Análisis de Funciones de Variable Compleja

Hoja 1. Resultados básicos

1. Describe el conjunto de puntos del plano complejo que cumplen la ecuación:
   (a) $\operatorname{Im}(z+5i)=0$; (b) $\operatorname{Re}(z+3-2i)=1$.

2. Describe el conjunto de puntos del plano complejo que cumplen la ecuación:
   (a) $|z+1+i|=\sqrt{2}$; (b) $|z-1|=|z+2+i|$.

3. Sean $z,\ w\in\mathbb{C}$. Demostrar lo siguiente:
   (a) $|z-w|\geq \big||z|-|w|\big|$.
   (b) Si $|z+w|=|z-w|$ entonces $w=0$ ó z/w es imaginario puro (es decir, $\operatorname{Re}(z/w)=0$).
   (c) $|z-w|^2+|z+w|^2=2(|z|^2+|w|^2)$ (Igualdad del paralelogramo).

4. Demostrar que $|\operatorname{Re}(z)|+|\operatorname{Im}(z)|\leq\sqrt{2}|z|$ para todo $z\in\mathbb{C}$.

5. Encontrar la parte real e imaginaria de
$$\frac{1+i}{3-2i},\quad \frac{2+i}{2-i},\quad \frac{(1-i)^{18}}{(1+\sqrt{3}\,i)^{10}}\quad \text{y}\quad \frac{(3+8i)^2}{(1+i)^{10}}.$$

6. Dados los vectores $\vec{u}=(-5,3)\in\mathbb{R}^2$ y $\vec{v}=(4,1)\in\mathbb{R}^2$, Encontrar:
   a) El vector de $\mathbb{R}^2$ que resulta de girar $\vec{u}$ un ángulo de 90° en sentido contrario a las agujas del reloj.
   b) El vector de $\mathbb{R}^2$ que resulta de girar $\vec{v}$ un ángulo de 30° en el sentido de las agujas del reloj.

7. Calcular y representar en el plano complejo las raíces cúbicas de -1, i, 8 y $1+i$.

8. Calcular y representar en el plano complejo las raices cuartas de -1 y $8+8\sqrt{3}\,i$ y las raices cuadradas de $1+i$ y $(1-i)^{-1}$.

9. Demostrar que si z es una raíz n-ésima de la unidad distinta de 1 entonces
$$1+z+\cdots+z^{n-1}=0.$$

10. Deduce las siguientes identidades trigonométricas:
$$1+\cos\alpha+\cos 2\alpha+\cdots+\cos n\alpha=\frac{\cos(n\alpha/2)\sin((n+1)\alpha/2)}{\sin(\alpha/2)}$$
$$\sin\alpha+\sin 2\alpha+\cdots+\sin n\alpha=\frac{\sin(n\alpha/2)\sin((n+1)\alpha/2)}{\sin(\alpha/2)}$$
donde α es un ángulo tal que $\sin(\alpha/2)\neq 0$.

11. Demuestra la **Identidad de Lagrange**:
$$\left|\sum_{k=1}^{n} z_k w_k\right|^2=\left(\sum_{k=1}^{n}|z_k|^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n}|w_k|^2\right)-\sum_{k<j}|z_k\overline{w_j}-z_j\overline{w_k}|^2$$
y deduce la desigualdad de Cauchy-Schwarz:
$$\left|\sum_{k=1}^{n} z_k w_k\right|^2\leq\left(\sum_{k=1}^{n}|z_k|^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n}|w_k|^2\right).$$

12. Sea
$$g(x,y)=\begin{cases}\frac{xy}{x^2+2y^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0),\\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0),\end{cases}$$
y $h(x,y)=\sqrt{|x|}\,y^2$. Determinar en qué puntos es continua la función $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ dada por $f(x+iy)=g(x,y)+h(x,y)i$.

13. Determinar el disco de convergencia de las siguientes series de potencias:

$$(a)\ \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}z^n \quad (b)\ \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}z^{2n+1} \quad (c)\ \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}z^{2n}.$$

$$(d)\ \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(3+4i)^n}{(1+\frac{2i}{n})^{n^3}}(z-i)^n \quad (e)\ \sum_{n=0}^{\infty}(\sqrt[n]{n}-1)^n(z+3i)^n$$

$$(f)\ \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\log n+i)}{(1+i)^n}(z-1+2i)^n \quad (g)\ \sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^3}{(1+2i)^n}(z-1)^n$$

$$(h)\ \sum_{n=0}^{\infty}(2n+a^n)(z-i)^n \text{ con } a>0, \quad (i)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(3+i)^n}z^{2n}.$$

$$(j)\ \sum\frac{1}{n-4i}z^{2n}, \quad (k)\sum\frac{1}{2^n i}z^{n!}.$$

14. Encuentra todos los valores de $\log 1$, $\log i$, $\log(-i)$, $\log(-1+\sqrt{3}i)$ y $\log(1+i)$.

15. (a) Demostrar que $\operatorname{Log}(1+i)^2 = 2\operatorname{Log}(1+i)$, pero $\operatorname{Log}(-1+i)^2 \neq 2\operatorname{Log}(-1+i)$.
(b) En general, ¿qué relación hay entre $\operatorname{Log}(zw)$ y $\operatorname{Log} z + \operatorname{Log} w$?
(c) Encontrar una condición necesaria y suficiente para que $\operatorname{Log}(zw) = \operatorname{Log} z + \operatorname{Log} w$.

16. Dado $w \in \mathbb{C}$, demostrar que las soluciones $z \in \mathbb{C}$ de la ecuación $\cos z = w$ son los posibles valores de $-i\log[w \pm \sqrt{w^2-1}]$. ¿Está la función $\cos z$ acotada en $\mathbb{C}$?

17. Dado $w \in \mathbb{C}$, demostrar que las soluciones $z \in \mathbb{C}$ de la ecuación $\operatorname{sen} z = w$ son los posibles valores de $-i\log[iw \pm \sqrt{1-w^2}]$. ¿Está la función $\sin z$ acotada en $\mathbb{C}$?

18. Resolver las ecuaciones (a) $\cos z = i$; (b) $e^{iz} = 4i$.

19. Comprueba las siguientes versiones complejas de conocidas identidades reales:
a) $\operatorname{sen}^2 z + \cos^2 z = 1$.
b) $\operatorname{sen}(z+w) = \operatorname{sen} z \cdot \cos w + \cos z \cdot \operatorname{sen} w$.
c) $\cos(z+w) = \cos z \cdot \cos w - \operatorname{sen} z \cdot \operatorname{sen} w$.

