Análisis Matemático para Estadística

Hoja 1. Resultados básicos

1. Describe el conjunto de puntos del plano complejo que cumplen la ecuación:
   (a) $\operatorname{Im}(z+5i)=0$; (b) $\operatorname{Re}(z+3-2i)=1$.

2. Describe el conjunto de puntos del plano complejo que cumplen la ecuación:
   (a) $|z+1+i|=\sqrt{2}$; (b) $|z-1|=|z+2+i|$.

3. Sean $z,\ w\in\mathbb{C}$. Demostrar lo siguiente:
   (a) $|z-w|\geq \big||z|-|w|\big|$.
   (b) Si $|z+w|=|z-w|$ entonces $w=0$ ó z/w es imaginario puro (es decir, $\operatorname{Re}(z/w)=0$).
   (c) $|z-w|^2+|z+w|^2=2(|z|^2+|w|^2)$ (Igualdad del paralelogramo).

4. Demostrar que $|\operatorname{Re}(z)|+|\operatorname{Im}(z)|\leq\sqrt{2}|z|$ para todo $z\in\mathbb{C}$.

5. Encontrar la parte real e imaginaria de
$$\frac{1+i}{3-2i},\quad \frac{2+i}{2-i},\quad \frac{(1-i)^{18}}{(1+\sqrt{3}\,i)^{10}}\quad \text{y}\quad \frac{(3+8i)^2}{(1+i)^{10}}.$$

6. Dados los vectores $\vec{u}=(-5,3)\in\mathbb{R}^2$ y $\vec{v}=(4,1)\in\mathbb{R}^2$, Encontrar:
   a) El vector de $\mathbb{R}^2$ que resulta de girar $\vec{u}$ un ángulo de 90° en sentido contrario a las agujas del reloj.
   b) El vector de $\mathbb{R}^2$ que resulta de girar $\vec{v}$ un ángulo de 30° en el sentido de las agujas del reloj.

7. Calcular y representar en el plano complejo las raíces cúbicas de -1, i, 8 y $1+i$.

8. Calcular y representar en el plano complejo las raices cuartas de -1 y $8+8\sqrt{3}\,i$ y las raices cuadradas de $1+i$ y $(1-i)^{-1}$.

9. Demostrar que si z es una raíz n-ésima de la unidad distinta de 1 entonces
$$1+z+\cdots+z^{n-1}=0.$$

10. Deduce las siguientes identidades trigonométricas:
$$1+\cos\alpha+\cos 2\alpha+\cdots+\cos n\alpha=\frac{\cos(n\alpha/2)\sin((n+1)\alpha/2)}{\sin(\alpha/2)}$$
$$\sin\alpha+\sin 2\alpha+\cdots+\sin n\alpha=\frac{\sin(n\alpha/2)\sin((n+1)\alpha/2)}{\sin(\alpha/2)}$$
donde α es un ángulo tal que $\sin(\alpha/2)\neq 0$.

11. Demuestra la **Identidad de Lagrange**:
$$\left|\sum_{k=1}^{n} z_k w_k\right|^2=\left(\sum_{k=1}^{n}|z_k|^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n}|w_k|^2\right)-\sum_{k<j}|z_k\overline{w_j}-z_j\overline{w_k}|^2$$
y deduce la desigualdad de Cauchy-Schwarz:
$$\left|\sum_{k=1}^{n} z_k w_k\right|^2\leq\left(\sum_{k=1}^{n}|z_k|^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n}|w_k|^2\right).$$

12. Sea
$$g(x,y)=\begin{cases}\frac{xy}{x^2+2y^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0),\\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0),\end{cases}$$
y $h(x,y)=\sqrt{|x|}\,y^2$. Determinar en qué puntos es continua la función $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ dada por $f(x+iy)=g(x,y)+h(x,y)i$.

13. Determinar el disco de convergencia de las siguientes series de potencias:

$$(a)\ \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}z^n \quad (b)\ \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}z^{2n+1} \quad (c)\ \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}z^{2n}.$$

$$(d)\ \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(3+4i)^n}{(1+\frac{2i}{n})^{n^3}}(z-i)^n \quad (e)\ \sum_{n=0}^{\infty}(\sqrt[n]{n}-1)^n(z+3i)^n$$

$$(f)\ \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\log n+i)}{(1+i)^n}(z-1+2i)^n \quad (g)\ \sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^3}{(1+2i)^n}(z-1)^n$$

$$(h)\ \sum_{n=0}^{\infty}(2n+a^n)(z-i)^n \text{ con } a>0, \quad (i)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(3+i)^n}z^{2n}.$$

$$(j)\ \sum\frac{1}{n-4i}z^{2n}, \quad (k)\sum\frac{1}{2^n i}z^{n!}.$$

14. Encuentra todos los valores de $\log 1$, $\log i$, $\log(-i)$, $\log(-1+\sqrt{3}i)$ y $\log(1+i)$.

15. (a) Demostrar que $\operatorname{Log}(1+i)^2 = 2\operatorname{Log}(1+i)$, pero $\operatorname{Log}(-1+i)^2 \neq 2\operatorname{Log}(-1+i)$.
(b) En general, ¿qué relación hay entre $\operatorname{Log}(zw)$ y $\operatorname{Log} z + \operatorname{Log} w$?
(c) Encontrar una condición necesaria y suficiente para que $\operatorname{Log}(zw) = \operatorname{Log} z + \operatorname{Log} w$.

16. Dado $w \in \mathbb{C}$, demostrar que las soluciones $z \in \mathbb{C}$ de la ecuación $\cos z = w$ son los posibles valores de $-i\log[w \pm \sqrt{w^2-1}]$. ¿Está la función $\cos z$ acotada en $\mathbb{C}$?

17. Dado $w \in \mathbb{C}$, demostrar que las soluciones $z \in \mathbb{C}$ de la ecuación $\operatorname{sen} z = w$ son los posibles valores de $-i\log[iw \pm \sqrt{1-w^2}]$. ¿Está la función $\sin z$ acotada en $\mathbb{C}$?

18. Resolver las ecuaciones (a) $\cos z = i$; (b) $e^{iz} = 4i$.

19. Comprueba las siguientes versiones complejas de conocidas identidades reales:
a) $\operatorname{sen}^2 z + \cos^2 z = 1$.
b) $\operatorname{sen}(z+w) = \operatorname{sen} z \cdot \cos w + \cos z \cdot \operatorname{sen} w$.
c) $\cos(z+w) = \cos z \cdot \cos w - \operatorname{sen} z \cdot \operatorname{sen} w$.

20. Comprueba que, si $z = x+iy \in \mathbb{C}$, entonces
a) $\operatorname{sen} z = \operatorname{sen} x \cosh y + i\cos x \operatorname{senh} y$.
b) $|\operatorname{sen} z|^2 = \operatorname{senh}^2 y + \operatorname{sen}^2 x$.
c) $\cos z = \cos x \cosh y - i \operatorname{sen} x \operatorname{senh} y$.
d) $|\cos z|^2 = \operatorname{senh}^2 y + \cos^2 x$.

