nulo) de coeficientes enteros. Demuestra que $1-\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}$ es un número algebraico.

3. a) Demuestra que $\log_{10}7$ es irracional.

   b) Prueba que los únicos números naturales n para los que $\log_{10}n$ es racional son las potencias de 10 de exponente entero no negativo.

4. Resolver las siguientes desigualdades:

   i) $-5(2-x) < 15$; ii) $x^2 - 1 < 0$; iii) $x+\dfrac{1}{x} \geq 0$; iv) $x^3(x-2)(x+3)^2 < 0$.

   v) $\dfrac{x+3}{2x+5} \geq 3$; vi) $x^2 - 5x + 9 > x$; vii) $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{1-x} > 0$;

5. Sea $p \in \mathbb{Q}$, $p \neq 0$ y $x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$. Prueba que $p + x$ y px son números irracionales.

6. Calcula cotas superiores e inferiores, supremo e ínfimo, máximo y mínimo (si existen) de los siguientes conjuntos.

   i) $\{2, 2'2, 2'22, 2'222, ...\}$; ii) $\mathbb{Z}$; iii) $\{x \in \mathbb{R} / x^2 + 5x - 6 \leq 0\}$; iv) $\{r \in \mathbb{Q} / 2r^3 - 1 < 15\}$;

   v) $\{x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q} / x^2 + x < 2\}$; vi) $\{x \in \mathbb{R} / x^2 - 2x < 0\}$; vii) $\{1 - \dfrac{1}{n}, n \in \mathbb{N}\}$.

7. Demuestra que si x es un número positivo, entonces $x+\dfrac{1}{x} \geq 2$.

8. Demuestra que si a y b son números reales positivos con $a > b$, se verifica:

   $$\frac{2ab}{a+b} < \sqrt{ab} < \frac{a+b}{2} < \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}.$$

9. Calcular:

a) $\bigcap_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}, 2+\frac{1}{n}\right)$; b) $\bigcup_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{n}, 2+\frac{1}{n}\right)$; c) $\bigcup_{n=1}^{\infty}\left[1+\frac{1}{n}, 2+\frac{1}{n}\right)$.

10. Encuentra los números reales x para los que:

i) $|x^2 + x - 6| = 2$; ii) $|x - 1|\,|x^2 + x + 1| = 0$; iii) $|x - 1| = |x - 4|$; iv) $|x| < 1$; v) $|3x + 1| \geq 1$;

vi) $|x^2 - x| > 1$; vii) $|x + 4| < 2$; viii $|x + 1| < |x - 3|$; ix) $\frac{|x-1|}{|x+1|} = 1$; x) $\big|1 - |x|\big| = 4$;

xi) $\big|2 + |x - |x||\big| = 3$; xii) $|x - 1| + |x - 2| > 1$; xiii) $|x - 1| + |x + 1| < 1$; (xiv) $|x - 1|\,|x - 2| = 3$.

11. Representa en $\mathbb{R}^2$ los siguientes conjuntos:

$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / |x| < 1\}$; $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / |x| = y\}$ $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / |3x - 1| \geq y\}$;

$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / |x^2 - x| + x > y\}$; $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x > 0\}$;

$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / |x| > 0$ e $|y| > 2\}$; $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 /\ x = \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}\}$;

$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 < 1\}$; $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + 2y^2 \leq 2\} \setminus \{(0, 0)\}$;

$\left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy > 1\right\}$;

$\left\{\left(x, y\right) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - y^2 < 1\right\}$;

Análisis matemático. Hoja nº 2 (Tema 2)

1. Describir los conjuntos de números complejos que verifican las siguientes condiciones:

   a) $\overline{z} = -z$; b) $\overline{z} = z^{-1}$; c) $|z-a| < 1$ con $a \in \mathbb{C}$ fijo; d) $|z-a| = |z-b|$ con $a, b \in \mathbb{C}$ fijo;

   e) $\left|\dfrac{z-3}{z+3}\right| = 2$.

2. Determinar, en cada caso, los números reales x e y que verifican:

   a) $x + yi = \dfrac{1-\sqrt{3}\,i}{2}$; b) $x + yi = |x - yi|$; c) $\sum_{k=0}^{100} i^k = |x - yi|$.

3. Hallar el módulo y el argumento de los siguientes números complejos:

   a) $3 + 4i$; b) $(3 + 4i)^{-1}$; c) $(3 + 4i)^{-6}$; c) $(1 + i)^{12}$; d) $|3 + 4i|$; e) $\left(\dfrac{1+i}{1-i}\right)^8$;

   f) $\left(\dfrac{\cos\alpha + i\sin\alpha}{\cos\beta + i\sin\beta}\right)^m$, $m \in \mathbb{N}$.

4. Probar que:

   a) $|z| = |\overline{z}|$; b) $\overline{\overline{z}} = z$; c) $\overline{z+w} = \overline{z} + \overline{w}$; d) $\overline{zw} = \overline{z}\,\overline{w}$; e) $\overline{z^{-1}} = \left(\overline{z}\right)^{-1}$;

   f) $z\overline{z} \in (0, \infty)$; g) $\operatorname{Re} z = \dfrac{z + \overline{z}}{2}$; h) $\operatorname{Im} z = \dfrac{z - \overline{z}}{2i}$.

5. Halla todos los valores de las siguientes raíces:

   a) $\sqrt[3]{1}$; b) $\sqrt[3]{i}$; c) $\sqrt[4]{-1}$; d) $\sqrt{1-i}$; e) $\sqrt[3]{1+i}$; f) $\sqrt[6]{1-\sqrt{3}\,i}$.

6. Determina todos los números complejos z que verifican:

   a) $z^2 = 3 - 4i$; b) $z^2 + zi + 2 = 0$; c) $z^4 - 2z^2 + 4 = 0$; d) $z^3 - |z|^2 = 0$; e) $z^n = \overline{z}$;

   f) $z^3 + 8 = 0$ y z cae dentro del recinto del plano complejo definido por $|z + 1| < 2$.

7. a) Sea $z \neq 1$ con $|z| = 1$. Probar que $\dfrac{1+z}{1-z}$ es imaginario puro.

   b) Sea z un número complejo de módulo 1. Probar que el número $z + z^{-1}$ es real.

Análisis matemático. Ingeniería Informática. Hoja nº 3 (Tema 3)

1. En cada uno de los casos siguientes, encontrar un $\delta > 0$ tal que $|f(x) - l| < \varepsilon$ para todo x que satisfaga $0 < |x - a| < \delta$.

   a) $f(x) = 2x + 3$, $a = 1$, $l = 5$; b) $f(x) = \operatorname{sen} x$, $a = 0$, $l = 0$; c) $f(x) = \sqrt{x}$, $a = 1$, $l = 1$.

2. Demostrar que $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0}{b_m x^m + ... + b_1 x + b_0}$ es un número real si y sólo si $m \geq n$.

   ¿Cuánto vale este límite?

3. Estudiar la existencia de $\lim\limits_{x\to a} f(x)$, y calcularlo, cuando exista, en los siguientes casos:

   a) $a = 1$ y $f(x) = \dfrac{x^3 + x^2 - 5x + 3}{x^3 - 4x^2 + 5x - 2}$; b) $a = 0$ y $f(x) = \dfrac{\sqrt{1+2x} - \sqrt{1+3x}}{x + 2x^2}$;

   c) $a = 0$ y $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2+1} - 1}{\sqrt{x^2+16} - 4}$; d) $a = 0$ y $f(x) = \cos\dfrac{1}{x}$; e) $a = 0$ y $f(x) = x\cos\dfrac{1}{x}$;

4. Si existe $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ y vale b, probar que:

   a) Si $c > b$, $\exists\ \delta > 0$ tal que si $0 < |x - a| < \delta$, entonces $f(x) < c$.

   b) Si $c < b$, $\exists\ \delta > 0$ tal que si $0 < |x - a| < \delta$ entonces $f(x) > c$.

5. Sea $f : A \to \mathbb{R}$ de modo que existe $\lim\limits_{x\to a} |f(x)|$. ¿Es cierto que existe $\lim\limits_{x\to a} f(x)$?

6. Sea $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ monótona creciente. Probar que:

   $\lim\limits_{x\to c^-} f(x) = \sup\ \{f(x) / x < c\} \leq \inf\ \{f(x) / x > c\} = \lim\limits_{x\to c^+} f(x)$.

7. Estudiar la continuidad de las siguientes funciones en los puntos donde se indica:

   a) $f(x) = \dfrac{x+3}{x^2 - 9}$ si $x \neq 3, -3$, $f(-3) = 0$, $f(3) = 1$. Estudiar en $\mathbb{R}$.

   b) $f(x) = \operatorname{sen}\dfrac{1}{x}$ si $x \neq 0$, $f(0) = 1$. Estudiar en $\mathbb{R}$.

8. Sean $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$ números reales distintos. Encontrar una función polinómica f de grado $n - 1$ tal que $f(x_i) = a_i$, donde $a_1, a_2, ..., a_n$ son números dados. Dar un polinomio P de grado ≤ 3 tal que $P(1) = 3$, $P(0) = 7$, $P\left(\dfrac{1}{2}\right) = 2$ y $P\left(\dfrac{1}{3}\right) = \dfrac{1}{4}$.

9. Sea f la función $f(x) = 0$ si $x \in [0, 1] \setminus Q$ y $f(p/q) = \dfrac{1}{q}$ si $p/q \in [0, 1]$ y es una fracción irreducible. Sea $g(a) = \lim\limits_{x\to a} f(x)$. ¿Es la función f continua en $[0, 1]$? ¿Lo es g?

10. Construir $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua que verifique:

    $0 \leq f(x) \leq 1$ para todo $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = 0$ si $|x| \geq 2$ y $f(x) = 1$ si $|x| < 1$.

11. Probar que si f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es continua, inyectiva y $f(a) \le f(b)$, con $a < b$, entonces $f\left([a,b]\right) = \left[f(a),\ f(b)\right]$.

12. Sean f, g : $[a, b] \to \mathbb{R}$ ambas continuas con $f(a) < g(a)$ y $f(b) > g(b)$. Demostrar que existe $x \in [a, b]$ tal que $f(x) = g(x)$.

13. Sea F: $[0, \infty) \to [0, \infty)$ continua, con $F(0) > 0$ y tal que si $0 < \alpha \le \beta$, es $F(\beta) - F(\alpha) \le \frac{1}{2}(\beta - \alpha)$. Probar que existe un único $a > 0$ tal que $F(a) = a$.

14. a) Probar que la ecuación $x^{15} + \frac{x^4 - 17x + 13}{(x^2-1)^2} = 0$ tiene al menos una solución.

    b) Si $\alpha < \beta$, probar que la ecuación $\frac{x^2+1}{x-\alpha} + \frac{x^6+1}{x-\beta} = 0$ tiene al menos una solución en el intervalo (α, β).

    c) Probar que la ecuación $x^3 - 37x^2 - 8 = 0$ tiene una raíz mayor que 37. Calcularla con un error menor que 10^{-3}.

15. Para cada una de las funciones polinómicas siguientes f, hallar un entero n tal que $f(x) = 0$ para algún $x \in [n, n + 1]$.

    a) $f(x) = x^3 - x + 3$; b) $f(x) = x^5 + 5x^4 + 2x + 1$; c) $f(x) = x^5 + x + 1$; d) $f(x) = 4x^2 - 4x + 1$.

16. Sea $P(x)$ una función polinómica tal que el coeficiente de la potencia de x de mayor grado es 1. Probar que:

    a) Si P es de grado par, entonces $\lim\limits_{x \to \pm\infty} P(x) = +\infty$; b) Si P es de grado impar, entonces $\lim\limits_{x \to -\infty} P(x) = -\infty$ y $\lim\limits_{x \to +\infty} P(x) = +\infty$.

17. Sea $P(x)$ una función polinómica de grado par. Probar que existe $y \in \mathbb{R}$ tal que $P(y) \le P(x)$ ó $P(y) \ge P(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

18. Sea f una función continua sobre $\mathbb{R}$ de modo que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ y $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$. Probar que f toma todos los valores reales.

19. Consideremos la ecuación $x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1x + a_0 = 0$ con n impar y los a_i reales. Probar que dicha ecuación tienen al menos una raíz real.

20. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua con $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = l_1$ y $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = l_2$, $l_1, l_2 \in \mathbb{R}$.

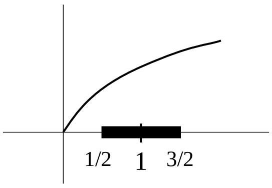
    a) Probar que f está acotada.

    b) Probar que si $l_1 = l_2$, entonces f tiene máximo y/o mínimo.

21. Sea d una dirección en el plano y T un triángulo. Probar que existe una recta con dirección d de modo que divide al triángulo T en dos partes de igual área.

Desarrollo de las soluciones de algunos de los problemas propuestos

1. c) $|\, f(x) - \rho| = |\sqrt{x} - 1|$ es lo que tenemos que hacer menor que un $\varepsilon > 0$ dado previamente. Hagamos manipulaciones en $|\sqrt{x} - 1|$ para que aparezca el $|x - 1|$ que haremos pequeño. Obviamente $|\sqrt{x}-1| = \dfrac{|x-1|}{|\sqrt{x}+1|}$ y todo nuestro problema se reduce a acotar $|\sqrt{x} + 1|$. Esbocemos la gráfica de $y = \sqrt{x}$:



Si, por ejemplo $|x - 1| < \dfrac{1}{2}$, x está en la zona rayada ,

con lo que $\sqrt{x} > \sqrt{\dfrac{1}{2}}$ y, entonces, $|\sqrt{x}+1| > 1 + \sqrt{\dfrac{1}{2}} > \dfrac{3}{2}$.

Así pues, si $|x - 1| < \dfrac{1}{2}$, entonces $|\sqrt{x}-1| = \dfrac{|x-1|}{|\sqrt{x}+1|} < \dfrac{2}{3}|x-1|$. Un vez que hemos escrito

$|\, f(x) - \rho| < K\,|x - a|$, el problema está resuelto pues dado $\varepsilon > 0$, tomo $\delta = \min\left\{\dfrac{1}{2}, \dfrac{\varepsilon}{\frac{2}{3}}\right\}$ y, si

$|x - 1| < \delta$, en particular será menor que $\dfrac{1}{2}$, con lo que $|\sqrt{x}-1| < \dfrac{2}{3}|x-1|$ y, por ser

$\delta < \dfrac{\varepsilon}{\frac{2}{3}}$, sigue que si $|x - 1| < \delta$, $|\sqrt{x}-1| < \dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{\varepsilon}{\frac{2}{3}} = \varepsilon$.

