A. F. VARIABLE COMPLEJA. GRUPO T1. EXAMEN ENERO 2022

1. **(i)** (1.5 puntos) Enuncia y demuestra el "segundo teorema de identidad" (el relativo a la existencia de una sucesión de puntos en los que una función holomorfa se anula).

(ii) (1.5 puntos) Enuncia y demuestra el teorema de la aplicación abierta para funciones holomorfas.

2. Dada la función $f(z) = \dfrac{1+z}{1-\cos z}$, **(i)** (0.5 puntos) determina los polos de f junto con el orden correspondiente; **(ii)** (1 punto) calcula los términos a_{-3}, a_{-2}, a_{-1}, a_0, a_1 de la serie de Laurent de f en $D(0,2\pi)\setminus\{0\}$ centrada en 0. ¿Puedes dar una expresión de a_k en función de los anteriores a_j, $j<k$?

(iii) (0.5 puntos) ¿Tiene f una primitiva en $D(0,2\pi)\setminus\{0\}$? **(iv)** (0.6 puntos) Calcula $\displaystyle\int_{\gamma_n} f(z)\,dz$, siendo γ_n un camino cerrado simple que recorre la circunferencia $|z| = (2n+1)\pi$ (en sentido contrario a las agujas del reloj), para $n \in \mathbb{N}\cup\{0\}$.

3. (1.5 puntos) Calcula la integral $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x\sin x}{1+x^4}\,dx$, utilizando el teorema de Cauchy de los residuos.

4. (1.2 puntos) Determina el conjunto de puntos de $\mathbb{C}$ en los que la función $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ es derivable (en el sentido complejo) para **(i)** $f(z) = |x|^{1/2} + |y|^{1/2}i$ con $z = x+yi$, $x,y\in\mathbb{R}$; **(ii)** $f(z) = z^k\,\mathrm{Re}(z)$ para $k\in\mathbb{N}\cup\{0\}$.

5. **(i)** (0.6 puntos) Determina el disco de convergencia de la serie de potencias $\displaystyle\sum_{n=1}^\infty \frac{\ln n + i}{(1+i)^n}\, z^{2n}$.

(ii) (0.6 puntos) ¿Es convergente la serie de números complejos $\displaystyle\sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^n}{n+i}$? ¿Converge absolutamente?

6. (1 punto) Considera una función $f: D(z_0,r)\to\mathbb{C}$ tal que $f\in\mathcal{H}(D(z_0,r)\setminus\{z_0\})$. Si f no es derivable en z_0, ¿a qué corresponden los valores de la integral

$$\int_0^{2\pi} f(z_0+se^{it})\,e^{ikt}\,dt,$$

para $k\in\mathbb{Z}$ y $0<s<r$? ¿A qué corresponden estos valores si f es derivable en z_0?

7. (1 punto) Obtén la relación que hay entre dos funciones enteras f y g que verifican $|f(z)|\le|g(z)|$ para todo $z\in\mathbb{C}$.

ANÁLISIS DE FUNCIONES DE VARIABLE COMPLEJA. GRUPO T1
EXAMEN FEBRERO 2021

1. **(i)** (1.5 puntos) Enuncia y demuestra el teorema de existencia de primitivas en abiertos convexos. (Demuestralo a partir del teorema de Cauchy-Goursat para un triángulo).
(ii) (1.5 puntos) Enuncia y demuestra el teorema de la aplicación abierta para funciones holomorfas.

2. (2.5 puntos) Dada la función $f(z) = \dfrac{\cos \pi z}{z^2 \sin \pi z}$, **(i)** determina los ceros y polos de f junto con el orden correspondiente (tanto para los ceros como para los polos); **(ii)** calcula los términos $a_{-3}, a_{-2}, a_{-1}, a_0, a_1$ de la serie de Laurent de f en $D(0,1) \setminus \{0\}$ centrada en 0; **(iii)** ¿Tiene f una primitiva en $D(0,1) \setminus \{0\}$? **(iv)** Calcula $\displaystyle\int_{\gamma_n} f(z)\, dz$, siendo γ_n un camino cerrado simple que recorre la circunferencia $|z| = n + \frac{1}{2}$ (en sentido contrario a las agujas del reloj).

3. (1 punto) Calcula la integral $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\cos x}{1+x^4}\, dx$ utilizando el teorema de Cauchy de los residuos.

4. (1 punto) Determina el conjunto de puntos de $\mathbb{C}$ en los que la función $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ es derivable (en el sentido complejo) para **(i)** $f(z) = z \operatorname{Re} z, \quad z \in \mathbb{C}$; **(ii)** $f(z) = x^{2/3} + y^{2/3} i$ con $z = x + yi, \quad x, y \in \mathbb{R}$.