21. Encontrar la parte real e imaginaria de e^{2+i}, $\operatorname{sen}(1+i)$, e^{3-i} y $\cos(2+3i)$.

22. Demostrar que las funciones $f(z) = z$ y $f(z) = z^2$ son enteras. Estudiar en qué subconjuntos de $\mathbb{C}$ son derivables la funciones $f(z) = \overline{z}$, $f(z) = |z|$, $f(z) = |z|^2$, $f(z) = \operatorname{Re} z$, $f(z) = \operatorname{Im} z$, $f(z) = |xy|^{1/2}$, (siendo $z = x+yi$ con $x, y \in \mathbb{R}$),.

23. (i) Estudiar en qué subconjuntos de $\mathbb{C}$ son derivables las funciones $f(z) = |xy|^{1/2}$, $f(z) = (xy)^{2/3}$, y $f(z) = |x| + |y|i$, para $z = x+yi$. (ii) Hallar los valores $a, b, c \in \mathbb{R}$ para los cuales la función $f(z) = az^2 + b\overline{z}z + c\overline{z}^2$ es entera.

24. Consideramos $D \subset \mathbb{C}\setminus\{0\}$ abierto y $f : D \to \mathbb{C}$ holomorfa, $f(x+yi) = u(x,y)+iv(x,y)$, con $u(x,y) = \operatorname{Re}(f(x+yi))$, $v(x,y) = \operatorname{Im}(f(x+yi))$. Para $r > 0$ y $\theta \in \mathbb{R}$, consideramos $\widetilde{u}(r,\theta) = u(r\cos\theta, r\sin\theta)$ y $\widetilde{v}(r,\theta) = v(r\cos\theta, r\sin\theta)$ (que estarán definidas en un abierto de $\mathbb{R}^2$). Deduce la siguiente fórmula para las ecuaciones de Cauchy-Riemann en forma polar:

$$\frac{\partial\widetilde{u}}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial\widetilde{v}}{\partial\theta}, \qquad \frac{\partial\widetilde{v}}{\partial r} = -\frac{1}{r}\frac{\partial\widetilde{u}}{\partial\theta}.$$

25. ¿Qué números complejos verifican la igualdad

$$|z+w| = |z| + |w|?$$

26. Estudiar si las siguientes sucesiones son convergentes

$$a)\ \left\{-i+\frac{(-i)^n}{2n+i}\right\},\quad b)\ \{-1+i^n\},\quad c)\ \left\{\frac{n}{2in+sen\ n}\right\}.$$

27. Para cada z $\in \mathbb{C}$, estudia si existe $\lim\limits_{n\to\infty} z^n$.

28. Estudiar la convergencia y la convergencia absoluta de las siguientes series:

$$\text{a)}\ \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1+i)^{2n}}{n!},\quad \text{b)}\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(3i)^n}{n^2},\quad \text{c)}\ \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2i)^n+1},\quad \text{d)}\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{i^n}{n},\ \text{e)}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{i}{n},\quad \text{f)}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n-i}.$$

29. Justifica que la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{\sqrt{n}}$ converge y que el producto de Cauchy de ella por sí misma no converge.

30. Estudiar la continuidad de las funciones:

$$(a)\quad f(z)=\begin{cases}\frac{\overline{z}}{z} & \text{si } z\neq 0\\ 1 & \text{si } z=0.\end{cases},\quad (b)\quad f(z)=\begin{cases}\frac{(\overline{z})^2}{z} & \text{si } z\neq 0\\ 0 & \text{si } z=0.\end{cases}$$

31. a) Sea f una función holomorfa en un conjunto abierto y conexo U de $\mathbb{C}$, verificando que su parte imaginaria es constante, probar que f es constante en U.

    b) ¿Pueden ser holomorfas a la vez una función no constante y su conjugada en un conjunto abierto y conexo de $\mathbb{C}$?

32. a) Sea f una función holomorfa en un conjunto abierto y conexo U de $\mathbb{C}$, verificando que su módulo es constante, probar que f es constante en U.

    b) Sean f y g funciones holomorfas en un abierto conexo U verificando que $|f(z)|=|g(z)|$ para todo $z\in U$. Probar que existe $\theta\in[-\pi,\pi)$ tal que $f(z)=e^{i\theta}g(z)$ para todo $z\in U$.

33. Sean U un abierto conexo de $\mathbb{C}$, f una función analítica en U no constante. Probar que la función f tiene a lo sumo una cantidad finita de ceros en cada compacto de U.

34. Sean $f,g:D\to\mathbb{C}$ funciones analíticas en un dominio $D\subset\mathbb{C}$ (es decir, abierto y conexo) tales que para todo $z\in D$ se verifica que $f(z)g(z)=0$, Demostrar que $f\equiv 0$ ó $g\equiv 0$ en D.

35. Demostrar que no existe ninguna función analítica en $D(0,2)$ con la propiedad de que,

$$f\left(\frac{1}{n}\right)=f\left(-\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{n^3}\quad \text{para todo } n\in\mathbb{N}.$$

36. Determinar qué funciones f analíticas en $\mathbb{C}$ verifican una de las siguientes condiciones:

    a) $f'(z)=f(z)$ para todo $z\in\mathbb{C}$.

    b) $f(z+w)=f(z)\cdot f(w)$ para todo $z,w\in\mathbb{C}$.

37. Estudiar la existencia de los siguientes límites:

    a) $\lim\limits_{z\to 0} z\sin\frac{1}{z}$.

    b) $\lim\limits_{z\to 0} e^{-\frac{1}{z^2}}$. Indicación: considerar la sucesión $z_n=\frac{1}{n}i$.

38. Calcula la serie de Taylor en el cero de

    $a)\ f(z)=\dfrac{1}{1+z^3}$.

    $b)\ h(z)=\operatorname{Log}\dfrac{1+z}{1-z}$.

39. Probar que no se verifica un análogo al teorema del valor medio para funciones con valores complejos. Considera la función $h(t)=\cos t+i\sin t,\ \ t\in[0,2\pi]$.

40. Probar que no se verifica un análogo a la regla de L' Hôpital del tipo $\left[\frac{0}{0}\right]$ para funciones de variable real con valores complejos. Considerar las funciones

$$f(t) = \begin{cases} t + t^2 e^{i\frac{1}{t^2}} & \text{si } t \neq 0 \\ 0 & \text{si } t = 0. \end{cases}$$

y $g(t) = t$. (La variable t es real).

Análisis Matemático para Estadística

Hoja 2. Resultados básicos

1. Evaluar la integral $\int_\gamma \frac{1}{z} dz$, donde γ es el segmento que va de 1 a i. ¿Y si γ es cualquier otro camino incluido en $\mathbb{C} \setminus \{x + yi : x \leq 0,\ y = 0\}$ con punto inicial 1 y punto final i?