20. Comprueba que, si $z = x+iy \in \mathbb{C}$, entonces
a) $\operatorname{sen} z = \operatorname{sen} x \cosh y + i\cos x \operatorname{senh} y$.
b) $|\operatorname{sen} z|^2 = \operatorname{senh}^2 y + \operatorname{sen}^2 x$.
c) $\cos z = \cos x \cosh y - i \operatorname{sen} x \operatorname{senh} y$.
d) $|\cos z|^2 = \operatorname{senh}^2 y + \cos^2 x$.

21. Encontrar la parte real e imaginaria de e^{2+i}, $\operatorname{sen}(1+i)$, e^{3-i} y $\cos(2+3i)$.

22. Demostrar que las funciones $f(z) = z$ y $f(z) = z^2$ son enteras. Estudiar en qué subconjuntos de $\mathbb{C}$ son derivables la funciones $f(z) = \overline{z}$, $f(z) = |z|$, $f(z) = |z|^2$, $f(z) = \operatorname{Re} z$, $f(z) = \operatorname{Im} z$, $f(z) = |xy|^{1/2}$, (siendo $z = x+yi$ con $x, y \in \mathbb{R}$),.

23. (i) Estudiar en qué subconjuntos de $\mathbb{C}$ son derivables las funciones $f(z) = |xy|^{1/2}$, $f(z) = (xy)^{2/3}$, y $f(z) = |x| + |y|i$, para $z = x+yi$. (ii) Hallar los valores $a, b, c \in \mathbb{R}$ para los cuales la función $f(z) = az^2 + b\overline{z}z + c\overline{z}^2$ es entera.

24. Consideramos $D \subset \mathbb{C}\setminus\{0\}$ abierto y $f : D \to \mathbb{C}$ holomorfa, $f(x+yi) = u(x,y)+iv(x,y)$, con $u(x,y) = \operatorname{Re}(f(x+yi))$, $v(x,y) = \operatorname{Im}(f(x+yi))$. Para $r > 0$ y $\theta \in \mathbb{R}$, consideramos $\widetilde{u}(r,\theta) = u(r\cos\theta, r\sin\theta)$ y $\widetilde{v}(r,\theta) = v(r\cos\theta, r\sin\theta)$ (que estarán definidas en un abierto de $\mathbb{R}^2$). Deduce la siguiente fórmula para las ecuaciones de Cauchy-Riemann en forma polar:

$$\frac{\partial\widetilde{u}}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial\widetilde{v}}{\partial\theta}, \qquad \frac{\partial\widetilde{v}}{\partial r} = -\frac{1}{r}\frac{\partial\widetilde{u}}{\partial\theta}.$$

25. ¿Qué números complejos verifican la igualdad

$$|z+w| = |z| + |w|?$$

26. Estudiar si las siguientes sucesiones son convergentes

$$a)\ \left\{-i+\frac{(-i)^n}{2n+i}\right\},\quad b)\ \{-1+i^n\},\quad c)\ \left\{\frac{n}{2in+sen\ n}\right\}.$$

27. Para cada z $\in \mathbb{C}$, estudia si existe $\lim\limits_{n\to\infty} z^n$.

28. Estudiar la convergencia y la convergencia absoluta de las siguientes series:

$$\text{a)}\ \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1+i)^{2n}}{n!},\quad \text{b)}\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(3i)^n}{n^2},\quad \text{c)}\ \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2i)^n+1},\quad \text{d)}\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{i^n}{n},\ \text{e)}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{i}{n},\quad \text{f)}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n-i}.$$

29. Justifica que la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{\sqrt{n}}$ converge y que el producto de Cauchy de ella por sí misma no converge.

30. Estudiar la continuidad de las funciones:

$$(a)\quad f(z)=\begin{cases}\frac{\overline{z}}{z} & \text{si } z\neq 0\\ 1 & \text{si } z=0.\end{cases},\quad (b)\quad f(z)=\begin{cases}\frac{(\overline{z})^2}{z} & \text{si } z\neq 0\\ 0 & \text{si } z=0.\end{cases}$$

31. Probar que la función $f(z)=\dfrac{1}{z}$ es continua en $z_0=i$, utilizando la definición. Probar que f no es uniformemente continua en $\mathbb{C}\backslash\{0\}$.

32. a) Sea f una función holomorfa en un conjunto abierto y conexo U de $\mathbb{C}$, verificando que su parte imaginaria es constante, probar que f es constante en U.

    b) ¿Pueden ser holomorfas a la vez una función no constante y su conjugada en un conjunto abierto y conexo de $\mathbb{C}$?

33. a) Sea f una función holomorfa en un conjunto abierto y conexo U de $\mathbb{C}$, verificando que su módulo es constante, probar que f es constante en U.

    b) Sean f y g funciones holomorfas en un abierto conexo U verificando que $|f(z)|=|g(z)|$ para todo $z\in U$. Probar que existe $\theta\in[-\pi,\pi)$ tal que $f(z)=e^{i\theta}g(z)$ para todo $z\in U$.

34. Sean U un abierto conexo de $\mathbb{C}$, f una función analítica en U no constante. Probar que la función f tiene a lo sumo una cantidad finita de ceros en cada compacto de U.

35. Sean $f,g:D\to\mathbb{C}$ funciones analíticas en un dominio $D\subset\mathbb{C}$ (es decir, abierto y conexo) tales que para todo $z\in D$ se verifica que $f(z)g(z)=0$, Demostrar que $f\equiv 0$ ó $g\equiv 0$ en D.

36. Demostrar que no existe ninguna función analítica en $D(0,2)$ con la propiedad de que,

$$f\left(\frac{1}{n}\right)=f\left(-\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{n^3}\quad \text{para todo } n\in\mathbb{N}.$$

37. Determinar qué funciones f analíticas en $\mathbb{C}$ verifican una de las siguientes condiciones:

    a) $f'(z)=f(z)$ para todo $z\in\mathbb{C}$.

    b) $f(z+w)=f(z)\cdot f(w)$ para todo $z,w\in\mathbb{C}$.

38. Estudiar la existencia de los siguientes límites:

    a) $\lim\limits_{z\to 0} z\sin\dfrac{1}{z}$.

    b) $\lim\limits_{z\to 0} e^{-\frac{1}{z^2}}$. Indicación: considerar la sucesión $z_n=\frac{1}{n}i$.