3. a) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^3+x^2-5x+3}{x^3-4x^2+5x-2}$. Como tanto numerador como denominador son funciones continuas que se anulan en $x = 1$, el límite de ambos en 1 es 0 por lo que no podemos aplicar el resultado de que el límite del cociente es el cociente de los límites. Pero ambos polinomios son divisibles por $x - 1$, por lo que podemos escribir

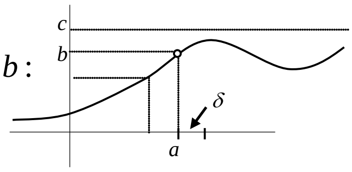
$$\lim_{x\to1}\frac{x^3+x^2-5x+3}{x^3-4x^2+5x-2} = \lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x^2+2x-3)}{(x-1)(x^2-3x+2)} = \lim_{x\to1}\frac{x^2+2x-3}{x^2-3x+2} =$$

$$= \lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x+3)}{(x-1)(x-2)} = \lim_{x\to1}\frac{x+3}{x-2} = -4.$$

c) $$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{x^2+16}-4} = \lim_{x\to0}\frac{\left(\sqrt{x^2+1}-1\right)\left(\sqrt{x^2+16}+4\right)}{x^2} = \lim_{x\to0}\frac{\left(\sqrt{x^2+16}+4\right)x^2}{x^2\left(\sqrt{x^2+1}+1\right)} =$$

$$= \lim_{x\to0}\frac{\sqrt{x^2+16}+4}{\sqrt{x^2+1}+1} = 4.$$

4. a) Hagamos un esbozo gráfico de lo que significa que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$:

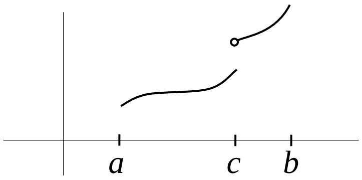


Sea $c > b$. Así pues $c - b > 0$. Sea $\varepsilon = c - b$.

Sé que existe $\delta > 0$ tal que si $0 < |x - a| < \delta$, entonces $|f(x) - b| < c - b$, es decir $f(x) - b < c - b$ y $f(x) < c$ como queríamos probar.

De forma totalmente análoga se prueba el apartado b) ¡Hazlo ahora!

6. Probemos que $\lim\limits_{x \to c^-} f(x) = \sup\{f(x) : x < c\}$. Ayudémonos con una gráfica:



Obviamente $\{f(x) : x < c\}$ está acotado superiormente pues $f(x) \le f(t)$ con $t \in (c, b)$
$x < c$

Sea $l = \sup\{f(x) : x < c\}$. Veamos que $\lim\limits_{x \to c^-} f(x) = l$, es decir, veamos que dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0 \,/\, c - x < \delta \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$.

Como $l - \varepsilon$ no es cota superior de $\{f(x) : x < c\}$, existe $d < c$ con $f(d) > l - \varepsilon$. Sea $\delta = c - d$.

Si $c - x < \delta$, entonces $c - x < c - d \Rightarrow x > d \Rightarrow f(x) \ge f(d) \Rightarrow f(x) > l - \varepsilon$, es decir $-\varepsilon < f(x) - l$.

Por otra parte, como $f(x) \le l$ si $x < c$, es $f(x) < l + \varepsilon$, es decir $f(x) - l < \varepsilon$. Hemos probado, pues, que si $c - x < \delta$, es $-\varepsilon < f(x) - l < \varepsilon \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$.

El crecimiento de f prueba que $\sup\{f(x) : x < c\} \le \inf\{f(x) : x > c\}$ y la igualdad $\inf\{f(x) : x > c\} = \lim\limits_{x \to c^+} f(x)$ se demuestra de manera totalmente análoga a lo que acabamos de desarrollar. Si f es decreciente, aplicamos las desigualdades anteriores a la función monótona creciente $(-f)$ y queda:

$$\lim_{x \to c^-} f(x) = \inf\{f(x) : x > c\} \ge \sup\{f(x) : x < c\} = \lim_{x \to c^+} f(x).$$

7. a) $f(x) = \dfrac{x+3}{x^2 - 9}$ si $x \notin \{-3, 3\}$, $f(-3) = 0$, $f(3) = 1$.

Si $x \notin \{-3, 3\}$, f es continua por tratarse de un cociente de funciones continuas y no anularse el denominador.

Calculemos $\lim\limits_{x \to -3} f(x) = \lim\limits_{x \to -3} \dfrac{x+3}{x^2 - 9} = \lim\limits_{x \to -3} \dfrac{x+3}{(x+3)(x-3)} = \lim\limits_{x \to -3} \dfrac{1}{x-3} = -\dfrac{1}{6} \ne f(-3)$ por lo que f no es continua en $x = -3$.

$\lim\limits_{x \to -3} f(x) = \lim\limits_{x \to -3} \dfrac{x+3}{x^2 - 9}$. Como $\lim\limits_{x \to -3^+} f(x) = +\infty$, f no es continua en $x = 3$.

8. El polinomio buscado será de la forma $f(x) = b_{n-1}x^{n-1} + b_{n-2}x^{n-2} + \ldots + b_1 x + b_0$. Veamos que, con los datos dados, podemos obtener los números b_i.

$$f(x_1) = b_{n-1}\, x_1^{n-1} + b_{n-2}\, x_1^{n-2} + \ldots + b_1 x_1 + b_0 = a_1$$

$$f(x_2) = b_{n-1}\, x_2^{n-1} + b_{n-2}\, x_2^{n-2} + \ldots + b_1 x_2 + b_0 = a_2$$

$$\vdots$$

$$f(x_n) = b_{n-1}\, x_n^{n-1} + b_{n-2}\, x_n^{n-2} + \ldots + b_1 x_n + b_0 = a_n$$

Fijados los números a_1, a_2, ..., a_n, el sistema escrito, de incógnitas las b-es es compatible determinado, pues el determinante de la matriz de los coeficientes, a saber, $\begin{vmatrix} x_1^{n-1} & x_1^{n-2} & \dots & x_1 & 1 \\ \vdots & & & & \\ x_n^{n-1} & x_n^{n-2} & \dots & x_n & 1 \end{vmatrix}$, es un determinante de Vandermonde, siendo su valor $\prod_{j<i}(x_i - x_j)$, distinto de cero pues los x_i son distintos. Así pues, rango matriz coeficientes = rango matriz ampliada = nº incógnitas. El caso particular que nos piden se resuelve sin más que sustituir las x_i por 1, 0, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ y las a_i por 3, 7 2 y $\frac{1}{4}$ respectivamente.

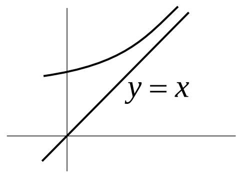
9. f no es continua en [0, 1] pues, por ejemplo, no lo es en $x = 1$ ya que $f(1) = 1$ y $\lim_{x\to 1} f(x)$ no es 1 pues en cualquier entorno de 1 hay números irracionales y, por tanto, con imagen 0.

   Estudiemos la función g: Sea $a \in [0, 1]$. Como cada entorno de a contiene números irracionales y su imagen por f es 0, es claro que $\lim_{x\to a} g(x)$, de existir, deberá ser 0. Veamos que, efectivamente, $\lim_{x\to a} g(x) = 0$.

   Dado ε > 0, tomo $q_0 \in \mathbb{N}$ con $\frac{1}{q_0} < \varepsilon$. Sean r_1, r_2, ..., r_k los racionales de [0, 1] de la forma $\frac{p}{q}$ con $q \le q_0$. Hay, naturalmente, una cantidad finita de ellos (¿por qué?). Si a es uno de ellos lo quito y sea $\delta = \min\{|a - r_i|, i = 1, 2, ..., k\}$. Obviamente $\delta > 0$ pues es el mínimo de un conjunto finito de números positivos.

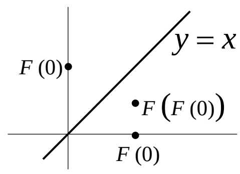
   Si $0 < |x - a| < \delta$ es, o bien porque x es irracional o porque es racional de la forma $\frac{p}{q}$ con $q \le q_0$. Así pues $f(x) = 0$ ó $f(x) = \frac{1}{q} < \frac{1}{q_0} < \varepsilon$. Es decir, $|f(x)| < \varepsilon$ si $0 < |x - a| < \delta$, con lo que $\lim_{x\to a} f(x) = 0$, o sea, $g(a) = 0$, de donde g es constante en [0, 1] y, por tanto, continua.

13. Se podría pensar, en principio, que la gráfica de F podría hacer algo así con lo que no iba a existir el tal a. Vamos a ver que eso no es posible.



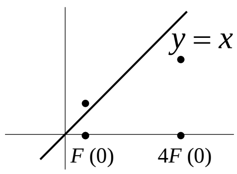
   En primer lugar, veremos que existe a con $F(a) = a$. Luego veremos que es único.

   Si $F(F(0)) < F(0)$ el problema está resuelto pues la situación sería así:



   Y como F es continua, habría un $a \in (0, F(0))$ donde F cortaría a la bisectriz y, por tanto, $F(a) = a$.

   Supongamos pues $F(F(0)) > F(0)$. Por la condición dada, tomo $\alpha = 0$ y $\beta = 4F(0)$ y digo $F(4F(0)) - F(0) \le \frac{1}{2}4F(0) = 2F(0) \Rightarrow F(4F(0)) \le 3F(0)$ y la situación sería así:



Otra vez por la continuidad de F, existe $a \in \left(F(0), 4F(0)\right)$ tal que $F(a) = a$

Veamos que hay un único a con esa propiedad:

Si existiera $b > a$ con $F(b) = b$, aplico la condición dada y digo $F(b) - F(a) \leq \frac{1}{2}(b-a)$, o sea: $b - a \leq \frac{1}{2}(b-a)$ que es absurdo. Análogamente si $a > b$.

14. b) Consideremos la función $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x-\alpha} + \dfrac{x^6+1}{x-\beta}$ y veamos que existe $a \in (\alpha, \beta)$ con $f(a) = 0$.

En (α, β), f es continua. Por otra parte, $\lim\limits_{x \to \alpha^+} f(x) = +\infty$ y $\lim\limits_{x \to \beta^-} f(x) = -\infty$. Así pues, existen números m y n con $m < n$ tales que $f(m) > 0$, $f(n) < 0$ y ambos de (α, β) con lo que aplicando el teorema de Bolzano a la función continua f en $[m, n]$ aseguramos la existencia del a buscado.

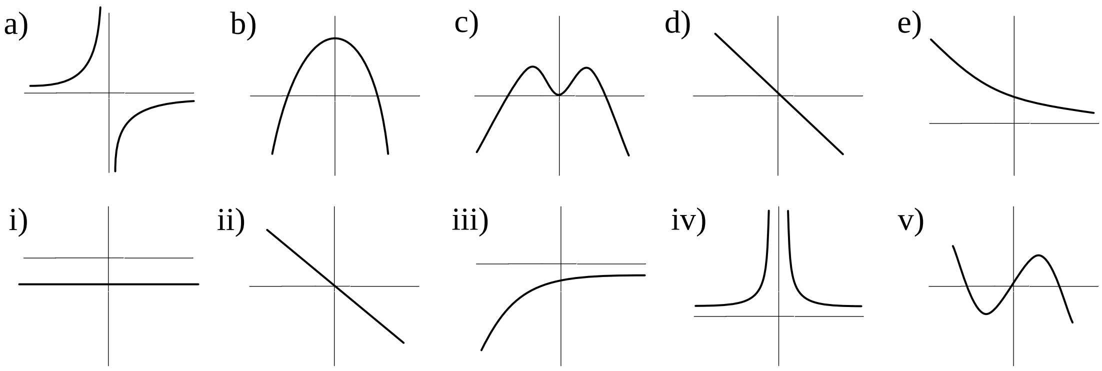
19. Sea $p(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1x + a_0$.

Podemos escribir $p(x)$ como $x^n\left[1 + \dfrac{a_{n-1}}{x} + ... + \dfrac{a_1}{x^{n-1}} + \dfrac{a_0}{x^n}\right]$ con lo que al ser n impar, es $\lim\limits_{x \to +\infty} p(x) = +\infty$ y $\lim\limits_{x \to -\infty} p(x) = -\infty$. Como p es continua y la anterior afirmación nos asegura la existencia de números m y q tales que $m < q$ y $f(m) < 0$ y $f(q) > 0$, volvemos a aplicar el teorema de Bolzano en $[m, q]$ y aseguramos la existencia de una raíz.

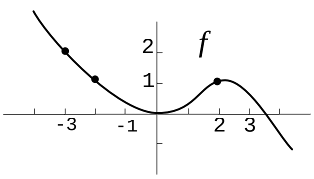
Un argumento diferente estaría basado en la existencia de un número par de raíces complejas (¿por qué?) con lo que al ser n impar habrá alguna raíz real.

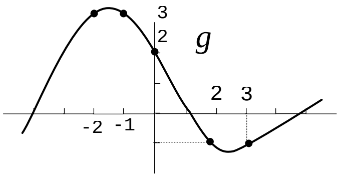
Análisis matemático. Hoja nº 4 (Tema 4)

1. Sea f una función que satisface $f(x + y) = f(x) + f(y) + 2xy$ para cualesquiera x e y y supongamos $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(h)}{h} = 7$.
   a) Calcula $f(0)$.
   b) Utilizar la definición de derivada para hallar $f'(x)$.
2. Supón que f es una función para la que $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{f(x) - f(2)}{x-2} = 0$. ¿Cuáles de las siguientes afirmaciones tienen que ser verdaderas, cuáles pueden ser verdaderas y cuáles nunca pueden ser verdaderas?
   a) $f'(2) = 2$; b) $f(2) = 0$; c) $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = f(2)$; d) f es continua en 0; e) f es continua en 2.
3. Empareja cada una de las gráficas (a – e) con la de su derivada (i–v). Explica tu razonamiento.