2. Calcular la integral $\displaystyle\int_\gamma \operatorname{re} z\, dz$ y $\displaystyle\int_\gamma \operatorname{Im} z\, dz$ siendo $\gamma(t)$ el camino orientado positivamente que recorre el frontera del cuadrado de vértices $(0,0)$, $(1,0)$, $(1,1)$, $(0,1)$.

3. Consideremos el camino γ que recorre media circunferencia de centro 0 y radio 1 desde 1 a -1. Demuestra que $\left| \displaystyle\int_\gamma \frac{e^z}{z}\, dz \right| \leq \pi e$.

4. Sea f una función holomorfa en $D(0,1)$ que verifica que para cada $n \in \mathbb{N}$
$$\int_\gamma \frac{f(z)}{z^n} dz = 2\pi i$$
donde γ es la circunferencia de centro cero y radio $\frac{1}{2}$ orientada positivamente. Calcula dicha función.

5. Sea
$$f(z) = \begin{cases} \frac{sen z}{z} & \text{si } z \neq 0 \\ 1 & \text{si } z = 0. \end{cases}$$
Probar que f es holomorfa en $\mathbb{C}$ y obtener la serie de Taylor de la función
$$h(z) = \int_{[0,z]} f(w) dw$$
en el punto cero.

6. Encuéntrese el valor de las siguientes integrales (los caminos se consideran con orientación positiva y recorridos una sóla vez, es decir, simples):

   a) $\displaystyle\int_\gamma \frac{1}{z}\, dz$, donde $\gamma(t) = \cos t + 2i \operatorname{sen} t, \quad 0 \leq t \leq 2\pi$.

   b) $\displaystyle\int_\gamma \frac{1}{z^2}\, dz$, donde $\gamma(t) = \cos t + 2i \operatorname{sen} t, \quad 0 \leq t \leq 2\pi$.

   c) $\displaystyle\int_{|z-1|=1} \frac{1}{z^2-1}\, dz$ *d)* $\displaystyle\int_{|z|=2} \frac{z^2}{z-1}\, dz$ *e)* $\displaystyle\int_{|z|=2} \frac{z^2-1}{z^2+1}\, dz$ *f)* $\displaystyle\int_{|z|=1} \frac{\operatorname{sen} e^z}{z}\, dz$.

7. Calcular el valor de las siguientes integrales (los caminos se consideran con orientación positiva y recorridos una sóla vez):

   a) $\displaystyle\int_{|z|=2} \frac{dz}{z^2-1}$; *b)* $\displaystyle\int_{|z|=2} \frac{e^z}{z^2(z-1)} dz$; *c)* $\displaystyle\int_{|z|=2} \frac{e^{i\pi z}}{z^4-1} dz$; *d)* $\displaystyle\int_{|z|=1} z^2 \operatorname{sen} \frac{1}{z} dz$.

8. Sea γ la circunferencia de centro 0 y radio 2 parametrizado por $\gamma(t) = 2e^{it}$ con $t \in [0, 2\pi]$. Calcular las siguientes integrales:

   a) $\displaystyle\int_\gamma \frac{e^z}{z^2} dz$; *b)* $\displaystyle\int_\gamma \frac{1}{z^2+z+1} dz$; *c)* $\displaystyle\int_\gamma \frac{1}{z^2+2z-3} dz$; *d)* $\displaystyle\int_\gamma \frac{1}{z^2(z^2+16)} dz$.

9. Discutir los posibles valores de la integral,
$$\int_\gamma \frac{2z^2 - 15z + 30}{z^3 + 6z^2 + 11z + 6} dz,$$
donde γ es un camino cerrado simple orientado positivamente (cuya traza está contenida en el dominio de la función que estamos integrando).

10. Discutir los posibles valores de la integral,

$$\int_\gamma \frac{\operatorname{sen} \frac{\pi}{2} z}{z^3 + z^2 + z + 1} dz,$$

donde γ es un camino cerrado simple orientado positivamente (cuya traza está contenida en el dominio de la función que estamos integrando).

11. Demuestra la **Regla de Leibniz de derivación bajo la integral**: Sean $\Omega \subset \mathbb{C}$ es abierto y γ un camino en $\mathbb{C}$. Si $\varphi : \Omega \times \gamma^* \to \mathbb{C}$ es continua,
(a) probar que la función

$$f(z) = \int_\gamma \varphi(z, \omega) d\omega, \quad z \in \Omega,$$

es continua en Ω. Indicación: Fijado $z_0 \in \Omega$ existe $r > 0$ tal que $\overline{D}(z_0, r) \subset \Omega$ y la función φ es uniformemente continua en el compacto $\overline{D}(z_0, r) \times \gamma^*$ de $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$.
(b) Supongamos que además existe $\dfrac{\partial \varphi}{\partial z}(z, \omega)$, para todo $(z, \omega) \in \Omega \times \gamma^*$ y la aplicación $\dfrac{\partial \varphi}{\partial z} : \Omega \times \gamma^* \to \mathbb{C}$ es continua. Probar que f es derivable en todo punto de Ω y

$$f'(z) = \int_\gamma \frac{\partial \varphi}{\partial z}(z, \omega) d\omega, \quad z \in \Omega.$$

Indicación: Fijado $z_0 \in \Omega$, expresa primero para $h \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$,

$$\frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} - \int_\gamma \frac{\partial \varphi}{\partial z}(z_0, \omega)\, d\omega = \frac{1}{h} \int_\gamma \left(\varphi(z_0 + h, \omega) - \varphi(z_0, \omega) - \int_{[z_0, z_0+h]} \frac{\partial \varphi}{\partial z}(z_0, \omega) dz \right) d\omega =$$

$$= \frac{1}{h} \int_\gamma \left(\int_{[z_0, z_0+h]} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}(z, \omega) - \frac{\partial \varphi}{\partial z}(z_0, \omega) \right) dz \right) d\omega.$$

Después mayora el módulo de esta expresión, teniendo en cuenta que $\frac{\partial \varphi}{\partial z}$ es uniformemente continua en el compacto $\overline{D}(z_0, r) \times \gamma^*$.

12. Sea

$$f(z) = \int_{[0,1]} \frac{1}{1 - wz} dw.$$

Halla el abierto U de $\mathbb{C}$ en el que f es holomorfa. Halla $f(z)$.

13. Supongamos que f es entera y que $\lim\limits_{z \to \infty} \dfrac{f(z)}{z} = 0$. Prueba que f es constante.

14. Sea f entera y supongamos que $|f(z)| \leq M|z|^n$ para valores grandes de $|z|$, para cierta constante M y $n \in \mathbb{N}$. Prueba que $f(z)$ es un polinomio de grado $\leq n$.