39. Supongamos que $\{z_n\}$ es una sucesión en $\mathbb{C}$. Decimos que $\lim\limits_{n\to\infty} z_n=\infty$ si para todo $M>0$ existe $N\in\mathbb{N}$ tal que si $n\geq N$ entonces $|z_n|>M$. Con esta definición comprobar que:

    a) Si $\lim\limits_{n\to\infty} z_n=\infty$ y $\lim\limits_{n\to\infty} w_n=b\in\mathbb{C}$, probar que $\lim\limits_{n\to\infty}(z_n+w_n)=\infty$.

    b) Si $\lim\limits_{n\to\infty} z_n=\infty$ y $\lim\limits_{n\to\infty} w_n=b\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$, probar que $\lim\limits_{n\to\infty}(z_nw_n)=\infty$.

    c) Si $z_n\neq 0$ para todo n, entonces $\lim\limits_{n\to\infty} z_n=\infty$ si y sólo si $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{z_n}=0$.

40. Sean $A \subset \mathbb{C}$, $f : A \to \mathbb{C}$ y $z_0 \in A'$. Decimos que

   a) $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = \infty$, para $z_0 \in \mathbb{C}$, si para todo $M > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $0 < |z - z_0| < \delta$ y $z \in A$ entonces $|f(z)| > M$. Por sucesiones, $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = \infty$ si y solo si para toda sucesión $\{z_n\} \subset A$ tal que $\lim\limits_{n \to \infty} z_n = z_0$ con $z_n \neq z_0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, se cumple que $\lim\limits_{n \to \infty} f(z_n) = \infty$.

   b) Supongamos que A no es acotado. Decimos que $\lim\limits_{z \to \infty} f(z) = a \in \mathbb{C}$ si para todo $\varepsilon > 0$ existe $R > 0$ tal que si $|z| > R$ y $z \in A$, entonces $|f(z) - a| < \varepsilon$. Por sucesiones, $\lim\limits_{z \to \infty} f(z) = a$ si y solo si para toda sucesión $\{z_n\} \subset A$ tal que $\lim\limits_{n \to \infty} z_n = \infty$, se cumple que $\lim\limits_{n \to \infty} f(z_n) = a$.

   c) Supongamos que A no es acotado. Decimos que $\lim\limits_{z \to \infty} f(z) = \infty$ si para todo $M > 0$ existe $R > 0$ tal que si $|z| > R$ y $z \in A$, entonces $|f(z)| > M$. Por sucesiones, $\lim\limits_{z \to \infty} f(z) = \infty$ si y solo si para toda sucesión $\{z_n\} \subset A$ tal que $\lim\limits_{n \to \infty} z_n = \infty$, se cumple que $\lim\limits_{n \to \infty} f(z_n) = \infty$.

   Con estas definiciones calcular el $\lim\limits_{z \to z_0} f(z)$, siendo $z_0 \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, en los casos en los que exista, para las funciones:

   $$(a) \quad f(z) = Re(z), \quad (b) \quad f(z) = |z + i|, \quad (c) \quad f(z) = \frac{z-1}{z+i}$$

41. Calcula la serie de Taylor en el cero de

   a) $f(z) = \dfrac{1}{1 + z^3}$.

   b) $h(z) = \operatorname{Log} \dfrac{1+z}{1-z}$.

42. Probar que no se verifica un análogo al teorema del valor medio para funciones con valores complejos. Considera la función $h(t) = \cos t + i \sin t, \;\; t \in [0, 2\pi]$.

43. Probar que no se verifica un análogo a la regla de L' Hôpital del tipo $\left[\frac{0}{0}\right]$ para funciones de variable real con valores complejos. Considerar las funciones

   $$f(t) = \begin{cases} t + t^2 e^{i\frac{1}{t^2}} & \text{si } t \neq 0 \\ 0 & \text{si } t = 0. \end{cases}$$

   y $g(t) = t$. (La variable t es real).

44. Demuestra que si $\Omega \subset \mathbb{C}$ es un abierto conexo, entonces Ω es conexo por poligonales (y por tanto por caminos). Indicación: Fijamos un punto a en Ω y consideramos el conjunto $A = \{z \in \Omega : a \text{ se puede unir a } z \text{ por una poligonal dentro de } \Omega\}$. Comprobar que A y $\Omega \setminus A$ son abiertos.

Análisis de Funciones de Variable Compleja

Hoja 2. Resultados básicos

1. Evaluar la integral $\int_\gamma \frac{1}{z} dz$, donde γ es el segmento que va de 1 a i. ¿Y si γ es cualquier otro camino incluido en $\mathbb{C} \setminus \{x + yi : x \leq 0,\ y = 0\}$ con punto inicial 1 y punto final i?

2. Calcular la integral $\displaystyle\int_\gamma \operatorname{re} z\, dz$ y $\displaystyle\int_\gamma \operatorname{Im} z\, dz$ siendo $\gamma(t)$ el camino orientado positivamente que recorre el frontera del cuadrado de vértices $(0,0)$, $(1,0)$, $(1,1)$, $(0,1)$.

3. Consideremos el camino γ que recorre media circunferencia de centro 0 y radio 1 desde 1 a -1. Demuestra que $\left| \displaystyle\int_\gamma \frac{e^z}{z}\, dz \right| \leq \pi e$.

4. Sea f una función holomorfa en $D(0,1)$ que verifica que para cada $n \in \mathbb{N}$
$$\int_\gamma \frac{f(z)}{z^n} dz = 2\pi i$$
donde γ es la circunferencia de centro cero y radio $\frac{1}{2}$ orientada positivamente. Calcula dicha función.

5. Sea
$$f(z) = \begin{cases} \frac{senz}{z} & \text{si } z \neq 0 \\ 1 & \text{si } z = 0. \end{cases}$$
Probar que f es holomorfa en $\mathbb{C}$ y obtener la serie de Taylor de la función
$$h(z) = \int_{[0,z]} f(w) dw$$
en el punto cero.