4. Sea $f(x) = \begin{cases} ax & \text{si} \quad x \le 1 \\ bx^2 + x + 1 & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$
   a) Hallar todos los posibles valores de a y b para los que f es continua en $x = 1$.
   b) Dibujar la gráfica de f cuando $a = 1$ y $b = -1$.
   c) Hallar todos los valores de a y b para los que f es derivable en $x = 1$.
   d) Dibujar la gráfica de f para los valores de a y b hallados en el apartado c).
5. Determina si las afirmaciones siguientes son siempre verdaderas o si pueden ser falsas en algunas ocasiones. Justifica tu respuesta.
   a) Si $f(1) < 0$ y $f(2) > 0$, debe haber un número $z \in (1, 2)$ tal que $f(z) = 0$.
   b) Si f es continua en [1, 2], $f(1) < 0$ y $f(2) > 0$, debe haber un número $z \in (1, 2)$ tal que $f(z) = 0$.
   c) Si f es continua en [1, 2] y hay un número $z \in (1, 2)$ tal que $f(z) = 0$, entonces $f(1)$ y $f(2)$ tienen que tener signo diferente.
   d) Si f no tiene ceros y es continua en [1, 2], entonces $f(1)$ y $f(2)$ tienen el mismo signo.
6. Hallar f' en términos de g' si:
   a) $f(x) = g(x + g(a))$; b) $f(x) = g(x\, g(a))$; c) $f(x) = g(x\, g(x))$.
7. Un astronauta viaja de izquierda a derecha a lo largo de la curva $y = x^2$. Al desconectar el cohete viajará a lo largo de la tangente a la curva en el punto de desconexión. ¿En qué punto deberá parar el motor para alcanzar el punto (4, 9)? ¿Y para llegar al (4, –9)?
8. Sea $h(x) = f(g(x))$ donde f y g tienen las gráficas que te mostramos:





   a) Calcula $h(-2)$ y $h(3)$.
   b) ¿Es $h'(-3)$ positivo, negativo o cero? Justifícalo.
   c) ¿Es $h'(-1)$ positivo, negativo o cero? Justifícalo.

9. Dibuja la gráfica de $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$. ¿Qué es mayor: e^{π} ó π^{e}?

10. Explica por qué la ecuación $x^3 - 3x + b = 0$ tiene como mucho una solución en $[-1, 1]$ sea cual fuere el número b.

11. Demuestra que la ecuación $\cos x + x \operatorname{sen} x - x^2 = 0$ tiene exactamente dos soluciones reales.

12. Hallar los máximos y mínimos locales y absolutos de las funciones siguientes:
 a) $f(x) = x^3 - x^2 - 8x + 1$ en $[-2, 2]$.
 b) $f(x) = x^{1/3}\left|x-4\right|$ en $\left[-1, 5\right]$.
 A continuación, dibuja sus gráficas.

13. Calcula los siguientes límites:
 a) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{\operatorname{sen}^2 x}\right)$; b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x + e^{-x} - x^2 - 2}{\operatorname{sen}^2 x - x^2}$; c) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{2\cos x^2} - \sqrt{2}}{x^4}$; d) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{\log x} - \dfrac{1}{x-1}\right)$.

14. Dibuja las gráficas de las funciones siguientes:
 a) $f(x) = \dfrac{2}{\sqrt{x}} - \dfrac{1}{x}$; b) $f(x) = |x|^3\sqrt{4-x^2}$.

15. Los beneficios de una fábrica de camisas dependen del número de camisas que se fabrican cada día, según la función $f(x) = 2x^3 - 15x^2 + 36x - 19$, donde x mide el número de miles de camisas fabricadas al día y $f(x)$ la ganancia en millones de euros al mes. Atendiendo al número de máquinas y personal necesarios, la fábrica puede optar por fabricar un número diario de camisas comprendido entre 1000 y 4000. ¿Cuántas camisas debe fabricar para obtener un beneficio máximo?

Análisis matemático. Hoja nº 5 (Tema 5)

1. a) Esboza la gráfica de la curva $y = \dfrac{1}{x}$ para $1 \le x \le 2$ y divide dicho intervalo en cinco partes iguales para demostrar que:

$$0'2\left(\frac{1}{1'2}+\frac{1}{1'4}+\frac{1}{1'6}+\frac{1}{1'8}+\frac{1}{2}\right) < \int_1^2 \frac{dx}{x} < 0'2\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{1'2}+\frac{1}{1'4}+\frac{1}{1'6}+\frac{1}{1'8}\right)$$

   b) Divide dicho intervalo en lugar de 5 en *n* partes iguales y obtén las desigualdades:

$$\sum_{r=1}^{n}\frac{1}{n+r} < \int_1^2 \frac{dx}{x} < \sum_{r=0}^{n-1}\frac{1}{n+r}.$$

   c) Demuestra que la diferencia entre estas dos sumas es $\dfrac{1}{2n}$.

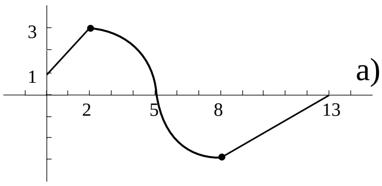
   d) ¿Cómo debe ser de grande *n* para calcular $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{x}\,dx$ con un error de 10^{-3} utilizando una de las sumas anteriores?

2. Sea *f* continua en $\mathbb{R}$ y tal que $\int_a^b f(x)\ \ dx = 0$ para cualesquiera *a*, $b \in \mathbb{R}$. Prueba que *f* es idénticamente nula.

3. Sin calcular explícitamente ninguna integral, di cuál de las siguientes no es igual a cero:

   a) $\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen}^3 x \ \ dx$; b) $\int_{-\pi}^{\pi} x^2\, sen\, x \ \ dx$; c) $\int_0^{\pi} \cos x \ \ dx$; d) $\int_{-\pi}^{\pi} \cos^3 x \ \ dx$; e) $\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 x \ \ dx$.

4. Sea *f* la función cuya gráfica es la de la figura, que consiste en dos segmentos y dos cuartos de circunferencia.



   a) Calcula $\int_0^{13} f$; b) Calcula $\int_9^{12} f$; c) $\int_0^{13} |\,f\,|$.

5. Deduce, utilizando argumentos geométricos la integral $\int_{-3}^{3} (x+5)\sqrt{9-x^2}\ \ dx$. (Indicación $(x+5)\sqrt{9-x^2} = x\sqrt{9-x^2} + 5\sqrt{9-x^2}$, el primer sumando función impar y el segundo sumando corresponde a una función cuya grafica es parte de una circunferencia).

6. Cuatro estudiantes de Ingeniería Informática no se ponen de acuerdo sobre el valor de la integral $\int_0^{\pi} \operatorname{sen}^8 x \ \ dx$. Antonio dice que vale π, Beatriz que es igual a $\dfrac{35\pi}{128}$; Carlos dice que vale $\dfrac{3\pi}{90} - 1$ mientras que Diana dice que es $\dfrac{\pi}{2}$. Uno de los cuatro está en lo cierto. ¿Quién es? (No intentes calcular la integral; elimina las respuestas que creas erróneas).

7. Encontrar F' para *F* definida sobre [0, 1] del modo siguiente:

   1) $F(x) = \int_0^x \operatorname{sen}\ \ t^2 dt$; 2) $F(x) = \int_0^{x^2} \dfrac{1}{1+t^3}\,dt$; 3) $F(x) = \int_{x^2}^{x} \sqrt{1-t^2}\,dt$;

   4) $F(x) = \int_0^{g(x)} f(t)\ \ dt$; con *g* derivable y *f* continua.

8. Sea $F(x) = \begin{cases} \cos x & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \\ \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x e^{t^2} dt & \text{si } x > 0 \end{cases}$

   1) Probar que *F* es continua en $\mathbb{R}$.
   2) Demostrar que existe F' si $x \neq 0$.
   3) Estudiar si *F* es derivable en $x = 0$.
   4) Estudiar la continuidad de $F'(x)$.

9. La base de un sólido es la región del plano *xy* limitada por el eje *y* y las rectas $y = 1 - x$, $y = 2x + 5$ y $x = 3$. Cada sección perpendicular al eje *x* es un cuadrado. Halla el volumen del sólido.

10. Halla el volumen del sólido formado cuando la región dada por la curva $y = \sqrt{\operatorname{sen} x}$ y el intervalo $[0, \pi]$ gira alrededor del eje x.
11. Halla el volumen del sólido formado cuando la región limitada por las curvas $y = 1 - x^2$, $y = x^2$ gira alrededor del eje y.
12. Esboza la gráfica de la curva $x^{2/3} + y^{2/3} = 9$. Halla la longitud de dicha curva entre $x = 1$ y $x = 27$.
13. Deduce el área de una esfera de radio 5.
14. Calcular las siguientes integrales impropias:

    a) $\int_1^{\infty} \frac{3}{x^2} dx$; b) $\int_1^{\infty} e^{-5x} dx$; c) $\int_2^{\infty} \frac{dx}{x^2 - 1}$; d) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{4 + x^2}$.
15. Demostrar, utilizando el criterio de comparación, que las dos integrales impropias siguientes son convergentes:

    a) $\int_0^{\infty} \frac{dx}{3 + x^2}$; b) $\int_0^{\infty} \frac{e^{-x}}{1 + x} dx$.
16. Demostrar, utilizando el criterio de comparación, que las dos integrales impropias siguientes son divergentes:

    a) $\int_0^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{2 + x^2}}$; b) $\int_1^{\infty} \frac{2 + \operatorname{sen} x}{1 + x} dx$.
17. Calcular las siguientes integrales impropias:

    a) $\int_0^{\infty} \frac{dx}{x \log x}$; b) $\int_0^{\infty} x \cdot e^{-x^2} dx$; c) $\int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{|x|}}$.
18. Determinar la convergencia o divergencia de las integrales

    a) $\int_{-1}^{\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{(2 + x)^3} dx$; b) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{(x^2 + 1)^{3/2}} dx$; c) $\int_{-1}^{\infty} \frac{dx}{(5x^2 + 1)^{2/3}}$; d) $\int_1^{2} \frac{1}{\sqrt{t - 1}} dt$.
19. Para un cierto valor real c, la integral $\int_2^{\infty} \left(\frac{cx}{x^2 + 1} - \frac{1}{2x + 1} \right) dx$ converge. Determina c y el valor de dicha integral.

Análisis matemático. Hoja nº 6 (Tema 6)

1. Calcular: a) $\int \frac{dx}{x^3}$; b) $\int \frac{dx}{\sqrt{x+1}}$; c) $\int \frac{e^x dx}{1+5e^x}$.

2. Calcular $\int \frac{x^3}{\left(1+x^2\right)^4} dx$ por dos maneras diferentes:

   a) por la sustitución $u = 1 + x^2$

   b) por la sustitución $x = \operatorname{tg} \theta$.

3. Calcular $\int x^2 \ln(1+x)\, dx$.

4. Calcular $\int \frac{\operatorname{sen}\theta\, d\theta}{1+\operatorname{sen}^2\theta}$

   a) Usando la sustitución que se aplica a cualquier función racional en sen θ y cos θ.

   b) Escribiendo $\operatorname{sen}^2 \theta$ como $1 - \cos^2 \theta$ y usando la sustitución $u = \cos \theta$.

5. Calcular:

   a) $\int \frac{e^x dx}{e^{2x}+2e^x+1}$; b) $\int \frac{2x+1}{x^3-3x^2+3x-1} dx$; c) $\int \operatorname{sen}^3 x \cos^4 x\, dx$.

6. Demostrar las siguientes fórmulas de reducción:

   1) $\int \operatorname{sen}^n x\, dx = -\frac{1}{n}\operatorname{sen}^{n-1} x \cos x + \frac{n-1}{n}\int \operatorname{sen}^{n-2} x\, dx$, $n > 2$ y par.

   2) $\int \cos^n x\, dx = \frac{1}{n}\cos^{n-1} x \operatorname{sen} x + \frac{n-1}{n}\int \cos^{n-2} x\, dx$, $n > 2$ y par.

   3) $\int \frac{1}{(x^2+1)^n} dx = \frac{1}{2n-2} \frac{x}{\left(x^2+1\right)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2n-2}\int \frac{1}{(x^2+1)^{n-1}} dx$.

7. Calcular las siguientes integrales:

   a) $\int \frac{\cos x\, dx}{\operatorname{sen}^3 x - 8} dx$; b) z) $\int \frac{x^2}{\sqrt[3]{x-1}}$; c) $\int \frac{\operatorname{sen} x\, dx}{3+\cos x}$; d) $\int x^2 \sqrt{x^3-1}\, dx$; e) $\int \frac{dx}{\left(4+x^2\right)^2}$;

   f) $\int \operatorname{sen}^2 3x \cos^2 3x\, dx$; g) $\int \operatorname{tg}^4 3\theta\, d\theta$; h) $\int \frac{x^4+x^2+1}{x^3} dx$; i) $\int 10^x dx$; j) $\int \frac{x\, dx}{\left(x^4+1\right)^2}$;

   k) $\int \cos^2 x\, dx$; l) $\int x\sqrt{x^2+4}\, dx$; m) $\int \frac{x^2 dx}{1+x^6}$; n) $\int x^2 \operatorname{sen} x^3 dx$; ñ) $\int x^4 \log x$; o) $\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx$;

   p) $\int \log\left(x^3-1\right) dx$; q) $\int \frac{x\, dx}{\sqrt{\left(x^2+1\right)^3}}$; r) $\int \frac{dx}{\sqrt{(x+1)^3}}$; s) $\int \frac{3\,dx}{x^2+4x+5}$; t) $\int \frac{x\, dx}{1+\sqrt[3]{x}}$; u) $\int \frac{x^7 dx}{\sqrt{x^2+1}}$;

   v) $\int \frac{\operatorname{arctg} x}{x^2} dx$; w) $\int e^x \operatorname{sen} 3x\, dx$; x) $\int \frac{dx}{\left(4-x^2\right)^{3/2}}$; y) $\int \frac{x\, dx}{x^4-2x^2-3}$;

8. Calcular $\int \frac{x^3 dx}{(x-1)^2}$

   a) usando fracciones simples.

   b) Mediante la sustitución $u = x - 1$.

9. Transformar $\int \frac{x^2}{\sqrt{1+x}}\,dx$ mediante cada una de estas sustituciones y resolver el más fácil de los problemas resultantes.

   a) $u = \sqrt{x+1}$; b) $u = 1 + x$; c) $x = \mathrm{tg}^2\,\theta$.

10. Transformar el problema de hallar $\int \frac{x^3}{\sqrt{1+x^2}}\,dx$ en otro problema, usando:

    a) Integración por partes con $f = x^2$ y $g' = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.

    b) La sustitución $x = \mathrm{tg}\,\theta$.

    c) La sustitución $u = \sqrt{1+x^2}$.