15. (i) Demuestra el **Teorema de Morera**: Si $\Omega \subset \mathbb{C}$ es abierto, $f : \Omega \to \mathbb{C}$ es continua y $\displaystyle\int_{\partial \triangle} f(z) dz = 0$ para cada triángulo $\triangle$ en Ω, entonces $f \in \mathcal{H}(\Omega)$.
Indicación: ¿Por qué se puede aplicar el mismo razonamiento que en la demostración vista en clase de existencia de primitivas en abiertos convexos? Si para cada $z_0 \in \Omega$ existe $r > 0$ tal que $z_0 \in D(z_0, r) \subset \Omega$ y construimos en $D(z_0, r)$ una primitiva local de f, ¿qué podemos concluir?
(ii) Deduce que si $\Omega \subset \mathbb{C}$ es abierto y $p \in \Omega$, entonces $\mathcal{H}(\Omega \setminus \{p\}) \cap \mathcal{C}(\Omega) = \mathcal{H}(\Omega)$.

16. (i) Usa el Teorema de Morera para probar el siguiente **Teorema de Weierstrass**: si $f_n : \Omega \to \mathbb{C}$ es holomorfa en un abierto $\Omega \subset \mathbb{C}$ para cada $n \in \mathbb{N}$ y $\{f_n\}_n$ converge uniformemente en los compactos de Ω a una función $f : \Omega \to \mathbb{C}$, entonces f es holomorfa también. Demuestra que además la sucesión de las derivadas de orden $j \in \mathbb{N}$, $\{f_n^{(j)}\}_n$ converge a $f^{(j)}$ (la derivada de órden j de f) uniformemente en cada compacto . Indicación: Para la primera afirmación usa el teorema de Morera. Para la segunda afirmación, usa las desigualdades de Cauchy y el problema 36 de esta misma hoja. Es suficiente que pruebes la convergencia uniforme de $\{f_n^{(j)}\}_n$ a $f^{(j)}$ en cada $\overline{D}(z, r) \subset \Omega$.
(ii) Da un ejemplo donde esto no se cumpla para funciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$.

17. Sean U un abierto conexo de $\mathbb{C}$ y $f : U \to \mathbb{C}$ una función continua en U verificando que $\int_\gamma f = 0$ para todo camino cerrado γ en U. Demostrar que f tiene una primitiva en U.

18. Probar que la función
$$f(z) = \frac{1}{z(z-1)}$$
tiene una primitiva en el abierto $U = \mathbb{C}\backslash[0,1]$. Probar que f no tiene primitiva en el abierto $U = \mathbb{C}\backslash\{0,1\}$.

19. a) Sean $z_0 \in \mathbb{C}$, $r > 0$ y f, $g : D(z_0, r) \to \mathbb{C}$ funciones holomorfas. Supongamos que $f(z_0) = g(z_0) = 0$ y que ni g ni g' se anulan en los puntos de $D(z_0, r)\backslash\{z_0\}$. Demostrar que existen los siguientes límites y
$$\lim_{z\to z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \lim_{z\to z_0} \frac{f'(z)}{g'(z)} \qquad (\textbf{regla de L'Hôpital}).$$
b) Sean $U = \mathbb{C} \setminus \overline{D}(0, R)$ con $R > 0$ y f, $g : U \to \mathbb{C}$ funciones funciones holomorfas no constantes, de forma que ni g ni g' se anulen en ningún punto de U, verificando que existen $\lim\limits_{z\to\infty} f(z) = \lim\limits_{z\to\infty} g(z) = 0$. Probar que existen los siguientes límites y
$$\lim_{z\to\infty} \frac{f(z)}{g(z)} = \lim_{z\to\infty} \frac{f'(z)}{g'(z)} \qquad (\textbf{regla de L'Hôpital}).$$

20. Prueba que las siguientes funciones son enteras si se definen de forma adecuada en los punto donde se anula el denominador:
$$\text{i)}\ \frac{e^z - 1 - z}{z^2}; \qquad \text{ii)}\ \frac{\sin(\pi z)}{z^3 - z}; \qquad \text{iii)}\ \frac{\sin(\pi z^2)}{\sin(\pi z)}.$$

21. Calcular $\int_\gamma f$ siendo γ la poligonal que une los puntos: $-2i,\ -1+i,\ i,\ 2$, en ese orden, y $f(z) = \frac{1}{z}$.

22. Considera $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ una función entera no constante. Utiliza el teorema de Liouville para demostrar que $f(\mathbb{C})$ es denso en $\mathbb{C}$.

23. Una función real u definida en un abierto Ω de $\mathbb{R}^2$ y con valores en $\mathbb{R}$ es armónica si u es de clase C^2 (es decir, tiene derivadas parciales continuas hasta orden 2) en Ω y
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,$$
en Ω. Demuestra que si $f : \Omega \to \mathbb{C}$ es una función holomorfa en Ω, entonces $u = \mathrm{re}(f)$ y $v = \mathrm{Im}(f)$ son armónicas.

24. Prueba que todo función armónica $u : \Omega \to \mathbb{R}$ (Ω abierto de $\mathbb{C}$) con derivadas parciales continuas de orden 2 es localmente la parte real de una función holomorfa: más aún, para todo $z_0 \in \Omega$, si $r > 0$ es tal que $D(z_0, r) \subset \Omega$ existe una función $f : D(z_0, r) \to \mathbb{C}$ holomorfa tal que $u = \mathrm{re}(f)$ en $D(z_0, r)$. En este caso, se llama conjugada armónica de u a $v = \mathrm{Im}(f)$. ¿Es única? Si no lo es, ¿en qué se diferencian dos conjugadas armónicas?

25. Muestra que $u(x, y) = x^3 - 3xy^2$ es armónica. ¿Podrías dar una conjugada de u?

26. Demuestra que si $\{K_n\}$ es una sucesión encajada de compactos de $\mathbb{C}$, es decir, $K_n \supseteq K_{n+1}$ para todo n natural, y cada uno de ellos es no vacío, entonces $\cap_n K_n \neq \emptyset$.

27. En cada uno de los casos siguientes, halla la función $\mathrm{ind}_\Gamma(z)$ para el ciclo $\Gamma = \{\gamma_1, \gamma_2\}$ e indica si Γ es homólogo a 0 en $\mathbb{C} \setminus \{0\}$:

(i) $\gamma_1 : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$, $\gamma_1(t) = 2e^{it}$ y $\gamma_2 : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$, $\gamma_2(t) = i + 2e^{-it}$;

(ii) $\gamma_1 : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$, $\gamma_1(t) = 2e^{it}$ y $\gamma_2 : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$, $\gamma_2(t) = i + 2e^{it}$;

(iii) $\gamma_1 : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$, $\gamma_1(t) = e^{it}$ y $\gamma_2 : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$, $\gamma_2(t) = 2e^{it}$;

(iv) $\gamma_1 : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$, $\gamma_1(t) = e^{it}$ y $\gamma_2 : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$, $\gamma_2(t) = 2e^{-it}$;

(v) $\gamma_1 : [0, 4\pi] \to \mathbb{C}$, $\gamma_1(t) = e^{it}$ y $\gamma_2 : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$, $\gamma_2(t) = 2e^{-it}$.