6. Encuéntrese el valor de las siguientes integrales (los caminos se consideran con orientación positiva y recorridos una sóla vez, es decir, simples):

   a) $\displaystyle\int_\gamma \frac{1}{z}\, dz$, donde $\gamma(t) = \cos t + 2i \operatorname{sen} t, \quad 0 \leq t \leq 2\pi$.

   b) $\displaystyle\int_\gamma \frac{1}{z^2}\, dz$, donde $\gamma(t) = \cos t + 2i \operatorname{sen} t, \quad 0 \leq t \leq 2\pi$.

   c) $\displaystyle\int_{|z-1|=1} \frac{1}{z^2-1}\, dz$ *d)* $\displaystyle\int_{|z|=2} \frac{z^2}{z-1}\, dz$ *e)* $\displaystyle\int_{|z|=2} \frac{z^2-1}{z^2+1}\, dz$ *f)* $\displaystyle\int_{|z|=1} \frac{\operatorname{sen} e^z}{z}\, dz$.

7. Calcular el valor de las siguientes integrales (los caminos se consideran con orientación positiva y recorridos una sóla vez):

   a) $\displaystyle\int_{|z|=2} \frac{dz}{z^2-1}$; *b)* $\displaystyle\int_{|z|=2} \frac{e^z}{z^2(z-1)} dz$; *c)* $\displaystyle\int_{|z|=2} \frac{e^{i\pi z}}{z^4-1} dz$; *d)* $\displaystyle\int_{|z|=1} z^2 \operatorname{sen} \frac{1}{z} dz$.

8. Sea γ la circunferencia de centro 0 y radio 2 parametrizado por $\gamma(t) = 2e^{it}$ con $t \in [0, 2\pi]$. Calcular las siguientes integrales:

   a) $\displaystyle\int_\gamma \frac{e^z}{z^2} dz$; *b)* $\displaystyle\int_\gamma \frac{1}{z^2+z+1} dz$; *c)* $\displaystyle\int_\gamma \frac{1}{z^2+2z-3} dz$; *d)* $\displaystyle\int_\gamma \frac{1}{z^2(z^2+16)} dz$.

9. Discutir los posibles valores de la integral,
$$\int_\gamma \frac{2z^2 - 15z + 30}{z^3 + 6z^2 + 11z + 6} dz,$$
donde γ es un camino cerrado simple orientado positivamente (cuya traza está contenida en el dominio de la función que estamos integrando).

10. Discutir los posibles valores de la integral,

$$\int_\gamma \frac{\operatorname{sen} \frac{\pi}{2} z}{z^3 + z^2 + z + 1} dz,$$

donde γ es un camino cerrado simple orientado positivamente (cuya traza está contenida en el dominio de la función que estamos integrando).

11. Demuestra la **Regla de Leibniz de derivación bajo la integral**: Sean $\Omega \subset \mathbb{C}$ es abierto y γ un camino en $\mathbb{C}$. Si $\varphi : \Omega \times \gamma^* \to \mathbb{C}$ es continua,
(a) probar que la función

$$f(z) = \int_\gamma \varphi(z, \omega) d\omega, \quad z \in \Omega,$$

es continua en Ω. Indicación: Fijado $z_0 \in \Omega$ existe $r > 0$ tal que $\overline{D}(z_0, r) \subset \Omega$ y la función φ es uniformemente continua en el compacto $\overline{D}(z_0, r) \times \gamma^*$ de $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$.
(b) Supongamos que además existe $\dfrac{\partial \varphi}{\partial z}(z, \omega)$, para todo $(z, \omega) \in \Omega \times \gamma^*$ y la aplicación $\dfrac{\partial \varphi}{\partial z} : \Omega \times \gamma^* \to \mathbb{C}$ es continua. Probar que f es derivable en todo punto de Ω y

$$f'(z) = \int_\gamma \frac{\partial \varphi}{\partial z}(z, \omega) d\omega, \quad z \in \Omega.$$

Indicación: Fijado $z_0 \in \Omega$, expresa primero para $h \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$,

$$\frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} - \int_\gamma \frac{\partial \varphi}{\partial z}(z_0, \omega)\, d\omega = \frac{1}{h} \int_\gamma \left(\varphi(z_0 + h, \omega) - \varphi(z_0, \omega) - \int_{[z_0, z_0+h]} \frac{\partial \varphi}{\partial z}(z_0, \omega) dz \right) d\omega =$$

$$= \frac{1}{h} \int_\gamma \left(\int_{[z_0, z_0+h]} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}(z, \omega) - \frac{\partial \varphi}{\partial z}(z_0, \omega) \right) dz \right) d\omega.$$

Después mayora el módulo de esta expresión, teniendo en cuenta que $\frac{\partial \varphi}{\partial z}$ es uniformemente continua en el compacto $\overline{D}(z_0, r) \times \gamma^*$.

12. Sea

$$f(z) = \int_{[0,1]} \frac{1}{1 - wz} dw.$$

Halla el abierto U de $\mathbb{C}$ en el que f es holomorfa. Halla $f(z)$.

13. Supongamos que f es entera y que $\lim\limits_{z \to \infty} \dfrac{f(z)}{z} = 0$. Prueba que f es constante.

14. Sea f entera y supongamos que $|f(z)| \leq M|z|^n$ para valores grandes de $|z|$, para cierta constante M y $n \in \mathbb{N}$. Prueba que $f(z)$ es un polinomio de grado $\leq n$.

15. (i) Demuestra el **Teorema de Morera**: Si $\Omega \subset \mathbb{C}$ es abierto, $f : \Omega \to \mathbb{C}$ es continua y $\displaystyle\int_{\partial \triangle} f(z) dz = 0$ para cada triángulo $\triangle$ en Ω, entonces $f \in \mathcal{H}(\Omega)$.
Indicación: ¿Por qué se puede aplicar el mismo razonamiento que en la demostración vista en clase de existencia de primitivas en abiertos convexos? Si para cada $z_0 \in \Omega$ existe $r > 0$ tal que $z_0 \in D(z_0, r) \subset \Omega$ y construimos en $D(z_0, r)$ una primitiva local de f, ¿qué podemos concluir?
(ii) Deduce que si $\Omega \subset \mathbb{C}$ es abierto y $p \in \Omega$, entonces $\mathcal{H}(\Omega \setminus \{p\}) \cap \mathcal{C}(\Omega) = \mathcal{H}(\Omega)$.