Análisis matemático. Hoja nº 7 (Tema 7)

1. Utilizar la definición de límite para probar que:

   a) $\text{lím}\, \dfrac{1}{n^2+1} = 0$; b) $\text{lím}\, \dfrac{2n}{n+1} = 2$; c) $\text{lím}\, \dfrac{n^2-1}{2n^2+3} = \dfrac{1}{2}$.

2. De la sucesión $\{x_n\}$ se sabe que es convergente y que sus términos son alternativamente positivos y negativos. ¿Cuál es su límite? Justifícalo y pon un ejemplo.

3. Sea $\{x_n\}$ una sucesión convergente a un número x.

   a) Si $a > x$, probar que existe n_0 tal que $n > n_0$, implica $a > x_n$.

   b) Si $a < x$, probar que existe n_0 tal que $n > n_0$, implica $a < x_n$.

4. Probar que todo número real es límite de una sucesión de:

   a) números racionales; b) números irracionales.

5. Probar que toda sucesión no acotada tiene una subsucesión que tiende a $+\infty$ ó a $-\infty$.

6. Calcular los siguientes límites:

   a) $\text{lím}\, \dfrac{3+6+\ldots+3n}{n^2}$; b) $\text{lím}\left[\dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\ldots+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right]$

   c) $\text{lím}\, \dfrac{3\left(\sqrt[3]{n+1}-\sqrt[3]{n}\right)}{2\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)}$; d) $\text{lím}\left(\dfrac{1}{2^2-1}+\dfrac{1}{3^2-1}+\ldots+\dfrac{1}{n^2-1}\right)$;

   e) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{\cos(a+\frac{1}{n})}{\cos a}\right)^n$.

7. Sucesiones recurrentes:

   i) Sea $a > 0$. Definimos $x_1 = \sqrt{a}$ y $x_{n+1} = \sqrt{a + x_n}$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Probar que $\{x_n\}$ es creciente y acotada. Calcular su límite.

   ii) Sea $x_1 > 1$ y para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $x_{n+1} = 2 - \dfrac{1}{x_n}$. Demostrar que $\{x_n\}$ es convergente y calcular su límite.

   iii) Sea $x_1 > 1$ y $x_{n+1} = \sqrt{1+x_n^2}$. ¿Es convergente?

8. Sea a_n el número de instrucciones de un determinado algoritmo para su ejecución sobre n datos de entrada. Se sabe que dicho algoritmo actúa de la siguiente manera:

   1) Con un solo dato de entrada, resuelve el problema usando una instrucción.

   2) Con n datos de entrada, usa $4n$ instrucciones para reducir el problema a $n-1$ datos y se ejecuta sobre ellos el mismo algoritmo. Hallar la sucesión $\{a_n\}$ y deducir que $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{2n^2} = 1$.

9. Considera la sucesión $x_1 = 1, x_2 = 3,\ x_{n+2} = \frac{1}{2}(x_n + x_{n+1})$. Demuestra que es convergente.

10. Considera las series $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$, $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!}(-1)^k$ y $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!}(-1)^{k+1}$. Probar que convergen absolutamente para todo $x \in \mathbb{R}$..

11. Hallar la suma de las series siguientes, geométricas o telescópicas:

a) $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{e}{3}\right)^k$; b) $\sum_{k=0}^{\infty} \left(\left(-\frac{1}{8}\right)^k + \left(\frac{3}{4}\right)^{2k}\right)$; c) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^k + 3^{k-1}}{6^{k+1}}$; d) $\sum_{k=2}^{\infty} \left(\frac{1}{\log(k+1)} - \frac{1}{\log k}\right)$.

12. Una serie del tipo $\sum_{n=1}^{\infty} (a \cdot n + b) r^n$, $a \neq 0$ se llama arit-geométrica.

a) Probar que converge si y sólo si $|r| < 1$.

b) Calcula su suma. ¿Cuánto vale $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n+1}{3^n}$?

13. Hallar el carácter de las series siguientes:

a) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k^2+4}}$; b) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2k-1}$; c) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^3}{k!}$; d) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)!}$; e) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^2}{3^k}$; f) $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k(\log k)^2}$;

g) $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[k]{\log k}}$; h) $\sum_{k=0}^{\infty} \left(\sqrt{k^3+1} - \sqrt{k^3}\right)$; i) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k-1}{k \cdot 2^k}$; j) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{1+\sqrt{k}}$.

14. Determinar si cada una de las series siguientes es absolutamente convergente, condicionalmente convergente o ninguna de las dos cosas:

a) $\frac{1}{1\cdot 2} - \frac{1}{3\cdot 2} + \frac{1}{5\cdot 2} - \frac{1}{7.2} + \ldots$

b) $\frac{3}{2} - \frac{4}{3} + \frac{5}{4} - \frac{6}{5} + \ldots$

c) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k(\log(k+1))^2}$.

d) $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \operatorname{arctg} \frac{1}{2k+1}$.

<u>Análisis matemático. Ingeniería Informática. Hoja nº 8 (Tema 8)</u>

1. a) Comprobar que la ecuación de una recta en coordenadas polares es $\frac{1}{r} = A\cos\theta + B\,\mathrm{sen}\,\theta$ donde A y B son constantes.

   b) Dar ecuaciones cartesianas de las siguientes curvas dadas en polares:

   1) $r = \cos 2\theta$;   2) $r = 1 - \mathrm{sen}\ \theta$ (Cardioide).

2. a) Hallar las coordenadas cilíndricas del punto cuyas coordenadas cartesianas son (6, 6, 8). Localizar este punto.

   b) Si un punto tiene coordenadas cilíndricas $\left(18, \frac{2\pi}{3}, -3\right)$, ¿cuáles son sus coordenadas cartesianas?

3. a) Hallar las coordenadas esféricas de los puntos cuyas coordenadas cartesianas son: (1, −1, 1) y (2, −3, 6).

   b) Hallar las coordenadas cartesianas de los puntos cuyas coordenadas esféricas son: $\left(3, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4)}\right)$ y $\left(1, -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}\right)$.

4. Representar las gráficas de las siguientes curvas dadas en coordenadas polares:

   a) $r = 2$;   b) $r = \sec\ \theta$;   c) $r = 4\ \mathrm{sen}\ \theta$;   d) $r = 3 + 2\cos\ \theta$;   e) $r = 1 - \mathrm{sen}\ \theta$ (Cardioide).

5. Esboza la curva representada por las ecuaciones paramétricas $x = t^3$, $y = \frac{t^2}{2}$ y escribe posteriormente la correspondiente ecuación en cartesianas eliminando el parámetro.

6. Esboza la curva representada por las ecuaciones paramétricas $x = \cos\ \theta$, $y = 2\ \mathrm{sen}^2\theta$ y escribe posteriormente la correspondiente ecuación en cartesianas eliminando el parámetro.

7. Esboza la curva representada por las ecuaciones paramétricas $x = 4\sec\ \theta$, $y = 3\ \mathrm{tg}\ \theta$ y escribe posteriormente la correspondiente ecuación en cartesianas eliminando el parámetro.

8. Describe algunas diferencias en las curvas representadas por los siguientes pares de ecuaciones paramétricas:

a)	b)	c)	d)
$x = t$	$x = \cos\ \theta$	$x = e^{-t}$	$x = e^{t}$
$y = 2t + 1$	$y = 2\cos\ \theta + 1$	$y = 2e^{-t} + 1$	$y = 2e^{t} + 1$.

9. Calcula la ecuación de la recta tangente a la curva de ecuaciones paramétricas $x = \alpha - \frac{1}{2}\cos\alpha$, $y = 1 - \frac{1}{2}\cos\alpha$, $\alpha \in [0, 2\pi]$, en los puntos de la curva correspondientes a $\alpha = \frac{\pi}{2}$ y $\alpha = \frac{\pi}{4}$.

10. En la curva anterior, encuentra los puntos (si los hay) en los que la tangente es vertical y aquellos en los que es horizontal a la curva.

11. Calcula la longitud del arco de la curva $x = e^{-t}\cos t$, $y = e^{-t}$ sen t para $0 \le t \le \frac{\pi}{2}$.

12. Calcula el perímetro de la hipocicloide dada por $x = a \cos^3 \theta$, $y = a$ sen^3 θ.

13. Halla el área bajo la curva $x = e^t$, $y = 2e^t + 1$ en el intervalo [0, 1].

14. Escribe la ecuación en polares de:

    a) Circunferencia $x^2 + y^2 - 2ax = 0$.

    b) Recta $3x - y + 2 = 0$.

    c) Parábola $x^2 - 4ay - 4a^2 = 0$.

15. Escribe ecuaciones cartesianas de las curvas dadas por las siguientes ecuaciones en polares:

    a) $r = \dfrac{6}{2 - 3\,sen\theta}$; b) $r =$ sen θ.

16. Calcula la pendiente de la tangente a la gráfica dada por $r = 3(1 - \cos\theta)$ en $\theta = \pi/2$.

17. Calcula las ecuaciones de las tangentes verticales y de las horizontales a la curva dada por $r = 1 +$ sen θ.

18. Calcula el área de la región comprendida entre los lazos de curva dada por $r = 1 + 2\cos\theta$.

19. Halla el área de la región común a las dos regiones limitadas por la circunferencia $r = -6\cos\theta$ y la cardioide $r = 2 - 2\cos\theta$.

20. Calcula la longitud de la cardioide $r = 2 - 2\cos\theta$.

21. Calcula la longitud del arco de la gráfica de $r = \dfrac{1}{\theta}$ sobre el intervalo $\pi \le \theta \le 2\pi$.

22. Calcula el área de la región común a $r = 4\cos\theta$ y $r = 2$.

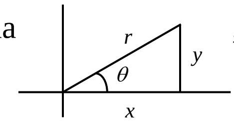
23. ¿Qué tipo de cónica es la dada por $x^2 + 3y^2 - 2\sqrt{3}\,xy + 2\sqrt{3}\,x + 2y = 0$?

24. Esboza la gráfica de la cónica del ejercicio anterior.

25. Esboza la gráfica de la cónica dada por $3x^2 + 3y^2 - 10xy + 18\sqrt{2}\,x - 14\sqrt{2}\,y + 38 = 0$.

26. Dibuja la curva descrita por un punto P que se mueve en el plano de forma que su distancia al punto $T(3, 0)$ es siempre el doble que su distancia al eje vertical.

Desarrollo de las soluciones de algunos de los problemas propuestos

1. Recuerda que la relación entre las coordenadas cartesianas (x, y) y las polares (r, θ) viene dada por el esquema 

, es decir,

por las fórmulas $\begin{matrix} x = r\cos\theta \\ y = r\,\mathrm{sen}\,\theta \end{matrix}$ o, lo que es lo mismo, $\begin{matrix} r = \sqrt{x^2+y^2} \\ \theta = \mathrm{arctg}\,\dfrac{y}{x} \end{matrix}$. Así pues, tenemos:

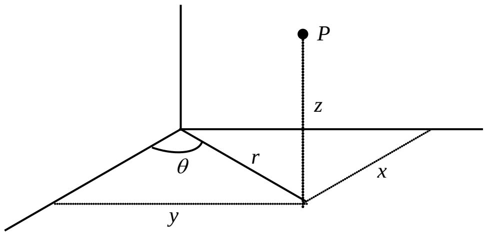
a) La ecuación de una recta en coordenadas cartesianas es $Mx + Ny + T = 0$ con M, N y T constantes. Podemos poner, pues, $Mr \cos\theta + Nr\,\mathrm{sen}\,\theta + T = 0$, es decir $-\dfrac{M}{T}\cos\theta - \dfrac{N}{T}\mathrm{sen}\,\theta = \dfrac{1}{r}$, o sea, $A\cos\theta + B\,\mathrm{sen}\,\theta = \dfrac{1}{r}$ siendo $A = -\dfrac{M}{T}$ y $B = -\dfrac{N}{T}$.

b) La curva en polares $r = \cos 2\theta$ será en cartesianas $\sqrt{x^2+y^2} = \left(\dfrac{x}{r}\right)^2 - \left(\dfrac{y}{r}\right)^2$ (recordar $\cos 2\theta = \cos^2\theta - \mathrm{sen}^2\theta$), es decir, $\sqrt{x^2+y^2} = \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$, o, lo que es lo mismo, $\left(x^2+y^2\right)^{3/2} = x^2 - y^2$.

Finalmente la cardioide $r = 1 - \mathrm{sen}\,\theta$, escrita en coordenadas cartesianas sería

$\sqrt{x^2+y^2} = 1 - \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$, es decir: $x^2 + y^2 = \sqrt{x^2+y^2} - y$.

2. Escribamos la relación entre las coordenadas cilíndricas y las cartesianas y el paso de unas a otras.



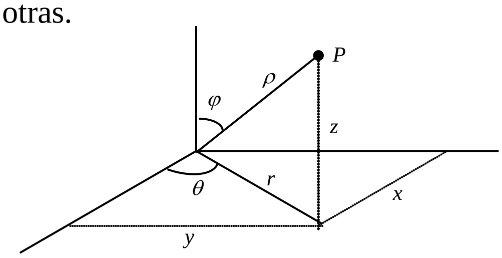
P:	Cartesianas	Cilíndricas
	(x, y, z)	(r, θ, z)

$$\boxed{\begin{matrix} x = r\cos\theta \\ y = r\,\mathrm{sen}\,\theta \\ z = z \end{matrix}} \qquad \begin{matrix} x^2+y^2 = r^2 \\ \mathrm{tg}\,\theta = \dfrac{y}{x} \end{matrix} \qquad \text{Así pues,} \qquad \boxed{\begin{matrix} r = \sqrt{x^2+y^2} \\ \theta = \mathrm{arctg}\,\dfrac{y}{x} \\ z = z \end{matrix}}$$

a) Si las coordenadas cartesianas de un punto P son (6, 6, 8), sus cilíndricas serán, pues, $\left(6\sqrt{2}, \dfrac{\pi}{4}, 8\right)$.

b) Si las coordenadas cilíndricas de un punto P son $\left(18, \dfrac{2\pi}{3}, -3\right)$, sus coordenadas cartesianas serán $\left(-9, 9\sqrt{3}, -3\right)$.

3. Escribamos la relación entre las coordenadas esféricas y las cartesianas y el paso de unas a otras.



P: <u>Cartesianas</u> <u>Cilíndricas</u>

(x, y, z) (ρ, θ, φ)

$z = \rho \cos \varphi$

$\cos(90º - \varphi) = \operatorname{sen} \varphi = \dfrac{r}{\rho} \Rightarrow r = \rho \operatorname{sen} \varphi$ y como

$\cos\theta = \dfrac{x}{r}$, sigue que $r = \dfrac{x}{\cos\theta}$, es decir, $\dfrac{x}{\cos\theta} = \rho \operatorname{sen} \varphi$, de donde $x = \rho \cos \theta \operatorname{sen} \varphi$. Análogamente, $\operatorname{sen} \theta = \dfrac{y}{r}$, con lo que $y = \rho \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \varphi$.