28. Demuestra que $\displaystyle\int_0^{\pi} e^{\cos t}\cos(\sin t)\,dt = \pi$ calculando la integral $\displaystyle\int_\gamma e^z/z\,dz$, donde γ es la circunferencia de centro 0 y radio 1.

29. Sea γ una curva cerrada simple con orientación positiva que recorre la elipse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$. Utiliza la integral $\int_\gamma \frac{1}{z}dz$ para obtener la igualdad:
$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{a^2\cos^2 t + b^2\sin^2 t}\,dt = \frac{2\pi}{ab}.$$

30. Considera un disco abierto $D(z_0,r)\subset\mathbb{C}$ y una función f holomorfa en este disco. Calcula para todo $n\in\mathbb{Z}$ y $0<s<r$,
$$\int_0^{2\pi} f(z_0+se^{it})\,e^{int}\,dt.$$

31. Sea γ un camino en $\mathbb{C}$ y $f:\gamma^*\to\mathbb{C}$ continua, siendo γ^* la traza de γ.
(i) Comprueba que la igualdad $\displaystyle\int_\gamma \mathrm{re}(f) = \mathrm{re}\left(\int_\gamma f\right)$ no es cierta en general.
(ii) Comprueba que la desigualdad $\displaystyle\left|\int_\gamma f\right| \le \int_\gamma |f|$ no es cierta en general.

32. Probar que no existe una función holomorfa definida en el disco unidad abierto $D(0,1)$ que se extienda con continuidad a su adherencia $\overline{D}(0,1)$ y tal que $f(z)=\frac{1}{z}$ para $z\in\partial D(0,1)$.

33. La función $f(z)=\sin(\frac{1}{z-1})$ se anula en una sucesión de puntos que converge al punto 1. ¿Entra esto en contradicción con los teoremas de identidad?

34. Supongamos que $\Omega\subset\mathbb{C}$ es un abierto simplemente conexo, y $f:\Omega\to\mathbb{C}$ es holomorfa en Ω.
(i) Prueba que f tiene una primitiva en Ω.
(ii) Si además f no se anula en Ω, prueba que f tiene una determinación holomorfa del logaritmo. Es decir, existe $g:\Omega\to\mathbb{C}$ holomorfa tal que $e^{g(z)}=f(z)$ para todo $z\in\Omega$. Indicación: Considera $h(z)$ una primitiva de la función $\frac{f'(z)}{f(z)}$ para $z\in\Omega$. Comprueba que $\frac{e^{h(z)}}{f(z)}$ es constante en Ω.

35. Considera $\gamma:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}^2$ camino continuo en $\mathbb{R}^2$ y C^1 a trozos con componentes $\gamma=(\gamma_1,\gamma_2)$. Para una función continua $f:\gamma^*\to\mathbb{R}^2$ (γ^* la traza de γ) con componentes $f=(f_1,f_2)$ se definió en la asignatura de Cálculo Integral la integral de linea como
$$\int_\gamma (u,v) = \int_\alpha^\beta \langle (u\gamma(t)), v(\gamma(t)), (\gamma_1'(t),\gamma_2'(t))\rangle\,dt,$$
siendo $\langle\cdot,\cdot\rangle$ el producto escalar usual en $\mathbb{R}^2$. Interpretando γ como un camino en $\mathbb{C}$ y f como una función de variable compleja, expresa la integral de f a lo largo de γ como una suma de integrales de linea.

36. (i) Demuestra que la función distancia a un conjunto es 1-Lipschitz: es decir, si $A\subset\mathbb{C}$ y definimos $d:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$, $d(z)=\mathrm{dist}(z,A)=\inf\{|z-a|:\ a\in A\}$, entonces $|d(z)-d(w)|\le|z-w|$ para todo $z,w\in\mathbb{C}$.
(ii) Comprueba que $\overline{A}=\{z\in\mathbb{C}:\ \mathrm{dist}(z,A)=0\}$.
(iii) Deduce que si $K\subset\Omega\subset\mathbb{C}$, con K compacto y Ω abierto, existe $r>0$ tal que $\mathrm{dist}(z,\partial\Omega)\ge r$ para todo $z\in K$.
(iv) Demuestra que si $K\subset\mathbb{C}$ es compacto, entonces $K+\overline{D}(0,s)=\{z+w:\ z\in K,\ w\in\overline{D}(0,s)\}$ es compacto para todo $s>0$.

37. Si $\Omega\subset\mathbb{C}$ es un abierto, demuestra que cada componente conexa de Ω es un abierto.

Análisis Matemático para Estadística.

Hoja 3. Teorema de los Residuos de Cauchy y aplicaciones

1. ¿Convergen en algún abierto no vacío de $\mathbb{C}$ las siguientes series de Laurent?

$$a)\ \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{n^2+1} z^n, \qquad b)\ \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{n^2!}(z+i)^n, \qquad c)\ \sum_{n=1}^{\infty} -n(z-i)^{-n}.$$

2. Encuentra la serie de Laurent de $\dfrac{1}{z(z+1)}$ centrada en $z_0 = 0$ y en la corona $1 < |z| < \infty$.

3. Encuentra la serie de Laurent de $\dfrac{1}{z(z-1)(z-2)}$ centrada en $z_0 = 0$ en las siguientes coronas:
   a) $0 < |z| < 1$,
   b) $1 < |z| < 2$.

4. Encuentra la serie de Laurent de $\dfrac{\sinh z^2}{z}$ centrada en el punto $z_0 = 0$.

5. Describe las singularidades de $\dfrac{1}{\cos(1/z)}$.

6. Determina el orden de los polos de las siguientes funciones:
   a) $\dfrac{e^z(z-3)}{(z-1)(z-5)}$, b) $\dfrac{e^z-1}{z^3}$, c) $\dfrac{\cos z}{1-z}$, d) $\dfrac{1}{z^3} + h(z)$, con $h \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$, e) $\dfrac{\cos z - 1}{z^3}$.

7. Identifica las singularidades de

$$f(z) = \frac{z}{(e^z-1)(e^z-2)}$$

   clasificándolas en evitables, esenciales o polos (indicando el orden de los mismos cuando proceda).

8. Evaluar la integral $\displaystyle\int_\gamma z^n e^{\frac{1}{z}} dz$, donde $n \in \mathbb{Z}$ y γ es la circunferencia de radio 1 centrada en 0 recorrida una vez en sentido contrario a las agujas del reloj.

9. Calcular los residuos de las siguientes funciones en los puntos indicados:
   a) $\dfrac{1}{z^2-1}$ en $z = 1$; b) $\dfrac{z}{z^2-1}$ en $z = 1$; c) $\dfrac{e^z-1}{z^2}$ en $z = 0$; d) $\dfrac{e^z-1}{z}$ en $z = 0$.

10. Encuentra los términos a_{-2}, a_{-1}, a_0, a_1, a_2, a_3 de la serie de Laurent de $f(z) = \dfrac{1}{e^z-1}$ centrada en $z = 0$ y en la corona $0 < |z| < 2\pi$.