16. (i) Usa el Teorema de Morera para probar el siguiente **Teorema de Weierstrass**: si $f_n : \Omega \to \mathbb{C}$ es holomorfa en un abierto $\Omega \subset \mathbb{C}$ para cada $n \in \mathbb{N}$ y $\{f_n\}_n$ converge uniformemente en los compactos de Ω a una función $f : \Omega \to \mathbb{C}$, entonces f es holomorfa también. Demuestra que además la sucesión de las derivadas de orden $j \in \mathbb{N}$, $\{f_n^{(j)}\}_n$ converge a $f^{(j)}$ (la derivada de órden j de f) uniformemente en cada compacto . Indicación: Para la primera afirmación usa el teorema de Morera. Para la segunda afirmación, usa las desigualdades de Cauchy y el problema 36 de esta misma hoja. Es suficiente que pruebes la convergencia uniforme de $\{f_n^{(j)}\}_n$ a $f^{(j)}$ en cada $\overline{D}(z, r) \subset \Omega$.
(ii) Da un ejemplo donde esto no se cumpla para funciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$.

17. Sean U un abierto conexo de $\mathbb{C}$ y $f : U \to \mathbb{C}$ una función continua en U verificando que $\int_\gamma f = 0$ para todo camino cerrado γ en U. Demostrar que f tiene una primitiva en U.

18. Probar que la función
$$f(z) = \frac{1}{z(z-1)}$$
tiene una primitiva en el abierto $U = \mathbb{C}\backslash[0,1]$. Probar que f no tiene primitiva en el abierto $U = \mathbb{C}\backslash\{0,1\}$.

19. a) Sean $z_0 \in \mathbb{C}$, $r > 0$ y f, $g : D(z_0, r) \to \mathbb{C}$ funciones holomorfas. Supongamos que $f(z_0) = g(z_0) = 0$ y que ni g ni g' se anulan en los puntos de $D(z_0, r)\backslash\{z_0\}$. Demostrar que existen los siguientes límites y
$$\lim_{z\to z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \lim_{z\to z_0} \frac{f'(z)}{g'(z)} \qquad (\textbf{regla de L'Hôpital}).$$
b) Sean $U = \mathbb{C} \setminus \overline{D}(0, R)$ con $R > 0$ y f, $g : U \to \mathbb{C}$ funciones funciones holomorfas, de forma que ni g ni g' se anulen en ningún punto de U, verificando que existen $\lim\limits_{z\to\infty} f(z) = \lim\limits_{z\to\infty} g(z) = 0$. Probar que existen los siguientes límites y
$$\lim_{z\to\infty} \frac{f(z)}{g(z)} = \lim_{z\to\infty} \frac{f'(z)}{g'(z)} \qquad (\textbf{regla de L'Hôpital}).$$

20. Prueba que las siguientes funciones son enteras si se definen de forma adecuada en los punto donde se anula el denominador:
$$\text{i)}\ \frac{e^z - 1 - z}{z^2}; \qquad \text{ii)}\ \frac{\sin(\pi z)}{z^3 - z}; \qquad \text{iii)}\ \frac{\sin(\pi z^2)}{\sin(\pi z)}.$$

21. Calcular $\int_\gamma f$ siendo γ la poligonal que une los puntos: $-2i,\ -1+i,\ i,\ 2$, en ese orden, y $f(z) = \frac{1}{z}$.

22. Considera $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ una función entera no constante. Utiliza el teorema de Liouville para demostrar que $f(\mathbb{C})$ es denso en $\mathbb{C}$.

23. Una función real u definida en un abierto Ω de $\mathbb{R}^2$ y con valores en $\mathbb{R}$ es armónica si u es de clase C^2 (es decir, tiene derivadas parciales continuas hasta orden 2) en Ω y
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,$$
en Ω. Demuestra que si $f : \Omega \to \mathbb{C}$ es una función holomorfa en Ω, entonces $u = \mathrm{re}(f)$ y $v = \mathrm{Im}(f)$ son armónicas.

24. Prueba que todo función armónica $u : \Omega \to \mathbb{R}$ (Ω abierto de $\mathbb{C}$) con derivadas parciales continuas de orden 2 es localmente la parte real de una función holomorfa: más aún, para todo $z_0 \in \Omega$, si $r > 0$ es tal que $D(z_0, r) \subset \Omega$ existe una función $f : D(z_0, r) \to \mathbb{C}$ holomorfa tal que $u = \mathrm{re}(f)$ en $D(z_0, r)$. En este caso, se llama conjugada armónica de u a $v = \mathrm{Im}(f)$. ¿Es única? Si no lo es, ¿en qué se diferencian dos conjugadas armónicas?
Indicación: Considera la función $g = \dfrac{\partial u}{\partial x} - i\dfrac{\partial u}{\partial y}$ y prueba que es holomorfa en $D(z_0, r)$. Por tanto, tiene una primitiva en $D(z_0, r)$ (recordar el teorema de existencia de primitivas en abierto convexos) que llamamos $G = \widetilde{u} + i\widetilde{v}$. Por las condiciones de Cauchy-Riemann, $G' = \dfrac{\partial \widetilde{u}}{\partial x} - i\dfrac{\partial \widetilde{u}}{\partial y}$. ¿Qué puedes deducir de aquí?

25. Muestra que $u(x, y) = x^3 - 3xy^2$ es armónica. ¿Podrías dar una conjugada de u?

26. Demuestra que si $\{K_n\}$ es una sucesión encajada de compactos de $\mathbb{C}$, es decir, $K_n \supseteq K_{n+1}$ para todo n natural, y cada uno de ellos es no vacío, entonces $\cap_n K_n \neq \emptyset$.

27. En cada uno de los casos siguientes, halla la función $\mathrm{ind}_\Gamma(z)$ para el ciclo $\Gamma = \{\gamma_1, \gamma_2\}$ e indica si Γ es homólogo a 0 en $\mathbb{C} \setminus \{0\}$:

(i) $\gamma_1 : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$, $\gamma_1(t) = 2e^{it}$ y $\gamma_2 : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$, $\gamma_2(t) = i + 2e^{-it}$;

(ii) $\gamma_1 : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$, $\gamma_1(t) = 2e^{it}$ y $\gamma_2 : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$, $\gamma_2(t) = i + 2e^{it}$;

(iii) $\gamma_1 : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$, $\gamma_1(t) = e^{it}$ y $\gamma_2 : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$, $\gamma_2(t) = 2e^{it}$;

(iv) $\gamma_1 : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$, $\gamma_1(t) = e^{it}$ y $\gamma_2 : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$, $\gamma_2(t) = 2e^{-it}$;

(v) $\gamma_1 : [0, 4\pi] \to \mathbb{C}$, $\gamma_1(t) = e^{it}$ y $\gamma_2 : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$, $\gamma_2(t) = 2e^{-it}$.