Resumiendo:

$$\boxed{\begin{aligned} x &= \rho \cos \theta \operatorname{sen} \varphi \\ y &= \rho \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \varphi \\ z &= \rho \cos \varphi \end{aligned}}$$

De aquí, $x^2 + y^2 = \rho^2 \operatorname{sen}^2 \varphi \Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 = \rho^2$ y

$$\boxed{\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad \theta = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}, \quad \varphi = \arccos \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}}$$

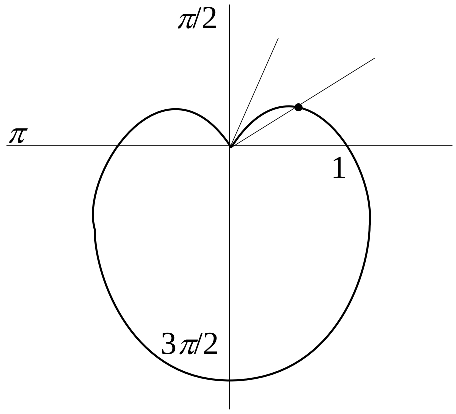
Para resolver los apartados a) y b) basta con sustituir.

4. e) $r = 1 - \operatorname{sen} \theta$ (Cardioide).

Como $\operatorname{sen}\left(\theta - \dfrac{\pi}{2}\right) = \operatorname{sen}\left(\theta + \dfrac{\pi}{2}\right)$, la curva es simétrica respecto del eje vertical. Sabemos además que si $\theta \in [0, \pi]$, $r \leq 1$ y si $\theta \in [\pi, 2\pi]$, entonces $r > 1$. Hagamos, pues, una pequeña tabla de valores. Por la simetría observada, bastará estudiar para $\theta \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ y $\theta \in \left[\dfrac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$.

θ	0	$\pi/6$	$\pi/3$	$\pi/2$	$3\pi/2$	$7\pi/4$	$7\pi/6$
r	1	$1/2$	$1-\sqrt{3}/2$	0	2	$1+\sqrt{2}/2$	$3/2$

Con estos datos, podríamos esbozar con bastante precisión la parte derecha de la curva y, por simetría, la otra, quedándonos algo así:



Nota: Si queremos obtener otros datos de interés, como, por ejemplo, tangentes o horizontales o verticales, podemos poner

$y = r$ sen θ, es decir, (1 − sen θ) sen θ

$x = r$ cos θ, o sea, (1 − sen θ) cos θ, con lo que $\dfrac{dy}{d\theta} = \cos\theta - \operatorname{sen} 2\theta$ y $\dfrac{dx}{d\theta} = -\operatorname{sen} 2\theta - \cos 2\theta$.

Así pues, habría tangentes horizontales cuando $\dfrac{dy}{d\theta} = 0$ (supuesto que $\dfrac{dx}{d\theta} \neq 0$), es decir, cos θ = sen 2θ, ecuación que, en la mitad derecha, se verifica para $\theta = \dfrac{\pi}{6}$. Observa que esta ecuación se verifica también para $\theta = \dfrac{\pi}{2}$, pero ahí no hay tangente horizontal pues, para ese valor, $\dfrac{dx}{d\theta} = 0$.

Habrá tangentes verticales cuando $\dfrac{dx}{d\theta} = 0$ (supuesto que $\dfrac{dy}{d\theta} \neq 0$), es decir,

−sen θ − cos 2θ = 0 ⇒ $\cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta$ + sen θ = 0 ⇒ sen θ = 1 y −1/2, es decir, $\theta = \dfrac{7\pi}{6}$, pues para $\theta = \dfrac{\pi}{2}$, hemos visto que $\dfrac{dy}{d\theta} = 0$.

Representa otra vez la curva teniendo en cuenta estas consideraciones y observa que coincide con la ya dibujada.

Análisis matemático. Ingeniería Informática. Hoja nº 9 (Tema 9)

1. Halla el dominio y el recorrido de las siguientes funciones $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

   a) $f(x, y) = 1 - \sqrt{4 - x^2 - y^2}$; b) $f(x, y) = \operatorname{arcsen}(x + y)$.

2. Esboza la gráfica de la superficie dada por $f(x, y) = x^2 + y^2$.

3. Describe las curvas de nivel para la función $f(x, y) = \dfrac{x}{x^2 + y^2}$ y dibuja tales curvas para $c = \pm 1, \pm \dfrac{1}{2}$.

4. Calcula $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,1)} \frac{\operatorname{arcsen}\frac{x}{y}}{1 + xy}$ y dibuja el conjunto de puntos (x, y) en los que está definida esa función.

5. Sea $f(x, y) = \dfrac{xy}{x^2 + y^2}$ si $(x, y) \neq (0, 0)$ y f vale 0 en el origen. Comprobar que existen los dos límites iterados en el origen. Comprobar que, sin embargo, el límite de f en $(0, 0)$ no existe.

6. Encuentra el límite si existe de $f(x, y)$ cuando $(x, y) \to (0, 0)$ siendo $f(x, y) = \dfrac{-xy^2}{x^2 + y^4}$ examinando el comportamiento de f cuando $(x, y) \to (0, 0)$ a través de $x = y^2$ y a través de $x = -y^2$.

7. Utiliza coordenadas polares para calcular $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\operatorname{sen}\left(x^2 + y^2\right)}{x^2 + y^2}$.

8. Sea $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(x_0, y_0)\} \to \mathbb{R}$. Probar que $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = L$ si y sólo si para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que si $0 < r < \delta$, se tiene que $|f(x_0 + r\cos\theta,\ y_0 + r\operatorname{sen}\theta) - L| < \varepsilon, \quad \forall\ \theta \in [0, 2\pi]$.

9. Probar que las funciones $\langle\ ,\ \rangle : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}$ y $\|\ ,\ \| : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}$ son continuas.

10. Calcular las derivadas parciales con respecto a x y con respecto a y para:

    a) $z = \log\dfrac{x + y}{x - y}$; b) $z = e^y \operatorname{sen} xy$.

11. Calcular las derivadas parciales segundas de

    a) $z = x^2 - 2xy + 3y^2$; b) $z = \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}$.

12. Demostrar que $z = \operatorname{sen}(x - ct)$ es solución de la ecuación $\dfrac{\partial^2 z}{\partial t^2} = c^2 \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$.

13. Si $w = x^2 + y^2 + z^2$, $x = e^t\cos t$, $y = e^t\operatorname{sen} t$ y $z = e^t$, obtener $\dfrac{dw}{dt}$ mediante: a) la regla de la cadena; b) escribiendo w como función de t y derivando.

14. Si $w = xy + xz + yz$, $x = t - 1$, $y = t^2 - 1$ y $z = t$, obtener $\dfrac{dw}{dt}$ mediante:

    a) la regla de la cadena; b) escribiendo w como función de t y derivando.

15. Si $w = \operatorname{arctg} \dfrac{y}{x}$, $x = r \cos \theta$ e $y = r \operatorname{sen} \theta$, obtén $\dfrac{\partial w}{\partial r}$ y $\dfrac{\partial w}{\partial \theta}$ mediante:

a) la regla de la cadena; b) escribiendo w como función de r y θ y derivando.

16. La longitud, anchura y altura de un paralelepípedo crecen a razón de 3 cm/minuto, 2 cm/minuto y 0′5 cm/minuto respectivamente. Calcula el ritmo de crecimiento del volumen y de la superficie en el instante en que dichas magnitudes miden 10, 6 y 4 cm respectivamente.

17. a) Calcula la derivada direccional de $g(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ en el punto $P(3, 4)$ en la dirección de $\vec{v} = 3\vec{i} - 4\vec{j}$.

b) Calcula la derivada direccional de $f(x, y, z) = xy + yz + xz$ en el punto P (1, 1, 1) en la dirección de $\vec{v} = 2\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$.

c) Calcula la derivada direccional de $f(x, y) = x^2 + 4y^2$ en el punto P (3, 1) en la dirección del vector $\vec{v} = 2\vec{i} + 2\vec{j}$.

18. a) Calcula el gradiente de la función $h(x, y) = x \operatorname{tg} y$, y el máximo valor de la derivada direccional en el punto $P\left(2, \dfrac{\pi}{4}\right)$.

b) Análogamente para la función $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ y el punto (1, 4, 2).

19. Si $f(x, y) = 3 - \dfrac{x}{3} - \dfrac{y}{2}$, calcula $D_{\vec{u}} f(3, 2)$ si $\vec{u} = (\cos\theta, \sin\theta)$ con : a) $\theta = \dfrac{4\pi}{3}$; b) $\theta = -\dfrac{\pi}{6}$.

20. La temperatura T en cada punto de una placa viene dada por la función $T = \dfrac{x}{x^2 + y^2}$. Encuentra la dirección de máximo crecimiento del calor si estamos en el punto $P(3, 4)$.

21. Estudiar la existencia de derivadas direccionales en el origen de las funciones:

a) $f(x, y) = \sqrt[3]{xy}$; b) $f(x, y) = \max\{|x|, |y|\}$.

22. Si $F(x, y) = 2e^{-x^2} + e^{-3y^2}$ representa la altura de una montaña en la posición (x, y), ¿en qué dirección desde (0, 1) deberíamos comenzar a caminar para subir más rápido?

23. Hallar un vector unitario normal a la superficie $z - x \operatorname{sen} y = 4$ en el punto $\left(6, \dfrac{\pi}{6}, 7\right)$.

24. Encontrar la ecuación del plano tangente a la función $f(x, y) = \dfrac{y}{x}$ en el punto (1, 2, 2).

25. Para la función $f(x, y) = 1 - x^2 - y^2$ encontrar los planos tangentes –si existen- a la gráfica de f que verifica las siguientes propiedades:

a) Tangente en el punto (1, 1, −1).

b) Contiene a la recta que pasa por (3, 0, 3) y (0, −3, 3).

c) Contiene al punto (0, 0, 0).

26. Encontrar las ecuaciones del plano tangente y recta normal a:

a) $xy^2 + 3x - z^2 = 4$ en el punto (2, 1, −2).

b) $x^2 + y^2 + z = 9$ en el punto (1, 2, 4).

c) $z = \operatorname{arctg} \dfrac{y}{x}$ en el punto $\left(1, 1, \dfrac{\pi}{4}\right)$.

27. Estudia si la función $f(x, y) = x^2 - y^2 - 4y - 4$ tiene extremos relativos y puntos de silla.

28. Análogamente para la función $f(x, y) = x^3 - 3xy + y^3$.

29. Encontrar el extremo absoluto de la función $f(x, y) = x^2 + 2xy + y^2$ sobre la región $R = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \le 8\}$.

30. a) Probar que $z = x^2 - y^2 + 2xy$ no tiene máximo ni mínimo en el plano.

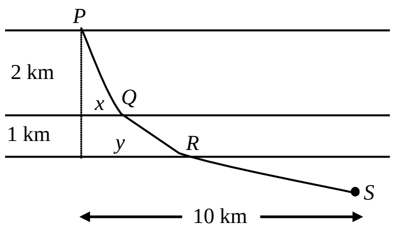
    b) Hallar el máximo y el mínimo de z sobre la circunferencia de radio 1 y centro (0, 0).

    c) Lo mismo que en b) pero ahora sobre el círculo.

31. Encontrar tres números positivos cuya suma sea 30 y la suma de sus cuadrados sea mínima.

32. Hay que construir una tubería de conducción de agua desde el punto P al punto S que debe pasar por regiones de diferentes costes de construcción (ver figura).

    Calcula x e y para que el coste total C sea mínimo si el coste por km de P a Q es el triple que de R a S y de Q a R doble que de R a S.

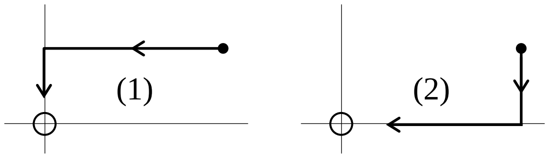


33. Un servicio de entrega de paquetes requiere que las dimensiones de una caja rectangular sea tal que la longitud más el doble del ancho más el doble de la altura no rebase los 90 cm. ¿Cuál es el volumen de la caja más grandes que se podrá enviar?

34. Utiliza los multiplicadores de Lagrange para encontrar la mínima distancia del punto (2, 1, 1) al plano $x + y + z = 1$.

Desarrollo de las soluciones de algunos de los problemas propuestos

5. Recuerda que los límites iterados en el origen vienen a significar los límites siguiendo cada uno de estos dos caminos:



Cuando f sigue el camino (1) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ es <u>0</u> pues f valdría constantemente 0 en el entorno señalado.

Exactamente igual cuando f sigue el camino (2).

Pero $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ no existe pues al acercarse (x, y) a $(0, 0)$ siguiendo los caminos dados por $y = mx$, el valor de f va a depender de m. En efecto: $f(x,y) = \dfrac{mx^2}{x^2+m^2x^2} = \dfrac{m}{1+m^2}$.

8. Sabemos que, $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = L$ significa que para cada $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que si $0 < \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2} < \delta$, entonces $\left|f(x,y)-L\right| < \varepsilon$. Si expresamos x e y como $x = x_0 + r\cos\theta$, $y = y_0 + r \operatorname{sen}\theta$, con $\theta \in [0, 2\pi)$, $r > 0$, tenemos que $\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2} = r$ y $f(x, y) = f(x_0 + r\cos\theta, y_0 + r\operatorname{sen}\theta)$. Así pues, $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = L$ significará que para cada $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$, tal que si $0 < r < \delta$, entonces $|f(x_0 + r\cos\theta, y_0 + r\operatorname{sen}\theta) - L| < \varepsilon$, que era precisamente lo que nos pedían probar.

9. No hay más que escribir de qué funciones se trata:

La función <u>producto escalar</u>, representada por <, >, es la función que al par de vectores $\vec{x}$, $\vec{y}$ le asocia el número real $x_1y_1 + x_2y_2 + ... + x_ny_n$ siendo $\vec{x} = (x_1,..., x_n)$ e $\vec{y} = (y_1,..., y_n)$, es decir, es la función que a la $2n$-upla de números $(x_1, x_2..., x_n, y_1, y_2,..., y_n)$ le asocia el número real $\sum\limits_{i=1}^{n} x_iy_i$. Como se trata de suma de funciones continuas, es continua.