11. Dada la función $f(z) = \cot z = \dfrac{\cos z}{\operatorname{sen} z}$:
    a) Determina las singularidades que tiene f y de qué tipo son.
    b) Calcula los términos a_{-2}, a_{-1}, a_0, a_1, a_2, a_3 de la serie de Laurent de f centrada en $z_0 = 0$ en la corona $0 < |z| < \pi$.

12. Calcular $\displaystyle\int_\gamma \frac{1}{z(z-1)(z-2)}\, dz$, donde γ es la circunferencia de centro 0 y radio 3/2 recorrida una vez en sentido contrario a las agujas del reloj utilizando el teorema de Cauchy de los residuos.

13. Calcular la integral $\displaystyle\int_\gamma \frac{1+z}{1-\cos z}\, dz$, donde γ es la circunferencia de centro 0 y radio 7 recorrida una vez en sentido contrario a las agujas del reloj utilizando el teorema de Cauchy de los residuos.

14. Se considera la función

$$f(z) = \frac{\cos(\pi z)}{z^2 \operatorname{sen}(\pi z)}.$$

    Se pide:
    a) Probar que f tiene un polo de orden 3 en 0 y de orden 1 en cada $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$.
    b) Calcular la parte principal de la serie de Laurent de f centrada en $z = 0$ en la corona $0 < |z| < 1$.
    c) Calcular el residuo de f en cada uno de sus polos.

d) Calcular $\int_\gamma f(z)dz$, siendo γ el círculo de centro 0 y radio $\frac{5}{2}$ utilizando el teorema de Cauchy de los residuos.

15. Calcular

$$\text{a)} \int_0^{2\pi} \frac{1}{2+\cos\theta} d\theta, \qquad \text{b)} \int_0^{\pi} \frac{d\theta}{(a+b\cos\theta)^2}, \text{ con } 0<b<a.$$

16. Calcular

$$\text{a)} \int_0^{\infty} \frac{\cos ax}{1+x^2}\, dx, \text{ con } a \neq 0, \qquad \text{b)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2-2x+4}\, dx,$$

$$\text{c)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{1+x^4}\, dx, \qquad \text{d)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{(a^2+x^2)^2}\, dx, \text{ con } a>0.$$

17. Demostrar que

$$\int_0^{\infty} \frac{x \operatorname{sen} x}{x^4+1}\, dx = \frac{\pi}{2} e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}} \operatorname{sen} \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

18. Calcular

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos x}{x^4+1}\, dx.$$

19. Sean U un abierto, $z_0 \in U$, $f \in \mathcal{H}(U \backslash \{z_0\})$ y supongamos que f tiene en z_0 un polo de orden 1. Demostrar que

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\gamma_\varepsilon} f = \pi i \operatorname{Res}(f, z_0),$$

siendo γ_ε el camino definido por

$$\gamma_\varepsilon : t \in [0,\pi] \mapsto \gamma(t) = z_0 + \varepsilon e^{it}.$$

20. Calcular

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx.$$

21. Encontrar el valor principal de

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{x^3+1}\, dx.$$

22. Prueba que no existe ninguna función holomorfa en $D(0,1)$ salvo la identicamente nula tal que exista $0<a<1$ con $|f(1/n)| \leq a^n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Indicación: Por continuidad $f(0)=0$ y si f no es identicamente nula, f tiene en $z=0$ un cero de orden k para algún $k \in \mathbb{N}$. Por tanto, podemos expresar f de la forma $f(z) = z^k h(z)$ para una función holomorfa h en $D(0,1)$ tal que $h(0) \neq 0$.

23. a) Si f tiene un polo de orden m en un punto z_0, estudiar qué tipo de singularidad tiene f' en z_0.
b) Si f tiene una singularidad evitable en un punto z_0, estudiar qué tipo de singularidad tiene f' en z_0.
c) Si f tiene una singularidad esencial en un punto z_0, estudiar qué tipo de singularidad tiene f' en z_0.

24. Sean U un abierto de $\mathbb{C}$, $z_0 \in U$, y f una función holomorfa en $U \backslash \{z_0\}$. Probar que $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = \infty$ si y sólo si f tiene un polo en z_0.

25. Sea $p(z)$ un polinomio de grado al menos 2. Comprueba que la suma de los residuos de todos los polos de $\frac{1}{p(z)}$ es 0.

26. a) Sean U un abierto de $\mathbb{C}$, $z_0 \in U$, y f y g funciones holomorfas en $U \backslash \{z_0\}$ verificando que $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = \lim\limits_{z \to z_0} g(z) = \infty$. Probar que existen los siguientes límites y que

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \lim_{z \to z_0} \frac{f'(z)}{g'(z)}$$

(regla de L´Hôpital).

b) Sean U un abierto de $\mathbb{C}$ que contenga al complementario de un disco de centro 0, y f y g funciones holomorfas en U verificando que $\lim\limits_{z\to\infty} f(z) = \lim\limits_{z\to\infty} g(z) = \infty$. Probar que existen los siguientes límites y que

$$\lim_{z\to\infty} \frac{f(z)}{g(z)} = \lim_{z\to\infty} \frac{f'(z)}{g'(z)}$$

(regla de L´Hôpital).

Análisis Matemático para Estadística. Hoja 4

Espacios de Hilbert, series y transformada de Fourier

1. Demostrar que en un espacio pre-Hilbert H se cumple:
   (a) $2\|x\|^2 + 2\|y\|^2 = \|x+y\|^2 + \|x-y\|^2$ (Ley del Paralelogramo).
   (b) $\|x+y\|\|x-y\| \leq \|x\|^2 + \|y\|^2$.
   (c) Si H es real, $\langle x, y\rangle = \frac{1}{4}(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2)$ (Identidad de Polarización Real).
   (d) Si H es complejo, $\langle x, y\rangle = \frac{1}{4}(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 + i\|x+iy\|^2 - i\|x-iy\|^2)$ (Identidad de Polarización Compleja).

2. Consideremos un espacio pre-Hilbert H con norma asociada $\|\cdot\|$, probar:
   a) $|\|x\| - \|y\|| \leq \|x-y\|$, para cada $x, y \in H$.
   b) La función norma y el producto interno son continuas.
   (Indicación: para el producto interno, hay que probar que para cualesquiera $x, y \in H$ y cualesquiera sucesiones $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ de H convergentes respectivamente a x e y, se tiene que $\lim_n \langle x_n, y_n\rangle = \langle x, y\rangle$. Por las propiedades del producto interno, $\langle x_n, y_n\rangle - \langle x, y\rangle = \langle x_n - x, y_n\rangle + \langle x, y_n - y\rangle$.