28. Demuestra que $\displaystyle\int_0^\pi e^{\cos t} \cos(\sin t)\, dt = \pi$ calculando la integral $\displaystyle\int_\gamma e^z/z\, dz$, donde γ es la circunferencia de centro 0 y radio 1.

29. Sea γ una curva cerrada simple con orientación positiva que recorre la elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Utiliza la integral $\int_\gamma \frac{1}{z} dz$ para obtener la igualdad:

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{a^2 \cos^2 t + b^2 \sin^2 t}\, dt = \frac{2\pi}{ab}.$$

30. Considera un disco abierto $D(z_0, r) \subset \mathbb{C}$ y una función f holomorfa en este disco. Calcula para todo $n \in \mathbb{Z}$ y $0 < s < r$,

$$\int_0^{2\pi} f(z_0 + se^{it})\, e^{int}\, dt.$$

31. Sea γ un camino en $\mathbb{C}$ y $f : \gamma^* \to \mathbb{C}$ continua, siendo γ^* la traza de γ.

(i) Comprueba que la igualdad $\displaystyle\int_\gamma \mathrm{re}(f) = \mathrm{re}\left(\int_\gamma f\right)$ no es cierta en general.

(ii) Comprueba que la desigualdad $\displaystyle\left|\int_\gamma f\right| \leq \int_\gamma |f|$ no es cierta en general.

32. Probar que no existe una función holomorfa definida en el disco unidad abierto $D(0, 1)$ que se extienda con continuidad a su adherencia $\overline{D}(0, 1)$ y tal que $f(z) = \frac{1}{z}$ para $z \in \partial D(0, 1)$.

33. La función $f(z) = \sin(\frac{1}{z-1})$ se anula en una sucesión de puntos que converge al punto 1. ¿Entra esto en contradicción con los teoremas de identidad?

34. Supongamos que $\Omega \subset \mathbb{C}$ es un abierto simplemente conexo, y $f : \Omega \to \mathbb{C}$ es holomorfa en Ω.
(i) Prueba que f tiene una primitiva en Ω.
(ii) Si además f no se anula en Ω, prueba que f tiene una determinación holomorfa del logaritmo. Es decir, existe $g : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorfa tal que $e^{g(z)} = f(z)$ para todo $z \in \Omega$. Indicación: Considera $h(z)$ una primitiva de la función $\frac{f'(z)}{f(z)}$ para $z \in \Omega$. Comprueba que $\frac{e^{h(z)}}{f(z)}$ es constante en Ω.

35. Considera $\gamma : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}^2$ camino continuo en $\mathbb{R}^2$ y C^1 a trozos con componentes $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2)$. Para una función continua $f : \gamma^* \to \mathbb{R}^2$ (γ^* la traza de γ) con componentes $f = (f_1, f_2)$ se definió en la asignatura de Cálculo Integral la integral de linea como

$$\int_\gamma (u, v) = \int_\alpha^\beta \langle (u\gamma(t)), v(\gamma(t)), (\gamma_1'(t), \gamma_2'(t)) \rangle\, dt,$$

siendo $\langle \cdot, \cdot \rangle$ el producto escalar usual en $\mathbb{R}^2$. Interpretando γ como un camino en $\mathbb{C}$ y f como una función de variable compleja, expresa la integral de f a lo largo de γ como una suma de integrales de linea.

36. (i) Demuestra que la función distancia a un conjunto es 1-Lipschitz: es decir, si $A \subset \mathbb{C}$ y definimos $d : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $d(z) = \mathrm{dist}(z, A) = \inf\{|z - a| : a \in A\}$, entonces $|d(z) - d(w)| \leq |z - w|$ para todo $z, w \in \mathbb{C}$.
(ii) Comprueba que $\overline{A} = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{dist}(z, A) = 0\}$.
(iii) Deduce que si $K \subset \Omega \subset \mathbb{C}$, con K compacto y Ω abierto, existe $r > 0$ tal que $\mathrm{dist}(z, \partial\Omega) \geq r$ para todo $z \in K$.
(iv) Demuestra que si $K \subset \mathbb{C}$ es compacto, entonces $K + \overline{D}(0, s) = \{z + w : z \in K, w \in \overline{D}(0, s)\}$ es compacto para todo $s > 0$.

37. Si $\Omega \subset \mathbb{C}$ es un abierto, demuestra que cada componente conexa de Ω es un abierto.

Análisis de Funciones de Variable Compleja

Hoja 3. Teorema de los Residuos de Cauchy y aplicaciones

1. ¿Convergen en algún abierto no vacío de $\mathbb{C}$ las siguientes series de Laurent?

$$a)\ \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{n^2+1} z^n, \qquad b)\ \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{n^2!}(z+i)^n, \qquad c)\ \sum_{n=1}^{\infty} -n(z-i)^{-n}.$$

2. Encuentra la serie de Laurent de $\dfrac{1}{z(z+1)}$ centrada en $z_0 = 0$ y en la corona $1 < |z| < \infty$.

3. Encuentra la serie de Laurent de $\dfrac{1}{z(z-1)(z-2)}$ centrada en $z_0 = 0$ en las siguientes coronas:
   a) $0 < |z| < 1$,
   b) $1 < |z| < 2$.

4. Encuentra la serie de Laurent de $\dfrac{\sinh z^2}{z}$ centrada en el punto $z_0 = 0$.

5. Describe las singularidades de $\dfrac{1}{\cos(1/z)}$.

6. Determina el orden de los polos de las siguientes funciones:
   a) $\dfrac{e^z(z-3)}{(z-1)(z-5)}$, b) $\dfrac{e^z-1}{z^3}$, c) $\dfrac{\cos z}{1-z}$, d) $\dfrac{1}{z^3} + h(z)$, con $h \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$, e) $\dfrac{\cos z - 1}{z^3}$.

7. Identifica las singularidades de

$$f(z) = \frac{z}{(e^z-1)(e^z-2)}$$

   clasificándolas en evitables, esenciales o polos (indicando el orden de los mismos cuando proceda).

8. Evaluar la integral $\displaystyle\int_\gamma z^n e^{\frac{1}{z}} dz$, donde $n \in \mathbb{Z}$ y γ es la circunferencia de radio 1 centrada en 0 recorrida una vez en sentido contrario a las agujas del reloj.