La función <u>distancia</u>, representada por || , || es la función que al par de puntos x, y, dados por $x = (x_1,..., x_n)$ e $y = (y_1,..., y_n)$ les asocia el número $\left[(x_1 - y_1)^2 + ... + (x_ny_n)^2\right]^{\frac{1}{2}}$, es decir, es la función que a la $2n$-upla de números $(x_1,..., x_n, y_1,..., y_n)$ le asocia el número $\left(\sum (x_i - y_i)^2\right)^{1/2}$, función continua en todo $\mathbb{R}^{2n}$ por ser suma y composición de funciones continuas.

21. a) $f(x, y) = \sqrt[3]{xy}$.

Sabemos que si f fuera diferenciable en el origen, existiría la derivada direccional de f en ese punto, en la dirección de cualquier vector $\vec{v}$ y vendría dada por el producto escalar $\overrightarrow{\text{grad}} f(0,0) \cdot \vec{v}$. Ocurre, sin embargo, que tenemos serias dudas de que f sea diferenciable en el origen, pues $\sqrt[3]{x}$ y $\sqrt[3]{y}$ no son derivables en 0. Así que para calcular las derivadas direccionales, apliquemos la definición.

Recordemos: Sea $\vec{v}$ un vector con $\left|\vec{v}\right| = 1$. $D_{\vec{v}}\, f(a) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(a+hv) - f(a)}{h}$

Sea $\vec{v}$ = (r, s) $D_{\vec{v}}\, f(0,0) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(hv) - 0}{h}$ = $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\sqrt[3]{h^2 rs}}{h}$. Si ni r ni s son 0, no existe $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\sqrt[3]{h^2 rs}}{h}$ pues no existe $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\sqrt[3]{h^2}}{h}$. Si r = 0, tenemos la derivada direccional según (0, 1), o sea, $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ que existe y vale 0 pues $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\sqrt[3]{h^2 rs}}{h} = 0$ ya que es 0 el numerador. Análogamente existe la derivada direccional si s = 0, o sea, en la dirección de (1, 0) es decir, $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ y vale también 0. Resumiendo: $f(x, y) = \sqrt[3]{xy}$ presenta en (0, 0) derivadas parciales pero ninguna otra derivada direccional.

22. Recordemos que la derivada direccional de F en (0, 1) según la dirección del vector $\vec{v}$ viene dada por $\vec{\nabla} F(0,1) \cdot \vec{v}$, por lo que será máxima cuando la dirección de $\vec{v}$ coincida con la de $\vec{\nabla} F(0,1)$. Calculemos, pues, $\vec{\nabla} F(0,1)$:

$\dfrac{\partial F}{\partial x} = -4xe^{-x^2}$; $\dfrac{\partial f}{\partial y} = -6ye^{-3y^2}$, así que $\vec{\nabla} F(0,1)$ = (0, –6) con lo que la dirección de máximo cambio, es decir, la de más rápida escalada, es la indicada por el vector unitario $-\vec{j}$.

25. La superficie dada es $z = 1 - x^2 - y^2$, o sea: $x^2 + y^2 + z - 1 = 0$. Un vector normal al plano tangente en (x_0, y_0, z_0) es el $\nabla f\,(x_0, y_0, z_0)$ es decir: $(2x_0, 2y_0, 1)$.

   a) $2x + 2y + z + D = 0$ y como pasa por (1, 1, –1), $D = -3$ y el plano es $2x + 2y + z - 3 = 0$.

   b) Un vector direccional de la recta dada es (3, 3, 0) ó más cómodo (1, 1, 0).

   Así pues $(2x_0, 2y_0, 1) \perp (1, 1, 0) \Rightarrow x_0 = -y_0$. Así pues, el plano tangente en cualquier punto de coordenadas $(x_0, -x_0, 1-2x_0^2)$ es paralelo a la recta dada, y debe ser, pues, de la forma $2x_0x - 2x_0y + z + D = 0$. Como debe contener a los puntos (3, 0, 3) y (0, –3, 3), deberá verificarse que $6x_0 + 3 + D = 0$ y el plano será de la forma $2x_0x - 2x_0y + z - 3 - 6x_0 = 0$. El valor de x_0 lo obtenemos ahora haciendo notar que pasa por $(x_0, -x_0, 1-2x_0^2)$, es decir: $2x_0^2 + 2x_0^2 + 1 - 2x_0^2 - 3 - 6x_0 = 0 \Rightarrow x_0 = \dfrac{3 \pm \sqrt{13}}{2}$ y resultan dos planos con la condición pedida.

   c) Los planos buscados son de la forma $2x_0x - 2x_0y + z + D = 0$ y, como pasan por el origen, es $D = 0$. Como, por otra parte, deben pasar por $(x_0, y_0, 1-x_0^2-y_0^2)$, estos números deben verificar que $2x_0^2 + 2y_0^2 + 1 - x_0^2 - y_0^2 = 0$, o sea, $x_0^2 + y_0^2 + 1 = 0$, de donde sigue que no existe tal plano.

30. a) Una condición necesaria para que z presente un máximo o un mínimo en (a, b) es que $\dfrac{\partial z}{\partial x}(a,b) = 0$ y $\dfrac{\partial z}{\partial y}(a,b) = 0$. Veamos éstas: $\dfrac{\partial z}{\partial x} = 2x + 2y$, $\dfrac{\partial z}{\partial y} = -2y + 2x$, así que el único punto en el que se anulan simultáneamente es en (0, 0), por lo que éste punto es el único

candidato a máximo o mínimo, pero si acudimos al hessiano de z, observamos que

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \\ \dfrac{\partial^2 F}{\partial y \partial x} & \dfrac{\partial^2 F}{\partial y^2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = -8,$$

con lo que concluimos que (0, 0) no es ni máximo ni mínimo sino un punto de silla. Es importante que observes que no habría hecho falta acudir al hessiano para concluir que (0, 0) no era ni máximo ni mínimo, pues $z = x^2 - y^2 + 2xy = (x + y)^2 - 2y^2$ con lo que

$z\,(0, 0) = 0$, $z\,(k, 0) > 0$ y $z\,(0, k) < 0$ si $k \neq 0$.

b) Nos piden el máximo y el mínimo de z cuando nos restringimos a los puntos (x, y) tales que $x^2 + y^2 = 1$.

Como es muy cómodo parametrizar dicha circunferencia, hagámoslo y nos limitaremos a calcular el máximo y el mínimo en un cierto intervalo de una función de una variable.

Los (x, y) tales que $x^2 + y^2 = 1$ son los (x, y) con $x = \cos t$, $y = \operatorname{sen} t$ y $t \in [0, 2\pi]$, por lo que $z = \cos^2 t - \operatorname{sen}^2 t + 2\operatorname{sen} t \cos t = \cos 2t + \operatorname{sen} 2t$ con $t \in [0, 2\pi]$.

La forma más cómoda de calcular el máximo y el mínimo de esta z en $[0, 2\pi]$ es observando que $z^2 = 1 + \operatorname{sen} 4t$, por lo que z^2 será máxima si $\operatorname{sen} 4t = 1 \Rightarrow t = \dfrac{\pi}{8}$ y, para este valor, z alcanzará el máximo valor que será $\cos\dfrac{\pi}{4} + \operatorname{sen}\dfrac{\pi}{4} = \sqrt{2}$, así que el mínimo sería $-\sqrt{2}$ si lo alcanzara, que sí lo hace, en $t = \dfrac{3\pi}{8}$. En resumen: $z = x^2 - y^2 + 2xy$ alcanza en la circunferencia de centro (0, 0) y radio 1 el máximo en $\left(\cos\dfrac{\pi}{8},\ \operatorname{sen}\dfrac{\pi}{8}\right)$ y el mínimo en $\left(\cos\dfrac{3\pi}{8},\ \operatorname{sen}\dfrac{3\pi}{8}\right)$.

c) Por lo visto en a) y b) los candidatos a máximo y mínimo serían los puntos del interior con derivadas parciales nulas y los puntos de la frontera y como hemos visto en b) que, en la frontera, el máximo y el mínimo se alcanzan en los puntos anteriormente señalados, sigue que los candidatos a máximo y mínimo para este apartado c) son: (0, 0), $\left(\cos\dfrac{\pi}{8},\ \operatorname{sen}\dfrac{\pi}{8}\right)$ y $\left(\cos\dfrac{3\pi}{8},\ \operatorname{sen}\dfrac{3\pi}{8}\right)$. Calculando el valor de z en estos puntos, concluimos que el máximo y el mínimo de z en $\{(x, y) / x^2 + y^2 \leq 1\}$ se alcanzan en los mismos puntos que el máximo y mínimo de z en $\{(x, y) / x^2 + y^2 = 1\}$.

33. Hay que hacer máxima la función $V = f\,(x, y, z) = xyz$ sometida a las restricciones $x + 2y + 2z \leq 90$, $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$.

Veamos, en primer lugar, dónde están los candidatos a máximo si $0 < x + 2y + 2z < 90$.

En ellos, $\dfrac{\partial F}{\partial x} = 0$, $\dfrac{\partial F}{\partial y} = 0$, $\dfrac{\partial F}{\partial z} = 0$, es decir: $yz = 0$, $xz = 0$, $xy = 0$, cuyas soluciones son cualesquiera puntos de la forma $(x, 0, 0)$, $(0, y, 0)$, $(0, 0, z)$.

Estudiemos ahora los candidatos a máximo de f en los (x, y, z) tales que $x + 2y + 2z = 90$. Para ello, utilizaremos el método de los multiplicadores de Lagrange:

Consideremos la función $g(x, y, z) = f(x, y, z) - \lambda(x + 2y + 2z - 90)$ y resolvamos el sistema $\vec{\nabla} g = 0$, $x + 2y + 2z = 90$.

$\frac{\partial g}{\partial x} = yz - \lambda$; $\frac{\partial g}{\partial y} = xz - 2\lambda$; $\frac{\partial g}{\partial z} = xy - 2\lambda$, con lo que nuestro sistema se reduce al

$yz - \lambda = 0$; $xz - 2\lambda = 0$; $xy - 2\lambda = 0$, $x + 2y + 2z = 90$.

De las primeras ecuaciones, concluimos que $2yz = xz$ y de la 2º y 3º, $xz = xy$, así que $2y = x$, $z = y$, por lo que en la última podemos escribir $2y + 2y + 2y = 90$, es decir, $y = 15$. Así pues, sabemos que el máximo se encuentra en (30, 15, 15) o en los puntos del interior $(x, 0, 0)$, $(0, y, 0)$, $(0, 0, z)$, que obviamente está en (30, 15, 15), para el que el volumen es $V = 30 \cdot 15 \cdot 15 = 3750$ cm^3.

<u>Análisis matemático. Ingeniería Informática. Hoja nº 10 (Tema 10)</u>

1. Calcula $\int_1^2 \int_0^4 \left(x^2 - 2y^2 + 1\right) \; dxdy$

2. Calcular $\int_0^{\pi/2} \int_0^{\operatorname{sen}\theta} \theta r \;\; dr \;\; d\theta$.

3. Esboza la región R cuya área viene dada por la integral iterada $\int_0^1 \int_{y^2}^{\sqrt[3]{y}} dx \;\; dy$.

   Cambia el orden de integración y comprueba que ambas integrales dan la misma área.

4. Cambia el orden de integración de:

   a) $\int_0^2 \int_{x^2}^{8-x^2} f\left(x, \; y\right) \; dydx$; b) $\int_0^1 \int_0^{\min\left(1, \log\frac{1}{y}\right)} f(x,y) \;\; dxdy$; c) $\int_0^{R-\frac{\sqrt{2}}{2}} \int_0^x f(x,y) \;\; dydx$.

5. Calcula la integral $\int_0^1 \int_y^1 \operatorname{sen} x^2 \;\; dxdy$.

6. Esboza la región R y calcula la integral $\int_0^6 \int_{y/2}^3 \left(x+y\right) \;\; dxdy$.

7. Dada $\iint_R \dfrac{y}{x^2+y^2} dA$ donde R es el triángulo limitado por las rectas $y = x$, $y = 2x$ y $x = 2$, plantea las integrales para dx dy y para dy dx, y utiliza la más cómoda para calcular la integral sobre la región dada R.

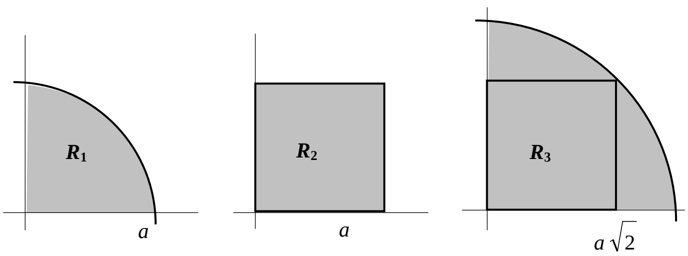
8. Calcula el volumen del sólido limitado por el paraboloide $z = 4 - x^2 - y^2$ y el plano xy.

9. Calcula la integral iterada $\int_0^{\log 10} \int_{e^x}^{10} \dfrac{1}{\log y} dy \;\; dx$.

10. Calcula la derivada de la función $\varphi(x) = \int_0^{1+x^2} \dfrac{e^{xy}}{1+y^2} dy$.

11. Probar que $\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$. Para ello sigue las indicaciones siguientes:

    Sean R_1, R_2 y R_3 según el dibujo y $f(x, y) = e^{-x^2-y^2}$.



a) Probar que $\int_{R_1} f = \dfrac{\pi\left(1-e^{-a^2}\right)}{4}$ y que $\int_{R_3} f = \dfrac{\pi\left(1-e^{-2a^2}\right)}{4}$.

b) Probar $\dfrac{\pi\left(1-e^{-a^2}\right)}{4} < \int_0^a e^{-x^2}dx < \dfrac{\pi\left(1-e^{-2a^2}\right)}{4}$.

c) Probar que $\int_0^\infty e^{-x^2}dx = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Una vez que has probado c), demuestra que $\int_{-\infty}^{\infty} \dfrac{1}{\sqrt{2\pi\tau}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\eta}{\tau}\right)^2} dx = 1$ donde $\eta \in \mathbb{R}$ y $\tau > 0$.

(Esta última función integrando es la función de densidad de la distribución normal).