5. (1 punto) (i) ¿Es convergente la serie de números complejos $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+n(-1)^n i}{(n+2)^2}$? ¿ Es absolutamente convergente? (ii) Determina el disco de convergencia de la serie de potencias $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3+4i)^n}{(1+\frac{2i}{n})^{n^3}} (z+2i)^{2n}$.

6. (1 punto) Calcula la siguiente integral escribiéndola como la integral a lo largo de un camino cerrado en $\mathbb{C}$

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{2+\sin t}\, dt.$$

7. (1 punto) Sean $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C} \setminus \{0\})$ y $r, s \in (0,1)$ tales que $|f(z)| \leq |z|^{-r} + |z|^s$ para todo $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Comprobar que f es constante.

8. (1 punto) Supongamos que u es una función armónica en una abierto conexo $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. **(i)** Demuestra que si u es constante en un disco $D(z_0, r) \subset \Omega$, entonces u es constante en Ω. **(ii)** Demuestra que si u no es constante en Ω entonces u es abierta en Ω.

ANÁLISIS DE FUNCIONES DE VARIABLE COMPLEJA. GRUPO T1
EXAMEN 14 ENERO 2020

1. **(i)** (1.5 puntos) Enuncia y demuestra el "segundo teorema de identidad" (el relativo a la existencia de una sucesión de puntos en los que una función holomorfa se anula).
(ii) (1.5 puntos) Enuncia la propiedad del valor medio para funciones holomorfas. Enuncia el "teorema del módulo máximo" y demuestralo a partir de la anterior propiedad.

2. (0.7 puntos) **(i)** Determina el disco de convergencia de la serie de potencias $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{i+\operatorname{Log} n}{(1+i)^n}(z-1+2i)^{2n}$.

(ii) Estudia la convergencia y convergencia absoluta de la serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+i}$.

3. (0.7 puntos) **(i)** Determina el dominio de holomorfía de la función $f(z) = \sqrt{|xy|}$ para $z = x + yi$ con $x, y \in \mathbb{R}$. **(ii)** Supongamos que $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ es holomorfa. ¿Qué condición tiene que cumplir f para que $g(z) := f(\overline{z})$ sea holomorfa en todo $\mathbb{C}$?

4. (0.5 puntos) Determina las funciones holomorfas $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ que verifican $f(z^2) = f(z)$ para todo $z \in \mathbb{C}$.

5. (0.5 puntos) ¿ Qué funciones $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C} \setminus \{0\})$ verifican que $\lim_{z\to 0} zf(z) = 3$ y $\lim_{z\to\infty} f(z) = 5$?

6. (0.6 puntos) ¿Tiene primitiva la función $f(z) = \dfrac{\cos(2\pi z)}{z(z-1)}$ en el abierto $U = \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$? ¿Y en el abierto $\mathbb{C} \setminus [0, 1]$?

7. (0.6 puntos) **(i)** Calcula $\displaystyle\int_\gamma \frac{1}{z}\,dz$ siendo $\gamma(t) = (t + 1)e^{it}$, para $t \in [0, 2\pi]$. **(ii)** Considera un disco abierto $D(z_0, r) \subset \mathbb{C}$ y una función f holomorfa en este disco. Calcula para todo $k \in \mathbb{Z}$ y $0 < s < r$,

$$\int_0^{2\pi} f(z_0 + se^{it})\, e^{ikt}\, dt.$$

8. (0,4 puntos) Calcula $\displaystyle\int_{|z|=1} z^2 \sin\frac{1}{z}\,dz$. (El camino que parametriza $|z| = 1$ se considera simple con orientación positiva).

9. (1 punto) **(i)** Halla los términos $a_{-2}, a_{-1}, a_0, a_1, a_2$ de la serie de Laurent de $f(z) = \dfrac{1}{e^z - 1}$ en $D(0, 2\pi) \setminus \{0\}$. ¿Podrías dar una expresión general para el término a_k con $k \in \mathbb{Z}$ en función de los anteriores a_{k-1}, a_{k-2},....? **(ii)** Calcula la integral $\displaystyle\int_{|z|=3\pi} \frac{z^2}{e^z - 1}\,dz$.

10. (1 punto) Calcula la integral $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{1 + x^4}\,dx$ utilizando el teorema de Cauchy de los residuos.

11. (0.5 puntos) Determina el número de soluciones de la ecuación $z^4 - 6z + 3 = 0$ en la corona $C = \{z \in \mathbb{C} : 1 < |z| < 2\}$.

12. (0.5 puntos) **(i)** Sea $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorfa tal que $Ref(z)$ tiene un máximo relativo en cierto $z_0 \in \mathbb{C}$. ¿Cómo ha de ser entonces f? **(ii)** Si $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es armónica y tiene un máximo relativo en $z_0 = (x, y) \in \mathbb{R}^2$, ¿Cómo ha de ser entonces u?