9. Calcular los residuos de las siguientes funciones en los puntos indicados:
   a) $\dfrac{1}{z^2-1}$ en $z = 1$; b) $\dfrac{z}{z^2-1}$ en $z = 1$; c) $\dfrac{e^z-1}{z^2}$ en $z = 0$; d) $\dfrac{e^z-1}{z}$ en $z = 0$.

10. Encuentra los términos a_{-2}, a_{-1}, a_0, a_1, a_2, a_3 de la serie de Laurent de $f(z) = \dfrac{1}{e^z-1}$ centrada en $z = 0$ y en la corona $0 < |z| < 2\pi$.

11. Dada la función $f(z) = \cot z = \dfrac{\cos z}{\operatorname{sen} z}$:
    a) Determina las singularidades que tiene f y de qué tipo son.
    b) Calcula los términos a_{-2}, a_{-1}, a_0, a_1, a_2, a_3 de la serie de Laurent de f centrada en $z_0 = 0$ en la corona $0 < |z| < \pi$.

12. Calcular $\displaystyle\int_\gamma \frac{1}{z(z-1)(z-2)}\, dz$, donde γ es la circunferencia de centro 0 y radio 3/2 recorrida una vez en sentido contrario a las agujas del reloj utilizando el teorema de Cauchy de los residuos.

13. Calcular la integral $\displaystyle\int_\gamma \frac{1+z}{1-\cos z}\, dz$, donde γ es la circunferencia de centro 0 y radio 7 recorrida una vez en sentido contrario a las agujas del reloj utilizando el teorema de Cauchy de los residuos.

14. Se considera la función

$$f(z) = \frac{\cos(\pi z)}{z^2 \operatorname{sen}(\pi z)}.$$

    Se pide:
    a) Probar que f tiene un polo de orden 3 en 0 y de orden 1 en cada $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$.
    b) Calcular la parte principal de la serie de Laurent de f centrada en $z = 0$ en la corona $0 < |z| < 1$.
    c) Calcular el residuo de f en cada uno de sus polos.

d) Calcular $\int_\gamma f(z)dz$, siendo γ el círculo de centro 0 y radio $\frac{5}{2}$ utilizando el teorema de Cauchy de los residuos.

15. Calcular

$$\text{a)} \int_0^{2\pi} \frac{1}{2+\cos\theta} d\theta, \qquad \text{b)} \int_0^{\pi} \frac{d\theta}{(a+b\cos\theta)^2}, \text{ con } 0<b<a.$$

16. Calcular

$$\text{a)} \int_0^{\infty} \frac{\cos ax}{1+x^2}\, dx, \text{ con } a \neq 0, \qquad \text{b)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2-2x+4}\, dx,$$

$$\text{c)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{1+x^4}\, dx, \qquad \text{d)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{(a^2+x^2)^2}\, dx, \text{ con } a>0.$$

17. Demostrar que

$$\int_0^{\infty} \frac{x \operatorname{sen} x}{x^4+1}\, dx = \frac{\pi}{2} e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}} \operatorname{sen} \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

18. Calcular

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos x}{x^4+1}\, dx.$$

19. Sean U un abierto, $z_0 \in U$, $f \in \mathcal{H}(U \backslash \{z_0\})$ y supongamos que f tiene en z_0 un polo de orden 1. Demostrar que

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\gamma_\varepsilon} f = \pi i \operatorname{Res}(f, z_0),$$

siendo γ_ε el camino definido por

$$\gamma_\varepsilon : t \in [0,\pi] \mapsto \gamma(t) = z_0 + \varepsilon e^{it}.$$

20. Calcular

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx.$$

21. Encontrar el valor principal de

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{x^3+1}\, dx.$$

22. Prueba que no existe ninguna función holomorfa en $D(0,1)$ salvo la identicamente nula tal que exista $0<a<1$ con $|f(1/n)| \leq a^n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Indicación: Por continuidad $f(0)=0$ y si f no es identicamente nula, f tiene en $z=0$ un cero de orden k para algún $k \in \mathbb{N}$. Por tanto, podemos expresar f de la forma $f(z) = z^k h(z)$ para una función holomorfa h en $D(0,1)$ tal que $h(0) \neq 0$.

23. a) Si f tiene un polo de orden m en un punto z_0, estudiar qué tipo de singularidad tiene f' en z_0.
b) Si f tiene una singularidad evitable en un punto z_0, estudiar qué tipo de singularidad tiene f' en z_0.
c) Si f tiene una singularidad esencial en un punto z_0, estudiar qué tipo de singularidad tiene f' en z_0.

24. Sean U un abierto de $\mathbb{C}$, $z_0 \in U$, y f una función holomorfa en $U \backslash \{z_0\}$. Probar que $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = \infty$ si y sólo si f tiene un polo en z_0.

25. Sea $p(z)$ un polinomio de grado al menos 2. Comprueba que la suma de los residuos de todos los polos de $\frac{1}{p(z)}$ es 0.

26. a) Sean U un abierto de $\mathbb{C}$, $z_0 \in U$, y f y g funciones holomorfas en $U \backslash \{z_0\}$ verificando que $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = \lim\limits_{z \to z_0} g(z) = \infty$. Probar que existen los siguientes límites y que

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \lim_{z \to z_0} \frac{f'(z)}{g'(z)}$$

(regla de L´Hôpital).

b) Sean U un abierto de $\mathbb{C}$ que contenga al complementario de un disco de centro 0, y f y g funciones holomorfas en U verificando que $\lim\limits_{z\to\infty} f(z) = \lim\limits_{z\to\infty} g(z) = \infty$. Probar que existen los siguientes límites y que

$$\lim_{z\to\infty} \frac{f(z)}{g(z)} = \lim_{z\to\infty} \frac{f'(z)}{g'(z)}$$

(regla de L´Hôpital).

27. Calcular, utilizando el principio del argumento, las siguientes integrales:

    a) $\displaystyle\int_\gamma \tan(\pi z)\, dz$; siendo γ la circunferencia de centro 0 y radio 1.

    b) $\displaystyle\int_\gamma \frac{e^z}{\cosh z} dz$; siendo γ la circunferencia de centro 0 y radio 5.

28. Determinar el número de ceros (contando multiplicacidades) del polinomio $P(z) = z^7 - 4z^3 + z - 1 = 0$ en $\overline{D}(0,1)$.

29. Determinar el número de ceros (contando multiplicacidades) del polinomio $P(z) = z^5 - z + 16 = 0$ en la corona $\overline{\mathcal{C}}(0;1,2) = \{z \in C : 1 \leq |z| \leq 2\}$.