3. Si H es un espacio pre-Hilbert y $V \subset H$, definimos
$$V^\perp := \{x \in H : x \perp y, \text{ para todo } y \in V\} = \{x \in H : \langle x, y\rangle = 0, \text{ para todo } y \in V\}.$$
   Si $M, N \subseteq H$ y $[M]$ es el subspacio generado por M (es decir, el conjunto de las combinaciones lineales finitas de elementos de M), entonces
   a) $M^\perp$ es un subespacio vectorial cerrado de H.
   b) $M \subseteq N$ implica $N^\perp \subseteq M^\perp$.
   c) $[M]^\perp = M^\perp$.
   d) $\overline{M}^\perp = M^\perp$. (Recuerda la notación: $\overline{A}$ es la adherencia de un subconjunto $A \subset H$).
   e) $\overline{[M]}^\perp = M^\perp$.
   f) Si H es Hilbert separable y M es un subespacio cerrado de H, probar que $H = M \oplus M^\perp$, es decir, para todo $x \in H$ existen unos únicos $u \in M$, $v \in M^\perp$ tales que $x = u + v$. Haz la demostración sólo para el caso H separable, considerando una base ortonormal $\{u_n\}$ en M.
   g) $\overline{[M]} = (M^\perp)^\perp$.

4. Demostrar que si V es un subconjunto ortogonal de elementos no nulos de un espacio pre-Hilbert H, entonces los elementos de V son linealmente independientes.

5. Considera $\mathcal{C}[0,1] = \{f : [0,1] \to \mathbb{R} : f \text{ continua}\}$ y la sucesión (f_n) en $(\mathcal{C}[0,1], \|\cdot\|_2)$, donde $\|\cdot\|_2$ es la norma asociada al producto interno $\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(t)g(t)\,dt$ y
$$f_n(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{1}{2}, \\ n\left(t - \frac{1}{2}\right) & \text{si } \frac{1}{2} \leq t \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{n}, \\ 1 & \text{si } \frac{1}{2} + \frac{1}{n} \leq t \leq 1, \end{cases}$$
   para $n \geq 2$. Prueba que (f_n) es de Cauchy pero no convergente. Por tanto, $(\mathcal{C}[0,1], \|\cdot\|_2)$ no es completo.

6. Recordemos el proceso de ortonormalización de Gram-Schmidt que nos permite obtener una base ortonormal de un espacio vectorial generado por un sistema de vectores linealmente independientes $\{x_1, \ldots, x_n\}$ de un espacio pre-Hilbert H:
$$e_1 = \frac{x_1}{\|x_1\|},$$
$$e_k = \frac{x_k - \sum_{i=1}^{k-1}\langle x_k, e_i\rangle e_i}{\|x_k - \sum_{i=1}^{k-1}\langle x_k, e_i\rangle e_i\|} = \frac{x_k - \sum_{i=1}^{k-1}\langle x_k, e_i\rangle e_i}{\left(\|x_k\|^2 - \sum_{i=1}^{k-1}|\langle x_k, e_i\rangle|^2\right)^{1/2}}.$$
   Entonces el sistema $\{e_1, \ldots, e_n\}$ es ortonormal y $[\{x_1, \ldots, x_n\}] = [\{e_1, \ldots, e_n\}]$.

(a) Dado el sistema de polinomios linealmente independientes $\{1, x, x^2, x^3\}$ de $L^2[-1,1]$, encontrar un sistema ortonornal $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ tal que $[\{1, x, x^2, x^3\}] = [\{e_1, e_2, e_3, e_4\}]$.

(b) Si $\mathcal{P}_2$ es el subespacio vectorial de los polinomios de grado menor o igual que 2 definidos en el intervalo $[-1,1]$, calcula $P_{\mathcal{P}_2}(x^3)$ y la distancia $\operatorname{dist}(x^3, \mathcal{P}_2)$.

7. Calcular la proyección ortogonal $f(x) = e^x$ sobre $E = [u_0, u_1, u_2]$ con $u_n(x) = x^n$ para $n = 0, 1, 2$ en $L^2[-1,1]$ y la distancia de $f(x)$ a E.

8. Si $p(x) = x^2 + \lambda x + \mu$ con $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ es un polinomio mónico de grado 2 y E es el espacio generado por $\{1, x\}$ en $L^2[-1,1]$. Calcular $P_E(p)$, es decir, la proyección ortogonal de p sobre E en $L^2[-1,1]$ y la distancia de p a E en $L^2[-1,1]$.

9. Demostrar que los polinomios $p_1(x) = 5x^4 - 6x^2 + 1$ y $p_2(x) = 4x^3 - 4x$ son ortogonales en $L^2[-1,1]$. Construye a partir de ellos funciones ortonormales $\{f_1, f_2\}$ tales que $[f_1, f_2] = [p_1, p_2]$. Dada la función $f(x) = x^2 - x$, calcula la distancia de f a E, donde $E = [p_1, p_2]$ y $P_E(f)$, la proyección ortogonal de f sobre E.

10. Hacer lo mismo que en el problema anterior para $E = [\operatorname{sen} x, \cos x]$ y $f(x) = e^x$.

11. Acotar el valor de la integral $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{x} \operatorname{sen} x dx$ usando el producto escalar habitual en $\mathcal{C}[0, \frac{\pi}{2}]$.

12. (i) Demostrar que si para cada $n \in \mathbb{N}$, se define

$$c_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \qquad c_n(x) = \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}}, \qquad s_n(x) = \frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}},$$

para todo $x \in [-\pi, \pi]$, entonces la familia $\mathcal{C} = \{c_n : n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\} \cup \{s_n : n \in \mathbb{N}\}$ es un sistema ortonormal en $C[-\pi, \pi]$ y en $L^2[-\pi, \pi]$.

(ii) Demostrar que la familia $\mathcal{F} = \{e_n(x) := \dfrac{e^{inx}}{\sqrt{2\pi}} : n \in \mathbb{Z}\}$ es un sistema ortonormal en $C[-\pi, \pi]$ y en $L^2[-\pi, \pi]$.

13. Considera la función

$$f(x) = \begin{cases} -1, & \text{si } x \in [-\pi, 0] \\ 1, & \text{si } x \in (0, \pi]. \end{cases}$$

(a) Obtener el desarrollo de Fourier de f en $L_2[-\pi, \pi]$ con respecto a las bases ortonormales $\mathcal{C}$ y $\mathcal{F}$ (del ejercicio 12)
(b) Utiliza la igualdad de Parseval para obtener $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$.
(c) Indica si la serie de Fourier converge puntualmente y/o uniformemente a f en $[-\pi, \pi]$.
(d) Obtener el desarrollo de Fourier de $g(x) = |x|$, $x \in [-\pi, \pi]$, con respecto a las bases ortonormales $\mathcal{C}$ y $\mathcal{F}$.

14. Considera la función $f(x) = x$, para $x \in [-\pi, \pi]$. (a) Obtén el desarrollo de Fourier de f con respecto a la base ortonormal $\mathcal{F}$. Demuestra que el desarrollo de Fourier de f en $L^2[-\pi, \pi]$ con respecto a la base ortonormal $\mathcal{C}$ es

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{\sin kx}{k}, \quad x \in [-\pi, \pi].$$

(b) Indica si la serie de Fourier converge puntualmente y/o uniformemente a f en $[-\pi, \pi]$.