12. Calcula la integral doble $\int_0^2 \int_0^{\sqrt{2x-x^2}} x \; dy \; dx$ mediante cambio a polares.

13. Convertir la suma de las integrales dobles $\int_0^2 \int_0^x \sqrt{x^2+y^2}\,dydx + \int_2^{2\sqrt{2}} \int_0^{\sqrt{8-x^2}} \sqrt{x^2+y^2}\,dydx$ en una integral doble utilizando el cambio a polares y calcular dicha integral.

14. Utilizar coordenadas polares para calcular $\iint_R f(x,y) \; dA$ donde $f(x,y) = \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}$ y R es la región formada por los puntos (x, y) tales que $x^2 + y^2 \le 1$, $0 \le x$, $0 \le y$.

15. Calcula $\int_0^2 \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \int_0^{x^2} x \; dz \; dy \; dx$.

16. Rescribe la integral $\int_0^1 \int_y^1 \int_0^{\sqrt{1-y^2}} dz \; dx \; dy$ en el orden dz dy dx.

17. Utiliza una integral triple para calcular el volumen del sólido limitado por los cilindros $z^2 = 1 - x^2$ e $y^2 = 1 - z^2$ en el primer octante.

18. Calcula el jacobiano para el cambio de variables $x = e^u \operatorname{sen} v$, $y = e^u \cos v$.

19. Calcula $\iint_R 4(x+y)\, e^{x-y} dydx$ utilizando el cambio de variables $x = \dfrac{1}{2}(u+v)$, $y = \dfrac{1}{2}(u-v)$, siendo R el triángulo de vértices (0, 0), (1, 1) y (–1, 1).

20. Utiliza un cambio de variables para calcular $\iint_R \sqrt{(x-y)(x+4y)} \; dy\, dx$, siendo R el paralelogramo de vértices (0, 0), (1, 1), (5, 0) y (4, –1).

21. Si R es la región del círculo $x^2 + y^2 \le 25$ a la izquierda de la recta $x = 3$, escribe los límites de integración para $\iint_R f(x,y) \; dA$ tanto para dx dy como para dy dx. Calcula el área de dicha región.

22. Calcula el área de la superficie que define la función $f(x, y)$ encima de la región R siendo $f(x, y) = 16 - x^2 - y^2$ y $R = \{(x, y) / x^2 + y^2 \le 16\}$.

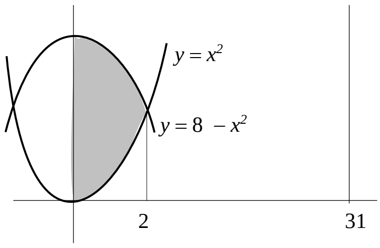
23. Calcula las integrales triples,

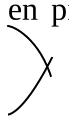
a) $\iiint_B (x^2+y^2+z^2)^{-1/2}\,dxdydz$, siendo $B=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2\le 4\right\}$.

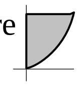
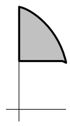
b) $\iiint_C (x^4+2x^2y^2+y^4)dxdydz$, siendo $C=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x^2+y^2\le 4,\ \ 0\le z\le \dfrac{1}{\pi}\right\}$.

Desarrollo de las soluciones de algunos de los problemas propuestos

4. a) Hay que cambiar el orden de integración en $\int_0^{31}\int_{x^2}^{8-x^2} f\left(x,\ y\right)\ dydx$.



Hagamos un esbozo de la región donde nos piden integrar y observamos que es la sombreada, es decir, que hay que cambiar el orden de integración en $\int_0^{2}\int_{x^2}^{8-x^2} f\left(x,\ y\right)\ dydx$. Observa que la región sombreada, si quieres integrar en primer lugar sobre x nos plantea un problema grave pues  no lo podemos escribir como $x = g\ (y)$.

Así pues, integraríamos primero sobre  y luego sobre  quedándonos pues,

$$\int_0^4\left(\int_0^{\sqrt{y}} f\quad dx\right)\ dy+\int_4^8\left(\int_0^{\sqrt{8-y}} f\quad dx\right)\ dy.$$

Observa que es mucho más cómodo en este caso integrar en el orden *dy dx* que en el *dx dy*.

10. Un teorema (de Leibnitz) sobre derivación bajo el signo integral, dice que si $f(x, y)$ y $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x}$ son continuas en $R = [a, b] \times [c, d]$, entonces la derivada de la función $\varphi(x)=\int_a^b f(x,y)\ \ dy$ es $\varphi'(x)=\int_a^b \dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x}\ \ dy$. Una generalización de dicho teorema para cuando alguno (o los dos) límites de integración no son constantes, diría que si $\varphi(x)=\int_a^{b(x)} f(x,y)\ \ dy$ con $b(x)$ derivable, es $\varphi'(x)=\int_a^{b(x)} \dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x}\ \ dy+f\left(x,b(x)\right)b'(x)$.

En nuestro caso, las funciones que aparecen verifican las condiciones, siendo

$f(x,y)=\dfrac{e^{xy}}{1+y^2}$, por lo que $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x}=\dfrac{ye^{xy}}{1+y^2}$, con lo que

$$\varphi'(x)=\int_0^{1+x^2}\frac{ye^{xy}}{1+y^2}\ \ dy+2x\frac{e^{x(1+x^2)}}{1+(1+x^2)^2}.$$

11. a) $I_1=\int_{R_1} f=\int_0^a\left(\int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} e^{-x^2-y^2}dy\right)\ \ dx$.

Hacemos el cambio a polares $x = r\cos\theta$, $y = r\,\text{sen}\,\theta$ por lo que $I_1 = \int_0^{\pi/2}\left(\int_0^a e^{-r^2} r\ \ dr\right)\ d\theta$ $= \int_0^{\pi/2}\left(-\frac{1}{2}e^{-r^2}\right)_0^a\ d\theta = \int_0^{\pi/2}\left(-\frac{1}{2}e^{-a^2}+\frac{1}{2}\right)\ d\theta = \left[\frac{\theta}{2}-\frac{1}{2}e^{-a^2}\theta\right]_0^{\pi/2} =$ $\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{4}e^{-a^2} = \frac{\pi}{4}\left(1-e^{-a^2}\right)$.

Análogamente $I_3 = \int_{R_3} f = \frac{\pi}{4}\left(1-e^{-(a\sqrt{2})^2}\right) = \frac{\pi}{4}\left(1-e^{-2a^2}\right)$.

b) Hay que probar que $\frac{\pi}{4}\left(1-e^{-a^2}\right) < \left(\int_0^a e^{-x^2}dx\right)^2 < \frac{\pi}{4}\left(1-e^{-2a^2}\right)$. Sabemos que $\frac{\pi}{4}\left(1-e^{-a^2}\right) <$ $< \int_{R_2} f < \frac{\pi}{4}\left(1-e^{-2a^2}\right)$ y como $\int_{R_2} f = \int_0^a\left(\int_0^a e^{-x^2-y^2}dy\right)\ dx = \int_0^a\left(\int_0^a e^{-x^2}e^{-y^2}dy\right)\ dx =$ $= \int_0^a\left(e^{-x^2}\int_0^a e^{-y^2}dy\right)\ dx = \int_0^a e^{-y^2}dy\int_0^a e^{-x^2}dx = \left(\int_0^a e^{-x^2}dx\right)^2$, hemos probado lo que nos pedían.

c) Tomando límites en b) cuando $a \to \infty$, podremos escribir $\frac{\pi}{4} \le \left(\int_0^\infty e^{-x^2}dx\right)^2 \le \frac{\pi}{4}$, es decir:

$$\int_0^\infty e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} .$$

d) Para calcular $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\tau}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\eta}{\tau}\right)^2}dx$, hagamos $\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{x-\eta}{\tau}\right) = u$ y $\frac{1}{\sqrt{2}\tau}dx = du$, lo que nos lleva a $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\tau}e^{-u^2}\sqrt{2}\tau\ \ du$, es decir: $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-u^2}\ \ du$. Como e^{-u^2} es una función par y $\int_0^\infty\frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-u^2}\ \ du = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{2} = \frac{1}{2}$, sigue que la integral pedida es $2\cdot\frac{1}{2} = 1$

Análisis matemático. Ingeniería Informática. Hoja nº 11 (Tema 11)

1. Demuestra que los vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ son coplanarios si y sólo si $(\vec{u} \wedge \vec{v}) \cdot \vec{w} = 0$.

2. Calcula $\lim_{t \to 0} \left(\frac{1 - \cos t}{t} \vec{i} + t^2 \vec{j} \right)$.

3. Para las funciones vectoriales $r(t) = 3t\vec{i} + 4t\vec{j}$ y $u(t) = 4t\vec{i} + t^2\vec{j}$, calcula las derivadas de:
   a) $r(t)$; b) $r(t)\, u(t)$; c) $3r(t) - u(t)$; d) $\|r(t)\|$.

4. Encuentra las discontinuidades de la función $F(t) = \begin{cases} (t+1, 2t-3) & \text{si } 0 \le t < 1 \\ (t^2+1, t) & \text{si } 1 \le t < 2 \\ (7-t, |t-4|) & \text{si } 2 \le t \end{cases}$

5. Sea $F(t) = (e^{-t} \cos t, e^{-t} \operatorname{sen} t)$. Calcula $\lim_{t \to \infty} F(t)$ y $\lim_{t \to -\infty} F(t)$.

6. Comprobar que la curva $G(s) = (s \cos s, s \operatorname{sen} s, s^2 + 1)$ está sobre la superficie $x^2 + y^2 = z - 1$. Indicar cómo proceder para hacer un dibujo aproximado de la misma.

7. Sea $F(t) = \left(\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2} \right)$ con $t \in [0, 1]$.
   a) Calcular $F\left(\frac{1}{4}\right)$, $F\left(\frac{1}{3}\right)$, $F\left(\frac{1}{2}\right)$ y $F\left(\frac{2}{3}\right)$.
   b) Encontrar la imagen de F.
   c) Probar que F es una función inyectiva.

8. Encontrar el vector de posición $\vec{r}(t)$ si $\vec{r}'(t) = 4e^{2t}\vec{i} + 3e^{t}\vec{j}$ y $r(0) = 2i$.

9. Utilizar la aceleración de un móvil $\vec{a}(t) = t\vec{i} + t\vec{j}$ para hallar la velocidad y la función de posición si $\vec{v}(1) = 5\vec{j}$ y $\vec{r}(1) = 0$. Hallar la posición del móvil en el intervalo $t = 2$.

10. Encontrar el vector aceleración y demostrar que su dirección es siempre hacia el centro del círculo si $\vec{r}(t) = b \cos wt\,\vec{i} + b \operatorname{sen} wt\,\vec{j}$.

11. Calcula la longitud del arco descrito por la curva $\vec{r}(t) = a \cos^3 t\,\vec{i} + a \operatorname{sen}^3 t\,\vec{j}$ en el intervalo $[0, 2\pi]$.

12. Calcula $\int_1^2 (3t\vec{i} + 3\vec{k}) \wedge [\log t\,\vec{j} - t^2\vec{k}]\,dt$.

13. Halla el vector velocidad $\vec{V}$, la velocidad $\frac{ds}{dt}$ y la aceleración $\vec{A}$ del cuerpo con vector desplazamiento $\vec{R}(t) = t\vec{i} + 2t\vec{j} + te^{t}\vec{k}$.

Desarrollo de las soluciones de algunos de los problemas propuestos.

5. Estudiemos los límites cuando $t \to \infty$ y $t \to -\infty$ de cada una de las componentes de F.

   $F(t) = \left(F_1(t), F_2(t)\right)$ con $F_1(t) = e^{-t}\cos t$ y $F_2(t) = e^{-t}\operatorname{sen} t$. Si $t \to \infty$, $\lim\limits_{t\to\infty} e^{-t}\cos t = 0$ pues $\lim\limits_{t\to\infty} e^{-t} = 0$ y cos t es una función acotada. Análogamente $\lim\limits_{t\to\infty} e^{-t}\operatorname{sen} t = 0$, con lo que $\lim\limits_{t\to\infty} F(t)$ =(0, 0).

   En cambio, cuando $t \to -\infty$, no va a existir $\lim\limits_{t\to\infty} F(t)$, pues no va a existir, por ejemplo, $\lim\limits_{t\to-\infty} F_1(t)$.

   En efecto: $\lim\limits_{t\to-\infty} F_1(t) = \lim\limits_{t\to-\infty} e^{-t}\cos t = \lim\limits_{t\to\infty} e^{t}\cos(-t) = \lim\limits_{t\to\infty} e^{t}\cos t$ y como la función cos t toma valores positivos y negativos en cualquier intervalo de longitud 2π, los valores $e^{t}\cos t$ se harán arbitrariamente grandes en valor absoluto, negativos y positivos e incluso también valdrán 0 en puntos de cualquier intervalo de longitud 2π por lo que no va a existir $\lim\limits_{t\to\infty} F(t)$.

6. Bastará ver que $(s \cos s)^2 + (s \operatorname{sen} s)^2 = s^2 + 1 - 1$ lo que es inmediato sin más que observar que $(s \cos)^2 + (s \operatorname{sen} s)^2 = s^2$. Para hacer un dibujo aproximado de la misma, observemos que si $s = 0$, obtenemos el punto (0, 0, 1) y éste es el único punto donde la curva corta al eje z pues, salvo para $s = 0$, $s \cos s$ y $s \operatorname{sen} s$ no se anulan simultáneamente. Por otra parte, siempre estará en el semiespacio superior ($z \geq 1$ siempre).

   Finalmente, se observan simetrías ocasionadas al dar valores iguales en valor absoluto y de signo contrario a s. Así pues, para $s = k$ obtenemos $(k \cos k,\ k \operatorname{sen} k,\ k^2 + 1)$ y para $s = -k$, $\left(-k\cos(-k), -k\operatorname{sen}(-k), k^2+1\right) = (-k\cos k, k\operatorname{sen} k, k^2+1)$.

   Finalmente, observará que pasará por el plano $x = 0$ y por el $y = 0$ con periodicidad π.

7. Para el apartado a) basta sustituir t por los valores dados. Para los apartados b) y c) es muy útil observar que $\dfrac{1-t^2}{1+t^2} = \cos 2\alpha$ y $\dfrac{2t}{1+t^2} = \operatorname{sen} 2\alpha$ siendo $t = \operatorname{tg} \alpha$. Así pues, escribamos $F(t)$ como $F(\alpha) = (\cos 2\alpha, \operatorname{sen} 2\alpha)$ y si $t \in [0, 1]$, $\alpha \in [0, \pi/4]$, con lo que nuestra curva es $F(\beta) = (\cos \beta, \operatorname{sen} \beta)$ con $\beta \in [0, \pi/2]$, curva que sabemos que consiste en el primer cuadrante de la circunferencia unidad.