30. Sea h una función holomorfa en un disco de centro 0 y radio $r > 1$ tal que $|h(z)| < 1$ para todo z de módulo 1. Demostrar que existe un punto $a \in D(0,1)$ tal que $h(a) = a$ y $h'(a) \neq 1$.

31. Demostrar que si $a > e$ la función $f(z) = e^z - az^n$ tiene n ceros (contadas multiplicidades) en $D(0,1)$.

32. Demostrar, usando el teorema de Rouché, que el polinomio $f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n,\ a_n \neq 0$ tiene n raíces (contadas multiplicidades).

33. Sea $\{f_n\}$ una sucesión de funciones holomorfas definidas en un abierto conexo Ω que converge uniformemente en los compactos de Ω a una función holomorfa en Ω. Si cada f_n es inyectiva en Ω y f no es constante, demostrar que f es inyectiva.

Análisis de Funciones de Variable Compleja

Hoja 4. Principio del módulo máximo. Funciones armónicas

1. Sean U un abierto conexo de $\mathbb{C}$, f una función holomorfa en U, $z_0 \in U$ y $r > 0$ tales que $Ref(z) \leq Ref(z_0)$ para todo $z \in D(z_0, r) \subset U$. Demostrar que f es constante en U. Demostrar que lo mismo sucede si $Ref(z) \geq Ref(z_0)$ para todo $z \in D(z_0, r)$. Demostrar también que se verifican los mismos resultados para Imf.

2. Sean U un abierto, acotado y conexo de $\mathbb{C}$, f una función holomorfa en U y continua en $\overline{U}$ probar que
$$\sup\{Ref(z) : z \in U\} = \sup\{Ref(z) : z \in \overline{U}\} = \sup\{Ref(z) : z \in \partial U\}$$
y que
$$\acute{i}nf\{Ref(z) : z \in U\} = \acute{i}nf\{Ref(z) : z \in \overline{U}\} = \acute{i}nf\{Ref(z) : z \in \partial U\}.$$

3. Sea f una función holomorfa en $\mathbb{C}$, y supongamos que $f(z)$ es real para todo z tal que $|z| = 1$. Demostrar que f es constante.

4. Sea f una función holomorfa en $\mathbb{C}$, y supongamos que $|f(z)| = 1$ para todo z tal que $|z| = 1$. Demostrar que si f no se anula en ningún punto entonces es constante.

5. Encontrar, si es posible, un autormorfismo del disco unidad que verifique alguna de las siguientes condiciones:
   (a) $f(0) = 0$ y $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{i}{2}$ (b) $f(0) = 0$ y $f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{i}{2}$ (c) $f(0) = \frac{1}{2}$ y $f'(0) = \frac{3}{4}$.

6. Demostrar que el único automorfismo del disco unidad que tiene dos puntos fijos es la identidad.

7. Sea U un abierto simplemente conexo y α y β dos puntos distintos de U. Demostrar que existe un automorfismo de U que lleva el punto α en el punto β.

8. Comprueba que la aplicación $\varphi(z) = \dfrac{z-1}{z+1}$ es una biyección holomorfa del abierto $U = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(z) > 0\}$ al disco unidad abierto $D(0, 1)$.

9. Comprueba que la aplicación $\varphi(z) = \dfrac{z-i}{z+i}$ es una biyección holomorfa del abierto $V = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}(z) > 0\}$ al disco unidad abierto $D(0, 1)$.

10. Decimos que una función $f : \Omega \to \mathbb{R}^2$ ($\Omega \subset \mathbb{R}^2$ abierto) es **conforme** en $z_0 \in \Omega$ si f es diferenciable (en el sentido real) y preserva ángulos en z_0, es decir, si $\gamma_1, \gamma_2 : (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{C}$ son curvas de clase C^1 con $\gamma_1(0) = \gamma_2(0) = z_0$ y $\gamma_1'(0) \neq 0$, $\gamma_2'(0) \neq 0$ entonces $(f \circ \gamma_1)'(0) \neq 0$, $(f \circ \gamma_2)'(0) \neq 0$ y el ángulo de $(f \circ \gamma_1)'(0)$ a $(f \circ \gamma_2)'(0)$ es el mismo que el ángulo de $\gamma_1'(0)$ a $\gamma_2'(0)$ (medidos en el mismo sentido). Decimos que $f : \Omega \to V$ es una **aplicación conforme** entre dos abiertos V, W de $\mathbb{R}^2$ si es conforme en cada $z \in \Omega$ y es una biyección de Ω en V. Comprueba que si $\Omega \subset \mathbb{C}$ es un abierto y $f : \Omega \to \mathbb{C}$ es derivable (en el sentido complejo) en z_0 con $f'(z_0) \neq 0$ para cierto $z_0 \in \Omega$, entonces f es conforme en z_0.

11. Demostrar que si f es una función entera e inyectiva, entonces f es afín. Es decir $f(z) = az + b$ para ciertos $a, b \in \mathbb{C}$.

12. Demostrar el Teorema del Módulo Máximo a partir del Teorema de la Aplicación Abierta.

13. Calcular una función armónica conjugada para las funciones armónicas:
    a) $u(x, y) = x^2 - y^2 - 2xy$
    b) $u(x, y) = e^x(x \cos y - y \sin y)$.
    c) $u(x, y) = x^3 - 3xy^2$.

14. Deducir del ejercicio 2 la unicidad de la solución al problema de Dirichlet en un disco $D(0, 1)$.

15. Comprueba que se cumple la propiedad de valor medio para funciones armónicas. Es decir si $u : \Omega \to \mathbb{C}$ es armónica en un abierto $\Omega \subset \mathbb{C}$ y $\overline{D}(z_0, r) \subset \Omega$ comprueba que $u(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(z_0 + re^{it})dt$.

16. Supongamos que u es una función armónica definida en un abierto y conexo $\Omega \subset \mathbb{C}$.
(i) Demuestra que si u no es constante, entonces u es abierta.
(ii) Demuestra que si u tiene un máximo o un mínimo relativo en Ω entonces u es constante.
(iii) Demuestra que si u se anula en algún abierto no vacío contenido en Ω entonces $u \equiv 0$ en Ω.
(iv) Demuestra que si existe un punto en el que todas las derivadas parciales (de cualquier orden) de u son 0 entonces u es constante.