15. Considera la función $f(x) = x^2$, para $x \in [-\pi, \pi]$. (a) Obtén el desarrollo de Fourier de f con respecto a la base ortonormal $\mathcal{F}$. Demuestra que el desarrollo de Fourier de f en $L^2[-\pi, \pi]$ con respecto a la base ortonormal $\mathcal{C}$ es

$$\frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{\cos kx}{k^2}, \quad x \in [-\pi, \pi].$$

(b) Indica si la serie de Fourier converge puntualmente y/o uniformemente a f en $[-\pi, \pi]$.

(c) Utiliza la anterior expresión para obtener el valor de la serie numérica $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$.

16. (a) En $L^2[-\pi,\pi]$, calcula los desarrollos en serie de Fourier con respecto a las bases ortonormales $\mathcal{F}$ y $\mathcal{C}$ de

$$f(x)=\begin{cases} x+2\pi & \text{si } -\pi\le x\le 0,\\ x & \text{si } 0<x\le\pi.\end{cases}$$

(b) Usando la identidad de Parseval para f en $L^2[-\pi,\pi]$, obtén de nuevo el valor $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$.

(b) Indica si la serie de Fourier converge puntualmente y/o uniformemente a f en $[-\pi,\pi]$.

17. (a) En $L^2[-\pi,\pi]$, calcula el desarrollo en serie de Fourier con respecto a las bases ortonormales $\mathcal{F}$ y $\mathcal{C}$ de $f(x)=e^x$. (b) Indica si la serie de Fourier converge puntualmente y/o uniformemente a f en $[-\pi,\pi]$.

18. (a) Si $f(x)=\chi_{[-b,b]}(x)$ (con $b>0$), calcula $\widehat{f}$. (b) Encontrar $\widehat{f}(s)$ si $f(x)=\chi_{[-2,0]}(x)+\chi_{[0,2]}(x)+\chi_A(x)$ Siendo $A=\{\pm1,\pm3,\pm4\}$.

19. (a) Si $f(x)=e^{-2\pi a|x|}$, con $a\in\mathbb{C}$ y $\mathrm{Re}(a)>0$, calcula $\widehat{f}$.
(b) Utiliza las propiedades de la transformada de Fourier y el anterior apartado para calcular $\widehat{f}$, siendo $f(x)=e^{4\pi ix}e^{-2\pi|x-\frac{1}{8}|}$.

20. (a) Dada la función $f(x)=e^{-2\pi b|x|}\cos(2\pi ax)$ con $a,b>0$, obtén su transformada de Fourier. (b) Obtén $\widehat{f}(s)$ si $f(x)=e^{-2\pi|x|}\cos^2 2\pi x$.

21. (a) Encontrar $\widehat{f}(s)$ si $f(x)=\frac{x}{(1+x^2)^2}$. (Indicación: buscar una primitiva de f y aplicar la relación que hay entre las transformadas de Fourier de una función y su derivada. Además del teorema de inversión de Fourier puedes deducir que $F[\frac{1}{1+x^2}](s)=\pi e^{-2\pi|s|}$). (b) Indica cómo se obtendría la transformada de Fourier de $f(x)$ utilizando el Teorema de Cauchy de los residuos.

22. Probar que si $f(x)=e^{-2\pi|x|}(\cos(2\pi|x|)+\mathrm{sen}(2\pi|x|))$, entonces $\widehat{f}(s)=\dfrac{4}{\pi(4+s^4)}$.

23. (a) Usa el ejercicio anterior y el teorema de inversión de Fourier para calcular la transformada de Fourier de $g(x)=\dfrac{1}{1+x^4}$. (b) Halla la transformada de Fourier de $g(x)$ utilizando el Teorema de Cauchy de los residuos. Indicación: Considera para cada $R>0$ el camino cerrado que está formado por el segmento de 0 a R, el segmento de 0 a iR y el arco de circunferencia que va de R a iR y haz tender R a infinito. Utiliza
que $\widehat{f}(s)=2\,\mathrm{Re}(\int_0^\infty \frac{1}{1+x^4}e^{-2\pi isx}dx)$.

24. Halla la transformada de Fourier de

$$f(x)=\begin{cases}\cos 3x, & x\in[-\pi,\pi]\\ 0, & \text{en otro caso.}\end{cases}$$

25. Calcula las transformadas de Fourier de las funciones $x\chi_{[-1,1]}(x)$ y $x^2\chi_{[-1,1]}(x)$ utilizando la relación que existe entre la transformada de Fourier de una función y la de su derivada.

26. Utiliza la relación que existe entre la transformada de una función y la de su derivada para obtener $\widehat{f}$ donde

(a) $f(x)=\begin{cases}0 & \text{si } -\infty<x<-1,\\ x+1 & \text{si } -1\le x\le 0,\\ x^2-2x+1 & \text{si } 0<x\le 1,\\ 0 & \text{si } 1<x<\infty.\end{cases}$

(b) $f(x)=\begin{cases}0 & \text{si } -\infty<x\le -2,\\ x^2+4x+4 & \text{si } -2<x\le -1,\\ 2-x^2 & \text{si } -1<x\le 1,\\ x^2-4x+4 & \text{si } 1<x\le 2,\\ 0 & \text{si } 2<x<\infty.\end{cases}$

27. (a) Si $f(x) = e^{-\pi x^2}$, calcula $\widehat{f}$ utilizando la relación que hay entre las transformadas de Fourier de una función y su derivada. Recuerda además que $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi x^2}\, dx = 1$. (b) Halla $\widehat{f}$ utilizando el teorema de Cauchy de los Residuos. Indicación: Para calcular $\widehat{f}(s)$ con $s \in \mathbb{R}$, considera para todo $R > 0$ el camino cerrado que recorre el rectángulo de vértices $-R$, R, $R + si$, $-R + si$ y haz tender R a infinito.

28. Utiliza el teorema de Cauchy de los residuos para obtener la transformada de Fourier de $f(x) = \dfrac{1}{\cosh x}$. Indicación: Considera para todo $R > 0$ el camino cerrado que recorre el rectángulo de vértices $-R$, R, $R + \pi i$, $-R + \pi i$ y haz tender R a infinito.

29. Encuentra la transformada de Fourier de la función:

$$f(x) = \begin{cases} e^x(\cos\sqrt{3}x + \operatorname{sen}\sqrt{3}x) & \text{si } x < 0, \\ e^{-2x} & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$$

30. (a) Demuestra que la convolución $(\chi_{[-b,b]} * \chi_{[-b,b]})(x) = (2b - |x|)\chi_{[-2b,2b]}(x)$ para $b > 0$ y $x \in \mathbb{R}$. (b) Usa lo anterior para deducir la transformada de Fourier de $f(x) := (2b - |x|)\chi_{[-2b,2b]}(x)$.

31. Calcula la transformada de Fourier de la función $f(x) = (1 - x^2)^2\chi_{[-1,1]}(x)$.