Análisis matemático. Ingeniería Informática. Hoja nº 12 (Tema 12)

1. Calcula el rotacional del campo vectorial $\vec{F}(x,y,z) = xyz\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ en el punto (1, 2, 1).

2. Calcula el rotacional del campo vectorial $\vec{F}(x,y,z) = \left(\operatorname{arctg}\dfrac{x}{y}\right)\vec{i} + \left(\log\sqrt{x^2+y^2}\right)\vec{j} + \vec{k}$.

3. Calcula $\operatorname{rot}(\operatorname{rot}\vec{F})$ si $\vec{F}(x,y,z) = xyz\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$.

4. Calcula la divergencia del campo vectorial $\vec{F}(x,y,z) = \operatorname{sen} x\vec{i} + \cos y\vec{j} + z^2\vec{k}$.

5. Calcula la divergencia del rotacional del campo vectorial $\vec{F}(x,y,z) = xyz\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$.

6. Sea $F(\vec{r}) = \dfrac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3}$ siendo $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$. Prueba que div $\vec{F} = 0$. Si $F(\vec{r}) = \dfrac{\vec{r}}{|\vec{r}|^k}$ con $k \neq 3$, prueba que, entonces, div $\vec{F} \neq 0$

7. Sea f un campo escalar y F uno vectorial . Probar que:
   a) div $\nabla f = \Delta f$; b) rot $\nabla f = 0$; c) div (rot F) = 0; d) div $(f \cdot F) = f \cdot$ div $F + F \cdot \nabla f$;
   e) rot (rot F) = ∇ div $F - \Delta F$ donde $\Delta F = (\Delta F_1, \Delta F_2, \Delta F_3)$.

8. Calcula $\int_c \left(x^2+y^2+z^2\right) ds$ a lo largo del camino C: $\vec{r}(t) = \operatorname{sen} t\,\vec{i} + \cos t\,\vec{j} + 8\vec{k}$ con $0 \le t \le \dfrac{\pi}{2}$.

9. Calcula $\int_c \left(x^2+y^2\right) ds$ a lo largo del camino C: $x^2 + y^2 = 1$ desde (1, 0) a (0, 1) en sentido antihorario.

10. Calcula $\int \left(x + 4\sqrt{y}\right) ds$ donde C es el triángulo de vértices (0, 0), (1, 0) y (0, 1) recorrido en sentido antihorario.

11. Determina si $\vec{F}(x,y) = xe^{x^2y}(2y\vec{i} + x\vec{j})$ es conservativo y, si lo es, encuentra la función potencial $f(x, y)$.

12. Determina si en $\vec{F}(x,y,z) = \operatorname{sen} y\vec{i} - x\cos y\vec{j} + \vec{k}$ es conservativo.

13. Determina si $\vec{F}(x,y,z) = \dfrac{1}{y}\vec{i} - \dfrac{x}{y^2}\vec{j} + (2z-1)\vec{k}$ es conservativo y, si lo es, encuentra la función potencial $f(x, y, z)$.

14. Calcula el valor de la integral de línea $\int_c 2xy\,dx + (x^2+y^2)\,dy$ a lo largo de:
    a) Elipse $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{16} = 1$ desde (5, 0) hasta (0, 4).
    b) Parábola $y = 4 - x^2$ desde (2, 0) hasta (0, 4).

15. Utilizar el teorema fundamental para calcular $\int_C e^x \operatorname{sen} y\,dx + e^x \cos y\,dy$ donde C es el círculo de cicloide $x = \theta - \operatorname{sen}\theta$, $y = 1 - \cos\theta$ desde (0, 0) hasta $(2\pi, 0)$.

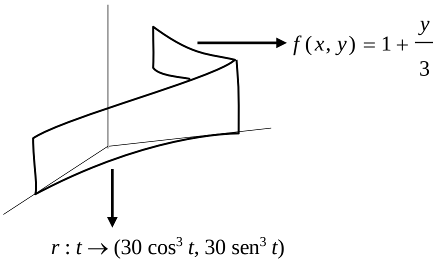
16. Comprobar el teorema de Green observando que $\int_C y^2\,dx + x^2\,dy = \int_R\int \left(\dfrac{\partial N}{\partial x} - \dfrac{\partial M}{\partial y}\right) dA$ siendo C la región limitada por $y = x$ e $y = \dfrac{x^2}{4}$.

17. Utilizar el teorema de Green para calcular la integral $\int_C (y-x)\,dx + (2x-y)\,dy$ siendo C la frontera de la región interior al rectángulo de vértices (5, 3), (–5, 3), (–5, –3) y (5, –3) y exterior al cuadrado de vértices (1, 1), (–1, 1), (–1, –1) y (1, –1).

18. Utilizar el teorema de Green para calcular $\int_C 2\operatorname{arctg}\frac{y}{x}\,dx + \lg(x^2+y^2)\,dy$ siendo C la frontera de la elipse $x = 4 + 2\cos\theta$, $y = 4 + \operatorname{sen}\theta$.

19. Utilizar una integral de línea para calcular el área de la región R limitada por la recta $y = 2x + 1$ y la parábola $y = 4 - x^2$.

20. La tía de Tom Sawyer le ha pedido que pinte ambos lados de la vieja valla (ver figura). Tom estima que por dejar que alguno de sus amigos pinte $\frac{1}{2}\,\mathrm{m}^2$ de valla, la víctima voluntaria le pagaría 100 ptas. ¿Cuánto puede ganar Tom, suponiendo que su tía le proporcione sin costo la pintura?



21. Calcula la integral de superficie $\int_S\int xy\,dS$ siendo S la superficie dada por $z = 9 - x^2$ para $0 \le x \le 2$ y $0 \le y \le x$.

22. Calcula la integral de superficie $\int_S\int \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dS$ siendo S la superficie dada por $z = \sqrt{x^2+y^2}$ con $x^2 + y^2 \le 4$.

23. Calcula $\int_S\int F\cdot N\,dS$ (el flujo de F a través de S siendo N el vector unitario normal hacia fuera a S) si $F(x,y,z) = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ y S es la superficie dada por $z = 9 - x^2 - y^2$ con $0 \le z$.

24. Comprueba el teorema de la divergencia obteniendo $\int_S\int \vec{F}\cdot\vec{N}\,dS$ como una integral de superficie y como una integral triple siendo $F(x,y,z) = 2x\vec{i} - 2y\vec{j} + z^2\vec{k}$ y S el cilindro dado por $x^2 + y^2 = 1$ con $0 \le z \le 4$.

25. Utiliza el teorema de la divergencia para calcular $\int_S\int \vec{F}\cdot\vec{N}\,dS$ siendo $F(x,y,z) = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ y S la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$.

26. Comprueba el teorema de Stokes obteniendo $\int_C \vec{F}dR$ como una integral de línea y como una integral de superficie siendo $\vec{F}(x,y,z) = xyz\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ y S la porción del plano $3x + 4y + 2z = 12$ que cae en el primer octante.

27. Utilizar el teorema de Stokes para calcular $\int_C \vec{F}dR$ para $F(x,y,z) = -\log\sqrt{x^2+y^2}\,\vec{i} + \operatorname{arctg}\frac{x}{y}\,\vec{j} + \vec{k}$ y S la porción del plano $z = 9 - 2x - 3y$ que cae en el primer octante y sobre un pétalo de la curva $r = 2\operatorname{sen} 2\theta$.

Desarrollo de las soluciones de algunos problemas propuestos.

6. Tenemos que $F(x,y,z)=\dfrac{x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}}{|r|^3}$ donde $|r|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$. Recordemos que divergencia de *F*, representada por $\nabla F=\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{x}{r^3}\right)+\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{y}{r^3}\right)+\dfrac{\partial}{\partial z}\left(\dfrac{z}{r^3}\right)$. (Se representa a veces por div *F*).

Necesitamos calcular tres derivadas parciales. La primera es

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{r^3}\right)=\frac{r^3\dfrac{\partial x}{\partial x}-x\dfrac{\partial r^3}{\partial x}}{r^6}=\frac{r^3-3xr^2\dfrac{\partial r}{\partial x}}{r^6}=\frac{r-3x\dfrac{\partial r}{\partial x}}{r^4}.$$

Ahora bien: $\dfrac{\partial r}{\partial x}=\dfrac{\partial}{\partial x}\sqrt{x^2+y^2+z^2}=\dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=\dfrac{x}{r}$.

Así pues, $\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{x}{r^3}\right)=\dfrac{r-3x\dfrac{x}{r}}{r^4}=\dfrac{1}{r^3}-\dfrac{3x^2}{r^5}$.

Haciendo exactamente lo mismo para las otras dos tendríamos que $\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{y}{r^3}\right)=\dfrac{1}{r^3}-\dfrac{3y^2}{r^5}$ y $\dfrac{\partial}{\partial z}\left(\dfrac{z}{r^3}\right)=\dfrac{1}{r^3}-\dfrac{3z^2}{r^5}$, así que $\nabla F=\left(\dfrac{1}{r^3}-\dfrac{3x^2}{r^5}\right)+\left(\dfrac{1}{r^3}-\dfrac{3y^2}{r^5}\right)+\left(\dfrac{1}{r^3}-\dfrac{3z^2}{r^5}\right)=$

$=\dfrac{3}{r^3}-\dfrac{3(x^2+y^2+z^2)}{r^5}=\dfrac{3}{r^3}-\dfrac{3r^2}{r^5}=0$, como queríamos demostrar.

Para la segunda parte del problema procedemos de la misma forma:

Tenemos que, ahora, $\nabla F=\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{x}{r^k}\right)+\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{y}{r^k}\right)+\dfrac{\partial}{\partial z}\left(\dfrac{z}{r^k}\right)$ con $k\neq 3$.

Calculemos $\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{x}{r^k}\right)=\dfrac{r^k\dfrac{\partial x}{\partial x}-x\dfrac{\partial r^k}{\partial x}}{r^{2k}}=\dfrac{r^k-k\,xr^{k-1}\dfrac{\partial r}{\partial x}}{r^{2k}}=\dfrac{r-kx\dfrac{\partial r}{\partial x}}{r^{k+1}}$.

Al igual que antes, $\dfrac{\partial r}{\partial x}=\dfrac{x}{r}$, con lo que $\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{x}{r^k}\right)=\dfrac{r-kx\dfrac{x}{r}}{r^{k+1}}=\dfrac{1}{r^k}-\dfrac{kx^2}{r^{k+2}}$.

Haciendo exactamente lo mismo para las otras dos, tendríamos que

$\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{y}{r^3}\right)=\dfrac{1}{r^k}-\dfrac{ky^2}{r^{k+2}}$ y $\dfrac{\partial}{\partial z}\left(\dfrac{z}{r^3}\right)=\dfrac{1}{r^k}-\dfrac{kz^2}{r^{k+2}}$, con lo que

$$\nabla F=\left(\frac{1}{r^k}-\frac{kx^2}{r^{k+2}}\right)+\left(\frac{1}{r^k}-\frac{ky^2}{r^{k+2}}\right)+\left(\frac{1}{r^k}-\frac{kz^2}{r^{k+2}}\right)=\frac{3}{r^k}-\frac{k(x^2+y^2+z^2)}{r^{k+2}}=\frac{3}{r^k}-\frac{kr^2}{r^{k+2}}=$$

$=\dfrac{3}{r^k}-\dfrac{k}{r^k}=\dfrac{3-k}{r^k}\neq 0$ si $k\neq 3$ como queríamos probar.

7. c) Recordemos que dado el campo vectorial

$F(x, y, z) = P(x, y, z)\ \vec{i} + Q(x, y, z)\ \vec{j} + R(x, y, z)\ \vec{k}$, la divergencia de F, representada por div F es el campo escalar tal que (div F) $(x, y, z) = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$ y rotacional de F, representado por Rot F es el campo vectorial que asocia a cada (x, y, z) el vector $\begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}$.

Calculemos div (Rot F) y veamos que es $\underline{0}$.

Si $P = (x, y, z)$, (Rot F) $(x, y, z) = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)(x, y, z)\ \vec{i} - \left(\frac{\partial R}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial z}\right)(x, y, z)\ \vec{j}\ +$

$+ \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)(x, y, z)\ \vec{k}$, por lo que div (Rot F) sería

$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)(x, y, z) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial R}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial z}\right)(x, y, z) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)(x, y, z)$ que puedes desarrollar y ver que es $\underline{0}$ (recuerda el teorema de las derivadas cruzadas) u observar que es el desarrollo del determinante formal $\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}$ que sería cero por tener dos filas iguales.

20. Según se observa en la figura, la base de la valla en el primer cuadrante es la trayectoria $\gamma: [0, \pi/2] \to \mathbb{R}^2$ tal que $\gamma(t) = (30\cos^3 t, 30\,\text{sen}^3\, t)$ y la altura de la valla en cada punto (x, y) es $f(x, y) = 1 + y/3$. Así pues, el área de una cara de la mitad de la valla será $\int_\gamma f(x, y)\, ds = \int_\gamma (1 + y/3)\, ds$. Como $\gamma'(t) = (-90\cos^2 t\,\text{sen}\, t, 90\,\text{sen}^2 t\cos t)$, es

$\|\gamma'(t)\| = \sqrt{(-90\cos^2 t\,\text{sen}^2 t)^2 + (90\,\text{sen}^2 t\cos t)^2} = \sqrt{90\,\text{sen}^2 t\cos^2 t} = 90$ sen t cos t. Así pues, $\int_\gamma (1 + y/3)\, ds = \int_0^{\pi/2} (1 + 10\,\text{sen}^3 t)$ 90 sen t cos t dt = 90 $\int_0^{\pi/2} (\text{sen}\, t + 10\,\text{sen}^4 t)\cos t\, dt$. Haciendo sen $t = u$ y cos $t\ dt = du$, tenemos que $\int_\gamma (1 + y/3)\, ds = 90\int_0^1 (u + 10u^4)\, du = \left[\frac{u^2}{2} + 2u^5\right]_0^1 \cdot 90 = 225$ que será el área en el primer cuadrante. Así pues, el área de una cara de la valla es 450 m^2 y como hay que pintar las dos caras resultan 900 m^2, de donde sus amigos si además de pintarle la valla le dan 100 ptas. cada $\frac{1}{2}$ m^2, resulta que Tom Sawyer puede ganar $\left(900 : \frac{1}{2}\right) \cdot 100 = 180.000$